

DISCURSO INAUGURAL
LEÍDO EN LA
SOLEMNE APERTURA DEL CURSO ACADÉMICO
DE 1924 A 1925
ANTE EL CLAUSTRO
DE LA
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

POR EL DOCTOR
JOSÉ MUR AINSA

CATEDRÁTICO
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

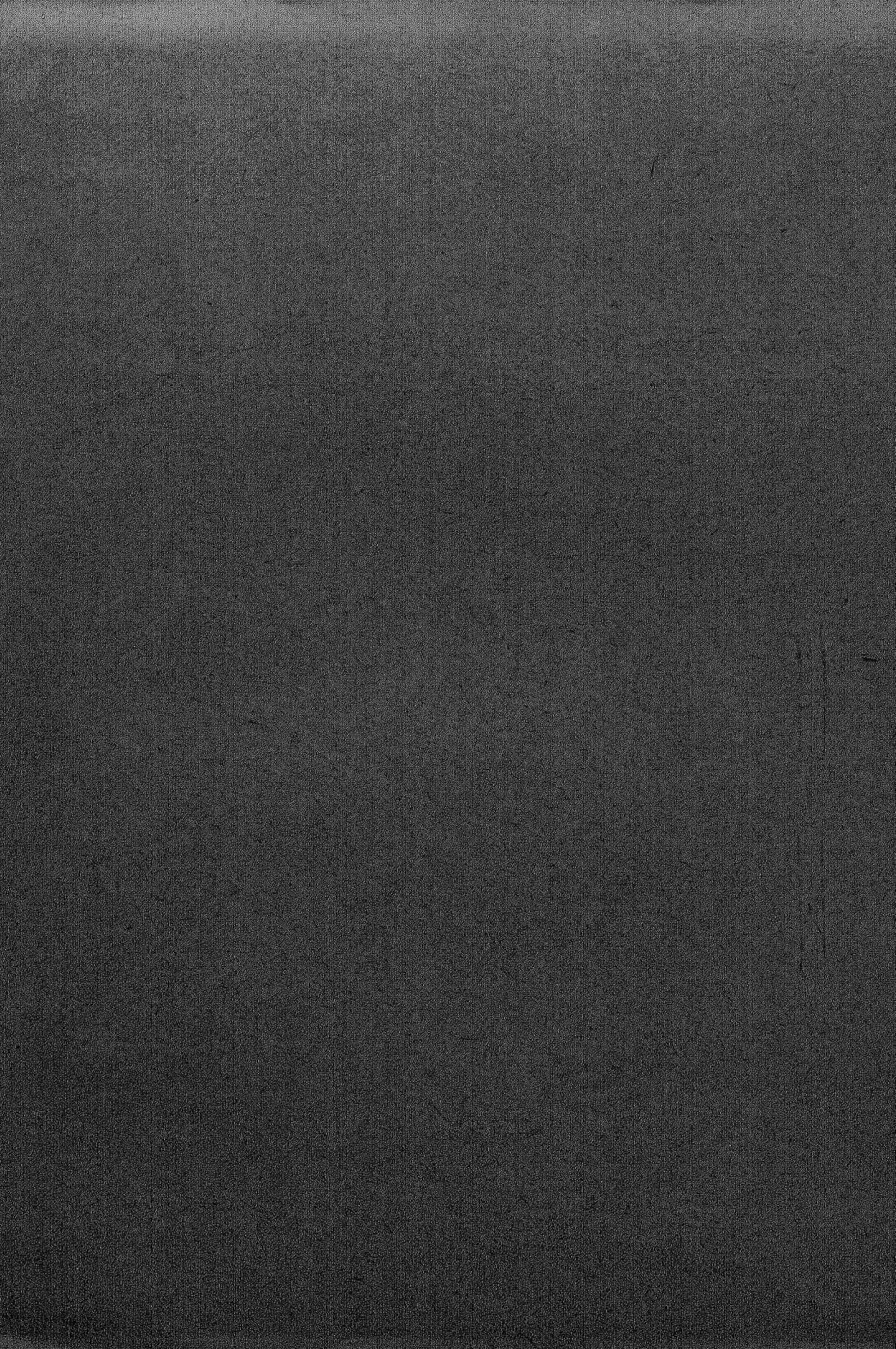


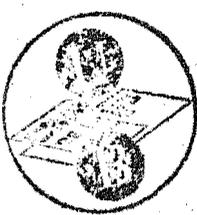
BARCELONA
Núñez y C.^a, S. en C. - S. Ramón, 6
Teléf. 246 A
1924

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA



0701794462





DISCURSO INAUGURAL

DISCURSO INAUGURAL

LEÍDO EN LA

SOLEMNE APERTURA DEL CURSO ACADÉMICO

DE 1924 A 1925

ANTE EL CLAUSTRO

DE LA

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

POR EL DOCTOR

JOSÉ MUR AINSA

CATEDRÁTICO

DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

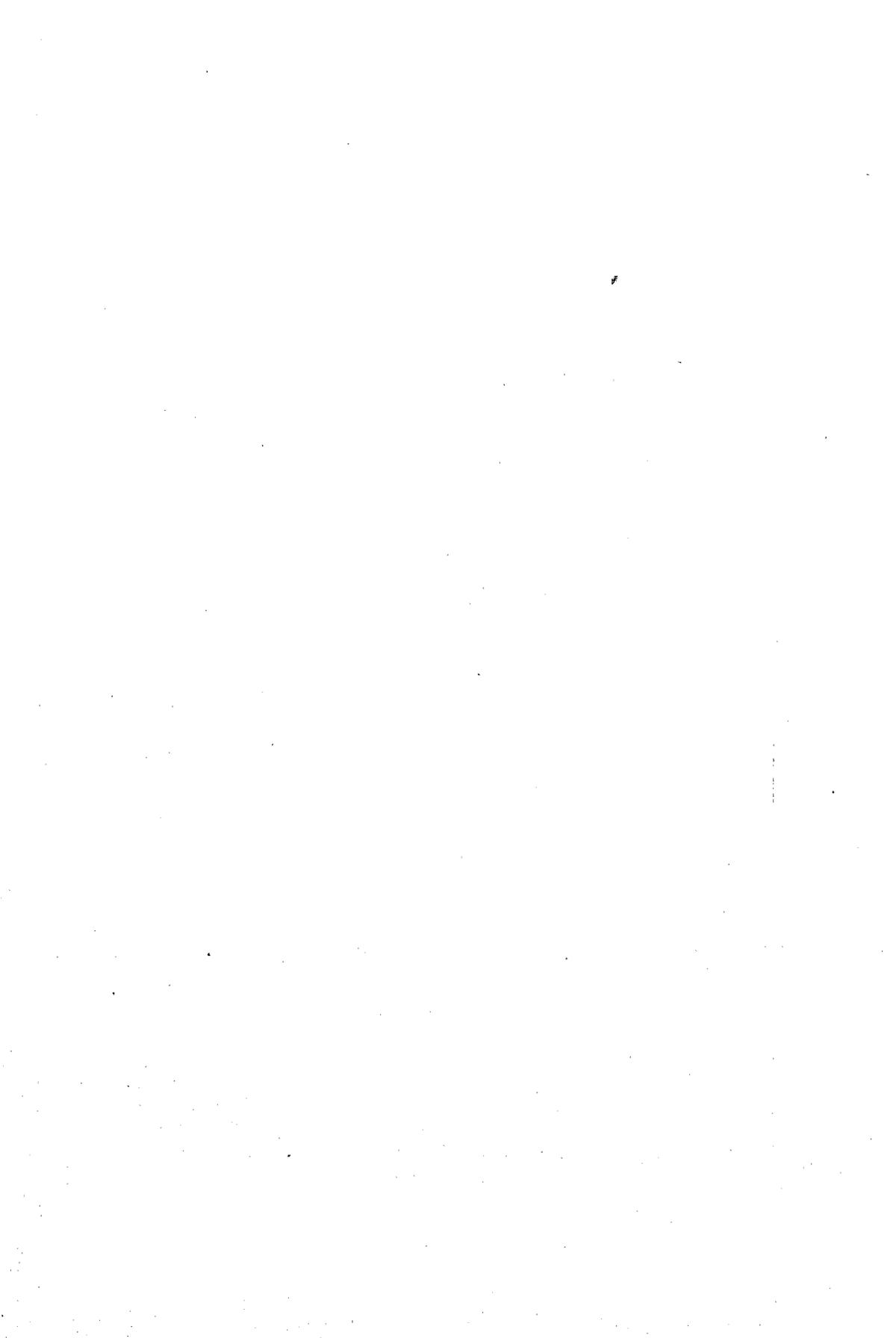


BARCELONA

Núñez y C.^a, S. en C.-S. Ramón, 6

Teléf. 2496 A

1924



EXCMO. SEÑOR,

Señoras, Señores:

Los muertos rigen y gobiernan a los vivos.

AUGUSTO COMTE.



NO extrañéis que la impresión en mí producida por la lectura del *opúsculo* que la Junta administrativa del Hospital Clínico destinó en las postrimerías del último curso a historiar la fecunda labor del Excelentísimo Señor Marqués de Carulla, en aquella casa del dolor, de la caridad y de la ciencia, haya traído a mi memoria esa frase del filósofo positivista, en tan abierta contradicción con sus doctrinas que más bien parece el pensamiento de un espíritu cristiano.

No puede leerse aquel trabajo, en el cual la Junta al rendir un tributo a quien sacrificó su vida por los demás, se duele de haber perdido el alma que durante algunos años la vivificara, sin considerar como un deber primordial en el día de hoy, el de poner nuestro pensamiento en lo alto, pidiendo al Omnipotente el premio a las virtudes de aquel varón ilustre que pasó por la tierra sembrando el bien, realizando una labor benéfica tan sólo hacedera para los espíritus superiores: porque los hombres que han creado el arte, que es la belleza, que han formado la ciencia, que es la verdad, suelen tropezar con grandes obstáculos para realizar el bien; quizá, como dice Cajal, porque la herencia no ha podido forjar todavía en el organismo humano, por medio

de las células germinales, el instrumento necesario para satisfacer ese anhelo del alma ; tal vez, como afirma Christenssen, porque la ética de las colectividades progresa mucho más lentamente que la ética individual.

