

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Quin tipus d'activitats podem
treballar a l'aula per millorar els
aprenentatges de la geometria?

Autor: Cristina Equisoain Hernández

Director: Dr. Sergi Muria Maldonado
Realitzat a: Universitat de Barcelona
(Departament de Matemàtiques
i Informàtica)

Barcelona, 27 de juny de 2016

Abstract

This final degree project has been thought in order to achieve a closer view of geometry, getting to know the existent handicaps that makes it one of the most difficult areas of mathematics and, therefore, creating activities to solve this problem.

I have chosen this topic because, during all the years I have been helping children out of school as a private teacher, I have seen that geometry is the area in which students show more difficulties. As I want to start a career as a high school maths teacher, I want to have enough resources to remedy this situation.

We will find this project divided in two main parts. The first one focuses on researching and analysing the schools' and university curriculums and contents, and setting the differences between them. The second part contains the improvement activities created with the purpose of making geometry more attractive and understandable.

Agraïments

En primer lloc, voldria agrair al meu tutor, en Sergi Muria, la seva ajuda i paciència al llarg de l'elaboració d'aquest treball.

Tanmateix, voldria donar les gràcies al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) pel seu continuat suport i per oferir-me els seus materials en les diferents ocasions que els he necessitat.

D'igual manera, agraeixo molt al col·legi salesià Sant Domènec Savio de Terrassa l'oportunitat que m'ha ofert al poder posar en pràctica dues activitats que formen part d'aquest treball.

Voldria agrair a en Josep Rey, en Josep Bujosa, l'Anton Aubanell i en Joan Carles Naranjo per la seva aportació col·laborant desinteressadament amb les entrevistes.

Finalment, voldria donar les gràcies a la meva família per donar-me aquesta oportunitat, per la seva heroica paciència i per ajudar-me a no decaure; i als meus amics i la meva parella per viure amb mi aquest projecte i oferir-me el seu suport durant aquests mesos.

Índex

1	Introducció i antecedents	1
2	Desenvolupament	3
2.1	Estudi dels continguts	3
2.1.1	Continguts matemàtics a l'ESO	3
2.1.2	Continguts matemàtics de 3r i 4t d'ESO.	5
2.1.3	Continguts matemàtics a la modalitat de ciències i tecnologia del Batxillerat.	6
2.1.4	Pla docent de Geometria Lineal	7
2.2	Anàlisi de les dificultats	9
2.3	Propostes de millora	13
2.3.1	Activitat 1.	15
2.3.2	Activitat 2.	21
2.3.3	Activitat 3.	27
2.3.4	Activitat 4.	32
2.3.5	Activitat 5.	36
2.3.6	Activitat 6.	39
2.3.7	Activitat 7.	43
2.3.8	Activitat 8	46
2.3.9	Activitat 9.	51
2.3.10	Activitat 10.	56
3	Conclusions.	60
4	Bibliografia.	63
A	Sessions a l'escola.	65
A.1	Resultats a l'escola	65
B	Entrevistes.	73
B.1	Entrevista a Anton Aubanell.	73
B.2	Entrevista a Josep Rey.	79
B.3	Entrevista a Josep Bujosa.	85
B.4	Entrevista a Joan Carles Naranjo.	90

1 Introducció i antecedents

El projecte

La geometria és una de les branques més presents de les matemàtiques a la vida quotidiana, però els alumnes la troben complicada i distant a l'hora d'estudiar-la. Això es reflecteix en els resultats de les proves més recents d'avaluació de l'Educació Secundària Obligatòria de Catalunya. Tot i haver-se anat introduint petits canvis, que més endavant detallarem, en la manera d'ensenyar, els resultats descendeixen notablement. Quin és l'origen del problema? Això afecta al coneixement de geometria amb el qual els estudiants arriben a les facultats? Quines activitats podem plantejar per posar-hi remei? N'hi ha suficient amb plantejar activitats de millora?

En aquest treball estudiarem els continguts del currículum de matemàtiques de l'ESO, els continguts de les matemàtiques científicotècniques del batxillerat i el pla docent de l'assignatura de geometria lineal de la carrera de matemàtiques per detectar diferències i mancances que ens han portat a aquesta situació de cara a poder proposar activitats de millora de l'aprenentatge. Aquest estudi ens permetrà establir una base teòrica del problema i d'on partirem a l'hora de crear les propostes d'activitats de millora.

Definició i motivació del problema. Objectius

En el document *Anàlisi dels resultats en geometria de cinc proves d'avaluació de competència matemàtica*, trobem l'avaluació de l'educació secundària obligatòria dels anys 2015, 2014 i 2013 que ens mostra uns resultats en caiguda del nivell de geometria. D'altra banda, les activitats d'experimentació estan tornant a aparèixer a les aules, complementant les matemàtiques formalitzades a la pissarra. La part intuïtiva que caracteritza la geometria havia perdut presència en els darrers temps fent passar a un segon pla tots aquells recursos manipulatius i les TIC, que permeten una millor visualització i comprensió dels elements geomètrics. S'ha de tenir en compte que no tenir una adequada percepció visual dels conceptes també pot tenir conseqüències a altres assignatures, tals com dibuix tècnic.

Actualment, la part experimental de les matemàtiques s'està reintroduint, de manera esglaonada, a les aules, fet que està comportant als professors a adaptar les programacions i donar un enfocament diferent a la manera d'ensenyar geometria.

L'objectiu general d'aquest treball és fer una recerca dels possibles focus de problemes per poder crear activitats més experimentals, amb la intenció d'aconseguir una millor comprensió de la geometria a l'aula i equilibrant les activitats vivencials amb les de pissarra. A més, aquestes activitats haurien de servir de pas entre els coneixements adquirits a l'escola i alguns conceptes que s'aprenen a la universitat,

sense perdre de vista l'essència de fer-les igual d'enriquidores per a tots els alumnes.

Per assolir aquest objectiu, es portaran a terme unes tasques específiques, que són les següents:

1. Conèixer els continguts matemàtics del currículum de l'ESO, els continguts de les matemàtiques de la vessant científicotècnica del batxillerat, i el pla docent de l'assignatura de Geometria Lineal de la carrera de matemàtiques, que és la primera assignatura amb continguts més estrictament geomètrics que els alumnes es troben a l'arribar a la carrera en qüestió.
2. Conèixer amb més detall el GeoGebra, programa de geometria dinàmica utilitzat, preferentment, a educació secundària, que permet experimentar amb la geometria plana i de l'espai, per tal d'introduir activitats que l'utilitzin i així fomentar el seu ús entre alumnes d'institut.
3. Detectar les possibles dificultats de l'aprenentatge de geometria.
4. Crear activitats concretes que permetin un millor aprenentatge de la geometria i que, alhora, serveixin de pont per a coneixements que s'adquireixen o es tracten amb més profunditat a la universitat.

