

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Título: Superficie de volatilidad e interpolación de opciones del Ibex no cotizadas

Autor: Oriol Madaula Esquirol

Tutor: Luis Ortiz Gracia

Curso: 2015/2016

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

Trabajo Fin de Máster

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

Superficie de volatilidad e interpolación de opciones del Ibex no cotizadas

Autor: Oriol Madaula Esquirol

Tutor: Luis Ortiz Gracia

El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto.

Resumen

El trabajo consiste en dibujar la superficie de volatilidad para las opciones del IBEX35 y así poder estimar la prima de opciones no cotizadas, como paso intermedio se calcula la sonrisa de volatilidad y se comprueba la paridad *put-call*. La volatilidad implícita para dibujar la sonrisa y la superficie de volatilidad se obtiene aplicando los métodos de Newton-Raphson, Secante y Bisección a una variante de fórmula de Black-Scholes, el modelo Black'76. Finalmente se valora una opción con un método de volatilidad estocástica como es el de Heston. Los datos se han recogido del boletín diario del MEFF.

Palabras clave

Volatilidad implícita; superficie de volatilidad; Black-Scholes; Black'76; IBEX35

Abstract

This paper consists of drawing the IBEX35 volatility surface so that the premium of unlisted options can be estimated. As an intermediate step the volatility *smile* is calculated and *put-call* parity is checked. The implied volatility to draw the *smile* and volatility surface is obtained by applying Newton-Raphson, Secant and Bisection methods to a variant of Black-Scholes formula, the Black'76 model. To conclude an option is valued with a stochastic volatility method such as Heston. The data were collected from MEFF daily bulletin.

Keywords

Implied volatility; volatility surface; Black-Scholes; Black'76; IBEX35

Índice

1. Introducción	6
2. Conceptos básicos de opciones y base de datos	7
2.1. Conceptos básicos de las opciones	7
2.2. Base de datos	11
3. Modelo de Black-Scholes-Merton	13
3.1. Cálculo de la volatilidad implícita.....	14
3.2. <i>Smile</i> y superficie de volatilidad	21
3.3. Opciones no cotizadas e interpolación	29
4. Modelo de Heston	33
4.1. Calibración	33
4.2. Valoración.....	34
5. Conclusiones	35
6. Apéndice	36
7. Bibliografía	41

1. Introducción

Anteriormente a la realización de este trabajo tenía unos conocimientos básicos de las opciones y había llevado a cabo estrategias simples con ellas, mayoritariamente con opciones del IBEX35, pero operaba sin conocer con profundidad a qué se debía su valoración porque me guiaba con la información que proporcionaba el MEF¹. Por ejemplo, sabía que las opciones con precios de ejercicio (*strikes*) bajos tenían una volatilidad mayor que las opciones con *strikes* altos, pero no era consciente de que esto contradecía uno de los principios básicos de Black-Scholes, el método de valoración de opciones por excelencia. Por este motivo cuando me propusieron el tema me pareció que sería una forma muy interesante de profundizar en los conocimientos de valoración de opciones y, lo más interesante, es que podría aportar datos reales de mercado para contrastar el trabajo y así conseguir que tuviera una aplicación práctica.

El objetivo principal del trabajo es doble, por un lado, demostrar con datos reales de mercado que a pesar de que se sigue usando el modelo de Black-Scholes-Merton, y sus variantes, uno de sus principios básicos como es el de la volatilidad constante dejó de cumplirse a partir de 1987. Esta parte del trabajo está documentada en muchos otros artículos como pueden ser Rubinstein (1994), Peña *et al.* (1999) o Derman (2003). El segundo objetivo principal del trabajo sería, usando la superficie de volatilidad y la interpolación por *splines* cúbicos, poder llegar a valorar opciones no cotizadas, basándonos en el modelo de Black-Scholes-Merton y en el modelo de volatilidad estocástica de Heston.

El modelo de Black-Scholes-Merton fue desarrollado en 1973 por Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton y es un modelo matemático que revolucionó la valoración de opciones hasta tal punto que en 1997 Merton y Scholes recibieron el premio Nobel de economía. Black falleció en 1995 pero también se le reconoció su contribución. Con anterioridad a este modelo ya existían métodos para calcular precios teóricos de las opciones pero eran poco precisos. Justamente la gran virtud del modelo de Black-Scholes-Merton era que con una fórmula cerrada y muy sencilla de implementar se conseguía valorar correctamente las opciones.

Los datos constatan que, antes del 1987, la volatilidad no dependía ni del *strike* ni del vencimiento, pero a partir del *crash* de 1987 el paradigma cambió y se empezó a observar que la volatilidad de una opción variaba en función del *strike* y en menor medida del vencimiento. Este hecho contradecía uno de los principios fundamentales del modelo de Black-Scholes-Merton ya que se suponía que la volatilidad debía ser constante. Esto provocó que tomaran relevancia otros métodos de valoración de opciones como pueden ser modelos de volatilidad estocástica o de difusión por saltos:

1. Los modelos de volatilidad estocástica suponen que la volatilidad sigue un proceso estocástico correlacionado con el proceso del precio del activo subyacente. El modelo más popular es el modelo de Heston (1993) que se explicará en el cuarto apartado. La principal dificultad de este modelo es calibrarlo correctamente.

¹ Mercado Oficial de Opciones Y Futuros Financieros en España

2. En los modelos de difusión con saltos se permite incorporar la posibilidad de saltos en el movimiento browniano que define el movimiento del precio del activo. Estos saltos siguen una distribución de *Poisson* y así se intenta aproximar el modelo a la realidad del mercado. Este método fue adaptado para la valoración de opciones por Merton (1976).

Estos nuevos modelos no se han acabado de imponer en la valoración de opciones simples, las llamadas *plain vanilla*, y mayoritariamente se siguen usando los modelos basados en Black-Scholes, pero en vez de suponer la volatilidad constante se valoran las opciones con la volatilidad implícita que se puede calcular con datos del mercado.

Para la realización del trabajo se ha optado por usar datos de las opciones del índice IBEX35 debido a que es el activo más líquido del MEF y porque prácticamente no hay opciones sobre acciones de tipo europeo en este mercado, que son el tipo de opciones a las que se puede aplicar el modelo de Black-Scholes-Merton. El subyacente de las opciones del IBEX35 es el futuro del MINI IBEX35² con el mismo vencimiento que las opciones, hecho que provoca que el precio del subyacente sea distinto para cada vencimiento y no se pueda aplicar la fórmula tradicional de Black-Scholes. Por este motivo se introduce el modelo Black'76 que es una variante del modelo tradicional de Black-Scholes-Merton publicado en 1976 por Fisher Black y que permite aplicar una fórmula cerrada parecida a la fórmula de Black-Scholes para opciones cuyo subyacente es un futuro, sea un índice, bono, materia prima etc. Una vez comprobada la existencia de la sonrisa de volatilidad se dibuja la superficie de volatilidad del IBEX35, una práctica habitual del mercado, que entre otras ventajas permite valorar opciones que no estén cotizadas aplicando una sencilla interpolación, como puede ser la interpolación por *splines* cúbicos. También se propone un método alternativo para valorar opciones, el modelo de Heston, que es un modelo de volatilidad estocástica bastante popular para cotizar opciones exóticas como pueden ser las opciones con barrera.

El resto del artículo se estructura de la siguiente manera. En el siguiente apartado se hace una breve introducción al mundo de las opciones para tener claros los conceptos básicos y también se aprovecha para explicar los datos utilizados. En el tercer apartado se explica el modelo de Black-Scholes-Merton, se calcula la volatilidad implícita para dibujar la sonrisa y superficie de volatilidad y finalmente se cotizan varias opciones no cotizadas. En el cuarto apartado se introduce el modelo de Heston, se presenta la calibración realizada y se valoran algunas opciones. La quinta sección recoge las conclusiones y la sexta el código de R que se ha desarrollado.

2. Conceptos básicos de opciones y base de datos

2.1. Conceptos básicos de las opciones

En este apartado se introducirán los conceptos básicos de las opciones.

² Es un futuro del IBEX pero el multiplicador es 1 euro, es decir, cada punto del futuro equivale a un euro.

2.1.1. Breve historia

Como se comenta en el libro de Lamothe y Pérez (2003), griegos y romanos ya usaban productos con la misma filosofía que las opciones, pero todo parece indicar que el primer mercado de opciones con un mínimo de organización apareció en Holanda en el siglo XVII. Ahora bien, el boom de las opciones empieza en 1973 por dos motivos: a) se crea el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), el primer mercado de opciones totalmente organizado y b) ese año Black, Scholes y Merton publicaron el modelo que revolucionó la valoración de opciones al permitir obtener, mediante una sencilla fórmula, los valores teóricos de las primas para las opciones *calls* y *puts* europeas.

2.1.2. Información general

Una opción es un contrato que le da a su comprador, a cambio del pago de una prima, el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo financiero a un determinado precio (*strike* o precio de ejercicio) durante un periodo determinado de tiempo o en una fecha determinada (vencimiento). La parte vendedora tiene la obligación de vender o comprar, dependiendo de si vende una *call* o una *put*, el activo subyacente al precio pactado.

Las opciones son, posiblemente, el activo financiero derivado más versátil y el que ofrece más alternativas de estrategias para podernos beneficiar de todos los movimientos del mercado. Como se comenta en Casanovas (2014) las opciones se pueden negociar en mercados especializados donde se cotizan opciones con unas características estándar, o se pueden adquirir en mercados OTC, *over-the-counter*, que tienen la ventaja que se pueden crear opciones a medida pero con el inconveniente que el precio no es público y se asume riesgo de contraparte.

Los principales usos de las opciones son tres:

1. Usarlas como cobertura ante variaciones del precio, ya que permite proteger una cartera de los vaivenes del mercado.
2. Para generar ingresos recurrentes, el llamado *income trading*, que se basa en la generación de ingresos por la venta sistemática de opciones de compra y venta, normalmente mediante la estrategia de Iron Condors, que permiten obtener beneficios con el paso del tiempo por la pérdida de valor temporal de las opciones, el denominado *time decay*.
3. Para especular e invertir, las opciones son una forma de comprar acciones con descuento.

Hay dos tipos de opciones, las opciones de compra se denominan *Call* y las opciones de venta se denominan *Put*. Asimismo, también se han creado dos categorías básicas de opciones, las *plain vanilla* y las exóticas; nos centraremos en las opciones *plain vanilla* que son las básicas. Las opciones *plain vanilla* se dividen en dos clases, las opciones europeas que solo³ pueden ser ejercidas al momento del vencimiento, y las opciones americanas que se pueden ejercer en cualquier momento hasta el vencimiento.

³ Según la RAE la recomendación general es la de no tildar nunca la palabra solo porque no cumple el requisito fundamental que justifica el uso de la tilde diacrítica y las posibles ambigüedades pueden resolverse casi siempre por el propio contexto comunicativo.

2.1.3. Factores para determinar las primas de las opciones

Además de la oferta y la demanda se deben tener en cuenta seis factores:

1. Precio de ejercicio (*strike*). Es el precio en el que el comprador de una *call* puede comprar el subyacente y el comprador de una *put* lo puede vender. Cuando más alto sea más barata será la *call*, ya que hay menos posibilidades que alcance ese precio, y más cara será la *put*.
2. Vencimiento. En las opciones europeas el vencimiento es el momento en que se puede ejercer la opción, en cambio en las opciones americanas las opciones se pueden ejercer hasta la fecha de vencimiento. Cuanto mayor sea el vencimiento más caras serán las *calls* y *puts*. A medida que pasa el tiempo y se acerca el vencimiento las opciones van perdiendo valor, es el denominado *time decay*. Este efecto no es lineal y se acentúa el último mes de vida de las opciones.
3. El precio del activo subyacente. Es un aspecto muy relevante ya que determinará si nos sale rentable ejercer la opción, es decir, si obtendremos beneficios o no. Cuanto mayor sea el precio del subyacente, mayor será el precio de la *call* y menor el de la *put*.
4. Volatilidad. Es otro factor muy importante y bastante volátil, un incremento de la volatilidad hará aumentar el precio tanto de las *calls* como de las *puts*. Esto es debido a que un aumento de volatilidad hace más probable que el precio del subyacente supere el precio de ejercicio y que se ejecute la opción.
5. Dividendos. Los dividendos en efectivo afectan de forma significativa el precio de una acción, reduciéndolo en la misma cuantía que el dividendo, por eso como el pago de dividendos influye sobre el precio del subyacente se tiene en cuenta a la hora de calcular el precio de las opciones.
6. Tipo de interés libre de riesgo. Es el coste de oportunidad de la inversión en una opción. El efecto sobre el precio de las opciones es bajo y más en la actualidad, con los tipos de interés en mínimos históricos.