Entre todas las cosas bellas que nuestra querida ciudad contiene, la que más la honra, la que más la enaltece, es la obra del Hospital Clínico : tal vez porque en aquella casa para devolver la salud a los enfermos, por medio de las operaciones más brillantes y arriesgadas, no se pregunta a nadie la tierra donde ha nacido ; y es que la Caridad, en cuyo nombre se difunde tantos beneficios por toda la Patria y fuera de ella, la Caridad Cristiana, esa Matrona ubérrima que han cantado los poetas, que han inmortalizado en mármoles y lienzos los artistas, no conoce el principio de las nacionalidades. El alma de Cervantes, que tanto bueno dijera de la insigne Barcelona, sentiráse gozosa en las serenas regiones donde vive, contemplando como aquella rancia hospitalidad y cortesía de que él hablara, sublimándose a través del tiempo, han venido a condensarse en esta obra de amor. A ella va unido con lazo indisoluble, como la causa al efecto, el espíritu del Excmo. Señor Marqués de Carulla, que si le dió en vida cuanto tenía : sus actividades, sus energías, su bondad inagotable ; inspirará después de muerto a los continuadores de tan hermosa labor.

La muerte ha sido implacable con nosotros durante el último curso, arrebatándonos, además del Rector querido de todos, muerto en el cumplimiento del deber, bajo la acción de un derrame interno, como el militar que muere frente al enemigo, aunque con gesto menos heroico ; a los ilustres doctores Planas y Casals, Barraquer y Roviralta, y López Capdepon.

Del primero poco puedo yo deciros, que sólo le traté en los últimos años de su vida, a los que tuvisteis la suerte de conocerle como Maestro, amigo y compañero : profesor competentísimo, civilista profundo, jurisconsulto eminente, honra del Foro español y de la Universidad de Barcelona ; unía a todas estas cualidades una afabilidad, una caballerosidad y una hidalguía, que parecían cosas de otros tiempos ; porque en estos que vivimos la sequedad y el ceño adusto suelen ser las características de los sabios.

Del doctor Barraquer, el mayor elogio que puede hacerse es decir

que su bondad y su modestia fueron tan grandes como sus méritos, los cuales pregonan por el mundo multitud de corazones agradecidos. El Claustro de la Facultad de Medicina de Barcelona, reconociendo las altas dotes que le adornaban y haciendo uso del derecho que le concede la Ley, le propuso para la cátedra de Oftalmología que desempeñó durante algunos años.

El que tiene el honor de dirigiros la palabra, cliente afortunado del doctor Barraquer, debido al defecto físico que padece, guarda para él la más profunda gratitud. Cuando apenas se conocía en España otra clínica de los ojos que la suya y la que durante el verano establecía en Bayona el doctor Bequer, acudí yo a la Ciudad Condal, desahuciado por un novel oculista, el cual, conminándome con la ceguera inmediata si desatendía sus consejos, me manifestó que debía abandonar el estudio y dedicarme a la caza, no reparando en el peligro que un cazador de mis condiciones suponía para los pobres labriegos. El doctor Barraquer me tranquilizó, sin dar importancia a la miopía progresiva cuyos perniciosos efectos tanto se me había exagerado: de que acertó es buena prueba mi presencia en este sitio; porque el hecho que os he referido sucedió hace treinta años. Si la Emperatriz Eugenia pudo decirle que gracias a él, había visto la luz dos veces en España; y afirmo que le debo la dicha de haber podido contemplar la bóveda celeste, que durante mis primeros años me pareciera una inmensa nebulosa, y de sentir al contemplarla la omnipotencia del Creador.

No satisfecha la muerte con estas víctimas ilustres, sin duda por entender que habiendo cumplido su misión en esta vida le correspondían de derecho, nos privó el pasado abril de la cooperación activa de un querido compañero lleno, al parecer, de salud y energía: el doctor López Capdepon. La misma enfermedad que arrebató al doctor Carulla y que yo no me atreveré a calificar de traidora y alevosa según costumbre, porque no es un secreto para la Ciencia que sigue sus pasos y predice sus efectos; segó la vida del doctor Capdepon: enfermedad cruel que como la tuberculosis y la guerra, priva a la Humanidad de seres en plena juventud, truncando existencias que no habían descrito todavía la trayectoria marcada por la Naturaleza; enfermedad maldita que al segar tantas vidas en activa producción, determina muchas veces una parada o un retroceso en la marcha progresiva de la Socie-

dad, según la misión del sér a quien afecta y el valor relativo del mismo.

Todavía quiero hablaros, para temprar algún tanto estos acentos elegíacos, de otro ilustre compañero al que la Ley de los hombres, ha separado de nosotros, jubilándole en diciembre último por haber cumplido la edad reglamentaria, cuando, debido a lo robusto de su naturaleza y lo metódico de su vida, se hallaba todavía en el pleno uso de sus facultades, a pesar de lo avanzado de su edad : me refiero al doctor don Eugenio Mascareñas, Catedrático de Química inorgánica en esta Universidad durante cuarenta y cuatro años, y Decano de la Facultad de Ciencias, que mucho tiempo rigió con un celo y rectitud dignos de todo encomio.

Dos instrumentos emplea el hombre para difundir el saber : la palabra y la obra ; la predicación y el ejemplo. Utilizan el primero los profesores de todas las disciplinas, los *Pedagogos* ; se sirven del segundo los *Maestros* de todas las artes : practican los unos el arte de enseñar ; provocan los otros en sus educandos, llamados aprendices, inducciones que forman el arte de aprender. La actitud del discípulo pasiva en el primer caso, hace un llamamiento a sus facultades receptoras : la actitud del aprendiz intensamente activa en el segundo, pone a contribución su facultad creadora o reproductiva.

Del valor educativo de ambos métodos puede decirnos algo la teoría de la percepción. Cuando las diferentes formas de la energía por medio de las cuales se nos manifiesta la realidad objetiva, afectan a nuestros sentidos, una vibración se transmite de los últimos filamentos nerviosos a los centros del sistema sensitivo ; y allí bajo la misteriosa acción de la voluntad, dá origen al movimiento correlativo que, partiendo de los centros motores, produce en nosotros la actuación provocada por el objeto percibido ; o bien se difunde por las diferentes ramificaciones del sistema nervioso produciendo la inhibición del organismo. Nuestra percepción de las cosas es pues, según Bergson, una invitación a obrar ; por eso cada movimiento evoca su semejante : por eso los grandes Maestros formaron siempre escuela de buenos discípulos.

El doctor Mascareñas ha sido durante su larga vida académica y docente, Maestro inimitable, como discípulo predilecto que fué del ilustre químico D. Magín Bonet ; y perfecto Pedagogo que ha sabido exponer con admirable claridad y método las más abstrusas verdades, ayudán-

dose en sus explicaciones de la comprobación experimental, con una elegancia que recuerda más de una vez al célebre físico Tindall.

Sus antiguos discípulos, a la cabeza de los cuales figura el digno Presidente de la Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, nuestro compañero el Dr. Alcobé, que contribuyendo a la difusión de la cultura y al fomento de la industria forman numerosa legión en nuestro país; rindiendo culto a sus méritos le regalaron, con motivo de su postrera conferencia, una artística placa que perpetuará la obra del *Maestro* y la gratitud de los donantes. Nuestro querido Rector, el Dr. Martínez Vargas, más que Jefe y compañero, amigo cariñoso de todos nosotros, las Autoridades académicas y la Facultad hermana, se asociaron con entusiasmo a los varios actos celebrados para despedir cumplidamente al venerable doctor Mascareñas. La Facultad de Ciencias, que le profesaba al par que acendrado cariño el más profundo respeto, resistiéndose a separarse de él, solicitó del Gobierno de S. M. el nombramiento de Decano honorario, que le fué concedido, en atención a los méritos relevantes de su vida docente y académica.

Aquí termina este tributo dedicado a honrar la memoria de los que fueron; al escribirlo he tenido presentes aquellas palabras de Mazzini a sus compatriotas:

¡ *Oh italiani!*—*non obliate giammai,*
che el primo passo a produrre
uomini grandi sta nello onorare
i già spenti

Cumplido este deber de conciencia, voy a exponeros, siguiendo la costumbre que el reglamento impone, algunas breves consideraciones sobre los *Conceptos fundamentales de la Geometría*; asunto que ya traté el año 1900 en la Universidad de Oviedo, y que, debido a las investigaciones de un grupo de físicos ilustres, ha excitado el interés del mundo científico y la curiosidad del vulgo en los últimos años.



El espacio no es, ni un objeto físico de sensación, ni una forma luminata del espíritu, sino un concepto.

STALL'

La observación del mundo exterior por medio de los sentidos, dá lugar a que se formen en nuestra inteligencia representaciones mentales de los objetos externos y a que surjan también otras ideas que no tienen realidad objetiva, aunque han sido provocadas por imágenes sensibles. Aquellas representaciones mentales y estas ideas, constituyen dos categorías de cosas pensadas esencialmente distintas: ejemplo de las primeras es el punto, elemento fundamental de la Geometría; y de las segundas el número, colección de unidades cada una de las cuales designa un acto de aprehensión de algún objeto.

Las cosas de la segunda categoría se llaman *formas*, y las ciencias que de ellas se ocupan *ciencias formales*: tales son la *Lógica* y el *Análisis Matemático*. En estas ciencias la verdad deriva de la armonía entre los diferentes actos del pensamiento y de las leyes del mismo.

Las ciencias de los objetos que integran el mundo material se llaman *ciencias experimentales*: la verdad resulta en ellas de la conformidad del pensamiento con la cosa pensada; y se considera como falso todo lo que contradice las leyes de la inteligencia o las de la realidad objetiva.

Las *ciencias formales* se fundan en principios evidentes y en operaciones mentales, definiciones e hipótesis de carácter abstracto y racional. La demostración en ellas es una serie de actos del pensamiento relacio-

nados entre sí, que no traspasan los límites del campo de la razón humana. Las *ciencias experimentales* se basan en las verdades intuitivas, independientes unas de otras, que revela en nosotros la percepción del mundo físico. En la Ciencia geométrica existen principios fundamentales axiomáticos, del orden intelectual más puro; y otras verdades intuitivas, menos evidentes, llamadas postulados, que aun cuando proceden de la observación externa, extendemos más allá del campo de la misma.