La memòria es troba dividida en les següents parts:

1. La primera part consisteix en establir un marc teòric a partir de l'estudi de documents oficials, llibres i la normativa actual d'educació per tal de dur a terme una anàlisi de les dificultats de l'aprenentatge de la geometria.
2. A continuació, es presentaran propostes de millora de l'aprenentatge de la geometria a l'aula.

2 Desenvolupament

Per tal de poder aconseguir l'objectiu plantejat, s'han seguit les següents línies metodològiques:

1. Recerca: s'ha realitzat una recerca que ha consistit en l'estudi dels continguts dels currículums mencionats anteriorment i del pla docent de l'assignatura de Geometria Lineal, documents oficials del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, entre d'altres per tal de poder detectar els possibles orígens del problema.
2. Entrevistes: S'han realitzat entrevistes a persones destacades en l'àmbit de les matemàtiques: Josep Rey (president del Museu de Matemàtiques de Catalunya), Anton Aubanell (professor honorífic de la Universitat de Barcelona), Josep Bujosa (president de l'Associació Catalana de GeoGebra) i Dr. Joan Carles Naranjo (professor de la facultat de matemàtiques de la Universitat de Barcelona). Aquestes entrevistes es troben als annexos d'aquest treball.
3. Anàlisi de les dificultats: a partir de la cerca prèvia, s'han detectat els possibles focus d'on sorgeixen aquestes dificultats i s'ha dut a terme una anàlisi per tal de poder crear activitats de millora adients.
4. Creació i desenvolupament: es proposen activitats per a reforçar aquells punts de l'aprenentatge de la geometria on es presentin menys facilitats i poder-les relacionar amb conceptes treballats a la universitat.

2.1 Estudi dels continguts

Per a fer possible l'estudi dels corresponents continguts matemàtics de l'ESO i del batxillerat, i del pla docent de l'assignatura de Geometria Lineal, s'ha fet una lectura exhaustiva dels mateixos. En aquesta secció del treball explicarem en què consisteixen.

2.1.1 Continguts matemàtics a l'ESO

El currículum acadèmic en l'àmbit matemàtic de l'ESO s'estructura al voltant de continguts i processos que han d'ajudar a assolir a l'alumnat la competència matemàtica, que són habilitats per desenvolupar i aplicar el raonament matemàtic amb l'objectiu de resoldre diferents problemes situats en contextos, i també a assolir la resta de competències bàsiques.

Les competències s'estructuren en quatre processos o dimensions: resolució de problemes, raonament i prova, connexions, i comunicació i representació.

A continuació detallem els 16 continguts clau (CC) de l'ESO.

1. CC1. Sentit del nombre i de les operacions.
2. CC2. Raonament proporcional.
3. CC3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).
4. CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.
5. CC5. Patrons, relacions i funcions.
6. CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.
7. CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.
8. CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
9. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
10. CC10. Relacions i transformacions geomètriques.
11. CC11. Magnituds i mesura.
12. CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.
13. CC13. Sentit de l'estadística.
14. CC14. Dades, taules i gràfics estadístics.
15. CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.
16. CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

Els blocs d'espai, forma i mesura són els que conformen la branca de geometria. Per a explicar els continguts clau estrictament relacionats amb aquests blocs, seguirem el document *Quaderns d'avaluació. 31. L'avaluació de quart d'ESO*.

En el bloc de continguts d'espai i forma, trobem els següents continguts clau:

1. CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
Es treballa la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per resoldre problemes.
2. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
En aquest contingut clau es proposa fer una anàlisi de les característiques i propietats de les figures geomètriques de dues i tres dimensions per tal de poder desenvolupar raonaments sobre relacions geomètriques.

3. CC10. Relacions i transformacions geomètriques.

Es veuen les diferents transformacions possibles utilitzant, també, la simetria per analitzar diferents situacions matemàtiques.

En el bloc de mesura, trobem els següents continguts clau:

1. CC11. Magnituds i mesura.

Aquest contingut clau treballa la comprensió de les propietats mesurables dels objectes, les unitats, sistemes i processos de mesura.

2. CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.

Aquest contingut clau recull l'aplicació de tècniques, instruments i fórmules adequats per a obtenir mesures i poder fer estimacions raonables.

2.1.2 Continguts matemàtics de 3r i 4t d'ESO.

Com les activitats de millora de l'aprenentatge de la geometria estan pensades per a 2n cicle de l'ESO i per a Batxillerat, estudiarem també els continguts matemàtics de 3r i 4t d'ESO. La informació necessària per a aquesta descripció s'ha extret de la documentació corresponent al currículum de l'Educació Secundària Obligatòria per al curs 2015-2016, segons DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria.

1. Continguts matemàtics de 3r d'ESO.

En el bloc d'espai i forma trobem:

(a) Proporcionalitat i semblança.

- i. Figures semblants de tres dimensions.
- ii. Ampliacions i reduccions; factor escala.

(b) Transformacions geomètriques.

- i. Translacions, girs i simetries.
- ii. Programes de geometria dinàmica, tipus GeoGebra.
- iii. Ús de les transformacions geomètriques per a la resolució de problemes en contextos diversos.

En el bloc de mesura trobem:

i. Mesures directes.

- A. Instruments de mesura d'angles i longituds.
- B. Nombres decimals per expressar mesures (nombre de decimals, precisió de la mesura).

ii. Mesures indirectes.

- A. Estimació.
- B. Precisió, exactitud i error.

- C. Història de la mesura del cel (radi de la Terra, distància Terra-Lluna...).
- D. Ús de les mesures indirectes per a la resolució de problemes en contextos diversos.

2. Continguts matemàtics de 4t d'ESO.

En el bloc d'espai i forma trobem:

(a) Trigonometria.

- i. Mesura d'angles (unitats sexagesimals i radians).
- ii. Raons trigonomètriques.
- iii. Resolució de triangles rectangles.
- iv. Ús de programes de geometria dinàmica.
- v. El naixement i primer desenvolupament de la trigonometria al llarg de la història.
- vi. Ús de la trigonometria per a la resolució de problemes en contextos diversos.

