



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

# Tensor de Impedancias Magnetoteléurico en álgebras de Clifford

Signatura rerum del Tensor de Impedancias Magnetoteléurico

Ivan Romero Ruiz



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència [Reconeixement- Compartitqual 3.0. Espanya de Creative Commons](#).

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia [Reconocimiento - Compartitqual 3.0. España de Creative Commons](#).

This doctoral thesis is licensed under the [Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0. Spain License](#).

UNIVERSITAT DE BARCELONA

DEPARTAMENT DE GEODINÀMICA I GEOFÍSICA

# Tensor de Impedancias Magnetotelúrico en álgebras de Clifford

**Signatura rerum  
del Tensor de Impedancias Magnetotelúrico**

Memoria presentada por

**Ivan Romero Ruiz**

para optar al título de Doctor dentro del programa de doctorado de Ciencias de la Tierra  
de la Universitat de Barcelona, bajo la dirección del **Dr. Jaume Pous**.

30 de septiembre de 2015

Doctorando  
Ivan Romero Ruiz

Director y Tutor de tesis  
Dr. Jaume Pous

Esta tesis se ha realizado gracias a la ayuda predoctoral FPI (BES-2011-045358) y con soporte del proyecto CGL2010-17148, ambos concedidos por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

## Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas u organismos que han hecho posible y han colaborado de forma directa o indirecta en la realización de este trabajo.

Me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento al doctor Jaume Pous por su dedicación, apoyo y orientación en el desarrollo de mi tesis doctoral. Desde los inicios de mi carrera de investigación, Jaume me ha dispuesto el tiempo y el espacio necesarios para que pudiese desarrollar mi tesis con total libertad, ayudándome a no perder la mirada práctica y resolutiva que requiere hoy en día la investigación.

Agradezco a Ramon González Calvet por dedicarme tiempo para charlar y discutir aspectos relacionados con el álgebra geométrica. Su visión sobre el álgebra geométrica ha sido de gran aportación para mi.

Agradecer al Departament de Geodinàmica i Geofísica, tanto al equipo docente e investigador como al personal administrativo, por su amabilidad durante todos estos años. Agradecer la escucha y paciencia prestada por mi compañero de campo Hoël Seillé, con quien he compartido momentos de autentica aventura en Aragón y Tenerife. Quiero agradecer la tan preciada compañía de becarios y ex-becarios que he tenido la oportunidad de conocer Mar, Cristina, Manu, Lena, Marta, Sara y más. Los momentos compartidos han sido personalmente muy enriquecedores.

Mi más profundo agradecimiento a mis padres Manuel y Lydia, por su constante apoyo y afecto incondicional. Mis agradecimientos a Romina, su amor y cariño han sido el motor para tirar adelante con esta tesis. Que no me falten agradecimientos para mi hija Greta. Por existir, por darme la oportunidad de ser padre y la de verte crecer día a día.



# Resumen

El tensor de impedancias es el elemento matemático que condensa los datos en Magnetotelúrica. No obstante solemos verlo representado en forma matricial, representación que no ofrece toda la información que se puede recabar del mismo. Las álgebras de Clifford son un grupo asociativo que establece un sistema algebraico donde el tensor queda mejor caracterizado, dotándolo de significado geométrico. En este contexto, considerar el propio tensor y sus transformaciones como elementos del álgebra, además de reproducir de manera compacta y sencilla las relaciones habituales, abre la posibilidad de dilucidar nuevos conceptos y relaciones que están aparentemente ocultos en el tensor.

El análisis en el contexto de las álgebras de Clifford  $Cl_3$  ha permitido descomponer el tensor de impedancias en sus elementos algebraico-geométricos más simples, ello nos ha facilitado hallar siete invariantes de rotación irreducibles e independientes. En el contexto del álgebra de Clifford  $Cl_2$  se ha representado la distorsión galvánica mediante una descomposición en sus elementos algebraico-geométrico más simples. Se observa que una de las subálgebras de  $Cl_3$  dota de significancia a la invariancia del *phase tensor* con la distorsión galvánica. El análisis en  $Cl_2$  ha permitido unificar las diferentes representaciones del tensor de impedancias, siendo los Diagramas de Mohr y el *phase tensor* las más representativas. Del análisis del *phase tensor* se han deducido los índices  $Index_1$ ,  $Index_2$  y el *Phase Sensitive Strike*. En particular los índices  $Index_1$  y  $Index_2$  han permitido establecer nuevos criterios de dimensionalidad del tensor de impedancias. Al ser invariantes con la rotación y con la distorsión galvánica identifican la dimensionalidad directamente sobre un tensor experimental.

A partir de estructuras algebraicas del tensor de impedancias en  $Cl_2$ , se han deducido unas relaciones que profundizan en los aspectos dimensionales. Para los casos 1D, 2D y determinados 3D regionales, dichas relaciones se cumplen cuando no hay distorsión y dejan de cumplirse cuando un tensor de impedancias está afectado de distorsión. Esta propiedad permite utilizar dichas relaciones para determinar la distorsión galvánica. Así, se ha desarrollado un algoritmo para determinar y corregir la distorsión galvánica en el caso general 3D cuando, a periodos pequeños, el tensor de impedancias regional tiene un comportamiento 2D o 1D

(y determinados casos 3D). La identificación de hasta qué periodo pequeño la dimensión es 2D se realiza mediante los criterios de dimensionalidad que se han establecido. El algoritmo para la determinación de la distorsión galvánica consiste en una búsqueda estocástica de los parámetros de distorsión *twist*, *shear* y *anisotropy* ( $t, e, s$ ) con ciertas constricciones que se imponen al tensor regional libre de distorsión. Se han diseñado dos métodos, MIDtes y  $M\Gamma\Omega$ , cada uno utiliza distintas constricciones. El primer método, MIDtes, requiere rotar el tensor de impedancias en la dirección del *strike* 2D de los periodos pequeños. El segundo método,  $M\Gamma\Omega$ , determina la distorsión galvánica en la propia dirección de medida, sin necesidad de rotación alguna, por lo que resulta más conveniente, a la vez que evita la propagación del error debida a la rotación. En definitiva se obtienen los tres parámetros de distorsión, *twist*, *shear* y *anisotropy* ( $t, e, s$ ) con lo que el tensor regional se recupera correctamente. Se destaca que se determina el parámetro *anisotropy* ( $s$ ), que tradicionalmente se ha considerado irrecuperable.

Se ha diseñado un algoritmo, el Método Perturbativo, para la determinación del *strike* una vez identificados los periodos pequeños 2D. Se considera que la dispersión en la dirección del *strike* de los periodos pequeños 2D es debida al ruido (Gaussiano), por lo que el algoritmo consiste en generar aleatoriamente valores del tensor según una distribución Gaussiana equivalente al ruido, en estos primeros periodos 2D, hasta conseguir un *strike* común a todos ellos. El nuevo tensor se denomina *pseudo tensor*. Este procedimiento permite, además, corregir aquellos periodos que, aun siendo 2D, no cumplen las condiciones establecidas en los criterios de dimensionalidad, aumentando así la aplicabilidad de los métodos de determinación de la distorsión galvánica.

Se ha realizado un estudio de las funciones densidad de probabilidad de los índices y funciones tratados en esta Tesis. Se concluye que  $Index_1$  y el invariante  $J8$  son generalmente Gaussianas hasta una varianza equivalente al 35 % de error en los datos (ruido). La función densidad de probabilidad del *Phase Sensitive Strike* en el caso 2D deja de ser Gaussiana para errores superiores a 15 %.

Se presentan ejemplos 3D de aplicación de los diversos algoritmos desarrollados, en particular se detallan los dos métodos de determinación de la distorsión galvánica, la influencia del ruido y la recuperación del tensor de impedancias regional.

Se ha desarrollado un programa denominado MITT que recoge, además de las metodologías para determinar la distorsión galvánica, diferentes herramientas que giran en torno a las representaciones del tensor de impedancias: Curvas de resistividad aparente y fases, dia-

gramas de Mohr y la generación de funciones densidad de probabilidad de  $Index_1$ ,  $Index_2$  y *Phase Sensitive Strike*. El programa se puede descargar del Dipòsit Digital de la UB, <http://hdl.handle.net/2445/66846>.



# Abstract

The Magnetotelluric tensor is the mathematic element that condenses the magnetotelluric data. However, it is usually shown in matrix representation, which does not allow to see the whole information it contains. Clifford Algebra, an associative group, which establishes an algebraic frame where the tensor is better characterized by providing it with geometrical meaning. In this context, the tensor and its transformations are considered elements of the Clifford Algebra. In this way, not only are the already known procedures reproduced but also new concepts and relationships hidden in the tensor are now elucidated.

In the frame of Clifford Algebra  $Cl_3$ , the magnetotelluric tensor is expressed in terms of its simplest geometric-algebraic components. In this way, seven irreducible independent rotation invariants are deduced from the impedance tensor. Galvanic distortion is represented in  $Cl_2$  Clifford Algebra. An analysis of the subalgebras in  $Cl_3$  has recognised a particular subalgebra as the one giving meaning to the independence of the phase tensor with the galvanic distortion. The Mohr diagrams and the phase tensor are analysed in the context of Clifford Algebra  $Cl_2$ . The indexes  $Index_1$ ,  $Index_2$  and the *Phase Sensitive Strike* are deduced from the phase tensor in  $Cl_2$ . In particular,  $Index_1$  and  $Index_2$  have enabled to introduce new criteria for the analysis of the dimensionality. These indexes are invariants with the galvanic distortion and rotation and, therefore, allow to identify the dimensionality from the measured impedance tensor.

In Clifford algebra  $Cl_2$ , a number of relationships have been found which go in depth into the dimensionality. In 1D, 2D and certain 3D cases, those relationships are fulfilled when the tensor is free of distortion and are not fulfilled when distortion is present. This property can be used to determine the galvanic distortion. Thus, a method to determine the galvanic distortion in the 3D case, with the assumption that the regional tensor has a 2D (1D) behaviour at short periods, has been developed. The dimensionality criteria identify the number of the short 2D (1D) periods. The method is based on a constrained stochastic heuristic method, which consists of exploring randomly the full space of the distortion parameters *twist*, *shear* and *anisotropy* ( $t, e, s$ ). The constraints imposed assume the 2D (or 1D) behaviour for the

shortest periods of the regional impedance tensor. In this way a unique solution fulfilling the constraints is obtained. Two methods were developed depending on the constraints used. The MIDtes method requires a rotation to the *strike* direction of the 2D short periods, whereas the  $M\Gamma\Omega$  method determines the distortion in the measured direction. Accordingly, the last one is more convenient, and also, error propagation due to rotation is avoided. As a result, the three distortion parameters *twist*, *shear* and *anisotropy* ( $t, e, s$ ) are obtained and accordingly the regional impedance tensor is recovered. The importance of determining the *anisotropy* parameter  $s$  is emphasised, which has usually been considered as non-recoverable.

A Perturbation Method to find the *strike* of the 2D short periods in the presence of noise and galvanic distortion is developed. A different *strike* angle for each period can be obtained in a 2D case because of noise. The method takes advantage of the independence of the *strike* angle with the galvanic distortion and assumes that the noise can be modelled as a Gaussian distribution. In this way we expect to recover the *strike* direction perturbing the data for each period with a similar random Gaussian distribution to achieve a common *strike* for all the short periods. The perturbed tensor is called pseudo tensor. In addition, this procedure allows a correction of those periods which do not fulfill the 2D criteria conditions due to noise, increasing the applicability of the method to determine the galvanic distortion.

Probability density functions of the indexes and functions obtained are analysed.  $Index_1$  and invariant  $J_8$  follow a Gaussian distribution when variances are lower than 35 % of data error. The Phase sensitive *strike* for the 2D case loses the Gaussian distribution behaviour when errors are higher than 15 %.

A number of examples of distorted regional impedance tensor of 3D models are presented. The examples illustrate how the distortion parameters are found and the regional tensor is recovered.

The program MITT (Magnetotelluric Impedance Tensor Tools) is carried out. The program is based on the methodology developed in this work to determine the galvanic distortion in a regional 3D case. In addition, MITT offers different useful tools about the representations of the impedance tensor: Apparent resistivities and phases, Mohr diagrams and probability density functions of  $Index_1$ ,  $Index_2$  and *Phase Sensitive Strike*. MITT can be downloaded from the Dipòsit Digital de la UB, <http://hdl.handle.net/2445/66846>

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XIII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XVII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	6
1.2. Objetivos . . . . .	8
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	9
<b>2. Introducción al Álgebra Geométrica</b>	<b>11</b>
<b>3. Identidad Geométrica, Programa de Klein y Simetrías</b>	<b>21</b>
3.1. Programa de Klein . . . . .	22
3.2. Simetrías . . . . .	24
<b>4. Álgebras de Clifford</b>	<b>27</b>
4.1. Álgebra de Clifford $Cl_2$ . . . . .	31
4.1.1. Representación matricial del álgebra de Clifford $Cl_2$ . . . . .	31
4.1.2. Algunas propiedades de $Cl_2$ . . . . .	32
4.1.3. Números complejos . . . . .	33
4.1.4. Rotaciones en $R^2$ . . . . .	36
4.2. Álgebra de Clifford $Cl_3$ . . . . .	37
4.2.1. Representación matricial de $Cl_3$ . . . . .	37
4.2.2. Rotación en torno al eje $e_3$ en $Cl_3$ . . . . .	38

<b>5. Tensor de impedancias magnetotelúrico en álgebras de Clifford <math>Cl_3</math></b>	<b>41</b>
5.1. Subálgebras de $Cl_3$ . . . . .	45
5.2. Invariantes de rotación independientes e irreducibles . . . . .	46
5.2.1. Independencia de los invariantes . . . . .	49
<b>6. Tensor de Impedancias en subálgebra <math>Cl_2</math></b>	<b>53</b>
6.1. Consideraciones geométricas en torno a $Z$ . . . . .	53
6.2. Diagramas de Mohr del Tensor de impedancias . . . . .	55
6.3. Phase Tensor . . . . .	58
<b>7. Distorsión galvánica</b>	<b>61</b>
7.1. Descomposición de Groom & Bailey . . . . .	62
7.2. Tensor de impedancias magnetotelúrico en $Cl_2$ . . . . .	64
7.3. Tensor de impedancias magnetotelúrico distorsionado . . . . .	65
7.4. Tensor de impedancias magnetotelúrico distorsionado y rotado . . . . .	66
7.5. Parámetros de distorsión galvánica para el caso ideal 2D y 1D . . . . .	67
<b>8. Dimensionalidad del Tensor de Impedancias</b>	<b>69</b>
8.1. Nuevos índices que refinan la dimensionalidad del tensor de impedancias . . . . .	71
<b>9. Función Densidad de Probabilidad de los invariantes</b>	<b>79</b>
<b>10. Método estocástico heurístico para la determinación de la distorsión galvánica</b>	<b>85</b>
10.1. Estimación del error del Tensor de Impedancias Recuperado . . . . .	88
10.2. Determinación del Strike para el caso 2D (Método Perturbativo) . . . . .	89
10.3. Método basado en determinar <i>twist</i> ( $t$ ) y <i>shear</i> ( $e$ ) independientemente de <i>anisotropy</i> ( $s$ ) . . . . .	91
10.3.1. Determinación de los parámetros $t$ y $e$ . . . . .	91
10.3.2. Determinación del parámetro $s$ . . . . .	93
10.3.3. Determinación de los parámetros seleccionados . . . . .	94
10.4. Método basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$ ( $M\Gamma\Omega$ ) . . . . .	96
10.5. Nube de resultados en el espacio de soluciones . . . . .	98
<b>11. Ejemplos: determinación de la distorsión galvánica</b>	<b>105</b>
11.1. Ejemplos Sintéticos . . . . .	105
11.1.1. Estación 1 sin ruido . . . . .	109
11.1.2. Método (MIDtes) basado en la independencia de determinación de $t$ y $e$ frente a $s$ . . . . .	110
11.1.3. Método ( $M\Gamma\Omega$ ) basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$ . . . . .	111

11.1.4. Estación 1 con Ruido . . . . .	112
11.1.5. Método (MIDtes) basado en la Independencia de Determinación de $t$ y $e$ frente a $s$ . . . . .	114
11.1.6. Método ( $M\Gamma\Omega$ ) basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$ . . . . .	116
11.1.7. Estación 2 con Ruido . . . . .	118
11.1.8. Método (MIDtes) basado en la independencia de determinación de $t$ y $e$ frente a $s$ . . . . .	119
11.1.9. Método ( $M\Gamma\Omega$ ) basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$ . . . . .	124
11.2. Datos Experimentales . . . . .	125
11.2.1. Estación A . . . . .	126
11.2.2. Estación B . . . . .	127
11.2.3. Estación C . . . . .	129
<b>12. Conclusiones</b>	<b>131</b>
<b>APÉNDICES</b>	<b>138</b>
<b>A. Funciones Densidad de Probabilidad</b>	<b>139</b>
<b>B. Estudio de <math>Index_2</math> cuando determinante de <math>Z \leq 0</math></b>	<b>147</b>
<b>C. Guía del programa MITT</b>	<b>151</b>



# Índice de figuras

1.1.	Diagrama de Tonti para dinámica de partículas. . . . .	5
2.1.	Suma de flechas. . . . .	15
2.2.	Vectores negativos. . . . .	15
2.3.	Proyección perpendicular. . . . .	16
2.4.	Regla del paralelogramo para el producto externo. . . . .	18
2.5.	Orientaciones producto externo. . . . .	18
3.1.	Estructura de grupo de la familia de transformaciones $\mathfrak{T}$ . . . . .	23
3.2.	Reflexión como transformación. . . . .	25
3.3.	Rotación como transformación. . . . .	25
3.4.	Traslación como transformación. . . . .	26
3.5.	Similitud como transformación. . . . .	26
4.1.	Componente paralela y perpendicular. . . . .	29
4.2.	Reflexión de un vector. . . . .	30
4.3.	Rotación como composición de dos reflexiones. . . . .	30
4.4.	Operador rotación. . . . .	35
5.1.	Sistema de referencia para una estación de medida. Modelo 2D. . . . .	44
5.2.	Invariante $\gamma$ . . . . .	50
6.1.	Diagrama de Mohr para el Site 2 a 100s en fase (parte real). . . . .	57
9.1.	Simulación de funciones de densidad de probabilidad del <i>Phase Sensitive Strike</i> de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	81
9.2.	Simulación de funciones de densidad de probabilidad de $Index_1$ de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	82
9.3.	Simulación de funciones de densidad de probabilidad del invariante $J8$ de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	83

10.1.	Procedimiento en la determinación de los parámetros de distorsión galvánica.	94
10.2.	Espacio de tripletes con las cuatro zonas posibles que cumplen (10.21).	102
10.3.	Espacio de tripletes con las cuatro zonas posibles que no cumplen (10.21).	103
11.1.	Tensor de impedancias regional $Z^r$ de la estación 1 y 2 del modelo figura	
11.2.	11.2. . . . .	106
11.2.	Modelo 3D sintético.	107
11.3.	Tensor de impedancias regional $Z^r$ de la estación 1 con distorsión galvánica y rotado (sin ruido).	109
11.4.	Comparativa de las curvas teóricas con las regionales obtenidas con el método (MIDtes) para la estación 1 (sin ruido)..	111
11.5.	Comparativa de las curvas originales con las obtenidas con el método ( $M\Gamma\Omega$ ) para la estación 1 (sin ruido).	112
11.6.	Tensor de impedancias regional $Z^r$ de la estación 1 con distorsión galvánica, rotado y con ruido.	113
11.7.	Diagramas en Rosa para la Estación 1 antes y después de aplicar el Método Perturbativo.	114
11.8.	Comparativa de las curvas teóricas con las regionales obtenidas con el método (MIDtes) para la estación 1.	116
11.9.	Comparativa de las curvas originales con las obtenidas con el método ( $M\Gamma\Omega$ ) para la estación 1.	117
11.10.	Tensor de impedancias regional $Z^r$ de la estación 2 con distorsión galvánica, rotado y con ruido.	118
11.11.	Diagramas en Rosa para la Estación 2 antes y después de aplicar el Método Perturbativo (periodos de 0.017s a 0.1s).	119
11.12.	Comparativa de las curvas originales con las regionales obtenidas con el Método basado en la Independencia de Determinación de $t$ y $e$ frente a $s$ para el rango de periodos 1 de la estación 2.	121
11.13.	Diagramas en Rosa para la Estación 2 antes y después de aplicar el Método Perturbativo (periodos de 0.178s a 1.0s).	122
11.14.	Comparativa del tensor original con el obtenido con el Método basado en la Independencia de Determinación de $t$ y $e$ frente a $s$ .	123
11.15.	Comparativa del tensor original con el obtenido con el Método basado en la Independencia de Determinación de $t$ y $e$ frente a $s$ .	124
11.16.	Comparativa del tensor original con el obtenido con el método basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$ .	125
11.17.	Estación A experimental.	126
11.18.	Estación A regional corregida de distorsión galvánica.	127

11.19. Estación B experimental. . . . .	128
11.20. Estación B regional corregida de distorsión galvánica. . . . .	129
11.21. Estación C experimental. . . . .	130
11.22. Estación C regional corregida de distorsión galvánica. . . . .	130
A.1. Simulación de funciones de densidad de probabilidad de $Index_2$ de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	140
A.2. Simulación de funciones de densidad de probabilidad del invariante $J_5$ de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	141
A.3. Simulación de funciones de densidad de probabilidad del invariante $J_6$ de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	142
A.4. Simulación de funciones de densidad de probabilidad del invariante $J_7$ de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	143
A.5. Simulación de funciones de densidad de probabilidad de las resistividades aparentes de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	144
A.6. Simulación de funciones de densidad de probabilidad de las fases de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D). . . . .	145



# Índice de tablas

4.1. Producto geométrico. . . . .	31
4.2. Números complejos como subálgebra de $Cl_2$ . . . . .	33
8.1. Casos que cumplen las igualdades $\Lambda^\pm = N^{\Re} \pm N^{\Im}$ , $\Gamma^\pm = Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$ y $\Omega^\pm = P^{\Re} \pm P^{\Im}$ según la dimensionalidad. . . . .	74
11.1. Índices para el tensor regional magnetotelúrico de la Estación 1 hasta el periodo 1s. . . . .	107
11.2. Índices para el tensor regional magnetotelúrico de la Estación 2 hasta el periodo 5.623s. . . . .	108
11.3. Índices para el tensor regional magnetotelúrico de la Estación 1 hasta el periodo 1s con distorsión $(t, e, s) = (0.78, 1.46, -0.65)$ y rotado $-30^\circ$ . . . . .	110
11.4. Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación 1 hasta el periodo 1s, distorsionado, rotado y con ruido. . . . .	113
11.5. Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación 1 experimental hasta el periodo 0.1s tras aplicarle el Método Perturbativo. . . . .	115
11.6. Índices para el tensor regional magnetotelúrico de la Estación 2 después de añadirle distorsión galvánica, rotación y ruido. . . . .	118
11.7. Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación 2 experimental hasta el periodo 0.1s tras aplicarle el Método Perturbativo. . . . .	120
11.8. Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación 2 experimental para periodos de 0.178s hasta 1.0s tras aplicarle el Método Perturbativo. . . . .	122
11.9. Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación A experimental hasta el periodo 0.0013s. . . . .	126
11.10. Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación B experimental hasta el periodo 0.0006s. . . . .	128
11.11. Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación C experimental hasta el periodo 0.025s. . . . .	129



# Capítulo 1

## Introducción

El tensor de impedancias es el principal elemento matemático que condensa los datos en Magnetotelúrica y que solemos encontrar representado de forma matricial. No obstante, esta representación no ofrece toda la información que éste posee. Cuando se trata de caracterizar un espacio geométrico, el mejor modo de hallar su carácter y significancia es dar con su grupo de transformaciones. Felix Klein, en su programa Erlanger [Klein 1872], nos descubre que las propiedades geométricas se encuentran codificadas en el grupo de transformaciones de los espacios. En este sentido, las álgebras de Clifford son un grupo asociativo que ofrece un sistema algebraico unificado para las propiedades estructurales y transformacionales que constituyen y/o afectan al espacio. Concretamente las álgebras de Clifford  $Cl_3$  caracterizan plenamente al Tensor de Impedancias, dotándolo de significancia geométrica que facilita obtener de forma sistemática, intencionada y controlada diversas expresiones y funciones relacionadas con propiedades de simetría o invariancia del tensor. Por lo tanto, ofrece una estructura y metodología para realizar estudios teóricos que van más allá de simples sumas o composiciones matriciales.

En la génesis de esta tesis me encontré con una pregunta ¿Existe alguna representación del tensor de impedancias que me permita desvelar su carácter e identidad? Aunque ya tenía en mente las álgebras de Clifford como representación candidata para tal labor, éstas por sí solas no me respondían *el porqué* o, mejor dicho, *cuál es la naturaleza del tensor de impedancias que permite ser representado por las álgebras de Clifford de modo que desvela parte de su "naturaleza oculta"*; ¿Qué tienen las cosas que hace que puedan ser relacionadas con otras y en ello se desvelen algunos de sus profundos "secretos"? ¿Cuáles son este tipo de relaciones? y si éstas se pueden formular ¿implica que parte de la naturaleza de tales relaciones reside en el sí de lo relacionado?

En su búsqueda me ayudaron las investigaciones de Giorgio Agamben recogidas en su libro *Signatura rerum: Sobre el método* [Agamben 2010], en él me inspiré para el subtítu-

lo de esta tesis, *Signatura rerum del Tensor de Impedancias Magnetotelúrico*. En su libro, Agamben habla entre otras cosas de la teoría de las signaturas atribuida a Paracelso. Concretamente, en el noveno libro del tratado de Paracelso, *De signatura rerum naturalium* [*Sobre la signatura de las cosas naturales*], se ve cuál es el núcleo de la epistemología paracelsiana<sup>1</sup>, «Todas las cosas portan un signo que revela sus cualidades invisibles» [Agamben 2010]: «Nada es sin su signo puesto que la naturaleza no deja salir nada de sí sin signar lo que en ello se encuentra» [Paracelso 1859]. Siguiendo esta línea, «todas las cosas, hierbas, semillas, piedras, raíces exhiben en sus cualidades, formas y figuras lo que está en ellas»; si «son todas conocidas a través de su *signatum*», entonces «*signatura* es la ciencia a través de la cual todo lo que está oculto es descubierto y sin este arte no puede hacerse nada profundo» [Paracelso 1859].

El trabajo de Paracelso fue más allá de establecer similitudes físicas entre órganos y la forma de las plantas que poseen su cura, estableció el ejercicio de asignar representaciones a través de relaciones por semejanza. «Suele entenderse la relación entre la signatura y lo signado como una relación de semejanza, del género de aquella que existe entre las manchas en forma de ojos sobre la corola de la eufrasia y los ojos, que ésta tiene el poder de curar. Que el arquetipo de la signatura, la *Kunts Signata* por excelencia, sea la lengua, obliga a entender esta semejanza, no como algo físico, sino según un modelo analógico e inmaterial.» [Agamben 2010].

Entonces, en la semejanza intrínseca a la representación se descifran caracteres, marcas identitarias de lo representado a través del conocimiento ligado a tal representación, conocimiento que la dota de sentido. En *Les Mots et les choses* Michel Foucault cita el tratado de Paracelso «No hay semejanza sin signatura. El mundo de lo similar sólo puede ser un mundo marcado» [Foucault 1966], pero un mundo regido por las semejanzas necesita de signaturas, marcas que nos enseñen a reconocerlas. «Para Foucault solo queda desarrollar la función y el lugar propios de las signaturas; para ello distingue la semiología -conjuntos de conocimientos que permiten reconocer qué es un signo y qué no- de la hermenéutica, conjunto de conocimientos que permiten descubrir el sentido de los signos, hacerlos hablar» [Agamben 2010]. Foucault sugiere que el siglo XVI «ha superpuesto semiología y hermenéutica en la forma de la semejanza [...] La naturaleza de las cosas, su coexistencia, el encadenamiento que las une y a través del cual comunican, no es más que su semejanza, y ésta sólo aparece en la red de los signos que recorre el mundo de un extremo a otro» [Foucault 1966].

---

<sup>1</sup>El éxito de la medicina paracelsiana en la época renacentista y barroca se basa en el poder terapéutico de las plantas cifrado en las signaturas.

Según Nicolas Bourbaki en su *Éléments d'histoire des mathématiques* el siglo de oro de la geometría, por convenio el siglo XIX, se extiende desde la *Geometría descriptiva* de Monge (1795) hasta el programa Erlangen de Klein (1872). El programa Erlanger de Klein proporciona un principio organizativo para la geometría basado en la noción de grupo de transformaciones y el estudio de sus invariantes. Klein dice: «Geometría es la ciencia que estudia las propiedades de las figuras que se preservan bajo transformaciones de cierto grupo de transformaciones»; lo que es igual a «la ciencia que estudia los invariantes de un grupo de transformaciones». Trasladando el principio de Klein al *Signatura rerum* de Paracelso planteado por Agamben, podemos decir que el grupo de transformaciones es el paradigma del *Signatura rerum geometricum*. Podemos añadir que «si en la episteme renacentista la signatura se refiere así a la semejanza entre el signo y lo designado, en la ciencia moderna ésta ya no es un carácter del signo singular, sino de su relación con los otros signos» [Agamben 2010]. Si con signos nos referimos a las figuras geométricas, Klein nos brinda un principio de semejanza, ya no sólo en la asignación geométrica a los objetos cotidianos (signo singular), sino entre figuras geométricas, entre los propios signos. Y lo hace a través del grupo de transformaciones. El objetivo de Klein era unificar las distintas geometrías existentes (geometría euclidiana, hiperbólica, conforme, ...). La clave de tal unificación fue hallar propiedades intrínsecas a los espacios geométricos que pudiesen codificarse en un sistema común, independientemente de los detalles particulares o individuales de tales espacios. Estas propiedades resultan estar codificadas en el grupo de transformaciones del espacio.

Dado que el tensor de impedancias es un aparato matemático que da cuenta de la relación entre dos tipos de espacios, el campo eléctrico y el campo magnético, ¿qué tipo de transformación de grupos podría representar a este conjunto que pueda asignarse tanto a las estructuras espaciales (campo eléctrico y magnético) como al tensor de impedancias que las relaciona, que los transforma?

En cuanto a las álgebras de Clifford se refiere, Hestenes -conocido como el artífice de la álgebra geométrica como lenguaje unificador de las matemáticas y la física- dice que «en geometría clásica los elementos primitivos son los puntos, y los objetos geométricos son conjuntos de puntos con ciertas propiedades. Las propiedades son de dos tipos: estructurales y transformaciones. En el programa Erlanger, Felix Klein (1872) clasificó las geometrías mediante las transformaciones utilizadas para comparar objetos (por ejemplo, similaridades, proyectividades, afinidades, etc.). El Álgebra Geométrica [se refiere a las álgebras de Clifford] proporciona un sistema algebraico unificado para ambos tipos de propiedades y cualquier tipo de geometría» [Hestenes et al. 2001]. En este sentido podemos ver que la distinción, planteada en el “*Signatura rerum geometricum*” de Klein, entre signos singulares

(objetos geométricos) i signos como relación entre éstos, se ve dislocada en las álgebras de Clifford, donde las álgebras que representan objetos geométricos son a su vez operadores de transformación.

Por el momento hemos estado hablando de geometría en sí, de la conexión entre elementos geométricos y de cómo el grupo de transformaciones les otorga carácter e identidad, es decir, lo que hemos bautizado como “*Signatura rerum geometricum*” de Klein. Ello nos ha llevado a las álgebras de Clifford como aparato matemático perfecto para caracterizar espacios geométricos y sus transformaciones, como representación ideal para caracterizar el Tensor de Impedancias Magnetotelúrico, pero en ello se obvia algo esencial ¿qué nos permite ligar cantidades físicas, campos, con los espacios geométricos y sus transformaciones? es decir ¿qué nos permite ligar las álgebras de Clifford con el tensor de impedancias magneto-telúrico?

Estudios, en los que se comparan diferentes teorías físicas, han ido desvelando la existencia de una estructura matemática común que proviene de un telón de fondo topológico que comparten las teorías físicas. «Tal estructura matemática fue adquirida al darnos cuenta de que en toda teoría física hay variables físicas que están naturalmente asociadas a elementos geométricos y cronométricos simples como puntos, líneas, volúmenes, superficies, instantes temporales e intervalos de tiempo, así como combinaciones de éstos.»[Tonti 1975].

«Quizás esta conexión entre física y geometría ya sea conocida desde hace tiempo. Pero no parece que se hayan dado cuenta lo lejos que se puede llegar en el entendimiento de las estructuras formales de las teorías físicas al explorar las consecuencias de esta remarcable conexión»[Tonti 1975].

En este sentido, Enzo Tonti realiza una fascinante clasificación taxonómica en la que describe la naturaleza de las variables físicas y su asociación con elementos geométricos simples; tal información se recoge en los *diagramas de Tonti* (Figura 1.1). Esta conexión no se escapa del marco de las semejanzas de Foucault, «no hay semejanza sin signatura». Por lo tanto, la conexión de Tonti es una signatura en la que ciertas variables físicas están signadas por un elemento geométrico. Entonces, el “*Signatura rerum geometricum*” de Klein y la *conexión* de Tonti forman conjuntamente una semejanza doblemente signada: una signatura en la que ciertas variables físicas están signadas por un elemento geométrico, y éstos, a su vez, están signados por un grupo de transformaciones. Al par de semejanzas formado por la *conexión* de Tonti y por el “*Signatura rerum geometricum*” de Klein lo podemos llamar “*Signatura rerum fisicae*”. Lo que sigue naturalmente a este desarrollo es que las álgebras

de Clifford representan una buena herramienta para la física, pudiendo representar variables físicas de diversas naturalezas.

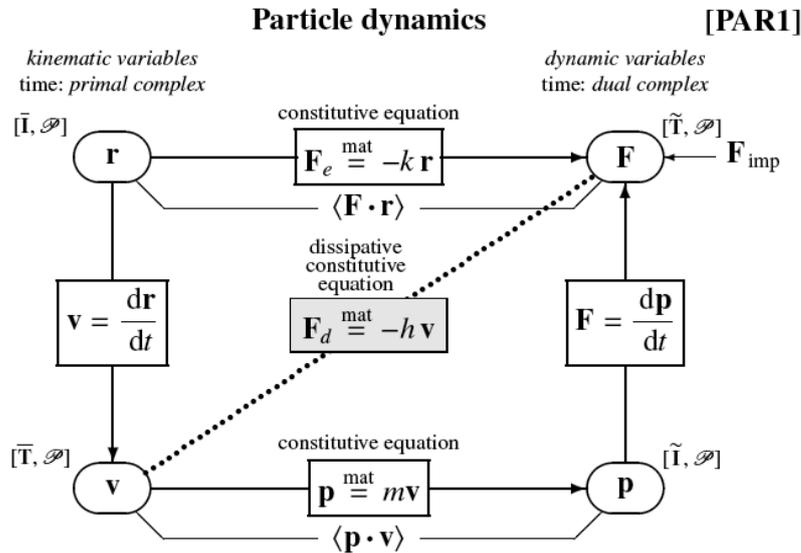


Figura 1.1: Diagrama de Tonti para dinámica de partículas. Muestra cómo se vertebraba la relación entre variables cinemáticas y dinámicas mediante ecuaciones de constitución, en el cuerpo del método de las celdas complejas. Por ejemplo  $[\bar{I}, \mathcal{P}]$  representa una celda compleja del vector posición  $\mathbf{r}$ , constituida por el elemento cronométrico instantáneo  $\bar{I}$  y el elemento geométrico de puntos  $\mathcal{P}$ ;  $[\tilde{I}, \mathcal{P}]$  representa una celda compleja dual del vector fuerza  $\mathbf{F}$ , constituida por el elemento cronométrico dual intervalo de tiempo  $\tilde{I}$  y el elemento geométrico de puntos  $\mathcal{P}$ .

Llegados a este punto, decir que me queda respondida la pregunta de si las álgebras de Clifford son una buena representación para el tensor de impedancias y porqué, quizás es decir mucho. No obstante este viaje epistemológico me ha permitido comprender que las álgebras de Clifford no es la única ni la mejor de las representaciones. Como dice Agamben «La lengua, que custodia el archivo de las semejanzas inmateriales, es también el cofre de las signaturas.» [Agamben 2010]. Muchas son las representaciones que aportan diferentes miradas sobre el tensor de impedancias magnetoteléurico, desde las más generalizadoras como las álgebras de Clifford y la matricial, hasta las menos como los diagramas de Mohr, el *phase tensor* o las curvas de resistividad aparente y fases. Decir con certeza cuál de ellas es mejor es producto de una justificación acordada, ya que «la búsqueda de la certeza -aun como una meta a largo plazo- es un intento de escapar del mundo, uno debe dejar de preocuparse por si lo que cree está bien fundado y comenzar a preocuparse por si se ha sido lo suficiente imaginativo como para pensar alternativas interesantes a las propias creencias actuales» [Rorty 1997].

## 1.1. Motivación

Se suele pensar que uno empieza su tesis con una idea clara de los senderos que debe tomar para desarrollar una investigación, en mi caso no ha sido enteramente así. Puedo decir que el cuerpo de esta tesis ha ido variando considerablemente y no se ha ido conformando ni mucho menos de forma progresiva ni continua. Con esto quiero hacer notar que mi investigación se presentó inicialmente desestructurada, con múltiples lagunas e ideas inconexas. De lo que sí que estuve convencido es de que el álgebra geométrica podía aportar algo a la Magnetotelúrica (MT), concretamente al tensor de impedancias. Teniendo en cuenta que lo de *convencimiento* a veces pertenece más al marco de la intuición decidí no limitar mi investigación a una mera aplicación de las álgebras de Clifford al tensor de impedancias. Por este motivo cumplí mi trabajo con pinceladas históricas del desarrollo del álgebra geométrica. En este sentido presento un capítulo de los orígenes del álgebra geométrica, dónde se da muestra de las vicisitudes en las que se ha desarrollado la geometría hasta el álgebra geométrica; en ellas resulta ineludible decir que la geometría pasa por el estudio de las simetrías, las cuales tienden un puente entre arte, naturaleza y ciencia, resultando natural ligar la génesis de la idea de simetría con los matemáticos Felix Klein y Sophus Lie, quienes dieron cuenta de lo necesario en un aparato matemático capaz de reflejarlas.

En el contexto de la Magnetotelúrica se han realizado múltiples representaciones del tensor de impedancias, las más destacadas son la representación matricial, las curvas de resistividad aparente y fase, los diagramas de Mohr [Lilley 1993] y el *phase tensor* [Caldwell et al 2004]. Todas ellas expresan diferentes características del tensor de impedancias. Los diagramas de Mohr y el *phase tensor* se construyeron partiendo de la representación matricial del tensor de impedancias, su objetivo principal era definir invariantes de rotación y/o de la distorsión galvánica. Se han empleado y adaptado muchos sistemas algebraicos para expresar relaciones geométricas y describir estructuras geométricas. Especialmente en física, se han empleado los números complejos, cuaterniones, el álgebra matricial, vectorial, tensorial, espinorial y las formas diferenciales. Cada una de estas álgebras posee cierto significado y presenta ventajas frente a las demás, pero ninguna ofrece una estructura algebraica adecuada para los propósitos generalizadores de la geometría y la física. A su vez, estos sistemas algebraicos se solapan considerablemente, proveyendo diferentes representaciones matemáticas para una misma idea geométrica o física. En este sentido, no es extraño hallar dos o más representaciones para un sólo problema, comportando un tiempo considerable en traducir expresiones de una representación a otra. Para obtener una teoría unificada es preciso tener un lenguaje matemático unificado que nos permita desarrollarla y expresarla. El álgebra geométrica aúna todos los requisitos que permiten desarrollar una teoría preservando todos

los aspectos geométricos con toda su riqueza y sutileza, proporciona un sistema en el que diferentes entidades (números) como escalares, vectores, bivectores (y de orden superior) pueden combinarse para crear nuevos objetos. Cada número tiene propiedades inherentes a su geometría independientemente de la representación empleada (ej. matrices). En este escenario, las características geométricas del objeto son fácilmente reconocibles, y las cantidades como los campos (ej. campo eléctrico), las fuentes (ej. inducción electromagnética) y los operadores diferenciales entre ellos se pueden expresar de un modo que va más allá de combinar simplemente matrices. Un número de Clifford es un número dotado de extensión geométrica. El ejemplo más claro es el de los números complejos, que son una extensión geométrica de los números reales.

## 1.2. Objetivos

Las álgebras de Clifford (álgebra geométrica) van ganando cada vez más adeptos. Ya no es extraño encontrarlas en los programas universitarios de física y matemáticas. Este éxito no se debe solo a la operatividad que confiere la estructura algebraica inherente en el álgebra geométrica, sino a su capacidad de representar tanto propiedades estructurales como transformacionales.

En el marco de la magnetotelúrica no existe una estructura matemática que aúne álgebra y geometría. Dada la potencia operativa de las álgebras de Clifford podemos marcar cuáles han sido los objetivos que giran en torno a representar el tensor de impedancias magnetotelúrico en estas álgebras:

- Representar el tensor de impedancias en álgebras de Clifford y unificar las representaciones del tensor ya existentes. Siendo las más conocidas, la matricial, los diagramas de Mohr y el *phase tensor*.
- Encontrar los invariantes de rotación<sup>2</sup> independientes y con mínima expresión en términos de los elementos del tensor de impedancias.
- Representar la distorsión galvánica y el tensor de impedancias distorsionado en el marco de las álgebras de Clifford.
- Encontrar nuevos índices que permitan definir la dimensionalidad del tensor de impedancias.
- Diseñar una metodología que permita determinar los parámetros de distorsión galvánica para los casos 3D.
- Elaborar un software que recoja las metodologías para la determinación de la distorsión galvánica así como las distintas representaciones del tensor de impedancias.

---

<sup>2</sup>Se entiende en torno al eje  $e_z$  o en el plano  $e_x$ - $e_y$ .

## 1.3. Estructura de la tesis

El contenido de esta tesis está ordenada en seis bloques que ordenan conceptualmente el desarrollo realizado:

- i. Los **capítulos 2, 3 y 4** presentan los aspectos fundamentales de las álgebras de Clifford que serán necesarios para capítulos posteriores en los que contextualizaremos las álgebras de Clifford en el marco de la magnetotelúrica. El **capítulo 2** es un resumen del desarrollo histórico hasta llegar a las álgebras de Clifford. Da cuenta del desarrollo y "cración" de la geometría y el álgebra y de cómo finalmente se aunaron en lo que conocemos hoy en día como álgebra geométrica. El **capítulo 3** da cuenta de la importancia de los grupos de transformaciones para la caracterización de los objetos geométricos, de cómo los objetos geométricos encuentran su identidad en sus propiedades transformacionales. Las álgebras de Clifford, grupo asociativo, aúnan en sí la capacidad de representar tanto propiedades estructurales como transformacionales, lo que hace que sean un candidato perfecto para la representación de campos o espacios en física y matemáticas. El **capítulo 4** define las álgebras de Clifford, para los espacios  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , que serán necesarias para la representación del tensor de impedancias.
- ii. En los **capítulos 5, 6 y 7** se define el tensor de impedancias y el tensor de impedancias afectado por distorsión galvánica en el marco de las álgebras de Clifford. En el **capítulo 5** se representa el tensor de impedancias en  $Cl_3$  y se definen sus subálgebras e invariantes de rotación (en el plano  $e_x$ - $e_y$ ) independientes e irreducibles. El **capítulo 6** define el tensor de impedancias en una de las subálgebras  $Cl_2$  definidas en el capítulo 5. En esta subálgebra se definen las representaciones del tensor de impedancias más conocidas, los diagramas de Mohr y el *phase tensor*. En el **capítulo 7** se representa la distorsión galvánica y el tensor de impedancias magnetotelúrico distorsionado en álgebras de Clifford.
- iii. El **capítulo 8** analiza la dimensionalidad. Se definen los parámetros  $Index_1$  e  $Index_2$ , y se determinan sus límites de aplicación. También se crean los índices  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\omega$  que detallan el concepto de dimensionalidad. En particular  $\gamma$  y  $\omega$  serán determinantes para la determinación de la distorsión galvánica.
- iv. En el **capítulo 9** se revisa la validez de las funciones densidad de probabilidad de los invariantes de rotación, de los parámetros de dimensionalidad y del *Phase Sensitive Strike*.
- v. Los **capítulos 10 y 11** recogen la metodología para la determinación de la distorsión galvánica. El **capítulo 10** describe el método estocástico heurístico con constricciones

empleado para determinar la distorsión galvánica. El **capítulo 11** recoge una colección de ejemplos que muestran cómo trabaja el método en la determinación de la distorsión galvánica y en la recuperación del tensor de impedancias regional.

vi. El **capítulo 12** recoge las conclusiones generales de la tesis.

#### **Apéndices:**

A: Funciones densidad de probabilidad ( $J5, J6, J7, Index_2, \rho_a$  y  $\phi$ ).

B: Estudio de  $Index_2$  cuando  $\det(\mathbf{Z}) \leq 0$ .

C: Guía del programa MITT.

## Capítulo 2

# Introducción al Álgebra Geométrica

El presente trabajo no pretende hacer un estudio matemático riguroso de las álgebras de Clifford, más bien dar muestra de su aplicabilidad en el tensor de impedancias magneto-telúrico. Para ello, este capítulo está orientado a introducir los contenidos básicos del álgebra geométrica y más concretamente de las álgebras de Clifford.

Hablar sobre los orígenes del álgebra geométrica es hablar de la evolución histórica de la relación entre elemento geométrico y número. Euclides dio cuenta de la distinción entre magnitud y número en la resolución de problemas geométricos. Descartes introdujo la notación matemática en el álgebra que permitió construir expresiones más complejas representado números y a su vez elementos geométricos. Llegando finalmente a Grassmann que extendió a más dimensiones la estructura algebraica para poder definir números con todos sus aspectos geométricos como magnitud, dirección y dimensionalidad.

Remontémonos a los orígenes históricos del álgebra geométrica, concretamente a la primera formulación sistemática de física teórica en la antigua Grecia; Euclides (300 a.c.) mostró que a partir de un puñado de simples asunciones sobre la naturaleza de los objetos físicos se puede deducir una gran variedad de relaciones notables; pero la geometría griega no se desarrolló con el “problema de la medida” en mente. Hoy día “medir” implica asignar un número y Euclides apenas distinguía entre “número” y “magnitud”. Él asociaba la noción de número estrictamente a la operación de contar, y sólo reconocía los enteros como números. Para Euclides una magnitud era un segmento de línea y usualmente representaba un número entero  $n$  como un segmento de línea que era  $n$  veces la longitud de otro segmento que él adoptaba como unidad. No obstante, Euclides sabía que el procedimiento opuesto era imposible: distinguir todos los segmentos de línea de diferente longitud como unidades contables. Dio cuenta de esto mostrando que la diagonal de un cuadrado y los lados de éste no pueden ser simultáneamente múltiplos enteros de una sola unidad singular. Tenemos constancia de que Euclides distinguía entre contar números y magnitudes dado que demostró varios teore-

mas en duplicado, uno con números y el otro con magnitudes.

El florecimiento de la ciencia y las matemáticas en la antigua Grecia precedió a un largo periodo de incubación científica hasta que la explosión del conocimiento científico del siglo diecisiete vio nacer al mundo moderno. Durante este lapso de tiempo se inventó el sistema decimal árabe y el álgebra se fue desarrollando lentamente. No es casualidad que después de que el sistema algebraico empezase a tomar forma durante el siglo diecisiete hubiese una gran explosión de conocimiento científico. Aunque el álgebra estuviese ligada a la geometría desde sus inicios, no fue hasta René Descartes que se desarrolló dentro de un lenguaje geométrico. Descartes dotó a la noción griega de magnitud una forma simbólica, asumiendo que todo segmento de línea puede representarse únicamente por un número. Fue el primero en etiquetar los segmentos de línea por letras representando su longitud numérica. Realizó mejoras significativas en la notación algebraica, muy cercanas a la notación de hoy día. La asunción de la correspondencia entre números y segmentos de Descartes supuso el fundamento de la unión de la geometría y el álgebra. Esta correspondencia puede hallarse de forma sencilla a partir de la idea de que puede establecerse una relación biyectiva entre los números y los puntos sobre una línea geométrica. Descartes y sus contemporáneos obviaban esta idea, ya pensada y rechazada por pensadores en la antigua Grecia al topar con la inconmensurabilidad en la matemáticas. La invención de los números algebraicos supuso un profundo cambio en la noción de número, se produjo al asumir la existencia de soluciones a ecuaciones algebraicas e ideando símbolos para representarlas. En particular el símbolo  $\sqrt{2}$  fue inventado para representar una solución de la ecuación  $x^2 = 2$ , permitiendo identificar tal número con la longitud de la diagonal de un cuadrado, superando de este modo la inconmensurabilidad de los antiguos griegos y permitiendo asumir que a todos los puntos sobre una línea se les puede asociar un número.

No fue hasta el siglo diecinueve que las nociones de “infinito” e “infinitamente pequeño” permitieron solucionar las deficiencias de la noción de número con el “continuo de los números reales”, cuando Weierstrass, Cantor y Dedekind dotaron de aritmética al sistema numérico, definieron los números reales en términos de los números naturales y su aritmética sin apelar a ningún aspecto intuitivo geométrico del continuo. A pesar de que este desarrollo separó aparentemente la noción de número de la geometría, la unión de geometría y números es un hecho consumado dado que se puede establecer una relación biyectiva entre los números reales y los puntos sobre una línea recta. La definición aritmética de los números reales nos brindó expresiones simbólicas precisas para la noción intuitiva de una línea continua.

La evolución de los números no acaba en el sistema de los números reales, hay más

geometría que el continuo lineal. Para ello fueron precisas expresiones simbólicas para las nociones de dirección y dimensión. La generalización de número que también incorporara el concepto de dirección no fue resuelta hasta Hermann Grassmann, quien concibió la idea de “número direccionado” en su libro *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844) [La teoría de la extensión lineal, una nueva rama de las matemáticas]. Recordemos que la regla de Descartes para relacionar números con segmentos de línea, en la que a todo escalar positivo (“números reales” positivos)<sup>1</sup> se le asigna un “segmento de línea”, no posee ni lugar ni dirección. Dicho de otro modo, todos los segmentos de línea congruentes están considerados como uno y el mismo<sup>2</sup>. Grassmann optó por considerar dos segmentos de línea como equivalentes si y solo si uno puede obtenerse del otro mediante una traslación, pudiendo en este caso asignar a ambos segmentos el mismo símbolo. Si dos segmentos podían obtenerse el uno del otro mediante una rotación, él consideraba que los segmentos de línea tenían direcciones distintas, asignando a cada uno de ellos un símbolo diferente. Estos conceptos dieron paso a la idea de segmento de línea direccionado, o *vector*, como un segmento de línea que puede trasladarse libremente de sitio sin cambiar de magnitud ni dirección.

Escribiremos los vectores con símbolos en negrita para distinguirlos de los escalares. Si dos segmentos de línea, designados por los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , tienen la misma magnitud y dirección, diremos que los vectores son *iguales*, y como en el álgebra escalar uno puede escribir

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Lejos de obviar una clasificación de segmentos de línea por su longitud, como un vector además posee dirección, podemos ver que se puede asociar a cada vector  $\mathbf{a}$  un único escalar que indicamos con  $|\mathbf{a}|$  y que llamaremos magnitud o longitud del vector  $\mathbf{a}$ . Si suponemos que un vector  $\mathbf{b}$  posee la misma dirección que  $\mathbf{a}$ , pero las magnitudes de ambos son distintas  $|\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}|$ , donde  $\lambda$  es un escalar positivo, podemos expresar su relación del modo siguiente:

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} \tag{2.1}$$

esta relación da cuenta de que si multiplicamos un vector por un escalar cambiamos su magnitud pero no su dirección y se llama *dilatación*; concretamente si  $\lambda > 1$  se llama *expansión*

---

<sup>1</sup>Los números reales no fueron descubiertos en la época de Descartes, no es un anacronismo, sólo se presenta aquí para ilustrar la aplicabilidad de su regla.

<sup>2</sup>En términos matemáticos, todo escalar positivo designa una *clase de equivalencia* de segmentos de línea congruentes.

y si  $\lambda < 1$  se llama *contracción*.

La ecuación (2.1) nos permite escribir

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\hat{\mathbf{a}}, \quad |\hat{\mathbf{a}}| = 1 \quad (2.2)$$

expresando el vector  $\mathbf{a}$  como producto de su magnitud  $|\mathbf{a}|$  por un *vector unitario*  $\hat{\mathbf{a}}$ . Lo de unitario es porque sólo especifica la dirección de  $\mathbf{a}$ . Entonces podemos considerar la ecuación (2.2) como la descomposición de  $\mathbf{a}$  en su magnitud y dirección.

Si en la ecuación (2.1) consideramos  $\lambda = 0$ , resulta un vector de magnitud cero

$$(0)\mathbf{a} = 0 \quad (2.3)$$

como a la dirección de un segmento de longitud cero no se le suele asociar la menor consecuencia, se asume que el vector cero a la derecha de la ecuación (2.3) es único y no importa cual sea la dirección de  $\mathbf{a}$ . Es más, consideraremos que es el mismo número que el cero escalar, por este motivo ya no aparece en negrita en la ecuación (2.3).

Grassmann pudo ser la primera persona en entender que el significado de un número no yace en sí mismo sino en la relación con los demás números; la noción de número reside en las reglas que combinan dos números para obtener un tercero. En este sentido, dos segmentos de línea conectados en sus extremos determinan un tercero, que podemos relacionar con la suma. Podemos expresar esta suma geométrica mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2.4)$$

Así, las reglas para sumar vectores quedan determinadas por su relación con segmentos de línea direccionados como podemos ver en la Figura 2.1

Del mismo modo que la suma escalar, la suma vectorial debe obedecer la propiedad conmutativa,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  y la propiedad asociativa,  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ . También el número cero juega un papel importante en la suma vectorial,  $\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$ . Es más, a todo vector le corresponde un y solo un vector  $\mathbf{b}$  que satisface la ecuación  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$ . Este vector se llama *negativo* de  $\mathbf{a}$  y se indica con  $-\mathbf{a}$  (Figura 2.2).

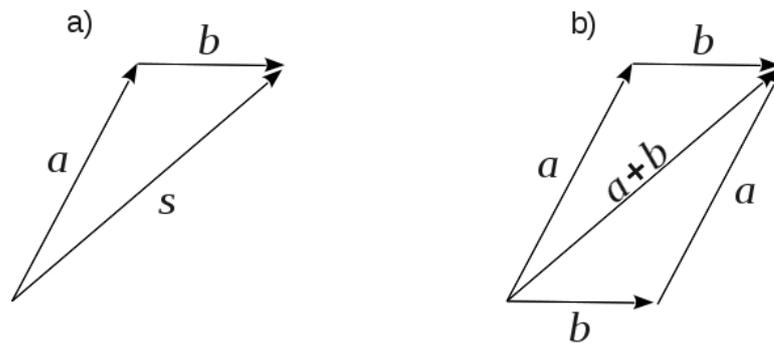


Figura 2.1: Suma de flechas. a) Dos flechas, etiquetadas mediante vectores  $a$  y  $b$ , pueden sumarse geoméricamente juntando el origen de una con la punta de la otra obteniendo  $s$ . b) Dado que se obtiene la misma  $s$  si juntamos el origen de  $a$  con la punta de  $b$  como si juntamos el origen de  $b$  con la punta de  $a$ , decimos que la suma de vectores es conmutativa.

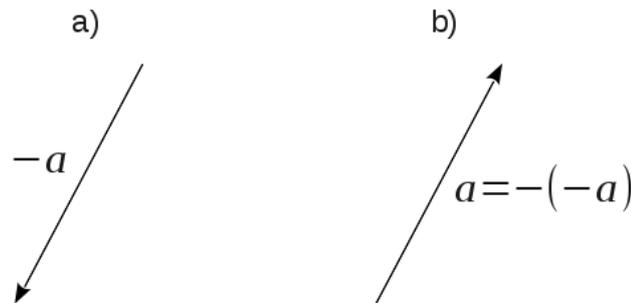


Figura 2.2: Vectores negativos.

Una flecha que representando a  $-a$  en a) difiere de otra que representando a  $a$  en b) porque apuntan en sentidos contrarios. Decimos que  $a$  y  $-a$  tienen *orientaciones opuestas*.

La existencia de *negativos* presenta distintos aspectos. La posibilidad de restar como suma de un negativo  $c - a = c + (-a)$  y la posibilidad de definir el producto por un escalar  $(-1)a = -a$ . Esta última justifica la interpretación de  $-1$  como la operación que invierte la dirección. Entonces  $(-1)^2 = 1$  sólo pone de manifiesto que invirtiendo la dirección dos veces uno puede reproducir la dirección original. En este sentido, el concepto de números direccionados lleva a una interpretación operacional de los números negativos.