Las ciencias formales son para nosotros completamente exactas: las experimentales lo son tanto más cuanto más intuitivos son los principios en que se fundan y más fácil es substituir los objetos en que se ocupan por formas abstractas a las que pueda aplicarse una demostración rigurosa: por esta razón la Geometría, cuyo origen empírico están conformes en reconocer todos los Geómetras, se incluye en la Matemática pura; porque si bien los objetos que determinan sus postulados, existen fuera de nosotros, vienen inmediatamente substituídos en nuestro pensamiento por entidades abstractas, de cuya combinación resultan las verdades científicas, sin que en los razonamientos sea preciso tener en cuenta la realidad objetiva.

El caracter hipotético al parecer, de algunos principios fundamentales de las ciencias matemáticas, nos lleva a tratar de la posibilidad de las hipótesis.

Una hipótesis matemática es posible, cuando es independiente de los principios anteriormente admitidos o demostrados; y sus términos, definiendo sin ambigüedad la nueva forma o propiedad establecida, no envuelven contradicción alguna: sólo puede considerarse como absurda, cuando se demuestre que contradice a las verdades precedentes o las consecuencias de ellas. Se puede decir que precisados los caracteres de las formas matemáticas, su posibilidad depende del principio de contradicción. A las entidades posibles determinadas aplica la inteligencia el procedimiento discursivo, constituyendo las llamadas por antonomasia ciencias exactas, cuyos objetos, aunque abstractos e hipotéticos, son para nosotros tan reales como las formas de la sensibilidad, ya que nadie puede dudar de la existencia de la razón y sus funciones lógicas sin sumirse en un mar de confusiones.

Como toda hipótesis independiente es posible, probar lo uno será el

camino para demostrar lo otro : por esto para justificar un principio hipotético por procedimientos lógicos, no hay más medio que deducir de él consecuencias y ver si son contradictorias ; pues si bien es cierto que de lo falso puede a veces deducirse lo verdadero, como indica Duhamel, por una afortunada compensación de errores o por otras causas, siempre que este caso se presenta es fácil descubrir el error cometido.

Además de la posibilidad de una hipótesis, precisa tener en cuenta su fecundidad, que dá la medida de su valor. Una verdad hipotética puede ser muy poco provechosa, y aun limitar y restringir el campo de la investigación : por eso las condiciones que introduzca, no deben poner barreras injustificadas al espíritu humano, siempre ansioso de descubrir nuevas verdades o de relacionar las descubiertas.

La hipótesis geométrica, además de cumplir con las condiciones anteriores, ha de estar en armonía con la intuición espacial. No puede suponerse por ejemplo que el círculo es una línea abierta y tiene asíntotas reales, porque la realidad objetiva, de la cual deriva el concepto definido, impone a nuestra inteligencia lo contrario.

En los umbrales de la ciencia matemática es preciso discutir, a la luz de los principios de una sana filosofía, la posibilidad de las definiciones, hipótesis y postulados, si no se quiere caer en un estéril convencionalismo. Bastará a veces una simple discusión lógica matemática ; será posible otras justificar un principio hipotético por medio de ejemplos : pero la inducción no es suficiente en las ciencias exactas y los procedimientos lógicos no pueden emplearse en muchos casos.

El sistema filosófico que estuvo más en boga durante muchos años, entre los naturalistas y matemáticos europeos, fué el de Stuart Mill, el expositor más hábil de las doctrinas sensualistas acerca de las propiedades del espacio y de las verdades fundamentales de la Geometría. Sus ideas dieron tal vez origen a los errores del trascendentalismo geométrico.

El filósofo inglés, después de afirmar que en la naturaleza no hay puntos sin extensión, líneas sin anchura, ángulos perfectamente rectos, círculos de radios iguales, ni en general, ninguno de esos objetos imaginarios que define y pretende estudiar la Geometría ; y de negar, sin entretenerse a demostrarlo, que tales concepciones existan *a priori* en la inteligencia humana, concluye que las entidades estu-

diadas en la ciencia de Euclides, son simples copias de la realidad y no tienen la perfección que se les atribuye. La Geometría es para él una ciencia aproximada ; y la inducción el único procedimiento demostrativo.

A estas conclusiones contesta discretamente Cayley, que si no tuviéramos la idea de la línea recta, no podría Mill negar la existencia de ella en la realidad objetiva : tal negación carecería de sentido, faltando el tipo ideal a que referirla.

Lo que hay de cierto en las doctrinas de los sensualistas, es que nosotros no tenemos ningún conocimiento experimental de los elementos geométricos : conocemos varillas e hilos que llamamos rectos, cuerpos esféricos o cúbicos ; pero a los puntos, líneas y superficies de la Geometría, sólo llegamos por medio de la abstracción, facultad que permite al espíritu fijar su atención en una cualidad de un objeto prescindiendo de las demás.

Definir la superficie como límite que separa un cuerpo del resto del espacio, y admitir que tiene un cierto espesor, envuelve también evidente contradicción ; porque en tal caso será cuerpo, y estará separado del objeto que limita por un segundo límite, al cual podía aplicarse el mismo razonamiento que se repetirá así indefinidamente.

Otro error del sensualismo, no menos fundamental que este, consiste en considerar el espacio como un objeto de sensación directa. Si toda percepción de los sentidos lo es de una diferencia fenomenal, mal pueden estos darnos la sensación del espacio homogéneo y continuo. Nosotros percibimos las cualidades físicas distintas y accidentales de los objetos ; no lo que es permanente, substancial e invariable. *Tener siempre una cierta sensación y no tener ninguna*, como dice Hobbes, *es absolutamente lo mismo* : para que exista la percepción se requiere, por lo menos, la presencia de dos objetos ; pues el espíritu no advierte lo que una cosa es, sino por contraste con lo que ella no es.

Las cosas no están en el espacio como un líquido dentro del recipiente que lo contiene. Al afirmar en el lenguaje usual que nada existe fuera del espacio, pretendemos tan sólo enunciar la propiedad común a todos los objetos físicos de tener una cierta extensión. Esta circunstancia dió lugar a que Descartes considerase que el hecho de ser extensa era lo único esencial a la realidad objetiva : pero el espacio ocupado por un

cuerpo no aparece nunca al disociar las sensaciones que revelan las propiedades del mundo material. Ni se comprende que diferencia pudiera existir entre el espacio y la materia, desde el momento en que para considerar a aquel como un objeto de sensación, fuera necesario prescindir de su homogeneidad.

La Geometría de Staud, en la cual se razona sobre las leyes generales de la figura, prueba que no es la inducción el único procedimiento demostrativo en Matemáticas. Es cierto, como hace notar Poincaré estudiando el razonamiento por recurrencia, que a la generalización deben tal vez su fecundidad las ciencias exactas, las cuales si fueran exclusivamente deductivas, se convertirían en una verdadera *tautología*, ya que ningún teorema podía expresar propiedad alguna que no estuviera implícitamente contenida en los axiomas; pero también parece indudable que la inducción matemática es esencialmente distinta de la que se emplea en las ciencias físicas: se impone la primera necesariamente, como expresión de una ley de nuestra inteligencia a la cual obedecen todos los casos posibles; descansa la segunda sobre la base movediza de numerosos ejemplos, los cuales llevan a nuestro espíritu la creencia en un orden general del Universo que está fuera de nosotros.

Los adversarios del empirismo, los idealistas kantianos, sostienen que la idea de espacio existe en el espíritu independientemente de toda sensación. Sentir, se dice, es atribuir una impresión subjetiva a una causa objetiva, necesariamente extensa; por esto la forma de la extensión debe de existir *a priori* en la inteligencia humana. Se ve además que la idea de espacio es absolutamente indestructible. Podemos vaciar mentalmente el contenido sensible del espacio; podemos suprimir con el pensamiento, todo lo que es objeto de sensación: no podemos suprimir por esta operación mental, el espacio mismo; el es una parte integrante de nuestros estados de conciencia.

He aquí la fórmula del idealismo kantiano, tan opuesto a la realidad como el empirismo a la razón.

Esta doctrina tiene un carácter común con el sensualismo: la hipótesis de que el espacio existe *como hecho independiente*, bien como objeto de sensación, bien como forma de la intuición; y que puede ser apprehendido en sí mismo, sea objetiva o subjetivamente. La más ligera observación prueba sin embargo, que las propiedades de un objeto no son

sino las relaciones derivadas de la naturaleza del mismo ; y que su extensión por tanto, no puede existir con caracter absoluto, ni en el espíritu, ni fuera de él.

Tampoco es cierto que podamos vaciar el contenido del espacio y quedarnos con una imágen pura de este en el espíritu : por el contrario, la intuición espacial va siempre acompañada en nosotros de una débil sensación de color o de un cierto esfuerzo, según que tratemos de representarnos el espacio bajo su aspecto visual o táctil. La disociación que nos vemos obligados a efectuar entre la idea de extensión y los elementos que integran la sensación, no es *intuicional* sino *conceptual*. Siempre que contemplamos una cosa realmente objetiva y que razonamos sobre ella, podemos en virtud de la facultad de la abstracción, considerar la propiedad de la extensión precindiendo de las demás cualidades : pero cuantas veces intentamos presentar la extensión ante el espíritu como algo real, para formarnos una imágen mental de ella o para representarla como una forma de la intuición, nos vemos obligados a revestirla de un elemento de sensación que es el efecto producido en nuestro organismo por un determinado proceso físico.

¿Cuál es pues la naturaleza del espacio y cuál la fuente del conocimiento que tenemos de él? Si los anteriores razonamientos son válidos, parece indudable que al prescindir en los objetos exteriores de sus caracteres físicos, se llega a la idea de una *forma de la extensión* ; y suprimiendo todavía los límites que distinguen las formas espaciales, se obtiene el concepto de espacio, término de este proceso de abstracción.