Los dos primeros factores son endógenos del contrato de la opción, al operar con una opción debemos decidir con que vencimiento y *strike* lo haremos, los otros cuatro factores son exógenos, pero todos –a excepción de la volatilidad– se pueden observar directamente en el mercado. Por tanto, para valorar una opción que no esté negociada, necesitaremos saber o hacer una estimación de su volatilidad. Por este motivo es especialmente útil la interpolación de una volatilidad no conocida, como se verá en el apartado 3, ya que nos permite estimar la volatilidad de una opción no negociada y así conocer su prima.

2.1.4. Opciones “in the money”, “out the money”, “at the money”

Las opciones se pueden clasificar dependiendo el precio de ejercicio y de la cotización del activo subyacente de la siguiente manera:

1. “In the money” (ITM): para las opciones *calls* una opción estará ITM cuando el precio de ejercicio sea inferior al precio del subyacente, por el contrario, las

- opciones *puts* estarán ITM cuando el precio de ejercicio sea superior al precio del subyacente.
2. “Out the money” (OTM): para las opciones *calls* una opción estará OTM cuando el precio de ejercicio sea superior al precio del subyacente, por el contrario, las opciones *puts* estarán OTM cuando el precio de ejercicio sea inferior al precio del subyacente.
 3. “At the money” (ATM): una opción está ATM, tanto una *call* como una *put*, cuando el precio del subyacente es similar al precio de ejercicio.

2.1.5. Características de las opciones del IBEX35

El Mercado Oficial de Opciones Y Futuros Financieros en España (MEFF) es un mercado organizado regulado creado en 1989 pero que, a pesar de sus 27 años de actividad, se caracteriza por ser muy ilíquido, con muy pocas operaciones diarias. Si nos centramos en los volúmenes de negociación de las opciones, vemos que las opciones del MINI IBEX35 apenas tienen unos pocos centenares de cruces al día, principalmente las operaciones se concentran en *strikes* ATM y con un vencimiento no superior a los tres meses, y muy pocas opciones sobre acciones llegan a tener alguna decena de operaciones diarias. Esto provoca que las horquillas sean muy amplias, que no haya ninguna contrapartida en momentos complicados de mercado y que muy pocos operadores confíen y operen en el mercado. Para hacernos una idea, según datos del MEFF, en 2014 el número medio de contratos negociados en un día fue de unos 129.000 contratos y en 2015 de unos 105.000, incluyendo opciones sobre acciones y opciones del IBEX35. En cambio, solo el 06/05/2016 se negociaron 1.782.129 opciones del SPY⁴ con un vencimiento inferior a un mes.

Tabla 1.
Resumen características opciones IBEX35.

Activo Subyacente	Futuro mini (1 punto = 1€) sobre el IBEX35 con el mismo vencimiento.
Tipos de opción	<i>Calls</i> y <i>Puts</i> .
Vencimiento	El tercer viernes de cada mes.
Fecha de ejercicio	La fecha de vencimiento.
Ejercicio	Automático para todos los contratos que aporten beneficios a su tenedor.
Último día de negociación	La fecha de vencimiento.
Precios de ejercicio	En puntos enteros del futuro mini sobre el IBEX35.
Forma de cotización de las primas	En puntos enteros del futuro mini sobre IBEX35, con una fluctuación mínima de 1 punto, que equivale a 1€.
Fluctuación máxima de las primas	No existe
Garantías	Variable en función de la cartera de opciones y futuros. Se puede obtener una estimación con la calculadora de garantías del MEFF .

Fuente: Lamothe y Pérez (2003)

⁴ El SPY es el ETF de referencia que replica el índice S&P500.

2.2. Base de datos

Los datos para realizar los cálculos se han extraído del boletín diario del MEFF. Estos boletines se dividen en dos partes donde aparece la información relativa a los futuros y opciones negociados en el mercado del MEFF.

Tabla 2.

Información disponible de los futuros en el Boletín Diario del MEFF.

INDICE IBEX-35

Cierre anterior	8.978,80	18/03/16
● Cierre IBEX - 35	9.051,10	

FUTUROS IBEX - 35

FUTUROS POR DIFERENCIAS	LIQUIDACIÓN DIARIA	ÚLTIMO CRUZADO	MÁXIMO SESIÓN	MÍNIMO SESIÓN	VOLUMEN CONTRATOS	POSICIÓN ABIERTA
18-Mar-16	9.055,0	9.055	9.068	8.905	10.224	-
15-Abr-16	9.021,1	9.004	9.041	8.873	18.402	81.882
20-May-16	8.956,0	8.955	8.955	8.935	22	139
17-Jun-16	8.922,0	8.885	8.900	8.885	4	428
16-Sep-16	8.826,0	-	-	-	-	21
16-Dic-16	8.721,0	-	-	-	106	2.045
17-Mar-17	8.661,0	-	-	-	-	-
16-Jun-17	8.541,0	-	-	-	-	-
15-Sep-17	8.439,0	-	-	-	-	-
15-Dic-17	8.349,0	-	-	-	-	240
16-Mar-18	8.270,0	-	-	-	-	-
15-Jun-18	8.156,0	-	-	-	-	-
21-Dic-18	7.951,0	-	-	-	-	5
21-Jun-19	7.746,0	-	-	-	-	-
20-Dic-19	7.540,0	-	-	-	-	-
19-Jun-20	7.323,0	-	-	-	-	-
18-Dic-20	7.108,0	-	-	-	-	-

Fuente: Boletín Diario del MEFF

Como se puede observar en la tabla 2 de los futuros se informa, separado por vencimientos, del valor de la liquidación diaria al cierre, el precio del último contrato cruzado durante el día y el precio del contrato cruzado en el máximo y en el mínimo de la sesión. También se informa del número de contratos negociados durante el día y del total de posiciones abiertas. Esta información aparece sobre los futuros del índice IBEX35 y MINI IBEX35 como de las acciones que disponen de futuros negociados en el MEFF. Al aplicar la fórmula de Black'76 necesitaremos la liquidación diaria según el vencimiento.

Tabla 3.

Información disponible de las opciones en el Boletín Diario del MEFF.

OPCIONES IBEX-35

Cierre anterior	-	05/05/16
 Cierre MINI IBEX-35	-	

OPCIONES COMPRA (CALL)	PRECIOS CIERRE	ÚLTIMO CRUZADO	MÁXIMO SESIÓN	MÍNIMO SESIÓN	VOLATILIDAD CIERRE	DELTA CIERRE	VOLUMEN CONTRATOS	POSICIÓN ABIERTA
May-16 7.400	1.227,00	-	-	-	33,86	0,99	-	25
May-16 7.600	1.030,00	-	-	-	32,23	0,97	-	11
May-16 7.700	933,00	-	-	-	31,41	0,96	-	10
May-16 7.800	836,00	-	-	-	30,60	0,95	-	55
May-16 7.900	741,00	-	-	-	29,79	0,93	-	16
May-16 8.000	649,00	-	-	-	28,97	0,90	-	24
May-16 8.100	558,00	-	-	-	28,16	0,87	-	6
May-16 8.200	472,00	-	-	-	27,34	0,82	-	43
May-16 8.300	389,00	492,00	492,00	480,00	26,53	0,77	12	31
May-16 8.400	313,00	318,00	398,00	318,00	25,71	0,70	12	30
May-16 8.500	243,00	332,00	332,00	322,00	24,90	0,62	11	59
May-16 8.600	182,00	190,00	268,00	190,00	24,08	0,53	40	126
May-16 8.700	131,00	144,00	200,00	139,00	23,46	0,44	11	1.082
May-16 8.800	90,00	90,00	147,00	90,00	22,91	0,34	47	246
May-16 8.900	58,00	62,00	105,00	62,00	22,35	0,25	141	287

Fuente: Boletín Diario del MEFF

Las opciones están separadas en dos bloques, uno para las opciones de compra, *calls*, y otro para las opciones de venta, *puts*. En los dos bloques aparece la misma información que está separada por vencimiento y *strike*. Se informa del precio en cierre, el precio del último cruce durante el día y los precios del cruce correspondiente al máximo y mínimo de la sesión. También se informa de la volatilidad cierre, que es la volatilidad implícita de cierre que el MEFF calcula según los precios de pantalla y precios teóricos que hay a lo largo del día, por tanto no es la volatilidad implícita que valora correctamente la opción al cierre ya que tiene en cuenta los precios a lo largo del día. Finalmente aparece la delta así como el número de opciones negociadas a lo largo del día y las posiciones totales abiertas. Las opciones sobre acciones que cotizan en el MEFF son mayoritariamente opciones americanas por lo que no se puede aplicar el modelo de Black-Scholes para calcular su precio, en MEFF usan el modelo binomial. Para el precio de las opciones sobre el IBEX35 usan el modelo de Black'76.

Para el cálculo de la volatilidad implícita que se realizará en el tercer apartado se usaran los datos del *strike*, vencimiento y el precio de la opción. Así se dispondrá de toda la información necesaria para valorar una opción o su volatilidad excepto del interés libre de riesgo.

La información relativa a los tipos de interés se obtiene de la [calculadora de opciones del MEFF](#), una herramienta para valorar opciones, que al fijar el vencimiento te devuelve el tipo de interés a aplicar. Los tipos de interés se calculan diariamente por el departamento de clearing del MEFF con información del mercado. Actualmente se encuentran muy bajos, de hecho, se consideran cero por ciento en los primeros vencimientos; esto provoca que tengan un impacto mínimo en el cálculo del precio de las opciones.

A continuación se explicará el modelo de Black-Scholes-Merton y cómo se ha usado la información proporcionada por el MEF para valorar opciones no cotizadas.

3. Modelo de Black-Scholes-Merton

El modelo desarrollado en 1973 por Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton es un modelo matemático que revolucionó la valoración de opciones.

A partir de la ecuación de Black-Scholes se puede deducir la fórmula de Black-Scholes que es fácil de implementar y proporciona una estimación teórica, cercana al precio real, del precio de las opciones “europeas”. Al ser una fórmula fácil de implementar provocó un importante auge del mercado de derivados que anteriormente no tenía un buen modelo para valorar opciones, ya que los modelos dependían de parámetros arbitrarios.

En la fórmula de Black-Scholes todos los parámetros son observables en el mercado, a excepción de la volatilidad del precio del subyacente; esta se puede estimar a partir de datos históricos o con la estimación implícita. La estimación implícita supone calcular la volatilidad que iguala el precio de mercado con el precio teórico de Black-Scholes con la particularidad que, para poder realizar el cálculo, se deben usar métodos numéricos para hallar raíces. Esto es debido a que la estructura de la fórmula de Black-Scholes no permite despejar la volatilidad en función del resto de variables. Los métodos empleados para hallar raíces se explican en la sección 3.1 y en el apéndice se encuentra el código de R utilizado. El cálculo de la volatilidad implícita con datos reales de mercado ha demostrado que la volatilidad no es constante, como supone el modelo de Black-Scholes-Merton, y se produce la denominada sonrisa de volatilidad o “volatility *smile*” que se explica en la sección 3.2.

En el artículo de Black y Scholes (1973) se citan los supuestos que se usan para deducir la fórmula de valoración de opciones:

1. El tipo libre de riesgo es constante y el mismo para todos los vencimientos
2. El precio de un activo sigue un movimiento browniano (Wiener) con μ y σ constantes:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

3. La acción no paga dividendos.
4. La opción es “europea”, solo se puede ejercer a vencimiento.
5. No hay costes de transacción ni para comprar ni para vender la acción o la opción.
6. Es posible pedir prestado al tipo de interés libre de riesgo y comprar o vender (también en corto) cualquier proporción de la acción.
7. Se puede vender en corto sin restricciones ni costes especiales.

A partir de estos supuestos y considerando que se puede tener una cartera con riesgo cero con la compra de un activo y la venta de derivados se llega a la ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Donde V es el precio de la opción como función del precio de la acción S y el tiempo t , r es el tipo de interés libre de riesgo y σ es la volatilidad de la acción.

De esta ecuación se deriva la fórmula de Black-Scholes que permite calcular los precios de una opción europea, tanto de una *call* como de un *put*:

$$c = SN(d_1) - KN(d_2)e^{-rT}$$

$$p = KN(-d_2)e^{-rT} - SN(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2) * T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2) * T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Donde S es el precio de la acción, $N(\cdot)$ es la función de distribución normal acumulada, K es el precio de ejercicio, r es el tipo de interés libre de riesgo, T es el tiempo hasta vencimiento, en años, y σ es la volatilidad.

Con posterioridad al modelo de Black-Scholes-Merton han aparecido modificaciones para poder valorar acciones que pagan dividendos y nuevas fórmulas para valorar opciones más complejas que las *plain vanilla*.

3.1. Cálculo de la volatilidad implícita

Para calcular la volatilidad implícita de opciones sobre el IBEX35 se ha usado una variante del modelo de Black-Scholes-Merton que publicó Fischer Black en 1976 con el objetivo de poder valorar opciones sobre futuros de “*commodities*”. Con esta variación se pueden valorar opciones sobre futuros de cualquier tipo, como pueden ser futuros sobre índices, bonos o *swaptions*. La base para explicar esta sección se ha obtenido del artículo original de Black (1976) y Swindle (2013).