(b) Geometria analítica en el pla.

- i. Coordenades i vectors.
- ii. Equació de la recta.
- iii. Paral·lelisme i perpendicularitat.
- iv. Història de la introducció a les coordenades cartesianes.

En el bloc de mesura trobem:

(a) Mesures indirectes.

- i. Semblança i trigonometria.
- ii. Unitats de mesura.
- iii. Aproximacions per excés i per defecte.
- iv. Precisió, exactitud i error.
- v. La mesura de la distància Terra-Sol i Terra-Lluna.
- vi. Resolució de problemes relatius a mesures indirectes.

2.1.3 Continguts matemàtics a la modalitat de ciències i tecnologia del Batxillerat.

Un cop l'alumnat acaba els seus estudis de secundària obligatoris té la possibilitat de continuar estudiant cursant el batxillerat. Dins del propi batxillerat, trobem tres modalitats: d'arts, ciències i tecnologia i humanitats i ciències socials. Tant la modalitat de ciències i tecnologia com la de ciències socials tenen la seva corresponent assignatura de matemàtiques, però els continguts treballats són diferents. Aquest apartat del treball se centrarà en l'estudi dels continguts de les matemàtiques de la modalitat de ciències i tecnologia, doncs és el que ens interessa per crear, posteriorment, activitats per millorar l'aprenentatge de la geometria i, en conseqüència,

els coneixements de la mateixa amb els quals els estudiants arriben a les universitats.

Els continguts específics de 1r de batxillerat són:

1. Les funcions circulars en l'estudi de fenòmens periòdics i la trigonometria per resoldre problemes mitjançant triangulació.
 - (a) L'angle com a gir. Unitats de mesura d'angles. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol. Les funcions sinus, cosinus i tangent. L'estudi, amb ordinador, de les funcions trigonomètriques sota canvis d'escala: període i amplitud. Aplicació a l'estudi de fenòmens periòdics.
 - (b) Resolució gràfica i analítica de triangles: els teoremes del sinus i el cosinus. Problemes geomètrics que es poden resoldre per triangulació. Els procediments de càlcul en topografia.
2. Els vectors, una nova eina per resoldre problemes de geometria. Les còniques en àmbits no matemàtics.
 - (a) Els vectors com a manera de representar una magnitud i una direcció. Els vectors lliures com a translacions en el pla.
 - (b) Equacions de la recta. Direcció i pendent. Problemes d'incidència i paral·lelisme. Angles i distàncies. Aplicació a la resolució de problemes geomètrics.
 - (c) Llocs geomètrics: les còniques. Les còniques en l'art i l'arquitectura.

Els continguts específics de 2n de batxillerat són:

- (a) La interpretació geomètrica dels sistemes lineals amb tres incògnites.
 - i. Vectors lliures en l'espai. Dependència i independència lineal.
 - ii. Equacions del pla i de la recta. Posicions relatives. Interpretació geomètrica de sistemes lineals amb tres incògnites.
- (b) El plantejament i la resolució de problemes mètrics a l'espai.
 - i. Producte escalar. Perpendicularitat i angles.
 - ii. Producte vectorial i mixt. Interpretació geomètrica i aplicacions al càlcul d'àrees i volums.
 - iii. Càlcul de distàncies.

2.1.4 Pla docent de Geometria Lineal

Tal i com hem mencionat anteriorment, l'assignatura de Geometria Lineal és la primera assignatura on es treballen específicament continguts de geometria a la carrera de Matemàtiques. És per aquest motiu que es procedeix a estudiar els continguts del seu pla docent, i no el de l'assignatura de Matrius i Vectors, doncs aquesta

última té un contingut més algebraic.

Els continguts d'aquesta assignatura són els següents:

1. Espais afins.

Dins d'aquest bloc temàtic es treballen:

- (a) Les varietats lineals, i els conceptes d'intersecció, suma i paral·lelisme entre les mateixes.
- (b) Baricentres.
- (c) Les coordenades afins, i s'estudia la raó simple de tres punts alineats.
- (d) Les aplicacions afins i les afinitats.

2. Espais vectorials euclidians.

Aquest és el segon bloc de l'assignatura i es treballen els següents conceptes:

- (a) Producte escalar. Norma i ortogonalitat.
- (b) Producte vectorial.
- (c) Endomorfismes ortogonals, el grup ortogonal. Angles.
- (d) Endomorfismes simètrics.

3. Espais afins euclidians.

Aquest és el tercer i últim bloc, i es treballen les següents temàtiques:

- (a) Distància.
- (b) Desplaçaments i semblances.

Un cop estudiats i contrastats els continguts dels 2 currículums escolars i el pla docent de Geometria Lineal, podem concloure que hi ha força diferències entre ells, però que lluny de suposar un obstacle per a l'elaboració de les activitats, aquestes diferències suposen oportunitats per a treballar.

Observem que en els continguts de 3r i 4t d'ESO es treballen referències històriques del temari tractat, i que a 1r de batxillerat s'estudien les còniques en àmbits no matemàtics, fet que no succeix en realitat, tal com apunten en Josep Bujosa i el Dr. Joan Carles Naranjo en les respectives entrevistes realitzades.

S'observen, també, poques referències pel que fa a recursos tant manipulatius com TIC, en tots els continguts estudiats.

S'observa, així mateix, una certa continuïtat pel que respecte a la trigonometria.

2.2 Anàlisi de les dificultats

Per detectar els diferents focus de dificultats, s'ha procedit a fer una lectura de diferents documents i articles, entre d'altres, que s'han complementat amb entrevistes a persones reconegudes dins de l'àmbit matemàtic.

Aquesta secció del treball se centrarà en l'estudi de la informació extreta de les anteriors línies procedimentals mencionades, que establirà un marc teòric que servirà de base pel plantejament i la creació de propostes de millora.

Per tal de poder seguir unes línies de millora concretes, a partir de la recerca realitzada, s'han dividit en tres blocs diferents les causes dels possibles orígens del problema.

1. Dificultats associades al desenvolupament pràctic del currículum.

Tot i que els continguts del currículum estan fixats, el temps que es dedica a cada part no està predeterminada, i moltes vegades això suposa una major dedicació a uns temaris concrets en detriment d'uns altres.