La definición y las propiedades de la recta, así como de las paralelas, son pues el escollo y, por decirlo así, el escándalo de los elementos de Geometría.

D' ALMBERT

Hasta fines del siglo XVIII nadie había puesto en duda los postulados de Euclides; bien que las múltiples tentativas hechas para demostrarlos por Gemino, Proclo, Ptolomeo, el árabe Nassarradín y Clavio, hubiesen resultado totalmente infructuosas. La necesidad de reformar los principios fundamentales de la Geometría, se había dejado sentir mucho antes; y ya Arquímedes propuso como postulado de la recta su propiedad de ser la línea más corta entre dos puntos: esta proposición, que aceptó Legendre para definirla, ha sido justamente desechada, porque el concepto de longitud no es una idea primaria de la inteligencia, sino que necesita para su elaboración de otras nociones más sencillas.

Uno de los matemáticos que con más cariño estudiaron esta cuestión de los fundamentos de la Geometría, fué el insigne Leibnitz. Definió el plano, después de haber estudiado la esfera, como lugar de los puntos equidistantes de dos, y la recta como sistema de los que equidistan de tres; si bien la consideró también como línea cuyos puntos no se mueven cuando se fija dos de ellos: pero más frecuente es en él considerar estos dos conceptos primarios, imposibles de definir con todo rigor, como superficie y línea que dividen al espacio y al plano en dos partes congruentes.

Esta propiedad no sirve para caracterizar la recta, porque no es exclusiva de ella. Leibniz llama figuras congruentes a las que son iguales y semejantes, a las idénticas, a las superponibles, a las que se pueden substituir bajo todos conceptos ; iguales son para él las equivalentes, las de igual longitud, área o volumen, las de la misma magnitud extensiva ; semejantes las de idéntica forma. De ahí la posibilidad de concebir en el plano líneas curvas que determinen dos regiones congruentes.

También se propuso el ilustre matemático y filósofo demostrar el postulado de las paralelas ; pero sólo consiguió repetir algunas proposiciones de Proclo nada convincentes.

El libro más conciso y riguroso en la exposición de los principios, publicado hacia la misma época en que se divulgaron los escritos de Leibniz, es la Geometría de posición de Staudt.

Determinada la recta por dos de sus puntos ; estudiada la radiación de rayos y medios rayos, y las superficies cónicas simple y completa ; y establecidos los caracteres diferenciales entre las de órdenes par e impar ; define el plano como superficie cónica de este último orden, cuyo centro está en uno cualquiera de sus puntos.

Los postulados del plano resultan así corolarios de sus análogos en la superficie cónica. De que un rayo de una radiación que tiene un punto sobre la falda de un espacio angular, se halle por completo en dicha falda ; resulta que una recta determinada por dos puntos de un plano, está por entero situada en él : y como dos superficies cónicas, de orden impar y del mismo vértice, se cortan en un número impar de generatrices ; dos planos tendrán común una sola recta, por lo cual se llamarán superficies de primer orden.

Expuestas las ideas indispensables de Geometría cinemática, aborda, con elegancia no superada, el estudio de los elementos singulares en las curvas planas y alabeadas.

Aunque las tentativas para demostrar el postulado de Euclides siguieron hasta la época de Gauss, ya el italiano Sacheri, en 1733, pretendió exponer la Geometría prescindiendo no sólo del postulado de las paralelas sino también de los de la recta. Fué así un verdadero precursor de Lobatchewski, Bolyai, y Riemann ; pero no influyó todavía por las tendencias filosóficas de la escuela sensua-

lista, se empeñó en destruir con sus propias manos la obra que había levantado.

Comenzaba por suponer en el plano un cuadrilátero $A B C D$, con dos ángulos rectos en A y B ; y otros dos C y D , iguales entre sí, respecto de los cuales hacía las hipótesis de que fuesen rectos, agudos u obtusos: así llegaba a las conclusiones de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual, menor o mayor que dos rectos: pero introducía después diferentes condiciones contradictorias y probaba la imposibilidad de los dos últimos casos.

Los inútiles esfuerzos de Legendre para demostrar el postulado de Euclides, convencieron a Gauss de la imposibilidad de demostrarlo: así lo expresa en sus cartas a Bessel, Bolyai y Schumaquer: pero la prioridad en la idea de una Geometría sin el postulado, corresponde al ruso Lobatchewski.

Suponed en un plano una recta fija y un ángulo recto que gira alrededor de su vértice, situado fuera de aquélla: cuando, durante el giro uno de los lados del ángulo haya venido a ser perpendicular a la recta, el otro lado no tendrá con ella ningún punto común.

En el caso de la figura supuesta, es para unos intuitivo que todos los rayos del haz engendrados por la rotación del ángulo, menos el que acabo de indicar, encuentran a la recta fija; mientras que siendo para otros una ilusión de los sentidos semejante propiedad hipotética e indemostrable, afirman la posibilidad intelectual de suponer la existencia de una infinidad de rayos que, además del referido no encuentran a dicha recta, comprendidos todos ellos en un ángulo plano completo cuyos lados separan los rayos del haz que cortan a la recta básica de aquellos que no la cortan. Esos lados se dicen *paralelos* a esta, en la Geometría de Lobatchewski, y el ángulo que forman con la perpendicular a la base se llama *ángulo de paralelismo*.

Buscando la interpretación de esta Geometría escribió Beltrami una bella Memoria, ya agotada, que dedicó al estudio de una superficie llamada pseudoesférica, cuyas propiedades en el espacio euclídeo son idénticas a las del plano de Lobatchewski: la conservación del carácter de paralelismo para un punto cualquiera de una línea geodésica y la reciprocidad del mismo para dos cualesquiera de ellas, se verifican en una y otra superficie. La suma de los ángulos de un triángulo no puede

exceder a dos rectos, ni en uno ni en otro caso : y si en una sola figura alcanzara este valor, lo propio sucedería en todas las demás.

Bolyai en 1832, sin conocer las especulaciones de Lobatchewski, y exponiendo sin duda puntos de vista de su padre, que vivió en íntima relación con Gauss, comenzó como Leibniz, el estudio de la Geometría por la esfera y el círculo : sus puntos de vista coinciden con los del geómetra ruso, en cuanto que ninguno de los dos parte del concepto de distancia.

Se puede ir todavía más allá en la discusión de los principales fundamentos de la Geometría : cabe dudar de los postulados de la recta ; afirmar que ni la infinitud de la misma ni su propiedad de estar determinada por dos puntos tienen para nuestro espíritu carácter de necesidad ; que si este último postulado se verifica dentro del campo de nuestra observación no siempre se cumple fuera de él. Se puede suponer que la recta, sin perder su carácter de tal, se cierra ; que la distancia entre dos puntos no crece indefinidamente ; que pueden bastar dos segmentos rectilíneos para delimitar una porción de plano ; que dos rectas se cortan en dos puntos opuestos, por donde pasan infinidad de ellas perpendiculares a una misma. Tales propiedades se consideran como características de la recta de Riemann : no es extraño que el plano en esta Geometría tenga propiedades análogas a la superficie esférica en la Geometría euclídea.

Llevados del entusiasmo los partidarios de estos nuevos artículos de fé geométrica, sostienen que nuestro espacio puede ser esférico, homaloidal o pseudoesférico. Tan convencidos están de que el espacio es un objeto de sensación directa, visible y palpable, que le atribuyen una curvatura, como a las superficies ; la cual aunque constante en la región explorada por nosotros, como lo demuestra la movilidad de los sistemas invariables y la posibilidad de superponer dos figuras congruentes, podría variar con el tiempo en un mismo lugar, y tener dos valores desiguales en un mismo instante y en lugares diferentes : todo ello de igual modo que una hoja de papel, arrollada y retorcida, presenta formas muy distintas en sus múltiples arrugas. Sólo la Astronomía, según ellos, puede comprobar estas afirmaciones, porque la Geometría diferencial es la misma para los tres sistemas ; y las demás ciencias experimentales operan en un campo muy reducido.

La causa de todas estas perplejidades se halla en suponer que el espacio, cuya noción está en el fondo de toda construcción geométrica, puede adoptar determinadas formas; cuando no es nada más que la *posibilidad intuicional y conceptual de trazar toda clase de figuras*; es decir, un concepto formado prescindiendo en los objetos reales, no solamente de sus propiedades físicas sino también de las diferentes delimitaciones que los distinguen. El espacio no tiene estructura interna, ni propiedades determinables por la experiencia o dadas por la intuición; porque considerado como una entidad significa la negación de toda clase de relaciones. En este sentido constituye un empleo abusivo de las palabras, definir la Geometría como ciencia que investiga las propiedades del espacio: su objeto es el estudio de las diferentes formas de la extensión y sus relaciones mutuas; de las determinaciones espaciales; de todo lo que el concepto de espacio excluye necesariamente; de las leyes generales de las figuras.

Estas razones ponen de manifiesto la imposibilidad de comprobar experimentalmente las doctrinas del trascendentalismo; pero la causa originaria de sus errores es el modo de ver los axiomas geométricos. Ninguno de ellos es un dato de la sensación, como afirman los sensualistas, o de la intuición, como pretenden los idealistas: todos tienen un elemento intuicional, debido a la sensación, y una determinación intelectual debida a un cierto instinto de la inteligencia, como diría Balmes. Poincaré, al observar que este elemento determinante no es, ni un dato experimental ni un juicio sintético *a priori*, afirma que resulta de una convención tácita; pero este carácter convencional no se compadece muy bien con el firme asentimiento que presta nuestra conciencia a lo postulados de la recta en la Geometría euclídea, asentimiento que no logran destruir las sugestivas construcciones de los pangeómetras. Esta convicción es tal que, aun cuando las leyes físicas nos impusieran la Geometría de Riemann en esas regiones situadas a inmensa distancia de nosotros, o la Geometría de Lobatchewski en ese mundo del átomo inaccesible para la observación, no desaparecería de nuestro espíritu; es que deriva del testimonio de los sentidos nunca desmentido en este punto, del cual no se puede dudar fundadamente, como no se puede dudar de la luz que nos alumbramos; es que la inteligencia nos la impone como una necesidad del razonamiento de-

ductivo que viene en último término a referirse a ciertas constantes primarias cuya demostración es imposible.