El modelo supone que el subyacente sigue una distribución log-normal, al igual que el modelo Black-Scholes-Merton, pero el precio del subyacente pasa a ser el precio del futuro, no el precio al contado.

El cambio fundamental del modelo es el siguiente: el modelo de Black-Scholes-Merton asume que el precio sigue un movimiento browniano geométrico $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, en cambio el modelo de Black’76 asume que el precio del futuro se comporta $dF = \sigma F dW$. Siendo W una variable estocástica (movimiento browniano). Esto provoca que la ecuación de Black-Scholes-Merton y Black’76 sean distintas:

Ecuación Black-Scholes-Merton:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Ecuación Black'76:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} - rV = 0$$

Donde F es el precio del futuro.

Así, resolviendo la ecuación de Black'76 obtenemos:

$$c = e^{-rT}[FN(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p = e^{-rT}[KN(-d_2) - FN(-d_1)]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (\sigma^2/2) * T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/K) - (\sigma^2/2) * T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

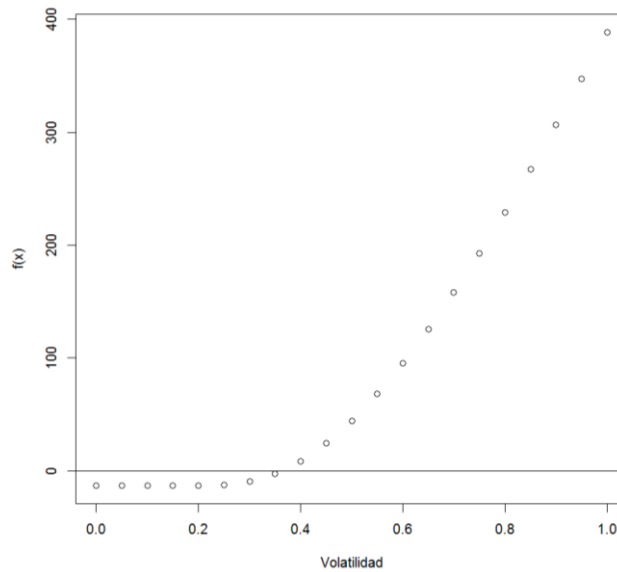
Para obtener la volatilidad implícita se debe encontrar la volatilidad que iguala el precio teórico del modelo con el precio real del mercado, ya que los otros parámetros vienen dados. Como esta volatilidad no se puede obtener directamente de la fórmula de Black'76 debemos aplicar métodos numéricos para hallar raíces, los métodos presentados a continuación son métodos iterativos que nos permiten aproximar la solución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$, en este caso:

$$f(\sigma) = Black'76(S, K, T, r, \sigma) - V_{market} = 0$$

Donde $Black'76(S, K, T, r, \sigma)$ es el precio de la opción aplicando el modelo de Black'76 y V_{market} es el precio de la opción en el mercado.

Esta función tiene la característica que es monótona creciente, como podemos ver con la Figura 1, que representa un ejemplo real de la función $f(\sigma)$ para un vencimiento a 42 días, precio del futuro 8762, *strike* 7000 y tipo de interés del 0%.

Figura 1.
Ejemplo función $f(\sigma)$.



Fuente: Elaboración propia

La base para explicar los métodos numéricos se ha obtenido del libro de Aubanell *et al.* (1991) y Altamiro y Ochoa (2015).

3.1.1. Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a, b]$, se parte de un punto inicial $x_0 \in [a, b]$ y se va aproximando de forma iterativa mediante la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esta ecuación es un desarrollo de la serie de Taylor:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + (x - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + \dots$$

Si x está próximo a x_n es razonable ignorar $(x - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + \dots$, por tanto:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Si sustituimos $x = x_{n+1}$ y considerando que x_{n+1} tiende a la raíz, tenemos que $f(x_{n+1}) = 0$, y nos queda:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n), \text{ si despejamos:}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

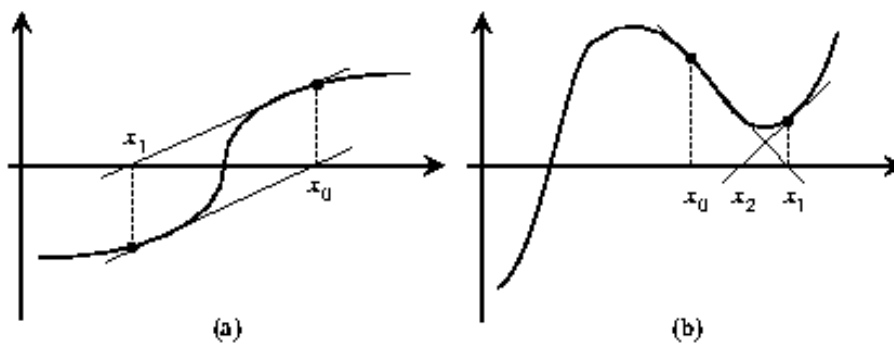
Este método es muy eficiente y converge rápidamente, además solo se necesita proporcionar un valor inicial, pero tiene una serie de inconvenientes:

- Es necesario conocer la derivada y si esta toma un valor cercano a cero el método puede no converger.
- Si $f'(x_n) = 0$ el método no se puede aplicar, la recta tangente sería una recta horizontal.
- El punto de inicio debe estar relativamente cercano a la raíz, sino puede no converger.

En la Figura 2 se pueden ver dos funciones en que el método no converge:

Figura 2.

Funciones en las que el método Newton-Raphson no funciona.

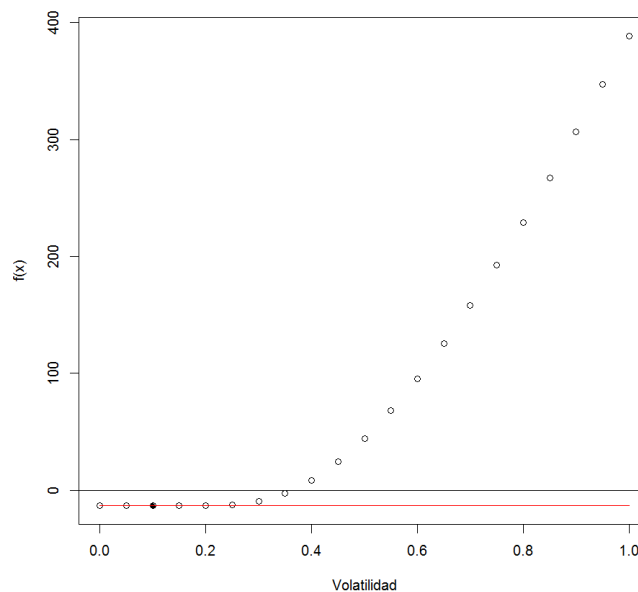


Fuente: Diaz (1998)

Otro ejemplo en que el método no converge, usando la función real, sería el que aparece en la Figura 3, que correspondería a escoger una volatilidad inicial de 0,1:

Figura 3.

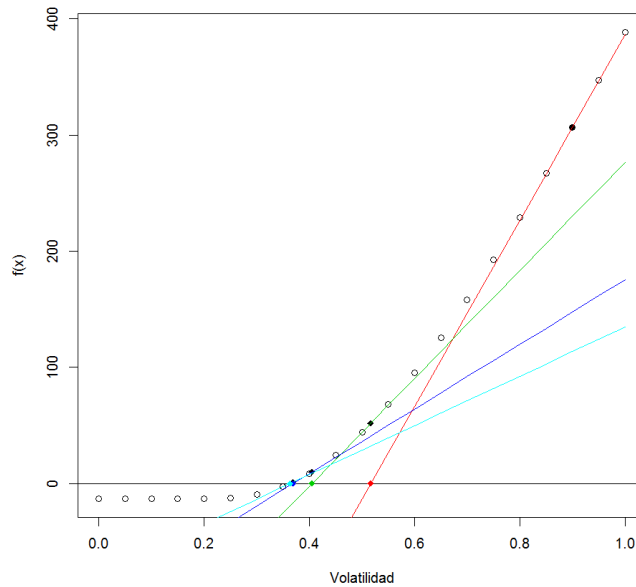
Ejemplo de no convergencia con $f(\sigma)$.



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4 se puede ver el desarrollo completo del método de Newton-Raphson:

Figura 4.
Explicación gráfica de Newton-Raphson con $f(\sigma)$.



Fuente: Elaboración propia

Se parte de $\sigma_0 = 0,9$, se calcula la tangente en ese punto (línea roja), y se calcula la imagen del punto que cruza $y = 0$ que es $\sigma_1 = 0,516$. En ese punto se vuelve a dibujar la nueva tangente (línea verde), y así sucesivamente hasta que se considere que el error de σ es suficientemente pequeño.

3.1.2. Método de la secante

El método de la secante se puede obtener a partir del método de Newton-Raphson y es especialmente útil en las situaciones en que es complicado calcular la derivada. Si partimos de:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Y utilizando la aproximación de diferencias finitas:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

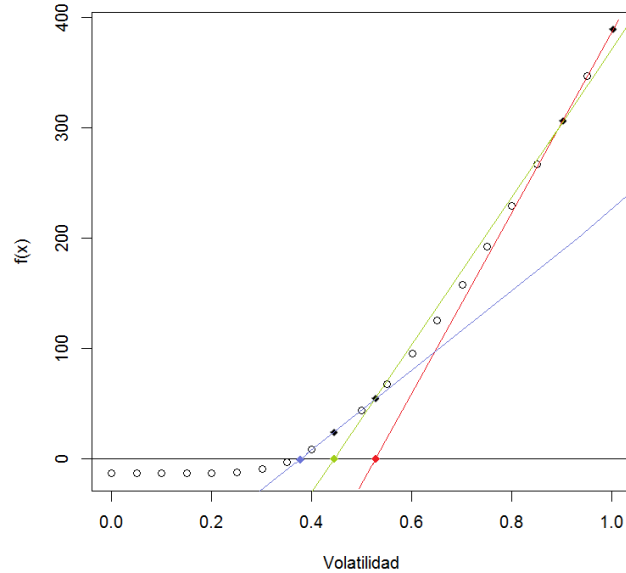
Substituyendo:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} * f(x_{n+1})$$

En este método se necesitan dos puntos iniciales x_{n+1} y x_n . El método se basa en obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ y $(x_n, f(x_n))$. Una vez se tiene esta recta se encuentra el valor x_{n+2} tal que $y = 0$, se calcula la

imagen y se vuelve a repetir el proceso con los puntos $(x_{n+2}, f(x_{n+2}))$ y $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$. Se repite este proceso hasta que se consigue un $f(\sigma)$ que se considere aceptable. El método se puede ver gráficamente en la Figura 5, donde los puntos iniciales son 1 y 0,9:

Figura 5.
Explicación gráfica del método de la secante con $f(\sigma)$.

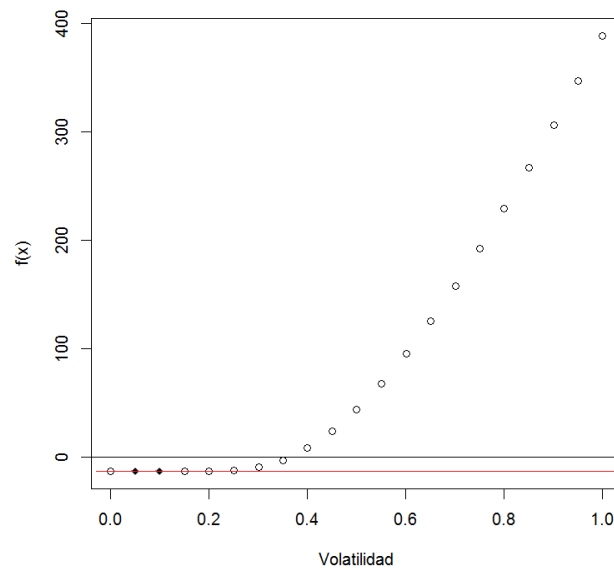


Fuente: Elaboración propia

Como se ha comentado, la principal ventaja del método de la secante es que no se necesita conocer la derivada para hallar la raíz, pero por el contrario se necesitan más iteraciones que Newton-Raphson. También se puede dar el caso que no converja, por ejemplo, cuando la raíz es múltiple.

En el ejemplo real empleado un caso en el que el método de la secante no converge, al igual que el de Newton-Raphson, es cuando, por ejemplo, se eligen puntos iniciales de volatilidad 0,1 y 0,05:

Figura 6.
Ejemplo de no convergencia de $f(\sigma)$ con la secante.



Fuente: Elaboración propia

3.1.3. Método de la bisección

El método de la bisección se basa en el teorema de Bolzano:

Siendo f una función continua, sabemos que para el intervalo cerrado $[a, b]$ existe una $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ si $\begin{cases} f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$.