Uno puede dar una expresión algebraica completa a la noción de dirección cuando mira de resolver el modo de multiplicar vectores. Una de las construcciones más comunes en geometría es la *proyección perpendicular* de un segmento de línea sobre otro (Figura 2.3), la cual nos lleva a definir el *producto interno*. Se define el producto interno de dos segmentos de línea direccionados, representados por los vectores  $a$  y  $b$ , como el segmento de línea *orientado* obtenido al dilatar la proyección de  $a$  sobre la de  $b$  por la magnitud de  $b$ . La magnitud y la orientación del segmento de línea resultante es un escalar que indicamos con  $a \cdot b$  y lo

llamamos *producto interno* de los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Esta definición de  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  implica la siguiente relación con el ángulo  $\theta$  formado por  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2.5)$$

La construcción geométrica en la que se basa la definición de  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  da un segmento de línea direccionado sobre la línea de  $\mathbf{a}$  o de  $\mathbf{b}$ . El valor numérico de  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  es independiente de la dirección de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  si el ángulo entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  es fijo. A esto le sigue la propiedad simétrica  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ . El producto interno también posee las siguientes propiedades.

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \leftrightarrow \mathbf{a} = 0$$

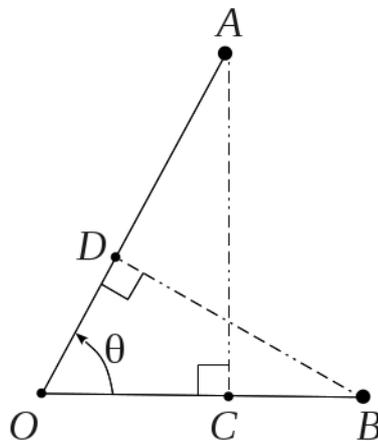


Figura 2.3: Proyección perpendicular. La proyección perpendicular de  $OA$  sobre la línea  $OB$  es el segmento de línea  $OC$ . Cuando decimos “perpendicular” nos referimos a que la línea  $AC$  es perpendicular a  $OC$ . Si  $\theta$  es la medida en radianes del ángulo  $AOB$  uno puede decir que  $OC = OA \cos \theta$ . Del mismo modo  $OD = OB \cos \theta$ .

Podemos ver que el producto interno permite calcular ángulos y longitudes de segmentos de línea. Por lo tanto, el álgebra vectorial permite demostrar de forma sencilla infinidad de problemas geométricos. Por ejemplo la trigonometría, que fue fundada en la antigua Grecia y no encontró su forma más simple de expresión hasta la invención del álgebra vectorial y el producto interno de Grassmann. Evidentemente la trigonometría puede trabajarse como un sistema de ecuaciones y relaciones sin hacer mención alguna a triángulos y proyecciones,

pero hacer uso de la asociación de vectores con triángulos y del producto interno con proyecciones es lo que da sentido a la trigonometría como descripción del mundo que nos rodea.

La teoría de escalares y vectores basada en las relaciones algebraicas mencionadas están ampliamente aceptadas por los matemáticos y físicos de hoy día, sin embargo este álgebra es incapaz de describir completamente todos los conceptos geométricos. Concretamente, el producto interno falla en el momento que uno quiere describir dos segmentos lineales no paralelos determinando un plano, o dicho de otro modo, dos segmentos de línea no colineales determinando un paralelogramo. La importancia de esto estriba en la posibilidad de relacionar un paralelogramo con un tipo de *producto geométrico* entre sus lados. Otra vez se pone a prueba nuestra concepción de número y requiere ser nuevamente generalizada. En este sentido, podemos considerar un paralelogramo como un segmento plano direccionado. Entonces, del mismo modo que los vectores fueron definidos para caracterizar segmentos de línea direccionados, podemos crear un nuevo tipo de número direccionado que caracterice un segmento de plano direccionado, a tal número lo llamaremos *bivector* o *2-vector*. De la misma manera que asociamos la dirección de un vector a la de una línea recta orientada, asociamos la dirección de un bivector a la dirección de un plano no curvo orientado. Distinguir entre estos tipos de direcciones conlleva una idea más general de *dimensión* o *grado*, se dice que un vector es *1-dimensional* y un bivector *2-dimensional*. También a un escalar se le puede asociar un *0-vector* para indicar que se trata de un número *0-dimensional*.

«En geometría los conceptos de línea y plano juegan roles de significancia comparable. Realmente, apenas podemos decir que cada uno de los conceptos tenga significancia aparte del otro, el significado matemático de “línea” y “plano” están determinados únicamente al especificar las relaciones mútuas. Para dar *igual* representación algebraica a “planos” y “rectas”, debemos extender la noción de número direccionado incluyendo bivectores así como los vectores, las relaciones entre líneas y planos deben reflejarse en las relaciones entre vectores y bivectores. Comúnmente se concibe que tanto la línea como el plano consisten en un conjunto de puntos que guardan cierta relación de uno punto a otro. Es en la naturaleza de esta relación que distinguimos líneas de planos. Con sólo un vector se caracteriza completamente la relación que tienen los puntos en una línea dada. Con un sólo bivector se caracteriza completamente la relación direccional de los puntos en un plano dado. En otras palabras, un bivector no describe el conjunto de puntos en un plano, sino que describe la propiedad direccional de tal conjunto... ..Entonces, la noción de plano como relación se puede separar de la noción de plano como conjunto de puntos.» [Hestenes 2008]

Entonces, moviendo un punto una distancia y una dirección específicas de un vector  $\mathbf{a}$  se traza un segmento de línea direccionado. Y si se mueve cada uno de los puntos de este seg-



Figura 2.4: Regla del paralelogramo para el producto externo. El orden de las flechas sobre las aristas determina la orientación del paralelogramo. Las flechas indican el camino de un punto, trazando primero un segmento de línea y luego este segmento de línea se mueve barriendo el espacio formando el paralelogramo.

mento línea una distancia y una dirección específicas de un segundo vector  $\mathbf{b}$ , “trazamos” un paralelogramo. Si el bivector correspondiente a este paralelogramo está únicamente determinado mediante esta construcción geométrica, podemos relacionarla con un tipo de producto específico entre los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{B} \quad (2.6)$$

la “cuña” se emplea para distinguir el producto externo del producto interno. Decimos que el bivector  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  es el producto externo de los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . El paralelogramo obtenido mediante “el barrido de  $\mathbf{b}$  a lo largo de  $\mathbf{a}$ ” sólo difiere en orientación con respecto al obtenido mediante “el barrido de  $\mathbf{a}$  a lo largo de  $\mathbf{b}$ ” (Figura 2.4). Es decir  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{B}$ . Al invertir el orden del producto externo entre vectores, invertimos la orientación del bivector resultante. Esta propiedad se expresa diciendo que el producto externo es *anticonmutativo*.

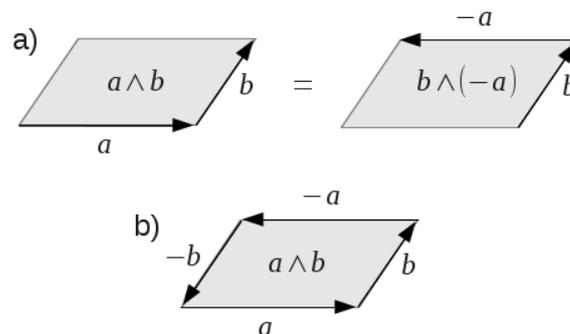


Figura 2.5: Orientaciones producto externo. a) Se puede obtener un mismo bivector a partir del producto externo de dos vectores cualquiera representando segmentos de línea orientados consecutivos que limitan un paralelogramo orientado. b) A los segmentos de línea en lados opuestos de un paralelogramo orientado les corresponden vectores con orientación opuesta.

De la figura 2.5 obtenemos que

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) \wedge (-\mathbf{b}) = (-\mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} \quad (2.7)$$

la magnitud del bivector  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  es el área del paralelogramo delimitado por los elementos de línea,

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \quad (2.8)$$

siendo  $\theta$  el ángulo entre los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

Entre otras propiedades de los bivectores podemos enumerar las siguientes:

- Producto por un escalar  $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{B}$ . Los bivectores que son múltiplos escalares se llaman *codireccionales*.
- $\lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{b})$ ,  $\lambda = -1$  recuperamos parte de la ecuación (2.7).
- $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = 0$  para vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  distintos de cero si y sólo si  $\sin \theta = 0$ , es decir, si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son colineales.
- Propiedad *distributiva*  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$ .

En este punto el producto externo exige una generalización. Del mismo modo que un paralelogramo en el plano se obtiene barriendo al desplazar un segmento de línea, un paralelepípedo se obtiene al barrer un paralelogramo. Este paralelepípedo puede caracterizarse con un nuevo tipo de número direccionado  $\mathbf{T}$  llamado *trivector* o *3-vector*.

$$\mathbf{T} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \quad (2.9)$$

Podemos encontrar entre sus propiedades más notables:

- i. Propiedad *asociativa*  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$
- ii. La orientación del producto externo se invierte al invertir alguno de sus factores  $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{c} = (-\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = -\mathbf{T}$
- iii. De i. y ii. se deduce que podemos obtener el mismo paralelepípedo barriendo desde distintos paralelogramos, esto lo podemos expresar del siguiente modo  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b}$ .

- iv. Si  $c$  se encuentra en el único plano que  $a$  y  $b$ ,  $a \wedge b \wedge c = 0$
- v. Como cualquier otro “número direccionado”, un trivector tiene magnitud, dirección y orientación.

La teoría sobre el producto externo, *álgebra exterior* de Grassmann, empezó a causar verdadero interés matemático en los años sesenta, y aún hoy día apenas es conocida por todo el colectivo de físicos. No es de extrañar ya que Grassmann se adelantó mucho a sus contemporáneos, tanto que tras los primeros veinte años de su publicación fue el único en utilizarlo.

En el capítulo 4 nos adentraremos más en el álgebra geométrica, concretamente en las álgebras de Clifford, que nos servirá para definir y desarrollar el marco teórico de esta tesis.

## Capítulo 3

# Identidad Geométrica, Programa de Klein y Simetrías

Como en cualquier teoría sistemática, necesitamos una idea de igualdad para los distintos objetos de nuestra teoría, es decir, un criterio de identidad para los objetos geométricos. La idea fundamental de Klein era que para estudiar una geometría uno debía mirar su grupo de transformaciones, cuyas propiedades geométricas son invariantes bajo éste. Entonces los grupos de transformaciones no son meras herramientas algebraicas que codifican un criterio de identidad para los objetos geométricos, sino que también proporcionan un criterio de significancia para sus propiedades geométricas. Tarde o temprano, uno se da cuenta de que algunos resultados que reflejan tales propiedades son consecuencia inmediata de ciertas simetrías inherentes a las figuras geométricas. Así, un grupo de transformaciones dado es la codificación algebraica del criterio de identidad para los tipos de objetos geométricos que son admisibles en una teoría dada. Élie Cartan dice

*”Si uno mira realmente de aclarar la noción de igualdad, tiene que decir que dos figuras son iguales cuando una pasa a ser la otra a través de una operación geométrica específica, llamada desplazamiento. Esto es sólo una forma de hablar; el axioma según el cual dos figuras iguales a una tercera son iguales entre ellas, someten a las operaciones llamadas desplazamientos a cierta ley; esto es, que una operación como resultado de dos desplazamientos es en sí un desplazamiento. Ésta es la ley a la que los matemáticos se refieren cuando dicen que los desplazamientos forman un grupo. La geometría elemental se puede entonces definir a través del estudio de propiedades de las figuras que no cambian bajo las operaciones del grupo de desplazamientos” [Cartan 1974].*

### 3.1. Programa de Klein

El contenido en cualquier ciencia puede especificarse al nombrar los objetos, y propiedades de tales objetos, que son objeto de estudio de esta ciencia. En geometría, las propiedades de las figuras consideradas están completamente especificadas al indicar cuáles de estas figuras se consideran idénticas, indistinguibles o iguales<sup>1</sup>. Dos figuras se consideran iguales (o congruentes) si existe una isometría (una transformación en el espacio que preserva la distancia entre puntos) de una figura a otra. Así, podemos decir que la geometría estudia aquellas propiedades de una figura  $F$  compartidas por  $F$  y todas aquellas figuras iguales a  $F$  o, dicho de otro modo, estudia las propiedades de las figuras que se preservan bajo transformaciones isométricas. Pero también podemos decir que dos figuras son iguales si son similares, es decir, si preservan su forma. Klein se dio cuenta de que en muchos problemas no sólo identificamos figuras congruentes sino figuras similares. Dos figuras  $F$  y  $F'$  se dice que son *similares* si difieren sólo en el tamaño: la forma de la figura  $F'$  no difiere en forma respecto a la de  $F$  aunque las “medidas” de  $F'$  son  $k$  veces la de  $F$  (donde  $k$  es una proporción). Dicho de otro modo:  $F'$  es similar a  $F \Leftrightarrow F' = \pi(F)$ , donde  $\pi$  es una transformación de semejanza, ej., la figura  $F'$  se obtiene de  $F$  mediante una transformación de semejanza  $\pi$ , definida como una transformación que preserva la proporción de todas las longitudes y segmentos. Entonces, en determinados teoremas o problemas en geometría, debemos empezar conviniendo si las propiedades geométricas se preservan bajo transformaciones isométricas o bajo transformaciones de semejanza. Esta circunstancia es la base del desarrollo de Klein. Él propuso fijar cierta familia de transformaciones  $\mathfrak{T}$  para estudiar aquellas propiedades de las figuras geométricas que se preservan bajo estas transformaciones. Es en esta práctica que se define la rama definitiva de la geometría, gobernada por la familia de transformaciones  $\mathfrak{T}$ .

Para esta definición general de geometría debemos considerar dos figuras como idénticas cuando podemos asociarlas mediante una transformación de la familia  $\mathfrak{T}$ . Pero para que esta noción de igualdad entre figuras tenga significancia debe satisfacer tres propiedades válidas para todas las relaciones de igualdad (igualdad entre números, expresiones algebraicas, distancias, ángulos, vectores, figuras geométricas, fuerzas, corrientes eléctricas, campos electromagnéticos, potenciales, conducción de calor, etc.) y que determinan la posibilidad en sí del uso del término “igualdad”. Estas condiciones son:

---

<sup>1</sup>Uno puede encontrar que estos términos derivados de la semejanza y similitud pueden llegar a ser muy vagos, dado que semejanza y similitud son cosas distintas. Uno se da cuenta de ello especialmente después de haber leído a Michael Foucault, quien trata muy bien este tema en su trabajo *Esto no es una pipa*. Pero éste no es un tema que nos ocupe ahora y es suficiente con quedarnos con lo que comúnmente se entiende por igual, idéntico, indistinguible, etc.

1. Toda figura  $F$  es “igual” a sí misma (reflexiva).
2. Si la figura  $F$  es “igual” a una figura  $F_1$  entonces, a la inversa,  $F_1$  es “igual” a  $F$  (simétrica).
3. Si la figura  $F$  es “igual” a  $F_1$  y  $F_1$  es “igual” a  $F_2$ , entonces  $F$  es “igual” a  $F_2$  (transitiva).

Para el caso de una familia arbitraria de transformaciones  $\mathfrak{T}$  la noción de “igualdad” definida por  $\mathfrak{T}$  no tendrá estas propiedades de forma general. Para extender su validez a la familia de transformaciones debemos extender estas propiedades a  $\mathfrak{T}$ :

- i. La familia  $\mathfrak{T}$  contiene la transformación  $\epsilon$  (que asocia cada figura  $F$  con sí misma) (Figura 3.1a).
- ii. Cada transformación de  $\mathfrak{T}$  que asocia la figura  $F$  con la figura  $F_1$ ,  $\mathfrak{T}$  contiene la transformación “inversa”  $\varphi^{-1}$  (que asocia  $F_1$  con  $F$ ) (Figura 3.1b).
- iii. Dos transformaciones cualquiera  $\varphi$  y  $\psi$ , siendo  $\varphi$  la que asocia la figura  $F$  con  $F_1$  y  $\psi$  la que asocia  $F_1$  con  $F_2$ , la familia  $\mathfrak{T}$  contiene su “producto”  $\psi\varphi$  (primero  $\varphi$ , luego  $\psi$ ) que asocia directamente  $F$  con  $F_2$  (Figura 3.1c).

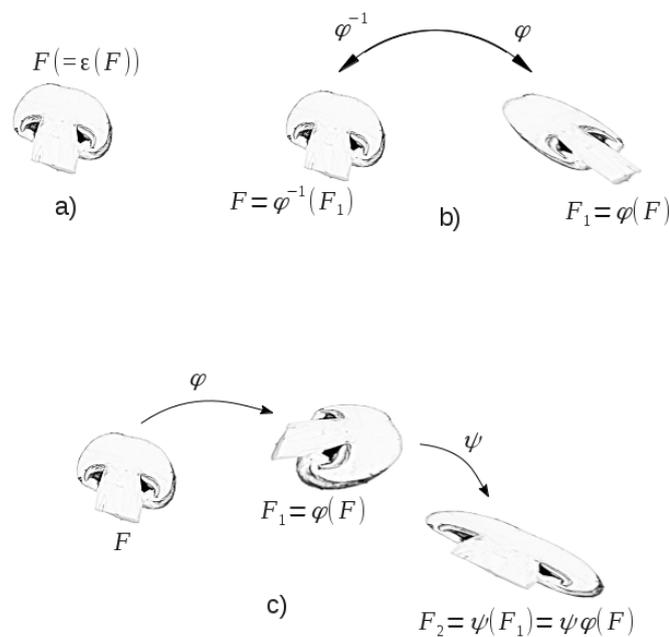


Figura 3.1: Estructura de grupo de la familia de transformaciones  $\mathfrak{T}$ .

Las propiedades i, ii y iii no son otras que las condiciones que definen a un *grupo* de transformaciones. Por lo tanto llegamos a la definición general de geometría descrita por Klein conocida como “programa Erlangen” de Klein:

*“Geometría es la ciencia que estudia las propiedades que las figuras preservan bajo transformaciones de cierto grupo de transformaciones, o, dicho de otro modo, la ciencia que estudia los invariantes de un grupo de transformaciones.”*

## 3.2. Simetrías

Cuando decimos que arte y ciencia se encuentran en las simetrías nos referimos a la capacidad casi involuntaria que tenemos para transformar lo que nos rodea, dislocando los elementos abstractos y colocándolos fuera de sí, buscando patrones que nos permitan conformar, comprender, poner orden y belleza a un cosmos particular. Cuando hablamos de simetrías hablamos de una idea generalizadora que sintetiza estos mecanismos perceptivos y organizativos del género humano. Entonces simetría es un concepto producto de la experiencia que denota cierta concordancia entre las partes que integran un todo, concordancia que se establece a través de relaciones o transformaciones entre esas partes. Así, las simetrías están estrechamente ligadas a la idea de transformación que deja invariantes ciertas características. Esta hermandad es quizás la que nos sirve de punto de partida para definir algunos tipos de simetrías conocidos. Lejos de abarcar la totalidad de las simetrías, la geometría exhibe los tipos de simetría más conocidos:

La **reflexión** es una transformación sobre un objeto en relación a un hiperplano de puntos fijos que cambia la orientación de las figuras que refleja, punto a punto, preservando la distancia relativa que los puntos del objeto inicial tenían respecto al hiperplano de puntos fijos. Este hiperplano de puntos fijos es una línea recta (eje de reflexión o simetría) en el plano, y un plano (plano de reflexión o simetría) en el espacio tridimensional (figura 3.2).



Figura 3.2: Reflexión de una moneda de Lincoln a través de un eje de reflexión (izquierda). Reflexión de una moneda de Lincoln a través de un plano de reflexión (derecha).

La **rotación** es una transformación en la que se hace girar un objeto respecto a un punto en el plano o un eje de rotación en el espacio tridimensional. Esta transformación preserva las características internas del objeto y la distancia de sus puntos al punto o eje de rotación. Su simetría estriba en preservar estas propiedades intactas (figura 3.3).



Figura 3.3: Rotación de una moneda de Lincoln a través de un punto de rotación (izquierda). Rotación de una moneda de Lincoln a través de una eje de rotación (derecha).

La **traslación** transforma una figura a lo largo de una línea recta con periodicidad uniforme, siempre en el mismo sentido. La simetría de traslación se caracteriza por preservar la dirección de traslación y la longitud del periodo (figura 3.4).



Figura 3.4: Traslación de una moneda de Lincoln con periodicidad uniforme.

La transformación de **similitud** aumenta o reduce los objetos preservando en la operación la proporción de las distancias entre los puntos que integran el objeto y los ángulos (figura 3.5).

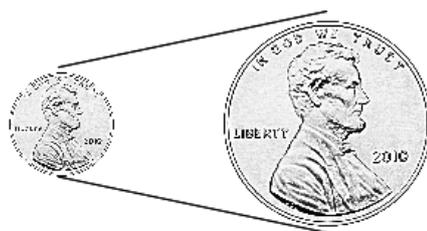


Figura 3.5: Similitud de una moneda de Lincoln.

Aunque estas transformaciones tienen una clara hegemonía sobre las demás, existen otras transformaciones menos conocidas que presentan simetrías, como la proyección afín o transformaciones que preservan las relaciones topológicas entre los puntos. También se pueden encontrar estas simetrías combinadas entre sí, existen diversos ejemplos en arte que combinan, por ejemplo, similitud y proyecciones afines, entre otras, para preservar características del cosmos de la obra.

# Capítulo 4

## Álgebras de Clifford

En el capítulo 2 se ha introducido el álgebra geométrica en su marco histórico. En el presente capítulo se establece el operativo matemático necesario en el marco de esta tesis. En el capítulo 5 se representa el tensor de impedancias magnetoteléurico en álgebras de Clifford, para ello necesitamos definir las álgebras de Clifford.

El álgebra exterior de Grassmann  $\bigwedge \mathbb{R}^n$  del espacio lineal  $\mathbb{R}^n$  es un álgebra asociativa de dimensión  $2^n$ . La base del álgebra exterior  $\bigwedge \mathbb{R}^n$  en términos de la base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  resulta:

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &e_1, e_2, \dots, e_n \\
 &e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, \dots, e_1 \wedge e_n, e_2 \wedge e_3, \dots, e_{n-1} \wedge e_n \\
 &\vdots \\
 &e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n
 \end{aligned}$$

El álgebra exterior tiene como unidad el 1 y satisface las siguientes reglas de multiplicación

$$\begin{aligned}
 e_i \wedge e_j &= -e_j \wedge e_i \quad \text{para } i \neq j \\
 e_i \wedge e_i &= 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Clifford mantuvo la primera regla aunque modificó la segunda para su álgebra

$$\begin{aligned}
 e_i e_j &= -e_j e_i \quad \text{para } i \neq j \\
 e_i e_i &= 1
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Clifford sugirió él mismo llamar a su álgebra *Álgebra Geométrica*. Así podemos definir el producto geométrico de dos vectores como

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (4.3)$$

podemos ver que el producto geométrico consta de un producto externo y uno interno. Éste último justifica precisamente la regla de multiplicación  $e_i e_i = 1$ . Por otro lado resulta fácil ver que

$$\mathbf{ba} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (4.4)$$

esta última relación pone de manifiesto la naturaleza *simétrica* del producto interno y la *antisimétrica* del producto externo. Ello se traduce del siguiente modo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (4.6)$$

## Proyecciones perpendiculares y reflexiones

Retomamos la relación de la proyección de un vector sobre otro con el producto interno para definir la *componente paralela* de un vector sobre otro. Tenemos dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  que forman un ángulo  $\theta$ ,  $0 < \theta < 180^\circ$ . La componente paralela  $\mathbf{a}_{\parallel}$  es un múltiplo escalar del vector unitario  $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\parallel} &= |\mathbf{a}| \cos \theta \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{b}^{-1}$  es la inversa de un vector distinto de cero  $\mathbf{b}$ .

Por otro lado la componente perpendicular  $\mathbf{a}_{\perp}$  la podemos obtener a partir de la diferencia

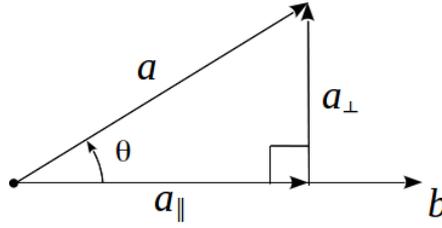


Figura 4.1: Componente paralela y perpendicular.

$$\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} \quad (4.8)$$

$$(\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} \quad (4.9)$$

Podemos ver cómo el bivector<sup>1</sup>  $e_1e_2$  anticonmuta con todos los vectores en el plano  $e_1$ - $e_2$ , así que

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = -\mathbf{b}^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})\mathbf{b}^{-1}$$

El área del paralelogramo con lados  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  resulta<sup>2</sup>

$$|\mathbf{a}_\perp \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

La reflexión de un vector  $\mathbf{r}$  respecto a una línea que pasa por  $\mathbf{a}$  se obtiene teniendo en cuenta que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$  pasa a ser  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}_\perp$ , donde  $\mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1}$  (Figura 4.2). La imagen especular  $\mathbf{r}'$  de  $\mathbf{r}$  con respecto a  $\mathbf{a}$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}_\perp \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{r} \wedge \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{r})\mathbf{a}^{-1} \\ &= \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

La composición de dos reflexiones (Figura 4.4), primero a través de  $\mathbf{a}$  y luego a través de  $\mathbf{b}$ , viene dada por

<sup>1</sup>A partir de las reglas de Clifford para la multiplicación (4.2) y la ecuación del producto geométrico (4.3), vemos que el bivector  $e_1 \wedge e_2 = e_1e_2$  en álgebra de Clifford.

<sup>2</sup>A partir de ahora, en el término vector quedará implícita su asociación con segmentos de línea para referirnos a los lados de un paralelogramo. Del mismo modo cuando hablemos de bivectores asociados a segmentos de plano para referirnos a caras de un paralelepípedo.

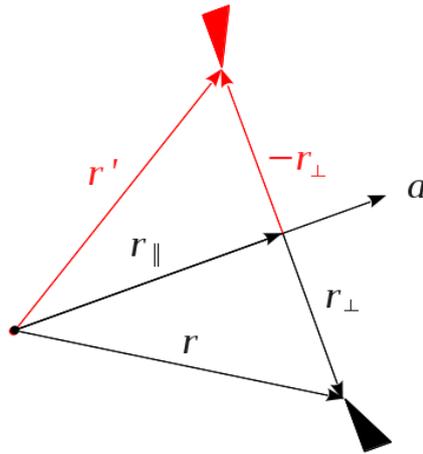


Figura 4.2: Reflexión de un vector. Para no confundir los resultados de una reflexión con los de una rotación vale la pena poner un testigo como el triangulo rectángulo de la figura. Con una figura no puntual resulta más fácil prestar atención a este tipo de transformaciones.

$$\begin{aligned}
 r &\rightarrow r' = ara^{-1} \\
 r' &\rightarrow r'' = br'b^{-1} = b(ara^{-1})b^{-1} = (ba)r(ba)^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

la composición de estas dos reflexiones es una rotación de dos veces el ángulo entre  $a$  y  $b$ .

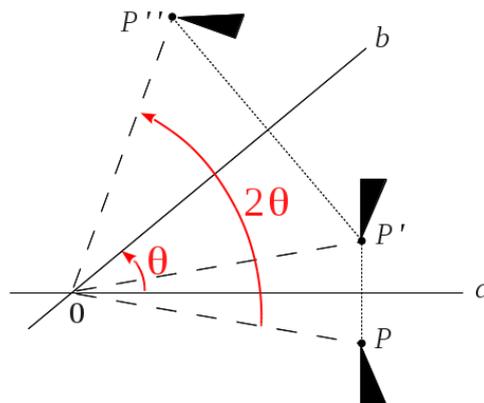


Figura 4.3: Rotación como composición de dos reflexiones. Nuevamente ponemos un triangulo rectángulo como testigo que facilita ver las dos reflexiones.

## 4.1. Álgebra de Clifford $Cl_2$

El álgebra de Clifford  $Cl_2$  es un espacio lineal real 4-dimensional con elementos (números) de base 1 (escalar),  $e_1$  y  $e_2$  (vectores) y  $e_{12}$  (bivectores)<sup>3</sup> del plano vector  $\mathbb{R}^2$ . Las bases ortonormales cumplen:

$$e_1^2 = e_2^2 = 1; \quad e_{12} = e_1 e_2 = -e_2 e_1 = -e_{21}$$

El bivector unitario  $e_{12}$  además cumple la siguiente propiedad

$$e_{12}^2 = (e_1 e_2)^2 = (e_1 e_2)(e_1 e_2) = -e_1 e_1 e_2 e_2 = -e_1^2 e_2^2 = -1$$

La tabla 4.1 muestra la relación de productos geométricos de esta base. Cualquier número de Clifford  $u$  de  $Cl_2$  puede expresarse del siguiente modo:

$$u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12} \quad (4.12)$$

siendo  $u_0, u_1, u_2$  y  $u_{12}$  reales. Por lo tanto un número de Clifford  $Cl_2$  puede ser un escalar, un vector, un bivector o cualquier combinación entre ellos. Se suele llamar *pseudoescalar* al elemento de la base de mayor grado, por tanto en  $Cl_2$  el bivector  $u_{12} e_{12}$  es un *pseudoescalar* y  $e_{12}$  el *pseudoescalar unitario* [Lounesto 2001].

	1	$e_1$	$e_2$	$e_{12}$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_{12}$
$e_1$	$e_1$	1	$e_{12}$	$e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_{12}$	1	$-e_1$
$e_{12}$	$e_{12}$	$-e_2$	$e_1$	-1

Tabla 4.1: Producto geométrico.

### 4.1.1. Representación matricial del álgebra de Clifford $Cl_2$

Las reglas algebraicas satisfechas por los elementos de  $Cl_2$  son totalmente compatibles con las reglas del álgebra matricial y proveen a las matrices el carácter de base geométrica

<sup>3</sup>A partir del producto geométrico (4.3) vemos que un bivector obtenido del producto externo  $e_1 \wedge e_2 = e_{12}$

natural. Por tanto, el álgebra de Clifford  $Cl_2$  es isomorfa, como álgebra asociativa, al álgebra matricial de las matrices reales  $2 \times 2$ ,  $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ . Entre varias correspondencias podemos escribir la siguiente

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Así, cualquier número  $u$  de  $Cl_2$  podemos escribirlo del siguiente modo

$$u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12} = \begin{pmatrix} u_0 + u_1 & u_2 + u_{12} \\ u_2 - u_{12} & u_0 - u_1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Se puede ver que cualquier matriz real

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [(a+d) + (a-d) e_1 + (b+c) e_2 + (b-c) e_{12}] \quad (4.15)$$

A través de las álgebras de Clifford podemos ver que la parte derecha de la ecuación (4.15) muestra el contenido geométrico de  $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ :  $(a+d)$  la parte escalar,  $(a-d)e_1 + (b+c)e_2$  la parte vectorial, y  $(b-c)e_{12}$  la parte bivectorial (pseudoescalar). Vemos pues que las álgebras de Clifford contienen más estructura que las álgebras matriciales.

### 4.1.2. Algunas propiedades de $Cl_2$

1. En representación matricial la transpuesta de una matriz (Lounesto 2001)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

es el *contrario* de (4.12),  $\tilde{u} = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 - u_{12} e_{12}$ . El signo de cada coeficiente está relacionado con el grado de su elemento (grado 0 escalares, grado 1 vectores, grado 2 bivectores). De forma general, si  $k$  es el grado, el signo que le corresponde es  $(-1)^{k(k-1)/2}$ .

2. El complementario (o adjunto) de la transpuesta de la matriz (4.16)

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$$

es el *conjugada de Clifford* de (4.12),  $\bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{e}_1 - u_2\mathbf{e}_2 - u_{12}\mathbf{e}_{12}$ . El signo de cada coeficiente está relacionado con el grado de su elemento. De forma general, si  $k$  es el grado, el signo que le corresponde es  $(-1)^{k(k+1)/2}$ .

3. El *grado involución* de (4.12) es  $\hat{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{e}_1 - u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12} = \tilde{\mathbf{u}}^-$ , el signo de cada coeficiente es  $(-1)^k$ .
4. La inversa de un número de Clifford es  $\mathbf{u}^{-1} = \bar{\mathbf{u}}/(\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}})$ . El denominador  $\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}}$  es el **determinante** de la matriz que representa  $\mathbf{u}$ .
5. El módulo de un número de Clifford es  $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}} = |u_0|^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_{12}|^2$ .

### 4.1.3. Números complejos

La usual característica que distingue a los números complejos de los reales es que los números complejos contienen la raíz de  $-1$  llamada *unidad imaginaria*  $i = \sqrt{-1}$ . Esta relación en realidad no está bien definida ya que induce a equívocos y enmascara la naturaleza de la *unidad imaginaria*  $i$ . Históricamente, esta relación se obtiene, por construcción, en la resolución de raíces de ecuaciones polinómicas. No es difícil comprobar que

$$-1 = i^2 \neq (\sqrt{-1})^2 \quad (4.17)$$

Sin embargo la *unidad imaginaria*  $i$  encuentra naturalmente una descripción más acertada en el marco de las álgebras de Clifford. Podemos ver que en la subálgebra de los números complejos  $e_{12}$  es la *unidad imaginaria*  $i$ . En este sentido los números complejos son una subálgebra de  $Cl_2$  cuya base podemos ver en la tabla 4.2.

	1	$e_{12}$
1	1	$e_{12}$
$e_{12}$	$e_{12}$	-1

Tabla 4.2: Números complejos como subálgebra de  $Cl_2$ .

Todo número complejo  $z$  puede hallarse en su forma *binomial*

$$z = u_0 + u_{12}e_{12} \quad u_0, u_{12} \in \mathbb{R} \quad (4.18)$$

donde  $u_0, u_{12}$  son las componentes real e imaginaria, respectivamente. El módulo de un número complejo coincide con el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z\tilde{z} = (u_0 + u_{12}e_{12})(u_0 - u_{12}e_{12}) \\ &= u_0^2 - u_{12}^2e_{12}e_{12} = u_0^2 + u_{12}^2e_{12}e_{21} = u_0^2 + u_{12}^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Podemos ver que del producto geométrico de dos vectores define un número complejo:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|(\cos \theta + e_{12} \sin \theta) \end{aligned} \quad (4.20)$$

y es posible representarlo como un paralelogramo de lados  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , lo que ocurre es que existe una colección infinita de vectores, formando el mismo ángulo  $\theta$ , cuyo producto es el mismo número complejo. Esto es:

$$|\mathbf{u}'||\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \quad \text{con} \quad \theta' = \theta$$

También podemos expresar un número complejo en sus formas *trigonométrica* y *polar*, en las que se especifica el módulo  $|z|$  y el argumento  $\theta$ :

$$z = |z|(\cos \theta + e_{12} \sin \theta)$$

Antes de expresar el número complejo en su forma exponencial, vemos que la identidad de Euler:

$$\exp(\theta i) = \exp(\theta e_{12}) = \cos \theta + e_{12} \sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (4.21)$$

Podemos definir la exponencial de un número complejo del mismo modo que la de un número real:

$$\exp(\theta e_{12}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\theta}{n} e_{12} \right)^n$$

Subrayamos la expresión  $\left( 1 + \frac{\theta}{n} e_{12} \right)$ , ésta puede entenderse como un operador de rotación sobre vectores. Es decir, si multiplicamos  $n$  veces  $\left( 1 + \frac{\theta}{n} e_{12} \right)$  por un vector  $v$ , obtenemos el vector  $v$  rotado un ángulo  $\theta$ ,  $v'$ , pero si lo multiplicamos  $k < n$  veces el vector  $v$  habrá rotado el ángulo equivalente a  $\frac{k}{n}\theta$ . Entonces  $\exp(\theta e_{12})$  sobre un vector  $v$  comprende que el vector  $v$  ha realizado infinitos “pasitos” de incrementos de ángulo infinitesimal que hacen que el vector *recorra todo el espacio* de ángulo entre  $v$  y el vector rotado  $v \exp(\theta e_{12})$ .

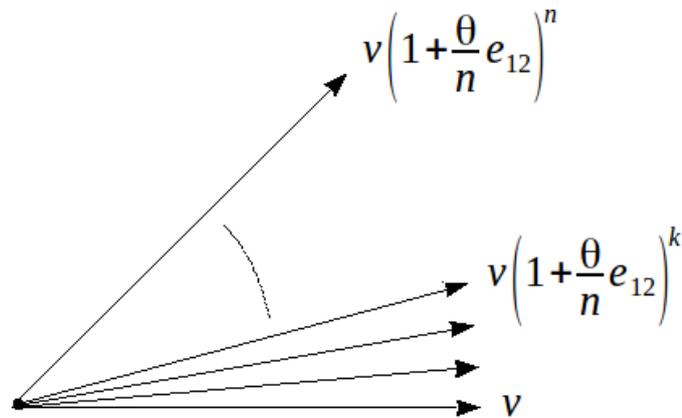


Figura 4.4: Operador rotación. Cuando hacemos infinitesimal a este operador,  $n \rightarrow \infty$ , y lo elevamos a la  $n$ -ésima potencia, recuperamos la identidad de Euler.

Por tanto, un número complejo expresado en forma exponencial es  $z = |z| \exp(\theta e_{12})$

## El Plano Complejo

En el plano complejo se representan los números complejos con la componente real en las abscisas y la imaginaria en las ordenadas. Entonces el plano complejo es un plano con

direcciones relativas al eje real, al que podemos asignar cualquier dirección. Así pues, existe una ambivalencia de las coordenadas cartesianas en el plano Euclidiano. Esto es

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{z} = \mathbf{e}_1(u_0 + u_{12}\mathbf{e}_{12}) = u_0\mathbf{e}_1 + u_{12}\mathbf{e}_2$$

Esta ambivalencia ha llevado a considerar de forma equívoca a los números complejos, confundiendo los con vectores.

#### 4.1.4. Rotaciones en $R^2$

En general, una rotación antihoraria de un ángulo  $\theta$  en  $R^2$  de un número de Clifford  $\mathbf{u}$  puede expresarse como [Lounesto 2001, p.58] :

$$\mathbf{u}' = \mathbf{a}\mathbf{u}\mathbf{a}^{-1} = (\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2})\mathbf{u}(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2}) \quad (4.22)$$

$\mathbf{a}$  es el operador de rotación antihorario en su forma general. En el caso particular de que  $\mathbf{v}$  sea un vector en  $Cl_2$  podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{a}^{-1} \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2})(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

es fácil ver en la tabla 4.1 que  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  anticonmutan con  $\mathbf{e}_{12}$ , esto es  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_2$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{a}^{-1} \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2})(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2}) \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2})(\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2})(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \\ &= (\cos \theta - \mathbf{e}_{12} \sin \theta)(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \\ &= \mathbf{a}^2\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$\mathbf{R}$  es el rotor usual de vectores antihorario. Del mismo modo que en (4.23) podemos decir que  $\mathbf{v}' = \mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{v}(\mathbf{a}^{-1})^2 = \mathbf{v}\mathbf{R}^{-1}$ .

## 4.2. Álgebra de Clifford $Cl_3$

El álgebra de Clifford  $Cl_3$  es un espacio lineal real 8-dimensional con elementos base 1 (escalar),  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  (vectores),  $e_{12}$ ,  $e_{13}$  y  $e_{23}$  (bivectores) y  $e_{123}$  (elemento volumen). El elemento de volumen es un “segmento volumen” orientado con magnitud el volumen [Lounesto 2001, p. 44], además es el pseudoescalar de  $Cl_3$ . Esta base cumple las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= e_2^2 = e_3^2 = 1 \\ e_1e_2 &= -e_2e_1, \quad e_2e_3 = -e_3e_2, \end{aligned}$$

Los bivectores unitarios y el elemento de volumen son  $e_{ij} = e_i e_j$  y  $e_{ijk} = e_i e_j e_k$ , respectivamente.  $Cl_3$  puede escribirse como suma de un escalar, un vector, un bivector y un elemento de volumen. Cualquier elemento se expresa como  $\alpha + \mathbf{a} + \mathbf{b}e_{123} + \beta e_{123}$ , donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  and  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . Los tres bivectores unitarios  $e_{12}$ ,  $e_{13}$ ,  $e_{23}$  representan segmento planos orientados unitarios y comparten la propiedad de unidad imaginaria,  $(e_i e_j)^2 = -1$  para  $i \neq j$ . El elemento de volumen orientado unitario  $e_{123}$  cambia segmentos planos por segmentos lineales ortogonales a estos segmentos planos, y viceversa, tal como  $e_1 e_{123} = e_{23}$  o  $e_{23} e_{123} = -e_1$ . El volumen orientado  $e_{123}$  también cumple  $(e_{123})^2 = -1$ , y conmuta con todos los elementos de  $Cl_3$ .

### 4.2.1. Representación matricial de $Cl_3$

El conjunto de matrices  $2 \times 2$  con elementos complejos,  $\text{Mat}(2, C)$ , es isomorfa a  $Cl_3$ . Podemos adoptar como representación matricial de los elementos de la base ortogonales unitarios 1,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

que satisfacen las reglas de multiplicación desde las cuales podemos deducir la representación matricial para el resto de la base de  $Cl_3$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^2 &= \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1 \\
\mathbf{e}_{12} &= i\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{21} \\
\mathbf{e}_{31} &= i\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_{13} \\
\mathbf{e}_{23} &= i\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_{32} \\
\mathbf{e}_{123} &= i1
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Para cualquier elemento arbitrario  $\mathbf{u}$  las correspondencias anteriores implican

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 + u_{12}\mathbf{e}_{12} + u_{31}\mathbf{e}_{31} + u_{23}\mathbf{e}_{23} + u_{123}\mathbf{e}_{123} \\
&= \begin{pmatrix} u_0 + iu_{123} + u_1 + iu_{23} & u_2 + iu_{31} + u_{12} - iu_3 \\ u_2 + iu_{31} - u_{12} + iu_3 & u_0 + iu_{123} - u_1 - iu_{23} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a + ia' & b + ib' \\ c + ic' & d + id' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} [(a + d) + (a' + d')\mathbf{e}_{123} + (a - d)\mathbf{e}_1 + (a' - d')\mathbf{e}_{23} + \\
&\quad + (b + c)\mathbf{e}_2 + (b' + c')\mathbf{e}_{31} + (b - c)\mathbf{e}_{12} - (b' - c')\mathbf{e}_3]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

#### 4.2.2. Rotación en torno al eje $\mathbf{e}_3$ en $Cl_3$

Una rotación antihoraria, en su forma general, de cualquier número de Clifford  $\mathbf{u}$  en torno al eje  $\mathbf{e}_3$  [Lounesto 2001, p.58] se puede expresar como:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{a}\mathbf{u}\mathbf{a}^{-1} = \left(\cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u}\left(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

de las relaciones (4.24) se puede ver que  $u_0$ ,  $u_3\mathbf{e}_3$ ,  $u_{12}\mathbf{e}_{12}$  y  $u_{123}\mathbf{e}_{123}$  permanecen invariantes bajo rotaciones en torno al eje  $\mathbf{e}_3$ . Son invariantes porque cualquier potencia de  $\mathbf{a}$  conmuta con estos elementos de  $\mathbf{u}$ . Podemos deducir las siguientes interpretaciones geométricas de estos invariantes:

1. La parte escalar de  $\mathbf{u}$ ,  $u_0$ , conmuta con todos los elementos geométricos.
2.  $u_3\mathbf{e}_3$  es paralelo a  $\mathbf{e}_3$ , por este motivo  $u_3\mathbf{e}_3$  permanece invariante bajo rotaciones en torno a  $\mathbf{e}_3$ .
3.  $u_{12}\mathbf{e}_{12}$  es un “segmento plano” perpendicular a  $\mathbf{e}_3$ , por lo tanto  $u_{12}\mathbf{e}_{12}$  permanece invariante bajo rotaciones en torno a  $\mathbf{e}_3$ .
4. Dado que  $u_{123}\mathbf{e}_{123} = u_{123}\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_3$ , entonces a partir de los puntos 2 y 3 de más arriba  $u_{123}\mathbf{e}_{123}$  permanece invariante bajo rotaciones en torno  $\mathbf{e}_3$ .

Estas propiedades ilustran que el álgebra de Clifford va más allá del álgebra lineal. Pudiendo representar infinidad de objetos geométricos, así como operadores de transformación.



## Capítulo 5

# Tensor de impedancias magnetotelúrico en álgebras de Clifford $Cl_3$

La Magnetotelúrica (MT) es un método de exploración pasiva que aprovecha las variaciones naturales geomagnéticas. En los años 1950, Tikhonov (1950, reimpresso 1986) y Cagniard (1953) se dieron cuenta de que si se medía el campo magnético y eléctrico en un punto de la superficie de la tierra de forma simultánea se podían obtener proporciones complejas (impedancias) que describen la penetración de los campos electromagnéticos en la Tierra. La profundidad de penetración depende del periodo y de la conductividad de las estructuras bajo tierra.

El método MT, por tanto, es una técnica que implica la medida de los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  naturales en direcciones ortogonales en la superficie terrestre. Las transformadas de Fourier de las componentes ortogonales del campo eléctrico y magnético están relacionadas a través del tensor de impedancias,  $\mathbf{Z}$ :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x/\mu_0 \\ B_y/\mu_0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{B}/\mu_0^1 \quad (5.1)$$

las componentes de  $\mathbf{Z}$  son complejas. Podemos expresar cada componente  $Z_{ij}(\omega)$  para una frecuencia dada del tensor  $\mathbf{Z}$  en su magnitud (resistividad aparente) y argumento (fase):

$$\rho_{a,ij}(\omega) = \frac{1}{\mu_0\omega} |Z_{ij}(\omega)|^2 \quad (5.2)$$

$$\phi_{ij}(\omega)_{(-\pi/2, \pi/2)} = \tan^{-1} \left( \frac{\Im(Z_{ij}(\omega))}{\Re(Z_{ij}(\omega))} \right)_{(-\pi/2, \pi/2)} \quad (5.3)$$

$$\phi_{ij}(\omega)_{(-\pi, \pi)} = \tan^{-1} \left( \frac{\Im(Z_{ij}(\omega))}{\Re(Z_{ij}(\omega))} \right)_{(-\pi, \pi)} \quad (5.4)$$

---

<sup>1</sup> $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío

$\Re$  se refiere a la parte real y  $\Im$  a la imaginaria. En lo que (5.3) y (5.4) difieren es que la primera no distingue la procedencia del signo de la parte imaginaria y la parte real porque computa la inversa de la tangente del resultado de la fracción. En cambio la segunda distingue el signo del numerador y el denominador de la fracción obteniendo la fase en el cuadrante correcto.

El tensor  $Z$  contiene información de la dimensionalidad y dirección de la estructura de resistividad. Para una estructura 1-D, donde la resistividad sólo cambia con la profundidad y en ausencia de distorsión galvánica<sup>2</sup>, los elementos de la diagonal del tensor de impedancias,  $Z_{xx}$  y  $Z_{yy}$  son cero para todos los periodos, mientras que las componentes antidiagonales son iguales en magnitud y de signo opuesto:

$$\begin{pmatrix} 0 & Z \\ -Z & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Para estructuras 2-D, donde la conductividad no sólo cambia con la profundidad sino a lo largo de una dirección horizontal, los elementos de la diagonal del tensor de impedancias,  $Z_{xx}$  y  $Z_{yy}$  son cero para todos los periodos si una de las direcciones de medida coincide con la que la conductividad no varía:

$$\begin{pmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

El resto de casos, en que las componentes del tensor son distintas de cero, son considerados 3-D:

$$\begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

ésta es la forma general de presentar al tensor de impedancias, en términos matriciales. En este capítulo se pretende ir más allá y presentaremos el tensor de impedancias en dos representaciones distintas  $Cl_3$  y  $Cl_2$ .

A partir de (4.25) el tensor de impedancias en  $Cl_3$  resulta:

---

<sup>2</sup>La distorsión galvánica se aborda en el capítulo 7

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} [S_1^{\Re} + S_1^{\Im} \mathbf{e}_{123} + D_1^{\Re} \mathbf{e}_1 + D_1^{\Im} \mathbf{e}_{23} + S_2^{\Re} \mathbf{e}_2 + S_2^{\Im} \mathbf{e}_{31} + D_2^{\Re} \mathbf{e}_{12} - D_2^{\Im} \mathbf{e}_3] \quad (5.8)$$

Todos los coeficientes son reales.  $S_1^{\Re} = Z_{xx}^{\Re} + Z_{yy}^{\Re}$  es el coeficiente de la parte escalar,  $S_1^{\Im} = Z_{xx}^{\Im} + Z_{yy}^{\Im}$  de la parte del elemento volumen,  $D_1^{\Re} = Z_{xx}^{\Re} - Z_{yy}^{\Re}$ ,  $S_2^{\Re} = Z_{xy}^{\Re} + Z_{yx}^{\Re}$  and  $D_2^{\Im} = Z_{xy}^{\Im} - Z_{yx}^{\Im}$  de la parte vectorial, y  $D_1^{\Im} = Z_{xx}^{\Im} - Z_{yy}^{\Im}$ ,  $S_2^{\Im} = Z_{xy}^{\Im} + Z_{yx}^{\Im}$  y  $D_2^{\Re} = Z_{xy}^{\Re} - Z_{yx}^{\Re}$  de la parte bivectorial. En la ecuación (5.8) encontramos una forma natural de definir el tensor sin atender, en principio, exclusivamente a los valores de los coeficientes de la matriz  $\mathbf{Z}$  como en (5.5), (5.6) y (5.7)

Definimos primeramente el sistema de referencia 3D para una estación de MT situada en la superficie terrestre. Consideramos  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  y  $\mathbf{e}_z$  los vectores unitarios ortonormales que constituyen la base de nuestro sistema de referencia, con  $\mathbf{e}_x$  y  $\mathbf{e}_y$  paralelos a la superficie y  $\mathbf{e}_z$  perpendicular a ésta (Figura 5.1a).

Se entiende que un modelo 1D sólo admite variaciones de resistividades en la dirección  $\mathbf{e}_z$ . Un modelo 2D admite variaciones de resistividades en dos direcciones  $\mathbf{e}_z$  y  $\mathbf{e}_{Strike} = (\lambda_x \mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_y)$  (perpendicular al *strike*), clásicamente se toma  $\mathbf{e}_x$  como dirección paralela al *strike* (modo *TE*, *transverse electric*) y  $\mathbf{e}_y$  perpendicular a la dirección del *strike* (modo *TM*, *transverse magnetic*) como en la figura 5.1b) en la que  $\lambda_y = 0$ . El resto de casos se consideran 3D. En el contexto del tensor de impedancias en  $Cl_3$  no existe, de forma general, una relación directa entre las bases del modelo de resistividades del subsuelo ( $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  y  $\mathbf{e}_z$ ) con las bases del tensor de impedancias ( $1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{123}$ ), pero sí que se puede hallar cierta relación para los casos donde el modelo de resistividades presenta cierta simetría, como los casos 1D o 2D. Esto se traduce del siguiente modo: para definir un tensor  $\mathbf{Z}$  como 1D hace falta una dimensión, esto es la única dirección donde puede haber variación de resistividades  $\mathbf{e}_3$  y por tanto su plano perpendicular expresado por el elemento bivectorial de la base  $\mathbf{e}_{12}$  ( $\mathbf{e}_3$  es un eje de simetría 1D, si giramos en torno a éste no cambia la dirección de variación de resistividades, tenemos 2 grados de libertad,  $3D_{Espacio} - 1D_{\mathbf{e}_3} = 2D$ ), entonces  $\mathbf{Z}_{1D} = \frac{1}{2} [D_2^{\Re} \mathbf{e}_{12} - D_2^{\Im} \mathbf{e}_3]$ ; para definir un tensor  $\mathbf{Z}$  como 2D hacen falta dos dimensiones más para dar cuenta de una dirección privilegiada (perpendicular al *strike*). Por tanto son necesarias  $\mathbf{e}_2$  y su plano perpendicular expresado por la base bivectorial  $\mathbf{e}_{31}$  y  $\mathbf{e}_1$  y su plano perpendicular expresado por la base bivectorial  $\mathbf{e}_{23}$ , esto es  $\mathbf{Z}_{2D} = \frac{1}{2} [D_1^{\Re} \mathbf{e}_1 + D_1^{\Im} \mathbf{e}_{23} + S_2^{\Re} \mathbf{e}_2 + S_2^{\Im} \mathbf{e}_{31} + D_2^{\Re} \mathbf{e}_{12} - D_2^{\Im} \mathbf{e}_3]$ .

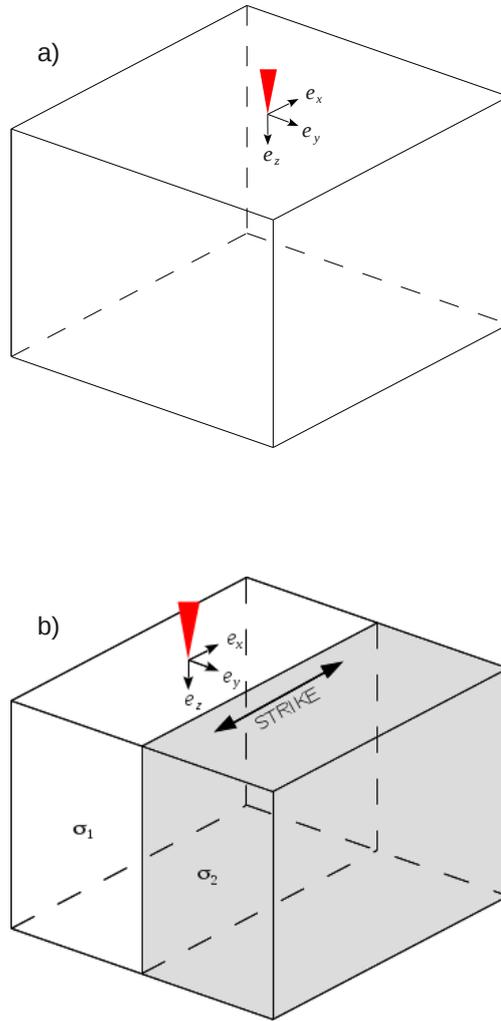


Figura 5.1: a) Sistema de referencia para una estación de medida. b) Modelo 2D con valores de conductividad  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  diferenciados. El *strike* representa la dirección a lo largo de la cual la conductividad es constante.

Si los ejes de medida de la estación  $e_x$  y  $e_y$  se hallan en cualquier combinación de  $e_x$  paralela a la dirección del *strike* o  $e_y$  paralela a la dirección del *strike*, la expresión del tensor se reduce a  $Z_{2D(Strike)} = \frac{1}{2} [S_2^{\Re} e_2 + S_2^{\Im} e_{31} + D_2^{\Re} e_{12} - D_2^{\Im} e_3]$  (En este caso tenemos un plano 2D de simetría perpendicular a la dirección del *strike* definidos por  $e_3$  y el vector perpendicular al *strike*, por lo tanto  $3D_{Espacio} - 2D_{PerpStrike} = 1D$  sólo queda un grado de libertad en dirección paralela al *strike*). Se consideran 3D los casos donde  $S_1^{\Re}$  y  $S_1^{\Im}$  son distintos de cero y/o no existe ninguna dirección privilegiada para  $e_x$  y  $e_y$  (*strike*) que hacen que  $D_1^{\Re}$  y  $D_1^{\Im}$  sean cero.