2. Dificultats associades al desenvolupament metodològic de la geometria.

Hi ha moltes maneres d'ensenyar, sobretot quan es tracta de la geometria, doncs és, probablement, la branca de les matemàtiques que més peu dóna a utilitzar recursos didàctics; però, sovint, aquesta possibilitat no es contempla i no se surt de les metodologies tradicionals.

3. Dificultats associades a la formació del professorat.

Molt del professorat que es dedica a l'ensenyament de matemàtiques als instituts prové de facultats de matemàtiques on té lloc una formació força teòrica, fet que podria veure's reflectit en la transmissió de conceptes que es fa als alumnes.

Procedim a detallar aquests tres blocs.

1. Dificultats associades al desenvolupament pràctic del currículum.

El currículum es concreta mitjançant 5 blocs: numeració i càlcul, canvi i relacions, mesura, espai i forma i estadística i atzar. Tot i ser necessari treballar-los tots equitativament pel correcte assoliment dels continguts, sovint passa que no es dedica el mateix temps a cada un d'ells.

Segons descriu Anton Aubanell en el seu document *Orientacions per a la millora de la geometria a l'ESO*, que trobem en el document *Quaderns d'avaluació. 28 L'avaluació de quart d'ESO 2014*, es dedica una quantitat força significativa de temps al bloc de numeració i càlcul i al domini de les expressions numèriques o algebraïques. Això es deu a que es dona per sentat que si no es té una bona base de càlcul, l'alumnat no podrà desenvolupar correctament

la resta de l'assignatura i es podria trobar amb mancances calculístiques en aquelles altres matèries que es valguin del càlcul en els seus procediments.

L'ensenyament a la secundària i al batxillerat sovint s'enfoca en els coneixements que seran necessaris en el futur. En molts casos, l'educació posterior que reben els alumnes és universitària. En moltes universitats que ofereixen carreres científicotècniques, trobem que en els primers cursos, en el cas d'oferir assignatures relacionades amb les matemàtiques, aquestes estan més centrades en l'anàlisi que no la geometria. És per aquest motiu que hi ha una major dedicació a la part de càlcul a la secundària i batxillerat, restant temps als altres blocs.

Aquesta presència dominant de l'anàlisi no només afecta a la quantitat d'hores que es dedica a la geometria, sino que també influeix en l'enfocament que se li dona: es treballa l'aplicació de fórmules (àrees, volums) sense poder deixar lloc al treball deductiu que suposaria fer activitats experimentals.

En el cas del batxillerat de matemàtiques científicotècniques, el currículum actual és molt extens per dur-lo a terme en profunditat en dos anys. Això també fa que la geometria es desenvolupi d'una forma molt mecànica.

En el cas dels estudis universitaris, la meua experiència també ha estat que en el desenvolupament de les classes de geometria lineal, ha predominat el treball teòric que, s'hagués pogut complementar amb recursos visuals per a una millor comprensió del temari.

2. Dificultats associades al desenvolupament metodològic de la geometria.

No hi ha una única línia metodològica que defineixi la manera d'ensenyar una matèria. És per aquest motiu que desglossarem aquest bloc en tres vessants.

Metodologia i tecnologia.

Amb l'aparició de les eines TIC, la visualització de molts conceptes s'ha vist facilitada i, segons cita en Josep Bujosa en l'entrevista, l'ús de les tecnologies a l'aula ha suposat un canvi en l'enfocament de la geometria i l'obertura d'un ventall molt ampli a l'hora de poder proposar i realitzar activitats tant amenes com comprensibles. Tot i estar a l'abast de tothom, el seu ús encara és poc freqüent i, encara que s'estan introduint activitats utilitzant aquestes eines, és un procés que està resultant lent.

Moltes vegades, començar a utilitzar aquestes eines és un procés lent degut a les equipacions del centre o la complexitat d'adaptar la programació ja existent.

Hi ha una falta de coneixement d'aquests recursos i de la seva utilització que repercuteix negativament sobre l'alumnat: les oportunitats de visualització de conceptes són limitades, té poc marge per a la motivació i pel desenvolupament de les seves capacitats deductives. Segons descriu el Dr. Joan Carles Naranjo a l'entrevista, el poc ús d'aquests materials afecta també a la capacitat del pas del coneixement concret a l'abstracte.

Metodologia i continguts.

La primera causa que assenyalarem en aquest apartat està relacionada amb la manca de l'ús d'elements tecnològics. Tal com descriu Adoración Peña Mecina en el seu article *Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO*, al treballar-se molt més conceptes per l'explicació dels quals es necessita exclusivament la pissarra, s'ha donat pas a una infravaloració de la importància del raonament visual i totes les oportunitats geomètriques que ofereix. En el cas de la geometria, existeixen programes tals com el GeoGebra que permeten visualitzar certs conceptes i, inclús, manipular-los; però si no s'utilitzen, aquesta visualització es redueix a un dibuix sense opció a ser manipulats.

Tant als instituts com a la universitat es tenen uns continguts fixats i un temps limitat per treballar-los tots. Aquest fet fa que es tendeixi a mecanitzar les explicacions i, sobretot, els diferents processos per resoldre els exercicis plantejats, ocasionant, així, la memorització dels procediments sense deixar temps per la seva interiorització, tal com explica Anton Aubanell en el seu document *Orientacions per a la millora de la geometria a l'ESO*, que trobem en el document *Quaderns d'avaluació. 28 L'avaluació de quart d'ESO 2014*.

A més, també s'observa com a conseqüència d'aquesta segona causa que el temps disponible per a plantejar problemes contextualitzats o relacionats amb altres matèries curriculars és quasi inexistent, i això impedeix a l'estudiant veure més enllà del que s'ensenya a l'aula de matemàtiques.

Aquesta pressió temporal també comporta que es prepari a l'alumnat més per aprovar un examen que no pas per a que aprengui, fet que assenyala Josep Rey en l'entrevista realitzada.

En el document *Orientacions per a la millora de la geometria a l'ESO*, que trobem en el document *Quaderns d'avaluació. 28 L'avaluació de quart d'ESO 2014*, trobem que la visió posada en els possibles estudis universitaris posteriors fa que es treballi molt més en abstracte que no el pas a l'abstracció, és a dir: no s'han acabat d'interioritzar certs conceptes que ja s'està manipulant fórmules. Hi ha poc treball reflexiu al passar dels conceptes concrets als abstractes.

Metodologia i materials.