El Teorema de Bolzano afirma que si tenemos una función continua en un intervalo y los extremos de dicho intervalo cerrado toman valores con signos opuestos, es decir un extremo toma valores positivos y el otro negativos, entonces existe al menos una raíz de la función en el interior del intervalo.

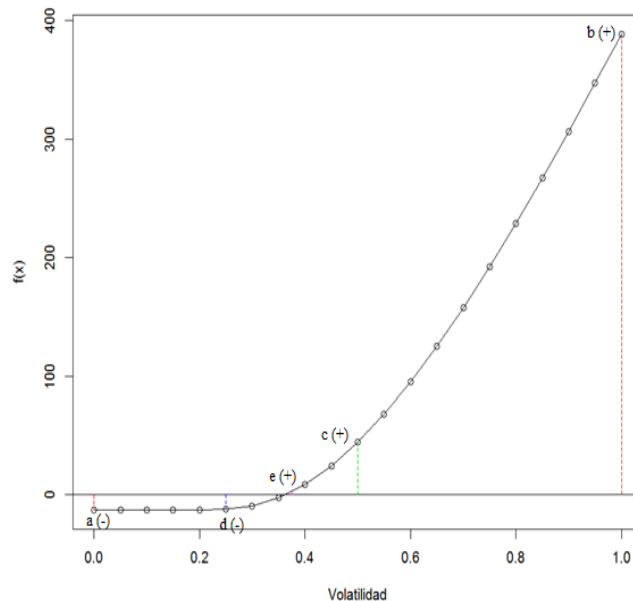
Por tanto sabemos que si se cumple el Teorema de Bolzano existe al menos una raíz y el método de bisección es una forma de estimarla. Se siguen los siguientes pasos:

1. Se calcula el punto medio del intervalo, $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Se evalúa la función en el nuevo punto c , $f(c)$ para saber el signo en dicho punto.
3. Según el signo en dicho punto se redefine el intervalo $[a, b]$ como $[a, c]$ o $[c, b]$ para que los extremos tengan el signo opuesto.
4. Se repite el proceso en el nuevo subintervalo hasta obtener la precisión que se desee.

La principal ventaja de este método es que es muy simple y, que si se cumple el teorema de Bolzano, el método converge a la raíz; pero si hubiera más de una raíz en el intervalo no resulta tan fácil caracterizar hacia qué raíz converge. En nuestro caso, al ser una función monótona creciente, este inconveniente no nos afecta, pero sí que nos perjudica la lenta convergencia comparada con los otros métodos.

Figura 7.

Explicación gráfica del método de bisección con $f(\sigma)$.



Fuente: Elaboración propia

Como se puede apreciar, si escogemos como valores iniciales $[0, 1]$, el punto medio será 0,5 y positivo, por tanto deberemos repetir el proceso entre $[0, 0,5]$. El nuevo punto intermedio será la $d(0,25)$ que es negativo, así habríamos conseguido limitar el intervalo de la raíz entre $[0,25, 0,5]$. El proceso se debe repetir hasta obtener la precisión que se desee.

Aplicando los códigos de R del apéndice y para el caso de una opción sobre el IBEX35 con un vencimiento de 42 días, precio del futuro 8762, *strike* 7000 y tipo de interés del 0% la volatilidad implícita es 36,3195%. Esta volatilidad implícita se consigue para una tolerancia del error de 0,000001, es decir, cuando $f(\sigma) = |0,000001|$ se deja de iterar. Para realizar la comparación no se ha tenido en cuenta otra forma de parar la iteración que consiste en dejar de iterar cuando dos volatilidades iteradas sucesivas son muy próximas. En el código esta limitación se ha llamado tolerancia de la volatilidad y permite reducir el número de iteraciones, por este motivo se ha considerado cero al realizar la comparación.

Tabla 4.
Comparación de los resultados de los métodos de búsqueda de ceros.

	Newton	Secante	Bisección
Volatilidad implícita	36,3195%	36,3195%	36,3195%
Nº de iteraciones	6	8	25

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar, en particular por estos ejemplos realizados, el método de la bisección es del orden de 4 veces más lento que el de Newton-Raphson, pero la volatilidad implícita obtenida es exactamente la misma. Para el cálculo de la sonrisa y superficie de la volatilidad que se exponen en el siguiente apartado se ha usado el método la bisección porque, aunque el número de iteraciones es mayor que en los otros dos métodos, siempre se encuentra la raíz dentro del intervalo $[0,1]$.

3.2. *Smile* y superficie de volatilidad

3.2.1. *Smile* de volatilidad

“During 1976-1978, looking at a variety of pairs of options, minimax percentage errors were on the order of 2% -- a figure I would regard as sufficiently low to make the Black-Scholes formula a good working guide in the equity options market [...] However, since 1986 for these options there has been a very marked and rapid deterioration..” (Rubenstein, 1994, p. 4).

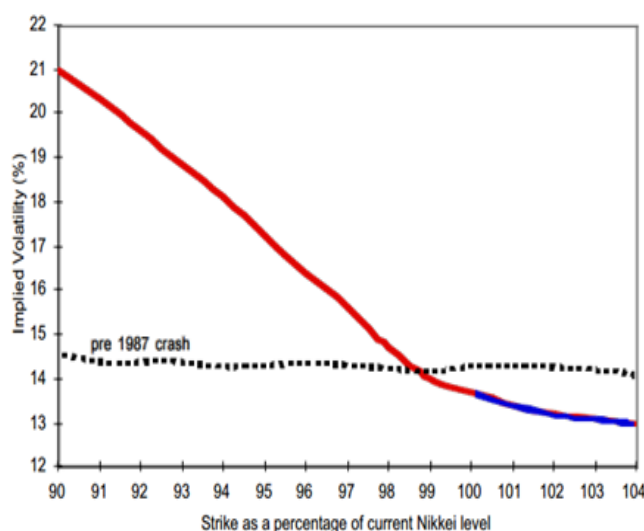
Tabla 5.
Evolución errores minimax.

Year	Striking Price Range			
	ITM - 9% to -3%	ATM - 3% to +3%	OTM + 3% to +9%	ITM/OTM - 9% to +9%
1986	-0.3	-0.5	-0.3	-0.7
1987	-0.7	-1.0	-0.8	-1.6
1988	-2.5	-3.5	-4.1	-7.0
1989	-2.5	-4.8	-6.4	-7.7
1990	-3.4	-5.9	-8.7	-11.2
1991	-4.0	-7.0	-10.3	-13.1
1992	-4.9	-8.8	-14.2	-15.3

Fuente: Rubenstein (1994)

Como demuestra Rubenstein (1994) para las opciones del índice SP500, tabla 5, todo parece indicar que antes del *crash* de 1987 la volatilidad era constante e independiente del *strike*, por lo que el modelo de Black-Scholes-Merton funcionaba bien, pero con el *crash* de 1987 las volatilidades dejan de ser constantes y pasan a formar el “volatility smile” o “volatility skew”, es decir, la volatilidad pasa a depender del *strike*, y en menor medida del vencimiento. La Figura 8 muestra el “volatility skew” del Nikkei y lo compara con volatilidad antes del *crash* de 1987 que era prácticamente constante. La diferencia entre el “volatility smile” y el “volatility skew” es que el primero sigue una función cuadrática, normalmente se da en las divisas, y el segundo sigue una función decreciente, que se acostumbra a dar en las acciones y los índices. Esta diferencia en la sonrisa es debida a que en el precio de las acciones son más frecuentes, y más importantes, los saltos bajistas que alcistas, en cambio en las divisas se producen en ambas direcciones, sobre todo cuando intervienen bancos centrales y las dos monedas son igual de fuertes. En Serna (2002) se enumeran un seguido de estudios que confirman que este efecto detectado por Rubenstein se replica en muchos otros activos con posterioridad al *crash* de 1987.

Figura 8.
Skew de volatilidad antes y después del crash 1987 para el Nikkei.



Fuente: Derman (2003)

Un posible motivo de la aparición de la sonrisa de volatilidad, como sugiere Rubinstein (1994), sería el miedo a otro *crash* que provocaría que los *traders* aumentaran el precio de las *puts* OTM (fuera de dinero), ya que si sucediese otro *crash* estas *puts* podrían pasar a estar ITM (dentro de dinero) y comprar *puts* OTM es una forma barata de cubrirse ante adversidades. Como comenta Hull (2012) cuando el SP500 baja, el *skew* tiende a volverse más pronunciado, en cambio cuando sube sucede lo contrario, esto, en parte, daría apoyo a esta teoría.

Otra posible explicación es que en el mercado real los precios no se comportaran como suponen Black-Scholes-Merton, lo constató el *crash* de 1987 ya que los movimientos extremos de los precios son más probables que lo que supone la distribución log-normal. Como comenta Hull (2012) dos de las condiciones para que un activo siga una distribución log-normal no se cumplen:

1. La volatilidad del activo es constante.
2. El precio del activo cambia suavemente sin saltos

De hecho, Hull demuestra con datos empíricos que para los tipos de cambio la distribución log-normal no se cumple, como se puede apreciar en la tabla 6. En el mercado son mucho más probables los cambios bruscos en los precio que la probabilidad que supone el modelo log-normal.

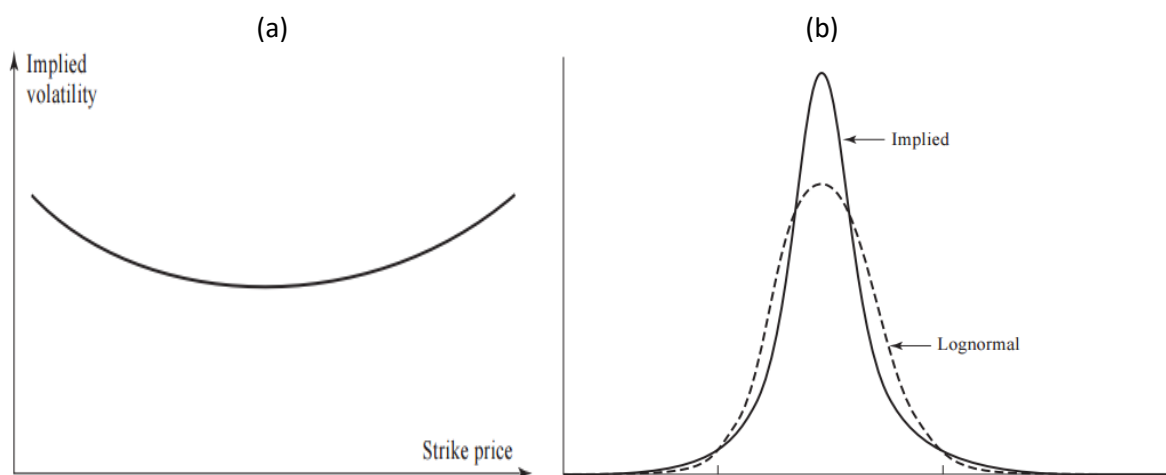
Tabla 6.
Porcentaje de días en los que el tipo de cambio se mueve más de una desviación estándar.

	<i>Real world</i>	<i>Lognormal model</i>
>1 SD	25.04	31.73
>2 SD	5.27	4.55
>3 SD	1.34	0.27
>4 SD	0.29	0.01
>5 SD	0.08	0.00
>6 SD	0.03	0.00

Fuente: Hull (2012)

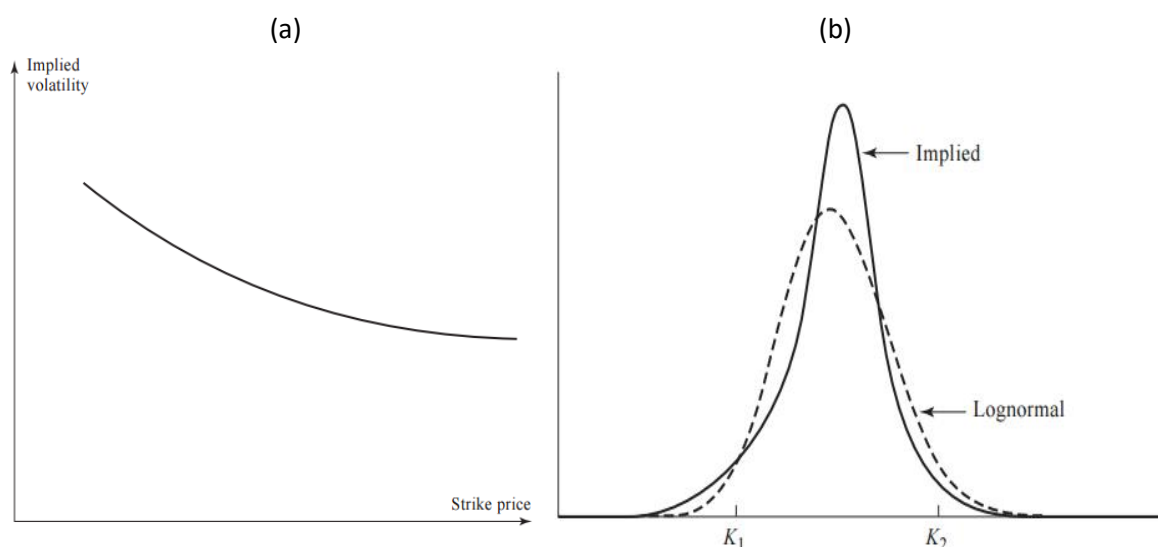
Así podemos observar dos tipos de sonrisa dependiendo del tipo de distribución que siga el subyacente, la conocida como “volatility *smile*” que sigue la distribución implícita de la Figura 9(b), y la “volatility *skew*”, que sigue la distribución implícita de la Figura 10(b).