Para introducir las rotaciones del sistema de referencia en torno al eje  $e_3$  consideramos la

relación entre el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el magnético  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{B}/\mu_0$ ) en el dominio de frecuencias:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{H} \quad (5.9)$$

rotando el sistema de ejes de medida obtenemos los campos vectoriales rotados  $\mathbf{E}'$  y  $\mathbf{H}'$ . Podemos expresar una rotación (ver rotaciones en  $Cl_2$  sección 4.1.4) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{R}\mathbf{E} = \mathbf{R}\mathbf{Z}\mathbf{H} \\ &= \mathbf{R}\mathbf{Z}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{H} = \mathbf{R}\mathbf{Z}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}' = \mathbf{Z}'\mathbf{H}' \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{R} = \cos\theta - \mathbf{e}_{12}\sin\theta$  es el rotor antihorario, de ángulo  $\theta$ , para vectores y  $\mathbf{Z}' = \mathbf{R}\mathbf{Z}\mathbf{R}^{-1}$  es el tensor de impedancias rotado. Podemos ver que las rotaciones en magnetotelúrica están referidas a las rotaciones del sistema de referencia de medida de los espacios vectoriales eléctrico y magnético y no al tensor de impedancias en sí mismo. En este sentido, no podemos aplicar directamente la expresión general (4.22) al tensor de impedancias. Así el tensor de impedancias rotado en  $Cl_3$  se expresa del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}' &= \frac{1}{2} \left[ S_1^{\Re} + S_1^{\Im} \mathbf{e}_{123} + (D_1^{\Re} \cos 2\theta - S_2^{\Re} \sin 2\theta) \mathbf{e}_1 + (D_1^{\Im} \cos 2\theta - S_2^{\Im} \sin 2\theta) \mathbf{e}_{23} \right. \\ &\quad \left. + (S_2^{\Re} \cos 2\theta + D_1^{\Re} \sin 2\theta) \mathbf{e}_2 + (S_2^{\Im} \cos 2\theta + D_1^{\Im} \sin 2\theta) \mathbf{e}_{31} + D_2^{\Re} \mathbf{e}_{12} - D_2^{\Im} \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

## 5.1. Subálgebras de $Cl_3$

El álgebra de Clifford  $Cl_3$  contiene tres subálgebras en  $Cl_2$ :  $Cl_2^{12} = \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12}\}$ ,  $Cl_2^{23} = \{1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{23}\}$ ,  $Cl_2^{31} = \{1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{31}\}$ , de modo que  $Cl_3 = Cl_2^* \oplus \mathbf{e}_{123}Cl_2^*$  donde  $Cl_2^* \in \{Cl_2^{12}, Cl_2^{23}, Cl_2^{31}\}$ . Cualquier número de Clifford  $\mathbf{u}$  en  $Cl_3$  se puede dividir en diferentes conjuntos. Considerando  $\mathbf{T}$  un operador expresado en la base de una de estas subálgebras  $Cl_2^*$ , cualquier división  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  con  $\mathbf{u}_1 \in Cl_2^*$  y  $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{e}_{123}Cl_2^*$  tiene  $\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}_1 + \mathbf{T}\mathbf{u}_2$  con  $\mathbf{T}\mathbf{u}_1 \in Cl_2^*$  y  $\mathbf{T}\mathbf{u}_2 \in \mathbf{e}_{123}Cl_2^*$ .

Los operadores  $\mathbf{R} = \cos \theta - \mathbf{e}_{12} \sin \theta$  (rotor) y  $\mathbf{C} = A + B\mathbf{e}_1 + C\mathbf{e}_2 + D\mathbf{e}_{12}$  con  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  (distorsión galvánica, véase capítulo 7) pertenecen a  $Cl_2^{12}$ . Dado que  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\Re} + \mathbf{e}_{123}\mathbf{Z}^{\Im}$  con  $\mathbf{Z}^{\Re} \in Cl_2^{12}$  y  $\mathbf{e}_{123}\mathbf{Z}^{\Im} \in \mathbf{e}_{123}Cl_2^{12}$ , y que  $Cl_2^{12}$  es isomorfa a  $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ , entonces  $\mathbf{RZ}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{RZ}^{\Re}\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R}\mathbf{e}_{123}\mathbf{Z}^{\Im}\mathbf{R}^{-1}$  con  $\mathbf{RZ}^{\Re}\mathbf{R}^{-1} \in Cl_2^{12}$  y  $\mathbf{R}\mathbf{e}_{123}\mathbf{Z}^{\Im}\mathbf{R}^{-1} \in \mathbf{e}_{123}Cl_2^{12}$ ; de forma similar para la distorsión galvánica. Por este motivo, las rotaciones transforman las partes imaginaria y real por separado. Esta propiedad es la que permite deducir muchas propiedades en el contexto del algebra lineal, por ejemplo los diagramas de Mohr con rotaciones alrededor del eje  $\mathbf{e}_3$ .

La esencia de la independencia del *phase tensor* (se desarrolla en la sección 6.3) con la distorsión galvánica encuentra su significancia en estas propiedades (de  $Cl_3$  con sus subálgebras). Éstas nos permiten identificar separadamente las partes distorsionadas que proceden de la parte real no-distorsionada de las que proceden de la parte imaginaria no-distorsionada. Esto es, la parte real no-distorsionada pertenece a  $Cl_2^*$ , si la distorsionamos continua estando contenida en  $Cl_2^*$  (la parte real); La parte imaginaria no-distorsionada pertenece a  $\mathbf{e}_{123}Cl_2^*$ , si la distorsionamos continua estando contenida en  $\mathbf{e}_{123}Cl_2^*$  (la parte imaginaria). Siguiendo este razonamiento podemos hallar diferentes particiones para el tensor de impedancias, diferentes de la parte real e imaginaria, que sean adecuadas para hallar invariantes respecto a otros operadores. Las subálgebras  $Cl_2^{23}$  y  $Cl_2^{31}$  sugieren que pueden existir otros operadores y particiones del tensor de impedancias que podrían representar nuevas distorsiones, en particular distorsiones del campo eléctrico representadas por:

- La distorsión  $\mathbf{C}' = A + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3 + D\mathbf{e}_{23}$  y la partición  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}'_1 + \mathbf{Z}'_2$  con  $\mathbf{Z}'_1 = S_1^{\Re} + S_2^{\Re}\mathbf{e}_2 - D_2^{\Im}\mathbf{e}_3 + D_1^{\Im}\mathbf{e}_{23}$  y  $\mathbf{Z}'_2 = S_1^{\Im}\mathbf{e}_{123} + S_2^{\Im}\mathbf{e}_{31} + D_2^{\Re}\mathbf{e}_{12} + D_1^{\Re}\mathbf{e}_1$ . En este caso  $\Phi' = (\mathbf{Z}'_1)^{-1}\mathbf{Z}'_2$  es invariante respecto a la distorsión  $\mathbf{C}'$ .
- La distorsión  $\mathbf{C}'' = A + B\mathbf{e}_3 + C\mathbf{e}_1 + D\mathbf{e}_{31}$  and  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}''_1 + \mathbf{Z}''_2$  con  $\mathbf{Z}''_1 = S_1^{\Re} - D_2^{\Im}\mathbf{e}_3 + D_1^{\Re}\mathbf{e}_1 + S_2^{\Im}\mathbf{e}_{31}$  y  $\mathbf{Z}''_2 = S_1^{\Im}\mathbf{e}_{123} + D_2^{\Re}\mathbf{e}_{12} + D_1^{\Im}\mathbf{e}_{23} + S_2^{\Re}\mathbf{e}_2$ . En este caso  $\Phi'' = (\mathbf{Z}''_1)^{-1}\mathbf{Z}''_2$  es invariante respecto a  $\mathbf{C}''$ .

## 5.2. Invariantes de rotación independientes e irreducibles

Para dar cuenta de las ventajas de trabajar en  $Cl_3$  estudiaremos los invariantes de rotación independientes e irreducibles. Por irreducibles entendemos la mínima expresión de los invariantes en términos de los coeficientes del tensor de impedancias.

Una rotación antihoraria en el plano del tensor de impedancias en torno al eje  $e_3$  se expresa del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}' &= \mathbf{RZR}^{-1} \\ &= (\cos \theta - e_{12} \sin \theta) \mathbf{Z} (\cos \theta + e_{12} \sin \theta)\end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de rotación. A partir de (5.8), y teniendo en cuenta que la identidad 1 (el elemento escalar de la base),  $e_{123}$ ,  $e_3$  y  $e_{12}$  conmutan con  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}^{-1}$ , reescribimos esta expresión como (5.10):

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}' &= \frac{1}{2} \left[ S_1^{\Re} + S_1^{\Im} e_{123} + (D_1^{\Re} \cos 2\theta - S_2^{\Re} \sin 2\theta) e_1 + (D_1^{\Im} \cos 2\theta - S_2^{\Im} \sin 2\theta) e_{23} \right. \\ &\quad \left. + (S_2^{\Re} \cos 2\theta + D_1^{\Re} \sin 2\theta) e_2 + (S_2^{\Im} \cos 2\theta + D_1^{\Im} \sin 2\theta) e_{31} + D_2^{\Re} e_{12} - D_2^{\Im} e_3 \right]\end{aligned}\quad (5.11)$$

Podemos ver de forma directa algunos invariantes irreducibles (sección 4.2.2, puntos de 1 a 4):

$$J_1 = S_1^{\Re}; \quad J_2 = S_1^{\Im}; \quad J_3 = D_2^{\Re}; \quad J_4 = D_2^{\Im}$$

Resultan ser invariantes porque en  $Cl_3$  son, respectivamente: escalar, pseudoescalar, bivector  $e_{12}$  (formado por los propios elementos del plano de rotación  $e_1$ - $e_2$ ) y vectorial  $e_3$  (paralelo al eje de rotación). Otro invariante irreducible resulta del módulo de la parte vectorial (la cual pertenece al plano de rotación  $e_1 - e_2$ ):  $\mathbf{v} = (D_1^{\Re} \cos 2\theta - S_2^{\Re} \sin 2\theta) e_1 + (S_2^{\Re} \cos 2\theta + D_1^{\Re} \sin 2\theta) e_2$

$$\begin{aligned}J_5 &= |(D_1^{\Re} \cos 2\theta - S_2^{\Re} \sin 2\theta) e_1 + (S_2^{\Re} \cos 2\theta + D_1^{\Re} \sin 2\theta) e_2| \\ &= (D_1^{\Re} \cos 2\theta - S_2^{\Re} \sin 2\theta)^2 + (S_2^{\Re} \cos 2\theta + D_1^{\Re} \sin 2\theta)^2 \\ &= (D_1^{\Re})^2 + (S_2^{\Re})^2\end{aligned}$$

de forma similar, deducimos otro invariante irreducible del módulo de la parte bivectorial,

$$\mathbf{W} = (D_1^{\Im} \cos 2\theta - S_2^{\Im} \sin 2\theta) e_{23} + (S_2^{\Im} \cos 2\theta + D_1^{\Im} \sin 2\theta) e_{31}$$

cuyo invariante es:

$$\begin{aligned}
 J_6 &= |(D_1^{\mathfrak{S}} \cos 2\theta - S_2^{\mathfrak{S}} \sin 2\theta)\mathbf{e}_{23} + (S_2^{\mathfrak{S}} \cos 2\theta + D_1^{\mathfrak{S}} \sin 2\theta)\mathbf{e}_{31}| \\
 &= (D_1^{\mathfrak{S}} \cos 2\theta - S_2^{\mathfrak{S}} \sin 2\theta)^2 + (S_2^{\mathfrak{S}} \cos 2\theta + D_1^{\mathfrak{S}} \sin 2\theta)^2 \\
 &= (D_1^{\mathfrak{S}})^2 + (S_2^{\mathfrak{S}})^2
 \end{aligned}$$

Un vector perpendicular al bivector  $\mathbf{W}$  es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= [(D_1^{\mathfrak{S}} \cos 2\theta - S_2^{\mathfrak{S}} \sin 2\theta)\mathbf{e}_{23} + (S_2^{\mathfrak{S}} \cos 2\theta + D_1^{\mathfrak{S}} \sin 2\theta)\mathbf{e}_{31}] (-\mathbf{e}_{123}) \\
 &= (D_1^{\mathfrak{S}} \cos 2\theta - S_2^{\mathfrak{S}} \sin 2\theta)\mathbf{e}_1 + (S_2^{\mathfrak{S}} \cos 2\theta + D_1^{\mathfrak{S}} \sin 2\theta)\mathbf{e}_2
 \end{aligned}$$

En  $Cl_3$  el vector perpendicular a un bivector se puede obtener multiplicando por  $-\mathbf{e}_{123}$  (Lounesto, 2012). Entonces, considerando el producto geométrico entre los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ , es fácil ver que tanto el producto interno  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  como el externo  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$  nos llevan a dos nuevos invariantes dado que ambos vectores  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{v}$  pertenecen al mismo plano de rotación  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$

$$\begin{aligned}
 J_7 &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{w}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{w}) \\
 &= S_2^{\mathfrak{R}} S_2^{\mathfrak{S}} + D_1^{\mathfrak{R}} D_1^{\mathfrak{S}}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 J_8 &= |\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}| = \left| \frac{1}{2}(\mathbf{w}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{w}) \right| \\
 &= |(S_2^{\mathfrak{R}} D_1^{\mathfrak{S}} - D_1^{\mathfrak{R}} S_2^{\mathfrak{S}})\mathbf{e}_{12}| \\
 &= (S_2^{\mathfrak{R}} D_1^{\mathfrak{S}} - D_1^{\mathfrak{R}} S_2^{\mathfrak{S}}) = [S_2, D_1]
 \end{aligned}$$

estos invariantes son irreducibles.

### 5.2.1. Independencia de los invariantes

Para comprobar la independencia mutua de estos invariantes irreducibles seguiremos el procedimiento habitual. Sea  $J_i (i = 1, \dots, m)$  el número de invariantes definido en un dominio acotado  $D(J) \in \mathbb{R}^n$  y continuamente diferenciable en ese dominio. Si  $m = n$ , decimos que las funciones  $J_i$  son dependientes de  $D$  si y sólo si el determinante de la Jacobiana

$$\frac{\partial(J_1, J_2, \dots, J_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

se anula en  $D$  [ej. *Bronshtein et al.* 2007]. Considerando los ocho invariantes  $(J_1, J_2, \dots, J_8)$  y

$$(x_1, x_2, \dots, x_8) = (S_1^{\Re}, S_1^{\Im}, D_2^{\Re}, D_2^{\Im}, S_2^{\Re}, S_2^{\Im}, D_1^{\Re}, D_1^{\Im})$$

los términos pertenecientes a  $\mathbf{Z}$ , el determinante de la Jacobiana resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_2^{\Re} & 0 & 2D_1^{\Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_2^{\Im} & 0 & 2D_1^{\Im} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_2^{\Im} & S_2^{\Re} & D_1^{\Im} & D_1^{\Re} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_1^{\Im} & -D_1^{\Re} & -S_2^{\Im} & S_2^{\Re} \end{vmatrix} = 0$$

El determinante de rango cuatro

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

implica que  $J_1, J_2, J_3, J_4$  son mutuamente independientes y del resto de invariantes dada la forma del determinante de la Jacobiana. Es fácil ver que

$$\begin{vmatrix} 2S_2^{\Re} & 0 & 2D_1^{\Re} & 0 \\ 0 & 2S_2^{\Im} & 0 & 2D_1^{\Im} \\ S_2^{\Im} & S_2^{\Re} & D_1^{\Im} & D_1^{\Re} \\ D_1^{\Im} & -D_1^{\Re} & -S_2^{\Im} & S_2^{\Re} \end{vmatrix} = 0$$

lo que implica que  $J_5, J_6, J_7, J_8$  son dependientes entre ellos y, dado que el rango mayor distinto de cero de este determinante es tres, sólo tres de ellos son mutuamente independientes. Así, el número de invariantes irreducibles mutuamente independientes es siete. Dado que los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  y la rotación de ángulo  $\theta$  suceden sobre el mismo plano ( $e_1 - e_2$ ) (figura 5.2), el ángulo  $\gamma$  entre los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  es invariante bajo rotaciones en torno al eje  $e_3$ . Por este motivo, en lugar de considerar  $J_7 = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \gamma$  y  $J_8 = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \gamma$  como invariantes diferentes, consideramos como invariante a  $\gamma$ , de acuerdo con [Weaver *et al.* 2000]

$$\tan \gamma = \frac{|\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}|}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}} = \frac{[S_2, D_1]}{S_2^{\Re} S_2^{\Im} + D_1^{\Re} D_1^{\Im}}$$

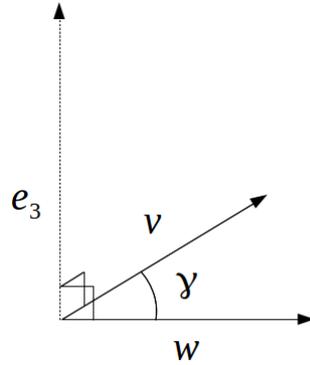


Figura 5.2: Invariante  $\gamma$ .

Por lo tanto, tenemos siete invariantes irreducibles mutuamente independientes,  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$  y  $\gamma$ .

Se pueden utilizar diferentes conjuntos de invariantes con la rotación para definir el tensor de impedancias. Los invariantes deducidos por [Szarka & Menvielle 1997] son los mismos cuatro  $J_1, J_2, J_3, J_4$  y tres más, que son  $\det(\Re \mathbf{Z})$ ,  $\det(\Im \mathbf{Z})$  y  $\Im \det(\mathbf{Z})$ . Estos tres últimos invariantes pueden expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \det[\Re \mathbf{Z}] &= \mathbf{Z}_{\Re} \bar{\mathbf{Z}}_{\Re} = (S_1^{\Re})^2 - (D_1^{\Re})^2 - (S_2^{\Re})^2 + (D_2^{\Re})^2 \\ &= J_1^2 - J_5 + J_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det [\Im \mathbf{Z}] &= \mathbf{Z}_{\Im} \bar{\mathbf{Z}}_{\Im} = -(S_1^{\Im})^2 + (D_1^{\Im})^2 + (S_2^{\Im})^2 - (D_2^{\Im})^2 \\
&= J_2^2 + J_6 + J_4^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Im \det [\mathbf{Z}] &= \Im(\mathbf{Z} \bar{\mathbf{Z}}) \\
&= 2(S_1^{\Re} S_1^{\Im} - S_2^{\Re} S_2^{\Im} - D_1^{\Re} D_1^{\Im} + D_2^{\Re} D_2^{\Im}) \\
&= 2(J_1 J_2 - J_7 + J_3 J_4)
\end{aligned}$$

por lo tanto, estos invariantes, aunque mutuamente independientes, no son irreducibles. Liley (1998) mostró un conjunto de invariantes en el contexto de los diagramas de Mohr. [Weaver *et al.* 2000] presentaron siete invariantes conocidos por invariantes de WAL. Martí *et al.* (2005) encontraron relaciones entre diferentes conjuntos de invariantes. Algunos de estos invariantes tienen funciones densidad de probabilidad con varianza semi-infinita o infinita [Chave 2014]. Este aspecto se discute en el capítulo 9 donde se analizan la funciones densidad de probabilidad de los invariantes de rotación.



## Capítulo 6

# Tensor de Impedancias en subálgebra $Cl_2$

Presentamos el tensor de impedancias en el marco del álgebra de Clifford  $Cl_2$ . Este desarrollo nos permitirá ver la construcción geométrica de los diagramas de Mohr y el *phase tensor*. Partimos de la usual separación de la matriz asociada al tensor de impedancias:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{\Re} + i\mathbf{Z}_{\Im} \quad (6.1)$$

donde  $\mathbf{Z}_{\Re}$  y  $\mathbf{Z}_{\Im}$  son las partes real e imaginaria, respectivamente. La representación matricial de las partes real e imaginaria son expresadas separadamente en álgebras de Clifford  $Cl_2$  a partir (4.15)

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} [S_1^{\Re} + D_1^{\Re} \mathbf{e}_1 + S_2^{\Re} \mathbf{e}_2 + D_2^{\Re} \mathbf{e}_{12} + i (S_1^{\Im} + D_1^{\Im} \mathbf{e}_1 + S_2^{\Im} \mathbf{e}_2 + D_2^{\Im} \mathbf{e}_{12})] \quad (6.2)$$

donde  $S_1^{\Re} = (Z_{xx}^{\Re} + Z_{yy}^{\Re})$ ,  $D_1^{\Re} = (Z_{xx}^{\Re} - Z_{yy}^{\Re})$ ,  $S_2^{\Re} = (Z_{xy}^{\Re} + Z_{yx}^{\Re})$  y  $D_2^{\Re} = (Z_{xy}^{\Re} - Z_{yx}^{\Re})$ . Lo mismo para  $S_1^{\Im}$ ,  $D_1^{\Im}$ ,  $S_2^{\Im}$  y  $D_2^{\Im}$ . Los superíndices  $\Re$  y  $\Im$  representan las partes real e imaginaria. Entonces, en el álgebra  $Cl_2$ ,  $S_1^{\Re, \Im}$  son los coeficientes de la parte escalar,  $D_1^{\Re, \Im}$  y  $S_2^{\Re, \Im}$  de la parte vectorial y  $D_2^{\Re, \Im}$  de la bivectorial (o pseudoscalar).

### 6.1. Consideraciones geométricas en torno a $\mathbf{Z}$

Usualmente decimos que  $\mathbf{Z}$  transforma los espacios vectoriales de  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{E}$ , por este motivo cabe esperar que  $\mathbf{Z}$  tenga ciertas características relacionadas con el hecho de que  $\mathbf{H}$  y

$\mathbf{E}$  son vectores. Podemos empezar diciendo que

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{H} \quad (6.3)$$

donde  $\mathbf{E} = e_x \mathbf{e}_1 + e_y \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{H} = h_x \mathbf{e}_1 + h_y \mathbf{e}_2$ , con  $e_x, e_y, h_x, h_y \in \mathbb{C}$ . Teniendo en cuenta que  $\mathbf{H}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{H}}}{\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}}$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{E}\mathbf{H}^{-1} = (e_x h_x + e_y h_y + (e_x h_y - h_x e_y) \mathbf{e}_{12}) / (h_x^2 + h_y^2) \quad (6.4)$$

Dado que  $\mathbf{Z} = \frac{1}{2} [S_1 + D_1 \mathbf{e}_1 + S_2 \mathbf{e}_2 + D_2 \mathbf{e}_{12}]$  con  $S_1, D_1, S_2, D_2 \in \mathbb{C}$ , si queremos que  $\mathbf{Z}$  transforme vectores,  $D_1$  y  $D_2$  tienen que ser cero. Esto significa que  $Z_{xx} = Z_{yy}$  y  $Z_{xy} = -Z_{yx}$ . Si consideramos que  $\mathbf{Z}$  debería transformar vectores ( $\mathbf{Z}_V$ ), ésta es la forma que tiene que tener. Por tanto, el tensor de impedancias tiene que tener la siguiente representación matricial

$$\mathbf{Z}_V = \begin{pmatrix} Z_D & Z_O \\ -Z_O & Z_D \end{pmatrix} \quad Z_D, Z_O \in \mathbb{C} \quad (6.5)$$

Sin embargo, este resultado sólo es consistente con los casos 1D, donde además  $Z_D = 0$  o 3D con  $Z_D \neq 0$ . Merece la pena ver que a partir de consideraciones puramente geométricas hemos obtenido el signo opuesto de  $Z_{xy}$  frente a  $Z_{yx}$ , con el único requisito de que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  sean vectores.

Para obtener las componentes del tensor de impedancias se han implementado numerosos métodos para resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el espacio de frecuencias:

$$\begin{cases} e_x = h_x Z_{xx} + h_y Z_{xy} \\ e_y = h_x Z_{yx} + h_y Z_{yy} \end{cases} \quad (6.6)$$

Para cada frecuencia, este sistema se expresa como:

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

pero no todos los valores para  $Z_{xx}$ ,  $Z_{xy}$ ,  $Z_{yx}$  y  $Z_{yy}$  pueden considerarse si queremos que transforme el par ordenado  $(h_x, h_y)$  como elemento vector  $\mathbf{H}$  al par ordenado  $(e_x, e_y)$  como elemento vector  $\mathbf{E}$ . La única forma posible para la expresión más general de  $\mathbf{Z}$  es que  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{E}$  no sean vectores sino espinores. Esto es

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_S &= \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x & 0 \\ e_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x & e_y \\ e_y & -e_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (e_x \mathbf{e}_1 + e_y \mathbf{e}_2) \frac{1}{2} (1 + \mathbf{e}_1) = \frac{1}{2} [e_x (1 + \mathbf{e}_1) + e_y (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12})] \\ \mathbf{H}_S &= \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x & 0 \\ h_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x & h_y \\ h_y & -h_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (h_x \mathbf{e}_1 + h_y \mathbf{e}_2) \frac{1}{2} (1 + \mathbf{e}_1) = \frac{1}{2} [h_x (1 + \mathbf{e}_1) + h_y (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{12})]\end{aligned}\tag{6.8}$$

De este modo se cumplen también las relaciones del sistema (6.6). Vemos pues que las álgebras de Clifford nos han permitido saber más sobre  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{E}$  que están relacionados por el tensor de impedancias  $\mathbf{Z}$ . El modo en que se resuelve el sistema (6.6) nos cambia la naturaleza de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{E}$  de vectores a espinores.

## 6.2. Diagramas de Mohr del Tensor de impedancias

Una de las características de los diagramas de Mohr es que en su representación algebraico-geométrica se pueden hallar la mayoría de invariantes de rotación. Se deduce de forma inmediata cuando se expresa el tensor de impedancias en  $Cl_2$ . Tomando separadamente las partes real e imaginaria del tensor de impedancias, de (6.2) podemos expresar cada parte como:

$$\mathbf{Z}_{\Re, \Im} = \frac{1}{2} \left[ S_1^{\Re, \Im} + D_1^{\Re, \Im} \mathbf{e}_1 + S_2^{\Re, \Im} \mathbf{e}_2 + D_2^{\Re, \Im} \mathbf{e}_{12} \right]\tag{6.9}$$

En el contexto de las álgebras de Clifford, la expresión (6.9) puede separarse en un *parte par*  $Cl_2^+$  y una *parte impar*  $Cl_2^-$  [Lounesto 2001, p.26]

$$\mathbf{Z}_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{S_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} + D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{e}_{12}}_{\in Cl_2^+} + \underbrace{D_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{e}_1 + S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{e}_2}_{\in Cl_2^-} \right] \quad (6.10)$$

Entonces,  $Cl_2^+$  abarca escalares y bivectores, y  $Cl_2^-$  vectores. Los escalares son invariantes de rotación y un bivector, como segmento de plano direccionado, no cambia bajo rotaciones en el propio plano, en este caso  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ . Entonces,  $Cl_2^+$  es invariante bajo rotaciones en cambio  $Cl_2^-$  no.

También puede verse rotando (6.10) en  $R^2$ , y dado que 1 y  $\mathbf{e}_{12}$  conmutan con  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}^{-1}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} &= \mathbf{R} \frac{1}{2} \left[ \underbrace{S_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} + D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{e}_{12}}_{\in Cl_2^+} + \underbrace{D_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{e}_1 + S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{e}_2}_{\in Cl_2^-} \right] \mathbf{R}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{S_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} + D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{e}_{12}}_{\in Cl_2^+} + \underbrace{D_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 \mathbf{R}^{-1} + S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \mathbf{R} \mathbf{e}_2 \mathbf{R}^{-1}}_{\in Cl_2^-} \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

por tanto, queda claro que la parte  $Cl_2^+$  permanece intacta bajo rotaciones, en cambio  $Cl_2^-$  no.

El módulo de  $\mathbf{Z}_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^{Cl_2^+}$ , como indicamos en la sub-sección 4.1.2:

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^L &= \sqrt{\mathbf{Z}_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^{Cl_2^+} \tilde{\mathbf{Z}}_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^{Cl_2^+}} = \frac{1}{2} \left[ \left( S_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)^2 + \left( D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \left( Z_{xx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} + Z_{yy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)^2 + \left( Z_{xy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} - Z_{yx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} / 2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde  $\tilde{\mathbf{Z}}_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^{Cl_2^+}$  es el *contrario* de  $\mathbf{Z}_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^{Cl_2^+}$  (sección 4.1.2). El ángulo

$$\tan \mu_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} = \frac{S_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}}{D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}} = \frac{\left( Z_{xx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} + Z_{yy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)}{\left( Z_{xy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} - Z_{yx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)} \quad (6.13)$$

es el ángulo definido por Lilley (2012). Por otro lado, el módulo de  $Z_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^{Cl_2^-}$  es:

$$\begin{aligned} C_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} &= \sqrt{Z_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^{Cl_2^-} \tilde{Z}_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^{Cl_2^-}} = \frac{1}{2} \left[ \left( S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)^2 + \left( D_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \left( Z_{xy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} + Z_{yx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)^2 + \left( Z_{xx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} - Z_{yy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} / 2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

y el ángulo:

$$\tan \beta_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} = \frac{D_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}}{S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}} = \frac{\left( Z_{xx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} - Z_{yy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)}{\left( Z_{xy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} + Z_{yx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \right)} \quad (6.15)$$

Podemos ver que el módulo (6.12), el ángulo (6.13), el módulo (6.14) y el ángulo (6.15) son las expresiones de Lilley para  $Z^L$ ,  $\tan \mu$ ,  $C$  y  $\tan \beta$ , respectivamente (Lilley, 2012). La figura 6.1 es un ejemplo de representación en diagramas de Mohr. En ésta se pueden ver representados los parámetros  $Z^L$ ,  $\mu$ ,  $C$  y  $\beta$  que definen un diagrama de Mohr.

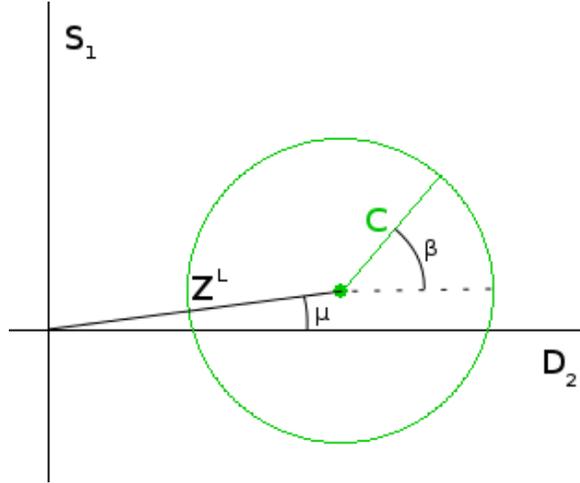


Figura 6.1: Diagrama de Mohr para el Site 2 a 100s [Weaver *et al.* 2000] en fase (parte real). Se muestran los distintos parámetros  $Z^L$ ,  $C$ ,  $\mu$  y  $\beta$ . El eje de abscisas es  $D_2$  y el de ordenadas  $S_1$ .

Por lo tanto, la información del tensor de impedancias contenida en el sistema del álgebra de Clifford nos da directamente los invariantes bajo rotaciones:  $Z_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}^L$  y  $\mu_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  son invariantes

porque pertenecen a  $Cl_2^+$  (el cual contiene una parte escalar y una parte bivectorial paralela al plano de rotación), y únicamente el módulo de  $Cl_2^-$ ,  $C_{\Re, \Im}$ , es invariante bajo rotaciones (el módulo de un vector es invariante bajo transformaciones isométricas).

### 6.3. Phase Tensor

Separando el tensor de impedancias como en (6.1) se define el *phase tensor* como en [Caldwell et al. 2004]:

$$\Phi = \mathbf{Z}_{\Re}^{-1} \mathbf{Z}_{\Im} \quad (6.16)$$

donde  $\mathbf{Z}_{\Re}^{-1}$ , la inversa de  $\mathbf{Z}_{\Re}$ , puede expresarse en álgebras de Clifford del siguiente modo (sub-sección 4.1.2):

$$\mathbf{Z}_{\Re}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{Z}}_{\Re}}{\mathbf{Z}_{\Re} \bar{\mathbf{Z}}_{\Re}} = 2 \frac{S_1^{\Re} - D_1^{\Re} \mathbf{e}_1 - S_2^{\Re} \mathbf{e}_2 - D_2^{\Re} \mathbf{e}_{12}}{(S_1^{\Re})^2 - (D_1^{\Re})^2 - (S_2^{\Re})^2 + (D_2^{\Re})^2} \quad (6.17)$$

entonces, el *phase tensor* en álgebra Clifford  $Cl_2$  es:

$$\begin{aligned} \Phi = & [(S_1^{\Re} S_1^{\Im} - S_2^{\Re} S_2^{\Im} - D_1^{\Re} D_1^{\Im} + D_2^{\Re} D_2^{\Im}) + (S_1^{\Re} D_1^{\Im} + S_2^{\Re} D_2^{\Im} - D_1^{\Re} S_1^{\Im} - D_2^{\Re} S_2^{\Im}) \mathbf{e}_1 \\ & + (S_1^{\Re} S_2^{\Im} - S_2^{\Re} S_1^{\Im} - D_1^{\Re} D_2^{\Im} + D_2^{\Re} D_1^{\Im}) \mathbf{e}_2 \\ & + (S_1^{\Re} D_2^{\Im} + S_2^{\Re} D_1^{\Im} - D_1^{\Re} S_2^{\Im} - D_2^{\Re} S_1^{\Im}) \mathbf{e}_{12}] / [(S_1^{\Re})^2 - (D_1^{\Re})^2 - (S_2^{\Re})^2 + (D_2^{\Re})^2] \end{aligned} \quad (6.18)$$

tomando  $\{A, B\} = \Re(A)\Im(B) + \Re(B)\Im(A)$  y  $[A, B] = \Re(A)\Im(B) - \Re(B)\Im(A)$  podemos reescribir la expresión del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\Phi &= [(\{S_1, S_1\} - \{S_2, S_2\} - \{D_1, D_1\} + \{D_2, D_2\}) / 2 \\
&\quad + ([S_1, D_1] + [S_2, D_2]) \mathbf{e}_1 + ([S_1, S_2] - [D_1, D_2]) \mathbf{e}_2 \\
&\quad + ([S_1, D_2] + [S_2, D_1]) \mathbf{e}_{12}] / [(S_1^{\Re})^2 - (D_1^{\Re})^2 - (S_2^{\Re})^2 + (D_2^{\Re})^2]
\end{aligned} \tag{6.19}$$

resumiendo, de (6.19) se deduce

$$\begin{aligned}
\Phi &= \phi_0 + \phi_1 \mathbf{e}_1 + \phi_2 \mathbf{e}_2 + \phi_{12} \mathbf{e}_{12} \\
&= \begin{pmatrix} \phi_0 + \phi_1 & \phi_2 + \phi_{12} \\ \phi_2 - \phi_{12} & \phi_0 - \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Por lo tanto, en álgebras de Clifford, el significado geométrico del *phase tensor* se muestra en términos de una componente escalar  $\phi_0$ , de las componentes vectoriales  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , y la componente bivectorial  $\phi_{12}$  (pseudoscalar). Cabe señalar que  $\phi_0$  y  $\phi_{12}$  son invariantes bajo rotaciones dado que son respectivamente la parte escalar y la bivectorial sobre el plano de rotaciones  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ .

Reordenando el *phase tensor* en parte par  $Cl_2^+$  e impar  $Cl_2^-$ .

$$\begin{aligned}
\Phi &= \underbrace{\phi_1 \mathbf{e}_1 + \phi_2 \mathbf{e}_2}_{\in Cl_2^-} + \underbrace{\phi_0 + \phi_{12} \mathbf{e}_{12}}_{\in Cl_2^+} \\
&= \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & -\phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_0 & \phi_{12} \\ -\phi_{12} & \phi_0 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}}_{\text{modulo } Cl_2^-} \begin{pmatrix} \phi_1 / \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} & \phi_2 / \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \\ \phi_2 / \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} & -\phi_1 / \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \underbrace{\sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2}}_{\text{modulo } Cl_2^+} \begin{pmatrix} \phi_0 / \sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2} & \phi_{12} / \sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2} \\ -\phi_{12} / \sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2} & \phi_0 / \sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}}_{\text{modulo } Cl_2^-} \begin{pmatrix} \cos \Theta_{Cl_2^-} & \sin \Theta_{Cl_2^-} \\ \sin \Theta_{Cl_2^-} & -\cos \Theta_{Cl_2^-} \end{pmatrix} + \underbrace{\sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2}}_{\text{modulo } Cl_2^+} \begin{pmatrix} \cos \Theta_{Cl_2^+} & \sin \Theta_{Cl_2^+} \\ -\sin \Theta_{Cl_2^+} & \cos \Theta_{Cl_2^+} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donde  $\Theta_{Cl_2^-}$  es el ángulo cuya  $\tan \Theta_{Cl_2^-} = \phi_2/\phi_1$  y  $\Theta_{Cl_2^+}$  es el ángulo cuya  $\tan \Theta_{Cl_2^+} = \phi_{12}/\phi_0$ .

Tomando las siguientes relaciones:

- Módulo de  $Cl_2^-$ :  $\Pi_1 = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}$
- Módulo de  $Cl_2^+$ :  $\Pi_2 = \sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2}$
- Ángulo  $2\beta = \Theta_{Cl_2^+}$
- Ángulo  $2\alpha = \Theta_{Cl_2^-}$

El *phase tensor* puede reescribirse [Bibby1986]:

$$\begin{aligned} \Phi &= \underbrace{\Pi_1 \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}}_{Cl_2^-} + \underbrace{\Pi_2 \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ -\sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix}}_{Cl_2^+} \\ &= \Pi_1 (\cos 2\alpha \mathbf{e}_1 + \sin 2\alpha \mathbf{e}_2) + \Pi_2 (\cos 2\beta + \sin 2\beta \mathbf{e}_{12}) \end{aligned}$$

Las propiedades geométricas contenidas en el álgebra de Clifford no dan directamente los invariantes bajo rotaciones:  $\Pi_2$  y  $\beta$  (skew angle, Cadwell et al. 2004) son invariantes porque pertenecen a  $Cl_2^+$ , pero sólo el módulo de  $Cl_2^-$ ,  $\Pi_1$ , es invariante bajo rotaciones.

Podemos ver que a partir de (6.19)

$$\tan(2\alpha) = \frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{[S_1, S_2] - [D_1, D_2]}{[S_1, D_1] + [S_2, D_2]} = -\tan(2\theta_{strike}) \quad (6.21)$$

Por lo tanto,  $\alpha = -\theta_{strike}$ , es la relación de Bahr para el *Phase Sensitive Strike* [Bahr 1991]. Dado que el *phase tensor* es independiente de la distorsión galvánica,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son también independientes de la distorsión galvánica y, consecuentemente,  $\theta_{strike}$  es independiente de la distorsión galvánica. Podemos analizar los diagramas de Mohr para el *phase tensor* de mismo modo que en la sección 6.2. A partir de la ecuación (6.20) y tras comparar con la Fig. 9 en Lilley (2012) observamos que  $\phi_0$ ,  $\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}$  y  $\phi_{12}$  coinciden con  $J_1$ ,  $J_2$ , y  $J_3$  del artículo de Lilley.

## Capítulo 7

# Distorsión galvánica

La matriz de distorsión y el tensor de impedancias en el contexto del álgebra de Clifford permitirá diseñar un método para determinar los parámetros de distorsión galvánica y recuperar el tensor de impedancias regional.

La matriz de distorsión  $C$  se utiliza para representar la distorsión del campo eléctrico causada por inhomogeneidades superficiales. Utilizando la matriz de distorsión, real e independiente de la frecuencia (efectos inductivos despreciables), el campo eléctrico distorsionado  $E^m$  se escribe en función de los valores del campo eléctrico en ausencia de tales inhomogeneidades superficiales. Este campo eléctrico hace referencia al campo eléctrico no distorsionado o regional  $E^r$ . Entonces, en el espacio de frecuencias:

$$E^m = C E^r$$

Bahr (1988) propuso una parametrización para  $C$ , que puede expresarse como (Smith 1995):

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_x & -\sin \theta_y \\ \sin \theta_x & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x & 0 \\ 0 & g_y \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

donde  $a, b, c, d$  son reales e independientes de la frecuencia,  $g_x = \sqrt{a^2 + c^2}$  y  $g_y = \sqrt{b^2 + d^2}$  son las ganancias de  $E_x$  y  $E_y$  (las componentes de  $E^r$  en las direcciones  $x, y$ ), respectivamente, y  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son rotaciones de  $E_x$  y  $E_y$ .

Groom y Bailey (1989) propuso la siguiente descomposición

$$\mathbf{C} = g\mathbf{TSA}$$

donde  $g$  es un escalar y  $\mathbf{T} = N_2(\mathbf{I} + t\Sigma_2)$ ,  $\mathbf{S} = N_1(\mathbf{I} + e\Sigma_1)$  y  $\mathbf{A} = N_3(\mathbf{I} + s\Sigma_3)$ . Los parámetros  $t, e, s$  son escalares llamados *twist*, *shear* y *anisotropy*, respectivamente.  $N_1 = 1/\sqrt{1+e^2}$ ,  $N_2 = 1/\sqrt{1+t^2}$  y  $N_3 = 1/\sqrt{1+s^2}$  son constantes de normalización, y  $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  las llamadas “forma modificada de las matrices de spin de Pauli” por Groom y Bailey (1989).

## 7.1. Descomposición de Groom & Bailey

En el contexto del álgebra de Clifford se puede hallar más de una representación matricial (matrices reales 2x2 y complejas 2x2) para la base de  $Cl_2$  y  $Cl_3$  (Lounesto 2001). De acuerdo con los desarrollos de Groom y Bailey tomaremos la siguiente representación:

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

entonces, para cualquier matriz real o compleja 2 x 2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [(a+d)\mathbf{e}_0 + (b+c)\mathbf{e}_1 + (a-d)\mathbf{e}_2 - (b-c)\mathbf{e}_{12}] \quad (7.3)$$

siendo  $a, b, c, d$  números complejos o reales<sup>1</sup>. En esta expresión de  $Cl_2$  las matrices encuentran significado geométrico. En las siguientes sub-secciones analizaremos la matriz de distorsión y el tensor de impedancias en esta representación en particular.

Utilizando la parametrización de Bahr (7.1) y definiendo la rotación media y la rotación diferencial de los campos eléctricos  $\theta_A = (\theta_x + \theta_y)/2$  y  $\theta_D = (\theta_x - \theta_y)/2$ , respectivamente,

<sup>1</sup>En realidad, en las álgebras de Clifford en general los coeficientes de las bases son reales, en este caso nos conviene presentarlos de forma compleja, y podemos porque conmutan con todos los elementos de la base. Es decir en  $Cl_3$  la unidad imaginaria  $i = \mathbf{e}_{123}$ , un número complejo estaría formado por  $z = \Re + \Im i = \Re + \Im \mathbf{e}_{123}$ . Dado que  $\Re$  es escalar y  $\mathbf{e}_{123}$  conmuta con todos los elementos de la base de  $Cl_3$ , el número complejo  $z$  conmutará con todos los elementos de la base de  $Cl_3$ .

$C$  se reescribe como

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta_A & -\sin \theta_A \\ \sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_D & \sin \theta_D \\ \sin \theta_D & \cos \theta_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x & 0 \\ 0 & g_y \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Podemos utilizar (7.3) para encontrar las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta_A & -\sin \theta_A \\ \sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} &= \cos \theta_A \mathbf{e}_0 + \sin \theta_A \mathbf{e}_{12} = \cos \theta_A (\mathbf{e}_0 + \tan \theta_A \mathbf{e}_{12}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} (\mathbf{e}_0 + t \mathbf{e}_{12}) \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde  $t = \tan \theta_t = \tan \theta_A$  es el parámetro *twist*,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta_D & \sin \theta_D \\ \sin \theta_D & \cos \theta_D \end{pmatrix} &= \cos \theta_D \mathbf{e}_0 + \sin \theta_D \mathbf{e}_1 = \cos \theta_D (\mathbf{e}_0 + \tan \theta_D \mathbf{e}_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} (\mathbf{e}_0 + e \mathbf{e}_1) \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde  $e = \tan \theta_e = \tan \theta_D$  es el parámetro *shear*, y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_x & 0 \\ 0 & g_y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} [(g_x + g_y) \mathbf{e}_0 + (g_x - g_y) \mathbf{e}_2] = \frac{1}{2} (g_x + g_y) \left( \mathbf{e}_0 + \frac{(g_x - g_y)}{(g_x + g_y)} \mathbf{e}_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(g_x^2 + g_y^2)} \cos \theta_s (\mathbf{e}_0 + \tan \theta_s \mathbf{e}_2) = \sqrt{\frac{(g_x^2 + g_y^2)}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} (\mathbf{e}_0 + s \mathbf{e}_2) \\ &= g \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} (\mathbf{e}_0 + s \mathbf{e}_2) \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde  $s = \tan \theta_s$  es el parámetro *anisotropy* y  $g = \sqrt{(g_x^2 + g_y^2)}/2$  la ganancia.

Podemos entonces reescribir (7.4) como

$$C = g N_1 N_2 N_{12} (\mathbf{e}_0 + t \mathbf{e}_{12}) (\mathbf{e}_0 + e \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_0 + s \mathbf{e}_2) \quad (7.8)$$

con  $N_1 = 1/\sqrt{1+e^2}$ ,  $N_2 = 1/\sqrt{1+s^2}$ ,  $N_{12} = 1/\sqrt{1+t^2}$ . Ésta es la expresión de la distorsión galvánica de Groom y Bailey (1989). Por otro lado, de (7.8) es fácil ver que:

$$\mathbf{C} = gN_1N_2N_{12} [A\mathbf{e}_0 + B\mathbf{e}_1 + C\mathbf{e}_2 + D\mathbf{e}_{12}] \quad (7.9)$$

donde  $A = (1 - tes)$ ,  $B = (e + ts)$ ,  $C = (s - te)$  y  $D = (t + es)$ . Ésta es la matriz de distorsión galvánica expresada como combinación de la base seleccionada (7.2) con coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . En esta descomposición, en el contexto del Álgebra Geométrica (álgebra de Clifford), cada componente tiene su propia identidad y significado:  $A$  es el coeficiente de la parte escalar de la distorsión galvánica,  $B$  y  $C$  las partes vectoriales y  $D$  la bivectorial. Esta descomposición nos permitirá llegar fácilmente a la ecuación (10.1), que constituye el punto de partida del método planteado para la determinación de la distorsión galvánica.

## 7.2. Tensor de impedancias magnetotelúrico en $Cl_2$

La relación entre el campo eléctrico no distorsionado  $\mathbf{E}^r$  y el campo magnético  $\mathbf{H}$  es:

$$\mathbf{E}^r = \mathbf{Z}^r \mathbf{H} \quad (7.10)$$

donde  $\mathbf{Z}^r$  es el tensor de impedancias regional,

$$\mathbf{Z}^r = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix}$$

$Z_{xx}$ ,  $Z_{xy}$ ,  $Z_{yx}$  y  $Z_{yy}$  son complejos, y utilizando<sup>2</sup> (7.3)

$$\mathbf{Z}^r = \frac{1}{2} [S_1\mathbf{e}_0 + S_2\mathbf{e}_1 + D_1\mathbf{e}_2 - D_2\mathbf{e}_{12}] \quad (7.11)$$

con  $S_1 = (Z_{xx} + Z_{yy})$ ,  $S_2 = (Z_{xy} + Z_{yx})$ ,  $D_1 = (Z_{xx} - Z_{yy})$  y  $D_2 = (Z_{xy} - Z_{yx})$ . Este es

<sup>2</sup>Nótese que la base  $Cl_2$  es distinta a la usada en (6.9).

el tensor de impedancias regional en la base (7.2), con coeficientes complejos  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $D_1$  y  $-D_2$ . Aunque la forma más generalizada del tensor de impedancias en álgebras de Clifford se halle en  $Cl_3$  también admite representación en  $Cl_2$  como ya hemos vistos en la sección 5.1.

### 7.3. Tensor de impedancias magnetotelúrico distorsionado

El campo eléctrico medido  $E^m$  se expresa como

$$E^m = CE^r = Z^m H$$

donde  $Z^m$  representa el tensor de impedancias medido. A partir de (7.10) escribimos

$$Z^m = CZ^r \quad (7.12)$$

y utilizando la misma notación de (7.11)

$$Z^m = \frac{1}{2} [S_1^m e_0 + S_2^m e_1 + D_1^m e_2 - D_2^m e_{12}] \quad (7.13)$$

de (7.9), (7.11) y (7.13), se hallan las siguientes relaciones entre coeficientes:

$$\begin{pmatrix} S_1^m \\ S_2^m \\ D_1^m \\ D_2^m \end{pmatrix} = gN_1N_2N_{12} \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & -D & A & -B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

La matriz en (7.14) se deduce fácilmente dado que  $Z^m$ ,  $C$  y  $Z^r$ , en (7.12), se expresan en la misma base.

La ecuación (7.14) es un sistema de ecuaciones no lineal de  $8 \times k$  ecuaciones y  $8 \times k + 3$  incógnitas, donde  $k$  es el número de periodos con el parámetro  $g$  asimilado dentro del tensor de impedancias regional  $Z^r$ . Está claro que este sistema indeterminado no presenta una

solución única. Las incógnitas son: los  $8 \times k$  elementos reales e imaginarios del tensor de impedancias regional por cada periodo y los tres coeficientes de distorsión galvánica considerados  $t, e, s$  (iguales para todos los periodos).

De la ecuación (7.14) podemos obtener el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 Z_{xx}^m &= N_1 N_2 N_{12} [(1 - te)(1 + s)Z_{xx}^r + (e - t)(1 - s)Z_{yx}^r] \\
 Z_{yx}^m &= N_1 N_2 N_{12} [(1 + te)(1 - s)Z_{yx}^r + (e + t)(1 + s)Z_{xx}^r] \\
 Z_{yy}^m &= N_1 N_2 N_{12} [(1 + te)(1 - s)Z_{yy}^r + (e + t)(1 + s)Z_{xy}^r] \\
 Z_{xy}^m &= N_1 N_2 N_{12} [(1 - te)(1 + s)Z_{xy}^r + (e - t)(1 - s)Z_{yy}^r]
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

## 7.4. Tensor de impedancias magnetotelúrico distorsionado y rotado

El sistema de referencia del campo eléctrico medido puede rotarse simulando la rotación de los sensores en cualquier dirección. Para rotaciones antihorarias el tensor de impedancias distorsionado y rotado resulta

$$\tilde{\mathbf{Z}}^m = \mathbf{R}\mathbf{Z}^m\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{Z}^r\mathbf{R}^{-1} \tag{7.16}$$

con  $\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{e}_0 - \sin \theta \mathbf{e}_{12}$  siendo  $\theta$  el ángulo de rotación. En términos de los coeficientes de la base seleccionada:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \tilde{S}_1^m \\ \tilde{S}_2^m \\ \tilde{D}_1^m \\ \tilde{D}_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^m \\ S_2^m \\ D_1^m \\ D_2^m \end{pmatrix} \\
& = gN_1N_2N_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & -D & A & -B \\ -D & C & -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

donde  $\tilde{S}_1^m$ ,  $\tilde{S}_2^m$ ,  $\tilde{D}_1^m$  y  $\tilde{D}_2^m$  son los coeficientes para el tensor de impedancias magnetotelúrico distorsionado y rotado, en la base seleccionada (7.2).

En cualquier caso, una rotación  $\mathbf{R}$ :

$$\tilde{\mathbf{Z}}^m = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{Z}}^r \tag{7.18}$$

donde  $\tilde{\mathbf{Z}}^m = \mathbf{R}\mathbf{Z}^m\mathbf{R}^{-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}$  y  $\tilde{\mathbf{Z}}^r = \mathbf{R}\mathbf{Z}^r\mathbf{R}^{-1}$ . Así, formalmente (7.15) es válida para  $\tilde{\mathbf{Z}}^m$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}^r$  y  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{e}$ ,  $\tilde{s}$  de  $\tilde{\mathbf{C}}$ . Partiendo de (7.9)  $\tilde{\mathbf{C}}$  y  $\mathbf{C}$  están relacionadas del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

## 7.5. Parámetros de distorsión galvánica para el caso ideal 2D y 1D

En el caso 2D, en la dirección del *strike*, los elementos de la diagonal  $Z_{xx}^r$  y  $Z_{yy}^r$  deben ser cero. Por lo tanto, del sistema de ecuaciones (7.15) resulta:

$$\begin{aligned}
Z_{xx}^m &= N_1 N_2 N_{12} (e - t)(1 - s) Z_{yx}^r \\
Z_{yx}^m &= N_1 N_2 N_{12} (1 + te)(1 - s) Z_{yx}^r \\
Z_{yy}^m &= N_1 N_2 N_{12} (e + t)(1 + s) Z_{xy}^r \\
Z_{xy}^m &= N_1 N_2 N_{12} (1 - te)(1 + s) Z_{xy}^r
\end{aligned} \tag{7.20}$$

A partir de éstas ecuaciones **podemos obtener los valores  $t$  y  $e$  independientemente de  $s$**  a partir de las siguientes relaciones

$$Z_{xx}^m(1 + te) = Z_{yx}^m(e - t); \quad Z_{yy}^m(1 - te) = Z_{xy}^m(e + t) \tag{7.21}$$

Esta independencia en la determinación de  $t$  y  $e$  frente a la de  $s$  marcará, como veremos más adelante, los procedimientos en la determinación de la distorsión galvánica.

En el caso 2D, el parámetro *anisotropy*,  $s$ , no se puede determinar con tan solo este sistema de ecuaciones (Groom y Bailey, 1989; Jones, 2012), no obstante, como mostramos en la sub-sección 10.3.2, puede hallarse mediante la constricción adecuada. En el caso 1D, una vez se ha obtenido el conjunto de soluciones ( $t$ ,  $e$ ) a partir de (7.21), el parámetro  $s$  se obtiene de (7.20) tomando  $Z_{xy}^r = -Z_{yx}^r$  (1D):

$$s = \frac{A - 1}{A + 1}; \quad A = \frac{Z_{yx}^m(et + 1)}{Z_{xy}^m(et - 1)} \tag{7.22}$$

Realmente el tensor de impedancias para los casos 2D y 1D no tienen los elementos de la diagonal  $Z_{xx}^r$  y  $Z_{yy}^r$  iguales a cero debido al ruido y a desviaciones del modelo ideal. Por lo tanto, dado que el sistema de ecuaciones (7.20) se obtiene al asumir que  $Z_{xx}^r = Z_{yy}^r = 0$  (considerando casos 2D, 1D) en el sistema de ecuaciones (7.15), es necesario un parámetro de ajuste (RMS) que da cuenta de tal aproximación.

## Capítulo 8

# Dimensionalidad del Tensor de Impedancias

En el capítulo 5 se habló de la dimensionalidad en magnetotelúrica, se presentó la representación matricial del tensor de impedancias correspondiente a los modelos de resistividades 1D y 2D, es decir, la representación matricial para cada uno de los periodos del tensor de impedancias asociado a los modelos de resistividad 1D y 2D. Sin embargo, la relación establecida entre el modelo y la representación matricial, no siempre se cumple a la inversa, es decir, de forma aislada un periodo del tensor de impedancias puede tener una representación matricial del estilo  $\begin{pmatrix} 0 & Z \\ -Z & 0 \end{pmatrix}$  y ello no significar que el modelo de resistividades sea 1D. Cuando se hace una lectura del tensor de impedancias se debe efectuar teniendo en cuenta la totalidad de los periodos que lo integran. Nos conviene una nueva terminología que hable de la "dimensionalidad" del tensor teniendo en cuenta la información de cada uno de sus periodos. En este sentido, hablaremos de *dimensión del tensor magnetotelúrico* como la lectura que integra la información del conjunto de los periodos y de *dimensión de un periodo* si consideramos la de un periodo en concreto. En estos nuevos términos, podemos decir que un tensor de impedancias es 1D hasta un periodo dado si la dimensión de cada periodo menor o igual a éste es 1D. Un tensor de impedancias es 2D hasta un periodo dado si la dimensión de cada periodo menor o igual a éste es 2D (con el mismo *Phase Sensitive Strike*) y/o 1D.

Dado que la distorsión galvánica y el ruido dificultan la identificación de la dimensionalidad en los datos, es necesario poder definir la dimensionalidad a partir de unos índices o parámetros, asociados al conjunto de periodos del tensor de impedancias, que sean independientes de la distorsión galvánica. A partir de  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_{12}$ , definidos en la sección 6.3 (*phase tensor* en álgebras de Clifford), se puede comprobar la dimensionalidad asociada a un periodo del tensor de impedancias independientemente de la rotación y de la distorsión galvánica:

- En un caso 1D,  $\phi_0 > 0$  es el único coeficiente diferente de cero:  $\mathbf{Z}_{1D} = (0, Z; -Z, 0)$ .

Entonces  $\phi_0 = D_2^{\Im} / D_2^{\Re} = Z^{\Im} / Z^{\Re} = \tan \phi$ , que es la tangente de la fase para ambas componentes  $Z_{xy} = Z$  y  $Z_{yx} = -Z$ , con  $D_2^{\Re}, D_2^{\Im} > 0$ .

- En un caso 2D,  $\phi_0 > 0$  y  $\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} > 0$  (o en la dirección del *strike*  $\sqrt{\phi_1^2} = |\phi_1| > 0$  dado que  $\phi_2 = 0$ ) son los únicos coeficientes distintos de cero:  $\mathbf{Z}_{2D} = (0, Z_{xy}; Z_{yx}, 0)$  en la dirección del *strike*,  
 $\phi_0 = (D_2^{\Re} D_2^{\Im} - S_2^{\Re} S_2^{\Im}) / [(D_2^{\Re})^2 - (S_2^{\Re})^2]$ ,  $\phi_1 = [S_2, D_2] / [(D_2^{\Re})^2 - (S_2^{\Re})^2]$ , y  $D_2^{\Re} > |S_2^{\Re}|, D_2^{\Im} > |S_2^{\Im}|$ .
- En un caso 3D: Se consideran el resto de casos.