Cal tenir present que la geometria és la branca més experimental de les matemàtiques i és per això no s'hauria de prescindir de l'ús de materials manipulables per a fer-la més visual i propera. La poca presència d'aquests recursos va en detriment de la seva comprensió, doncs permeten fer els conceptes més intuïtius i palpables.

Els alumnes són poc conscients de la relació que hi ha entre la geometria i la vida quotidiana. Es treballen pocs problemes en situacions que els estudiants reconguin, i això provoca un distanciament entre el que estudien i la vida real i, conseqüentment, una infravaloració de la geometria.

3. Dificultats associades a la formació del professorat.

La majoria dels professors de matemàtiques provenen de facultats de matemàtiques, fet que significa que la seva formació és més teòrica, tal com assenyala Anton Aubanell en l'entrevista. Això es pot veure reflectit en la transmissió de conceptes que es fa als alumnes, doncs no sempre és fàcil establir la diferència entre la formació matemàtica que té el professorat i la que s'ha de donar als ciutadans que, en general, no seran matemàtics. Degut a això, la formació que reben els estudiants, tendeix a ser teòrica i formal, però cal recordar que no tots els estudiants acabaran sent matemàtics. És per això que cal discernir entre la formació que ha rebut un mateix amb la que ha de transmetre.

Com la implementació de les eïnes TIC és força recent, molts professors no han pogut formar-se ni adaptar les temporitzacions escolars a noves activitats que les incloguin.

Durant aquest curs he exercit de monitora al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) i, en més d'una ocasió, diversos professors m'han fet notar l'assoliment de reptes de la sala de geometria per part d'alguns alumnes que a classe no destaquen gaire. A més a més, m'agradaria deixar constància del contrast d'opinions que tenen els alumnes quan arriben al museu i quan en surten. Arriben amb la idea que veuran les mateixes matemàtiques que fan a l'aula, però quan es troben que són ells qui resolen els reptes, qui *fan* les matemàtiques, el seu entusiasme es torna desbordant i no volen canviar de sala. Això passa, sobretot, amb la sala de geometria.

A més, quan vaig cursar l'assignatura de Didàctica a la facultat, em van mostrar recursos didàctics que, a l'institut, mai van ser utilitzats pel professor i que, si hagués tingut l'oportunitat d'aprendre amb ells, sé que la geometria hagués estat una branca amb menys obstacles per mi.

2.3 Propostes de millora

Per tal de poder crear unes propostes de millora que cobreixin les dificultats que s'han assenyalat, s'ha decidit establir 3 blocs diferents per agrupar els diversos temes de treball de les propostes.

Aquests blocs s'han establert a partir de l'estudi dels diferents documents i de les entrevistes dutes a terme, d'on han sortit les mancances que s'han de reforçar. La classificació de les mateixes, ja sigui per semblança o per la relació entre elles, han permès definir aquests blocs, que a continuació detallarem.

1. Bloc d'activitats.

En aquest bloc s'agrupen les propostes de millora referents a les activitats que es podrien treballar per aconseguir una millor interiorització de la geometria. Aquestes propostes responen a les següents preguntes:

(a) Què treballen?

Continguts i conceptes que treballen aquestes activitats.

La seva relació amb conceptes universitaris, en dos sentits: en el sentit teòric, demostrant algun concepte, per anar apropant el marc teòric de les matemàtiques als estudiants i així anar fent passos cap a l'abstracció, que permet introduir més referències teòriques; en el sentit pràctic, treballar més les còniques, o els tors, per exemple.

(b) Com ho treballen?

Possibles materials a utilitzar: programes com el GeoGebra, materials manipulables, exercicis contextualitzats; la seva combinació amb explicacions formals (pissarra).

Treball a fons de les activitats: per tal d'aconseguir una millor interiorització dels conceptes treballats en les activitats, seria bo que en el temps que es disposa per dur-les a terme, se'n treballassin menys, prioritant la qualitat respecte a la quantitat, de manera que permeti un treball exhaustiu i en profunditat dels continguts. Així, els exercicis no serien repetitius i s'evitaria la mecanització de l'aprenentatge respecte a la resolució dels problemes que es treballin.

(c) Com són?

Seria interessant que fossin de diferents tipologies, de manera que permetés un treball des de totes les vessants: activitats més de reflexió o de caire més teòric, o bé d'experimentació amb materials manipulables i TIC, activitats d'exploració o investigació, etc.

2. Bloc d'alumnat.

En aquest segon bloc es detalla la manera com s'haurien de treballar aquestes activitats.

(a) Treball en grup o per parelles.

Organitzant grups els membres del qual tinguessin diferents nivells de coneixements i destresses matemàtiques, es fomentaria el treball en equip,

fent que s'ajudessin entre ells, i l'argumentació de l'activitat a desenvolupar, a més a més de treballar el diàleg per consensuar o convèncer sobre un raonament.

(b) Treball individual.

Totalment compatible amb el treball en grup, i que permetria dur a terme un treball més reflexiu i permetria a l'alumne desenvolupar més autonomia i iniciativa en la presa de decisions. Tanmateix, l'alumnat rebria una atenció més individualitzada i se'l podria ajudar millor a reforçar les parts on presenta dificultats.

(c) Defensa oral i/o escrita.

Sovint, preparar-se un tema i haver-lo d'exposar públicament comporta una millor interiorització del que s'ha treballat. Així, doncs, si s'incorporen a la dinàmica del curs més activitats que requerissin una entrega per escrit i una exposició a la resta de l'aula, s'aconseguiria un millor domini del llenguatge matemàtic i una major comprensió del temari.

3. Bloc d'ensenyament.

Amb l'objectiu de complir les programacions establertes a principis de curs i així explicar adequadament tot el temari corresponent a geometria, es proposa com a solució alternar al llarg de l'ESO el moment de l'any acadèmic on s'explica; és a dir, impartir aquesta branca de les matemàtiques en trimestres alterns al llarg dels nivells de l'ESO, de manera que si en un dels cursos no s'haguessin pogut assolir bé tots els continguts per falta de temps, poder-ho aconseguir en el següent.

Dur a terme activitats que treballin la geometria i altres branques de les matemàtiques alhora faria veure a l'alumnat que no és una branca independent de les altres, i que els seus coneixements complementen la resta del temari del curs. A més a més, podem extrapolar aquest fet a treballar activitats que relacionin la geometria amb altres assignatures del curs escolar, i així mostrar als estudiants que la geometria no només és present en les matemàtiques.