Figura 9.
Sonrisa de volatilidad y distribución implícita.



Fuente: Hull (2012)

Figura 10.
Mueca de volatilidad y distribución implícita.



Fuente: Hull (2012)

En el caso de la sonrisa de volatilidad típica, Figura 9(a), se puede observar que ambas colas de la distribución implícita son más pesadas que la distribución log-normal. La distribución implícita nos indica que tanto los movimientos pequeños como grandes son más probables que con la distribución log-normal. Por tanto, si la distribución implícita tiene colas más pesadas que la log-normal, los precios de mercado de las *calls* o *puts* que se encuentren muy OTM o ITM serán mayores que los que se obtendrían con la fórmula de Black-Scholes ya que hay una probabilidad mayor que la supuesta por el modelo de Black-Scholes-Merton de que entren en dinero. Es decir, como explica Hull (2012), si suponemos una *call* OTM con un precio de ejercicio de K_2 , esta opción solo obtiene beneficios si en el momento del vencimiento el precio está por encima de K_2 . Si observamos la Figura 9(b) la probabilidad de que esto suceda es superior en la distribución implícita que en la log-normal, por tanto el precio será superior que el calculado por Black-Scholes, y un precio superior implica una volatilidad superior.

Sucede lo mismo con una *put* OTM con un precio de ejercicio de K_1 , para obtener beneficios el precio a vencimiento debe ser menor a K_1 , y las probabilidades de que esto suceda son superiores con la distribución real que con la log-normal, por tanto el precio será superior y la volatilidad también. Debido a la paridad *put-call* la volatilidad tanto para las *calls* o *puts* OTM como ITM es superior al ATM.

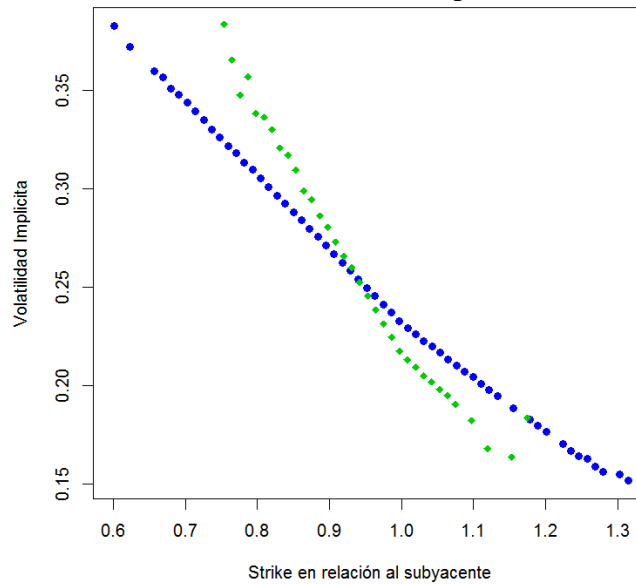
En el caso del *skew* de volatilidad, o mueca de volatilidad, la distribución implícita solo es más pesada en la cola izquierda, ya que la cola derecha es más ligera que la distribución log-normal. La distribución implícita nos indicaría que tanto la probabilidad de pequeños movimientos como de grandes caídas es superior a la probabilidad de la distribución log-normal. Esta distribución implícita provoca que si dibujamos la volatilidad en función del *strike* sea decreciente, lo que se conoce como la mueca de volatilidad. Siguiendo el razonamiento de Hull (2012), si suponemos una *call* OTM con un precio de ejercicio de K_2 , esta opción solo obtiene beneficios si en el momento del vencimiento el precio está por encima de K_2 . Si observamos la Figura 10(b) la probabilidad de que esto suceda es inferior en la distribución implícita que en la log-normal, por tanto el precio será inferior que el calculado por Black-Scholes y, un precio inferior implica una volatilidad inferior. Si ahora suponemos una *put* OTM con un precio de ejercicio K_1 , se obtendrán beneficios si al vencimiento el precio es inferior a K_1 . Que esto suceda es más probable con la distribución implícita que con la log-normal, por eso el precio de la opción será superior y, por consiguiente, la volatilidad también.

Según Haug y Taleb (2009), el éxito del modelo de Black-Scholes-Merton es que adaptando la volatilidad se puede adaptar el modelo a cualquier distribución. Este hecho junto con la simplicidad de la fórmula de Black-Scholes ha provocado que, aunque hayan aparecido nuevos modelos, se siga utilizando Black-Scholes por su sencillez. Por este motivo es de vital importancia tener una sonrisa y superficie de volatilidad real ya que permite ajustar la distribución que siguen los precios del mercado.

Como se puede comprobar con la Figura 11, la sonrisa de volatilidad del IBEX35 sigue la denominada mueca o *skew* de volatilidad, era lo esperable al ser un índice.

Figura 11.

Sonrisa volatilidad IBEX, en verde el vencimiento de abril, en azul el vencimiento de septiembre.



Fuente: Elaboración propia

Se expresa el *strike* en función del precio del subyacente para poder ver que en ambos casos la pendiente de la mueca de volatilidad varía ligeramente cuando el *strike* es ATM. Se suele usar el *strike* en relación al subyacente cuando se quiere comprar sonrisas de activos que tienen activos subyacentes diferentes.

3.2.2. Paridad put-call

Otra característica que demuestra Hull (2012) es que, si se cumple la paridad *put-call*, el *smile* de volatilidad para las *puts* y las *calls* para un mismo vencimiento debe ser la misma. La paridad *put-call* se basa en suponer que si podemos encontrar dos carteras que dan los mismos pagos, ambas carteras deben tener el mismo valor ya que si no existirán oportunidades de arbitraje. La paridad *put-call* fija una relación entre la prima de las opciones *call*, de las opciones *put*, el subyacente y el *strike*, que en caso de no existir costes de transacción debería ser exacta. Cuando esta relación no se cumple aparecen oportunidades de arbitraje que tenderán a volver al mercado a la posición de equilibrio. Suponiendo un subyacente sin dividendos la paridad *put-call* es:

$$p + S_0 = c + Ke^{-rT}$$

Donde p y c son el precio de las opciones europeas *put* y *call* respectivamente. K y T son el *strike* y el tiempo a vencimiento que debe ser el mismo para ambas opciones, S_0 es el precio del activo subyacente y r el tipo libre de riesgo.

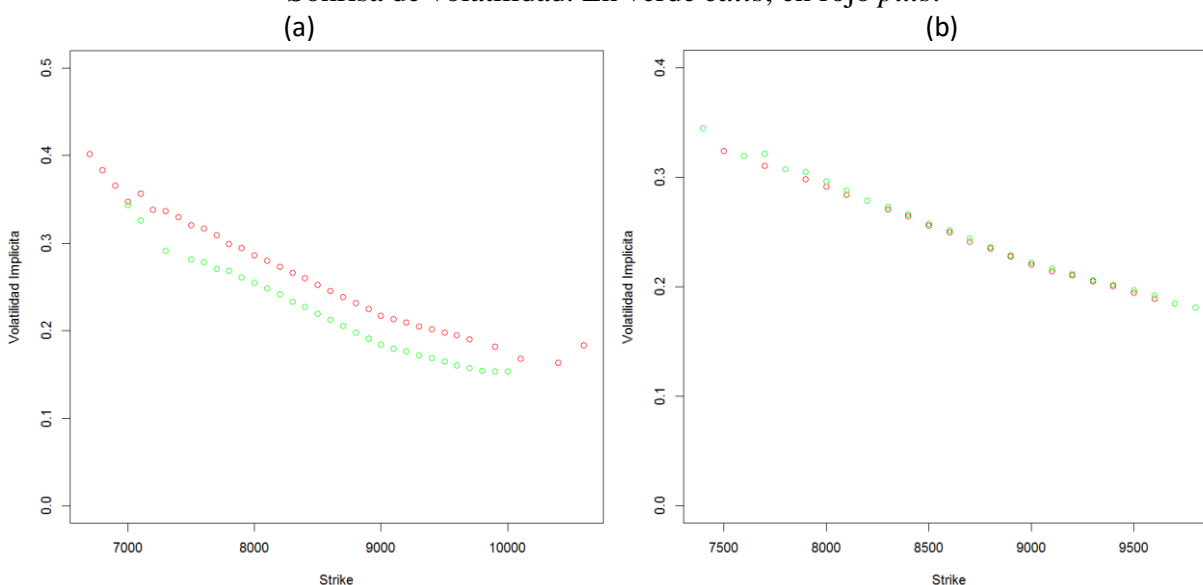
La paridad *put-call* supone que no hay costes de transacciones ni directos ni indirectos, esto provoca que en los mercados reales la paridad no sea perfecta pero si el mercado es líquido las diferencias son mínimas ya que las comisiones son muy reducidas y las horquillas pueden ser de pocos céntimos. Esto implica que en la realidad la volatilidad de las opciones *put* y *call* no es exactamente la misma, pero sí muy parecida.

En las opciones sobre el Ibex la paridad suele cumplirse, Figura 12(b), pero hay momentos puntuales como el 18/03/2016 en que no se cumple la paridad *put-call*, Figura 12(a). Esto provoca oportunidades de arbitraje y que las volatilidades de las *puts* y de las *calls* sean distintas. Font (2000) estudió esta relación en el Ibex y constató que la paridad *put-call* no siempre se cumplía. No es de extrañar que la paridad *put-call* no se cumpla con exactitud en el MEFB porque, como se ha comentado con anterioridad, es un mercado poco líquido, para poder llevar a cabo el arbitraje es necesario que se ejecuten tres operaciones en un intervalo breve de tiempo y en el MEFB no tienes esta garantía. Además, las horquillas pueden representar unos 10 puntos por lo que ya significan un coste importante.

En el ejemplo del 18/03/2016, y suponiendo condiciones ideales de mercado, podíamos conseguir 33€ por operación sin asumir riesgos. Para el *strike* de los 9.000€, que sería ATM, y vencimiento de abril, la prima de las *calls* era de 194€ y la de las *puts* 206€, y el futuro con el mismo vencimiento que las opciones cotizaba a 9.021,1€. Por tanto, si hubiéramos comprado un *call* y vendido simultáneamente una *put* y un futuro habríamos conseguido una posición sin riesgo y un beneficio seguro al vencimiento de 33€, independientemente de lo que hiciera el subyacente. Para esta operativa los costes directos de transacción de un especulador particular rondarían los 1,5€ y solo se debería aportar el dinero de la compra de la opción, que se financia con la venta de la *put*, además el MEFB no nos exigiría ninguna garantía, como se puede comprobar usando la [calculadora de garantías del MEFB](#).

Figura 12.

Sonrisa de volatilidad. En verde *calls*, en rojo *puts*.