Claro es que cerrando los ojos a esta imposición de la conciencia, se puede construir una Geometría perfectamente lógica: fácilmente se convencerá de ello quien leyere la obra incomparable de nuestro querido compañero señor Bartrina y Capella, publicada por la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona. No causará extrañeza esta posibilidad si se observa que, al no ser los postulados de la Geometría el resultado de un juicio, carecen del carácter de la evidencia peculiar de esa clase de verdades, y que la inteligencia puede por abstracción prescindir de ellos sin que se perturben las leyes que la rigen; pero no se debe olvidar que no es esta facultad la única fuente del conocimiento, y es precisamente allá en los fundamentos de la ciencia donde nos encontramos con principios que caen fuera de los dominios de la razón humana. Así decía nuestro querido maestro señor Torroja, que en los primeros pasos de la ciencia se hace indispensable para guiarnos una cierta fe que nos ilumine evitándonos el caer en las complejidades de la duda.

III

En el espacio de n dimensiones el lugar de cada punto puede ser determinado por la medida de n magnitudes.

H. HELMOLTZ

Se dice que un grupo de objetos, a los cuales se llama elementos del mismo, es respecto de éstos de una sola dimensión, cuando se los considera ordenados en serie de manera que cada objeto sólo tenga en el conjunto uno anterior y otro posterior. El grupo puede ser indefinido en un sentido o en dos; carecer de primero o de último elemento, o de ambos. Las series rectilíneas, los haces de rectas y los haces de planos, son sistemas unidimensionales: las series, grupos abiertos cuyo elemento fundamental es el punto; los haces, grupos cerrados, referidos a la recta o al plano como tipo de referencia.

Una totalidad de objetos constituida con grupos de una sola dimensión, con arreglo a la misma ley que ha permitido formar éstos por medio del elemento tipo, es lo que se llama un sistema de dos dimensiones. Son formas de esta clase: el plano punteado, que se engendra por la rotación de una serie rectilínea alrededor de uno de sus puntos; y el plano reglado, que se produce por la traslación de un haz de rectas cuyo vértice resbala sobre un rayo: la radiación de rectas, engendrada por un haz cuyo plano gira en torno de uno de sus rayos; y la radiación de planos, producida por un haz cuya arista gira alrededor de uno de sus puntos, en un plano.

En el plano punteado, cuyo elemento fundamental es el punto, la

recta es forma derivada, base de una serie rectilínea ; mientras que en el plano reglado, cuyo elemento primario es la recta, el punto es forma secundaria, vértice de un haz de rectas. Otro tanto puede decirse de las rectas y planos de una radiación.

Una forma de una dimensión respecto de otra bidimensional, es un sistema de tres dimensiones. El espacio punteado o conjunto de todos los puntos imaginables, producido por un plano que gira en torno a la base de una serie rectilínea ; y el sistema de todos los planos posibles engendrado por una radiación cuyo vértice resbala sobre la arista de un haz ; son formas tridimensionales, que tienen como elemento fundamental el punto y el plano respectivamente.

En general, una forma de una dimensión, respecto de otra de $n-1$ dimensiones, es un sistema enedimensional. El espacio reglado o conjunto de todas las rectas posibles, forma un grupo de cuatro dimensiones : se obtiene, haciendo que el vértice de una radiación de rectas resbale sobre un rayo de la misma ; y que este rayo gire alrededor de uno de sus puntos, en un plano que pase por él : el resbalamiento produce un sistema de tres dimensiones, constituido por las rectas que cortan a una fija ; y la rotación engendra una forma tetradiimensional integrada por las rectas que encuentran a un plano dado.

Este sistema contiene otros tridimensionales, constituidos con rectas que pasan por los puntos de una línea plana o alabeada ; y diferenciados entre sí por el grado de la ecuación que liga las coordenadas de cada uno de sus elementos : son éstas, las constantes que determinan las dos ecuaciones de una recta en el sistema cartesiano. Entre tales sistemas merecen especial mención los formados por rectas que cortan a una dada : su orden es el segundo. Ellos dan origen a un sistema bidimensional, cuyos elementos son las rectas que cortan a otras dos de posición invariable : las ecuaciones de las variedades tridimensionales cuyas directrices son las dos rectas dadas, determinan analíticamente el sistema. Análogamente se llega a un grupo unidimensional, determinado por rectas que cortan a tres fijas, y que como se sabe, forman un hiperboloide : cuando dos de estas rectas están en un plano el hiperboloide se reduce a un haz ; si lo están las tres, a una forma plana.

Si a las tres ecuaciones que relacionan las coordenadas de un ele-

mento de una variedad lineal en un espacio de cuatro dimensiones, se añade una relación más entre las coordenadas y una magnitud nueva que vendrá a ser función de ellas, se podrá expresar cada una de éstas por medio de la variable introducida. Esto es lo que caracteriza un grupo unidimensional.

Así como en el espacio puntual de tres dimensiones una superficie cerrada lo divide en dos partes, la interna que constituye un cuerpo y la externa en la que se puede concebir infinitos planos; en el espacio tetradimensional reglado, un sistema de tres dimensiones divide el conjunto de todas las rectas que lo forman en dos grupos distintos. Estos son, para una variedad formada por las rectas que encuentran a una curva plana algébrica, los constituídos por las que cortan al plano en cada una de las dos regiones que la curva determina.

El estudio de los sistemas de rectas proporciona la interpretación geométrica de las propiedades del espacio analítico o ideal de cuatro dimensiones.

Análogamente se interpretan espacios de un orden más elevado, por medio de sistemas de curvas o superficies cuya determinación exija mayor número de constantes.

El conjunto de todas las cónicas de un plano formará un grupo de cinco dimensiones, porque la ecuación de la curva fundamental contiene igual número de coeficientes arbitrarios. En este sistema las líneas que tienen cuatro puntos comunes forman un conjunto de una dimensión denominado haz de cónicas; porque basta un parámetro para determinar una línea del haz: las que pasan por tres puntos dados constituyen un grupo bidimensional.

Las curvas de segundo orden que pueden concebirse en el espacio, forman un grupo de ocho dimensiones; porque cada una de ellas necesita igual número de parámetros para su determinación: tres que fijan la posición de su plano y los cinco de la curva. Si las coordenadas del plano están ligadas por una ecuación, será tangente a una superficie: el grupo de cónicas contenidas en este plano variable tendrá siete dimensiones.

Un sistema de nueve dimensiones lo forman todas las cuádricas posibles; porque la ecuación de una superficie de segundo orden contiene nueve parámetros independientes.

El análisis matemático no se ha limitado a ensanchar el campo de la intuición dando a sus fórmulas múltiples interpretaciones. La Memoria de Riemann, *Sobre las hipótesis fundamentales de la Geometría*, presentada por Gauss el año 1854, poco antes de su muerte, a la Facultad de Filosofía de Goettingen, pretende investigar la naturaleza del espacio, cuyo concepto dice, debe estar incluido en otro de un orden más elevado : el de cantidad múltiplemente extensa.

Esta proposición fundamental, no puede ser comprendida sin precisar el significado del término *concepto*, que tiene un sentido diferente en cada uno de los dos grandes grupos de ciencias establecidos al principio de nuestro trabajo. En matemáticas ciertos conceptos contienen implícita o explícitamente las diversas propiedades del objeto : por eso afirma Balme que todas las proposiciones de las ciencias exactas tienen un carácter analítico, al contrario de lo que Kant sostiene. En las ciencias de observación, un concepto es el conjunto de caracteres comunes a un grupo de objetos materiales : el número de éstos se llama la *extensión* del concepto y el número de atributos del mismo su *comprensión*.

No dice Riemann en qué acepción toma la palabra ; pero de la forma de su proposición parece deducirse que se refiere al concepto matemático, el cual no es el procedente en los principios de la Geometría, debido al origen empírico de esta ciencia. Así, en lugar de elevarse a él por medio de una serie de abstracciones, de las cuales venga a ser el último término, lo deduce del concepto más general de cantidad múltiplemente extensa. Desarrollando éste declara que todas las cantidades son agregados *continuos* o *discretos* : las unidades de la primera especie se llaman elementos, las de la segunda puntos ; las cantidades continuas se miden, las discretas se cuentan ; las unas son escasas en la vida ordinaria, de las otras se ofrecen numerosos ejemplos.

La verdad parece ser lo contrario de lo que afirman las últimas palabras. No hay más cantidad discreta que el número, formado por una colección de unidades cada una de las cuales designa un acto de aprehensión de un objeto. En cambio una sola especie de variedades contiene, además del espacio intuitivo, el color, el sonido, la renta de un capital, la velocidad de un tren, la volatilidad de un líquido, la ca-

pacidad de trabajo de un hombre : todas estas cantidades pueden considerarse, analizando su concepto, como funciones continuas de tres variables independientes o trípemente extensas.