Les propostes d'activitats per a la millora de l'aprenentatge de geometria que tot seguit s'expliquen, han estat creades amb l'objectiu de cobrir els continguts que s'han exposat en aquests 3 blocs. S'han creat un total de 10 activitats.

2.3.1 Activitat 1.

SECCIONS DEL CILINDRE I EL CON.

DESCRIPCIÓ:

En aquesta activitat es pretén que l'alumnat observi les seccions bidimensionals que es creen en el con i el cilindre mitjançant un raig de llum i així familiaritzar-se amb les còniques, que tot seguit treballen amb el programa de geometria dinàmica GeoGebra.

Per a trobar les seccions, serà necessari posar cada una de les dues figures a sota dels rajos que desprén l'anella i anar-les inclinant per observar els talls que es formen.

Un cop hagin observat i experimentat, utilitzaran el GeoGebra per formalitzar i contestar unes altres preguntes.

ETAPA: A partir de 2n cicle de l'ESO.

OBJECTIUS:

L'objectiu d'aquesta activitat és conèixer les seccions del con i del cilindre, doncs les còniques són conceptes que en cursos acadèmics superiors apareixen sovint i no es treballen massa a l'escola.

RECURSOS EMPRATS:

Per a dur a terme aquesta activitat serà necessari el document de treball adjunt, i seria interessant utilitzar el mòdul del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), però en el seu defecte s'emprarà el programa de geometria dinàmica GeoGebra.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana que els alumnes realitzin aquesta activitat en grups de dos o tres.

Aquesta activitat consta de diversos apartats amb diferents preguntes.

L'objectiu del primer apartat és fer que l'alumne intenti predir les diferents seccions que pot trobar en els cossos geomètrics, per aleshores refutar o verificar les seves hipòtesis i contestar el segon apartat.

En el tercer apartat es demana que observin detingudament si les seccions obtingudes per als dos cossos coincideixen. A més, se'ls pregunta pel nom que rep la família de les seccions del con.

En la segona part de l'activitat, que la formen dos apartats, cada un d'ells amb 5 preguntes, es tracta de visualitzar amb el GeoGebra aquestes seccions mitjançant la construcció del con i del cilindre.

Cal tenir present, que en l'utilització de l'anella de foc es fixa el pla i es mou l'objecte, i amb el GeoGebra es fixa l'objecte i es mou el pla.

En les activitats hi hauria d'haver espai suficient per a respondre totes les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat a partir de 2n cicle de l'ESO.

INTERDISCIPLINARIETAT:

El primer apartat d'aquesta activitat es pot treballar també a dibuix tècnic.

ANNEXOS:

Plantejar aquesta activitat ha significat començar a crear una fitxa que servirà com a recurs didàctic de l'esmentat mòdul del MMACA que formarà part del seu arxiu.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Aquesta primera activitat introdueix les còniques, concepte que es treballa en estudis posteriors. Té una part que consisteix en observar els cossos geomètrics presentats i en fer un primer intent d'abstracció al provar de pensar quines seccions trobaran tant en el cilindre com en el con sense ajudar-se de cap estri.

Tot seguit, s'experimenta amb l'anella de foc per comprovar si les hipòtesis fetes sobre el cilindre i el con són certes o no, i es raona si hi ha seccions que coincideixen en ambdós cossos.

La part final de l'activitat treballa la construcció del con mitjançant el GeoGebra, per a una millor visualització.

Relaciona la geometria amb el dibuix tècnic, assignatura que s'ofereix tant a l'ESO com a la modalitat tecnològica del batxillerat.

És una activitat que es treballa en grups de dues o tres persones per a poder raonar els resultats que es van obtenint.

FITXA ACTIVITAT 1: SECCIONS DEL CILINDRE I EL CON.



A la imatge que trobem aquí damunt, veiem l'anella de foc del MMACA. Disposa d'un interruptor que, quan es prem, encén un raig de llum dins de l'anella. També hi trobem els diferents cossos geomètrics amb els quals treballarem. Per a trobar els diferents talls del raig de llum amb les figures, aquestes s'han de passar pel mig de l'anella.

1. Observant el cilindre i el con, quines seccions creus que trobaríem si els tallsim per un pla?



2. Després d'haver observat les seccions que s'han creat al passar les figures pel centre de l'anella, són les que havies predit? Quines seccions obtenim per a cadascun dels cossos?
3. Sabries dir quines coincideixen? Quin nom reben les seccions del con?

La segona part de l'activitat està enfocada a batxillerat.

Seccions d'un con amb GeoGebra.

Seguint les instruccions següents, veurem com es formen les diferents seccions d'un con amb el GeoGebra.

1. Ves a la pestanya anomenada "visualitza", clica en l'opció "Gràfica 3D".
2. En la gràfica 3D, construeix un con de centre (0,0,0), de vèrtex (0,0,3) i radi 2.
3. Crea uns lliscadors anomenats e,f,g,h i defineix el següent pla:

$$ex + fy + gz = h$$

4. Introdueix per la barra de comandes la instrucció que t'interseca el pla amb el con.
5. Mou els diferents lliscadors. Què vas obtenint? Són les mateixes seccions que havies obtingut a l'anella de foc?

Seccions d'un cilindre amb GeoGebra.

Seguint les instruccions següents, veurem com es formen les diferents seccions d'un cilindre amb el GeoGebra.

1. Ves a la pestanya anomenada "visualitza", clica en l'opció "Gràfica 3D".
2. En la gràfica 3D, construeix un cilindre els centres de les bases del qual siguin (0,0,0) i (0,0,5) i radi 2.
3. Crea uns lliscadors anomenats e,f,g,h i defineix el següent pla:

$$ex + fy + gz = h$$

4. Introdueix per la barra de comandes la instrucció que t'interseca el pla amb el con.
5. Mou els diferents lliscadors. Què vas obtenint? Són les mateixes seccions que havies obtingut a l'anella de foc?