Fuente: Elaboración propia

3.2.3. Superficie de volatilidad

Una superficie de volatilidad es una representación tridimensional de las volatilidades implícitas de un subyacente en relación con los diferentes precios de ejercicio y las diferentes fechas de vencimiento. Es un gráfico que agrupa las distintas sonrisas de volatilidades para cada vencimiento, así se pueden apreciar las diferentes sonrisas de

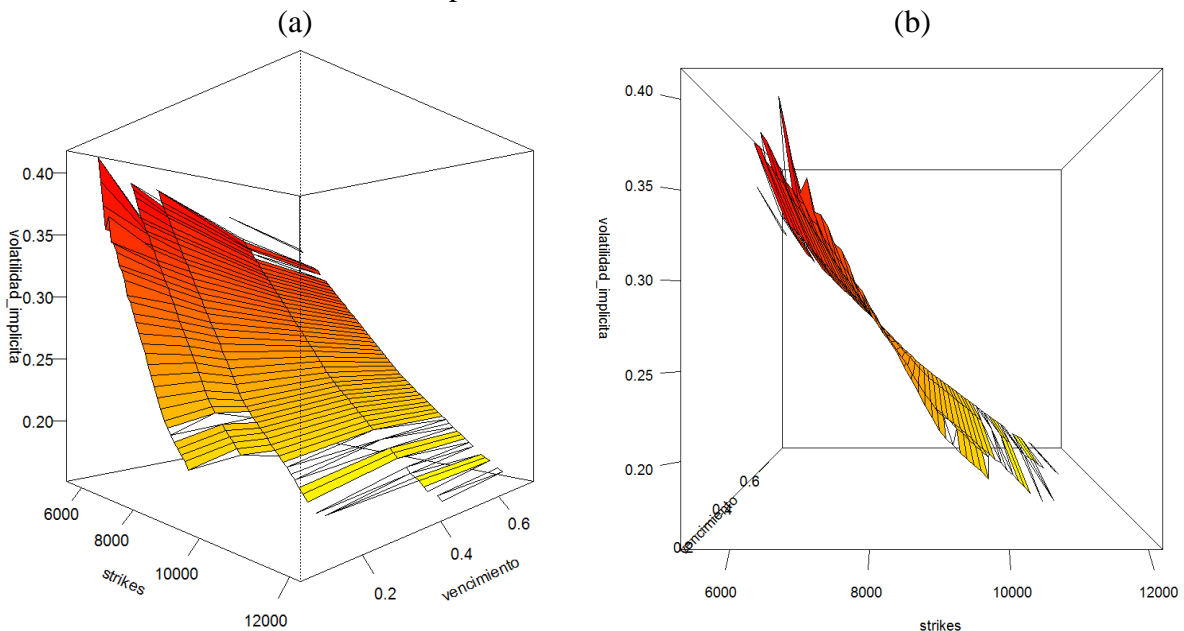
volatilidad según el vencimiento y la estructura temporal de la volatilidad. Si el modelo de Black-Scholes-Merton se cumpliera, la superficie de volatilidad siempre sería plana, pero cuando se dibuja con datos reales de mercado se constata que la volatilidad implícita no es constante. Como comenta León (2009), asignar diferentes volatilidades a un mismo subyacente no es más que obviar el supuesto de movimiento browniano, así se puede tener en cuenta el exceso de curtosis y sesgo de los datos reales de mercado.

En el caso particular de las opciones sobre acciones, o índices, la superficie de volatilidad presenta diversos rasgos característicos que se suelen cumplir:

1. La volatilidad para cada vencimiento acostumbra a seguir la forma de la nombrada *skew* o mueca de volatilidad.
2. Los *skews* de vencimientos más lejanos son más planos que los *skews* de vencimientos próximos, es decir, a medida que el vencimiento es más lejano la diferencia de volatilidad entre las opciones OTM y ITM es menor.
3. La tercera característica se deduce de las otras dos y es que las *calls* muy OTM cerca de vencimiento tienden a tener volatilidades implícitas superiores que las *calls* OTM con vencimiento lejano. En cambio las *calls* muy ITM tienen volatilidades implícitas menores que las *calls* muy ITM con vencimiento lejano.

La Figura 13(a) es la superficie de volatilidad del IBEX35 el 18/03/2016 y con la representación de la Figura 13(b) se puede observar que se cumplen las tres características ya que la mueca para el primer vencimiento es la más pronunciada y a medida que se va alargando el vencimiento se va aplanando ligeramente.

Figura 13.
Superficie volatilidad IBEX.



Fuente: Elaboración propia

De la superficie destacan dos hechos, (1) hay puntos vacíos que corresponden a *strikes* de los que el MEF no aporta información; para saber cómo deberían cotizar estas opciones deberíamos interpolar la volatilidad, como se verá en el siguiente apartado, y (2) a medida que se alarga el vencimiento la superficie de la volatilidad aumenta, esto es

debido a que al haber mayor tiempo hasta el vencimiento existen más posibilidades de que el subyacente tenga movimientos más extremos y alcance *strikes* más lejanos, por este motivo hay información disponible de más *strikes*.

Como comentan Daglish *et al.* (2006), el uso más habitual de las superficies de volatilidad es la estimación del precio de las opciones europeas que no estén cotizadas, o lleven días sin cotizarse. Mediante la interpolación se puede conseguir una volatilidad implícita aproximada y saber el precio al que debería cotizar dicha opción; para que esta estimación sea buena debe haber suficiente información en el mercado, es decir, suficientes precios de otras opciones con diferentes *strikes*. Otro uso de la superficie de volatilidad sería para realizar coberturas, tanto de variaciones de la volatilidad como de variaciones en el precio del subyacente. Y, finalmente, en momentos muy puntuales de mercado, como momentos de pánico, puede servir para localizar oportunidades de arbitraje ya que la superficie de volatilidad debe cumplir unas restricciones para que no se pueda llevar a cabo estas estrategias. Como indica Haugh (2009) para que no se pueda realizar arbitraje se deben cumplir tres condiciones:

1. $\sigma(K, T) \geq 0$, para todos los *strikes* K y los vencimientos T .
2. Para cualquier vencimiento T , la *skew* no puede ser demasiado empinada, sino se puede hacer arbitraje con “mariposas”.
3. La estructura temporal de la volatilidad no puede estar muy invertida, sino se podrá hacer arbitraje con “calendars”.

En la siguiente sección se verá como interpolar para poder completar la superficie de volatilidad y así poder estimar la prima de opciones no cotizadas.

3.3. Opciones no cotizadas e interpolación

Como método de interpolación se ha optado por los *splines* cúbicos ya que es muy fácil de aplicar, se usa en el mercado, como mencionan Cont y Fonseca (2002) o Homescu (2011), y presenta menos problemas que ajustar un polinomio de grado alto. Para hacer la interpolación por *splines* cúbicos se ha usado el paquete [stats](#) de R. La base para redactar este apartado se ha obtenido del libro de Burden y Faires (2010).

La interpolación consiste en obtener nuevos datos a partir de datos discretos conocidos. La interpolación por *splines* cúbicos es un tipo de interpolación que consiste en ajustar un polinomio de tercer grado entre dos puntos contiguos. Se ajustan tantos polinomios de tercer grado como segmentos haya. Para que se pueda ajustar correctamente se deben cumplir una serie de condiciones:

- $S_i(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$
- $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$. La aproximación debe pasar por todos los puntos, así se asegura la continuidad.
- $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$
- $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$. La primera y segunda derivada deben ser continuas de un segmento a otro. Así se evitan discontinuidades en los puntos y se consigue que la función que se obtiene sea derivable en todos los

nodos y sea suave, dando la impresión que es una sola función, no una sucesión de polinomios de tercer grado.

Aplicando las condiciones de continuidad del *spline* y de las derivadas primera y segunda, es posible encontrar la expresión analítica del *spline*:

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i z_{i+1}}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i z_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$$

Donde $z_i = S_i''(t_i)$, $z_{i+1} = S_i''(t_{i+1})$, $h_i = t_{i+1} - t_i$ y los coeficientes z_i están dados por la siguiente ecuación:

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

La ecuación anterior para $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ genera un sistema de $n - 1$ ecuaciones lineales con $n + 1$ incógnitas, las z_i . Como se puede observar, nos faltan ecuaciones para resolver el sistema, para solucionarlo se suelen asignar valores a los extremos z_0, z_n . Hay distintas alternativas, la más simple es suponer que $z_0 = z_n = 0$, esta solución se denomina *spline* natural cúbico.

El sistema de ecuaciones representado en notación matricial es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} u_1 & h_1 & & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Siendo:

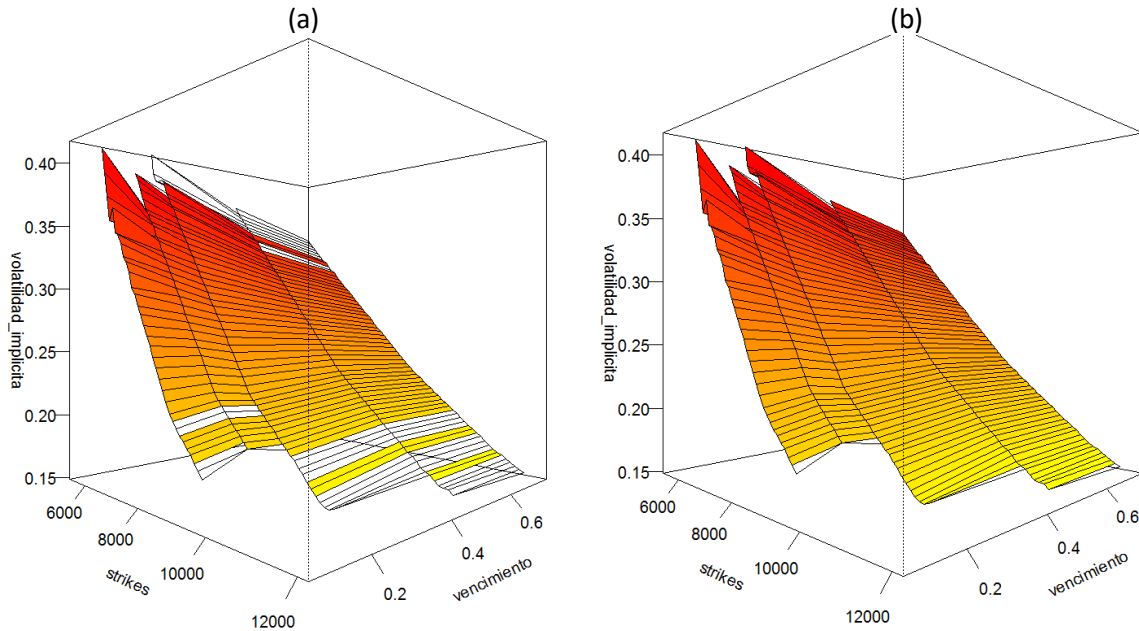
$$\begin{aligned} h_i &= t_{i+1} - t_i \\ u_i &= 2(h_i + h_{i-1}) \\ v_i &= b_i - b_{i-1} \\ b_i &= \frac{6(y_{i+1} - y_i)}{h_i} \end{aligned}$$

Cuando conocemos las z_i sabemos los polinomios que pasan por cada punto y podemos calcular puntos intermedios.

El resultado de aplicar la interpolación por *splines* cúbicos a la superficie de volatilidad se puede apreciar en la Figura 14, así una vez se tiene la volatilidad de los *strikes* que el

MEFF no da información se pueden valorar las opciones muy fácilmente. Este proceso es aplicable a otros mercados donde el regulador no te proporcione el precio de *strikes* en los que no ha habido cruces. O por ejemplo en opciones del MEFF sobre acciones donde hay mucha menos información de *strikes*.

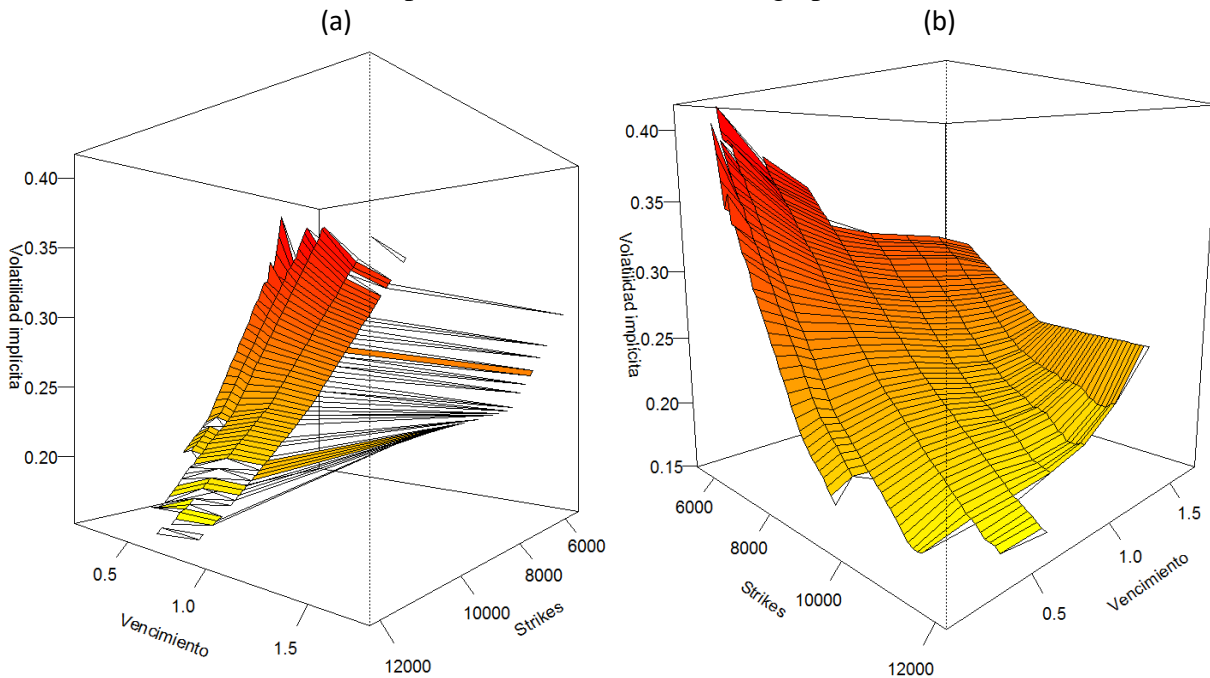
Figura 14.
Superficie volatilidad interpolada del IBEX.