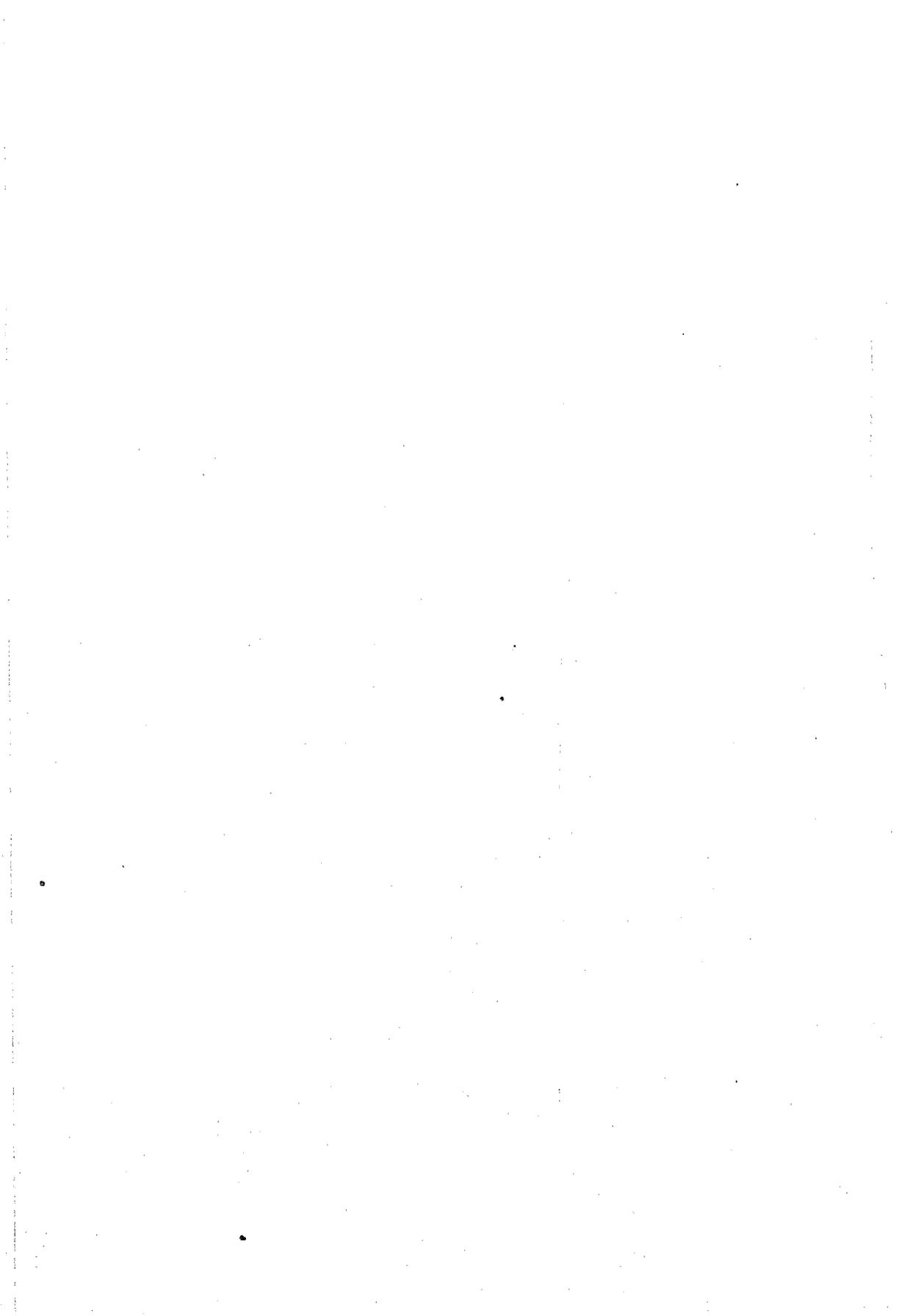
Tales razones bastan para presentar como muy discutible un criterio que, además de relacionar los signos y las cosas representadas por procedimientos lógicos, incluye en un mismo grupo entidades tan heterogéneas.

Determinado así el espacio general como cantidad múltiplemente extensa, Riemann afirma que su posibilidad conceptual coincide con su posibilidad empírica, aunque no coincida con su realidad objetiva. El orden de multiplicidad de nuestro espacio deberá investigarse por medio de la experiencia.

El error de esta afirmación es manifiesto si se observa, que mientras la posibilidad conceptual depende del acuerdo entre los elementos que forman el concepto, la posibilidad empírica exige que el objeto concebido cumpla las condiciones impuestas por la Naturaleza a la realidad objetiva.

El postulado fundamental de la *Memoria* podría formularse así: puesto que las funciones de una o dos variables independientes admiten una representación geométrica, en un espacio puntual de dos o tres dimensiones, es posible que ocurra lo mismo con las funciones de un número cualquiera de variables.

Desde el punto de vista físicomatemático, la célebre Memoria que ha servido de base a modernos desenvolvimientos, cuyo alcance no se puede preveer, es de una excepcional importancia. Desde el punto de vista filosófico, sorprende que mientras se rechaza, por considerarlos como imposición de prejuicios ancestrales, postulados que tienen el asentimiento universal, se aspire a substituirlos por principios un tanto gratuitos y arbitrarios cuya necesidad no se deja sentir a primera vista ni se justifica cumplidamente. La Historia del pensamiento humano no registra un caso más violento de *hipóstasis* o *reificación* de los conceptos.



IV

Si se agregara al espacio una cuarta dimensión, podría volverse del revés una superficie cerrada sin romperla ni doblarla.

SIMÓN NEWCOMB

Después de haber establecido en el orden abstracto la posibilidad intelectual de una cuarta dimensión, se ha pretendido demostrar, por medio de la experiencia, la realidad objetiva de ella.

El mundo en que vivimos, se nos dice, pudiera muy bien formar parte de un espacio de cuatro dimensiones que lo rodeara por todas partes, como un plano pertenece a nuestro espacio tridimensional en cuyo seno está sumergido. Admitid que existieran seres de dos dimensiones cuya morada fuese una superficie; que la sensación de vida producida en nosotros por las admirables creaciones de los grandes artistas de la pintura, no fuera una ilusión de los sentidos; que las figuras de Goya y de Velázquez, dotadas de inteligencia y voluntad, moviéndose en el plano de su cuadro, adquirieran la intuición del Universo en que viven; que apoyándose en este conocimiento intuitivo construyeran la Geometría plana, y elevándose, por medio de la generalización, idearan la Geometría del espacio, aun cuando no podrían imaginar la tercera dimensión. La vida de estos seres hipotéticos, constreñidos a moverse en su espacio bidimensional, sería análoga a la nuestra, forzados a vivir en el mundo de la sensibilidad; aunque seamos capaces de concebir, atendiendo anhelos del alma o requerimientos de la conciencia, algo que no puede caer bajo la acción de nuestros sentidos.

Colocados en este punto de vista, se puede inducir muchas propiedades del espacio tetradimensional, valiéndonos de la analogía establecida como guía. Así como en un plano existe una sola perpendicular a una recta, que pase por un punto dado, y en el espacio intuitivo por un punto solo se puede trazar una perpendicular a un plano; en el espacio de cuatro dimensiones, que contiene dentro de sí infinitos universos de tres como cada uno de éstos contiene infinitos planos, se admite generalizando, que un punto determina una perpendicular, y sólo una, a un sistema tridimensional: y así como la perpendicular a un plano lo es a todas las rectas que pasan por su pie o punto común con dicha superficie y están situadas en ella, la recta que encuentra ortogonalmente al Universo habitado por nosotros, forma también ángulo recto con todos los rayos de la radiación cuyo vértice es el punto de encuentro, único visible de la perpendicular ideal definida: esta es también ortogonal respecto de todos los planos de la radiación considerada.

Aplicada la generalización en esta forma, se admite la existencia de universos paralelos al nuestro, constituídos por puntos equidistantes del mundo que habitamos; se afirma que dos espacios tridimensionales tienen una superficie común, la cual será plana cuando los espacios sean homaloidales, de igual modo que dos planos se cortan según una recta; y se mide el ángulo de dos universos por el de las perpendiculares trazadas a ellos en uno cualquiera de los puntos del plano común.

Los procedimientos ordinarios de la Geometría descriptiva se extienden también al espacio de cuatro dimensiones. Tiene esta ciencia por objeto principal, obtener sobre una hoja de papel, la proyección de un cuerpo; y producir en nosotros, por medio del dibujo obtenido, la impresión del objeto representado.

Si nos fijamos en que el dibujo no tiene más que dos dimensiones, comprenderemos como un sér plano puede ejecutarlo, sin salirse de su morada, con los medios de que dispone: podría, por ejemplo, hacer la perspectiva de un cubo con sólo trazar dos cuadrados y unir sus vértices, uno a uno, por medio de rectas.

De igual modo para tener en nuestro espacio la proyección de un cubo tetradimensional, debemos coger dos exaedros ordinarios y unir

sus vértices. El cuerpo construído será la representación buscada ; que si bien no podrá darnos la intuición del objeto, porque para ello deberíamos mirar la perspectiva desde un punto del espacio tetradimensional, nos enseñará algunas de sus propiedades : sabremos que tiene dieciséis vértices, treinta y dos lados y ocho caras, compuestas cada una de un cubo.

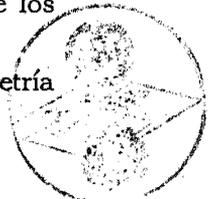
No sólo el cubo, si no todos los poliedros regulares posibles en el espacio de cuatro dimensiones, han sido calculados y construídos en proyección : para ello nosotros necesitamos tallar los cuerpos que los representan en piedra o madera, o moldearlos en yeso, o determinar sus vértices y aristas por medio de hilos de seda y alambres ; pero un sér de cuatro dimensiones obtendría el mismo resultado con un simple dibujo, como nosotros llevamos a cabo con el pincel, la regla y el compás, lo que un sér plano no podría formar sin el auxilio de todos los medios necesarios para construir un edificio. Podríamos decir que nuestros pintores son escultores de dos dimensiones y nuestros escultores pintores tetradimensionales. Podríamos, también, dejando volar el pensamiento, exponer las leyes de la perspectiva tetradimensional en los mismos términos que usaría un sér de cuatro dimensiones. Diría así :

«La Geometría descriptiva se propone la representación de los objetos, por medio de sus proyecciones sobre dos espacios tridimensionales o universos perpendiculares entre sí. Se obtienen estas proyecciones, bajando perpendiculares, desde los puntos del objeto que se trata de representar a cada uno de los universos de proyección, llamados *horizontal* y *vertical*.»

«La intersección de estos dos universos es un plano llamado *plano de tierra*. A fin de poder representar las dos proyecciones sobre nuestro papel, el cual no tiene más que tres dimensiones, se supone el Universo vertical, rebatido, alrededor del plano de tierra, sobre el Universo horizontal.»

«Sea P el plano de tierra : cada punto A tendrá dos proyecciones a y a' , situadas en una misma perpendicular a dicho plano : a es la proyección horizontal, a' la proyección vertical del punto A , sobre los espacios de proyección.»

De este modo se podría continuar la exposición de la Geometría



descriptiva, y entretenerse en hallar la intersección y las sombras geométricas, de los cuerpos de cuatro dimensiones.