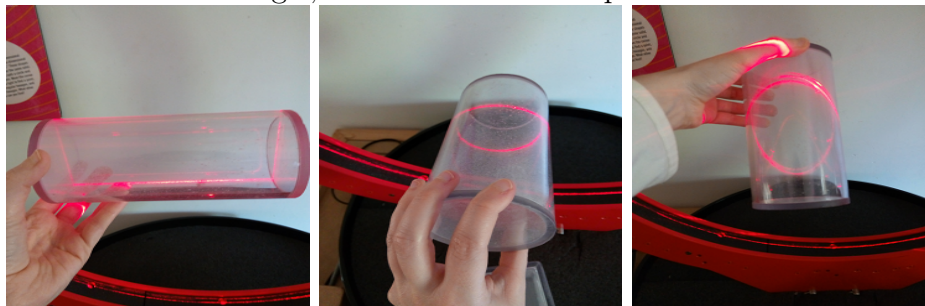
RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

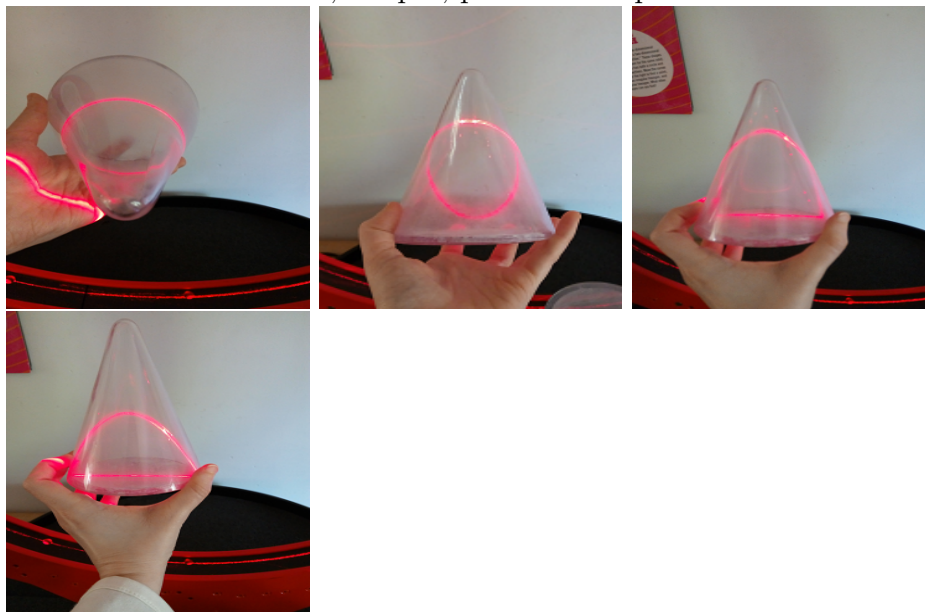
1. Observant el cilindre i el con, quines seccions creus que trobaríem si els tallessim per un pla?

Les seccions que s'haurien de trobar són:

Del cilindre: rectangle, circumferència i el·lipse.



Del con: circumferència, el·lipse, paràbola i hipèrbola.



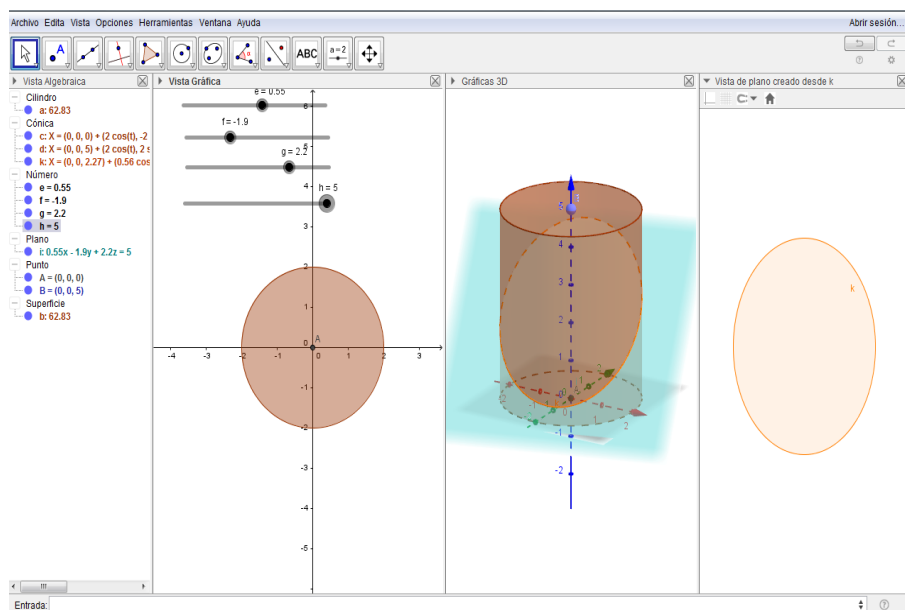
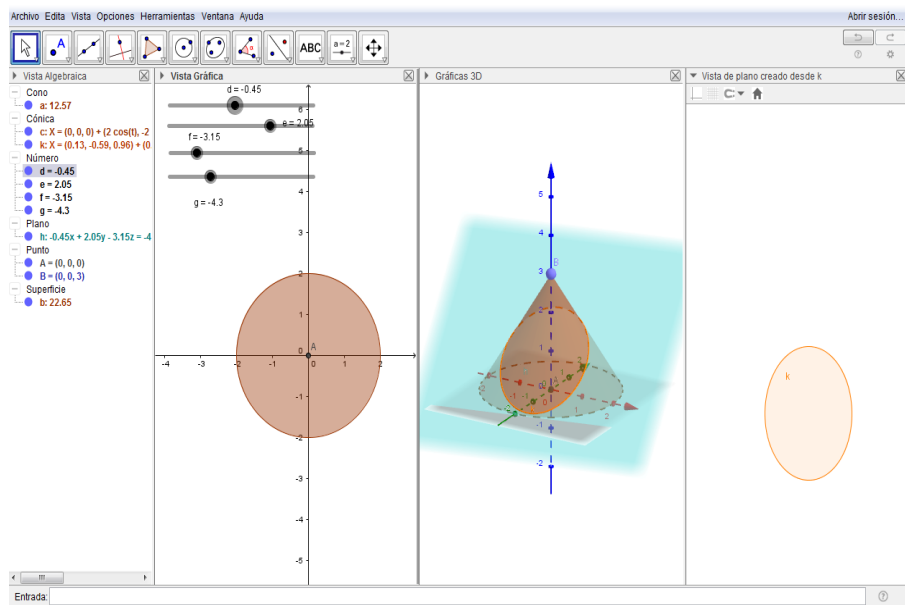
2. Podem trobar mateixes seccions en cossos geomètrics diferents? Sí que es poden trobar algunes seccions de la mateixa forma en el cilindre i el con, que són: la circumferència i l'el·lipse. Les seccions del con s'anomenen còniques.