Fuente: Elaboración propia

Como se puede apreciar en la Figura 14, es poco interesante interpolar la superficie de volatilidad de vencimientos cortos porque el MEFF da bastante información, pero la situación cambia cuando los vencimientos se alargan. Por ejemplo, el boletín del 18/03/2016 el MEFF no daba ninguna información de los vencimientos de septiembre 2017 y, de los vencimientos de marzo y junio, solo había información de *calls* de veinte-i-cuatro *strikes* en total. En cambio, de diciembre 2017 da más información porque es vencimiento anual, de las *puts*, que es con la información que se están dibujando las superficies, daba precios de diecinueve *strikes*. Si se dibujara la superficie con los datos disponibles, quedaría como en la Figura 15(a), y si se interpola tanto por *strikes* como por vencimientos trimestrales quedaría como la Figura 15(b).

Figura 15.
Superficie volatilidad IBEX largo plazo.



Fuente: Elaboración propia

Con la superficie completa se puede valorar opciones de las que el MEFF no da información, en la tabla 7 se pueden ver algunos ejemplos. Se han valorado *strikes* de los que se conoce el valor de la *call* para así mediante la paridad *put-call* obtener una aproximación del precio de la *put* i poder comparar la estimación con el precio teórico.

Tabla 7.
Precios estimados para *puts* según volatilidad implícita interpolada.

<i>Strike</i>	Vencimiento	Precio Black'76	Precio según paridad <i>put-call</i>	Diferencia (%)
7500	Junio 2017	508	495	2,26
8000	Marzo 2017	536	529	1,32
9000	Marzo 2017	934	943	-0,95

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar las diferencias son pequeñas, esto indicaría que la interpolación por *splines* cúbicos de la volatilidad implícita sería un buen método para obtener una aproximación del precio de una opción no cotizada.

Hasta este apartado nos hemos basado en la valoración de opciones usando una variante del modelo tradicional de Black-Scholes-Merton, el modelo Black'76, donde se supone que la volatilidad es constante. Con los datos se ha constatado que la volatilidad varía en función del *strike* y del vencimiento, por este motivo en la siguiente sección se introduce un modelo de volatilidad estocástica, el modelo de Heston, que supone que la volatilidad es estocástica.

4. Modelo de Heston

El modelo de Heston es el modelo de volatilidad estocástica más popular para valorar opciones, especialmente es muy utilizado para valorar opciones en las que se debe tener en cuenta la volatilidad de la volatilidad, como las opciones con barrera. Supone que tanto el precio del activo como la volatilidad siguen procesos aleatorios correlacionados:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_1(t)$$

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma_v\sqrt{v(t)}dW_2(t)$$

Donde r es el interés libre de riesgo, $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son dos procesos de Wiener correlacionados con parámetro ρ , κ es la velocidad de reversión a la media, θ es la variancia a largo plazo, σ_v es la volatilidad de la variancia.

4.1. Calibración

Antes de aplicar el modelo de Heston es necesario calibrarlo para obtener $v(0)$, κ , θ , σ_v y ρ . La calibración consiste en intentar minimizar la distancia entre los precios de mercado y los precios teóricos dados por el modelo.

Para llevar a cabo la calibración se ha usado el código de MATLAB de Crisóstomo (2014) y datos obtenidos del boletín diario del MEFF entre el 9 y 13 de mayo de 2016. Para poder aplicar el código se necesitaba el *bid* y el *ask*, datos que no proporciona el MEFF, se ha optado por suponer un *spread* de 10 puntos en todas las opciones. Se han hecho dos calibraciones para comprobar si los datos eran consistentes, la calibración de la tabla 8 se ha hecho con la información de cierre de las opciones del día 9 de mayo. La segunda calibración se hizo con los datos de cierre de los días 10 a 13 de mayo. Finalmente, la tabla 10 son los datos obtenidos con la calibración hecha con datos de agosto de 2007 y realizada por Crespo y Marabel (2010).

Tabla 8.
Calibración modelo de Heston con datos del 09/05/2016.

$v(0)$	θ	σ_v	ρ	κ
0,0706	0,0737	0,8293	-0,7333	4,6636

Fuente: Elaboración propia

Tabla 9.
Calibración modelo de Heston con datos del 10/05/2016 al 13/05/2016.

$v(0)$	θ	σ_v	ρ	κ
0,0632	0,0733	0,7762	-0,7164	4,1116

Fuente: Elaboración propia

Tabla 10.
Calibración modelo de Heston con datos de Agosto 2007.

$v(0)$	θ	σ_v	ρ	κ
0,0426	0,0585	0,3446	-0,78	1,97

Fuente: Crespo y Marabel (2010)

Como se puede apreciar entre las dos primeras tablas no hay diferencias significativas, en cambio con la tercera sí que las hay. Esto constata uno de los problemas del modelo de Heston, que es que se debe ir calibrando el modelo recurrentemente. Para la valoración de las opciones en el siguiente apartado se ha usado la calibración de la tabla 9.

4.2. Valoración

Una vez se tiene la calibración se puede pasar a valorar opciones. Una forma de calcular el precio de las opciones siguiendo Heston es discretizando los diferenciales y aplicando Monte Carlo.

Primero de todo se deben simular los procesos de Wiener correlacionados. Se crea $Z_1 \sim N(0,1)$ y $Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z$ donde Z es otra normal estándar.

Se discretizan las dos diferenciales:

$$v(t_{j+1}) = v(t_j) + \kappa (\theta - v(t_j)) (t_{j+1} - t_j) + \sigma_v \sqrt{v(t_j)} Z_2 \sqrt{t_{j+1} - t_j}$$

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) + rS(t_j)(t_{j+1} - t_j) + \sqrt{v(t_j)} S(t_j) Z_1 \sqrt{t_{j+1} - t_j}$$

Y así ya se puede aplicar Monte Carlo para valorar la opción.

Se ha creado un código de R, se encuentra en el apéndice, para poder valorar opciones siguiendo el proceso arriba mencionado y con un vencimiento inferior al año, que son de las opciones de las que se dispone de más información en el MEFF. Para evitar que cuando se simula la volatilidad tome valores negativos se ha optado por la solución que comenta Andersen (2008). Mediante el paquete [ESGtoolkit](#) se pueden valorar opciones, con vencimiento a más de un año, siguiendo el modelo de Heston y aplicando Monte Carlo. En el paquete [NMOF](#) hay la función *callHestoncf* que calcula mediante la nombrada “fórmula cerrada de Heston” el valor de la opción.

Primero de todos vamos a comprar los resultados obtenidos mediante el código de R del apéndice con los resultados usando la función *callHestoncf*. Para valorar estas opciones se ha usado la calibración de la tabla 9 y en la tabla 12 en vez de usar el $v(0)$ que proporciona la calibración se ha usado el cuadrado de la volatilidad implícita.

Tabla 11.

Comparación del precio de una call calculada con $v(0)$ y usando el método de Monte Carlo y la “fórmula cerrada de Heston”.

Strike	Días a vencimiento	Precio con MC			Precio fórmula cerrada	Precio MEFF
		Media	Intervalo 95%			
7600	126	1137,2	1131,49	1142,91	1139,06	1153
8600	35	291,93	289,7	294,15	296,39	278
9600	63	30,45	29,66	31,23	31,36	46

Fuente: Elaboración propia

Tabla 12.

Comparación del precio de una call calculada con la volatilidad implícita y usando el método de Monte Carlo y la “fórmula cerrada de Heston”.

<i>Strike</i>	Días a vencimiento	Precio con MC			Precio fórmula cerrada	Precio MEFF
		Media	Intervalo 95%			
7600	126	1171,19	1165,05	1177,33	1168,56	1153
8600	35	278,59	276,51	280,68	280,19	278
9600	63	19,4	18,81	20	19,95	46

Fuente: Elaboración propia

Como se puede comprobar el precio, usando la fórmula cerrada, está dentro del intervalo de confianza al 95% en todos los casos, a excepción de uno. Por este motivo se usará la fórmula cerrada ya que computacionalmente es mucho menos exigente. También se puede observar que si se usa el cuadrado de la volatilidad implícita como $v(0)$ se infravalora el precio de la *call* OTM y sobrevalora la *call* ITM, esto es debido al *skew* de volatilidad. Se optará por hacer la valoración con las $v(0)$ de la calibración.

En la tabla 13 se valoran las *calls* con los mismos vencimientos y *strikes* que las *puts* de la tabla 11 y 12. Se calcula el precio de la *call* porque es el valor que te proporciona *callHestoncf* y, como la superficie de volatilidad debe ser la misma para los *calls* y las *puts*, podemos aplicar la superficie de volatilidad interpolada con las *puts* para valorar las *calls*. Además de estas *calls* conocemos su valor, por lo que se puede hacer una comparación entre el valor estimado y el real.

Tabla 13.

Comparación del precio de una *call* proporcionado por MEFF con la valoración según el modelo Black’76 usando la volatilidad implícita interpolada y el modelo de Heston.

<i>Strike</i>	Vencimiento	Precio Heston	Precio Black’76	Precio MEFF
7500	Junio 2017	1573	1548	1546
8000	Marzo 2017	1245	1196	1201
9000	Marzo 2017	694	595	620

Fuente: Elaboración propia

Se puede comprobar que, con la estimación por Black’76 y usando la volatilidad de la superficie de volatilidad interpolada, se consiguen valores muy parecidos a los reales, en cambio con la estimación realizada con Heston se obtienen valores más alejados. Esto podría ser debido a que se calibró el modelo con datos de pocos días o a que las condiciones de mercado hubieran cambiado. Por sencillez de cálculo y, en vista de los resultados obtenidos, usar el modelo de Black’76 con datos de volatilidad implícita interpolados sería la mejor alternativa para valorar opciones no cotizadas sobre índices.

5. Conclusiones

Como se ha podido constatar en este trabajo la volatilidad de las acciones no es constante ya que depende tanto del *strike* como del vencimiento. Este hecho contradice uno de los principios fundamentales del modelo de Black-Scholes-Merton que es el comportamiento logarítmico de los precios y la volatilidad constante. A pesar de que en el mercado real se viola uno de los principios fundamentales del modelo, este se sigue usando para valorar opciones *plain vanilla*, principalmente por dos motivos: 1) Es un

modelo muy simple de aplicar y todos los datos son conocidos a excepción de la volatilidad; 2) adaptando la volatilidad se consigue adaptar el modelo a cualquier distribución y así se consigue que la distribución se acerque al comportamiento real que se puede observar en el mercado.

También se ha podido comprobar que usando métodos numéricos sencillos como la bisección e interpolación por *splines* cúbicos se pueden valorar opciones no cotizadas. En el caso del IBEX este proceso es especialmente útil para vencimientos largos ya que el MEFF proporciona mucha información para los primeros vencimientos, pero poca para los vencimientos más alejados. Esta metodología también se podría aplicar a otros mercados con menos información, por ejemplo en mercados donde un particular solo disponga de la información de operaciones cruzadas, ya que así se podría estimar el precio de opciones no cotizadas, o que llevan tiempo sin cruzarse precios, y se podría operar con la certeza de que no se estarán pagando precios desmesurados o ingresando cantidades demasiado pequeñas. Otro posible ámbito de aplicación sería usar la metodología explicada para valorar opciones con un vencimiento distinto al estándar, así se dispondría de un precio de referencia con el que negociar el precio de opciones OTC que tengan las mismas características que el mercado regulado a excepción del vencimiento.

Por último se ha visto que para el caso de opciones plain vanilla europeas, como son las opciones sobre el IBEX35, los modelos basados en Black-Scholes, usando la volatilidad implícita, son preferibles –tanto por simplicidad como por ajuste– al modelo de Heston.