No sólo el sistema de Monge, sino también el de la perspectiva lineal o proyección cónica, el más científico de los sistemas de representación, puede generalizarse.

La perspectiva de un objeto, desde un centro dado en el espacio tetradimensional, se obtiene uniendo éste, donde se supone situado el ojo del observador, con los diferentes puntos del cuerpo representado; y la radiación determinada se corta por el Universo que habitamos en el cual podremos construir la proyección correspondiente. Este será el *cuadro*: perpendicular a él se supone el *geométral*, sobre el que están situados los objetos: la intersección de ambos, uno vertical y otro horizontal, para los seres de cuatro dimensiones, es el *plano de tierra*. El pie de la perpendicular bajada sobre el *cuadro*, desde el punto de vista, es el *punto principal*, que podremos construir materialmente. Un espacio de tres dimensiones, trazado por el ojo del observador paralelamente al *geométral*, determinará en el *cuadro* el *plano de horizonte*, paralelo al de tierra, que contiene el *punto principal*.

La preparación del *cuadro* no presentará dificultad: bastará coger un cubo, vaciarlo, trazar en él dos planos horizontales, y fijar en este último el punto principal: como basta para hacer un dibujo ordinario, tomar un cuadrado de papel, trazar en él dos rectas paralelas, que representen la línea de tierra y la de horizonte, y marcar la proyección del punto de vista.

Dispuesto el cuadro, la perspectiva se construye por los procedimientos ordinarios, teniendo en cuenta las reglas siguientes:

1.^a *La perspectiva de una recta es otra recta*, intersección del plano determinado por la primera y el ojo del observador, con el cuadro.

2.^a *La perspectiva de un plano es otro plano*, determinado por la radiación que proyecta el primero desde el punto de vista, la cual llena por completo un espacio de tres dimensiones, al ser cortada por el Universo del cuadro.

3.^a *La perspectiva de rectas paralelas se compone de rectas concurrentes en un punto*. Estas son las intersecciones del cuadro con planos proyectantes de las primeras, los cuales se cortan todos según una misma recta que pasa por el centro de proyección.

4.ª *La perspectiva de planos paralelos se compone de planos que pasan todos por una misma recta, llamada de fuga.* Estos son las intersecciones del cuadro con los universos proyectantes de los primeros, los cuales tienen común un mismo plano que contiene el punto de vista.

La resolución gráfica de un problema mecánico se hace, en el dibujo, aplicando los principios de la Geometría descriptiva y determinando la posición de los cuerpos por medio de un sistema de tres ejes, que aun cuando sean rectangulares en el espacio forman diferentes ángulos en el papel. El mismo procedimiento puede adoptarse para la resolución de problemas de estática, dinámica y cinemática, con cuerpos de cuatro dimensiones; pues si bien no podemos imaginar cuatro rectas que pasen por un punto y sean perpendiculares dos a dos, es posible referir el movimiento de un objeto proyectado sobre nuestro espacio, a ejes que no formen ángulos rectos y sean las proyecciones de las aristas de un cubo tetradimensional.

Los procedimientos ordinarios sobre la composición de fuerzas serán en un todo aplicables; y la cinemática dará resultados sorprendentes, haciendo ver la libertad y amplitud de los movimientos en un espacio con más dimensiones que el nuestro. Si el número de éstas es cero, el sistema considerado es un punto; y ningún movimiento es posible; si el espacio es de una sola dimensión, y rectilíneo o de primer orden, no tendrán los objetos más movimiento que el de traslación a lo largo de la recta que los contiene; el resbalamiento será únicamente realizable, la rodadura no existirá en este mundo singular. Si el sistema en estudio es de dos dimensiones y además plano o de curvatura constante, el transporte de las figuras en él se hará sin deformación: una circunferencia podrá ser trasladada de un lugar a otro o bien rodar sin resbalamiento sobre otra línea; pero dos puntos bastarán para determinar su posición en un instante cualquiera, porque fijada la recta que por ellos pasa, no será posible imprimir a la circunferencia movimiento alguno sin sacarla de su plano. Si un cuerpo es de los que existen en nuestro mundo, la traslación, la rodadura, la rotación alrededor de un eje y los movimientos epicicloidales son posibles; la posición de él se determina por la de tres puntos. En el espacio de cuatro dimensiones finalmente, un cuerpo puede girar alrededor de una recta, verificando un movimiento análogo al de una esfera cuyo centro

estuviera fijo : los carruajes tetradimensionales tendrán ruedas esféricas que se moverán de esta manera irrealizable para nosotros ; serán más seguros que los nuestros, no obstante la mayor libertad de sus movimientos.

Esta mecánica original, permite componer fuerzas que actúan según la cuarta dimensión, interpretar los fenómenos físicos y químicos, y exponer una concepción mecánica del calor que lleva a considerarlo como causa de la luz, de la electricidad y de la combinación química.

Se principia por atribuir los diferentes estados de los cuerpos a fuerzas extrañas que se ejercen sobre el medio en que vivimos. Si una gota de agua, se dice, cayera sobre un plano horizontal y, bajo la acción de la gravedad, se extendiera en todos sentidos en virtud del principio de Pascal, ejerciendo presión sobre una línea cerrada que le impidiera dilatarse ; un sér de dos dimensiones que observara estos efectos colocado de pie en la circunferencia de un círculo, el cual le atrajera hacia su centro, atribuiría al líquido las propiedades de un gas, porque le vería comportarse como tal : más si el recipiente del que se ha vertido la gota de agua, fuese atravesado de alto a bajo por el espacio plano del observador, el cual al levantar los ojos contemplaría sobre su cabeza el líquido adaptándose al vaso, tomando su forma y presentando una superficie perfectamente horizontal y plana, el cuerpo ya no parecería gaseoso en este mundo hipotético.

La ley de supuesta analogía entre los seres de dos y tres dimensiones, nos lleva a enunciar la siguiente proposición : *un mismo cuerpo será líquido o gaseoso, según que sobre él se ejerza una fuerza paralela o perpendicular a nuestro espacio.*

El calor se supone también que es una presión del espacio tetradimensional ejercida sobre el Universo en que vivimos. Esta hipótesis explica el enfriamiento de los cuerpos sumergidos en un medio de temperatura inferior a la suya. Acudiendo a la imagen del plano, y representando por una recta perpendicular a él la intensidad de la presión-calor soportada por la molécula de un objeto ; la presión total que actúa sobre el mismo vendría representada por el volumen de un cilindro recto cuya base fuera el cuerpo bidimensional considerado y la altura el valor de la presión molecular. La fuerza íntegra tenderá a ensanchar el cilindro ; y como la energía, medida por el volumen del

mismo, no se pierde y debe permanecer constante, será preciso que la altura disminuya hasta hacerse igual a la del medio ambiente.

Admitido como fuerza tetradimensional el calor, y habiendo desprendimiento o absorción de él en toda combinación química, se deduce fácilmente la explicación de ella.

Suponed una multitud de moléculas planas de azufre y hierro : interpuestas las unas entre las otras, nada más fácil que separarlas por procedimientos mecánicos o físicos, propios de un mundo bidimensional ; pero colocad las primeras encima de las segundas, en el sentido de la tercera dimensión, y habréis formado un cuerpo, el sulfuro ferroso, distinto de los componentes simples empleados, imposible de destruir para un sér de dos dimensiones por procedimientos de carácter intuitivo.

En el primer caso, azufre y hierro estaban nada más que mezclados ; en el segundo fueron combinados por la presión-calor. Mientras ésta no hace más que comprimir la materia, se limita a producir los efectos de temperatura o dilatación ; pero en cuanto la presión es suficiente a vencer la resistencia del medio y transportar fuera del plano algunas moléculas o unidades materiales para superponerlas a las otras, se establece un nuevo estado de equilibrio y la combinación tiene lugar con un desprendimiento de luz que puede ser interpretado por un hecho de observación vulgar.

Recordad cómo dejando caer una piedra en la superficie del agua se produce en torno del punto tocado una depresión, seguida de una condensación cuando las moléculas primeramente separadas por el choque, vuelven a juntarse al desaparecer la causa que las separó ; recordad cómo esta dilatación y condensación sucesivas se propagan en la superficie de un lago, rizándola de modo caprichoso y formando una serie de ondas que van a chocar contra la orilla. Notad que si el mecanismo de la combinación química es tal como lo hemos expuesto, la materia extendida en una superficie plana deberá vibrar de un modo análogo bajo el impulso de una presión normal, y comprenderéis cómo se produce el fenómeno luminoso.

De igual modo que la luz es un movimiento oscilatorio transmitido de unas moléculas a otras, sin traslación de materia ; la electricidad en el espacio de dos dimensiones, es una rotación de los átomos alre-

dedor de un eje situado en su plano, la cual no puede ser imaginada por un sér bidimensional porque exige la intuición de nuestro espacio.

Tal hipótesis explica la descomposición de los cuerpos por la corriente eléctrica. Tomemos como ejemplo el agua : una fila de moléculas que va del electrodo positivo al negativo en un voltámetro, es una serie de columnitas perpendiculares al plano del ser imaginario, formadas cada una por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Una acción del espacio tridimensional, hace girar todos estos sistemas moleculares y coloca sus ejes en el plano de la base : la combinación se ha convertido en mezcla ; y la fuerza centrífuga de la rotación lanza los elementos componentes a los polos del analizador.

La hipótesis de la cuarta dimensión permite considerar como fenómenos naturales hechos hasta hoy comprendidos en la esfera de lo sobrenatural.

Después de Crookes, el insigne descubridor de la materia radiante, y por indicación suya, Zollner, profesor de Física astral en la Universidad de Leipzig, estudió las manifestaciones de la fuerza psíquica con el *medium Slade* ; y refiere que vió por dos veces deshacerse los nudos de una cuerda, estando selladas sus extremidades, de acuerdo con lo demostrado matemáticamente por Félix Klein.