En la práctica, proponemos los siguientes dos índices para determinar la dimensionalidad de un periodo:

$$Index_1 = \arctan \frac{\phi_{12}}{\phi_0} \quad (8.1)$$

y

$$Index_2 = \frac{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}}{\sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2}} \quad (8.2)$$

dada su utilidad cuando comparamos diferentes partes del *phase tensor*. No es difícil demostrar que  $Index_1 \sim \beta_{\Phi}$  e  $Index_1 \sim \lambda$ , los mismos parámetros de dimensionalidad sugeridos por [Bibby et al. 2005]. El  $Index_1$  es el arcotangente del cociente que compara el comportamiento 3D frente al 1D o 2D y muestra si el tensor es 3D o no. Suponiendo un caso que no sea 3D,  $Index_2$  diferencia entre los casos 1D y 2D. La importancia de estos índices radica en su independencia con la distorsión galvánica y las rotaciones. Esto se ve claramente en el contexto de  $Cl_2$  en cuanto  $\phi_{12}$  y  $\phi_0$  son los objetos bivector y escalar del *phase tensor* y  $\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}$  y  $\sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2}$  son módulos, por tanto, independientes de las rotaciones en torno al eje  $e_3$ .

Existen ciertos casos que merecen especial atención, son los casos en que  $\det \mathbf{Z}^{\Re, \Im} \leq 0$  y con  $Index_1 \approx 0$ , es decir  $\phi_{12} \approx 0$ . Si además  $Index_2 = 1$ , nos indica que **al menos una** de las matrices del tensor de impedancias, parte real o imaginaria, es singular ( $\det \mathbf{Z}^{\Re, \Im} = 0$ ) y si el  $Index_2 > 1$  **una** de las matrices del tensor de impedancias, parte real o imaginaria, tiene determinante negativo  $\det \mathbf{Z}^{\Re, \Im} < 0$ . Esto se ve reflejado en la representación de curvas de

resistividad aparente y fases con la presencia de fases mayores de  $90^\circ$  o fuera de cuadrante. En el Apéndice B se demuestran estas afirmaciones. A partir de nuestra experiencia podemos decir que

$$\left. \begin{array}{l} Index_1 < 0.05 \\ Index_2 = 1 \end{array} \right\} \det \mathbf{Z}^{\Re} = 0 \text{ y/o } \det \mathbf{Z}^{\Im} = 0 \quad (8.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} Index_1 < 0.05 \\ Index_2 > 1 \end{array} \right\} \det \mathbf{Z}^{\Re} < 0 \text{ o } \det \mathbf{Z}^{\Im} < 0 \quad (8.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} Index_1 < 0.05 \\ Index_2 < 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \det \mathbf{Z}^{\Re} < 0 \text{ y } \det \mathbf{Z}^{\Im} < 0 \\ \text{o} \\ \det \mathbf{Z}^{\Re} > 0 \text{ y } \det \mathbf{Z}^{\Im} > 0 \end{array} \quad (8.5)$$

Aunque habitualmente, para los casos 1D y 2D solemos considerar que  $\det \mathbf{Z}^{\Re, \Im} > 0$  cumpliéndose

$$1) \text{ Caso 1D: } Index_1 \leq 0.05; \quad Index_2 \leq 0.05$$

$$2) \text{ Caso 2D: } Index_1 \leq 0.05; \quad 0.05 < Index_2 < 1$$

este criterio considera que no hay fases de  $90^\circ$  o fuera de cuadrante. No obstante, de la relación 8.5 se deduce que si  $Index_2 < 1$  no se puede asegurar que no vaya a haber fases de  $90^\circ$ ; hay que tener en cuenta que los datos reales pueden tener distorsión galvánica y eso implica que, aunque  $Index_1$  y  $Index_2$  sean independientes de la distorsión galvánica,  $\det \mathbf{Z}^{\Re, \Im}$  no lo es. El método para resolver la distorsión galvánica que se propone en el capítulo 10, permite dilucidar entre los casos  $\det \mathbf{Z}^{\Re, \Im} > 0$  y  $\det \mathbf{Z}^{\Re, \Im} < 0$ .

## 8.1. Nuevos índices que refinan la dimensionalidad del tensor de impedancias

En este apartado presentamos un conjunto de relaciones que nos permiten reconocer nuevos rangos dimensionales y, como ya veremos en la sección 10.4, utilizar tales relaciones como constricciones para determinar la distorsión galvánica. Para construirlas utilizaremos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\tan(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 \pm \tan \theta_2}{1 \mp \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

Si consideramos que  $|\theta_1| \approx |\tan(\theta_1)| \approx 0$  y/o  $|\theta_2| \approx |\tan(\theta_2)| \approx 0$ , entonces podemos decir que:

$$\tan(\theta_1) \pm \tan(\theta_2) \approx \frac{\tan \theta_1 \pm \tan \theta_2}{1 \mp \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad (8.6)$$

A partir de la construcción geométrica del *Phase Sensitive Strike*, de  $Index_1$  y de  $Index_2$  podemos proponer distintos pares de expresiones para  $\tan(\theta_1)$  y  $\tan(\theta_2)$ , para ello tendremos en mente las siguientes expresiones: parte real e imaginaria del tensor de impedancias regional (libre de distorsión galvánica), y la del *phase tensor* en  $Cl_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{\Re} &= \frac{1}{2} (S_1^{\Re} + D_1^{\Re} \mathbf{e}_1 + S_2^{\Re} \mathbf{e}_2 + D_2^{\Re} \mathbf{e}_{12}) \\ \mathbf{Z}^{\Im} &= \frac{1}{2} (S_1^{\Im} + D_1^{\Im} \mathbf{e}_1 + S_2^{\Im} \mathbf{e}_2 + D_2^{\Im} \mathbf{e}_{12}) \\ \Phi &= \phi_0 + \phi_1 \mathbf{e}_1 + \phi_2 \mathbf{e}_2 + \phi_{12} \mathbf{e}_{12} \end{aligned}$$

La **primera de las relaciones** tiene en cuenta el modo en que se define el *Phase Sensitive Strike* a partir de los coeficientes de cada uno de los elementos geométricos del *phase tensor*, concretamente del cociente entre el coeficiente  $\phi_2$  de  $\mathbf{e}_2$  y  $\phi_1$  de  $\mathbf{e}_1$ . Así consideramos  $\tan(\theta_1) = N^{\Re} = D_1^{\Re}/S_2^{\Re}$  donde  $S_2^{\Re}$  es el coeficiente de  $\mathbf{e}_2$  y  $D_1^{\Re}$  el de  $\mathbf{e}_1$  de la parte real del tensor de impedancias. Y de forma similar el índice  $\tan(\theta_2) = N^{\Im} = D_1^{\Im}/S_2^{\Im}$  donde  $S_2^{\Im}$  es el coeficiente de  $\mathbf{e}_2$  y  $D_1^{\Im}$  el de  $\mathbf{e}_1$ , respectivamente. Substituyendo en (8.6) obtenemos la primera de las relaciones

$$N^{\Re} \pm N^{\Im} \approx \left( \frac{N^{\Re} \pm N^{\Im}}{1 \mp N^{\Re} N^{\Im}} = \Lambda^{\pm} \right) \quad (8.7)$$

La identidad  $\Lambda^{\pm} = N^{\Re} \pm N^{\Im}$  se cumple cuando  $N^{\Re}$  y/o  $N^{\Im}$  son próximos a cero. Esto ocurre cuando el tensor de impedancias está libre de distorsión galvánica en los casos 1D y 2D en la dirección del *strike*.

Siguiendo esta misma forma de proceder obtendremos la **segunda de las relaciones**. Consideramos esta vez la forma de construir el  $Index_1$  a partir de los elementos del *phase tensor*, concretamente el cociente entre el coeficiente  $\phi_{12}$  de  $\mathbf{e}_{12}$  y  $\phi_0$  de 1. De este modo consideramos  $\tan(\theta_1) = Q^{\Re} = S_1^{\Re}/D_2^{\Re}$  donde  $D_2^{\Re}$  es el coeficiente de  $\mathbf{e}_{12}$  y  $S_1^{\Re}$  el coeficiente de 1, de la parte real del tensor de impedancias. Y de forma similar el índice

$\tan(\theta_2) = Q^{\Im} = S_1^{\Im}/D_2^{\Im}$  donde  $D_2^{\Im}$  es el coeficiente de  $e_{12}$  y  $S_1^{\Im}$  el de 1, para la parte imaginaria. Substituyendo en (8.6) obtenemos la segunda de las relaciones

$$Q^{\Re} \pm Q^{\Im} \approx \left( \frac{Q^{\Re} \pm Q^{\Im}}{1 \mp Q^{\Re}Q^{\Im}} = \Gamma^{\pm} \right) \quad (8.8)$$

La identidad  $\Gamma^{\pm} = Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  se cumple cuando  $Q^{\Re}$  y/o  $Q^{\Im}$  son próximos a cero. Esto ocurre cuando el tensor de impedancias está libre de distorsión galvánica en los casos 1D y 2D en cualquier dirección.

Finalmente obtenemos una **tercera relación** a partir de la construcción de  $Index_2$  como cociente del módulo de la parte vectorial de *phase tensor* entre el módulo constituido por las partes escalar y pseudoescalar:

$$Index_2 = \frac{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}}{\sqrt{\phi_0^2 + \phi_{12}^2}}$$

consideramos  $\tan(\theta_1) = P^{\Re} = \frac{\sqrt{(D_1^{\Re})^2 + (S_2^{\Re})^2}}{\sqrt{(D_2^{\Re})^2 + (S_1^{\Re})^2}}$  y  $\tan(\theta_2) = P^{\Im} = \frac{\sqrt{(D_1^{\Im})^2 + (S_2^{\Im})^2}}{\sqrt{(D_2^{\Im})^2 + (S_1^{\Im})^2}}$ . Substituyendo en (8.6) obtenemos la tercera de las relaciones

$$P^{\Re} \pm P^{\Im} \approx \left( \frac{P^{\Re} \pm P^{\Im}}{1 \mp P^{\Re}P^{\Im}} = \Omega^{\pm} \right) \quad (8.9)$$

La identidad  $\Omega^{\pm} = P^{\Re} \pm P^{\Im}$  se cumple cuando  $P^{\Re}$  y/o  $P^{\Im}$  son próximos a cero. Esto ocurre cuando el tensor de impedancias está libre de distorsión galvánica en los casos 1D y 2D en cualquier dirección.

Podemos ver qué implicaciones tienen estas aproximaciones, es decir, cuándo podemos decir que se cumplen:

	1D	2D	3D
$\Lambda^\pm = N^{\Re} \pm N^{\Im}$	Sí	Sí en la dirección del <i>strike</i>	Si $N^{\Re} \approx 0$ (esto es $ D_1^{\Re}  \ll  S_2^{\Re} $ ) o $N^{\Im} \approx 0$ (esto es $ D_1^{\Im}  \ll  S_2^{\Im} $ )
$\Gamma^\pm = Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$	Sí	Sí	Si $Q^{\Re} \approx 0$ (esto es $ S_1^{\Re}  \ll  D_2^{\Re} $ ) o $Q^{\Im} \approx 0$ (esto es $ S_1^{\Im}  \ll  D_2^{\Im} $ )
$\Omega^\pm = P^{\Re} \pm P^{\Im}$	Sí	Si $P^{\Re} \approx 0$ (esto es $ S_2^{\Re}  \ll  D_2^{\Re} $ ) o $P^{\Im} \approx 0$ (esto es $ S_2^{\Im}  \ll  D_2^{\Im} $ )	Si $P^{\Re} \approx 0$ (esto es $\sqrt{(D_1^{\Re})^2 + (S_2^{\Re})^2} \ll \sqrt{(D_2^{\Re})^2 + (S_1^{\Re})^2}$ ) o $P^{\Im} \approx 0$ (esto es $\sqrt{(D_1^{\Im})^2 + (S_2^{\Im})^2} \ll \sqrt{(D_2^{\Im})^2 + (S_1^{\Im})^2}$ )
	↓	↓	↓
	1D	2D con tendencia 1D como mínimo una de las componentes real o imaginaria	Múltiples casos 3D.

Tabla 8.1: Casos que cumplen las igualdades  $\Lambda^\pm = N^{\Re} \pm N^{\Im}$ ,  $\Gamma^\pm = Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  y  $\Omega^\pm = P^{\Re} \pm P^{\Im}$  según la dimensionalidad.

Estas relaciones dan más información sobre la dimensionalidad del tensor de impedancias magnetotelúrico regional (libre de distorsión galvánica). Concretamente en los casos 1D y 2D regionales se ha de cumplir la relación  $\Gamma^\pm = Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$ . Para mirar en qué medida se cumple la relación  $\Gamma^\pm = Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  definimos la diferencia relativa del siguiente modo:

$$\gamma_{max}^\pm = \frac{|\Gamma^\pm - (Q^{\Re} \pm Q^{\Im})|}{|\text{máx}\{\Gamma^\pm; (Q^{\Re} \pm Q^{\Im})\}|} \quad (8.10)$$

La experiencia nos indica que para los casos 1D y 2D  $\gamma_{max}^\pm \leq 0,0001$ . De hecho esto nos ha revelado el límite  $Index_1 \leq 0,05$  ya indicado en la sección 8.

Por otro lado, vemos que la relación  $\Omega^\pm = P^{\Re} \pm P^{\Im}$  se cumplirá para casos 2D si  $S_2^{\Re} \ll D_2^{\Re}$  y/o  $S_2^{\Im} \ll D_2^{\Im}$ . La experiencia nos indica que en estos casos  $Index_2 < 0,4$ .

Estos índices pueden servir, además, para corregir la distorsión galvánica, ya que las relaciones  $\Lambda^\pm \approx N^{\Re} \pm N^{\Im}$ ,  $\Gamma^\pm \approx Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  y  $\Omega^\pm \approx P^{\Re} \pm P^{\Im}$  se cumplen para los casos de la tabla 8.1 en ausencia de distorsión galvánica y dejan de cumplirse en presencia de distorsión galvánica. En este sentido, analizamos el grado de dependencia de las relaciones  $\Lambda^\pm \approx N^{\Re} \pm N^{\Im}$ ,  $\Gamma^\pm \approx Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  y  $\Omega^\pm \approx P^{\Re} \pm P^{\Im}$  con cada uno de los parámetros de distorsión galvánica. Para abordar esta cuestión tendremos en cuenta los tres casos ( $t \neq 0, e = 0, s = 0$ ), ( $t = 0, e \neq 0, s = 0$ ) y ( $t = 0, e = 0, s \neq 0$ ).

- ( $t \neq 0, e = 0, s = 0$ ) de (7.15) obtenemos:

$$\begin{aligned}
Z_{xx}^m &= N_{12} [Z_{xx}^r - tZ_{yx}^r] \\
Z_{yx}^m &= N_{12} [Z_{yx}^r + tZ_{xx}^r] \\
Z_{yy}^m &= N_{12} [Z_{yy}^r + tZ_{xy}^r] \\
Z_{xy}^m &= N_{12} [Z_{xy}^r - tZ_{yy}^r]
\end{aligned} \tag{8.11}$$

- ▷ Veamos qué expresión obtenemos de  $N^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  cuando el tensor está afectado del parámetro de distorsión  $t$ :

$$N^m = \frac{D_1^m}{S_2^m} = \frac{Z_{xx}^m - Z_{yy}^m}{Z_{xy}^m + Z_{yx}^m} = \frac{D_1^r - tS_2^r}{S_2^r + tD_1^r}$$

$N^m$  representa tanto a  $N^{\mathfrak{R}}$  como a  $N^{\mathfrak{S}}$  de medida (distorsionadas). Vemos que  $N^m \neq 0$  para el caso 2D y  $N^m \neq 0$  para los casos 1D (para el caso ideal 1D da indeterminación aunque los casos prácticos muestran que  $N^m \neq 0$ ). Por lo tanto, **la relación  $\Lambda^\pm \approx N^{\mathfrak{R}} \pm N^{\mathfrak{S}}$  dependerá de  $t$**  tanto para los casos 2D como 1D.

- ▷ Veamos qué expresión obtenemos de  $Q^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  cuando el tensor está afectado del parámetro de distorsión  $t$ :

$$Q^m = \frac{S_1^m}{D_2^m} = \frac{Z_{xx}^m + Z_{yy}^m}{Z_{xy}^m - Z_{yx}^m} = \frac{S_1^r + tD_2^r}{D_2^r - tS_1^r}$$

$Q^m$  representa tanto a  $Q^{\mathfrak{R}}$  como a  $Q^{\mathfrak{S}}$  de medida (distorsionadas). Resulta que para los casos generales 2D y 1D  $Q^m \neq 0$ . Entonces, **la relación  $\Gamma^\pm \approx Q^{\mathfrak{R}} \pm Q^{\mathfrak{S}}$  dependerá de  $t$**  tanto para los casos 2D como 1D.

- ▷ Finalmente, la relación  $\Omega^\pm \approx P^{\mathfrak{R}} \pm P^{\mathfrak{S}}$  se cumplirá si no depende del parámetro de distorsión galvánica  $t$ , para ello bastaría que, una vez aplicada la distorsión,  $P^{\mathfrak{R}} \approx 0$  o  $P^{\mathfrak{S}} \approx 0$ . La expresión que obtenemos de  $P^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  tras aplicar la distorsión galvánica  $t$  es:

$$\begin{aligned}
P^m &= \sqrt{\frac{(D_1^m)^2 + (S_2^m)^2}{(D_2^m)^2 + (S_1^m)^2}} = \sqrt{\frac{(Z_{xx}^m - Z_{yy}^m)^2 + (Z_{xy}^m + Z_{yx}^m)^2}{(Z_{xy}^m - Z_{yx}^m)^2 + (Z_{xx}^m + Z_{yy}^m)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(D_1^r - tS_2^r)^2 + (S_2^r + tD_1^r)^2}{(D_2^r - tS_1^r)^2 + (S_1^r + tD_2^r)^2}}
\end{aligned}$$

$P^m$  representa tanto a  $P^{\Re}$  como a  $P^{\Im}$  de medida (distorsionadas). Para un caso general 2D  $P^m \neq 0$  y  $P^m = 0$  para los casos 1D. Entonces, **la relación**  $\Omega^\pm \approx P^{\Re} \pm P^{\Im}$  **dependerá de  $t$**  en los casos 2D.

- ( $t = 0, e \neq 0, s = 0$ ):

$$\begin{aligned} Z_{xx}^m &= N_1 [Z_{xx}^r + eZ_{yx}^r] \\ Z_{yx}^m &= N_1 [Z_{yx}^r + eZ_{xx}^r] \\ Z_{yy}^m &= N_1 [Z_{yy}^r + eZ_{xy}^r] \\ Z_{xy}^m &= N_1 [Z_{xy}^r + eZ_{yy}^r] \end{aligned} \quad (8.12)$$

- ▷ Veamos qué expresión obtenemos de  $N^{\Re, \Im}$  tras aplicar la distorsión galvánica  $e$ :

$$N^m = \frac{D_1^m}{S_2^m} = \frac{Z_{xx}^m - Z_{yy}^m}{Z_{xy}^m + Z_{yx}^m} = \frac{D_1^r - eD_2^r}{S_2^r + eS_1^r}$$

Vemos que para los casos generales 2D y 1D  $N^m \neq 0$ . Por lo tanto, **la relación**  $\Lambda^\pm \approx N^{\Re} \pm N^{\Im}$  **dependerá de  $e$**  para los casos 2D y 1D.

- ▷  $Q^{\Re, \Im}$  tras aplicar la distorsión galvánica  $e$  resulta:

$$Q^m = \frac{S_1^m}{D_2^m} = \frac{Z_{xx}^m + Z_{yy}^m}{Z_{xy}^m - Z_{yx}^m} = \frac{S_1^r + eS_2^r}{D_2^r - eD_1^r}$$

Para un caso general 2D  $Q^m \neq 0$  y  $Q^m = 0$  para los casos 1D. Entonces, **la relación**  $\Gamma^\pm \approx Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  **dependerá de  $e$**  en los casos 2D.

- ▷ Veamos qué expresión obtenemos de  $P^{\Re, \Im}$  tras aplicar la distorsión galvánica  $e$ :

$$\begin{aligned} P^m &= \sqrt{\frac{(D_1^m)^2 + (S_2^m)^2}{(D_2^m)^2 + (S_1^m)^2}} = \sqrt{\frac{(Z_{xx}^m - Z_{yy}^m)^2 + (Z_{xy}^m + Z_{yx}^m)^2}{(Z_{xy}^m - Z_{yx}^m)^2 + (Z_{xx}^m + Z_{yy}^m)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(D_1^r - eD_2^r)^2 + (S_2^r + eS_1^r)^2}{(D_2^r - eS_1^r)^2 + (S_1^r + eS_2^r)^2}} \end{aligned}$$

Vemos que para los casos generales 2D y 1D  $P^m \neq 0$ . Entonces, **la relación**  $\Omega^\pm \approx P^{\Re} \pm P^{\Im}$  **dependerá de  $e$**  para los casos 2D y 1D.

- ( $t = 0, e = 0, s \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}
 Z_{xx}^m &= N_2 [(1 + s)Z_{xx}^r] \\
 Z_{yx}^m &= N_2 [(1 - s)Z_{yx}^r] \\
 Z_{yy}^m &= N_2 [(1 - s)Z_{yy}^r] \\
 Z_{xy}^m &= N_2 [(1 + s)Z_{xy}^r]
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

▷ La expresión de  $N^{\Re, \Im}$  tras aplicar la distorsión galvánica  $s$  resulta:

$$N^m = \frac{D_1^m}{S_2^m} = \frac{Z_{xx}^m - Z_{yy}^m}{Z_{xy}^m + Z_{yx}^m} = \frac{D_1^r + sS_1^r}{S_2^r + sD_2^r}$$

Para los casos generales 2D y 1D  $N^m = 0$ . Por lo tanto, **la relación**  $\Lambda^\pm \approx N^{\Re} \pm N^{\Im}$  **es independiente de**  $s$  para los casos generales 2D y 1D.

▷ La de  $Q^{\Re, \Im}$  tras aplicar la distorsión galvánica  $s$  es:

$$Q^m = \frac{S_1^m}{D_2^m} = \frac{Z_{xx}^m + Z_{yy}^m}{Z_{xy}^m - Z_{yx}^m} = \frac{S_1^r - sD_1^r}{D_2^r + sS_2^r}$$

Para los casos generales 2D y 1D  $Q^m = 0$ . Entonces, **la relación**  $\Gamma^\pm \approx Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  **es independiente de**  $s$  para los casos generales 2D y 1D.

▷ Y la de  $P^{\Re, \Im}$  tras aplicar la distorsión galvánica  $s$  queda:

$$\begin{aligned}
 P^m &= \sqrt{\frac{(D_1^m)^2 + (S_2^m)^2}{(D_2^m)^2 + (S_1^m)^2}} = \sqrt{\frac{(Z_{xx}^m - Z_{yy}^m)^2 + (Z_{xy}^m + Z_{yx}^m)^2}{(Z_{xy}^m - Z_{yx}^m)^2 + (Z_{xx}^m + Z_{yy}^m)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(D_1^r + sS_1^r)^2 + (S_2^r + sD_2^r)^2}{(D_2^r + sS_2^r)^2 + (S_1^r + sD_1^r)^2}}
 \end{aligned}$$

Para los casos generales 2D y 1D  $P^m \neq 0$ . Entonces, **la relación**  $\Omega^\pm \approx P^{\Re} \pm P^{\Im}$  **dependerá de**  $s$ .

► Concluimos que:

- Si  $\Lambda^\pm \approx N^{\Re} \pm N^{\Im}$  se puede afirmar que no habrá distorsión galvánica  $t$  ni  $e$  para los casos 1D y 2D, en la dirección del *strike*.

- ii. Si  $\Gamma^\pm \approx Q^{\mathfrak{R}} \pm Q^{\mathfrak{S}}$  se puede afirmar que no habrá distorsión galvánica  $t$  para los casos 1D y 2D, en cualquier dirección.
- iii. Si  $\Omega^\pm \approx P^{\mathfrak{R}} \pm P^{\mathfrak{S}}$  se puede afirmar que no habrá distorsión galvánica  $e$  ni  $s$  para los casos 1D y 2D, en cualquier dirección.

Podemos ver que para la determinación de la distorsión galvánica, como veremos en la sección 10.4, basta con encontrar unos parámetros de distorsión  $t$ ,  $e$  y  $s$  que, al corregirlos en tensor de impedancias, resulte un tensor en el que se cumplan las relaciones  $\Omega^\pm \approx P^{\mathfrak{R}} \pm P^{\mathfrak{S}}$  y  $\Gamma^\pm \approx Q^{\mathfrak{R}} \pm Q^{\mathfrak{S}}$ , ya que con tan sólo estas relaciones cubrimos la dependencia necesaria con  $t$ ,  $e$  y  $s$ . Vemos, además, que las dos relaciones últimas son invariantes con la rotación. Las implicaciones de este resultado son importantes. Este método nos va a permitir hallar la distorsión galvánica independientemente de la dirección del *strike*, es decir, directamente en la dirección de medida. Otro aspecto importante es que de la tabla 8.1 se deduce que se puede determinar la distorsión galvánica de ciertos casos 3D cuya regional cumpliera las relaciones  $\Omega^\pm \approx P^{\mathfrak{R}} \pm P^{\mathfrak{S}}$  y  $\Gamma^\pm \approx Q^{\mathfrak{R}} \pm Q^{\mathfrak{S}}$ .

## Capítulo 9

# Función Densidad de Probabilidad de los invariantes

La mayoría de los invariantes tienen distribuciones estadísticas con varianza infinita [Chave 2014]. Esto sucede principalmente porque estos invariantes son divisiones de combinaciones de componentes del tensor de impedancias. Las funciones distribución de probabilidad de los invariantes de  $J_5$  a  $J_8$ , así como el  $Index_1$ ,  $Index_2$  y el *Phase Sensitive Strike*, se han analizado mediante la simulación a partir de la generación de valores aleatorios con una distribución Gaussiana para cada una de las componentes, reales e imaginarias, del tensor de impedancias (se obvia el estudio de los invariantes de  $J_1$  a  $J_4$  ya que, por construcción, su función distribución de probabilidad es siempre Gaussiana). Mostraremos la simulación con los mismos datos sintéticos utilizados por Chave (2014), publicados previamente en el artículo de Weaver (2000). Ensayamos distintas desviaciones estándar para ver su influencia: 5 %, 15 % y 35 %. Las simulaciones muestran que los invariantes de  $J_5$  a  $J_7$  y el  $Index_2$  no pueden considerarse Gaussianos de forma general. En cambio  $J_8$  y  $Index_1$  sí que presentan distribuciones Gaussianas para valores razonables de desviaciones estándar inferiores a un 35 % y el *Phase Sensitive Strike* inferiores al 15 %.

Chave (2014) establece que de los invariantes sólo  $J_1$  a  $J_4$  presentan realmente una distribución Gaussiana. Aún estando de acuerdo con el desarrollo de [Chave 2014], creo que invalidar cualquier invariante por no presentar una distribución Gaussiana es una medida demasiado restrictiva. Las simulaciones realizadas muestran que para valores inferiores a 35 % de desviación estándar ciertos índices pueden considerarse Gaussianos, entre ellos el  $Index_1$  y  $J_8$ . Igualmente las resistividades aparentes y fases, que también son cocientes de los coeficientes del tensor de impedancias y cuyas funciones densidad de probabilidad muestran que no son generalmente Gaussianas. A menos que se acepte que no se asumen errores en los datos mayores del 35 %, debería invalidarse el uso de las resistividades aparentes y fases por no tener distribuciones Gaussianas. Falta decir que el *bandwidth* asumido por Chave (2014) pa-

ra la simulación del *Phase Sensitive Skew* del site 3 a 1000s es de  $h = 0.1004$ . La desviación estándar equivalente a este *bandwidth* es de  $\sigma = 0.5976$  que representa para la componente con mayor valor absoluto,  $Z_{xy}^{\mathfrak{S}}$ , un error relativo de orden aproximado 134723 %, esto es:

$$h = \left( \frac{4\sigma^5}{3n} \right)^{1/5} \approx 1.06\sigma n^{-1/5}$$

dado que el número de sucesos aleatorios es  $n = 10000$  y el bandwidth  $h = 0.1004$  podemos encontrar que la desviación estándar resulta

$$\sigma \approx \frac{0.1004 \cdot (10000)^{1/5}}{1.06} = 0.59762375$$

de este modo el error relativo para la componente con mayor valor absoluto es  $Z_{xy}^{\mathfrak{S}} = 4.43593e^{-4}$ , entonces el error relativo  $\epsilon_{xy}^{\mathfrak{S}} = \sigma/Z_{xy}^{\mathfrak{S}} = 1347.2344 \approx 134723$  %. Obviamente un error desorbitado, lo que a mi parecer invalida el ejemplo dado en [Chave 2014].

La figura 9.1 muestra la función densidad de probabilidad para el *Phase Sensitive Strike* de las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D) [Weaver et al. 2000]. Estos datos, en el artículo se habían rotado  $-40^\circ$ , con lo que el *Phase Sensitive Strike* correspondiente al Site 2 a 100s, que es 2D, es de  $40^\circ$ . En la figura 9.1 se ve con detalle que para ruidos del 5 % y el 15 % la función densidad de probabilidad del *Phase Sensitive Strike* es prácticamente Gaussiana. Lo más curioso es que el ajuste Gaussiano a los datos de simulación del *Phase Sensitive Strike* centra la Gaussiana en  $40^\circ$  para valores inferiores al 15 %. Todo esto sugiere que el Método Perturbativo presentado en la sección 10.2 es muy acertado para hallar el *Strike*, ya que hace uso de simulaciones colectivas, en las que intervienen diferentes periodos para determinar la distribución Gaussiana de un *Phase Sensitive Strike* colectivo que relacionamos con el *strike* del tensor de impedancias.

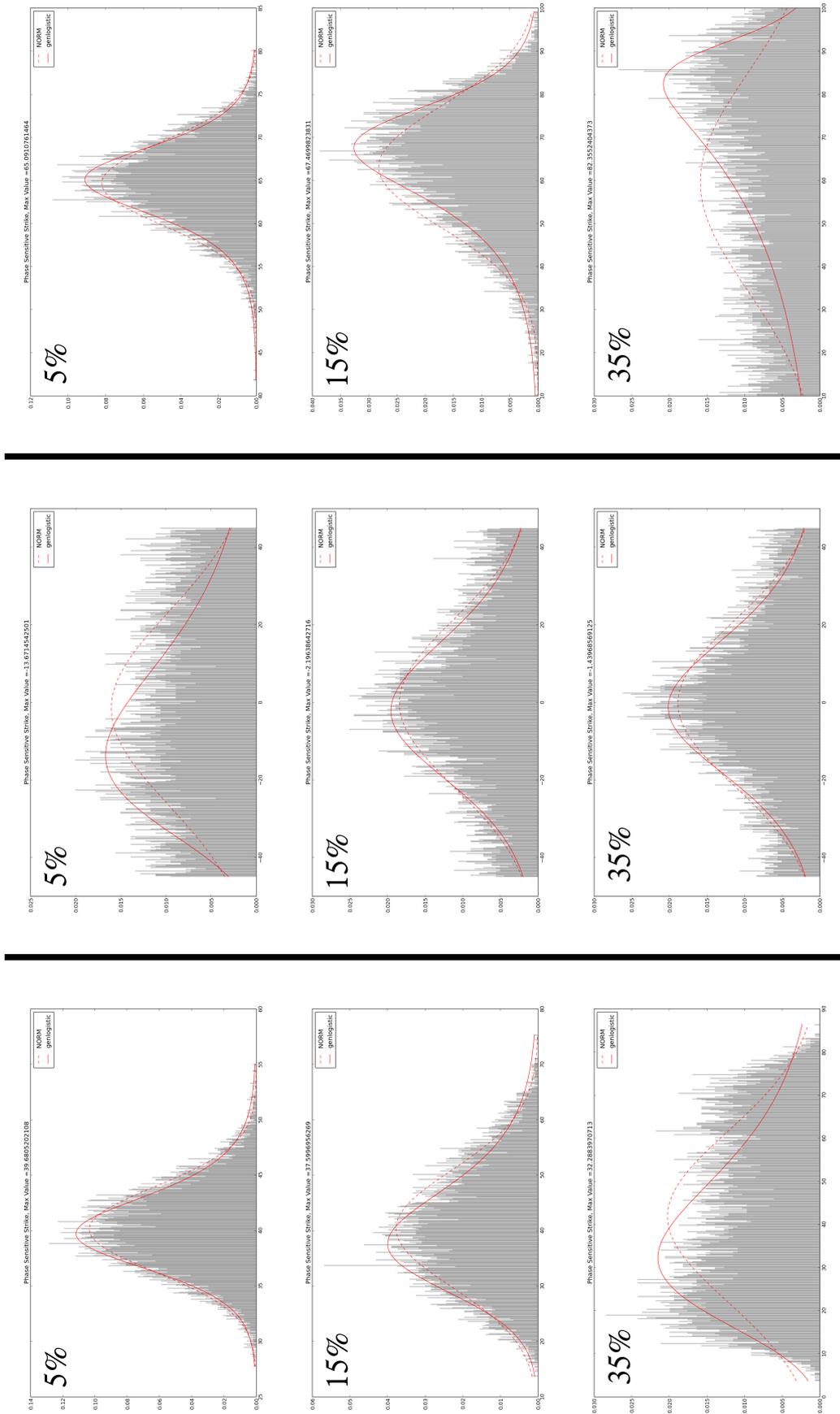


Figura 9.1: Función densidad de probabilidad del *Phase Sensitive Strike* para las estaciones Site 3 a 1000s (1D) y Site 2 a 100s (2D), Site 4 a 1s (3D) (columnas de izquierda a derecha) para distintos valores de desviación estándar, 5 %, 15 % y 35 % (filas de arriba abajo). La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.

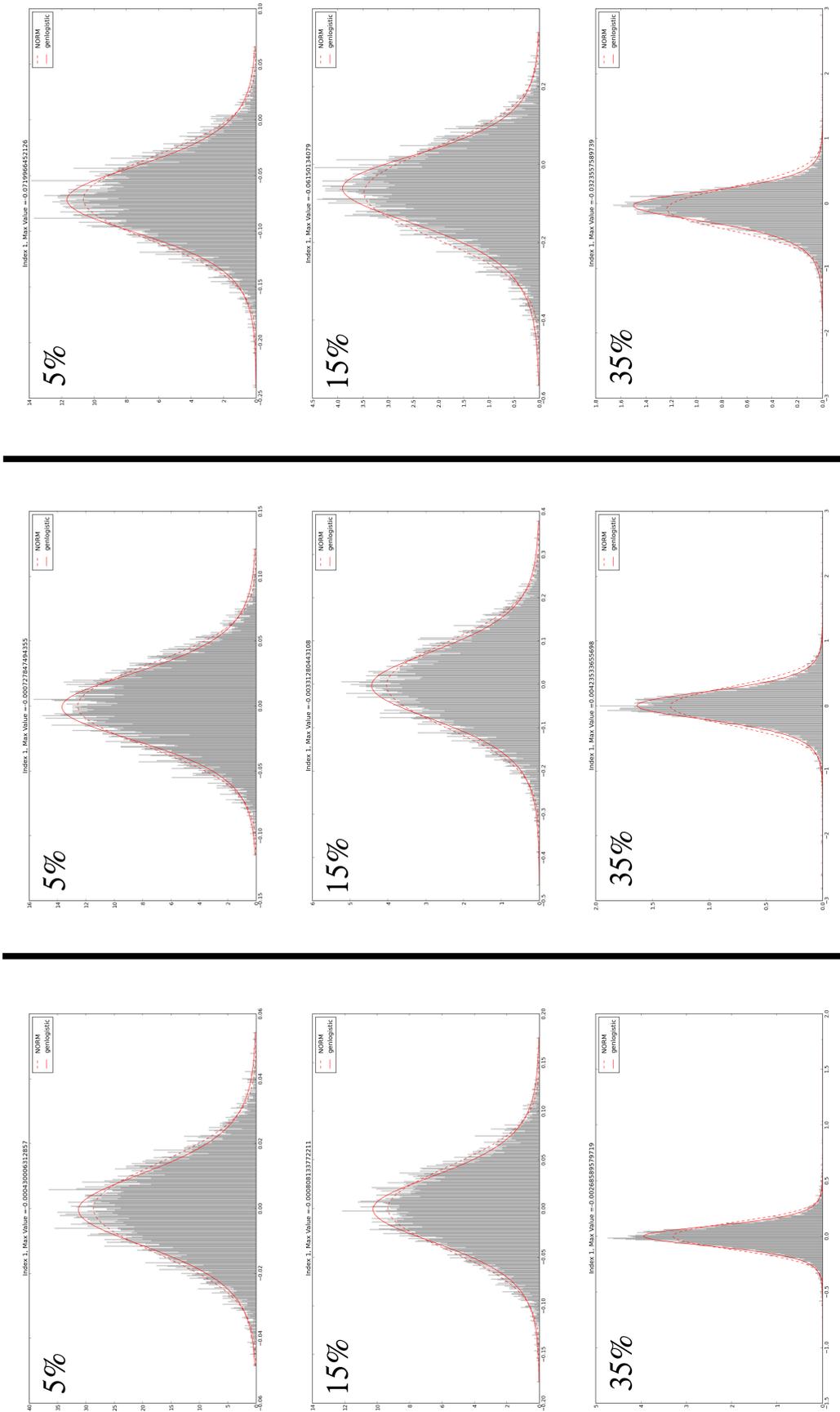


Figura 9.2: Función densidad de probabilidad de  $Index_1$  para las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D) (columnas de izquierda a derecha) para distintos valores de desviación estándar, 5%, 15% y 35% (filas de arriba abajo). La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.

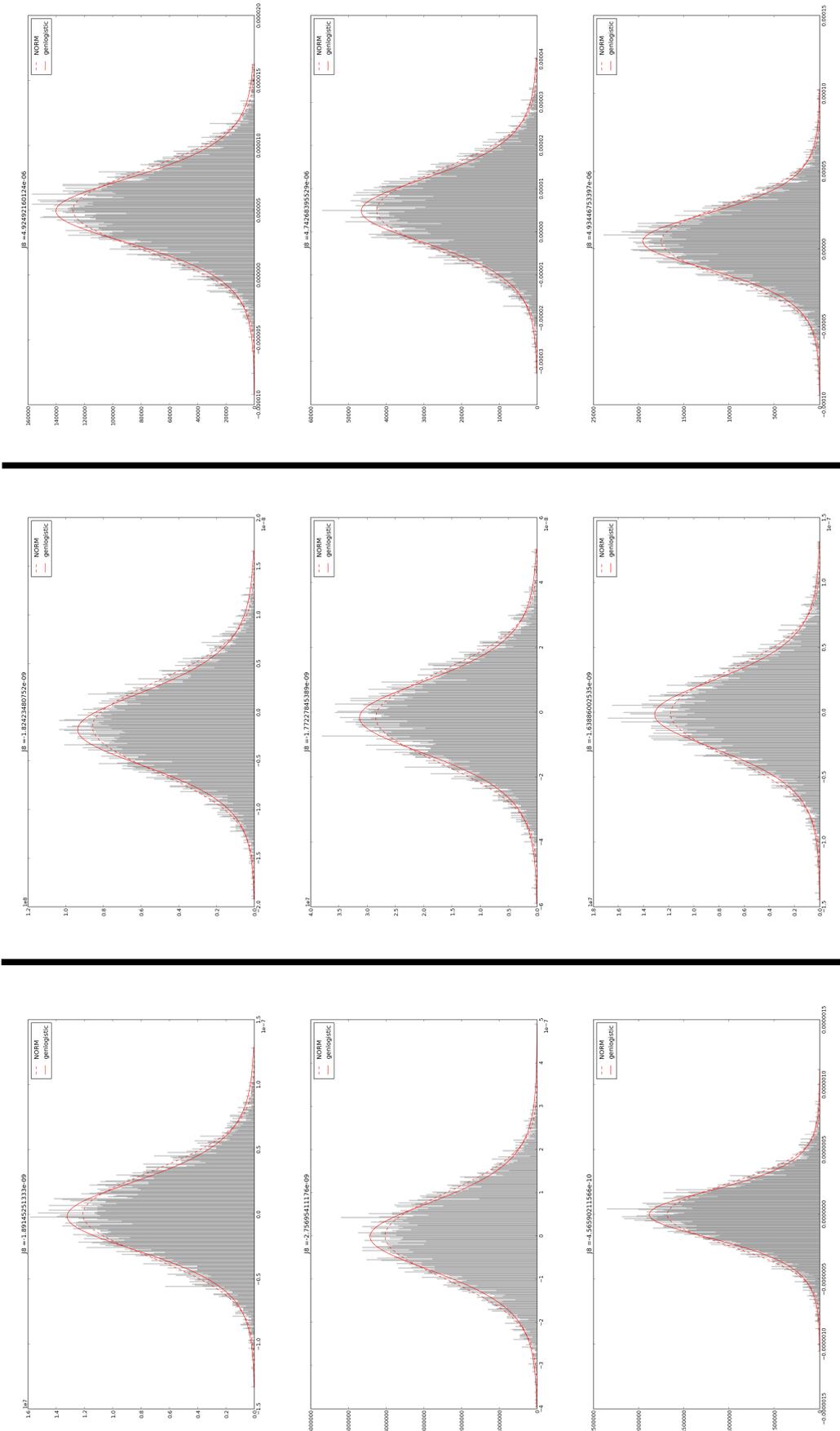


Figura 9.3: Función densidad de probabilidad de  $J_8$  para las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D) (columnas de izquierda a derecha) para distintos valores de desviación estándar, 5 %, 15 % y 35 % (filas de arriba abajo). La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.

En conclusión el  $Index_1$  y  $J8$  pueden asumirse Gaussianos para errores en los datos inferiores al 35 %. Además, para casos 2D el *Phase Sensitive Strike* también tiene un comportamiento Gaussiano para un ruido inferior al 15 %.

## Capítulo 10

# Método estocástico heurístico para la determinación de la distorsión galvánica

Hoy en día se aplican de forma rutinaria algoritmos de inversión magnetotelúricos 3D gracias a los códigos de dominio público (ej. Siripunvaraporn et al. 2005; Egbert y Kelbert 2012). Debido a la distorsión galvánica el tensor de impedancias medido puede ser muy distinto al regional (libre de distorsión), causando resultados en las inversiones que provocan interpretaciones erróneas si no se corrige la distorsión galvánica. El conjunto de ecuaciones (7.15) que relaciona el tensor de impedancias medido, el tensor de impedancias regional y la matriz de distorsión galvánica es indeterminado, no pudiéndose recuperar el tensor de impedancias regional. En los casos regionales 2D (o 1D), existe un número de descomposiciones de la matriz de distorsión galvánica y el tensor de impedancias medido que recuperan parcialmente el tensor de impedancias regional (Larsen 1975; Jones 1988; Bahr 1988, 1991; Groom y Bailey 1989, 1991; Chave y Smith 1994; Smith 1995; McNeice y Jones 2001). En los casos 3D, aunque se ha propuesto algunas aproximaciones (Ledo, Queral y Pous 1998; Utada y Munekane 2000; Garcia y Jones 2002) su aplicabilidad se reduce a modelos 3D específicos. En casos donde el comportamiento de los datos es similar para un conjunto de sondeos vecinos puede asumirse que corresponde al comportamiento regional, libre de distorsión galvánica (Muñoz et al. 2008). Sin embargo no es un caso habitual. Avdeeva et al. (2015) realizan una inversión para el caso 3D que incluye la matriz de distorsión con la restricción de que la distorsión sea mínima. La generalización del tensor de impedancias y de la matriz de distorsión galvánica en el contexto de las álgebras de Clifford (ej. Lounesto, 2001) nos permite definir un método estocástico heurístico con restricciones que recupera el tensor de impedancias regional 3D, de forma individual para cada sondeo. Las restricciones se imponen a periodos cortos del tensor de impedancias, el cual se supone que tiende a un comportamiento 2D (1D).

Empezamos escribiendo a partir de (7.15) los valores del tensor de impedancias regional

$Z^r$  en función del tensor de impedancias medido  $Z^m$  y los parámetros  $(t, e, s)$ . Para cada periodo tenemos:

$$\begin{aligned} Z_{xx}^r &= \frac{(1+te)Z_{xx}^m + (t-e)Z_{yx}^m}{N_1N_2N_{12}(1+t^2)(1-e^2)(1+s)}; & Z_{xy}^r &= \frac{(1+te)Z_{xy}^m + (t-e)Z_{yy}^m}{N_1N_2N_{12}(1+t^2)(1-e^2)(1+s)} \\ Z_{yx}^r &= \frac{(1-te)Z_{yx}^m - (t+e)Z_{xx}^m}{N_1N_2N_{12}(1+t^2)(1-e^2)(1-s)}; & Z_{yy}^r &= \frac{(1-te)Z_{yy}^m - (t+e)Z_{xy}^m}{N_1N_2N_{12}(1+t^2)(1-e^2)(1-s)} \end{aligned} \quad (10.1)$$

de las singularidades  $(1-e^2)$ ,  $(1-s)$  y  $(1+s)$  obtenemos los valores no deseados para  $e$  y  $s$ . Estos son  $e = \tan \theta_e \neq \pm 1$ , ej.  $\theta_e \neq \pm \pi/4$  y  $s = \tan \theta_s \neq \pm 1$ , ej.  $\theta_s \neq \pm \pi/4$ .

El Método Estocástico Heurístico que se propone sigue una serie de pasos en la determinación de los valores del triplete  $(t, e, s)$ :

**Paso 1.** El primer paso pretende encontrar una “pequeña” muestra representativa de resultados que cumpla una serie de constricciones consideradas, de las cuales hablaremos más adelante. Obtenemos un *primer conjunto de resultados* mediante una *simple muestra aleatoria*, éste es un muestreo probabilístico. Por lo tanto, el método empieza declarando valores aleatorios<sup>1</sup> para el triplete de parámetros  $(t, e, s)$ , que se lleva acabo en un rango de valores  $(-89^\circ, 89^\circ)$  para cada uno de los parámetros  $\theta_t, \theta_e$  y  $\theta_s$ , o de forma equivalente  $(-57.2, 57.2)$  para  $t, e$  y  $s$ . Para cada triplete  $(t, e, s)$  se obtiene el valor del tensor de impedancias regional  $Z^r$  mediante el sistema de ecuaciones (10.1). Entonces comprobamos si el tensor de impedancias regional, para todos los periodos menores que un periodo prefijado  $T_0$ , máximo periodo con comportamiento 2D (1D), cumple las constricciones consideradas. Si el tensor de impedancias obtenido de los parámetros  $(t, e, s)$  no satisface las constricciones, se descarta para definir nuevamente un nuevo conjunto de valores aleatorios de  $(t, e, s)$ , de lo contrario, se reservan para formar parte un conjunto llamado *primer conjunto de resultados*.

Cuando el número de resultados en el *primer conjunto de resultados* alcanza el valor deseado para representar una primera aproximación de resultados, continuamos con el **paso 2**. En los ejemplos de abajo, esperamos como mínimo 4 de los primeros 60000 o 1 de los primeros 300000 obtenidos aleatoriamente y que cumplan las constricciones, de lo contrario la búsqueda continúa hasta que se obtiene 1 triplete que cumpla las constricciones<sup>2</sup>. De este

<sup>1</sup>Utilizamos la función de *python rand()* que pertenece al Scientific Computing Tools for Python (SciPy) package *Numpy*, la cual es un generador pseudo-aleatorio basado en el algoritmo de Mersenne Twister (Matsumoto y Nishimura 1998). Produce *floats* de 53-bit de precisión con periodicidad de  $1/2^{19937}$ .

<sup>2</sup>Abusamos del lenguaje al decir que un triplete debe cumplir las constricciones, en realidad nos referimos a que el tensor de impedancias regional, obtenido a partir de éste triplete en cuestión en la ecuación (10.1), es

modo se asegura la búsqueda sobre todo el espacio  $(t, e, s)$ .

**Paso 2.** El segundo paso consiste en encontrar aleatoriamente nuevos resultados en torno a todos los elementos del *primer conjunto de resultados* que cumplan las constricciones. Éste es un tipo de muestreo llamado *muestreo Snowball*, es un tipo de muestreo no probabilístico. De este modo, para cada triplete obtenemos aleatoriamente  $\Delta\theta_t, \Delta\theta_e, \Delta\theta_s$ , en el intervalo  $(-10^\circ, 10^\circ)$ , que añadido al triplete obtenemos uno nuevo  $(t', e', s') = (t + \tan(\Delta\theta_t), e + \tan(\Delta\theta_e), s + \tan(\Delta\theta_s))$ . Si los parámetros  $t', e', s'$  no satisfacen las constricciones, se descartan, de lo contrario se guardan en un conjunto que llamamos *conjunto de resultados dispersados* en el que está contenido el *primer conjunto de resultados*. Se repite este procedimiento hasta que obtenemos el número de resultados deseado en el *conjunto de resultados dispersados* (normalmente esperamos 600 resultados como mínimo). Éste es un proceso iterativo en el que se espera que el número de resultados en el *conjunto de resultados dispersados* aumente con cada iteración. Pueden aparecer múltiples subconjuntos del *conjunto de resultados dispersados*. Llamaremos a cada subconjunto *nube de resultados*. Para distinguir cada uno de ellos hemos desarrollado un algoritmo que reconoce las distintas *nubes de resultados* dentro de una esfera de un radio acordado (en los ejemplos utilizamos un radio de  $55^\circ$  para determinar los parámetros  $t$  y  $e$ , y un radio de  $5^\circ$  para  $s$ ). Entonces, dos *nubes de resultados* se consideran distintas si no existen intersecciones entre las esferas correspondientes.

**Paso 3.** En el tercer paso, se utilizan todos los resultados en cada *nube de resultados* para obtener un *promedio aritmético ponderado* distinto para cada *nube de resultados*. El *promedio aritmético ponderado* de  $(\theta_t, \theta_e, \theta_s)$  se obtiene del siguiente modo:

$$(\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_e, \bar{\theta}_s) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \theta_{ti}}{\sum_{i=1}^n \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \theta_{ei}}{\sum_{i=1}^n \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \theta_{si}}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right) \quad (10.2)$$

las desviaciones estándar son:

$$(\sigma(\theta_t), \sigma(\theta_e), \sigma(\theta_s)) = \left( \sqrt{\langle \theta_t^2 \rangle - \bar{\theta}_t^2}, \sqrt{\langle \theta_e^2 \rangle - \bar{\theta}_e^2}, \sqrt{\langle \theta_s^2 \rangle - \bar{\theta}_s^2} \right) \quad (10.3)$$

con valor cuadrático esperado:

---

el que debe cumplir las constricciones.

$$(\langle \theta_t^2 \rangle, \langle \theta_e^2 \rangle, \langle \theta_s^2 \rangle) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \theta_{t_i}^2}{\sum_{i=1}^n \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \theta_{e_i}^2}{\sum_{i=1}^n \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \theta_{s_i}^2}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right)$$

donde  $n$  es el número de resultados en la *nube de resultados*,  $\omega_i$  es  $1/(\delta_i)$  y  $\delta_i$  es el error numérico normalizado entre el tensor de impedancias medido y el calculado en (7.15) para el resultado  $i$ -ésimo en la *nube de resultados*:

$$\delta_i = \sqrt{\sum_{k=1}^8 (\mathbf{Z}_i^m - \mathbf{Z}^m)_k^2} \quad (10.4)$$

donde  $\mathbf{Z}_i^m$  es el tensor de impedancias calculado en (7.15) a partir de  $\mathbf{Z}_i^r$  y su triplete  $(t_i, e_i, s_i)$  obtenido en la búsqueda aleatoria, y  $\mathbf{Z}^m$  es el tensor de impedancias medido.

Finalmente, los resultados se escriben como  $(\bar{\theta}_t \pm \sigma(\theta_t), \bar{\theta}_e \pm \sigma(\theta_e), \bar{\theta}_s \pm \sigma(\theta_s))_i$  for  $i = 1, \dots, N$  con  $N$  el número de *nube de resultados*.

## 10.1. Estimación del error del Tensor de Impedancias Recuperado

Una vez se obtienen los parámetros de distorsión galvánica  $(\bar{\theta}_t \pm \sigma(\theta_t), \bar{\theta}_e \pm \sigma(\theta_e), \bar{\theta}_s \pm \sigma(\theta_s))$ , se calcula el tensor de impedancias regional  $\mathbf{Z}^r$  a partir de (10.1). Para calcular una estimación de la varianza del tensor de impedancias recuperado asumimos que  $\sigma(\theta_t)$ ,  $\sigma(\theta_e)$  y  $\sigma(\theta_s)$  son incertidumbres que representan la relación de dispersión. Las constricciones que se utilizan reducen considerablemente estas incertidumbres, resultando despreciables en relación a las varianzas del tensor de impedancias. Por lo tanto, las varianzas tanto para la parte real como para la imaginaria de las componentes del tensor de impedancias regional son:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(Z_{xx}^r) &= \left| \frac{\partial Z_{xx}^r}{\partial Z_{xx}^m} \right|^2 \sigma^2(Z_{xx}^m) + \left| \frac{\partial Z_{xx}^r}{\partial Z_{yx}^m} \right|^2 \sigma^2(Z_{yx}^m) \\
\sigma^2(Z_{xy}^r) &= \left| \frac{\partial Z_{xy}^r}{\partial Z_{xy}^m} \right|^2 \sigma^2(Z_{xy}^m) + \left| \frac{\partial Z_{xy}^r}{\partial Z_{yy}^m} \right|^2 \sigma^2(Z_{yy}^m) \\
\sigma^2(Z_{yx}^r) &= \left| \frac{\partial Z_{yx}^r}{\partial Z_{yx}^m} \right|^2 \sigma^2(Z_{yx}^m) + \left| \frac{\partial Z_{yx}^r}{\partial Z_{xx}^m} \right|^2 \sigma^2(Z_{xx}^m) \\
\sigma^2(Z_{yy}^r) &= \left| \frac{\partial Z_{yy}^r}{\partial Z_{yy}^m} \right|^2 \sigma^2(Z_{yy}^m) + \left| \frac{\partial Z_{yy}^r}{\partial Z_{xy}^m} \right|^2 \sigma^2(Z_{xy}^m)
\end{aligned}$$

donde las derivadas se deducen fácilmente de (10.1). En estas relaciones,  $\sigma^2(Z_{ij}^m)$  representa tanto la varianza de la parte real como la imaginaria de la componente  $Z_{ij}^m$ . En la propagación de errores normalmente las componentes diagonales del tensor de impedancias son los más afectados.