6. Apéndice

#####Fórmula Black 76#####

```
Black76<-function(){
  cat("Debe introducir el precio del subyacente","\n")
  f<-readLines(n=1)
  f<-as.numeric(f)
  cat("Debe introducir el strike","\n")
  K<-readLines(n=1)
  K<-as.numeric(K)
  cat("Debe introducir el número de días a vencimiento","\n")
  d<-readLines(n=1)
  d<-as.numeric(d)
  cat("Debe introducir el interés libre de riesgo","\n")
  r<-readLines(n=1)
  r<-as.numeric(r)
  cat("Debe introducir la volatilidad en tanto por 1","\n")
  V<-readLines(n=1)
  V<-as.numeric(V)
  cat("Debe indicar si es una Call o una Put","\n")
  callput<-readLines(n=1)
```

T<-d/365

```

d1<-(log(f/K) + (V^2/2)*T) / (V*sqrt(T))
d2<-d1 - V*sqrt(T)

if(callput=="Call"){
  precio<-exp(-r*T)*(f*pnorm(d1) - K*pnorm(d2))
  cat("El precio de la Call es:",precio,"\n")
}
else{
  if(callput=="Put"){
    precio<-exp(-r*T)*(K*pnorm(-d2) - f*pnorm(-d1))
    cat("El precio de la Put es:",precio,"\n")
  }
  else{cat("Debe escribir exactamente Call o Put.")
  }
}
}

```

#####Cálculo volatilidad implícita con Newton-Raphson#####

```

V.implicita.n <-function(){
  cat("Debe introducir el precio de la opción en el mercado","\n")
  precio_m<-readLines(n=1)
  precio_m<-as.numeric(precio_m)
  cat("Debe introducir el precio del subyacente","\n")
  f<-readLines(n=1)
  f<-as.numeric(f)
  cat("Debe introducir el strike","\n")
  K<-readLines(n=1)
  K<-as.numeric(K)
  cat("Debe introducir el número de días a vencimiento","\n")
  d<-readLines(n=1)
  d<-as.numeric(d)
  cat("Debe introducir el interés libre de riesgo en tanto por 1","\n")
  r<-readLines(n=1)
  r<-as.numeric(r)
  cat("Debe introducir la volatilidad de partida en tanto por 1","\n")
  V<-readLines(n=1)
  V<-as.numeric(V)
  cat("Debe indicar si es una Call o una Put","\n")
  callput<-readLines(n=1)

  Black76.f<-function(f, K, T, r, V, callput){
    d1<-(log(f/K) + (V^2/2)*T) / (V*sqrt(T))
    d2<-d1 - V*sqrt(T)
    if(callput=="Call"){
      precio<-exp(-r*T)*(f*pnorm(d1) - K*pnorm(d2))
    }
    else{
      if(callput=="Put"){
        precio<-exp(-r*T)*(K*pnorm(-d2) - f*pnorm(-d1))
      }
    }
  }
}

```

```

    else{cat("Debe escribir exactamente Call o Put. ")
        }
    }
return(precio)
}

i.max<-100
tolerancia.fx<-0.000001
tolerancia.v<-0.000001
T<-d/365
i<-0

fx<-Black76.f(f, K, T, r, V, callput) - precio_m
dfx<-f*dnorm((log(f/K)+(r+(V^2)/2)*T)/(V*T^0.5))*T^0.5
c<-fx/dfx

while(abs(c)>tolerancia.v & abs(fx)>tolerancia.fx & i<i.max){
    fx<-Black76.f(f, K, T, r, V, callput) - precio_m
    dfx<-f*dnorm((log(f/K)+(r+(V^2)/2)*T)/(V*T^0.5))*T^0.5
    c<-fx/dfx
    V<-V-c
    i<-i + 1
}

cat("La volatilidad implícita es:",V*100,"\n")
cat("El número de iteraciones son:",i,"\n")
}

#####Cálculo volatilidad implícita con Secante#####

V.implicita.s<-function(){
    cat("Debe introducir el precio de la opción en el mercado","\n")
    precio_m<-readLines(n=1)
    precio_m<-as.numeric(precio_m)
    cat("Debe introducir el precio del subyacente","\n")
    f<-readLines(n=1)
    f<-as.numeric(f)
    cat("Debe introducir el strike","\n")
    K<-readLines(n=1)
    K<-as.numeric(K)
    cat("Debe introducir el número de días a vencimiento","\n")
    d<-readLines(n=1)
    d<-as.numeric(d)
    cat("Debe introducir el interés libre de riesgo en tanto por 1","\n")
    r<-readLines(n=1)
    r<-as.numeric(r)
    cat("Debe introducir la volatilidad superior en tanto por 1","\n")
    V.s<-readLines(n=1)
    V.s<-as.numeric(V.s)
    cat("Debe introducir la volatilidad inferior en tanto por 1","\n")
    V.i<-readLines(n=1)

```

```

V.i<-as.numeric(V.i)
cat("Debe indicar si es una Call o una Put","\n")
callput<-readLines(n=1)

Black76.f<-function(f, K, T, r, V, callput){
  d1<-(log(f/K) + (V^2/2)*T) / (V*sqrt(T))
  d2<-d1 - V*sqrt(T)
  if(callput=="Call"){
    precio<-exp(-r*T)*(f*pnorm(d1) - K*pnorm(d2))
  }
  else{
    if(callput=="Put"){
      precio<-exp(-r*T)*(K*pnorm(-d2) - f*pnorm(-d1))
    }
    else{cat("Debe escribir exactamente Call o Put. ")
    }
  }
}

return(precio)
}

i.max<-100
tolerancia.fx<-0.000001
tolerancia.v<-0.000001
T<-d/365
i<-0

fxs<-Black76.f(f, K, T, r, V.s, callput) - precio_m
fxi<-Black76.f(f, K, T, r, V.i, callput) - precio_m
fx<-fxs

while(abs(V.s - V.i)>tolerancia.v & abs(fx)>tolerancia.fx & i<i.max){
  fxs<-Black76.f(f, K, T, r, V.s, callput) - precio_m
  fxi<-Black76.f(f, K, T, r, V.i, callput) - precio_m
  V.su<-V.s-((V.s-V.i)/(fxs-fxi))*fxs
  V.i<-V.s
  V.s<-V.su
  fx<-Black76.f(f, K, T, r, V.s, callput) - precio_m
  i<-i + 1
}

cat("La volatilidad implícita es:",V.s*100,"\n")
cat("El número de iteraciones son:",i,"\n")

}

#####Cálculo volatilidad implícita con Bisección#####

V.implícita.b<-function(){
  cat("Debe introducir el precio de la opción en el mercado","\n")
  precio_m<-readLines(n=1)

```

```

precio_m<-as.numeric(precio_m)
cat("Debe introducir el precio del subyacente","\n")
f<-readLines(n=1)
f<-as.numeric(f)
cat("Debe introducir el strike","\n")
K<-readLines(n=1)
K<-as.numeric(K)
cat("Debe introducir el número de días a vencimiento","\n")
d<-readLines(n=1)
d<-as.numeric(d)
cat("Debe introducir el interés libre de riesgo en tanto por 1","\n")
r<-readLines(n=1)
r<-as.numeric(r)
cat("Debe introducir la volatilidad superior en tanto por 1","\n")
V.superior<-readLines(n=1)
V.superior<-as.numeric(V.superior)
cat("Debe introducir la volatilidad inferior en tanto por 1","\n")
V.inferior<-readLines(n=1)
V.inferior<-as.numeric(V.inferior)
cat("Debe indicar si es una Call o una Put","\n")
callput<-readLines(n=1)

```

```

Black76.f<-function(f, K, T, r, V, callput){
  d1<-(log(f/K) + (V^2/2)*T) / (V*sqrt(T))
  d2<-d1 - V*sqrt(T)
  if(callput=="Call"){
    precio<-exp(-r*T)*(f*pnorm(d1) - K*pnorm(d2))
  }
  else{
    if(callput=="Put"){
      precio<-exp(-r*T)*(K*pnorm(-d2) - f*pnorm(-d1))
    }
    else{cat("Debe escribir exactamente Call o Put. ")
    }
  }
  }

  return(precio)
}

```

```

i.max<-100
tolerancia.fx<-0.000001
tolerancia.v<-0.000001
V<-(V.superior+V.inferior)/2
T<-d/365
i<-0

```

```

fx<-Black76.f(f, K, T, r, V, callput) - precio_m

```

```

while(abs(V.inferior-V)>tolerancia.v & abs(V.superior-V)>tolerancia.v & abs(fx)>tolerancia.fx
& i<i.max){
  if(fx<0){
    V.inferior<-V

```



```

    V<-(V.superior + V)/2
  }
else{
  V.superior<-V
  V<-(V.inferior + V)/2
  }
fx<-Black76.f(f, K, T, r, V, callput) - precio_m
i <- i + 1
}

cat("La volatilidad implícita es:",V*100,"\n")
cat("El número de iteraciones son:",i,"\n")
}

#####Cálculo modelo de Heston con MC#####

k<-4.1116;theta<-0.0733;vsig<-0.7762;r<-0;v0<-0.0632;s0<-8589;strike<-8600;d<-63;T<-
d/365;jmax<-d;At<-T/(d);rho<--0.7164;imax<-100000
Z1<-matrix(rnorm(imax*jmax),imax,jmax)
s<-matrix(s0,imax,jmax+1)
v<-matrix(v0,imax,jmax)
i<-1
j<-2

while(i<=imax){
  while(j<=jmax){
    Z2<-Z1[i,j]*rho+sqrt(1-rho^2)*rnorm(1)
    v[i,j]<-max(v[i,j-1]+k*(theta-v[i,j-1])*At+vsig*sqrt(v[i,j-1])*Z2*sqrt(At),0)
    s[i,j]<-s[i,j-1]+r*s[i,j-1]*At+s[i,j-1]*sqrt(v[i,j-1])*Z1[i,j]*sqrt(At)
    j<-j+1
  }
  s[i,jmax+1]<-max(s[i,jmax]-strike,0)
  j<-2
  i<-i+1
}

payoff<-mean(s[,jmax+1])
VA<-exp(-r*T)*payoff
t.test(exp(-r*T)*s[,jmax+1],conf.level=0.95)

```

7. Bibliografía

Altamirano, Y. L. y Ochoa, D. L. (2015). *Matemáticas Avanzadas II*. Universidad Tecnológica de Torreón. México.

Andersen, L. (2008). Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance* 11, 1-42.

- Aubanell, A., Benseny, A., Delshams, A. (1991). *Eines bàsiques de càlcul numèric: amb 87 problemes resolts*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra (España).
- Black, F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics* 3, 167-179.
- Black, F. y Myron S. Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- Burden, R. L. y Faires, J.D. (2010). Interpolation and Polynomial Approximation. *Numerical Analysis, 9th. Edition*. Brooks/Cole, Cengage Learning. 105-172. Boston, Estados Unidos.
- Casnovas, M. (2014). *Opciones financieras 7ª edición*. Pirámide. Madrid (España).
- Cont, R. y Fonseca, J. (2002). Dynamics of implied volatility surfaces. *Quantitative Finance* 2, 45–60.
- Crespo, J.L. y Marabel, J. (2010). Estimación de los parámetros del modelo de heston. Una aplicación al índice IBEX 35. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA* 11, 197-214.
- Crisóstomo, R. (2014). An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1502/1502.02963.pdf> (Diciembre de 2014)
- Daglish, T., Hull, J. y Suo, W. (2006). Volatility Surfaces: Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence. <http://www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/downloadablepublications/DaglishHullSuoRevised.pdf>. (Marzo 2001)
- Derman, E. (2003). Laughter in the Dark - The Problem of the Volatility Smile. http://www.emanuelderman.com/media/euronext-volatility_smile.pdf (26 de Mayo de 2003).
- Diaz, W. (1998). Método de Newton. <http://www.uv.es/~diaz/mn/node20.html> (11 de Mayo de 1998)
- Font, M. B. (2000). Análisis Empírico de la Paridad Put-call en Opciones sobre el IBEX-35. *Revista Española de Financiación y Contabilidad* 29, 991-1014.
- Haug, E. G. y Taleb, N. N. (2009). Why We Have Never Used the Black-Scholes-Merton Option Pricing Formula. <http://bfi.cl/assets/haug-taleb-2007---why-we-have-never-used-the-black-scholes-merton-option-pricing-formula.pdf> (Noviembre 2007).
- Haug, M. (2009). Black-Scholes and the Volatility Surface. <http://www.columbia.edu/~mh2078/BlackScholesCtsTime.pdf>
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies* 6, 327-343.

- Homescu, C. (2011). Implied volatility surface: construction methodologies and characteristics. <https://arxiv.org/pdf/1107.1834.pdf> (9 de Julio de 2011).
- Hull, J.C. (2012). Volatility Smiles. *Options, Futures, and Other Derivatives 8th edition*, Prentice Hall. Boston (USA)
- Lamothe y Pérez (2003). *Opciones Financieras Y Productos Estructurados*. McGRAW-HILL. Madrid (España).
- León, C. (2009). Una aproximación teórica a la superficie de volatilidad en el mercado colombiano a través del modelo de difusión con saltos. *Borradores de Economía* 570.
- Merton, R.C. (1976). Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3, 125-144.
- Merton, Robert C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1), 141-183.
- Peña, I., Rubio, G. y Serna, G. (1999). Why do we smile? On the determinants of the implied volatility function. *Journal of Banking and Finance*, 23: 1151-1179
- Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *The Journal of Finance* 49, 771-818.
- Serna, G. (2002). Valoración de opciones con sonrisas de volatilidad: aplicación al mercado español de opciones sobre el futuro del índice IBEX-35. *Revista Española de Financiación y Contabilidad* 31, 1203-1227.
- Swindle, G. (2013). Commodities and Energy Markets Supplementary. <http://orfe.princeton.edu/rtg/fmsummer/sites/orfe.princeton.edu/rtg/fmsummer/files/Section3-Basic%20Valuation.pdf>. (17 de Abril de 2013).