El fenómeno para un espacio bidimensional, podría imaginarse de la manera siguiente : supongamos en un plano una cuerda sujeta por una de sus extremidades y hagamos que la extremidad libre gire hasta formar una curva con un punto doble : así habremos formado un lazo para un habitante de ese mundo, el cual sólo podrá deshacerlo efectuando el giro en sentido inverso ; pero que uno de nosotros deshará fácilmente rebatiendo alrededor de una tangente, cualquiera de las dos ramas de la curva que se cortan en el punto doble, mediante una ligera torsión.

Así se comprende la desaparición de los nudos en nuestro espacio bajo la acción de una fuerza del universo tetradimensional. Zollner, para demostrar que el fenómeno se verifica análogamente a como se acaba de indicar, cita las torceduras aparecidas en dos correas sin fin, anudadas en su presencia por este procedimiento misterioso : las correas no hubieran presentado aquellas torceduras, dice el profesor

alemán, si los nudos se hubieran formado por separación de la materia o contradiciendo la ley de la impenetrabilidad.

Lo dicho pone de manifiesto la importancia que tiene en Matemáticas, Física y Química la hipótesis del hiperespacio, cuya realidad objetiva, que la experiencia no ha podido demostrar, en nada se opone a la posibilidad conceptual, fundamento de una interpretación del mundo físico distinta de la que por tanto tiempo ha perseguido inútilmente la vieja teoría átomomecánica.

Un estudio matemático del espacio tetradimensional puede verse en el discurso leído por nuestro sabio compañero, el doctor Torroja, ante la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona el día de su recepción en aquella Casa. Este trabajo, al cual contestó el doctor Terradas, haciendo del joven académico un merecido elogio, prueba el acierto que ha tenido la docta corporación llamando a su seno al distinguido Ingeniero y Catedrático, que con sus méritos personales hace honor al apellido de su padre a quien la Ciencia española debe tan relevantes servicios.

V

Es claro que el concepto de espacio no puede ser engendrado por el pensamiento.

GRASSMAN

En los últimos años las ideas de Riemann han adquirido tal desenvolvimiento, con los trabajos de algunos matemáticos y físicos distinguidos, que aun corriendo el riesgo de dar demasiada extensión a este discurso, no creo pueda excusarme de hablar algo acerca de tan interesantes investigaciones.

El ilustre profesor de la Escuela Politécnica de Zurich, señor Weyl, en su breve exposición de la Geometría riemanniana, dice: *un espacio multidimensional es una variedad de n dimensiones cuya métrica viene expresada por medio de una forma diferencial cuadrática, definida y positiva.*

Partiendo de esta definición y aplicando el concepto de curvatura de Gauss generalizado por Riemann, se llega a la determinación de las tres Geometrías que Weyl considera no abarcan por completo el pensamiento del profundo analista: para demostrarlo cita sus mismas palabras:

«La validez de las hipótesis de la Geometría en lo infinitamente pequeño está ligada con el principio íntimo de las relaciones métricas del espacio. En una variedad discreta este principio se halla contenido en el concepto de ella, mientras que en una variedad continua ha de venir de otra parte. Es preciso, pues, o que la realidad sobre la cual

está fundado el espacio forme una variedad discreta, o que el fundamento de las relaciones métricas se busque fuera de él, *en las fuerzas de ligadura que actúan sobre él.*

»La respuesta a este dilema sólo puede obtenerse partiendo de la concepción de los fenómenos, verificada hasta aquí por la experiencia, que Newton tomó para base; y aportando a esta concepción las modificaciones sucesivas exigidas por los hechos que no puede explicar. Las investigaciones que parten de los conceptos generales, no pueden tener otra utilidad que impedir la paralización del trabajo por puntos de vista demasiado estrechos, y favorecer el progreso en el conocimiento de la dependencia mutua de las cosas, muchas veces obstaculizado por los prejuicios tradicionales.

»Esto nos conduce al dominio de otra ciencia, al campo de la Física, donde el objeto especial que nos proponemos no nos permite penetrar.»

Hasta aquí las palabras de Riemann; a ellas añade Weyl las siguientes: «Hagamos abstracción de la primera hipótesis: *que la realidad fundamental del espacio sea una variedad discreta*, aun cuando quizá algún día la solución definitiva del problema se halle en esta parte de la alternativa, según hace suponer la teoría de los *cuanta*; pero prescindamos de ella por el momento y tratemos de penetrar el sentido de la segunda hipótesis. Riemann niega en ésta que la métrica del espacio sea independiente de los fenómenos físicos desarrollados en su seno, y que pueda fijarse desde luego de tal suerte que lo real entre en el espacio como en una casa alquilada; afirma más bien, contrariamente a la creencia habitual, *que el espacio en sí no es otra cosa sino una multiplicidad tridimensional amorfa y que es el contenido material que lo llena quien le da su forma y determina sus relaciones de medida.* El problema a resolver entonces consiste en hallar las leyes según las cuales esta determinación se hace; la forma métrica fundamental cambiará con el transcurso del tiempo, como la materia cambia en el Universo. La posibilidad del paso de un lugar a otro de un cuerpo, sin alteración de sus relaciones métricas, se vuelve a encontrar si el cuerpo arrastra en su movimiento el *campo métrico* que engendra: de igual modo una masa que bajo la influencia de un campo de fuerza creado por ella, ha tomado una figura de equilibrio, se defor-

ma si se puede fijar el campo desplazando la masa ; pero conserva su forma en un movimiento bastante lento para que arrastre con ella el campo de fuerza producido. Nosotros precisaremos la idea atrevida de Riemann y mostraremos que si esta manera de ver es aceptable, dos porciones cualesquiera de espacio tales que se puede pasar de una a otra por una deformación continua, deben considerarse como congruentes, ya que la misma cantidad de materia llena tanto la una como la otra de ambas porciones». Estas palabras son de la obra *Tiempo, espacio y materia*.

La teoría de Einstein confirma las ideas de Riemann considerando el tiempo como una cuarta coordenada. *El principio íntimo de las relaciones métricas* hay que buscarlo en la fuerza gravitatoria. El campo de gravitación ejerce sobre los rayos luminosos y sobre los cuerpos sólidos tomados como *patrones* de medida una acción que produce una métrica muy poco diferente de la euclidiana ; pero las relaciones que la integran no provienen de un espacio considerado como forma de los fenómenos, sino del cálculo de las modificaciones físicas de los patrones y de los rayos luminosos producidas por el campo gravitatorio.

Los resultados obtenidos por Riemann indujeron a los matemáticos a edificar la construcción formal del sistema geométrico que en ellos se funda : Chistoffel, Ricci, Levi-Civita, fueron los primeros y más importantes creadores de él ; pero el verdadero continuador de Riemann, el que realizó las predicciones de éste setenta años después fué Einstein.

Sin embargo, un espíritu tan clarividente como el de Weyl, dice al definir los conceptos de punto y vector por medio de las ecuaciones lineales, después de indicar la conveniencia de aplicarlas al desenvolvimiento de la Geometría, las siguientes palabras :

«Si es de una parte, muy satisfactorio presentar las imágenes espaciales bajo una forma sintética, es preciso insistir, por otra parte, sobre la poca luz que la matemática da en cuanto a la esencia del espacio : la Geometría no nos enseña nada sobre el espacio intuitivo ; sobre lo que es en sí y sobre lo que le distingue *de los estados de una máquina de calcular, de las mezclas de gases o de las soluciones de un sistema de ecuaciones*. Hacer esto concebible o eventualmente mostrar por qué permanece inconcebible, es un problema metafísico. Nosotros, mate-

máticos, podemos estar orgullosos de la maravillosa claridad de las teorías que hemos separado del conocimiento del espacio ; pero debemos, no obstante, sentirnos modestos, porque nuestras teorías conceptuales no pueden hacernos aprehender sino la parte más formal y superficial de la esencia del mismo.»

Tan juiciosos conceptos prueban, como Weyl no es de aquellos matemáticos contra los cuales Hamilton ha exagerado sus diatribas, cuya lógica, según D'Alembert, no va más allá de sus fórmulas. Una vez más se observa que la Geometría no solamente mide los cuerpos sino también los espíritus.

En España han sido propagandistas de tan sorprendentes concepciones, nuestro sabio compañero el doctor Terradas, a quien el profesor Weyl dedicó su obra acerca del problema del espacio por medio de la teoría de los grupos, del cual ha dicho el propio Einstein que era el hombre más extraordinario conocido por él ; y los catedráticos de la Universidad Central señores Cabrera, Rey Pastor, Carrasco y Plans. Este último pudiera sin exageración ser llamado el Apóstol de la *relatividad* en nuestro país : al estudio de tan bella teoría ha dedicado sus talentos y laboriosidad inagotables, y una buena fe capaz de hacer atrayente hasta el error. No sienta el joven académico los desfallecimientos de que nos habla en su discurso de recepción leído el 18 de mayo último ante la Real Academia de Ciencias de Madrid : no tiene motivo para desfallecer quien como él ha dedicado su vida al cultivo de las facultades más nobles del espíritu, obteniendo en pago de su labor la íntima satisfacción que proporciona un conocimiento más profundo de la realidad que el alcanzado por la mayoría de los hombres.

He llegado al límite que deliberadamente había impuesto a este trabajo : aun cuando así no fuera, la profunda admiración que siento por ese grupo de hombres superiores, cuya inteligencia viene dedicándose a una obra de geometrización de la Física llamada a invertir los fundamentos de la ciencia, sellaría mis labios. No soy un insolvente en el terreno científico ; y no por lo que yo valga, sino porque os presento a vosotros, Maestros queridos de esta Casa depositaria del saber : por eso no querría figurar entre los descendientes de aquellos *beocios*, tan mal conceptuados en la antigua Grecia, cuyos gritos temía Gauss al patrocinar las ideas de Riemann ; ni tampoco que al-

guien pudiera confundirme con aquel diputado de *La Regenta* que todo lo hacía cuestión personal ; pero tampoco quisiera, por un exagerado respeto al principio de autoridad científica, caer en aquel error de algunos pangeómetras calificado gráficamente por Stallo de *objetivación de los conceptos* ; porque yo creo, aun cuando Calderón de la Barca haya dicho lo contrario, que ni toda *la vida es sueño* ni todos los sueños del alma tienen realidad fuera de nuestra mente.

HE DICHO.