## 10.2. Determinación del Strike para el caso 2D (Método Perturbativo)

Para algunas de las constricciones que utilizamos es preciso determinar el *strike* 2D a periodos cortos (menores que  $T_0$ ). La presencia de ruido en los datos dificulta la obtención de éste. Proponemos un *Método Perturbativo* para encontrar una estimación del *Phase Sensitive Strike* (que coincide con el *strike* en los casos 2D) con presencia de ruido y distorsión galvánica. Recuérdese que el *Phase Sensitive Strike* es independiente de la distorsión galvánica. El método consiste en asumir que el ruido puede aproximarse a una distribución Gaussiana<sup>3</sup>, y esperamos recuperar la dirección del *strike* perturbando los datos para cada periodo mediante una distribución aleatoria Gaussiana, con una desviación estándar prefijada, para cada una de las componentes del tensor de impedancias, reales e imaginarias, por separado. En cada perturbación  $i$  se calcula el promedio de los *Phase Sensitive Strike*  $\theta_k$  de cada uno de los periodos considerados, esto es  $\Theta_i = \sum_{k=1}^{N_p} \theta_k / N_p$  donde  $k = 1, \dots, N_p$  y  $N_p$  el número de periodos. Se aplica reiteradamente la perturbación hasta que en una de ellas todos los *Phase Sensitive Strike*, para todos los periodos considerados, caen dentro de un intervalo con centro  $\Theta_i$  y de ancho prefijado  $\Delta\Theta$  y además (opcionalmente) con  $Indice_1 < 0.1$  (Criterio

<sup>3</sup>Aunque es cierto que las funciones de densidad de probabilidad asociadas a ciertos invariantes (entre las cuales el *Phase Sensitive Strike* de Bahr es una) dejan de ser Gaussianas [Chave 2014]. También es cierto que para porcentajes considerablemente elevados de error, incluso un 15 %, podemos considerar la aproximación gaussiana al *Phase Sensitive Strike* como una buena aproximación. En la sección 9 se ha discutido este punto.

empírico para asegurar que el tensor perturbado sea 2D). Este proceso se repite hasta que se obtiene un número elevado de  $\Theta_i$ , que puede considerarse una variable aleatoria. La suma de varias variables aleatorias sigue aproximadamente una distribución Gaussiana, por lo tanto es necesario obtener diversas  $\Theta_i$ , donde  $i = 1, \dots, N$  y  $N$  el número de ángulos *Phase Sensitive Strike* obtenidos aleatoriamente (en los ejemplos que se verán más tarde consideramos  $N = 1000$ ). Finalmente

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \quad (10.5)$$

representa el valor esperado de la dirección del *strike* con desviación estándar  $\sigma(\Theta)$

$$\sigma(\Theta) = \sqrt{\langle \Theta^2 \rangle - \bar{\Theta}^2} \quad (10.6)$$

con valor esperado cuadrático

$$\langle \Theta^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i^2 \quad (10.7)$$

La desviación estándar  $\sigma(\Theta)$  indica la bondad del valor esperado  $\bar{\Theta}$ . El ángulo del *Phase Sensitive Strike* estimado es  $\bar{\Theta} \pm \sigma(\Theta)$ . En casos con mucho ruido, si no todas las  $\theta_k$  caen dentro de  $\Theta_i \pm \Delta\Theta$  y con  $Indice_1 < 0.1$  en un tiempo razonable de computación, es recomendable incrementar  $\Delta\Theta$ . En este contexto, se asume que el ruido modelizado con una distribución Gaussiana está “gobernada” por la dirección del *Phase Sensitive Strike* aproximada a una distribución Gaussiana con valor esperado  $\bar{\Theta}$  y desviación estándar  $\sigma(\Theta)$ . De acuerdo con esto, calculamos el valor esperado de todas las componentes del tensor de impedancias, partes real e imaginaria por separado, para todos los periodos cortos asociados con cada  $\Theta_i$ . Obtenemos en esta operación un *pseudo tensor de impedancias*, que indicamos como  $\tilde{Z}^p$ . Calculamos la componente  $xy$  de  $\tilde{Z}^p$  para cada uno de los periodos cortos con  $T < T_0$ :

$$\tilde{Z}_{xy}^p(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_{xy}(T))_i \quad (10.8)$$

con desviación estándar

$$\sigma(Z_{xy}(T)) = \sqrt{\langle Z_{xy}(T)^2 \rangle - \tilde{Z}_{xy}^p(T)^2} \quad (10.9)$$

con valor esperado cuadrático

$$\langle Z_{xy}(T)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_{xy}(T)_i^2 \quad (10.10)$$

La desviación estándar  $\sigma(Z_{xy}(T))$  indica la bondad del valor esperado  $\tilde{Z}_{xy}^p(T)$ . La expresión es similar para el resto de componentes del tensor.

Con estas asunciones podemos proceder a la búsqueda de los parámetros de distorsión galvánica con el método estocástico heurístico mediante el tensor  $\tilde{Z}^p$ . En nuestro caso, utilizamos este método para obtener la dirección del *Phase Sensitive Strike* para unos pocos periodos, los menores a  $T_0$ , y por lo tanto  $\tilde{Z}^p$  es  $\tilde{Z}^m$  exceptuando los periodos menores a  $T_0$ . En cualquier caso, este método podría utilizarse también para hallar el *strike* de un subsuelo regional 2D.

### 10.3. Método basado en la independencia de determinación de *twist* ( $t$ ) y *shear* ( $e$ ) frente a *anisotropy* ( $s$ ) (MID-tes)

#### 10.3.1. Determinación de los parámetros $t$ y $e$

Dado que el sistema (7.15) es indeterminado, nuestra aproximación consiste en explorar de forma aleatoria el espacio de tripletes  $(t, e, s)$ . Para cada triplete se calcula el tensor de impedancias regional,  $Z^r$ , a partir de (10.1), únicamente para aquellos periodos considerados (menores a  $T_0$ ). Entonces, se impone una serie de constricciones relacionadas con la asunción de que el tensor de impedancias regional debe tender a 2D (1D) a periodos cortos. Estas constricciones son: (**Constricción 1**) Las resistividades aparentes diagonales asociadas con el tensor regional a periodos cortos deben ser menores que cierto valor prefijado  $\rho_0$ .

Esto implica dos condiciones en forma de inequación sobre las resistividades aparentes regionales asociadas al tensor,  $\rho_0 > \rho_{a,xx}^r$  y  $\rho_0 > \rho_{a,yy}^r$  ( $\rho_a^r$  es la resistividad aparente del tensor de impedancias regional); (**Constricción 2**)  $Re(Z_{xy}^r) > 0$ ,  $Im(Z_{xy}^r) > 0$  y  $Re(Z_{yx}^r) < 0$ ,  $Im(Z_{yx}^r) < 0$  ( $Re$  significa parte real y  $Im$  la imaginaria) para periodos cortos (caso 2D, Lilley 2012). Por lo tanto, esta segunda constricción representa cuatro condiciones en forma de inequación. Es necesario que estas constricciones se cumplan para aquellos periodos menores que un valor prefijado  $T_0$  (máximo periodo para el cual  $Z^r$  tiende a 2D). Así, con la **constricción 1** recuperamos el valor absoluto de las fases pero no el cuadrante. La **constricción 2** determina el cuadrante de las fases<sup>4</sup>. Con estas dos constricciones, y considerando los periodos inferiores a  $T_0$  y en la dirección del *Phase Sensitive Strike*, determinamos con éxito los valores de  $t$  y  $e$  del tensor de impedancias pero no el de  $s$ . Esto es consecuencia de las relaciones (7.21), que indican que  $t$  y  $e$  pueden determinarse independientemente de  $s$ . Para determinar el parámetro *anisotropy*,  $s$ , necesitamos una constricción adicional que aclaramos en la subsección 10.3.2.

Para periodos cortos, donde el tensor de impedancias regional es aproximadamente 2D (1D), las resistividades aparentes diagonales asociadas al tensor de impedancias regional, aunque no sean cero, son siempre mucho menores que las antidiagonales. Sin embargo, hay casos donde esta asunción no se cumple como en algunos casos de datos de MT marinos obtenidos cerca de cambios significativos de batimetría y/o con mariz distorsión  $C$  que no es independiente de la frecuencia (Chave y Smith 1994; Key y Constable 2011). Descartando estos casos, en el caso general, los valores más bajos de la resistividad aparente de las componentes diagonales se hallan en la dirección del *Phase Sensitive Strike*. Podemos hallar el ángulo del *strike*<sup>5</sup>,  $\theta_S$ , porque es independiente de la distorsión galvánica. Entonces, tenemos que determinar la dirección del *Phase Sensitive Strike* para periodos pequeños y luego rotar el tensor de impedancias medido,  $\tilde{Z}^m$ , a ese ángulo. En la dirección del *Phase Sensitive Strike*, asumimos que los elementos de las componentes de la diagonal de  $Z^r$  son lo menor posible, facilitando la aplicabilidad de la **constricción 1**, pero además la independencia en la resolución de  $t$  y  $e$  frente a  $s$ . En la sección 10.2 se ha presentado el Método Perturbativo para estimar el *Phase Sensitive Strike* en presencia de datos con ruido.

Cuando buscamos los parámetros  $t$  y  $e$ , como  $Z^r$  tiene que tender a 2D a periodos pequeños, no pueden existir más de dos *nubes de resultados* (sección 10.5). En este sentido,

<sup>4</sup>Hay que tener en cuenta que la determinación de  $t$  y  $e$ , como podemos ver en el sistema de ecuaciones 10.1, no depende de la **constricción 2**, pero en el contexto del método la consideraremos. En realidad, la **constricción 2** es más importante en la determinación de  $s$ , descarta aquellos valores de  $s$  con fases fuera de cuadrante o de  $90^\circ$ .

<sup>5</sup>Nos referimos al *Phase Sensitive Strike* de Bahr dado que consideramos que para periodos menores de  $T_0$  el tensor regional es 2D (1D).

cuando aparecen más de dos *nubes de resultados* significa que el valor prefijado  $\rho_0$  no es suficientemente pequeño para el caso 2D. Por tanto, debemos reiniciar la búsqueda con un valor menor de  $\rho_0$ . Todos los resultados en cada *nube de resultados* son soluciones, ej., cada triplete  $(t, e, s)$  es una solución dado que su correspondiente  $Z^r$  en (10.1) cumple las constricciones. Disminuyendo  $\rho_0$  y repitiendo la búsqueda, disminuimos el número de soluciones de la *nube de resultados* de modo que reduce su tamaño con cada iteración. Sucesivamente, en cada repetición, la nube tiende a un único valor central representado por el *promedio aritmético ponderado*. Disminuyendo  $\rho_0$  se espera que las desviaciones estándar  $\sigma(\theta_t)$  y  $\sigma(\theta_e)$  disminuyan, pero  $\sigma(\theta_s)$  apenas lo hace. Mientras que los parámetros  $\bar{t}$  y  $\bar{e}$  están bien determinados (pequeñas  $\sigma(\theta_t)$ ,  $\sigma(\theta_e)$ ), el parámetro  $\bar{s}$  no. Esto se ve reflejado en el espacio de tripletes  $(t, e, s)$ , la *nube de resultados* presenta una forma alargada en la “dirección”  $s$  (valores mayores de  $\sigma(\theta_s)$ ), ej. figura 10.1.

### 10.3.2. Determinación del parámetro $s$

A periodos cortos, donde el tensor de impedancias tiende a 2D (1D) y está rotado en la dirección de *Phase Sensitive Strike*, podemos retomar la relación  $\Omega^\pm \approx P^{\Re} \pm P^{\Im}$  para corregir el parámetro de distorsión galvánica  $s$  (sección 8.1). Es decir,  $P^{\Re} \pm P^{\Im}$  y  $\Omega^\pm$  **son diferentes con distorsión galvánica y aproximadamente iguales cuando la distorsión está corregida**. La diferencia relativa entre ellas nos permitirá evaluar esta aproximación

$$\epsilon^\pm = \frac{|P^{\Re} \pm P^{\Im} - \Omega^\pm|}{\min\{|P^{\Re} \pm P^{\Im}|; |\Omega^\pm|\}} \quad (10.11)$$

Consideramos que  $\epsilon^\pm$  debe ser 1 % o menor para obtener el parámetro  $s$ . La idea es que en la búsqueda aleatoria el parámetro  $s$  en (10.1) obtenga un tensor de impedancias regional que cumpla (10.18). Cualquier valor  $\epsilon^+$  o  $\epsilon^-$  puede ser utilizado, cogemos  $\epsilon^-$  por establecer un convenio. Entonces  $\epsilon^-$  es el parámetro prefijado al que nos referiremos como **Constricción 3**. De esta constricción se pueden obtener dos valores de  $s$ , se escoge el que muestre una convergencia entre las curvas de resistividad aparente para los periodos más pequeños.

Entonces, en la determinación del parámetro *anisotropy*  $\bar{s}$  mediante el método estocástico heurístico se usa, además de las dos constricciones definidas, la **constricción 3**. Si obtenemos los parámetros  $\bar{t}$  y  $\bar{e}$  primero (teniendo en cuenta sólo las **constricciones 1 y 2**), obtenemos una nube de resultados alargada en los ejes  $t, e, s$  como en la Fig. 10.1, si seguidamente aplicamos la **constricción 3**, obtenemos una *nube de resultados* para el caso 1D y dos *nubes de*

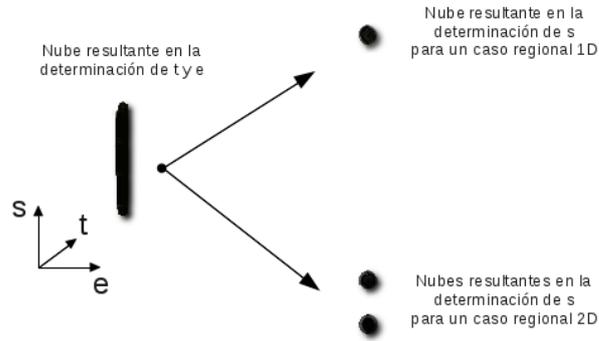


Figura 10.1: Procedimiento en la determinación de los parámetros de distorsión galvánica. A la izquierda, nube de parámetros de **constricciones 1 y 2**. A la derecha nube de resultados para los casos 1D y 2D después de aplicar la **constricción 3**.

*resultados* para los casos 2D (figura 10.1). En este último caso, es fácil identificar la solución correcta visualizando las curvas del tensor de impedancia corregido de ambos parámetros  $s$ , descartaremos aquella  $s$  cuyas curvas se cruzan y divergen cuando el periodo tiende a cero.

### 10.3.3. Determinación de los parámetros seleccionados

Uno de los aspectos importantes es cómo determinar los parámetros preseleccionados  $T_0$ ,  $\rho_0$  y  $\epsilon^-$ . Para seleccionar  $T_0$ , el modelo regional debe ser 2D (1D) para periodos menores que  $T_0$ . La selección de  $T_0$  depende del criterio de dimensionalidad que podemos hallar en la sub-sección 8. En los casos 2D la relación  $\Omega^\pm = P^{\Re} \pm P^{\Im}$  solo se cumplirá si  $|S_2^{\Re}| \ll |D_2^{\Re}|$  y/o  $|S_2^{\Im}| \ll |D_2^{\Im}|$  (tabla 8.1). Para asegurar esta condición y poder aplicar el método restringimos el límite superior de  $Index_2$  a 0.4. Así pues consideramos para la determinación de  $T_0$  aquellos periodos con valores de  $Index_1$  e  $Index_2$  que cumplen:

$$Index_1 \leq 0.05; \quad Index_2 < 0.4 \quad (10.12)$$

Aunque se seleccione un valor distinto de  $T_0$  que integre un periodo de más o de menos que cumpla estos criterios, se obtienen resultados muy similares. Si seleccionáramos un periodo más del debido, ello afectaría al *Phase Sensitive Strike* obtenido, pero la contribución de los periodos menores en el Método Perturbativo (section 10.2) atenuaría el posible error en la determinación del *Phase Sensitive Strike* y en la obtención del *pseudo tensor*  $Z^p$ .

A continuación se presentan los casos más comunes:

1. Supongamos que los periodos inferiores a  $T_0$  fueran 1D. Recuperando la ecuación (7.17)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Z}}^m &= \mathbf{R}\mathbf{Z}^m\mathbf{R}^{-1} \\ &= \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{Z}^r\mathbf{R}^{-1} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{Z}}^r\end{aligned}\quad (10.13)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{C}}$  y  $\tilde{\mathbf{Z}}^r$  son la matriz de distorsión galvánica y el tensor de impedancias regional, ambos en la dirección de medida. Podemos ver que para el caso 1D, el tensor de impedancias regional es invariante bajo rotaciones, esto es  $\tilde{\mathbf{Z}}_{1D}^r = \mathbf{Z}_{1D}^r$ . Entonces

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{1D}^m = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{Z}_{1D}^r\quad (10.14)$$

Este resultado tiene implicaciones importantes: Dado que el regional es invariante bajo rotaciones, las constricciones (**Constricción 1**, **Constricción 2** y **Constricción 3**) impuestas sobre la regional a recuperar son validas para cualquier dirección. Esto implica que, en este caso, podemos hallar la distorsión galvánica  $\tilde{\mathbf{C}}$  de un tensor 1D mediante el Método Estocástico Heurístico sea cual sea la dirección de medida, por tanto sea cual sea el valor del rotor  $\mathbf{R}$ . Esto es lo mismo que decir que podemos hallar el valor de  $t$  y  $e$  independientemente de  $s$  sea cual sea la dirección de medida, dado que se cumplen las relaciones (7.21).

Otra característica importante que resulta del caso en que los periodos inferiores a  $T_0$  sean 1D, es que si el ruido es elevado presentan gran dispersión del *Phase Sensitive Strike*,  $\theta_S$ , entre cada uno de estos periodos. A pesar de esta dispersión, el computo de la distorsión galvánica para cada periodo, individualmente rotado en su “dirección de *strike*”, resulta ser muy similar entre ellos cuando los comparamos en la dirección de medida; esto es, cuando rotamos la matriz de distorsión  $\mathbf{C}$  para cada uno de los periodos a la dirección de medida,  $\tilde{\mathbf{C}}$  para todos estos periodos es muy similar (las diferencias se deben al ruido). Este resultado no es casual si consideramos el punto anterior.

Tras aplicar el Método Perturbativo con periodos inferiores a  $T_0$  de dimensionalidad 1D, lógicamente se obtiene un valor aleatorio dado que no tiene una dirección privilegiada.

2. Supongamos que los periodos inferiores a  $T_0$  fueran 1D y 2D. Entonces tendremos periodos 1D en los que la regional es invariante bajo rotaciones, y por tanto se cumplirán las constricciones **Constricción 1**, **Constricción 2** y **Constricción 3** para cualquier

dirección; Tendremos otros periodos que serán 2D, cuya regional no es invariante bajo rotaciones y es de esperar que sólo se cumplan plenamente las constricciones en la dirección del *Phase Sensitive Strike*,  $\theta_S$ , de estos periodos (esto se traduce en que )

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{2D}^m = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{Z}}_{2D}^r$$

Entonces en la dirección del *Phase Sensitive Strike*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta_S) \tilde{\mathbf{Z}}_{2D}^m \mathbf{R}^{-1}(\theta_S) &= \mathbf{R}(\theta_S) \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{Z}}_{2D}^r \mathbf{R}^{-1}(\theta_S) \\ &= \mathbf{R}(\theta_S) \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{R}^{-1}(\theta_S) \mathbf{Z}_{2D}^r \end{aligned} \quad (10.15)$$

Esto es lo mismo que decir que podemos hallar el valor de  $t$  y  $e$  independientemente de  $s$  únicamente en la dirección del *Phase Sensitive Strike*, que es cuando se cumplen las relaciones (7.21).

En este caso, el Método Perturbativo para la determinación del *Phase Sensitive Strike* es muy sensible a los periodos 2D, estos son dominantes y restringen notablemente los posibles valores de *Phase Sensitive Strike* comunes a todos los periodos menores a  $T_0$ , en este caso se obtiene correctamente el *Phase Sensitive Strike* de los periodos 2D.

En el método estocástico, es recomendable realizar varios intentos al buscar los parámetros  $t$  y  $e$ . Empezando por valores no excesivamente pequeños de  $\rho_0$  y disminuyéndolo hasta que las desviaciones estándar de los parámetros  $t$  y  $e$  hayan disminuido drásticamente. Es de esperar que las desviaciones estándar de los parámetros disminuyan con cada repetición, dando muestra de la convergencia del proceso hacia una solución. Lo mismo en el caso de la determinación del parámetro  $s$ , pero en este caso el parámetro a disminuir es  $\epsilon^-$ . Una selección distinta de los parámetros  $\rho_0$  y  $\epsilon^-$  comporta un tiempo de convergencia distinto, pero se obtiene la misma solución, el mismo *promedio aritmético ponderado*.

## 10.4. Método basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$ ( $M\Gamma\Omega$ )

Este método, además de la **constricción**  $Re(Z_{xy}^r) > 0$ ,  $Im(Z_{xy}^r) > 0$  y  $Re(Z_{yx}^r) < 0$ ,  $Im(Z_{yx}^r) < 0$  ( $Re$  significa parte real y  $Im$  la imaginaria) para periodos pequeños, cuenta con dos constricciones más que están basadas en que, a periodos pequeños, podemos corregir la distorsión galvánica si tenemos en cuenta que para el tensor regional se cumplen las

relaciones  $\Gamma^\pm \approx Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  y  $\Omega^\pm \approx P^{\Re} \pm P^{\Im}$ . Siempre y cuando el tensor regional pertenezca a uno de los casos presentados en la tabla 8.1. La importancia de tomar estas dos relaciones como referentes para corregir la distorsión galvánica estriba en que son independientes de las rotaciones en el plano  $e_1$ - $e_2$ , permitiendo corregir la distorsión galvánica sea cual sea la dirección de medida, lo que significa que se puede determinar y corregir la distorsión galvánica sin determinar el *strike*.

Poder calcular la distorsión galvánica sea cual sea la dirección de medida implica que calculamos la matriz de distorsión para cualquier dirección,  $\tilde{C}$ . Esto es, dada una rotación  $R$  la ecuación (7.18) nos dice

$$\tilde{Z}^m = \tilde{C} \tilde{Z}^r \quad (10.16)$$

donde  $\tilde{Z}^m = RZ^mR^{-1}$ ,  $\tilde{C} = RCR^{-1}$  y  $\tilde{Z}^r = RZ^rR^{-1}$ . Así, formalmente (7.15) es válida para  $\tilde{Z}^m$ ,  $\tilde{Z}^r$  y  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{e}$ ,  $\tilde{s}$  de  $\tilde{C}$ . Esto significa que se determina la distorsión galvánica de forma "absoluta", sin necesidad de determinar la dirección del *strike*. Entonces el sistema en el método estocástico heurístico (10.1) resulta

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{xx}^r &= \frac{(1 + \tilde{t}\tilde{e})\tilde{Z}_{xx}^m + (\tilde{t} - \tilde{e})\tilde{Z}_{yx}^m}{N_1N_2N_{12}(1 + \tilde{t}^2)(1 - \tilde{e}^2)(1 + \tilde{s})}; & \tilde{Z}_{xy}^r &= \frac{(1 + \tilde{t}\tilde{e})\tilde{Z}_{xy}^m + (\tilde{t} - \tilde{e})\tilde{Z}_{yy}^m}{N_1N_2N_{12}(1 + \tilde{t}^2)(1 - \tilde{e}^2)(1 + \tilde{s})} \\ \tilde{Z}_{yx}^r &= \frac{(1 - \tilde{t}\tilde{e})\tilde{Z}_{yx}^m - (\tilde{t} + \tilde{e})\tilde{Z}_{xx}^m}{N_1N_2N_{12}(1 + \tilde{t}^2)(1 - \tilde{e}^2)(1 - \tilde{s})}; & \tilde{Z}_{yy}^r &= \frac{(1 - \tilde{t}\tilde{e})\tilde{Z}_{yy}^m - (\tilde{t} + \tilde{e})\tilde{Z}_{xy}^m}{N_1N_2N_{12}(1 + \tilde{t}^2)(1 - \tilde{e}^2)(1 - \tilde{s})} \end{aligned} \quad (10.17)$$

con  $N_1 = 1/\sqrt{1 + \tilde{e}^2}$ ,  $N_2 = 1/\sqrt{1 + \tilde{s}^2}$ ,  $N_{12} = 1/\sqrt{1 + \tilde{t}^2}$ .

Para cada una de las relaciones  $\Gamma^\pm \approx Q^{\Re} \pm Q^{\Im}$  y  $\Omega^\pm \approx P^{\Re} \pm P^{\Im}$  construimos un índice que evalúe la medida en que se cumplen

$$\gamma^\pm = \frac{|Q^{\Re} \pm Q^{\Im} - \Gamma^\pm|}{\min\{|Q^{\Re} \pm Q^{\Im}|; |\Gamma^\pm|\}}; \quad \epsilon^\pm = \frac{|P^{\Re} \pm P^{\Im} - \Omega^\pm|}{\min\{|P^{\Re} \pm P^{\Im}|; |\Omega^\pm|\}} \quad (10.18)$$

Consideramos que las relaciones se cumplen si  $\gamma^\pm$  y  $\epsilon^\pm$  son menores al 1%. La idea es que en la búsqueda aleatoria de los parámetros  $t$ ,  $e$  y  $s$  en (10.1) se obtenga un tensor de impedancias regional que cumpla (10.18). Cualquier valor de  $\gamma^+$  o  $\gamma^-$  y  $\epsilon^+$  o  $\epsilon^-$  pueden ser utilizados, cogemos  $\gamma^-$  y  $\epsilon^-$  por establecer un convenio. Igual que el anterior método,

de estas constricciones se pueden obtener dos valores de  $s$ . Es fácil identificar la solución correcta visualizando las curvas del tensor de impedancia corregido de ambos valores de  $s$ , descartaremos aquella  $s$  cuyas curvas de resistividad aparente divergen a periodos pequeños.

Esencialmente este método respecto al anterior no presenta diferencias en sus resultados cuando asumimos que a periodos cortos el tensor de impedancias es 2D (1D). No obstante el método mediante los índices  $\Gamma$  y  $\Omega$  es más general porque puede resolver ciertos casos 3D, como podemos ver en la tabla 8.1, y porque puede determinar la distorsión galvánica en la propia dirección de medida. Por lo tanto no es necesario conocer la dirección del *strike*, con lo que no es preciso aplicar el Método Perturbativo. Pudiesen darse casos donde el ruido provocase que ciertos periodos del tensor, que eran 1D o 2D, resultaran 3D. En tales casos el Método Perturbativo ofrece la posibilidad de corregir ese ruido y obtener un tensor de impedancias (*pseudo tensor* de impedancias, sección 10.2) con comportamiento 1D o 2D. Lógicamente este segundo método resulta muy superior al anterior, dada su generalidad y aplicabilidad.

## 10.5. Nube de resultados en el espacio de soluciones

Si existe un triplete  $(t', e', s')$  del cual se obtiene el mismo tensor de impedancias regional,  $Z^r$ , obtenido a partir de  $(t, e, s)$ , podemos relacionar  $t'$  y  $e'$  con  $t$  y  $e$  mediante (7.9), donde  $A = (1 - tes)$ ,  $B = (e + ts)$ ,  $C = (s - te)$ , y  $D = (t + es)$ , obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1 - tes) &= (1 - t'e's') \quad \text{lo que implica} \quad s' = \frac{te}{t'e'}s \\ (e + ts) &= (e' + t's') \\ (s - te) &= (s' - t'e') \\ (t + es) &= (t' + e's') \end{aligned}$$

substituyendo  $s'$  en las tres últimas ecuaciones encontramos

$$\begin{aligned}
(e + ts) &= (e' + t' \frac{te}{t'e'} s) = e' + \frac{e}{e'} ts \\
(s - te) &= (\frac{te}{t'e'} s - t'e') \\
(t + es) &= (t' + e' \frac{te}{t'e'} s) = t' + \frac{t}{t'} es
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
ts - \frac{e}{e'} ts &= e' - e \quad \text{obteniendo} \quad s = \frac{e'}{t} \\
s - \frac{te}{t'e'} s &= te - t'e' \quad \text{obteniendo} \quad s = -t'e' \\
es - \frac{t}{t'} es &= t' - t \quad \text{obteniendo} \quad s = \frac{t'}{e}
\end{aligned}$$

finalmente

$$t' = -\frac{1}{t}; \quad e' = -\frac{1}{e} \quad (10.19)$$

A partir de (7.20), podemos deducir la relación de  $s'$  con  $s$ . Podemos ver que

$$\begin{aligned}
Z_{xx}^m &= N_1 N_2 N_{12} (e - t)(1 - s) Z_{yx}^r = N'_1 N'_2 N'_{12} (e' - t')(1 - s') Z_{yx}^r \\
Z_{yx}^m &= N_1 N_2 N_{12} (1 + te)(1 - s) Z_{yx}^r = N'_1 N'_2 N'_{12} (1 + t'e')(1 - s') Z_{yx}^r \\
Z_{yy}^m &= N_1 N_2 N_{12} (e + t)(1 + s) Z_{xy}^r = N'_1 N'_2 N'_{12} (e' + t')(1 + s') Z_{xy}^r \\
Z_{xy}^m &= N_1 N_2 N_{12} (1 - te)(1 + s) Z_{xy}^r = N'_1 N'_2 N'_{12} (1 - t'e')(1 + s') Z_{xy}^r
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
N_1 N_2 N_{12}(e-t)(1-s) &= N'_1 N'_2 N'_{12}(e'-t')(1-s') \\
N_1 N_2 N_{12}(1+te)(1-s) &= N'_1 N'_2 N'_{12}(1+t'e')(1-s') \\
N_1 N_2 N_{12}(e+t)(1+s) &= N'_1 N'_2 N'_{12}(e'+t')(1+s') \\
N_1 N_2 N_{12}(1-te)(1+s) &= N'_1 N'_2 N'_{12}(1-t'e')(1+s')
\end{aligned}$$

tomando  $t' = -\frac{1}{t}$ ,  $e' = -\frac{1}{e}$  de (10.19) obtenemos

$$N'_1 N'_2 N'_{12} = (\sqrt{1+e^2} \sqrt{1+s'^2} \sqrt{1+t'^2})^{-1} = |t||e|(\sqrt{1+e^2} \sqrt{1+s'^2} \sqrt{1+t'^2})^{-1}$$

de manera que el conjunto de cuatro ecuaciones de arriba pasan a sólo dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{(1-s)}{\sqrt{1+s^2}} \frac{te}{|t||e|} &= \frac{(1-s')}{\sqrt{1+s'^2}} \\
- \frac{(1+s)}{\sqrt{1+s^2}} \frac{te}{|t||e|} &= \frac{(1+s')}{\sqrt{1+s'^2}}
\end{aligned}$$

sumando estas ecuaciones

$$s'^2 = \frac{1}{s^2} \rightarrow s' = \text{sign}(s') \frac{1}{|s|}$$

y restándolas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \text{sign}(t)\text{sign}(e) &= \frac{-s'}{\sqrt{1+s'^2}} \\
&= \frac{-s'|s|}{\sqrt{1+s^2}}
\end{aligned}$$

así obtenemos la última relación:

$$s' = -\text{sign}(t)\text{sign}(e) \frac{1}{|s|} \quad \text{donde } |s| < 1 \quad (10.20)$$

Así pues, si existen dos resultados de *promedios aritméticos ponderados*,  $(\bar{t}_1, \bar{e}_1, \bar{s}_1)$  con  $|\bar{s}_1| < 1$  y el segundo  $(\bar{t}_2, \bar{e}_2, \bar{s}_2)$  con  $|\bar{s}_2| > 1$ , se cumplirán las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\bar{t}_2 &\approx -1/\bar{t}_1 \\ \bar{e}_2 &\approx -1/\bar{e}_1 \\ \bar{s}_2 &\approx -\text{sign}(\bar{t}_1)\text{sign}(\bar{e}_1)/|\bar{s}_1|\end{aligned}\tag{10.21}$$

De lo contrario, si existe una solución  $(\bar{t}, \bar{e}, \bar{s})$  que no se puede relacionar con otra mediante (10.21), ésta es única y  $|\bar{s}| > 1$ . Entonces, a periodos cortos, donde se supone que es 2D, dos soluciones relacionadas en (10.21) dan la misma  $Z^r$ . En concordancia con estas relaciones el espacio de tripletes  $(t, e, s)$  se encuentra dividido en ocho zonas: cuatro contienen dos *nubes de resultados* (Figura 10.2a a 10.2d) y cuatro más con sólo una *nube de resultados* (Figura 10.3e a 10.3h). Cada zona está limitada por bloques rectangulares cuyas localizaciones vienen determinadas por las relaciones (10.21). En las figuras de 10.2a a 10.2d, se cumplen las relaciones (10.21) mientras que en las figuras de 10.3e a 10.3h no. Estas zonas están relacionadas, a pares, a través de la rotación (7.19): figura 10.2, (a) con (b), (c) con (d), y en la figura 10.3 (e) con (f) y (g) con (h).

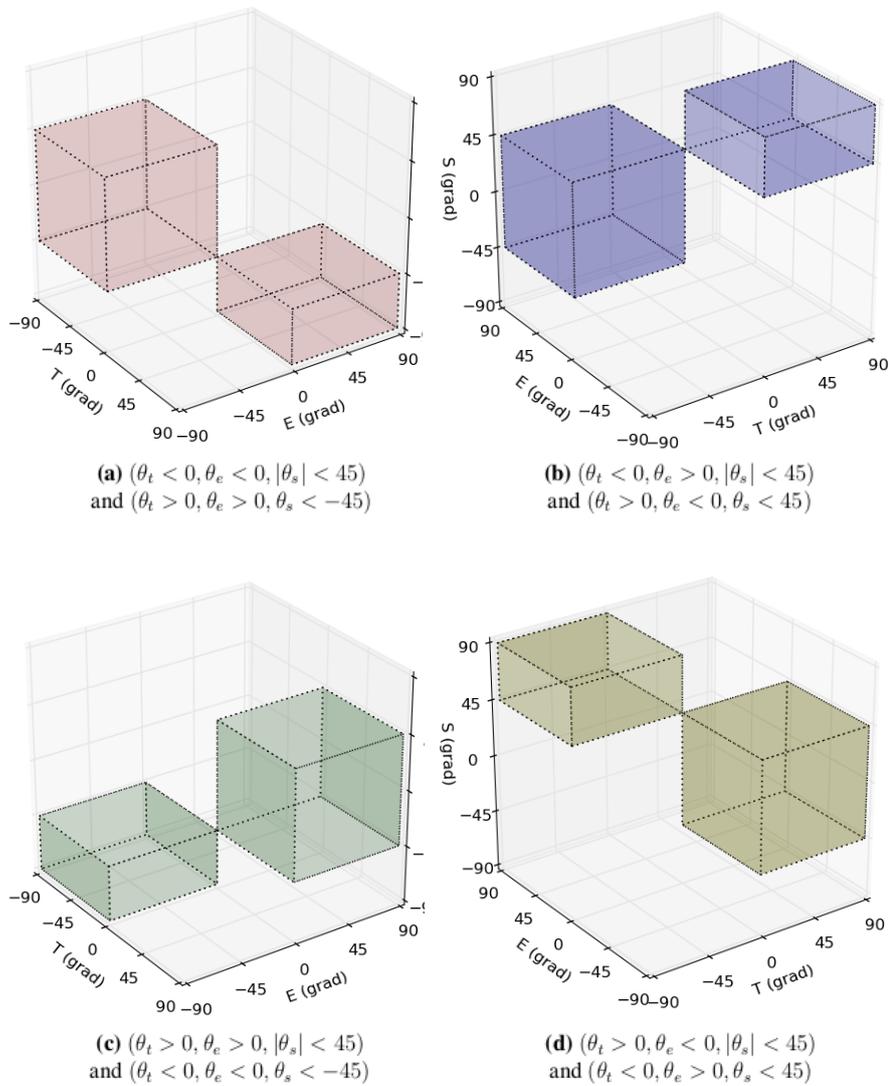


Figura 10.2: Espacio de tripletes con las cuatro zonas posibles que cumplen (10.21). Los ejes son  $\theta_t$ ,  $\theta_e$  y  $\theta_s$ .

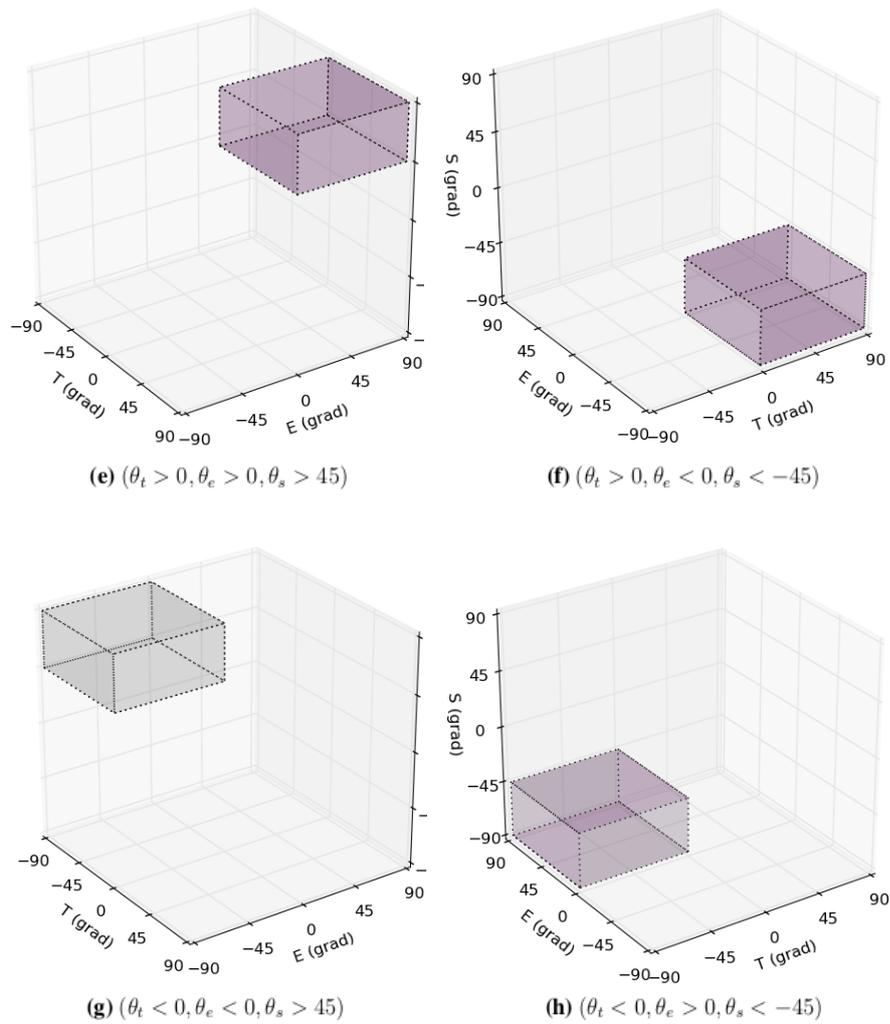


Figura 10.3: Espacio de tripletes con las cuatro zonas posibles que no cumplen (10.21). Los ejes son  $\theta_t$ ,  $\theta_e$  y  $\theta_s$ .



## Capítulo 11

# Ejemplos: determinación de la distorsión galvánica

Este capítulo muestra ejemplos de las distintas metodologías presentadas en este trabajo para la determinación de la distorsión galvánica: el método MIDtes basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (sección 10.3), y el método  $M\Gamma\Omega$  basado en los índices  $\Gamma$  y  $\Omega$  (sección 10.4). Se ha diseñado el programa MITT (Magnetotellúric Impedance Tensor Tools) basado en estas metodologías. En la guía del programa MITT (Apéndice C) se encuentran otros ejemplos que ilustran su aplicación.

### 11.1. Ejemplos Sintéticos

En esta sección se presentan dos ejemplos sintéticos. Partimos de los datos regionales  $Z^r$  correspondientes a las estaciones 1 y 2 del modelo de la figura 11.2. Es un modelo 3D que consta de dos conductores alargados cruzados de  $1\ \Omega m$  en un medio de  $100\ \Omega m$ , cada uno a diferentes profundidades. Las respuestas teóricas se han obtenido mediante el código de (Mackie, Madden y Wannamaker 1993).

Las figuras 11.1a y 11.1b corresponden a los datos regionales sintéticos  $Z^r$  de cada estación (resistividades aparentes y fases). Para simular los datos sintéticos experimentales, se han perturbado los tensores de impedancia con parámetros de distorsión galvánica ( $t, e, s$ ), determinados aleatoriamente, luego se han rotado y perturbado con 3% de ruido Gaussiano para cada componente del tensor de impedancias. De este modo obtendremos los datos sintéticos de medida  $\tilde{Z}_1^m$  para la estación 1 y  $\tilde{Z}_2^m$  para la estación 2.

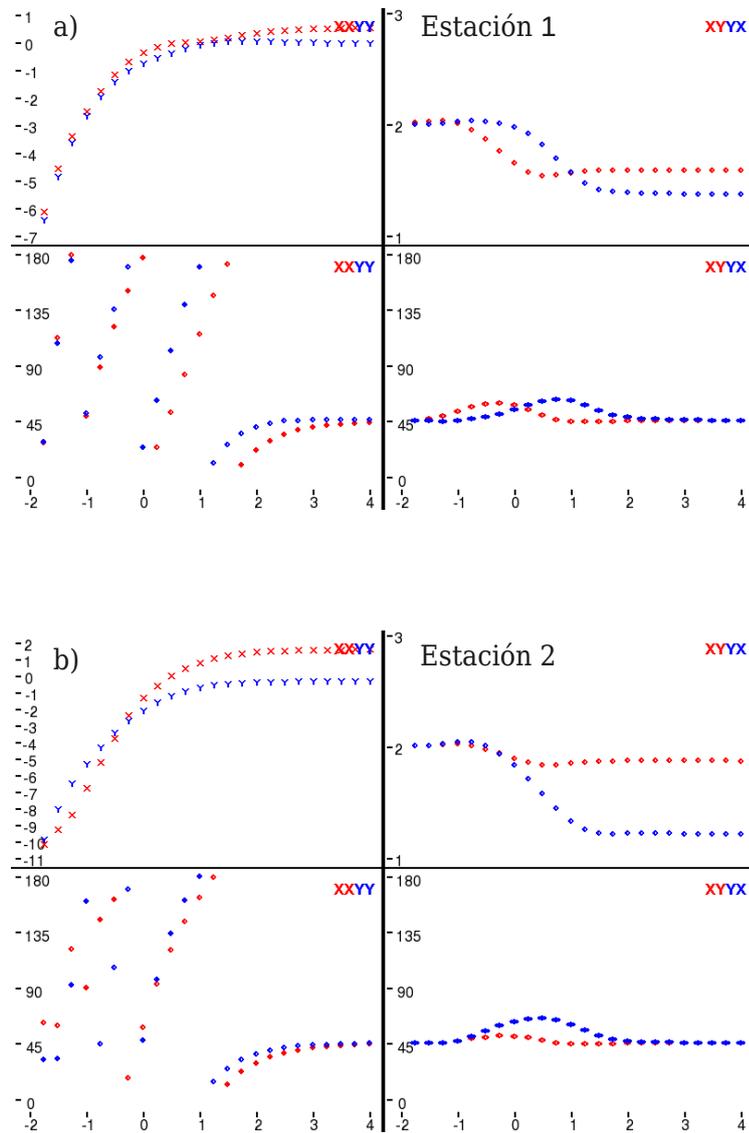


Figura 11.1: (a) Tensor de impedancias regional  $Z^r$  de la estación 1 y (b) de la estación 2 del modelo figura 11.2. Las ordenadas de los recuadros superiores son logaritmos de las resistividades aparentes ( $\Omega m$ ) y las ordenadas de los recuadros inferiores son fases (*grados*). Las abscisas son logaritmos de los periodos ( $s$ ). De ahora en adelante se utilizará este criterio de etiquetado de los ejes.

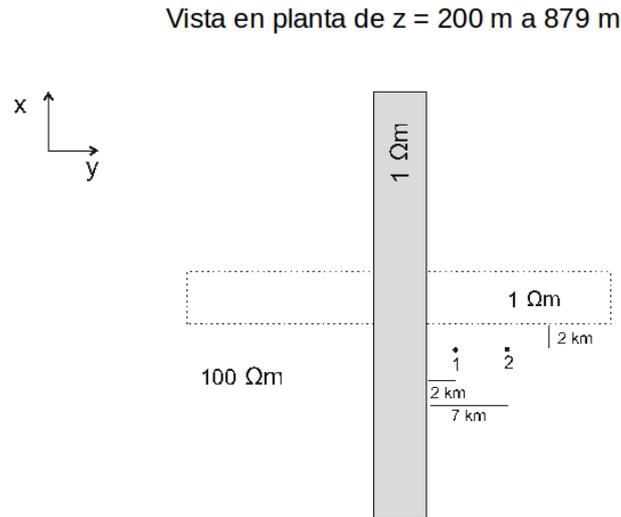


Figura 11.2: Modelo 3D en el que se indica la posición de las estaciones 1 y 2. El modelo consta de dos conductores alargados perpendiculares a diferentes profundidades. La resistividad de los conductores es de  $1 \Omega m$  en un medio de  $100 \Omega m$ . La longitud de los conductores es de  $40 \text{ km}$  y de  $5 \text{ km}$  de ancho. El conductor más superficial (en dirección  $x$ ) va de  $200 \text{ m}$  a  $879 \text{ m}$  de profundidad y el más profundo (en dirección  $y$ ) de  $1600 \text{ m}$  a  $4881 \text{ m}$ . Las estaciones están localizadas a  $2 \text{ km}$  y  $7 \text{ km}$  de la proyección en superficie del conductor más superficial y a  $2 \text{ km}$  de la proyección en superficie del conductor profundo.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.017	$7e^{-6}$	0.00208	-0.59	$1e^{-10}$	$4e^{-5}$	1D
0.031	0.00014	0.02341	0.94	$5e^{-9}$	$4e^{-5}$	1D
0.056	0.00014	0.07116	1.02	$2e^{-8}$	0.00118	2D
0.1	0.00052	0.12658	-0.06	$3e^{-7}$	0.00377	2D
0.178	0.00283	0.16928	-2.71	$3e^{-6}$	0.00396	2D
0.316	0.01171	0.19483	-7.27	$3e^{-7}$	0.00701	2D
0.562	0.03171	0.18778	-14.41	0.00010	0.02336	2D
1.000	0.06146	0.13189	-29.30	0.00042	0.04066	3D

Tabla 11.1: Índices para el tensor regional magnetoteléxico de la Estación 1 hasta el periodo  $1 \text{ s}$ .

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

Antes de preparar estas estaciones para testar los métodos (añadiendo distorsión galvánica, rotando y aplicando ruido) veamos previamente su comportamiento frente a los índices  $Index_1$ ,  $Index_2$  y *Phase Sensitive Strike*. Para esta estación 1 (tabla 11.1) vemos que con el método basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (MIDtes), según el valor del *Phase sensitive Strike* y los índices  $Index_1$  y  $Index_2$ , sólo podríamos determinar razonablemente los parámetros de distorsión galvánica hasta el periodo  $0.178 \text{ s}$ , dado que a

partir del periodo  $0.316s$  el *Phase sensitive Strike* empezaría a divergir del de los primeros periodos 2D. Si el *Phase Sensitive Strike* de un periodo considerado 2D empieza a ser distinto de los periodos 2D más pequeños a éste es porque empieza a tener un comportamiento 3D, el método (MIDtes) presenta dificultades en este caso<sup>1</sup>. Mientras que con el método basado en los índices  $\Gamma$  y  $\Omega$  ( $M\Gamma\Omega$ ) podríamos considerar hasta el periodo  $0.562s$  porque este método es independiente de la dirección de medida. A partir de  $1s$  ya es 3D.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.017	$5e^{-6}$	0.00103	-89.99	$4e^{-14}$	$2e^{-7}$	1D
0.031	$3e^{-6}$	0.00201	-0.02	$1e^{-11}$	$2e^{-6}$	1D
0.056	$3e^{-5}$	0.01050	0.12	$4e^{-11}$	$3e^{-5}$	1D
0.1	0.00052	0.12658	-0.06	$3e^{-7}$	0.00377	1D
0.178	0.00028	0.02588	-89.80	$1e^{-7}$	0.00021	1D
0.316	0.00033	0.08342	-89.04	$5e^{-7}$	0.00169	2D
0.562	0.00051	0.15143	-88.28	$2e^{-6}$	0.00509	2D
1.0	0.00159	0.22281	-89.65	$4e^{-5}$	0.00740	2D
1.778	0.01278	0.29149	85.38	$1e^{-5}$	0.01425	2D
3.162	0.06143	0.36077	78.12	0.00222	0.03443	3D
5.623	0.14230	0.42168	70.96	0.00993	0.06405	3D

Tabla 11.2: Índices para el tensor regional magnetotélúrico de la Estación 2 hasta el periodo  $5.623s$ .

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

En el caso de la estación 2, si miramos el *Phase sensitive Strike* y los índices  $Index_1$  y  $Index_2$  del tensor de impedancias regional de esta estación (tabla 11.2), vemos que el método basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  sólo podría determinar razonablemente la distorsión galvánica hasta el periodo  $1s$ . Esto es, como en la estación anterior, si el *Phase Sensitive Strike* de un periodo considerado 2D empieza a ser distinto de los periodos 2D más pequeños a éste es porque empieza a tener un comportamiento 3D. En cambio, el método que emplea las relaciones  $\Gamma$  y  $\Omega$  nos permitiría determinar los parámetros de distorsión galvánica hasta el periodo  $1.778s$ , ya que a partir de éste empieza a tener un comportamiento 3D. El periodo  $3.162s$  tiene un leve comportamiento 3D como nos indica el límite impuesto  $Index_1 \leq 0.05$  para tener un comportamiento 2D (1D), pero  $5.623s$  supera ampliamente este límite. Formamos dos rangos de periodos distintos para dar cuenta de cómo funcionan los métodos con periodos 1D, por un lado, y periodos 2D por otro. Podemos ver que hasta  $0.1s$  los periodos son claramente 1D, éste es el primer bloque, y de  $0.178s$  hasta  $1s$  son 2D, constituyendo el segundo bloque. El primer periodo de este segundo bloque,  $1s$ , es más 1D que 2D, lo consideramos para ver cómo influye un periodo 1D en el cálculo *Phase Sensitive Strike* en el Método Perturbativo cuando los demás periodos son 2D.

<sup>1</sup>A pesar de que alguno de estos periodos fuese considerado en la aplicación del método estos periodos no serían determinantes en la obtención correcta de los parámetros de distorsión.

Una vez vistas cuales son las limitaciones prácticas de ambos métodos procedemos a ilustrarlos mediante los siguientes ejemplos.

### 11.1.1. Estación 1 sin ruido

Como primer ejemplo consideraremos, para esta estación, una distorsión galvánica severa  $(t, e, s) = (0.78, 1.46, -0.65)$  con rotación  $-30^\circ$  y sin ruido añadido. La figura 11.3 muestra el tensor de impedancias distorsionado y rotado. Como se observa dista mucho del tensor regional.

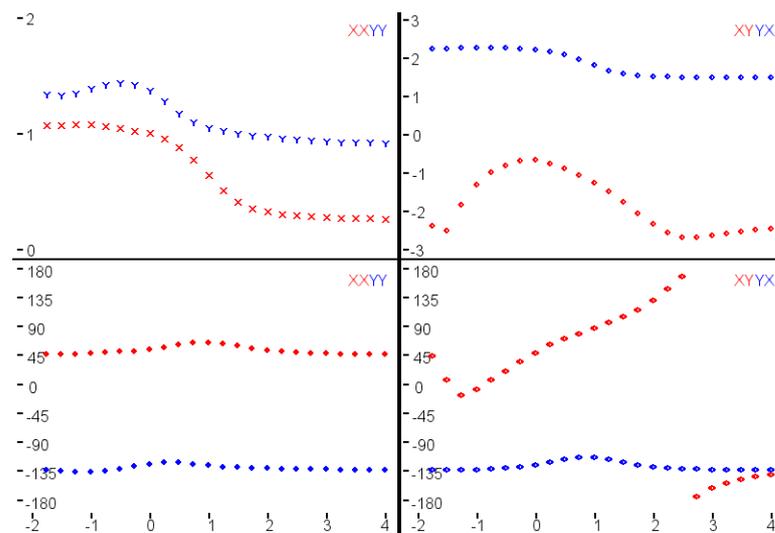


Figura 11.3: Tensor de impedancias regional  $Z^r$  de la estación 1 tras añadirle una distorsión de  $(t, e, s) = (0.78, 1.46, -0.65)$  y rotado  $-30^\circ$ . Nótese la diferencia con la  $Z^r$  de la figura 11.1a.

La tabla 11.3 recoge los índices  $Index_1$ ,  $Index_2$ ,  $Phase Sensitive Strike$ ,  $\gamma^-$  y  $\epsilon^-$  del periodo  $0.017s$  hasta  $1s$  para esta estación 1 distorsionada y rotada. Dado que no hay ruido podemos observar en esta tabla que los únicos índices que han cambiado son  $Phase Sensitive Strike$ ,  $\gamma^-$  y  $\epsilon^-$  porque  $Index_1$  y  $Index_2$  son invariantes con la rotación y la distorsión galvánica.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.017	$7e^{-6}$	0.00208	29.43	0.00880	0.57420	1D
0.031	0.00014	0.02341	30.96	0.00816	0.57513	1D
0.056	0.00014	0.07116	31.05	0.00831	0.57484	2D
0.1	0.00052	0.12658	29.96	0.01069	0.57182	2D
0.178	0.00283	0.16928	27.31	0.01527	0.56651	2D
0.316	0.01171	0.19483	22.75	0.01908	0.55996	2D
0.562	0.03171	0.18778	15.61	0.01910	0.55313	2D
1.000	0.06146	0.13189	0.72	0.01471	0.54853	3D

Tabla 11.3: Índices para el tensor regional magnetotelúrico de la Estación 1 hasta el periodo 1s con distorsión  $(t, e, s) = (0.78, 1.46, -0.65)$  y rotado  $-30^\circ$ .

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

Seguidamente determinaremos la distorsión galvánica mediante los dos métodos: El método basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (MIDtes) y el método basado en los índices  $\Gamma$  y  $\Omega$  ( $M\Gamma\Omega$ ).

### 11.1.2. Método (MIDtes) basado en la independencia de determinación de $t$ y $e$ frente a $s$

De los cuatro primeros periodos podemos ver que el *Phase Sensitive Strike* común es de  $30^\circ$ , por tanto no es preciso aplicar el Método Perturbativo para determinar el *strike*. De este modo rotamos  $30^\circ$  y determinamos los parámetros de distorsión galvánica utilizando solo el periodo más pequeño,  $0.017s$ , y con parámetros de búsqueda  $\rho_0 \leq 0.05\Omega m$ , valores prefijados<sup>2</sup> de  $t = -1.23$  y  $e = -0.67$ , aproximación a la solución complementaria<sup>3</sup>, y  $\epsilon^- \leq 0.001$ . Se obtienen los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (-1.28, -0.68, -1.55)$ . Nótese que estos parámetros se han obtenido con el tensor rotado al *Phase Sensitive Strike*,  $30^\circ$ . Por tanto, a rotación cero respecto al tensor original. Consecuentemente estos parámetros pueden compararse directamente con los iniciales. La matriz aplicada de distorsión galvánica, con  $(t, e, s) = (0.78, 1.46, -0.65)$ , es

$$\begin{pmatrix} -0.01815 & 0.41917 \\ 0.29289 & 1.31840 \end{pmatrix}$$

la obtenida con el método, a partir de  $(t, e, s) = (-1.28, -0.68, -1.55)$ , resulta

<sup>2</sup>De la aproximación para casos 1D y 2D, sección 7.5, se obtiene una primera aproximación para los parámetros de distorsión galvánica  $t$  y  $e$  que podemos utilizar para facilitar la búsqueda.

<sup>3</sup>Algunos casos presentan dos conjuntos de tripletes  $(t, e, s)$  distintos cuya matriz de distorsión es idéntica y recuperan el mismo tensor de impedancias regional (ver sección 10.5). En este caso consideramos el triplete complementario al  $(t, e, s) = (0.78, 1.47, -0.65)$ , que es  $(t, e, s) = (-1.28, -0.68, -1.55)$ , para mostrar que con éste también recuperamos el tensor de impedancias regional.

$$\begin{pmatrix} -0.01877 & 0.41895 \\ 0.29609 & 1.31775 \end{pmatrix}$$

y la diferencia relativa

$$\begin{pmatrix} 3.4\% & 0.1\% \\ 1.1\% & 0.0\% \end{pmatrix}$$

La relación entre los parámetros  $t$ ,  $e$ ,  $s$  y la matriz de distorsión galvánica está "mal condicionada", es decir, pequeñas diferencias en los parámetros  $(t, e, s)$  produce mayores diferencias en la matriz  $C$ . Por tanto la mejor comparación se realiza a partir de las regionales (figura 11.4) que se obtienen directamente de los parámetros  $(t, e, s)$  (eq. 10.1).

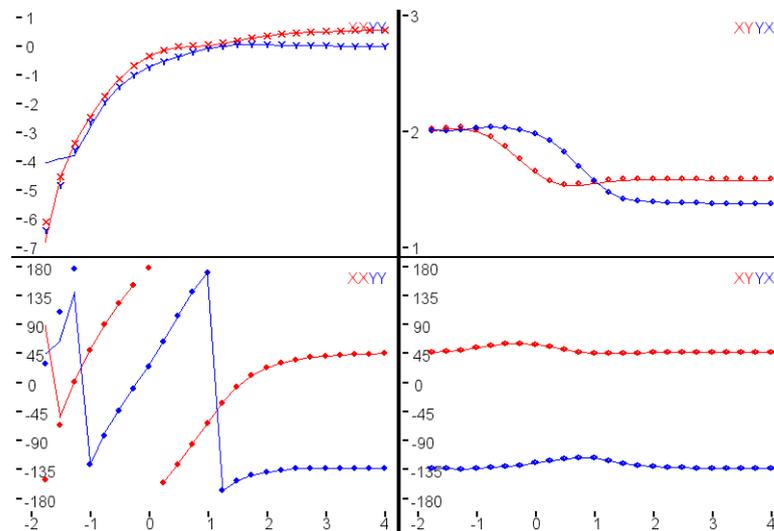


Figura 11.4: Curvas originales (puntos) con las regionales obtenidas con el método basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (línea continua).

Vemos que este método recupera muy bien el tensor de impedancias regional.

### 11.1.3. Método $(M\Gamma\Omega)$ basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$

Aplicamos este método directamente en la dirección de medida del tensor de impedancias experimental. Calculamos los parámetros de distorsión para el primer periodo  $0.017s$ , con parámetros de búsqueda  $\gamma \leq 0.001$  y  $\varepsilon \leq 0.001$ . De este modo obtenemos los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (-0.76, -1.28, -0.49)$ . La matriz de distorsión galvánica aplicada, con  $(t, e, s) = (0.78, 1.46, -0.65)$ ,

$$\begin{pmatrix} -0.01815 & 0.41917 \\ 0.29289 & 1.31840 \end{pmatrix}$$

la obtenida con el método, a partir de  $(t, e, s) = (-0.76, -1.28, -0.49)$ , rotada  $30^\circ$  resulta

$$\begin{pmatrix} -0.01915 & 0.41852 \\ 0.29544 & 1.31802 \end{pmatrix}$$

y la diferencia relativa

$$\begin{pmatrix} 5.5\% & 0.2\% \\ 0.9\% & 0.0\% \end{pmatrix}$$

Tras corregir, comparamos con las regionales:

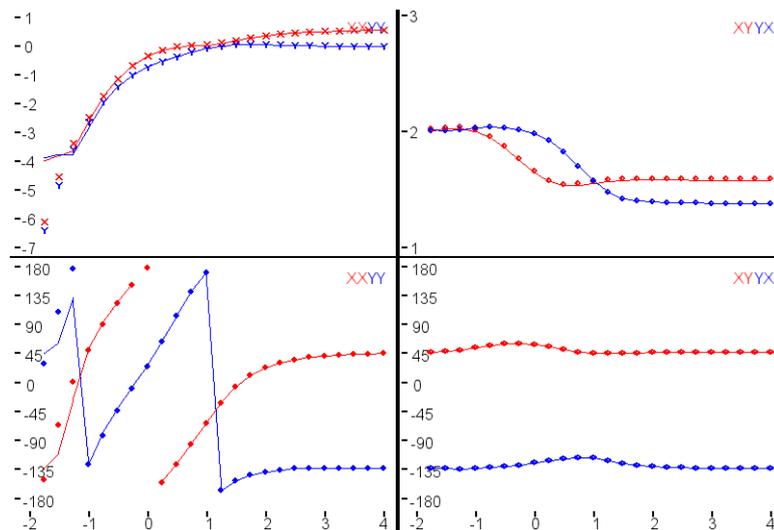


Figura 11.5: Comparativa de las curvas originales (puntos) con las regionales obtenidas con el método basado en los índices  $\Gamma$  y  $\Omega$  (línea continua).

Nuevamente vemos que el tensor de impedancias regional obtenido ajusta bien el tensor original (figura 11.5).

#### 11.1.4. Estación 1 con Ruido

Para obtener una curva experimental sintética de esta estación, le añadimos distorsión galvánica con parámetros de  $(t, e, s) = (0.37, 0.78, -0.35)$ , rotamos  $-60^\circ$  y le aplicamos un 3% de ruido Gaussiano. De este modo obtenemos curvas de resistividad aparente y fases de la figura 11.6 y los nuevos índices de la tabla 11.4.

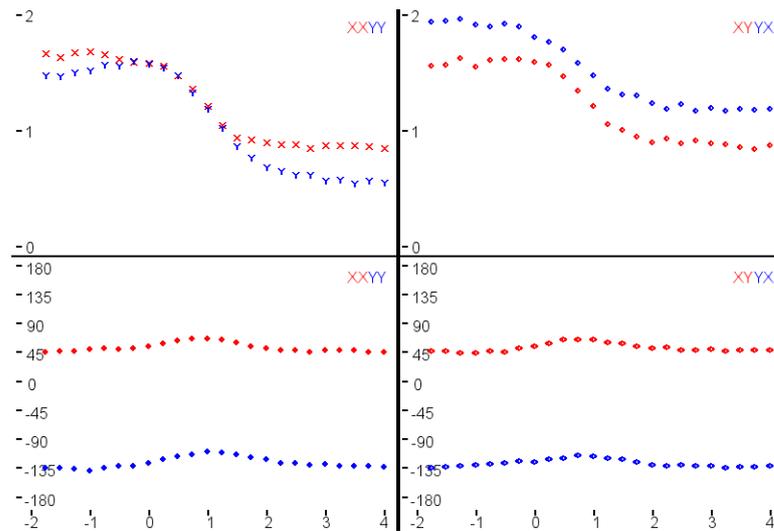


Figura 11.6: Tensor de impedancias regional  $Z^r$  de la estación 1 tras añadirle una distorsión de  $(t, e, s) = (0.37, 0.78, -0.35)$ , rotado  $-60^\circ$  y aplicado un 3% de ruido.

La primera cosa que podemos ver en la tabla 11.4 es que la simulación habitual del ruido (mediante un ruido Gaussiano para cada componente real e imaginaria del tensor de impedancias) no es muy realista. En un caso real los índices  $Index_1$ ,  $Index_2$  y  $Phase Sensitive Strike$  suelen ser más similares periodo a periodo. Las variaciones que aparecen en esta tabla son, por tanto, consecuencia del ruido Gaussiano añadido (recordemos que  $Index_1$  y  $Index_2$  son independientes de la distorsión galvánica y de las rotaciones y el  $Phase Sensitive Strike$  es independiente de la distorsión galvánica) por ello estamos en un marco ideal para ilustrar con este ejemplo el comportamiento y utilidad del Método Perturbativo.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.017	0.00121	0.11547	34.25	0.00755	0.40363	2D
0.031	0.06777	0.10492	-71.38	0.00516	0.39215	3D
0.056	0.09132	0.16073	74.91	0.00566	0.39191	3D
0.1	0.05264	0.25249	44.60	0.00297	0.43103	3D
0.178	0.02968	0.06907	70.16	0.00014	0.42096	2D
0.316	0.26469	0.34763	79.96	0.00055	0.40322	3D
0.562	0.05873	0.34728	51.97	0.00080	0.41892	3D
1.000	0.06558	0.08890	26.29	0.00018	0.43387	3D

Tabla 11.4: Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación 1 hasta el periodo 1s, distorsionado, rotado y con un 3% de ruido. En gris los periodos que se pueden utilizar con el método (MIDtes), en verde los que también pueden utilizarse con el método (MΓΩ).

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al  $Phase Sensitive Strike$  cambiado de signo.

La inclusión de los periodos hasta 0.1s para el método (MIDtes), aunque sea 3D, se escoge dada la poca diferencia respecto a los límites  $Index_1 \leq 0.05$  y  $Index_2 < 0.4$  y porque dada la gran variación que presentan estos índices periodo a periodo se asume que

esta variación es debida al ruido.

### 11.1.5. Método (MIDtes) basado en la Independencia de Determinación de $t$ y $e$ frente a $s$

La tabla 11.4 recoge los índices  $Index_1$ ,  $Index_2$ ,  $Phase Sensitive Strike$ ,  $\gamma^-$  y  $\epsilon^-$  hasta  $1s$ , de la estación 1 experimental. Siguiendo los criterios de dimensionalidad de la sección 10.3.3 fijamos  $T_0 = 0.1s$  (comprendiendo el periodo  $0.1s$  y los 4 periodos anteriores). A pesar de que algún periodo considerado es 3D debido al ruido, al superar ligeramente el límite 2D (1D) (establecido en  $Index_1 < 0.05$ ), se podrá corregir con el *pseudo tensor* de impedancias obtenido tras aplicar el Método Perturbativo (sección 10.2). Es decir, el Método Perturbativo permite considerar únicamente aquellos tensores, obtenidos en cada perturbación, con  $Index_1 \leq 0.1$ <sup>4</sup> para obtener un *pseudo tensor* de impedancias cuyos periodos considerados resultan 2D (1D).

Aplicamos el Método Perturbativo de la sección 10.2 dos veces sucesivas: la primera con  $\Delta\Theta = 10^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 1.5\%$  y con la condición de que  $Index_1 \leq 0.1$  y la segunda con  $\Delta\Theta = 2^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 0.5\%$  y con  $Index_1 \leq 0.1$ . La figura 11.7 muestra el ángulo  $Phase Sensitive Strike$  para cada periodo considerado, antes y después de aplicar el Método Perturbativo.

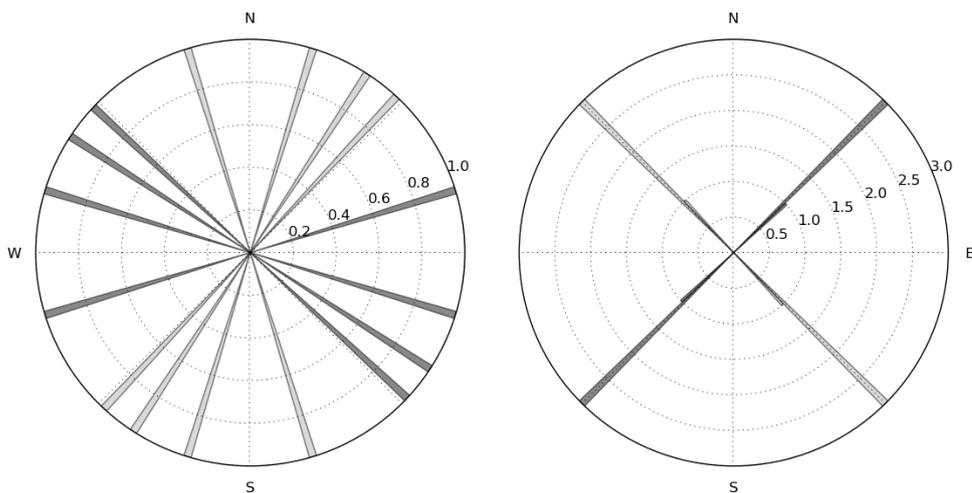


Figura 11.7: Diagramas en Rosa para la Estación 1 antes (izquierda) y después (derecha) de aplicar el Método Perturbativo para los periodos inferiores a  $0.1s$ .

Tras aplicar el Método Perturbativo obtenemos un  $Phase Sensitive Strike$  para estos pe-

<sup>4</sup>Consideramos  $Index_1 \leq 0.1$  en lugar de  $Index_1 \leq 0.05$ , que es el criterio 2D (1D) en la sección 8, porque en este caso es suficiente para poder corregir el comportamiento 3D de los periodos considerados.

periodos de  $\Theta = 47.38^\circ \pm 1.75^\circ$  y un *pseudo tensor* de impedancias que, tras rotar  $47.38^\circ$ , utilizamos para calcular los parámetros de distorsión para los 4 periodos considerados (la tabla 11.5 muestra los índices). Uno podría esperar que el *Phase Sensitive Strike* obtenido con el Método Perturbativo fuese igual al ángulo al que rotamos el tensor de impedancias original,  $-60^\circ$ . Esta diferencia se da porque los periodos considerados son mayoritariamente 1D, no tienen una dirección privilegiada, lo que produce que el *Phase Sensitive Strike* de los periodos 1D sean altamente sensibles al ruido (sección 10.3.3). Si los periodos considerados hubiesen sido 2D se esperaría un *Phase Sensitive Strike* de  $60^\circ$ . La sección 10.3.3 explica con más detalle estos casos.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.017	0.05464	0.13156	89.75	0.00754	0.40361	3D
0.031	0.02524	0.10615	-0.42	0.00525	0.39222	2D
0.056	0.01923	0.09446	0.79	0.00533	0.39287	2D
0.1	0.02232	0.27024	0.06	0.00320	0.43099	2D

Tabla 11.5: Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación 1 experimental hasta el periodo 0.1s tras aplicarle el Método Perturbativo. Nótese que ahora  $Index_1$  y  $Index_2$  se han corregido. El periodo 0.017s, indicado como 3D, por el valor  $Index_1 = 0.05464$  podemos considerarlo 2D.

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

Determinamos los parámetros de distorsión galvánica, para los 4 periodos considerados, con parámetros de búsqueda  $\rho_0 \leq 1\Omega m$ , valores prefijados<sup>5</sup> de  $t = 0.49$  y  $e = 0.63$  y  $\epsilon^- \leq 0.001$ . Se obtienen los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (0.50, 0.64, -0.59)$ . Estos valores de distorsión galvánica se han obtenido para el tensor rotado al *Phase Sensitive Strike*,  $47.38^\circ$ . Para poder compararlos con los valores aplicados de distorsión galvánica debemos hacerlo en la misma dirección, para ello recurrimos a la representación matricial de la distorsión galvánica. La matriz aplicada de distorsión galvánica, con  $(t, e, s) = (0.37, 0.78, -0.35)$ , es

$$\begin{pmatrix} 0.32276 & 0.38634 \\ 0.52175 & 1.21422 \end{pmatrix}$$

la obtenida con el método, a partir de  $(t, e, s) = (0.50, 0.64, -0.59)$ , rotada  $60^\circ - 47,38^\circ = 12,62^\circ$  resulta

$$\begin{pmatrix} 0.33288 & 0.37642 \\ 0.53430 & 1.20914 \end{pmatrix}$$

<sup>5</sup>De la aproximación para casos 1D y 2D, sección 7.5, se obtiene una primera aproximación para los parámetros de distorsión galvánica  $t$  y  $e$  que podemos utilizar para agilizar la búsqueda.

y la diferencia relativa

$$\begin{pmatrix} 3.1\% & 2.6\% \\ 2.4\% & 0.4\% \end{pmatrix}$$

La relación entre los parámetros  $t$ ,  $e$ ,  $s$  y la matriz de distorsión galvánica está "mal condicionada". Por tanto la mejor comparación se realiza a partir de las regionales que se obtienen directamente de los parámetros  $(t, e, s)$  (eq. 10.1).

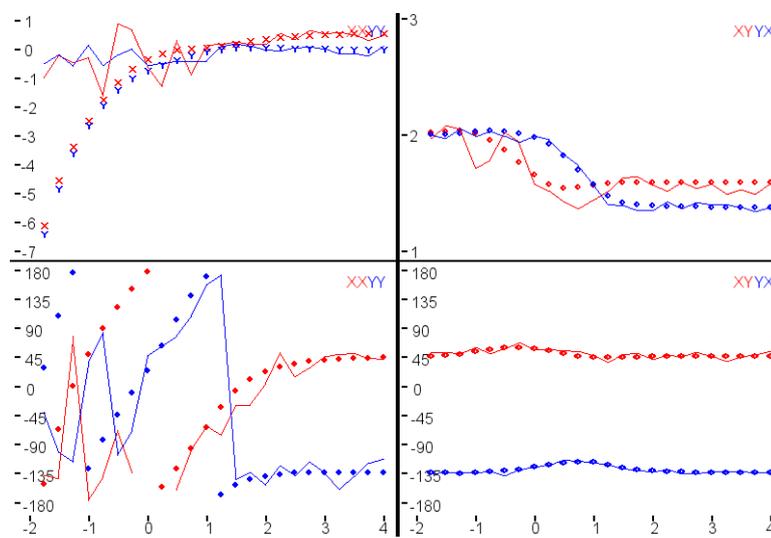


Figura 11.8: Comparativa de las curvas originales (puntos) con las regionales obtenidas con el método basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (MIDtes) (línea continua).

Podemos ver en la figura 11.8 que el tensor de impedancias regional se ajusta bien al tensor de impedancias original. Los desajustes más significativos son debidos al ruido añadido, sobretudo los periodos pequeños de las curvas de resistividad aparente y fases asociadas a las componentes diagonales de la matriz del tensor de impedancias.

### 11.1.6. Método ( $M\Gamma\Omega$ ) basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$

Aplicamos este método directamente en la dirección de medida del tensor de impedancias experimental. Calculamos los parámetros de distorsión para los cuatro mismos periodos considerados en el apartado anterior,  $T_0 = 0.1$ , con parámetros de búsqueda  $\gamma \leq 0.001$  y  $\varepsilon \leq 0.001$ . De este modo obtenemos los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (-0.05, -0.80, -0.18)$ . La matriz de distorsión aplicada, con  $(t, e, s) = (0.37, 0.78, -0.35)$ ,

$$\begin{pmatrix} 0.32276 & 0.38634 \\ 0.52175 & 1.21422 \end{pmatrix}$$

la obtenida con el método, a partir de  $(t, e, s) = (-0.05, -0.80, -0.18)$ , rotada  $60^\circ$  resulta

$$\begin{pmatrix} 0.33727 & 0.37960 \\ 0.52376 & 1.21423 \end{pmatrix}$$

y la diferencia relativa

$$\begin{pmatrix} 4.5\% & 1.7\% \\ 0.4\% & 0.0\% \end{pmatrix}$$

Tras corregir, comparamos con las regionales:

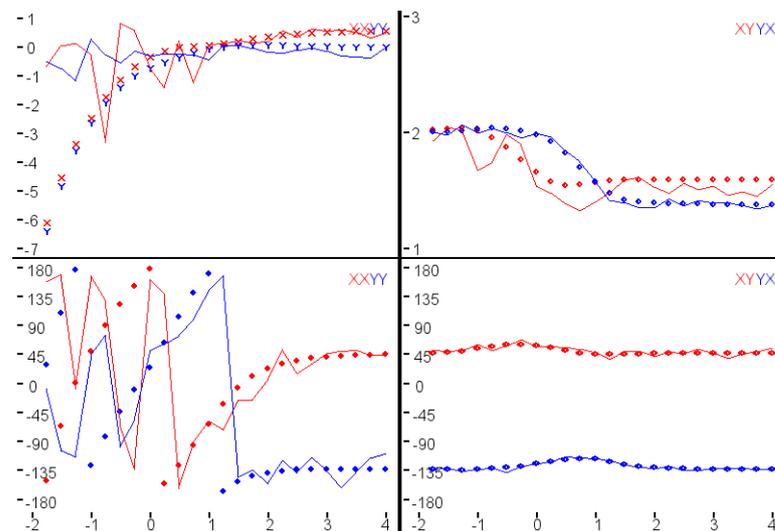


Figura 11.9: Comparativa de las curvas originales (puntos) con las regionales obtenidas con el método ( $M\Gamma\Omega$ ) basado en los índices  $\Gamma$  y  $\Omega$  (línea continua).

Podemos ver en la figura 11.9 que el tensor de impedancias regional se ajusta bien al tensor de impedancias original. Los desajustes más significativos son debidos al ruido. Nótese que en este método no se ha corregido el tensor mediante el Método Perturbativo. Comparando esta figura con la anterior 11.8 podemos ver las diferencias entre metodologías. El método ( $M\Gamma\Omega$ ) basado en los índices  $\Gamma$  y  $\Omega$  presenta más desajustes (figura 11.9) que el método basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (figura 11.8). El método ( $M\Gamma\Omega$ ) tiene la ventaja de poderse aplicar en la dirección de medida, sea cual sea ésta, pero el ruido existente puede influir negativamente en la determinación de los parámetros de distorsión. Por tanto, en casos con ruido severo el Método Perturbativo puede resultar muy útil para corregir los comportamientos 3D.

### 11.1.7. Estación 2 con Ruido

A esta estación se le ha añadido distorsión galvánica con parámetros de distorsión  $(t, e, s) = (-1.40, 0.50, -0.60)$ , se ha rotado  $-25^\circ$  y se le ha aplicado un ruido del 3%. De este modo obtenemos las curvas de resistividad aparente y fases de la figura 11.10 y la relación de índices de la tabla 11.6.

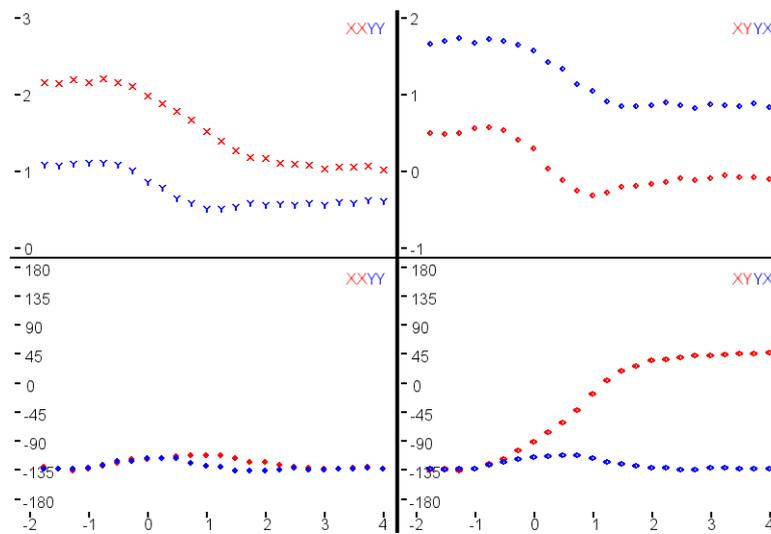


Figura 11.10: Tensor de impedancias regional  $Z^r$  de la estación 2 tras añadirle una distorsión de  $(t, e, s) = (-1.40, 0.50, -0.60)$ , haberlo rotado  $-25^\circ$  y aplicado un 3% de ruido. Nótese la diferencia con la  $Z^r$  de la figura 11.1b.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.017	0.10750	0.12388	55.59	0.90606	0.35351	3D
0.031	0.01533	0.01613	50.27	0.89347	0.36130	1D
0.056	0.14652	0.14886	-29.16	0.89279	0.36133	3D
0.1	0.04682	0.06045	38.35	0.90781	0.35579	2D
0.178	0.08143	0.10079	-37.75	0.90280	0.36433	3D
0.316	0.04664	0.08312	-34.50	0.89793	0.36106	2D
0.562	0.08307	0.16933	-84.48	0.88420	0.34789	3D
1.0	0.04666	0.28420	-63.49	0.86060	0.35054	2D
1.778	0.00018	0.30373	-69.18	0.85535	0.31314	2D
3.162	0.02892	0.35947	-73.74	0.83520	0.29724	2D
5.623	0.13105	0.44341	-83.59	0.84062	0.23630	3D

Tabla 11.6: Índices para el tensor regional magnetotélurico de la Estación 2 después de añadirle distorsión galvánica  $(t, e, s) = (-1.40, 0.50, -0.60)$ , rotación de  $-25^\circ$  y ruido 3%.

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

Nuevamente observamos que las diferencias de  $Index_1$  y  $Index_2$  respecto a la tabla 11.2

son debidas al ruido gaussiano añadido, puesto que  $Index_1$  y  $Index_2$  son invariantes en rotación y distorsión galvánica.

### 11.1.8. Método (MIDtes) basado en la independencia de determinación de $t$ y $e$ frente a $s$

**Bloque 1: periodos de 0.017s a 0.1s**

Aplicamos el Método Perturbativo de la sección 10.2 cinco veces consecutivas: la primera con  $\Delta\Theta = 10^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 1.3\%$  y con la condición de que el  $Index_1 \leq 0.1$ , la segunda con  $\Delta\Theta = 2^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 0.8\%$  y con  $Index_1 \leq 0.1$ , la tercera con  $\Delta\Theta = 2^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 0.5\%$  y con  $Index_1 \leq 0.07$ , la cuarta con  $\Delta\Theta = 2^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 0.4\%$  y con  $Index_1 \leq 0.06$  y la quinta con  $\Delta\Theta = 2^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 0.4\%$  y con  $Index_1 \leq 0.05$ . La figura 11.11 muestra el *Phase Sensitive Strike* para los periodos considerados, antes y después de aplicar el Método Perturbativo.

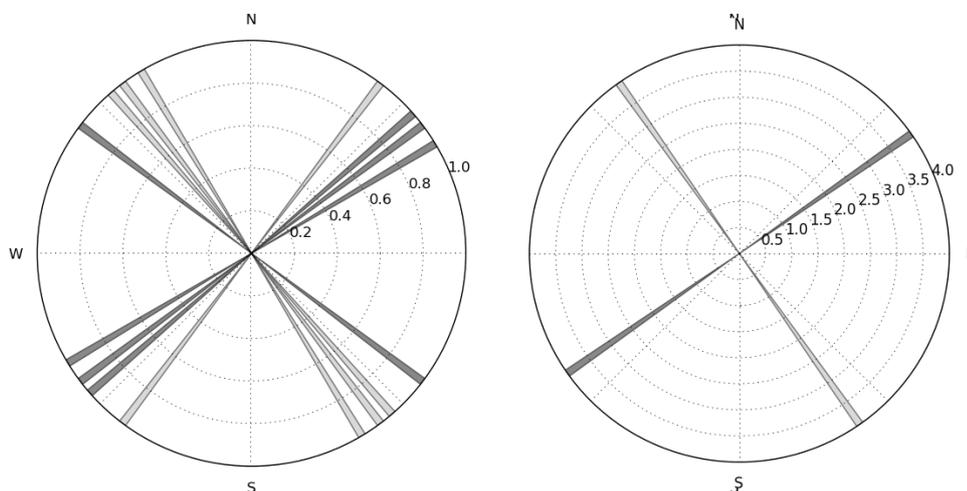


Figura 11.11: Diagramas en Rosa para la Estación 2 antes (izquierda) y después (derecha) de aplicar el Método Perturbativo.

Como resultado de aplicar el Método Perturbativo obtenemos un *Phase Sensitive Strike* para estos periodos  $\Theta = 55.99^\circ \pm 2.02^\circ$  y un *pseudo tensor* de impedancias que, tras rotar  $55.99^\circ$ , utilizamos para calcular los coeficientes de distorsión galvánica (la tabla 11.7 muestra los índices).

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.017	0.04232	0.05570	0.66	0.90628	0.35313	2D
0.031	0.0377	0.03990	0.61	0.89342	0.36138	1D
0.056	0.04275	0.03630	-89.38	0.89302	0.36097	1D
0.1	0.04191	0.04670	0.59	0.90788	0.35584	1D

Tabla 11.7: Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación 2 experimental hasta el periodo 0.1s tras aplicarle el Método Perturbativo.

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

Consideramos como parámetros de búsqueda para la determinación de los parámetros de distorsión  $\rho_0 \leq 1\Omega m$ , valores prefijados<sup>6</sup> de  $t = -2.79$  y  $e = 0.73$ , y  $\epsilon^- \leq 0.0005$ . Se obtienen los parámetros de distorsión  $(t, e, s) = (-2.71, 0.74, -0.05)$ . La matriz de distorsión galvánica aplicada, con  $(t, e, s) = (-1.40, 0.50, -0.60)$ ,

$$\begin{pmatrix} 0.30314 & 1.35520 \\ -0.16048 & 0.21397 \end{pmatrix}$$

la obtenida con el método, a partir de  $(t, e, s) = (-2.71, 0.74, -0.05)$ , rotada ( $25^\circ - 55.99^\circ = -30.99^\circ$ ) resulta

$$\begin{pmatrix} 0.28827 & 1.35876 \\ -0.16632 & 0.20737 \end{pmatrix}$$

y la diferencia relativa

$$\begin{pmatrix} 4.9\% & 0.3\% \\ 3.6\% & 3.1\% \end{pmatrix}$$

Recordemos que la relación entre los parámetros  $t, e, s$  y la matriz de distorsión galvánica está "mal condicionada", por tanto la comparación se realiza mejor a partir de las regionales (fig. 11.12).

<sup>6</sup>De la aproximación para casos 1D y 2D, sección 7.5, se obtiene una primera aproximación para los parámetros de distorsión galvánica  $t$  y  $e$  que podemos utilizar para agilizar la búsqueda.

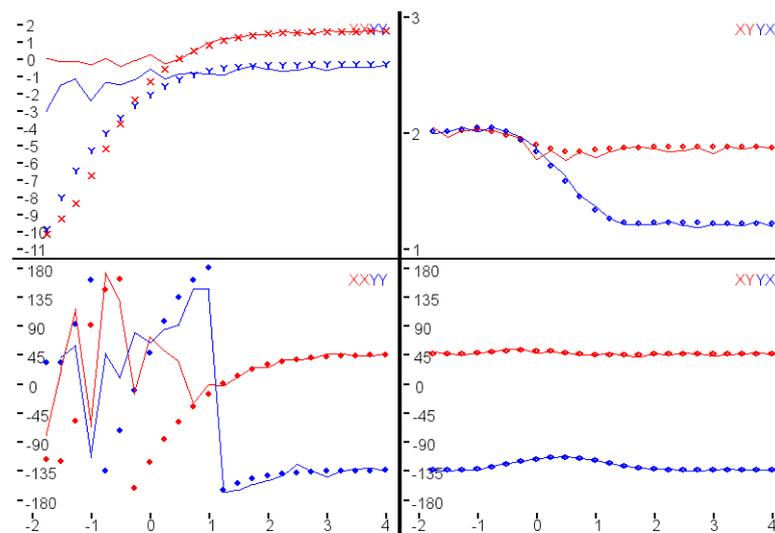


Figura 11.12: Comparativa de las curvas originales (puntos) con las regionales obtenidas con el Método basado en la Independencia de Determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (línea continua).

La figura 11.12 muestra que el tensor de impedancias regional se ajusta muy bien al tensor de impedancias original. Los desajustes más significativos son debidos al ruido, que afecta más a las componentes diagonales de los periodos pequeños.

### Bloque 2: periodos de 0.178s a 1.0s

Aplicamos el Método Perturbativo dos veces simultaneas a este rango de periodos: el primero con  $\Delta\Theta = 10^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 1.3\%$  y con la condición de que el  $Index_1 \leq 0.1$  y el segundo con  $\Delta\Theta = 2^\circ$ , una perturbación Gaussiana con  $\sigma = 1\%$  y con  $Index_1 \leq 0.1$ . La figura 11.13 muestra el *Phase Sensitive Strike* para los periodos considerados, antes y después de aplicar el Método Perturbativo.

Tras aplicar el Método Perturbativo obtenemos un *Phase Sensitive Strike* para estos periodos  $\Theta = 22.87^\circ \pm 2.28^\circ$  y un *pseudo tensor* de impedancias que, tras rotar  $22.87^\circ$ , utilizamos para determinar los coeficientes de distorsión galvánica. Vemos que en este caso, al considerar un rango de periodos mayoritariamente 2D, el *Phase Sensitive Strike* obtenido se aproxima a la rotación efectuada sobre el tensor de impedancias original, que era de  $-25^\circ$ .

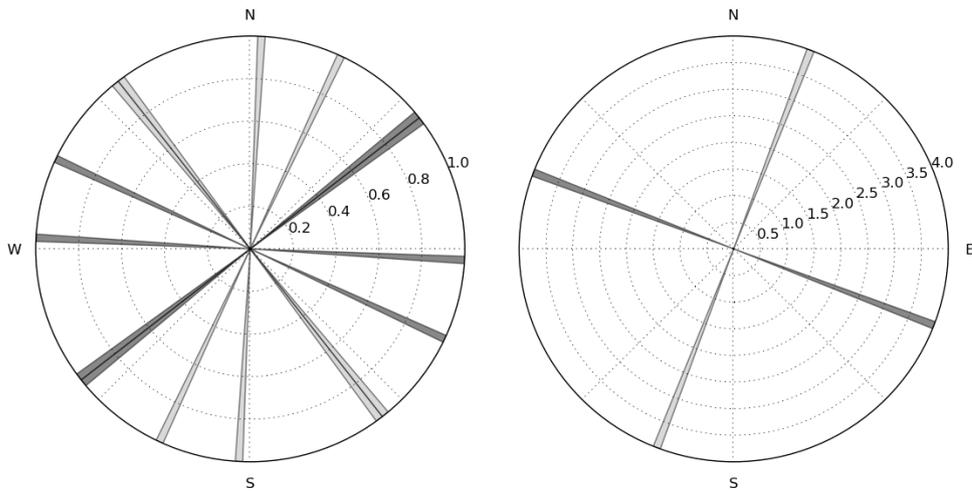


Figura 11.13: Diagramas en Rosa para la Estación 2 antes (izquierda) y después (derecha) de aplicar el Método Perturbativo.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.178	0.00114	0.03372	-89.81	0.90262	0.36436	1D
0.316	0.02538	0.01462	-89.72	0.89781	0.36119	1D
0.562	0.01401	0.18173	89.54	0.88397	0.34853	2D
1.0	0.01566	0.26986	-89.39	0.86061	0.35021	2D

Tabla 11.8: Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación 2 experimental para periodos de 0.178s hasta 1.0s tras aplicarle el Método Perturbativo.

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

Calculamos los parámetros de distorsión para los 4 periodos considerados con parámetros de búsqueda  $\rho_0 \leq 1\Omega m$ , valores prefijados de  $t = -1.44$  y  $e = 0.46$ , y  $\epsilon^- \leq 0.01$ . Así, se obtienen los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (-1.41, 0.46, -0.60)$ . La matriz de distorsión galvánica aplicada, con  $(t, e, s) = (-1.40, 0.50, -0.60)$ , es

$$\begin{pmatrix} 0.30314 & 1.35520 \\ -0.16048 & 0.21397 \end{pmatrix}$$

la obtenida con el método, a partir de  $(t, e, s) = (-1.41, 0.46, -0.60)$ , rotada  $(25^\circ - 22.87^\circ = 2.13^\circ)$  resulta

$$\begin{pmatrix} 0.33748 & 1.34550 \\ -0.17249 & 0.21442 \end{pmatrix}$$

y la diferencia relativa

$$\begin{pmatrix} 11.33\% & 0.7\% \\ 7.5\% & 0.2\% \end{pmatrix}$$

La figura 11.14 muestra la comparación entre las regionales.

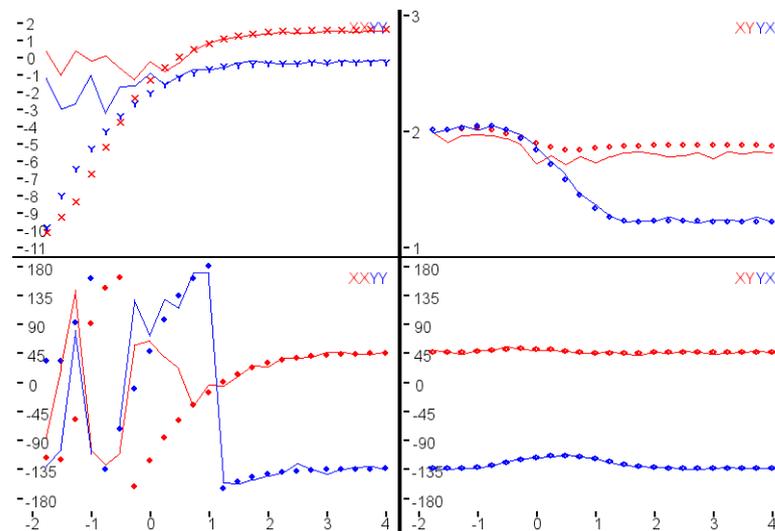


Figura 11.14: Curvas regionales original (puntos) y las obtenidas con el método (MIDtes) basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (línea continua).

La figura 11.14 muestra que el tensor de impedancias regional se ajusta bien al tensor de impedancias original haciendo uso de los periodos principalmente 2D. Los desajustes más significativos son debidos al ruido, siendo el periodo 1.0s el más acusado como se puede ver en la figura 11.14. Así si solo consideramos los tres periodos de 0.178s a 0.562s para la determinación de la distorsión galvánica obtenemos los parámetros  $(t, e, s) = (-1.43, 0.45, -0.62)$ . La matriz  $C$  correspondiente rotada ( $25^\circ - 22.87^\circ = 2.13^\circ$ ) resulta

$$\begin{pmatrix} 0.31465 & 1.35408 \\ -0.16177 & 0.20322 \end{pmatrix}$$

y la diferencia relativa con la matriz de distorsión galvánica aplicada es

$$\begin{pmatrix} 3.8\% & 0.1\% \\ 0.8\% & 5.0\% \end{pmatrix}$$

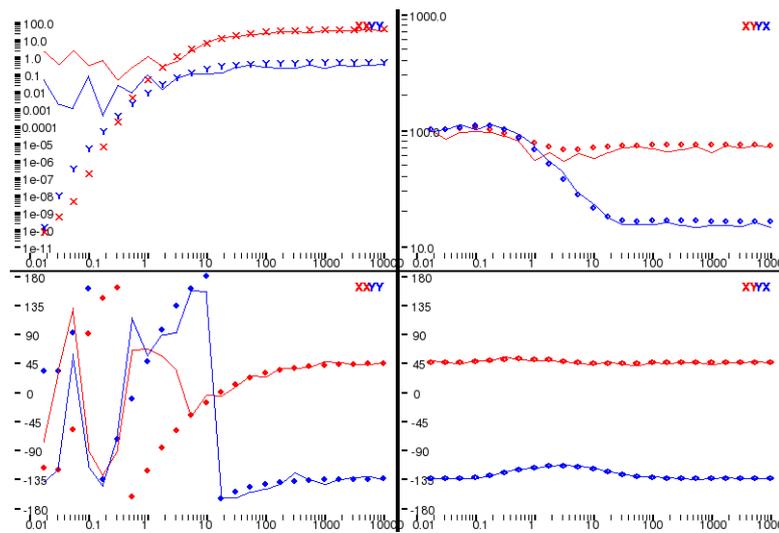


Figura 11.15: Curvas originales (puntos) y las obtenidas con el método basado en la independencia de determinación de  $t$  y  $e$  frente a  $s$  (líneas continuas). Sin considerar el periodo  $1s$  afectado de ruido elevado.

La figura 11.16 muestra cómo ha mejorado el ajuste al dejar de considerar los parámetros determinados por el último periodo  $1.0s$ .

### 11.1.9. Método ( $M\Gamma\Omega$ ) basado en los índices $\Gamma$ y $\Omega$

Si observamos el conjunto de 8 periodos, de  $0,017s$  a  $1.0s$ , (tabla 11.6) encontramos que los periodos  $0.017s$ ,  $0.056s$ ,  $0.178s$  y  $0.562s$  son 3D, por tanto los descartamos para pasar a tener sólo 4 periodos  $0.031s$ ,  $0.1s$ ,  $0.31s$  y  $1s$ . De manera que no utilizamos el Método Perturbativo. Se han usado parámetros de búsqueda  $\gamma \leq 0.001$  y  $\varepsilon \leq 0.001$ , y se obtienen los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (0.11, 2.29, -1.63)$ . Los valores de la matriz de distorsión galvánica aplicada, con  $(t, e, s) = (-1.40, 0.50, -0.60)$ , son

$$\begin{pmatrix} 0.30314 & 1.35520 \\ -0.16048 & 0.21397 \end{pmatrix}$$

la obtenida con el método, a partir de  $(t, e, s) = (0.11, 2.29, -1.63)$ , rotada  $25^\circ$  resulta

$$\begin{pmatrix} 0.37670 & 1.33651 \\ -0.17356 & 0.20368 \end{pmatrix}$$

y la diferencia relativa

$$\begin{pmatrix} 24.26 \% & 1.3 \% \\ 8.1 \% & 4.8 \% \end{pmatrix}$$

La figura 11.16 muestra la comparativa entre las regionales.

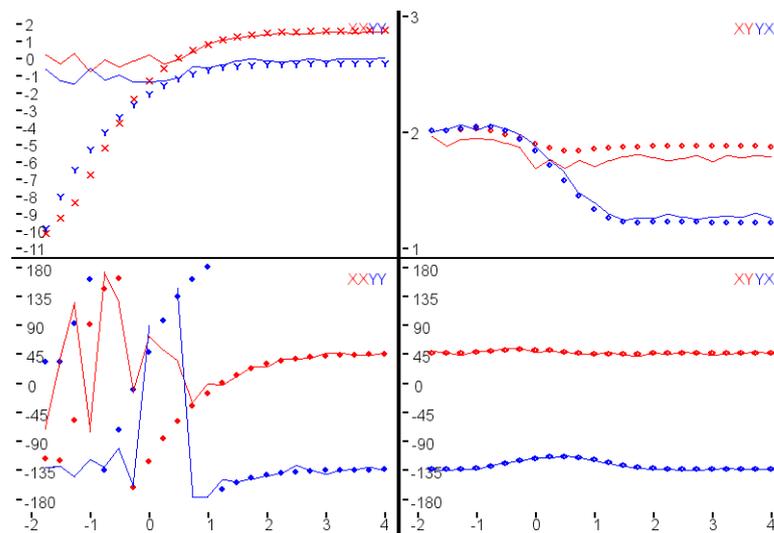


Figura 11.16: Comparación entre las curvas originales (puntos) con las obtenidas con el método ( $M\Gamma\Omega$ ) (líneas continuas).

Podemos ver en la figura 11.16 que el tensor de impedancias regional se ajusta bien teniendo en cuenta que la presencia de ruido es la causa de los desajustes y que en este caso no se ha corregido el tensor mediante el Método Perturbativo. Comparando esta figura con las anteriores, 11.12 y 11.14, vemos las diferencias entre metodologías. Nuevamente el método ( $M\Gamma\Omega$ ) presenta más desajustes en la figura 11.16 que el ( $MIDtes$ ) en las figuras 11.12 y 11.14. A pesar de que el método ( $M\Gamma\Omega$ ) tiene la ventaja de poderse aplicar en la dirección de medida, el ruido puede influir negativamente en la determinación de los parámetros de distorsión. Concluimos que en casos con ruido severo el Método Perturbativo resulta muy útil para corregir los comportamientos 3D.

## 11.2. Datos Experimentales

En este apartado proponemos tres tensores de impedancias experimentales que llamaremos Estación A, Estación B y Estación C. La determinación de la distorsión galvánica se realizará mediante el método ( $M\Gamma\Omega$ ), basado en los índices  $\Gamma$  y  $\Omega$ , ya que permite resolver la distorsión galvánica en la dirección de medida sin necesidad de aplicar el Método Perturbativo para determinar el *strike* de los periodos cortos.

### 11.2.1. Estación A

La figura 11.17 muestra las curvas de resistividad aparente y fases de la estación A. La tabla 11.9 muestra los índices y parámetros para los primeros 7 periodos del tensor de impedancias, de 0.0005s a 0.0031s. Los seis primeros periodos son 2D (0.0005s a 0.0023s), según el análisis dimensional mediante  $Index_1$  y  $Index_2$ , pero además se confirma porque el *Phase Sensitive Strike* para todos estos periodos es constante.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.0005	0.00380	0.21222	58.03	0.00214	0.20314	2D
0.0007	0.01592	0.21529	58.90	0.00200	0.20266	2D
0.0009	0.01422	0.22028	59.04	0.00278	0.20630	2D
0.0013	0.01631	0.23664	59.66	0.00291	0.21208	2D
0.0018	0.03046	0.24495	59.08	0.00131	0.22161	2D
0.0023	0.04679	0.24714	58.06	0.00040	0.23612	2D
0.0031	0.06056	0.22920	52.92	0.00164	0.25687	3D

Tabla 11.9: Índices para el tensor magnetotélurico de la Estación A experimental hasta el periodo 0.0013s.

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

Esta estación muestra indicios de distorsión galvánica ya que los valores de  $\gamma^-$  y  $\epsilon^-$ , para los periodos de 0.0005s a 0.0023s, deberían ser prácticamente 0 para un tensor de impedancias regional 2D (1D).

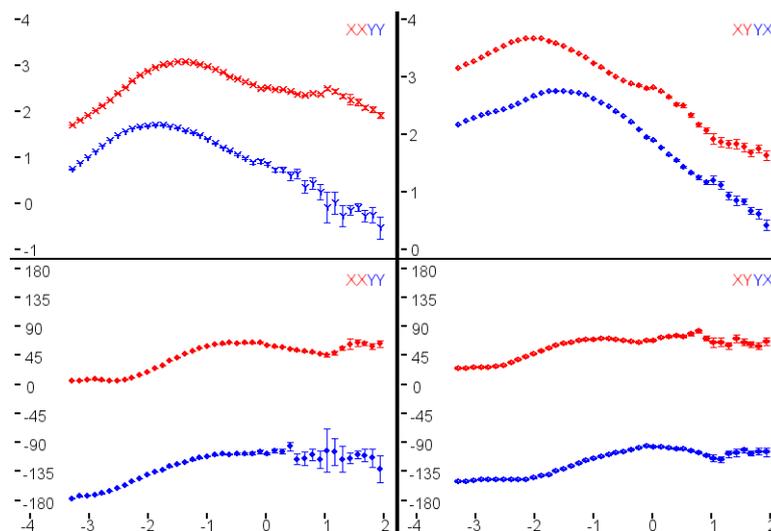


Figura 11.17: Estación A experimental.

Para determinar la distorsión galvánica de esta estación se han utilizado los periodos de 0.0005s a 0.0009s y los parámetros de búsqueda  $\gamma \leq 0.0005$  y  $\epsilon \leq 0.001$ . Se han obtenido

los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (0.08, -0.09, 0.44)$  a partir de los cuales obtenemos la regional corregida de la figura 11.18

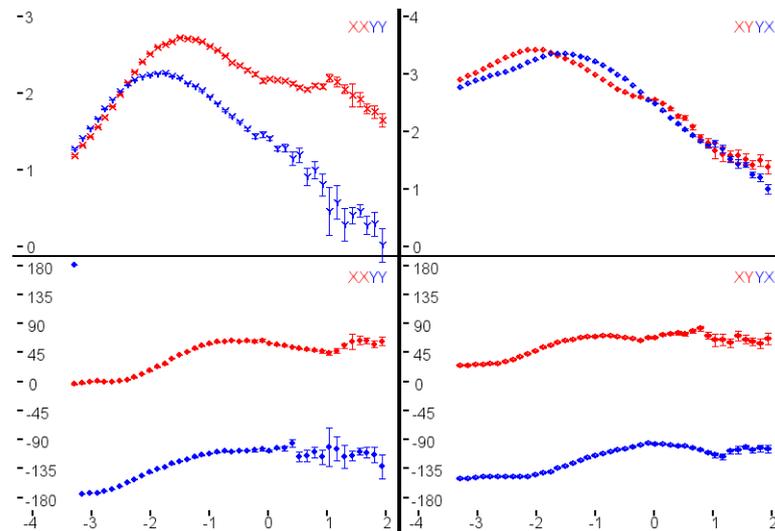


Figura 11.18: Estación A regional corregida de distorsión galvánica.

Los parámetros de distorsión son pequeños exceptuando la anisotropía  $s$ . Por tanto la corrección consiste en este caso en el desplazamiento por *static shift*. Nótese que al ser 2D las curvas de resistividad aparente no necesariamente coinciden en los periodos pequeños.

### 11.2.2. Estación B

La figura 11.19 muestra las curvas de resistividad aparente y fases de la estación B. En la tabla 11.10 se observa que los cuatro primeros periodos, de  $0.002s$  a  $0.006s$ , son 2D mediante el análisis dimensional con  $Index_1$  y  $Index_2$ . Esto se confirma dado que el *Phase Sensitive Strike* para todos estos periodos es constante, excepto para el primer periodo cuyo  $Index_2 = 0.07900$  que está en el límite entre 1D y 2D.

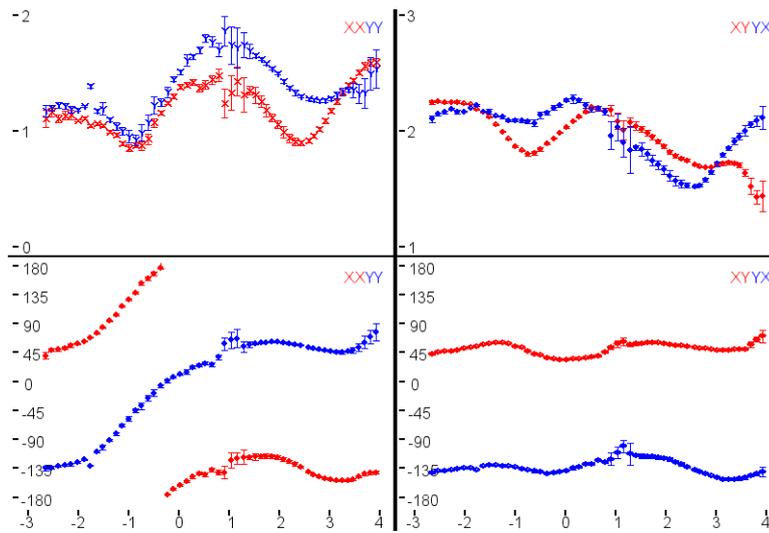


Figura 11.19: Estación B experimental.

Esta estación muestra indicios de distorsión galvánica ya que los valores de  $\gamma^-$  y  $\epsilon^-$ , para los periodos de  $0.002s$  a  $0.006s$ , deberían ser prácticamente 0 para un tensor de impedancias regional 2D (1D).

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.002	0.00891	0.07900	-9.50	$1e^{-5}$	0.09184	2D
0.003	0.03926	0.10750	-15.71	$1e^{-5}$	0.09179	2D
0.004	0.03257	0.12252	-13.69	0.00039	0.08757	2D
0.006	0.03670	0.12133	-15.83	0.00018	0.08441	2D
0.008	0.05424	0.12528	-18.36	0.00010	0.08271	3D

Tabla 11.10: Índices para el tensor magnetotelúrico de la Estación B experimental hasta el periodo  $0.0006s$ .

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

Para la determinación de la distorsión galvánica asociada a esta estación se han utilizado los periodos de  $0.002s$  a  $0.004s$  y los parámetros de búsqueda  $\gamma \leq 0.0005$  y  $\epsilon \leq 0.001$ . Se obtienen los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (-0.01, -0.29, 0.04)$  que nos permiten obtener la regional corregida de la figura 11.20

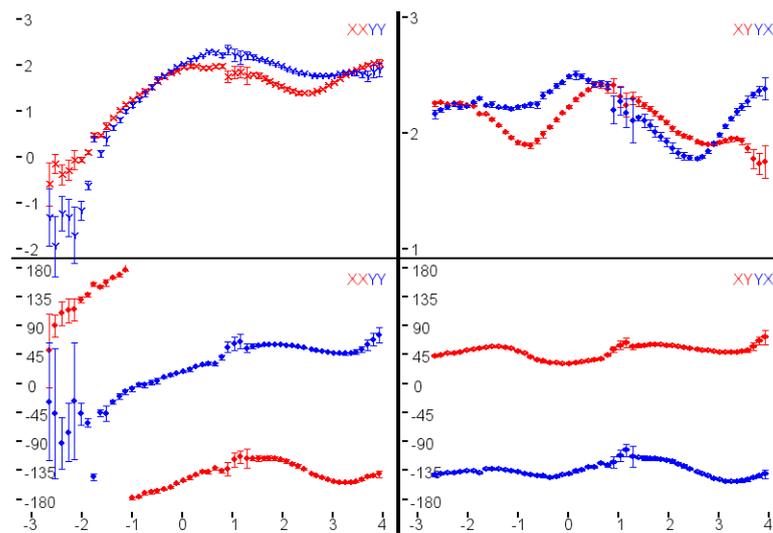


Figura 11.20: Estación B regional corregida de distorsión galvánica.

La mayor diferencia de la regional corregida aparece en las componentes diagonales del tensor, principalmente en los periodos pequeños.

### 11.2.3. Estación C

La figura 11.21 muestra las curvas de resistividad aparente y fases de la estación C. En la tabla 11.11 vemos que los tres primeros periodos son 3D. Dada la dispersión de valores que presentan tanto en la tabla como en la representación de las curvas (fig. 11.21) los periodos de  $0.003s$  a  $0.006s$  se descartan para la determinación de los parámetros de distorsión. Posiblemente este comportamiento sea debido a errores. En cambio los periodos que van de  $0.008s$  a  $0.025s$  son 2D, a partir del análisis dimensional mediante  $Index_1$  y  $Index_2$ . Esto se confirma dado que el *Phase Sensitive Strike* para todos estos periodos es prácticamente constante.

Periodo (s)	$Index_1$	$Index_2$	Strike <sup>a</sup> (°)	$\gamma^-$	$\epsilon^-$	Dimensión del Periodo
0.003	0.07341	0.69511	83.44	0.01575	0.32037	3D
0.004	0.20015	0.07800	-54.31	0.00209	0.19855	3D
0.006	0.05268	0.21229	33.04	$7e^{-5}$	0.17798	3D
0.008	0.00747	0.05459	59.13	0.00070	0.17629	2D
0.012	0.03889	0.10622	56.62	0.00095	0.15346	2D
0.017	0.00984	0.05706	54.20	0.00057	0.14570	2D
0.025	0.01529	0.06365	66.36	0.00134	0.15720	2D

Tabla 11.11: Índices para el tensor magnetotélurico de la Estación C experimental hasta el periodo  $0.025s$ .

<sup>a</sup>Nos referimos en realidad al *Phase Sensitive Strike* cambiado de signo.

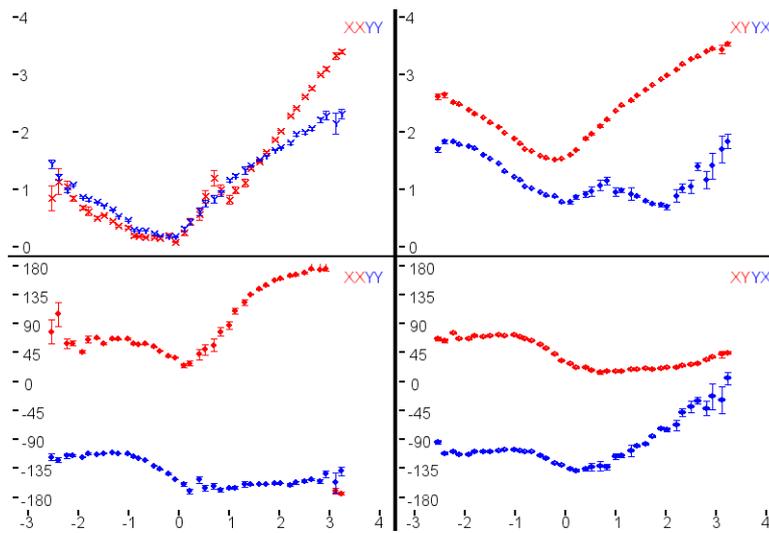


Figura 11.21: Estación C experimental.

Para determinar la distorsión galvánica asociada a esta estación (figura 11.21) se han descartado los periodos de  $0.003s$  a  $0.006s$  por ser 3D, en cambio se han utilizado los periodos  $0.008s$ ,  $0.012s$  y  $0.017s$ . Los parámetros de búsqueda  $\gamma \leq 0.0005$  y  $\varepsilon \leq 0.001$ . Se obtienen los parámetros de distorsión galvánica  $(t, e, s) = (0.06, -0.25, 0.33)$  de los que obtenemos la regional corregida de la figura 11.22

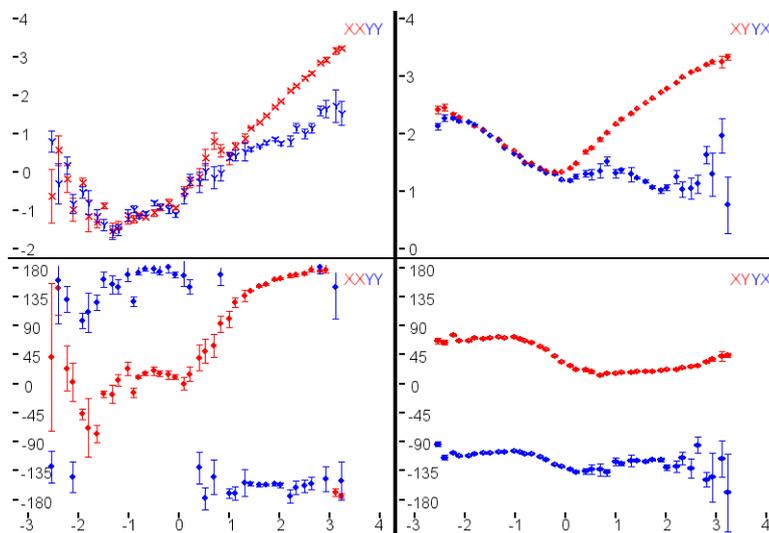


Figura 11.22: Estación C regional corregida de distorsión galvánica.

En este caso vemos que las principales diferencias que se observan después de la corrección son el *static shift* de las curvas de resistividad aparente y que las fases de  $90^\circ$  de la componente  $\phi_{yx}$  desaparecen en este sistema de referencia. En realidad tales fases no desaparecen, pueden ser visibles en otra rotación.

# Capítulo 12

## Conclusiones

El tensor de impedancias es el principal elemento matemático que condensa los datos en Magnetotelúrica y que solemos encontrar representado de forma matricial. No obstante, esta representación no ofrece toda la información que el tensor posee. Cuando se trata de caracterizar un espacio geométrico, el mejor modo de hallar su carácter y significancia es dar con su grupo de transformaciones. Felix Klein, en su programa Erlanger [Klein 1872], nos descubre que las propiedades geométricas se encuentran codificadas en el grupo de transformaciones de los espacios. En este sentido, las álgebras de Clifford son un grupo asociativo que ofrece un sistema algebraico unificado para las propiedades estructurales y transformacionales que constituyen y/o afectan al espacio. Concretamente las álgebras de Clifford  $Cl_3$  caracterizan plenamente al Tensor de Impedancias, dotándolo de significancia geométrica que facilita obtener de forma sistemática, intencionada y controlada diversas expresiones y funciones relacionadas con propiedades de simetría o invariancia del tensor. Por lo tanto, ofrece una estructura y metodología para realizar estudios teóricos que van más allá de simples sumas o composiciones matriciales.

Generalizar el tensor de impedancias en álgebras de Clifford ha permitido obtener los siguientes resultados:

- Poder descomponer el tensor de impedancias en sus elementos algebraico-geométricos más simples (en  $Cl_3$ ). Esta descomposición aporta gran sencillez al desarrollo matemático. Como ejemplo de aplicación se han analizado las rotaciones y en particular se han obtenido 7 invariantes de rotación irreducibles e independientes.
- Se han analizado las subálgebras de  $Cl_3$ ,  $Cl_2^{12}$ ,  $Cl_2^{23}$  y  $Cl_2^{31}$ . Se ha visto que la subálgebra  $Cl_2^{12}$  es la que dota de significancia la invariancia del *phase tensor* con la distorsión galvánica.
- Se ha representado la distorsión galvánica en álgebras de Clifford  $Cl_2$ .

- En el contexto de  $Cl_2$  se han generalizado y unificado las distintas representaciones del tensor de impedancias, siendo los Diagramas de Mohr y el *phase tensor* los más representativos. En este sentido las álgebras de Clifford han dotado de carácter y significancia tanto a la construcción matemática como a los resultados referidos a estas representaciones.
- A partir de la generalización en  $Cl_2^{12}$  del *phase tensor* se han obtenido los índices  $Index_1$ ,  $Index_2$  y el *Phase Sensitive Strike*. Éstos se han hallado exclusivamente del *phase tensor* en el contexto de las álgebras de Clifford, dotándolos de peso algebraico-geométrico.
- Se han establecido nuevos criterios de análisis de la dimensionalidad del Tensor de Impedancias mediante los índices  $Index_1$  y  $Index_2$ . La importancia de los mismos radica en que son invariantes por rotación y distorsión galvánica, lo que permite analizar directamente un tensor experimental (con distorsión y en la propia dirección de medida). Se han determinado los valores de  $Index_2$  para el caso 2D cuando determinante de  $Z \leq 0$ .
- Se han establecido relaciones entre funciones cuya igualdad se mide, para cada período, con los índices  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\epsilon$ . Estas relaciones ayudan a determinar la dimensionalidad del tensor de impedancias regional. Para los casos 1D, 2D y algunos 3D regionales (tabla 8.1) estos índices son cero en ausencia de distorsión galvánica y distintos de cero con la presencia de distorsión galvánica. Esta propiedad permite utilizar dichas relaciones como constricciones para determinar la distorsión galvánica.
- Se ha realizado un estudio de las funciones densidad de probabilidad de los índices y funciones analizados. Se concluye que  $Index_1$  y el invariante  $J8$  son generalmente Gaussianas hasta una varianza equivalente al 35 % de error en los datos (ruido). La función densidad de probabilidad del *Phase Sensitive Strike* en el caso 2D deja de ser Gaussiana para errores superiores a 15 %.
- Se ha desarrollado un algoritmo, el Método Perturbativo, para determinar el *strike* en los casos 2D con presencia de ruido. El algoritmo aprovecha la independencia del *Phase Sensitive Strike* con la distorsión galvánica. Mediante la generación de ruido con distribución gaussiana, se obtiene un tensor corregido de ruido, el *pseudo tensor*, con un ángulo *Phase Sensitive Strike* común al conjunto de periodos considerados. Paralelamente se ha analizado la función densidad de probabilidad del *Phase Sensitive Strike* para determinar en qué medida podemos aproximar el ruido a una distribución gaussiana. Se concluye que para errores inferiores al 15 % los casos 2D son gaussianos.

- Se ha diseñado una metodología para determinar y corregir la distorsión galvánica en el caso general 3D, siempre que los periodos pequeños tengan un comportamiento 2D o 1D (o 3D en los casos tabla 8.1). La metodología consiste en una búsqueda estocástica, con constricciones, de los parámetros de distorsión *twist*, *shear* y *anisotropy* ( $t, e, s$ ). Se han diseñado dos métodos basados en diferentes constricciones. En un método (MIDtes) se requiere rotar el tensor de impedancias en la dirección del *strike* 2D de los periodos cortos. El segundo método (MΓΩ) determina la distorsión galvánica en la propia dirección de medida, por lo que resulta más conveniente, a la vez que evita la propagación de error debida a la rotación del tensor. El segundo método se basa en las relaciones definidas con los índices  $\gamma$  y  $\epsilon$  que son independientes de la rotación.
- La determinación del parámetro *anisotropy* ( $s$ ) permite recuperar la posición relativa entre las componentes diagonales y entre las componentes antidiagonales, en la escala logarítmica. La única indeterminación que permanece al recuperar el tensor de impedancias regional es la ganancia  $g$ , responsable de desplazamientos verticales iguales para las cuatro resistividades aparentes (en escala logarítmica). Cuando el tensor está en la dirección del *Phase Sensitive Strike* de los periodos pequeños, al corregir  $s$  obtenemos la mínima diferencia entre las componentes antidiagonales y entre las diagonales. Sólo en el caso 1D esta diferencia es cero. Por tanto, en los casos 2D, el procedimiento habitual de desplazar las curvas de resistividad aparente antidiagonales, para que a periodos pequeños las dos polarizaciones de resistividad aparente coincidan, es errónea. La diferencia entre las antidiagonales de resistividad aparente sólo puede conocerse determinando  $s$ . La única incógnita que permanece desconocida es el desplazamiento vertical *absoluto* de las cuatro componentes de las resistividades aparentes debido a  $g$ .
- Se ha elaborado un programa denominado MITT que recoge las diversas metodologías para determinar la distorsión galvánica, así como diferentes representaciones del tensor de impedancias y la generación de funciones densidad de probabilidad *Index*<sub>1</sub>, *Index*<sub>2</sub> y *Phase Sensitive Strike*. El programa se encuentra en el Dipòsit Digital de la UB (<http://hdl.handle.net/2445/66846>).
- En esta tesis se han abordado algunas de las posibilidades del análisis del tensor de impedancias magnetoteléurico en el contexto de la álgebras de Clifford. Pero solo se ha abierto un nuevo campo potencial para desarrollar un aparato matemático ideal para futuras investigaciones teóricas sobre el tensor de impedancias.



## Bibliografía

- Agamben, G. (2010), *Signatura Rerum: Sobre el método*, Editorial Anagrama.
- Avdeeva, A., Moorkamp, M., Avdeev, D., Jegen, M. y Miensopust, M. (2015), Three-dimensional inversion of magnetotelluric impedance tensor data and full distortion matrix, *Geophys. J. Int.* **202**, 464–481.
- Bahr, K. (1988), Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor-regional induction and local telluric distortion, *J. Geophys.*, **62**, 119–127.
- Bahr, K. (1991), Geological noise in magnetotelluric data: A classification of distortion types, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **66**, 24–38.
- Bibby, H. M. (1986). Analysis of multiple-source bipole-dipole resistivity surveys using the apparent resistivity tensor, *Geophysics*, **51**, 972–983.
- Bibby, H. M., Caldwell, T.G., y C. Brown (2005). Determinable and non-determinable parameters of galvanic distortion in magnetotellurics, *Geophys. J. Int.*, **163**, 915–930.
- Bronshtein, I.N., Semendyayev, K.A., Musiol, G. & Muehlig H., 2007. *Handbook of Mathematics*, Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main.
- Caldwell, T. G., H. M. Bibby, y C. Brown (2004), The magnetotelluric phase tensor, *Geophys*, **158**, 457–469.
- Cartan, É. (1974), Notice sur les travaux scientifiques. Discours de la méthode. *Gauthier-Villars*, Paris.
- Chave, A. D., y J. T. Smith (1994), On electric and magnetic galvanic distortion tensor decompositions, *J. Geophys. Res.*, **99**, 4669–4682.
- Chave A. D. (2014). On the statistics of magnetotelluric rotational invariants *Geophys. J. Int.*, **196**, 111-130.
- Clifford, W. (1878), Applications of Grassmann's extensive algebra, *American Journal of Mathematics I*, **4**, 350–358.

- Faucault, M. (1966), *Las palabras y las cosas*, Buenos Aires, Siglo XXI, 2008.
- Garcia, X., y A.G. Jones (2002), Extended decomposition of MT data, in Three-Dimensional Electromagnetics, *Methods Geochem. Geophys.*, **35**, 235–250.
- Groom, R. W., y R. C. Bailey (1989), Decomposition of magnetotelluric impedance tensors in the presence of local three-dimensional galvanic distortion, *J. Geophys. Res.*, **94**, 1913–1925.
- Groom, R. W., y R. C. Bailey (1991), Analytic investigations of the effects of near-surface three-dimensional galvanic scatterers on MT tensor decompositions, *Geophysics*, **56**, 496–518.
- Hestenes, D., Li, H., y A. Rockwood (2001), New Algebraic Tools for Classical Geometry. In: Sommer, G. (ed.), *Geometric Computing with Clifford Algebra*, Springer, Heidelberg, 3–26.
- Hestenes, D. (2008), *New Foundations for Classical Mechanics*, An International Book Series on The Fundamental Theories of Physics: Their Clarification, Development and Application **99**, Kluwer academic publishers. .
- Jones, A. G. (1988), Static shift of magnetotelluric data and its removal in a sedimentary basin environment, *Geophysics*, **53(7)**, 967–978.
- Jones, A. G. (2012), Distortion decomposition of the magnetotelluric impedance tensors from a one-dimensional anisotropic Earth, *Geophys. J. Int.*, **189**, 268–284.
- Klein F. (1872), *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, *Mathematische Annalen*, **43(1893)**, 63–100 (Also: Gesammelte Abh. Vol. 1, Springer, 1921, pp. 460–497).
- Larsen, J. C. (1975), Low Frequency (0-1-6\*0 cpd) Electromagnetic Study of Deep Mantle Electrical Conductivity Beneath the Hawaiian Islands, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **43**, 17–46.
- Ledo, J., P. Queralt, y J. Pous (1998), Effects of galvanic distortion on magnetotelluric data over a three-dimensional magnetotelluric data, *Geophys. J. Int.*, **132**, 295–301.
- Lilley, F. E. M. (1993), Magnetotelluric analysis using Mohr circles, *Geophysics*, **58**, 1498–1506.
- Lilley, F. E. M. (1998), Magnetotelluric tensor decomposition: Part I, Theory for a basic procedure, *Geophysics*, **63**, 1885–1897.

- Lilley, F. E. M. (2012), *Magnetotelluric Tensor Decomposition: Insights from Linear Algebra and Mohr Diagrams*, in *New Achievements in Geoscience*, edited by Hwee-San Lim, pp. 81-106, InTech.
- Lounesto, P. (2001), *Clifford Algebras And Spinors*, London Mathematical Society Lecture Note Series. **286**, Cambridge University Press.
- Mackie, R. L., y T. R. Madden (1993), Three dimensional magnetotelluric inversion using conjugated gradient, *Geophys. J. Int.*, **115**, 215–229.
- Mackie, R. L., T. R. Madden, y P. E. Wannamaker (1993), Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations - Theory and comparisons to integral equation solutions, *Geophysics*, **58**, 215–226.
- Mackie, R. L., y J. R. Booker (1999), Documentation for mtd3fwd and d3-to-mt, *GSY-USA, Inc., San Francisco, Calif.*
- Martí, A., Queralt, P., Jones, A.G. & Ledo, J, 2005. Improving Bahr's invariant parameter using the WAL approach. *Geophys. J. Int.*, **163**, 38-41.
- Matsumoto, M., y T. Nishimura (1998), Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator, *ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation*, **8(1)**, 3–30.
- MMcNeice, W., y A. Jones (2001), Multisite, multifrequency tensor decomposition of magnetotelluric data. *Geophysics*, **66**, 158-173.
- Muñoz, G., A. Matéus, J. Pous, W. Heise, F. Monteiro Santos, y E. Almeida (2008), Unraveling middle-crust conductive layers in Paleozoic Orogens through 3D modeling of magnetotelluric data; the Ossa Morena Zone case study (SW Iberian Variscides), *J. Geophys. Res.*, **113**, B06106, doi:10.1029/2007JB004987.
- Paracelso (1859), *Bücher und Schriften*, edición al cargo de Johannes Huser, Basilea, Waldkirch, 6 vols. (reimpresión anastática, Hildesheim-Nueva York, Olms).
- Rorty, R. (1997), *¿Esperanza o conocimiento? Una introducción al pragmatismo*, FCE, Buenos Aires.
- Szarka, L. & Menvielle, M., 1997. Analysis of rotational invariants of the magnetotelluric impedance tensor, *Geophys. J. Int.*, **129**, 133-142.
- Simpson, F. y K. Bahr (2005), *Practical Magnetotellurics*, Cambridge University Press.

Siripunvaraporn, W., G. Egbert, Y. Lenbury, y M. Uyeshima (2005), Three-dimensional magnetotelluric inversion: Data-space method, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **150**, 3–14.

Smith, J.T. (1995), Understanding telluric distortion matrices, *Geophys. J. Int.*, **122**, 219–226.

Tonti, E. (1975), *On the formal structure of physical theories*, diffusione gratuita, Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

Utada, H., y H. Munekane (2000), On galvanic distortion of regional three-dimensional magnetotelluric impedances, *Geophys. J. Int.*, **140(2)**, 385–398.

Weaver, J. T., Agarwal, A.K. & Lilley, F.E.M., (2000). Characterization of the magnetotelluric tensor in terms of its invariants, *Geophys. J. Int.*, **141**, 321-336.

## Apéndice A

# Funciones Densidad de Probabilidad

El presente apéndice tiene como objetivo dar cuenta de la forma que presentan las funciones densidad de probabilidad simuladas mediante la generación de valores aleatorios gaussianos en torno a cada una de las componentes del tensor de impedancias, reales e imaginarias, con desviaciones estándar de 5 %, 15 % y 35 %. Se ilustran las funciones densidad de probabilidad de los invariantes  $J_5$ ,  $J_6$  y  $J_7$ ,  $Index_2$  y resistividades aparentes y fases. Cada figura muestra las funciones de densidad para tres estaciones correspondientes a los datos sintéticos del artículo [Weaver *et al.* 2000]. Cada figura muestra el Site 3 a 1000s (1D), Site 2 a 100s (2D) y el Site 4 a 1s (3D) de este artículo.

La conclusión de este análisis indica que  $Indice_1$  y  $J_8$  pueden asumirse Gaussianos de forma general para errores inferiores al 35 %. Además para casos 2D el *Phase Sensitive Strike* también puede asumirse Gaussiano para un ruido inferior al 15 %. La resistividad aparente y fases dejan de ser Gaussianos para valores superiores al 35 %.

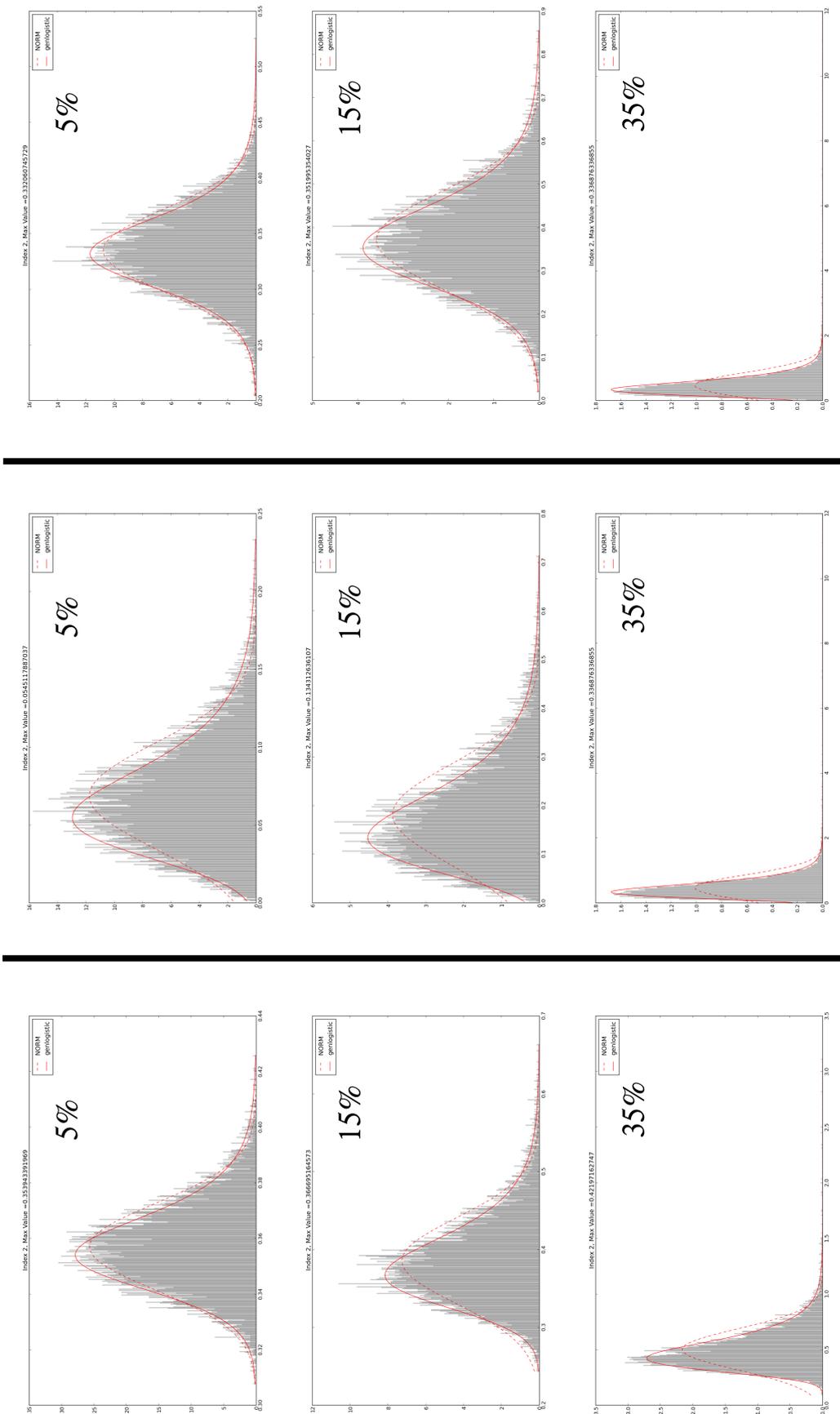


Figura A.1: Función densidad de probabilidad de  $Index_2$  para las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D) (columnas de izquierda a derecha) para distintos valores de desviación estándar, 5%, 15% y 35% (filas de arriba abajo). La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.

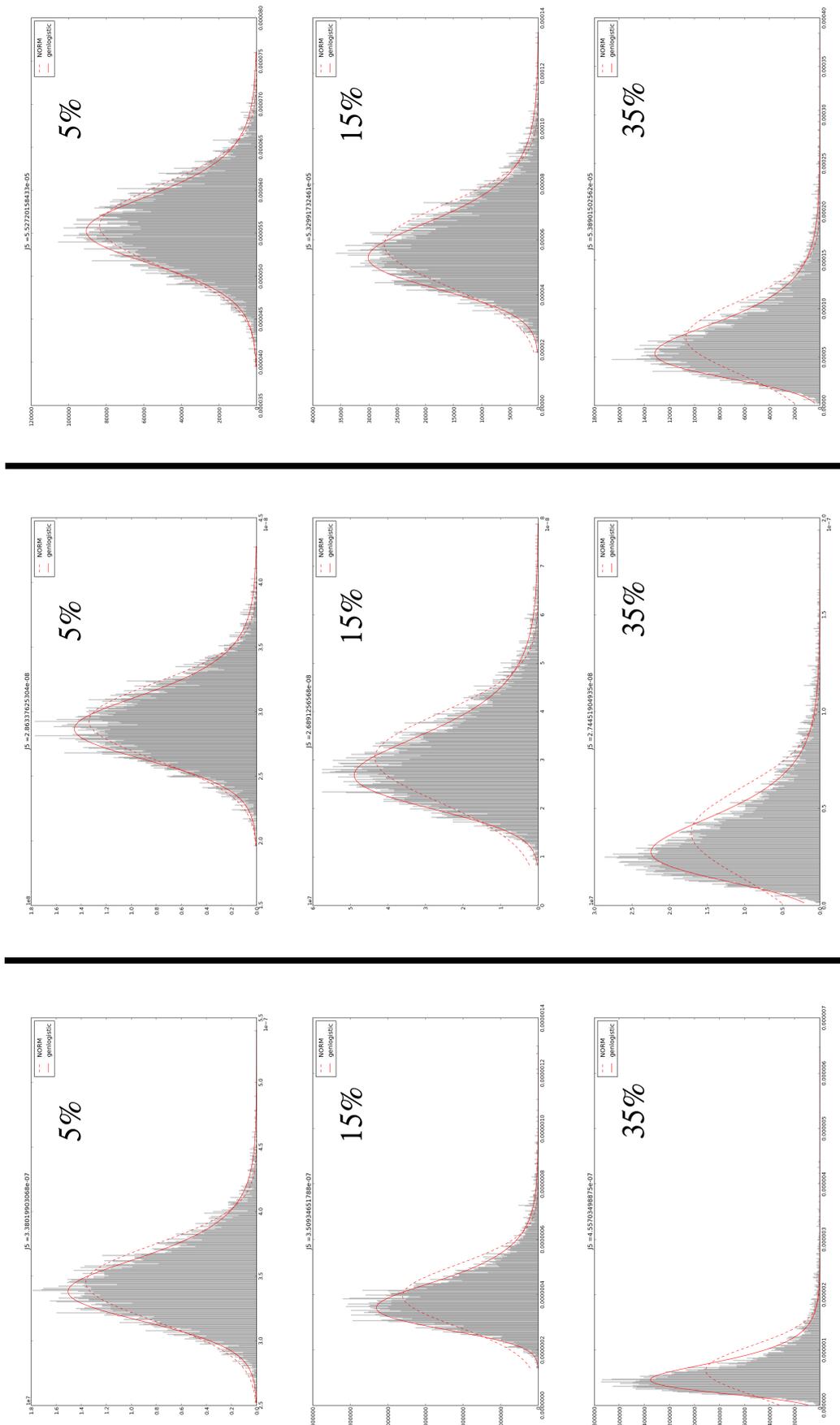


Figura A.2: Función densidad de probabilidad de  $J_5$  para las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D) (columnas de izquierda a derecha) para distintos valores de desviación estándar, 5 %, 15 % y 35 % (filas de arriba abajo). La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.

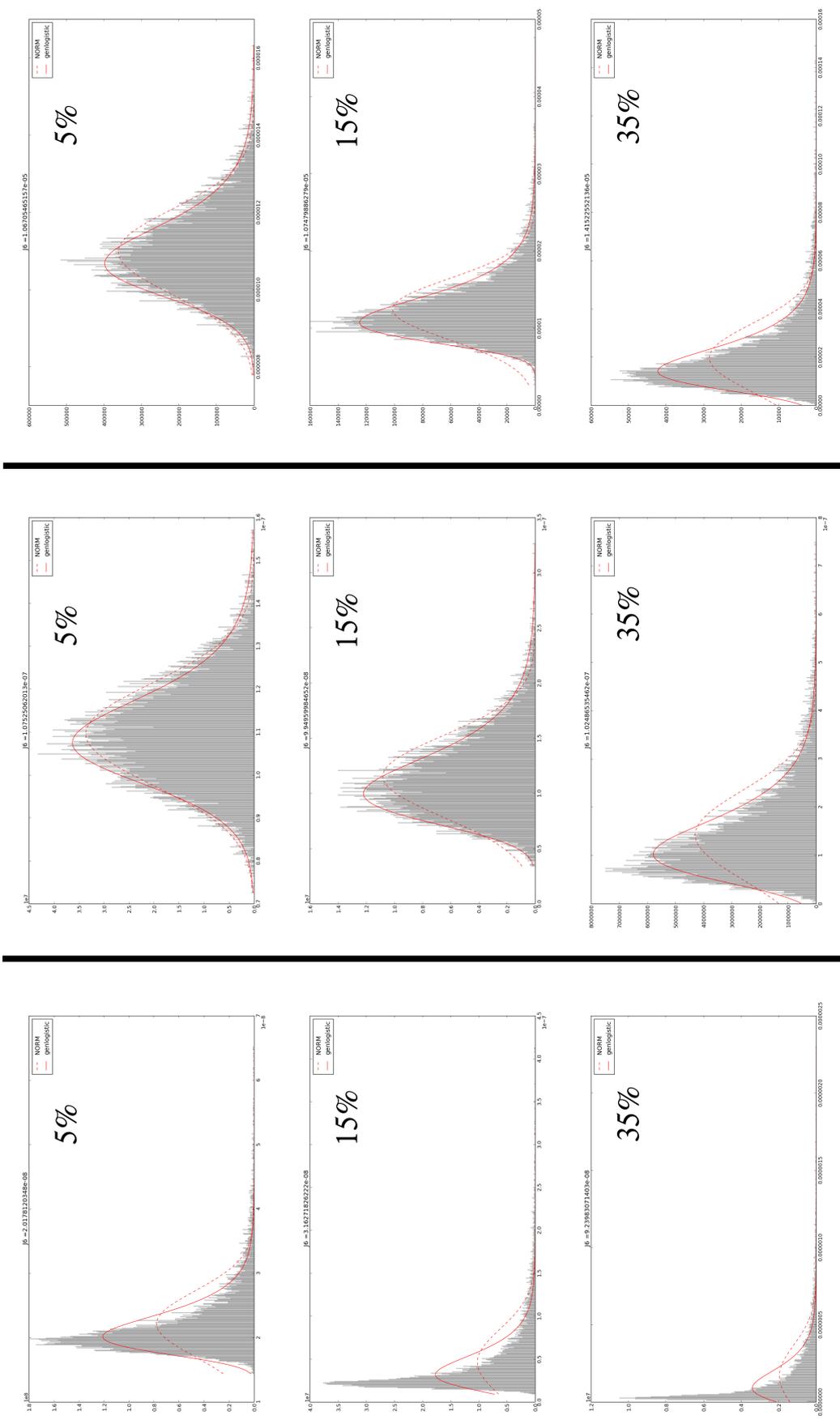


Figura A.3: Función densidad de probabilidad de  $J_6$  para las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D) (columnas de izquierda a derecha) para distintos valores de desviación estándar, 5 %, 15 % y 35 % (filas de arriba abajo). La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.

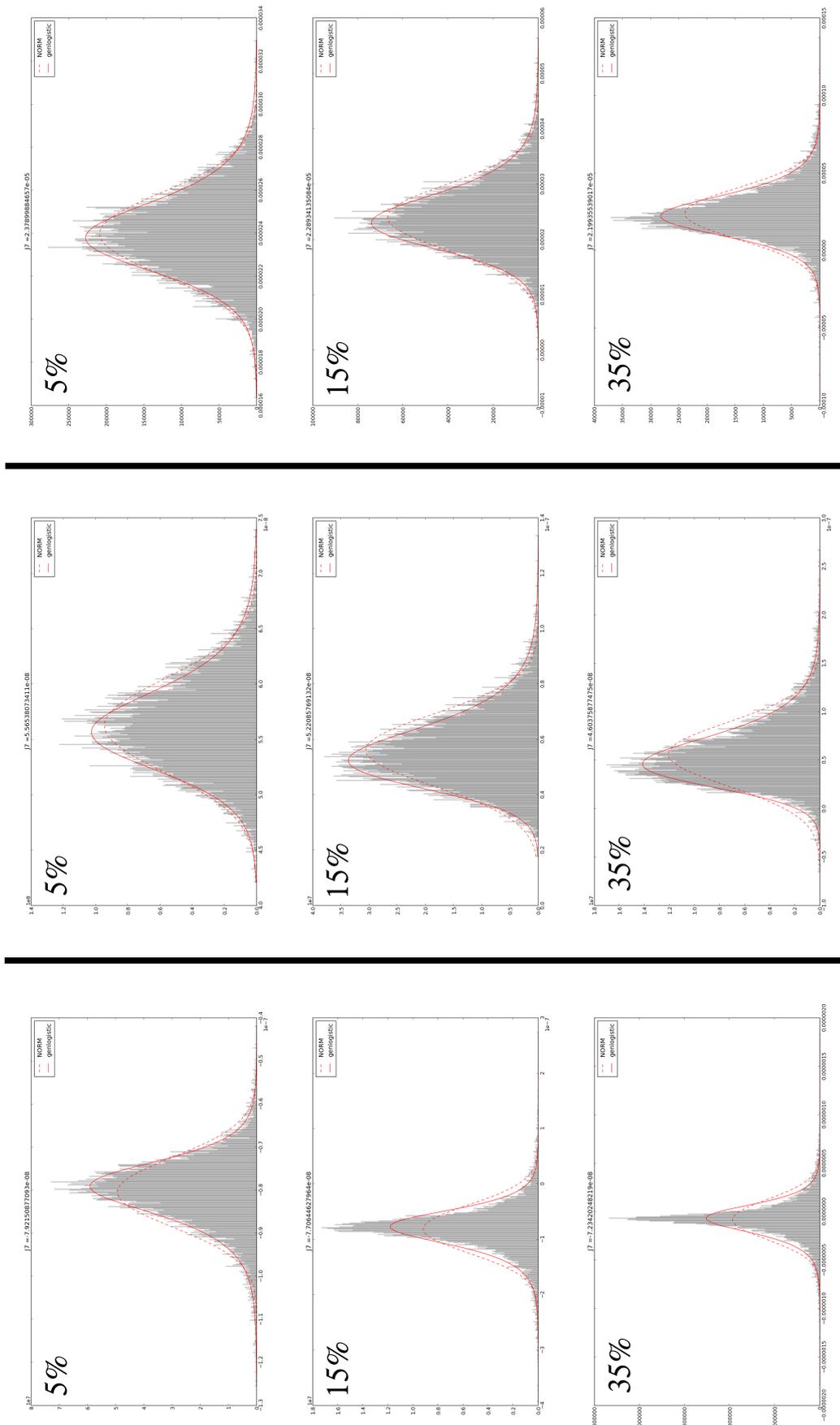


Figura A.4: Función densidad de probabilidad de  $J7$  para las estaciones Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D) y Site 4 a 1s (3D) (columnas de izquierda a derecha) para distintos valores de desviación estándar, 5 %, 15 % y 35 % (filas de arriba abajo). La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.

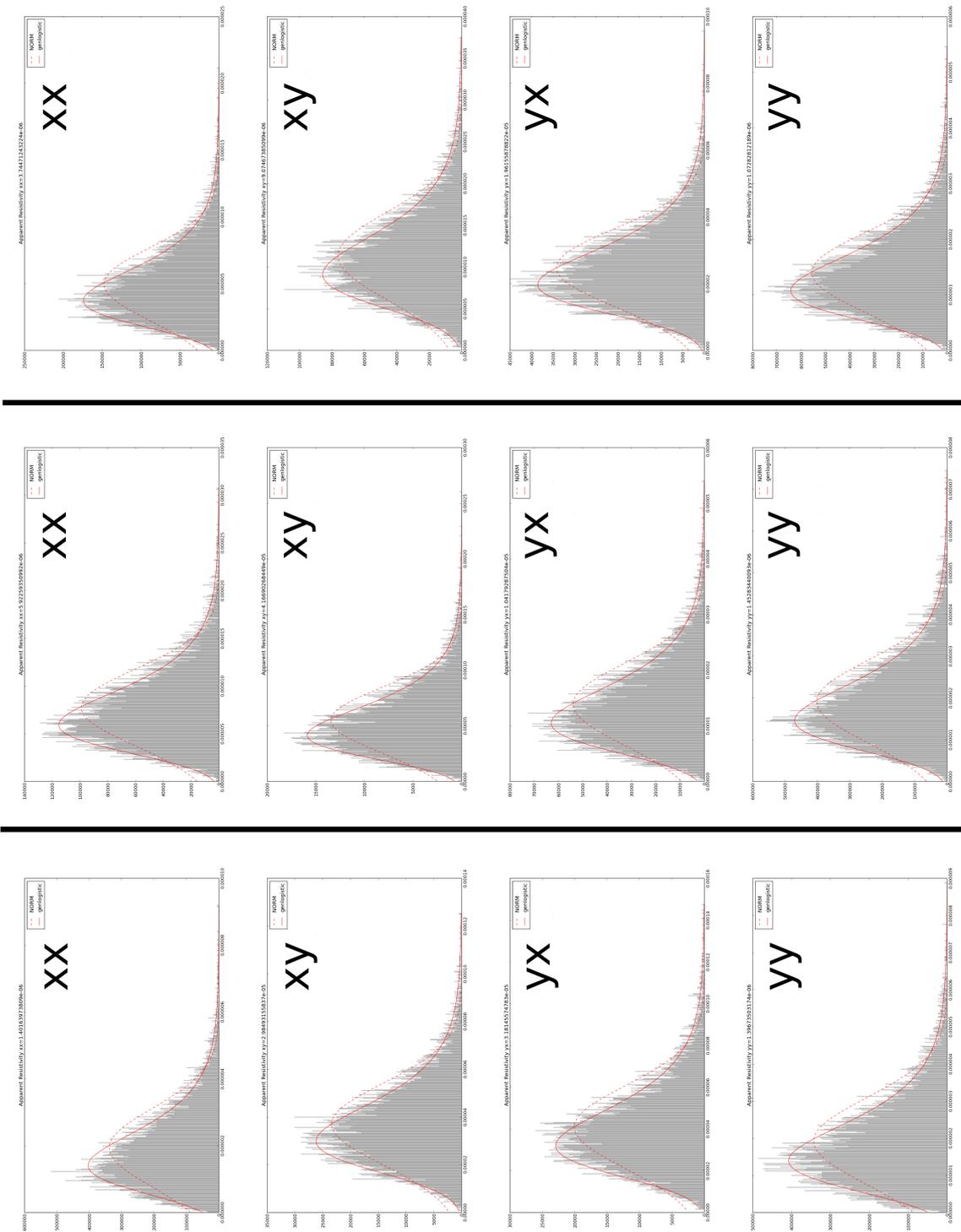


Figura A.5: Función densidad de probabilidad de resistividades aparentes con 35% de ruido. Columnas de izquierda a derecha: Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D), Site 4 a 1s (3D). Filas de arriba abajo corresponden a las componentes del tensor. La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.

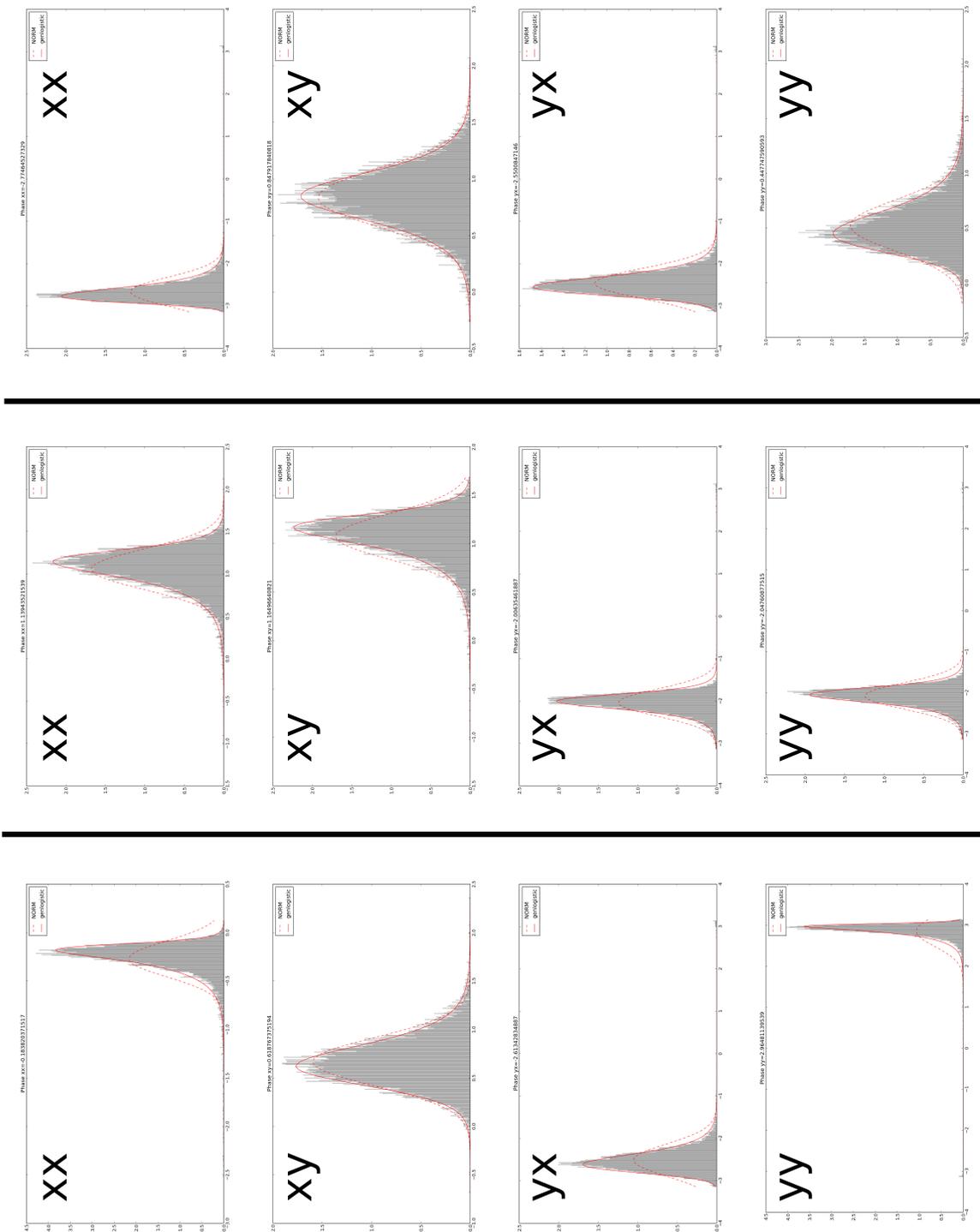


Figura A.6: Función densidad de probabilidad de fases con 35 % de ruido. Columnas de izquierda a derecha: Site 2 a 100s (2D), Site 3 a 1000s (1D), Site 4 a 1s (3D). Filas de arriba abajo corresponden a las componentes del tensor. La línea continua roja representa el ajuste mediante una distribución logística generalizada y la discontinua es una distribución Gaussiana.



## Apéndice B

### Estudio de $Index_2$ cuando determinante de $Z \leq 0$

Consideramos  $Index_1 \approx 0$  (con  $\phi_{12} \approx 0$ ) para los casos que no son 3D, es decir, que son 2D de forma general y en la dirección del *strike* (con  $\phi_2 \approx 0$ ). Esta asunción implica que el  $Index_2 = |\phi_1/\phi_0|$  y lo podemos expresar de la siguiente forma

$$Index_2 = \left| \frac{S_2^{\mathfrak{R}} D_2^{\mathfrak{S}} - D_2^{\mathfrak{R}} S_2^{\mathfrak{S}}}{D_2^{\mathfrak{R}} D_2^{\mathfrak{S}} - S_2^{\mathfrak{R}} S_2^{\mathfrak{S}}} \right| \quad (\text{B.1})$$

Por otro lado los determinantes para  $Z^{\mathfrak{R}}$  y  $Z^{\mathfrak{S}}$  podemos determinarlos a partir de (6.9) y de las propiedades de los números de Clifford definidas en la sub-sección 4.1.2:

$$\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}) = \mathbf{Z}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \bar{\mathbf{Z}}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} = \frac{1}{4} \left[ (S_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 - (D_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 - (S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 + (D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 \right] \quad (\text{B.2})$$

Teniendo en cuenta que consideramos los casos 2D:

De forma general, un 2D rotado  $\theta$  respecto a la dirección del *strike* tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})_{2D} &= \frac{1}{4} \left[ (D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 - (S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 - (D_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ (D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 - (S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \cos(2\theta))^2 - (-S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \sin(2\theta))^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ (D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 - (S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}})^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde  $S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  es el valor correspondiente de este coeficiente en la dirección del *strike*, en cambio  $S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  y  $D_1^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  representan los coeficientes en la dirección de medida.

1. Vamos a demostrar primero ( $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} = 0$  y/o  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} = 0$ )  $\Rightarrow$  ( $Index_2 = 1$ ). Empezaremos viéndolo para el caso  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} = 0$ , en el que quedará demostrado, por construcción, para  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} = 0$ , y luego para el caso simultáneo  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} = \det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} = 0$ . Entonces

$$\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} = 0 \Rightarrow |D_2^{\mathfrak{R}}| = |S_2^{\mathfrak{R}}| \quad (\text{B.4})$$

podemos decir que  $S_2^{\mathfrak{R}} = \text{sing}(S_2^{\mathfrak{R}})|D_2^{\mathfrak{R}}|$  y  $D_2^{\mathfrak{R}} = \text{sing}(D_2^{\mathfrak{R}})|D_2^{\mathfrak{R}}|$  (con  $\text{sing}(S_2^{\mathfrak{R}})$  y  $\text{sing}(D_2^{\mathfrak{R}})$  se entiende el signo de  $S_2^{\mathfrak{R}}$  y  $D_2^{\mathfrak{R}}$ , respectivamente). Substituyendo en (B.1) obtenemos:

$$Index_2 = \left| \frac{\text{sing}(S_2^{\mathfrak{R}})|D_2^{\mathfrak{R}}|D_2^{\mathfrak{S}} - \text{sing}(D_2^{\mathfrak{R}})|D_2^{\mathfrak{R}}|S_2^{\mathfrak{S}}}{\text{sing}(D_2^{\mathfrak{R}})|D_2^{\mathfrak{R}}|D_2^{\mathfrak{S}} - \text{sing}(S_2^{\mathfrak{R}})|D_2^{\mathfrak{R}}|S_2^{\mathfrak{S}}} \right| \quad (\text{B.5})$$

teniendo en cuenta que  $\frac{\text{sing}(D_2^{\mathfrak{R}})}{\text{sing}(S_2^{\mathfrak{R}})} = \frac{\text{sing}(S_2^{\mathfrak{R}})}{\text{sing}(D_2^{\mathfrak{R}})} = \lambda^*$  y que  $|\text{sing}(D_2^{\mathfrak{R}})| = |\text{sing}(S_2^{\mathfrak{R}})| = 1$ , hallamos que

$$Index_2 = \left| \frac{\lambda^* D_2^{\mathfrak{S}} - S_2^{\mathfrak{S}}}{\lambda^* D_2^{\mathfrak{S}} - S_2^{\mathfrak{S}}} \right| = 1 \quad (\text{B.6})$$

Por tanto, ( $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} = 0$ )  $\Rightarrow$  ( $Index_2 = 1$ ). Por construcción, podemos ver que ( $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} = 0$ )  $\Rightarrow$  ( $Index_2 = 1$ ).

El caso simultáneo ( $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} = 0$  y  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} = 0$ )  $\Rightarrow$  ( $Index_2 = 1$ ) se verifica fácilmente. En la ecuación (B.5),  $Index_2 = 1$  para cualquier valor de  $D_2^{\mathfrak{S}}$  y  $S_2^{\mathfrak{S}}$ , por tanto  $Index_2$  sigue siendo 1 para valores de  $D_2^{\mathfrak{S}}$  y  $S_2^{\mathfrak{S}}$  que en concreto hacen que  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} = 0$ .

2. Vamos a demostrar ahora que ( $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} < 0$  o  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} < 0$ )  $\Rightarrow$  ( $Index_2 > 1$ ). Empezaremos viéndolo para el caso  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} < 0$ , en el que quedará demostrado, por construcción, para  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} < 0$ , y luego para el caso simultáneo  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{R}})_{2D} < 0$  y  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} < 0$ . Así pues

$$\det(\mathbf{Z}^{\Re})_{2D} < 0 \Rightarrow |D_2^{\Re}| < |S_2^{\Re}| \Rightarrow \frac{|D_2^{\Re}|}{|S_2^{\Re}|} < 1 \quad (\text{B.7})$$

Partiendo de la ecuación (B.1)

$$\begin{aligned} Index_2 &= \left| \frac{S_2^{\Re} D_2^{\Im} - D_2^{\Re} S_2^{\Im}}{D_2^{\Re} D_2^{\Im} - S_2^{\Re} S_2^{\Im}} \right| \\ &= \left| \frac{\text{sing}(S_2^{\Re}) |S_2^{\Re}| D_2^{\Im} - \text{sing}(D_2^{\Re}) |D_2^{\Re}| S_2^{\Im}}{\text{sing}(D_2^{\Re}) |D_2^{\Re}| D_2^{\Im} - \text{sing}(S_2^{\Re}) |S_2^{\Re}| S_2^{\Im}} \right| \\ &= \left| \frac{|S_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |D_2^{\Re}| \frac{\text{sing}(D_2^{\Re})}{\text{sing}(S_2^{\Re})} S_2^{\Im}}{|D_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |S_2^{\Re}| \frac{\text{sing}(S_2^{\Re})}{\text{sing}(D_2^{\Re})} S_2^{\Im}} \right| \end{aligned}$$

dado que  $\frac{\text{sing}(D_2^{\Re})}{\text{sing}(S_2^{\Re})} = \frac{\text{sing}(S_2^{\Re})}{\text{sing}(D_2^{\Re})}$  podemos ver que  $\frac{\text{sing}(D_2^{\Re})}{\text{sing}(S_2^{\Re})} S_2^{\Im} = \frac{\text{sing}(S_2^{\Re})}{\text{sing}(D_2^{\Re})} S_2^{\Im} = S_2^{\Im}$

$$Index_2 = \left| \frac{|S_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |D_2^{\Re}| S_2^{\Im}}{|D_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |S_2^{\Re}| S_2^{\Im}} \right|$$

dado que  $\frac{|D_2^{\Re}|}{|S_2^{\Re}|} < 1$  vemos que el numerador  $\left| |S_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |D_2^{\Re}| S_2^{\Im} \right| > \left| |D_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |D_2^{\Re}| S_2^{\Im} \right|$  y el denominador  $\left| |D_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |S_2^{\Re}| S_2^{\Im} \right| < \left| |S_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |S_2^{\Re}| S_2^{\Im} \right|$  con lo que

$$Index_2 = \left| \frac{|S_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |D_2^{\Re}| S_2^{\Im}}{|D_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |S_2^{\Re}| S_2^{\Im}} \right| > \left| \frac{|D_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |D_2^{\Re}| S_2^{\Im}}{|S_2^{\Re}| D_2^{\Im} - |S_2^{\Re}| S_2^{\Im}} \right| = \frac{|D_2^{\Re}|}{|S_2^{\Re}|} \quad (\text{B.8})$$

finalmente obtenemos

$$\left. \begin{aligned} Index_2 &> \frac{|D_2^{\Re}|}{|S_2^{\Re}|} \\ 1 &> \frac{|D_2^{\Re}|}{|S_2^{\Re}|} \end{aligned} \right\} \text{ Así, } Index_2 > 1. \quad (\text{B.9})$$

Entonces  $\det(\mathbf{Z}^{\Re})_{2D} < 0 \Rightarrow (Index_2 > 1)$ . Por construcción, podemos ver que  $\det(\mathbf{Z}^{\Im})_{2D} < 0 \Rightarrow (Index_2 > 1)$ . El caso simultáneo ( $\det(\mathbf{Z}^{\Re})_{2D} < 0$  y  $\det(\mathbf{Z}^{\Im})_{2D} < 0$ )  $\Rightarrow (Index_2 > 1)$

no se puede asegurar dado que no todos los valores de  $D_2^{\mathfrak{S}}$  y  $S_2^{\mathfrak{S}}$ , que hacen que  $\det(\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}})_{2D} < 0$ , cumplen la ecuación (B.8).

En los casos 2D, los elementos  $Z_{xy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  son de signo opuesto a los de  $Z_{yx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ , lo que implica que  $\frac{|D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}|}{|S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}|} > 1$ . Entonces, cuando  $\frac{|D_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}|}{|S_2^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}|} < 1$  es porque uno o varios elementos  $Z_{xy}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$  tienen el mismo signo que los de  $Z_{yx}^{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ , esto se traduce en cambios de cuadrante por parte de las fases, en otras palabras, existen fases de más de  $90^\circ$ .

## **Apéndice C**

### **Guía del programa MITT**

# Magnetotellurics Impedance Tensor Tools (MITT)

## User Guide

September, 2015

Ivan Romero-Ruiz<sup>1</sup> and Jaume Pous<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Geodinàmica i Geofísica, Universitat de Barcelona, Martí i Franquès, s/n, 08028 Barcelona, Spain. ( [ivanromeroruiz@ub.edu](mailto:ivanromeroruiz@ub.edu); [jpous@ub.edu](mailto:jpous@ub.edu) )*

## Introduction

This manual is a first draft to guide the practitioner through MITT program. MITT program is mainly constituted by four blocks: 1- Magnetotellurics impedance tensor representation (Apparent resistivity and phase curves, Impedance tensor and Mohr diagrams); 2-Probability Density Functions of different indexes which account for the dimensionality; 3- Perturbed Method to determine the ‘Phase Sensitive strike angle’ for 2D; 4- Galvanic Distortion tools for obtaining the galvanic distortion parameters, *twist, shear and anisotropy* (with the exception of the gain) in a general 3D case. Given that the distortion parameters cannot be determined, the method is based on a constrained stochastic heuristic method, which consists of exploring randomly the full space of the distortion parameters. The constraints imposed assume the 2D (or 1D) tendency for the shortest periods of the regional impedance tensor. In this way a unique solution fulfilling the constraints is obtained. The method is based on Romero-Ruiz and Pous (2015).

## Requirements

MITT program is constituted by a set of programs to analyze the impedance tensor, therefore an edi file is needed. MITT program has been written in Python 2.7 and the following modules are required:

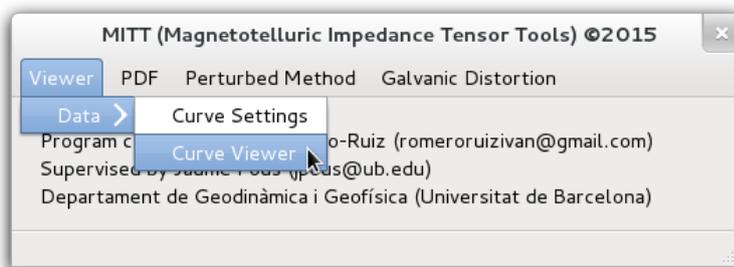
- PyQt: PyQt is one of the two most popular Python bindings for the Qt cross-platform GUI/XML/SQL C++ framework ( <http://pyqt.sourceforge.net/> ). We used PyQt4.
- Pygame: is a set of Python modules designed for writing games (<http://pygame.org>).
- NumPy: is the fundamental package for scientific computing with Python ( <http://www.numpy.org/> ).

- SciPy: is a Python-based ecosystem of open-source software for mathematics, science, and engineering (<http://www.scipy.org/>).
- matplotlib: is a plotting library which produces publication quality figures in a variety of hardcopy formats and interactive environments across platforms\\ (<http://matplotlib.org/>).

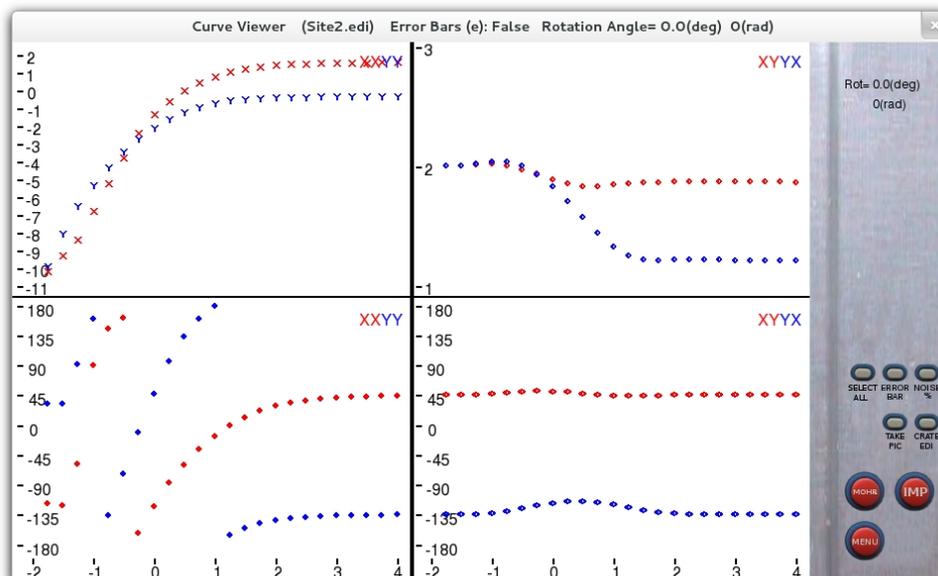
The program has only been tested in Linux OS.

## Block 1: Magnetotellurics Impedance tensor representation

MITT allows to draw different representations of the impedance tensor. After launching the program (python GUIDIS.pyc), select the **Viewer** menu and then the **Viewer/Data/Curve Viewer** sub-menu.



Next, choose the edi file in the /EDIS folder. Taking Site2.edi the apparent resistivity curves and phases appear:



*Ordinates of upper panels are log of apparent resistivities ( $\Omega m$ ) and ordinates of lower panels are phases (deg). The abscissa are log of periods (s).*

At the same time the following information about the impedance tensor for each period appears in the terminal:

```
*****
                                     (Site2)
*****

=====
PERIOD 0.017782794897      ** 1D Case **
=====

Cl3 Clifford Algebra Decomposition:
1/2*[ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3] =
=1/2*[ +8.993527e-05 -2.366346e-05e123 -0.00021656993e1 -0.00020995574e23 +0.2009e2 -0.0441e31 +237.4163e12
-237.2923e3]

Bahr Phase Sensitive Strike = 0.000760885978431 ( -89.999239114 )
      Λ+ = 0.00368288357628      NiΛR+NiΛI = 0.00368290247774 %1 = 5.13221868392e-06
      Λ- = -0.00583892975665     NiΛR-NiΛI = -0.00583889978983 %1 = 5.13224502373e-06

Index 1: atan(Φ12/Φ0) = 4.77612839034e-07
      Γ+ = 2.79085489787e-07      QiΛR+QiΛI = 2.79085489787e-07 %1 = 3.77481906692e-14
      Γ- = 4.78531152373e-07      QiΛR-QiΛI = 4.78531152373e-07 %1 = 3.78352154458e-14

Index 2: sqrt(Φ12+Φ22)/ sqrt(Φ122+Φ02) = 0.00103203952908
      Ω+ = 0.00103204245162      PiΛR+PiΛI = 0.00103204228932 %1 = 1.57264073913e-07
      Ω- = 0.000660344496282     PiΛR-PiΛI = 0.00066034460013 %1 = 1.57264049289e-07

Possible pair of triplets for ideal 1D :
(T1,E1,S1)=( 1.39505982302e-07 , -8.89841666739e-07 , -0.000330708901693 )
(T2,-1/T1,E2,-1/E2,S2)=(- 7168151.38316 , 1123795.43168 , -3023.80732687 )

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:
C11 = 0.999669236432      C12 = -1.02968800716e-06
C21 = -7.50087500728e-07  C22 = 1.0003306542

C Matrix on the current frame:
C11r = 1.00033065418      C12r = 7.58871105577e-07
C21r = 1.03847161201e-06  C22r = 0.999669236456

....
....
....
```

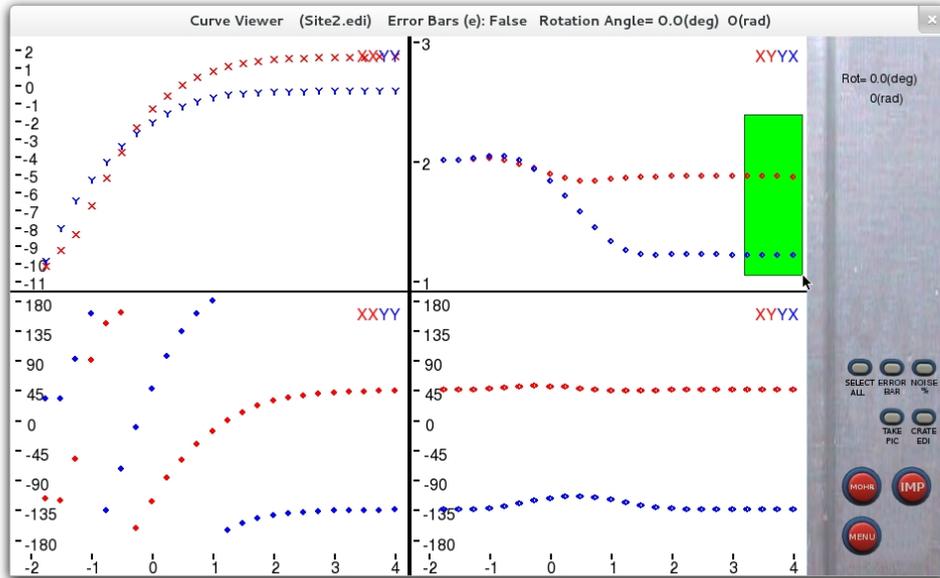
The dimensionality (1D, 2D or 3D case) refers to the values of Index1 and Index2:

$$\begin{aligned}
 & \text{Index1} \leq 0.1 \quad \text{and} \quad \text{Index2} \leq 0.05 \Rightarrow 1\text{D} \\
 & \text{Index1} \leq 0.1 \quad \text{and} \quad \text{Index2} > 0.05 \Rightarrow 2\text{D} \\
 & \text{Index1} > 0.1 \Rightarrow 3\text{D}
 \end{aligned}$$

These indexes are independent of the galvanic distortion and rotation. Accordingly, the dimensionality can be studied directly in a measured (distorted) impedance tensor. This dimensionality criteria refer only to the mathematical relationships of the impedance tensor at a given period. Accordingly, it does not refer to the dimensionality of the resistivity structure. Only if this dimensionality of a given period is the same as all the shorter periods or if it decreases steadily towards the shortest period, then this dimensionality coincides with the dimensionality of the resistivity structure.

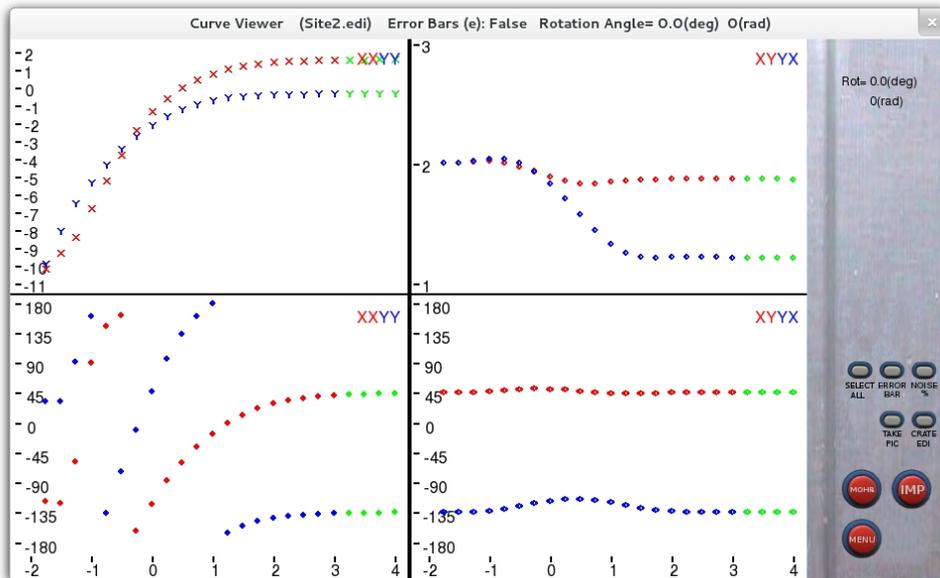
## Selecting periods

In order to select a number of periods, click the right button of the mouse once and a green box appears. Drag the cursor to resize the green box and include the desired periods,



*The last four periods included in the green box are selected.*

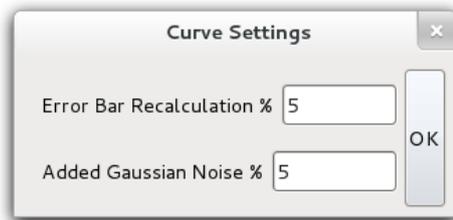
Then click one more time to select the periods included. The selection can be done both in upper panels or lower panels.



*The selected periods are shown in green.*

By selecting periods, you specify which periods can be eliminated, depicted in Mohr diagrams or impedance tensor, as well as those periods in which the error bars can be recalculated and for which periods a Gaussian noise is added to the impedance tensor.

By selecting **Viewer/Data/Curve Settings** sub-menu, you may define the error bar recalculation (in %) and the Gaussian noise (in %) to be added to the impedance tensor.

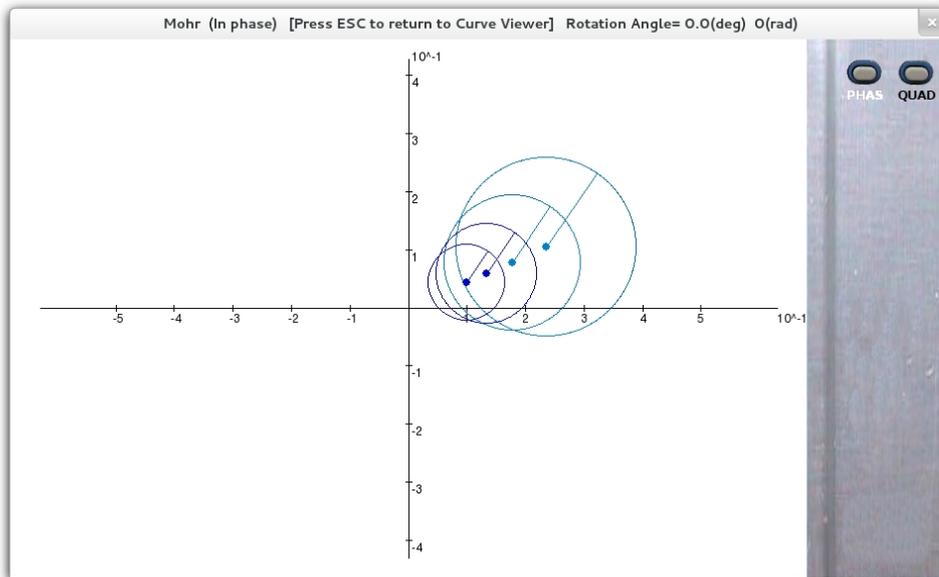


Once a selection of periods has been made, press key “w” to assign error bar to the selected periods and then key “q” (or button **NOISE %**) to add the Gaussian noise to the selected periods. **ERROR BAR** button shows the error bars. By clicking the button **MENU**, a list of the commands used by **Curve Viewer** sub-menu appears.

**Curve Viewer** sub-menu allows to create a new edi file containing the current changes, such as noise, new error bars or rotation. The new edi file is created by clicking **CREATE EDI** button or pressing “o” key. An edi file called filename\_1.edi is created in /EDIS folder. When creating a new edi file, all the selected periods are eliminated and in a new plotting the picture is re-scaled. Accordingly, deselect previously the periods wanted in the new EDI file.

## Mohr Diagrams

Click the **MOHR** button to see the Mohr diagrams for the selected periods. The buttons on the upper right side allow the quadrature and in phase diagrams. By pressing the “i” key, period and rotation marks appear. Only the selected periods are plotted and re-scaled.



*Mohr diagram in phase.*

## Impedance Tensor

By clicking **IMP** button you see the representation of the real and imaginary parts of the impedance tensor plotted by components. Only the selected periods are plotted. The new picture is re-scaled, so that variations for larger periods can be observed.

## General considerations

In all representations:

- rotation (spinning mouse wheel) and fine rotation (spinning mouse wheel + “f” key) can be interactively seen.
- by pressing the “p” key a picture is taken, and automatically saved in the /pictures folder.
- press the “esc” key to return to the previous image.

The recalculation error bar and the Gauss noise addition are applied to the selected periods.

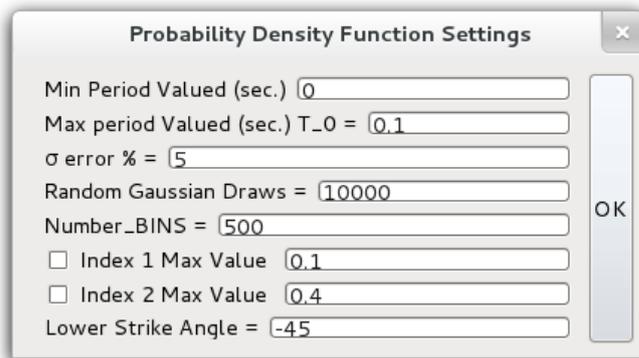
By creating an edi file, all selected periods are removed in the new edi file.

## Block 2: Probability Density Function Estimation

Probability Density Function (PDF) menu contains two sub-menus: **Settings** and **Calculate**.

By clicking the **Calculate** sub-menu, Bahr's Phase sensitive Strike, Index 1 and Index 2 PDF plots appear. The PDF depends on the values introduced in the **Settings** sub-menu.

By clicking sub-menu **settings**, a PDF dialog box opens:



Select the Min/ Max periods to be statistically analyzed. A selected number of *Random Gaussian Draws* are obtained with a standard deviation  $\sigma$  error %. Maximum values for the *Index1* and *Index2* can be selected for the random Gaussian draws.

By clicking sub-menu **Calculate**, the program asks for an edi file and the probability density functions are depicted. Information about statistics being carried out are shown in the terminal.

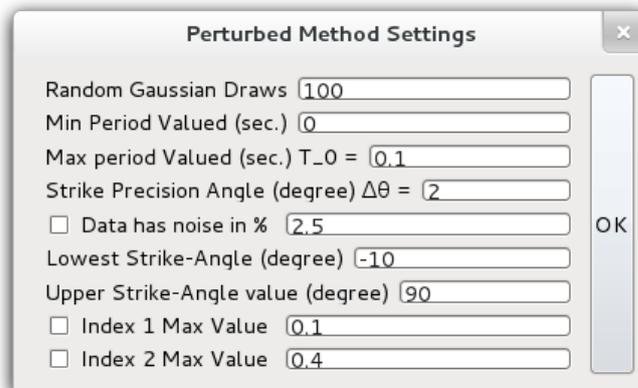
## Block 3: Perturbed Method

It provides, for the considered periods, an estimation of the Phase Sensitive Strike angle and a *Pseudoimpedance Tensor*, which is the impedance tensor “corrected” of noise, so that all the selected periods have the same Phase Sensitive Strike angle. The perturbed method applies a Gaussian perturbation (like a noise correction) to the impedance tensor.

The Perturbed Method menu contains two sub-menus: **Perturbed Method Settings** and **Regional Phase Sensitive Strike**.

In **Perturbed Method Settings** dialog box, *Min* and *Max* values select the range of periods, for which the impedance tensor has to be perturbed and the strike angle calculated. *Random Gaussian Draws* number is the number of random Gaussian perturbations. *Strike Precision angle* is the size of the segmentation in which all strike angles of the perturbed impedance tensor (*Pseudoimpedance Tensor*) are considered

to be the same. *Data noise %* is the size of the Gaussian perturbation (standard deviation in %). *Lowest Strike-Angle*, and *Upper Strike-Angle* are needed to apply the perturbed method.

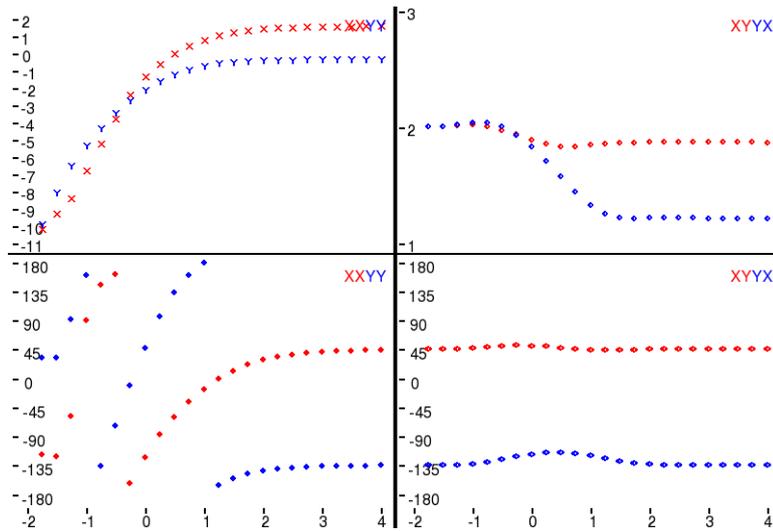


By selecting **Regional Phase Sensitive Strike** sub-menu, if the checking box *Data noise %* is activated in **Perturbed Method Settings**, the program will apply the perturbed method, otherwise the program will plot the rose diagram of the desired edi file. *Index 1* and *Index 2* are constraints defined in Romero-Ruiz and Pous (2015), which account for the “dimensionality”. When these indexes are checked, only the random draws fulfilling the constraints are saved. The terminal shows the average strike angle and its error (SIGMA) obtained after all the random draws, and the new components of the impedance tensor (*Pseudoimpedance Tensor*). These errors are a measure of the reliability of the strike obtained and, therefore, of the distortion parameters obtained in the next step.

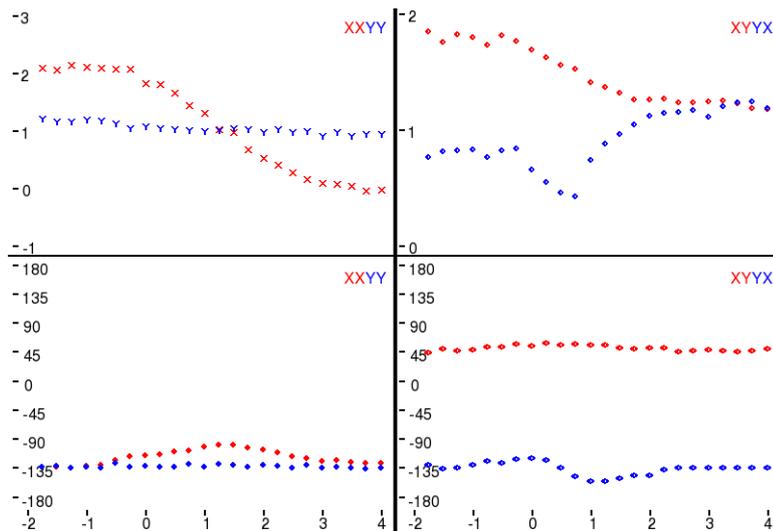
## Block 4: Galvanic Distortion

The **Galvanic Distortion** menu has two sub-menus: **Add or Remove GD** sub-menu, which allows to add or remove a galvanic distortion, and **Search** sub-menu, which determines the galvanic distortion parameters, *twist (t)*, *shear (e)* and *anisotropy (s)*. The best way to show how this tool works is by showing an example. In the following section we are going to show the whole process step by step.

By using the sub-menu **Add or Remove GD/Settings (t,e,s) values** and the sub-menu **Add or Remove GD/Add** the current site 2.edi



is distorted by *twist*, *shear* and *anisotropy* ( $t=-1.1$ ;  $e=0.4$ ;  $s=-0.3$ ), then rotated by  $13^\circ$  and perturbed by 5% of Gaussian noise, which results in:



Depicting this distorted, rotated and noisy site with **Viewer/Data/Curve Viewer** sub-menu, the terminal shows the following information for each period (only four periods shown here):

```
*****
(Site2(-1.1+0.4-0.3)_rot13_p5)
*****

=====
PERIOD 0.017782794897 ** 2D Case **
=====
```

```
Cl3 Clifford Algebra Decomposition:
1/2*[ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3] =
=1/2*[ -176.519810293 -178.038890372e123 -84.6111723612e1 -82.5781968278e23
```

+75.0233207239e2 +64.624144899e31 +128.533798716e12 -123.732549489e3]

**Bahr Phase Sensitive Strike = 37.4188681018 ( -52.5811318982 )**

$\Lambda_+ = 5.4533621445$      $N_i^R + N_i^I = -2.40562094529$     %1 = 1.44112620463  
 $\Lambda_- = 0.0614570345849$      $N_i^R - N_i^I = 0.150024377584$     %1 = 0.590353010794

**Index 1: atan( $\phi_{12}/\phi_0$ ) = 0.00888539237385**

$\Gamma_+ = 2.88111833885$      $Q_i^R + Q_i^I = -2.81223481011$     %1 = 1.97609139208  
 $\Gamma_- = 0.0220313156849$      $Q_i^R - Q_i^I = 0.065567208966$     %1 = 0.663988813428

**Index 2: sqrt( $\phi_1^2 + \phi_2^2$ )/ sqrt( $\phi_{12}^2 + \phi_0^2$ ) = 0.052674016489**

$\Omega_+ = 1.33618145087$      $P_i^R + P_i^I = 1.00151480147$     %1 = 0.250464971795  
 $\Omega_- = 0.0273775258291$      $P_i^R - P_i^I = 0.0342346370637$     %1 = 0.200297471296

**Possible pair of triplets for ideal 1D :**

$(T_1, E_1, S_1) = (0.542163039391, 3.3060819716, -2.48100485856)$   
 $(T_2 = -1/T_1, E_2 = -1/E_1, S_2) = (-1.84446361582, -0.302472839025, -0.403062491615)$

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:

C11 = 0.111666579638    C12 = 0.915446070736  
C21 = -0.542278059215    C22 = 0.924891114164

C Matrix on the current frame:

C11r = 0.80471854955    C12r = 1.07251803225  
C21r = -0.385206097704    C22r = 0.231839144253

=====

PERIOD 0.0316227732034    \*\* 2D Case \*\*

=====

Cl3 Clifford Algebra Decomposition:

$1/2 * [ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3 ] =$   
 $= 1/2 * [ -124.221888516 \quad -129.011761922e123 \quad -59.2011838924e1 \quad -60.9216073515e23$   
 $+38.9433523729e2 \quad +49.2465549781e31 \quad +86.3058446397e12 \quad -92.0562835311e3 ]$

**Bahr Phase Sensitive Strike = -64.5994994736 ( 25.4005005264 )**

$\Lambda_+ = 3.1311755513$      $N_i^R + N_i^I = -2.75726063515$     %1 = 1.88058321546  
 $\Lambda_- = -0.0982834535858$      $N_i^R - N_i^I = -0.283113666757$     %1 = 0.652848077906

**Index 1: atan( $\phi_{12}/\phi_0$ ) = 0.0131196123365**

$\Gamma_+ = 2.79292473424$      $Q_i^R + Q_i^I = -2.84076624416$     %1 = 1.98315894171  
 $\Gamma_- = -0.0125541406025$      $Q_i^R - Q_i^I = -0.037877468434$     %1 = 0.668559142901

**Index 2: sqrt( $\phi_1^2 + \phi_2^2$ )/ sqrt( $\phi_{12}^2 + \phi_0^2$ ) = 0.0630501642085**

$\Omega_+ = 1.25285621407$      $P_i^R + P_i^I = 0.962750340727$     %1 = 0.231555600781  
 $\Omega_- = -0.0209518757262$      $P_i^R - P_i^I = -0.0258033998975$     %1 = 0.188018795606

**Possible pair of triplets for ideal 1D :**

$(T_1, E_1, S_1) = (0.572194734293, -2.32030814397, 4.65568817446)$   
 $(T_2 = -1/T_1, E_2 = -1/E_1, S_2) = (-1.747656768, 0.430977240071, 0.214791017467)$

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:

C11 = 0.94969914996    C12 = 0.762820720269  
C21 = -0.713238205153    C22 = 0.0864137489333

C Matrix on the current frame:

C11r = 0.771649317983    C12r = 1.08820182653  
C21r = -0.387857098888    C22r = 0.26446358091

=====

PERIOD 0.0562341454856    \*\* 1D Case \*\*

=====

Cl3 Clifford Algebra Decomposition:

$1/2 * [ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3 ] =$   
 $= 1/2 * [ -104.537758425 \quad -100.19858867e123 \quad -54.2770337005e1 \quad -51.4003937906e23$   
 $+35.5046643112e2 \quad +37.9672329321e31 \quad +70.5007465398e12 \quad -70.8869005041e3 ]$

**Bahr Phase Sensitive Strike = -70.0865615298 ( 19.9134384702 )**

$\Lambda_+ = 2.69494778894$      $N_i^R + N_i^I = -2.88253898824$     %1 = 1.93492153963  
 $\Lambda_- = -0.0569845796942$      $N_i^R - N_i^I = -0.174920348636$     %1 = 0.674225553868

**Index 1: atan( $\phi_{12}/\phi_{\theta}$ ) = 0.00974779237236**

$\Gamma_+ = 2.64278767084$      $Q_i^R+Q_i^I = -2.89628874495$     %1 = 1.91247382549  
 $\Gamma_- = -0.022381062386$      $Q_i^R-Q_i^I = -0.0692900199957$     %1 = 0.67699443026

**Index 2: sqrt( $\phi_1^2+\phi_2^2$ )/ sqrt( $\phi_{12}^2+\phi_{\theta}^2$ ) = 0.025859272354**

$\Omega_+ = 1.41359225631$      $P_i^R+P_i^I = 1.03502151045$     %1 = 0.26780759739  
 $\Omega_- = -0.00493450308241$      $P_i^R-P_i^I = -0.00625600049723$     %1 = 0.211236782254

**Possible pair of triplets for ideal 1D :**

(T\_1,E\_1,S\_1)=( 0.593769055171 , -1.99953414216 , 7.34897425266 )  
(T\_2=-1/T\_1,E\_2=-1/E\_1,S\_2)=( -1.68415647682 , 0.500116491594 , 0.136073411829 )

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:

C11 = 0.946979487751    C12 = 0.853814652019  
C21 = -0.608628965017    C22 = 0.0616536513106

C Matrix on the current frame:

C11r = 0.765757198981    C12r = 1.10888337887  
C21r = -0.35356023817    C22r = 0.242875940081

=====  
PERIOD 0.1        \*\* 1D Case \*\*  
=====

Cl3 Clifford Algebra Decomposition:

$1/2*[ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3 ] =$   
 $=1/2*[ -73.3607431219    -77.1802717296e123    -34.7456696189e1    -37.7993162344e23$   
 $+26.2037419432e2 +26.607347104e31 +50.5323996418e12 -53.5240580004e3]$

**Bahr Phase Sensitive Strike = 3.83674538185 ( -86.1632546181 )**

$\Lambda_+ = 3.10796409538$      $N_i^R+N_i^I = -2.74661575353$     %1 = 1.88373471161  
 $\Lambda_- = 0.0328231720242$      $N_i^R-N_i^I = 0.0946533205114$     %1 = 0.653227463687

**Index 1: atan( $\phi_{12}/\phi_{\theta}$ ) = 0.0145445894111**

$\Gamma_+ = 2.64655634126$      $Q_i^R+Q_i^I = -2.8937300405$     %1 = 1.91458301369  
 $\Gamma_- = -0.00316257671261$      $Q_i^R-Q_i^I = -0.00978309728079$     %1 = 0.676730525943

**Index 2: sqrt( $\phi_1^2+\phi_2^2$ )/ sqrt( $\phi_{12}^2+\phi_{\theta}^2$ ) = 0.0236993952802**

$\Omega_+ = 1.29112047336$      $P_i^R+P_i^I = 0.980689996634$     %1 = 0.240434942465  
 $\Omega_- = -0.00291780091977$      $P_i^R-P_i^I = -0.00361934221604$     %1 = 0.193831158922

**Possible pair of triplets for ideal 1D :**

(T\_1,E\_1,S\_1)=( 0.750277267686 , 2.0656874802 , 12.4671012266 )  
(T\_2=-1/T\_1,E\_2=-1/E\_1,S\_2)=( -1.33284059516 , -0.484100334434 , 0.0802111077647 )

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:

C11 = -0.206347359917    C12 = -0.4203437684  
C21 = 1.05679584249    C22 = -0.814809444417

C Matrix on the current frame:

C11r = -0.769593100351    C12r = -1.09456941759  
C21r = 0.382570193302    C22r = -0.251563703982

....  
....  
....

-----  
These short periods are 2D (1D) and, therefore the method can be applied. The first and the second periods are indicated as 2D, but note Index1 and Index2 almost fulfill the condition of 1D. In addition, note the significant variation in the Phase Sensitive Strike, together with the slight variation of the “C Matrix on the current frame” (the difference in sign is only due to the “complementary angle”). This happens typically in 1D cases. In order to show how the program works in a 2D case, higher periods between 0.3s and 2s, which are really 2D, will be considered later, allowing to compare the results.

## Perturbed Method

Leaving non-checked the “Data has noise %” checkbox in **Perturbation Method Settings**, the rose diagram for these periods is depicted with a 1° segment precision. That is

Perturbed Method Settings

Random Gaussian Draws

Min Period Valued (sec.)

Max period Valued (sec.) T\_0 =

Strike Precision Angle (degree)  $\Delta\theta =$

Data has noise in %

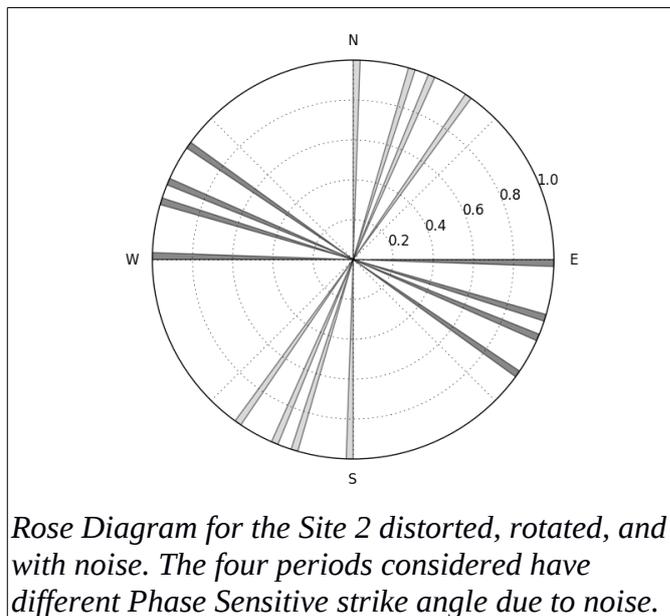
Lowest Strike-Angle (degree)

Upper Strike-Angle value (degree)

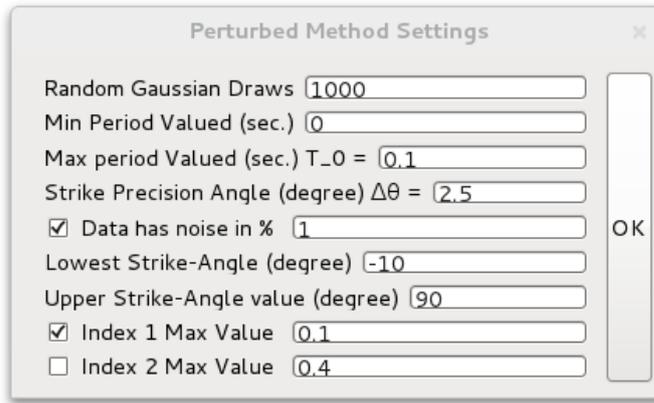
Index 1 Max Value

Index 2 Max Value

OK

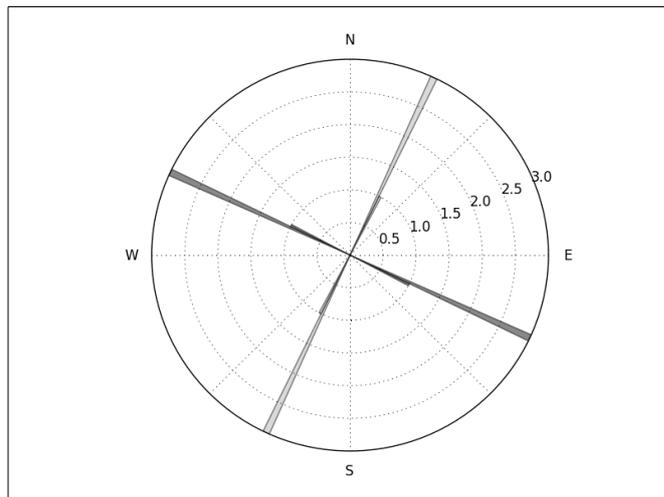


Next, we start the Perturbed method with the following settings. Note the “Data has noise %” checkbox is checked.



The results are shown in the terminal. The Phase Sensitive Strike angle obtained is  $27.67^\circ \pm 2.9^\circ$  and a new file in the /EDIS folder appears (Site2(-1.1+0.4-0.3)\_rot13\_p5\_ZP-1.0p\_A5.0\_I1-0.1.edi). It is labeled with \_ZP to denote the *pseudo impedance tensor* corrected of noise.

Plotting the rose diagram of this edi file (*Data has noise %* not checked):



Note the *Pseudoimpedance Tensor* gives a unique Phase Sensitive strike within the Strike Precision Angle ( $\Delta\theta$ ). To continue the process the edi file should be rotated to the Phase Sensitive strike angle. However, in 1D case to continue with the process to find the galvanic distortion parameters any angle can be used due to the independence of the regional impedance tensor with rotation (1D case). The galvanic distortion parameters obtained at different angles are connected by rotations. Therefore, all the galvanic distortion parameters coincide when derotating by the corresponding angle.

## Galvanic Distortion Correction

In this example, only one period is considered to correct the galvanic distortion. Accordingly, we chose the lowest period 0.0178s. First, we rotate to the Phase Sensitive strike specific for 0.0178s, which is  $-61.36^\circ$  (shown in the terminal when depicting the site with **Curve Viewer**). In case of choosing more periods, the Phase Sensitive Strike angle obtained in the Perturbed Method should be chosen. By plotting the rotated site, the following information appears in the terminal:

```

*****
                               (Site2(-1.1+0.4-0.3)_rot13_p5_ZP-1.0p_A5.0_I1-0.1_rot-61,36)
*****

=====
PERIOD 0.017782794897  ** 2D Case **
=====

Cl3 Clifford Algebra Decomposition:
1/2*[ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3] =
=1/2*[ -175.897395184 -178.869923131e123 -18.3335267286e1 -8.7913655836e23 -110.479295888e2
-105.864788848e31 +128.673850168e12 -123.86449744e3]

Bahr Phase Sensitive Strike = -89.9931650765 ( 0.00683492354294 )
    Λ+ = 0.252467874318      N_i^R+N_i^I = 0.248988701141 %1 = 0.0137806569913
    Λ- = 0.0817751077668      N_i^R-N_i^I = 0.0829020224774 %1 = 0.0135933319463

Index 1: atan(Φ_12/Φ_0) = 0.00728181494971
    Γ+ = 2.88595084285      Q_i^R+Q_i^I = -2.81107929461 %1 = 1.9740565407
    Γ- = 0.0259159609247      Q_i^R-Q_i^I = 0.0770755330966 %1 = 0.66375891436

Index 2: sqrt(Φ_1^2+Φ_2^2)/ sqrt(Φ_12^2+Φ_0^2) = 0.0505101189784
    Ω+ = 1.33774948756      P_i^R+P_i^I = 1.00211518772 %1 = 0.250894732505
    Ω- = 0.02047408425      P_i^R-P_i^I = 0.0256109241412 %1 = 0.200572219217

Possible pair of triplets for ideal 1D :
(T_1,E_1,S_1)=( 0.54443154247 , 2.44185800462 , -3.40323544641 )
(T_2=-1/T_1,E_2=-1/E_2,S_2)=( -1.83677822094 , -0.409524222174 , -0.293838030235 )

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:
C11 = 0.0742880254355      C12 = 0.783977202246
C21 = -0.673433640786      C22 = 0.962469826589

C Matrix on the current frame:
C11r = 0.0742748511213      C12r = 0.783871247761
C21r = -0.67353959527      C22r = 0.962483000903

=====
PERIOD 0.0316227732034  ** 2D Case **
=====

Cl3 Clifford Algebra Decomposition:
1/2*[ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3] =
=1/2*[ -124.16938737 -129.308103307e123 -0.961995103e1 -8.3265709707e23 -70.6510110782e2
-78.2347556149e31 +86.4168118562e12 -92.1629679921e3]

Bahr Phase Sensitive Strike = -1.29152587775 ( 88.7084741223 )
    Λ+ = 0.120220963134      N_i^R+N_i^I = 0.120046741878 %1 = 0.0014491753483
    Λ- = -0.0926801225469      N_i^R-N_i^I = -0.0928144322958 %1 = 0.00144707827813

Index 1: atan(Φ_12/Φ_0) = 0.0131770472694
    Γ+ = 2.79524383155      Q_i^R+Q_i^I = -2.83990363302 %1 = 1.98427418418
    Γ- = -0.0112164532156      Q_i^R-Q_i^I = -0.0338285656854 %1 = 0.668432492234

```

**Index 2:  $\sqrt{(\phi_1^2 + \phi_2^2) / (\phi_{12}^2 + \phi_0^2)} = 0.0627519878205$**

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= 1.25234874733 & P_{i^R} + P_{i^I} &= 0.962534647975 \quad \%1 = 0.231416448469 \\ \Omega_- &= -0.0230713726496 & P_{i^R} - P_{i^I} &= -0.0284104677695 \quad \%1 = 0.187927040244 \end{aligned}$$

**Possible pair of triplets for ideal 1D :**

$$\begin{aligned} (T_1, E_1, S_1) &= (0.562145568671, -2.3963064463, 4.15921801396) \\ (T_2 = -1/T_1, E_2 = -1/E_1, S_2) &= (-1.77889866207, 0.417308897009, 0.240429810759) \end{aligned}$$

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:

$$\begin{aligned} C11 &= 0.950304841915 & C12 &= 0.733494027053 \\ C21 &= -0.742632174522 & C22 &= 0.0860504100835 \end{aligned}$$

C Matrix on the current frame:

$$\begin{aligned} C11r &= 0.0866953919595 & C12r &= 0.762102420203 \\ C21r &= -0.714023781373 & C22r &= 0.949659860039 \end{aligned}$$

=====

PERIOD 0.0562341454856 \*\* 1D Case \*\*

=====

Cl3 Clifford Algebra Decomposition:

$$\begin{aligned} &1/2 * [ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3 ] = \\ &= 1/2 * [ -104.413811244 \quad -100.532784989e123 \quad -0.6926742584e1 \quad -4.0035464995e23 \quad -64.5372790293e2 \\ &-64.248455269e31 + 70.5344952347e12 - 71.0143048114e3 ] \end{aligned}$$

**Bahr Phase Sensitive Strike = -1.24182958898 ( 88.758170411 )**

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= 0.0730953250689 & N_{i^R} + N_{i^I} &= 0.0730464384293 \quad \%1 = 0.000668806652054 \\ \Lambda_- &= -0.0515460990911 & N_{i^R} - N_{i^I} &= -0.051580573465 \quad \%1 = 0.000668359648675 \end{aligned}$$

**Index 1:  $\text{atan}(\phi_{12}/\phi_0) = 0.00968292353391$**

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= 2.64317841329 & Q_{i^R} + Q_{i^I} &= -2.89599214926 \quad \%1 = 1.91270220258 \\ \Gamma_- &= -0.0208851808307 & Q_{i^R} - Q_{i^I} &= -0.0646531604228 \quad \%1 = 0.676965817384 \end{aligned}$$

**Index 2:  $\sqrt{(\phi_1^2 + \phi_2^2) / (\phi_{12}^2 + \phi_0^2)} = 0.0261796840829$**

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= 1.41399100137 & P_{i^R} + P_{i^I} &= 1.03520586821 \quad \%1 = 0.267883694303 \\ \Omega_- &= -0.008509815672 & P_{i^R} - P_{i^I} &= -0.0107894565321 \quad \%1 = 0.21128412291 \end{aligned}$$

**Possible pair of triplets for ideal 1D :**

$$\begin{aligned} (T_1, E_1, S_1) &= (0.537048259371, -2.17179325468, 4.15587593916) \\ (T_2 = -1/T_1, E_2 = -1/E_1, S_2) &= (-1.86203005512, 0.460448985116, 0.240623159748) \end{aligned}$$

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:

$$\begin{aligned} C11 &= 0.96282381913 & C12 &= 0.736915516505 \\ C21 &= -0.726551924633 & C22 &= 0.0452561118837 \end{aligned}$$

C Matrix on the current frame:

$$\begin{aligned} C11r &= 0.0454625333792 & C12r &= 0.746437940972 \\ C21r &= -0.717029500165 & C22r &= 0.962617397634 \end{aligned}$$

=====

PERIOD 0.1 \*\* 1D Case \*\*

=====

Cl3 Clifford Algebra Decomposition:

$$\begin{aligned} &1/2 * [ S1R + S1I e123 + D1R e1 + D1I e23 + S2R e2 + S2I e31 + D2R e12 - D2I e3 ] = \\ &= 1/2 * [ -73.7741160823 \quad -76.8581650436e123 \quad -2.9604179299e1 \quad -2.310501931e23 \quad -44.1509436125e2 \\ &-45.5178619109e31 + 50.6661929479e12 - 53.5407649617e3 ] \end{aligned}$$

**Bahr Phase Sensitive Strike = 88.4738100096 ( -1.52618999041 )**

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= 0.11821489119 & N_{i^R} + N_{i^I} &= 0.11781253591 \quad \%1 = 0.00340359218493 \\ \Lambda_- &= 0.0162366026122 & N_{i^R} - N_{i^I} &= 0.016291865386 \quad \%1 = 0.00339204704014 \end{aligned}$$

**Index 1:  $\text{atan}(\phi_{12}/\phi_0) = 0.0139086426947$**

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= 2.65230828483 & Q_{i^R} + Q_{i^I} &= -2.89158910833 \quad \%1 = 1.91724936893 \end{aligned}$$

$\Gamma = -0.00665787772067$      $Q_i^R - Q_i^I = -0.0205742807085$     %1 = 0.676398032329

Index 2:  $\sqrt{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} / \sqrt{(\phi_{12}^2 + \phi_0^2)} = 0.0180460404354$

$\Omega_+ = 1.29177442134$      $P_i^R + P_i^I = 0.981003698246$     %1 = 0.240576619233

$\Omega_- = 0.00633573471029$      $P_i^R - P_i^I = 0.00785996434725$     %1 = 0.1939232253

Possible pair of triplets for ideal 1D :

(T\_1, E\_1, S\_1) = ( 0.549438651913 , 2.32157727043 , -4.17257399992 )

(T\_2 = -1/T\_1, E\_2 = -1/E\_1, S\_2) = ( -1.82003941026 , -0.430741639632 , -0.239660219332 )

C Matrix on Bahr Phase Sensitive Strike direction:

C11 = 0.0706441964795    C12 = 0.740706576654

C21 = -0.736019228107    C22 = 0.95112504996

C Matrix on the current frame:

C11r = 0.071393576048    C12r = 0.764145563248

C21r = -0.712580241513    C22r = 0.950375670392

....  
....  
....

---

Note that after this rotation, the Phase Sensitive Strike, for the considered periods, must be approximately zero.

The program allows to use different constraints which the regional impedance tensor (free of galvanic distortion) should fulfill for the short periods, between T\_min and T\_max:

- Off-diagonal components of the regional impedance tensor fulfill  $Z_{xy} > 0$  and  $Z_{yx} < 0$  .
- The diagonal apparent resistivities should be lower than the specified value.
- Values for  $t$  and  $e$  may be specified from the terminal information above, which makes the search faster. From the two possible triplets ( $t, e, s$ ) for the ideal 1D case, appearing in the terminal, it is recommended to select that with the lower *anisotropy*  $s$  parameter absolute value (specified in green above).
- Indexes  $\gamma$ ,  $\lambda$  and  $\epsilon$  are expected to be lower than the specified values.

These indexes are defined in Romero-Ruiz and Pous (2015).

By clicking the sub-menu **Galvanic Distortion/Search (t,e,s)/Search Settings** a dialog box is opened. The range of short periods fulfilling the conditions (2D or 1D) should be specified (T\_min and T\_max).

Although the user may choose any constraints, two sets are mainly considered :

- 1) The basic constraints are: (a) Off-diagonal constraint  $Z_{xy} > 0$  and  $Z_{yx} < 0$ ; (b) Prescribed  $t$  and  $e$  values; (c)  $\gamma$  and  $\epsilon$  being lower than the specified values (as small as possible, usually less than 0.01). This set allows to determine the galvanic distortion parameters directly on the measured direction instead of the

strike direction. Thus, we shall determine the galvanic distortion parameters from the original edi file (without any rotation).

It is necessary to determine a first approximation for prescribed  $t$  and  $e$  values, for this reason we make a first search with constraints (a) and (c) with  $\gamma=0.08$  and  $\varepsilon=0.08$  (even  $\gamma=0.05$  and  $\varepsilon=0.05$ ).

Galvanic Distortion Search Settings

Low limit period T\_min: 0

High Limit period T\_max: 0.02

(t,e,s) max value: 6      Sphere Radi: 50

Constraints:

- $Z_{xy} > 0$  and  $Z_{yx} < 0$  for  $T_{min} < T < T_{max}$
- $\rho_{xx}$  and  $\rho_{yy}$  high limit  $T_{min} < T < T_{max}$ : 1
- Prescribed t and e: 0 and 0
- $\gamma = 0.08$         $\lambda = 0.01$
- s known: 0        $\varepsilon = 0.08$

Some other Consider

- $\rho_{xy}$  and  $\rho_{yx}$  max values < 1000
- No phases greater than 90 degrees
- Curve slope condition (-45,45) degrees

OK      STOP

Once a prescribed values for  $t$  and  $e$  are obtained, we may apply all the constraints of the first set.

Galvanic Distortion Search Settings

Low limit period T\_min: 0

High Limit period T\_max: 0.02

(t,e,s) max value: 6      Sphere Radi: 50

Constraints:

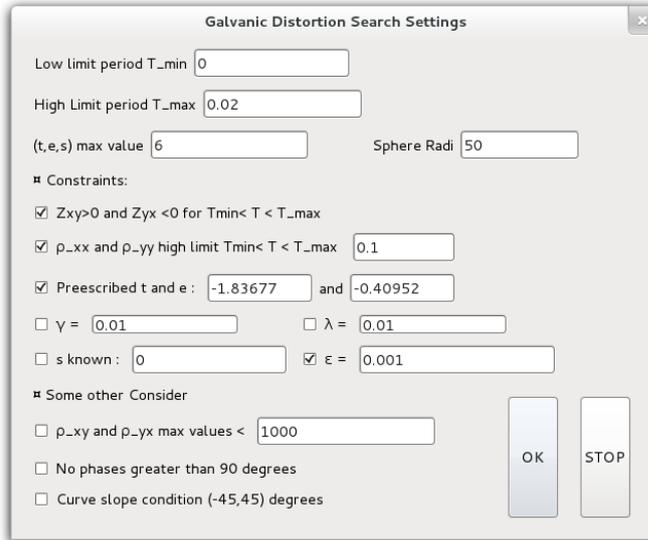
- $Z_{xy} > 0$  and  $Z_{yx} < 0$  for  $T_{min} < T < T_{max}$
- $\rho_{xx}$  and  $\rho_{yy}$  high limit  $T_{min} < T < T_{max}$ : 1
- Prescribed t and e: -1.3299916 and 0.4442669
- $\gamma = 0.001$         $\lambda = 0.01$
- s known: 0        $\varepsilon = 0.008$

Some other Consider

- $\rho_{xy}$  and  $\rho_{yx}$  max values < 1000
- No phases greater than 90 degrees
- Curve slope condition (-45,45) degrees

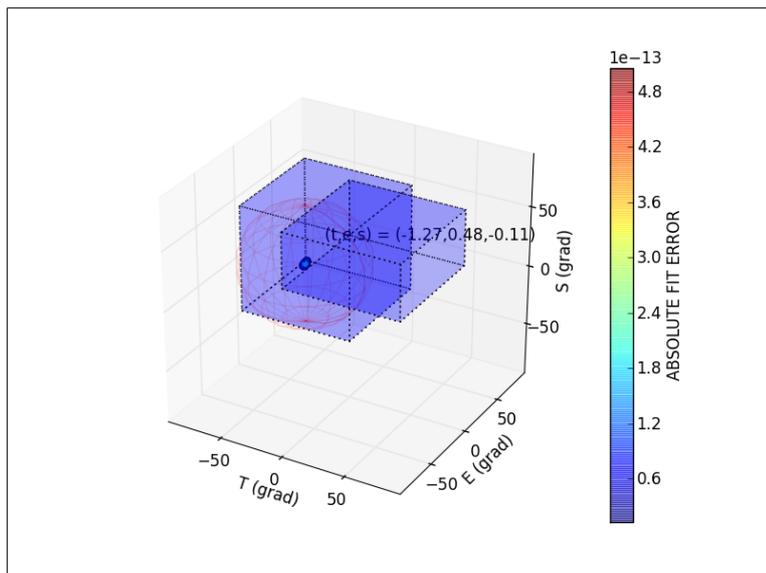
OK      STOP

- 2) The basic constraints are: (a) Off-diagonal constraint  $Z_{xy} > 0$  and  $Z_{yx} < 0$ ; (b) Prescribed  $t$  and  $e$  values; (c) diagonal apparent resistivities that should be lower than the prescribed value; (d)  $\varepsilon$  being lower than the specified value (as small as possible).



Once entering the selected inputs, click OK and then click sub-menu **Galvanic Distortion/Search (t,e,s)/Search**, to start the search.

By using the first set of constraints above, once the process ends, click **Galvanic Distortion/Search/Plotting Results** sub-menu and select Site2(-1.1+0.4-0.3)\_rot13,006\_p5.edi (instead Site2(-1.1+0.4-0.3)\_rot13,006\_p5\_ZP-1.0p\_A5.0\_I1-0.1\_rot-61,36.edi) file to obtain the figure:



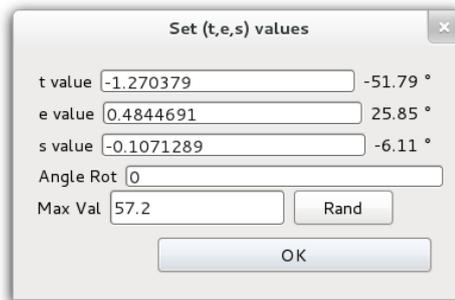
In the terminal, the obtained distortion parameter values appear:

```

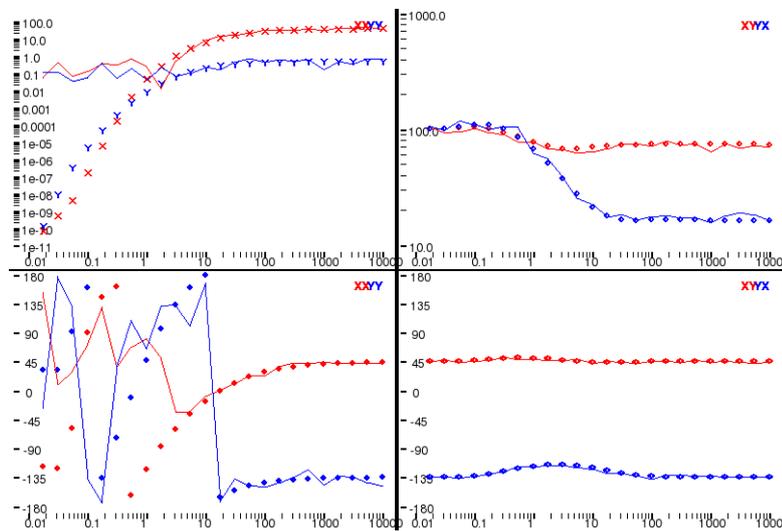
_/SOLUTIONS \
(t,e,s) = ( -1.270379 , 0.4844691 , -0.1071289 )
(θt,θe,θs) = ( -51.7913575 , 25.848755 , -6.1147128 ) +-( 0.4367361 , 0.634059 , 0.8999332 )

```

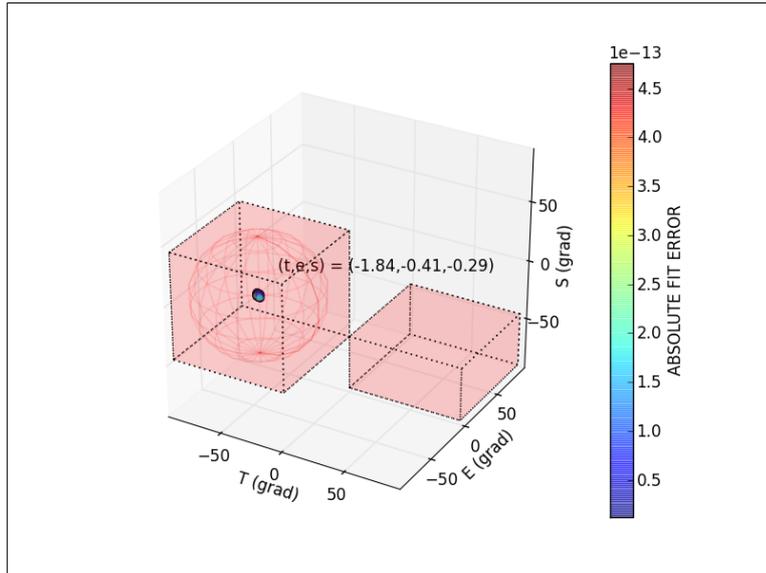
In order to correct the galvanic distortion and obtain the regional impedance tensor, click the sub-menu **Galvanic Distortion/Add or Remove GD/Settings (t,e,s) values**



then click **Galvanic Distortion/Add or Remove GD/Remove** to create an edi file corrected of galvanic distortion. This edi file correspond to axes rotated (13°). In order to compare with the original synthetic Site2 (not rotated), the current edi must be rotated to -13° resulting:



In the case of the second set of constraints, once the process ends, click **Galvanic Distortion/Search/Plotting Results** and select Site2(-1.1+0.4-0.3)\_rot13\_p5\_ZP-1.0p\_A5.0\_I1-0.1\_rot-61,36.edi file to obtain the figure:



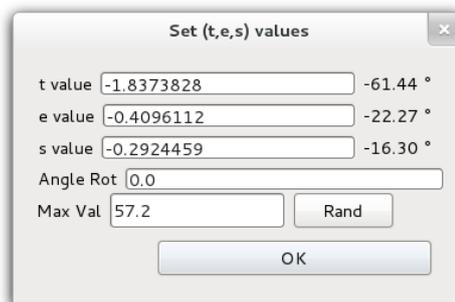
The obtained values are shown in the terminal:

```

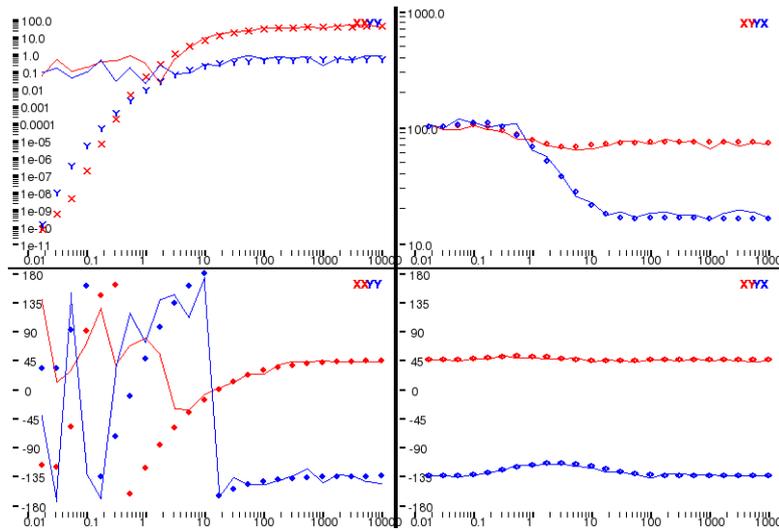
_/SOLUTIONS\
(t,e,s) = ( -1.8373828 , -0.4096112 , -0.2924459 )
(θt,θe,θs) = ( -61.4426507 , -22.2745543 , -16.301344 ) +/- ( 0.5839794 , 0.5092479 , 1.2116853 )

```

In order to correct the galvanic distortion and obtain the regional impedance tensor in the Phase Sensitive Strike direction (-61.36°), click the sub-menu **Galvanic Distortion/Add or Remove GD/Settings (t,e,s) values**



then click **Galvanic Distortion/Add or Remove GD/Remove** to create an edi file corrected of galvanic distortion. This edi file correspond to axes rotated (-61.36°). In order to compare with the original synthetic Site2 (not rotated), the current edi must be rotated to 48.36° (= 61.36°-13°) resulting:



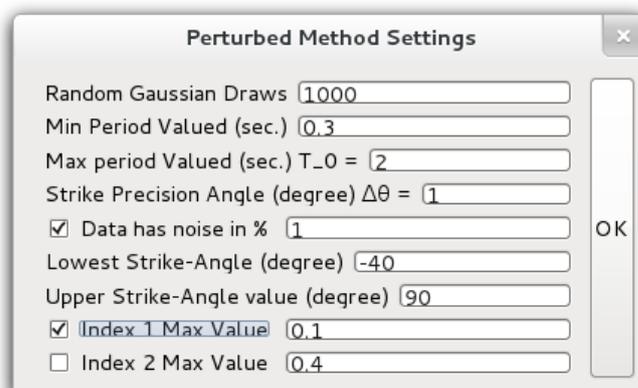
Solid line: corrected of distortion. Dots: original site2.

Note that both set of constraints reproduce similar results. Differences with Site2 (dots) are due to the added noise. The first set of constraints has the advantage of determining the galvanic distortion parameters in the measured direction and any rotation is required. In cases of highly noisy data, the perturbed method used in this first set of constraints would allow a correction of those periods which do not fulfill the 2D (1D) criteria due to the noise.

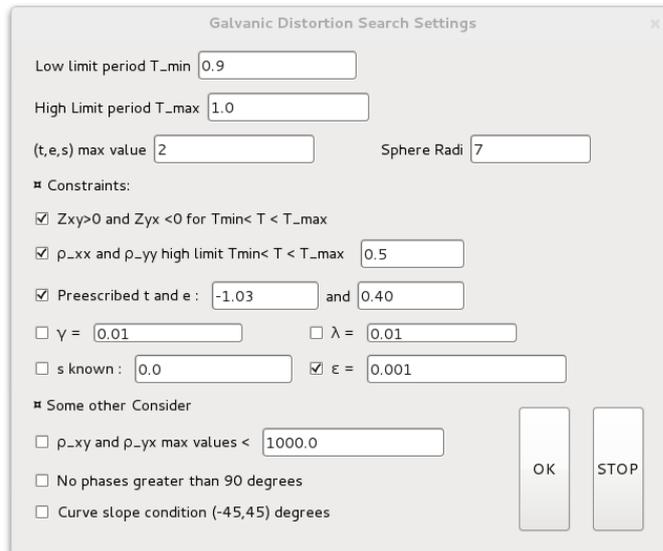
In the sub-menu **Galvanic Distortion/Add or Remove GD/Settings (t,e,s) values** by specifying *Angle Rot* the terminal shows the distortion matrix in the current frame (C Matrix), and the distortion matrix rotated to the specified *Angle Rot* (C Matrix rotated).

### Repetition with a new selection of the short periods

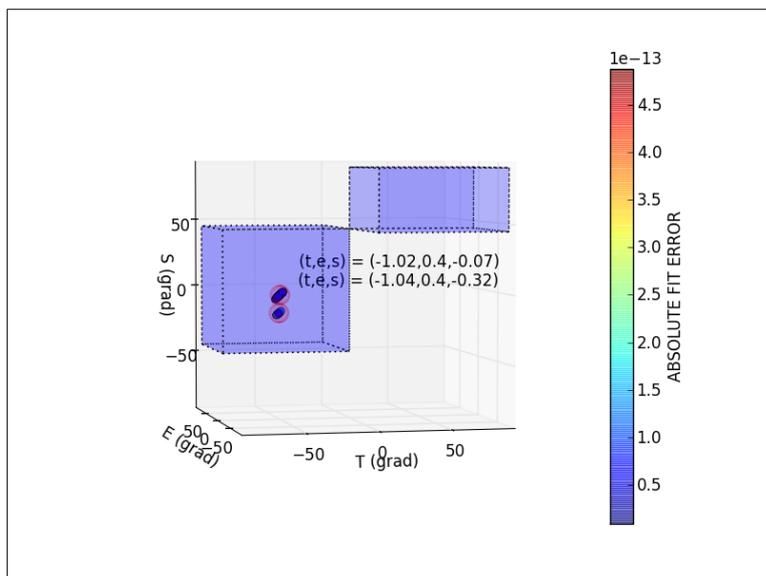
By taking as short periods, the interval  $T_{min}=0.3s$  and  $T_{max}=2s$ , which are really 2D, the Perturbation Method with the settings:



results in the Phase Sensitive Strike angle  $-16.33^\circ$ . Considering only one period, 1s for example, the Phase Sensitive Strike angle given in terminal is  $74.32^\circ$ . This angle and its complementary,  $-15.68^\circ$ , can be selected. If the complementary is chosen, the prescribed  $e$  value changes its sign. In order illustrate it we proceed rotating by,  $-15.68^\circ$ . Starting the Galvanic Distortion Search with settings:



The Plotting Results are:



And the terminal shows:

```

_/SOLUTIONS\
(t,e,s) = ( -1.0159245 , 0.3985394 , -0.072834 )
(θt,θe,θs) = ( -45.4525904 , 21.7292317 , -4.1657234 ) +-( 1.1801291 , 0.2082965 , 1.1074383 )
(t,e,s) = ( -1.0434373 , 0.3965492 , -0.3161543 )
(θt,θe,θs) = ( -46.2177518 , 21.6307627 , -17.5445762 ) +-( 0.9038443 , 0.5272168 , 0.7013945 )

```