Seccions d'un con i d'un cilindre.

En aquest apartat de l'activitat, s'espera que l'alumnat comenci a utilitzar el GeoGebra 3D, poc utilitzat a les aules, per així ser capaç de distingir els diferents talls

que es van obtenint.

Un exemple seria el següent, on veiem que la intersecció del pla, tant amb el con com amb el cilindre, és una el·lipse.



En aquesta activitat es poden tenir diferents nivells de dificultat. Tant es pot donar les instruccions del que han de construir, com donar-les parcialment, com no donar-ne i deixar que siguin els propis alumnes que experimentin completament amb el GeoGebra.

2.3.2 Activitat 2.

SECCIONS DEL CUB I EL TETRÀEDRE.

DESCRIPCIÓ:

En aquesta activitat es pretén que l'alumnat observi les seccions bidimensionals que es creen en el cub i el tetràedre mitjançant un raig de llum i així familiaritzar-se amb les seccions de cossos geomètrics de cares planes, que tot seguit treballen amb el programa de geometria dinàmica GeoGebra.

Per a trobar les seccions, serà necessari posar cada una de les dues figures a sota dels rajos que desprén l'anella i anar-les inclinant per observar els talls que es formen.

Un cop hagin observat i experimentat, utilitzaran el GeoGebra per formalitzar i contestar unes altres preguntes.

ETAPA: A partir de 2n cicle de l'ESO.

OBJECTIUS:

L'objectiu d'aquesta activitat és conèixer les seccions de cossos geomètrics de cares planes, doncs són unes seccions diferents a les que s'han treballat en l'activitat 1, i investigar propietats de les seccions obtingudes.

RECURSOS EMPRATS:

Per a dur a terme aquesta activitat serà necessària el document de treball adjunt, i seria interessant utilitzar el mòdul del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), però en el seu defecte s'emprarà el programa de geometria dinàmica GeoGebra.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana que els alumnes realitzin aquesta activitat en grups de dos o tres.

Aquesta activitat consta de diversos apartats amb diferents preguntes.

L'objectiu del primer apartat és fer que l'alumne intenti predir les diferents seccions que pot trobar en els cossos geomètrics, per aleshores refutar o verificar les seves hipòtesis i contestar el segon apartat. A més a més, en aquest segon apartat, es pretén que l'alumnat comenci a conèixer les seccions trobades.

En el tercer apartat es demana que observin detingudament si les seccions obtingudes per als dos cossos coincideixen.

En la segona part de l'activitat, es construeixen les seccions del cub i del tetràedre. Cada apartat de construcció consta de 4 preguntes. Tanmateix, es tracta d'observar si tenen alguna característica comuna.

Cal tenir present, que en l'utilització de l'anella de foc es fixa el pla i es mou l'objecte, i amb el GeoGebra es fixa l'objecte i es mou el pla.

En les activitats hi hauria d'haver espai suficient per a respondre totes les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat a partir de 2n cicle de l'ESO.

INTERDISCIPLINARIETAT:

El primer apartat d'aquesta activitat es pot treballar també a dibuix tècnic.

ANNEXOS:

Plantejar aquesta activitat ha significat començar a crear una fitxa que servirà com a recurs didàctic de l'esmentat mòdul del MMACA que formarà part del seu arxiu.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Aquesta primera activitat té una part que consisteix en observar els cossos geomètrics presentats i en fer un primer intent d'abstracció al provar de pensar quines seccions trobaran tant en el cub com en el tetràedre sense ajudar-se de cap estri.

Tot seguit, s'experimenta amb l'anella de foc per comprovar si les hipòtesis fetes sobre el cub i el tetràedre són certes o no, i es raona si hi ha seccions que coincideixen en ambdós cossos.

La part final de l'activitat treballa la construcció del con mitjançant el GeoGebra, per a una millor visualització.

Relaciona la geometria amb el dibuix tècnic, assignatura que s'ofereix tant a l'ESO com a la modalitat tecnològica del batxillerat.

És una activitat que es treballa en grups de dues o tres persones per a poder raonar els resultats que es van obtenint.

FITXA ACTIVITAT 2: SECCIONS DEL CUB I EL TETRÀEDRE.



A la imatge que trobem aquí damunt, veiem l'anella de foc del MMACA. Disposa d'un interruptor que, quan es prem, encén un raig de llum dins de l'anella. També hi trobem els diferents cossos geomètrics amb els quals treballarem. Per a trobar els diferents talls del raig de llum amb les figures, aquestes s'han de passar pel mig de l'anella.

1. Observant el cub i el tetràedre, quines seccions creus que trobaríem si els tallessim per un pla?



2. Després d'haver observat les seccions que s'han creat al passar les figures pel centre de l'anella, són les que havies predit? Quines seccions obtenim per a cadascun dels cossos?
3. Sabries dir quines coincideixen?

La segona part de l'activitat està enfocada a batxillerat.

Seccions d'un cub amb GeoGebra.

Seguint les instruccions següents, veurem com es formen les diferents seccions d'un cub amb el GeoGebra i treballarem les seves expressions generals.

1. Ves a la pestanya anomenada "visualitza", clica en l'opció "Gràfica 3D", i construeix un cub de vèrtexs $(-1,0,0)$ i $(1,0,0)$. Veuràs que també apareix representat en el pla.
2. Crea uns lliscadors anomenats b,c,d,e i defineix el següent pla:

$$bx + cy + dz = e$$

3. Introdueix per la barra de comandes la instrucció que t'interseca el pla amb el cub.
4. Mou els diferents lliscadors. Què vas obtenint? Són les mateixes seccions que havies obtingut a l'anella de foc?

Seccions d'un tetràedre amb GeoGebra.

Seguint les instruccions següents, veurem com es formen les diferents seccions d'un tetràedre amb el GeoGebra i treballarem les seves expressions generals.

1. Ves a la pestanya anomenada "visualitza", clica en l'opció "Gràfica 3D", i construeix un tetràedre de vèrtexs $(-2,0,0)$ i $(1,0,0)$. Veuràs que també apareix representat en el pla.
2. Crea uns lliscadors anomenats b,c,d,e i defineix el següent pla:

$$bx + cy + dz = e$$

3. Introdueix per la barra de comandes la instrucció que t'interseca el pla amb el tetràedre.
4. Mou els diferents lliscadors. Què vas obtenint? Són les mateixes seccions que havies obtingut a l'anella de foc?

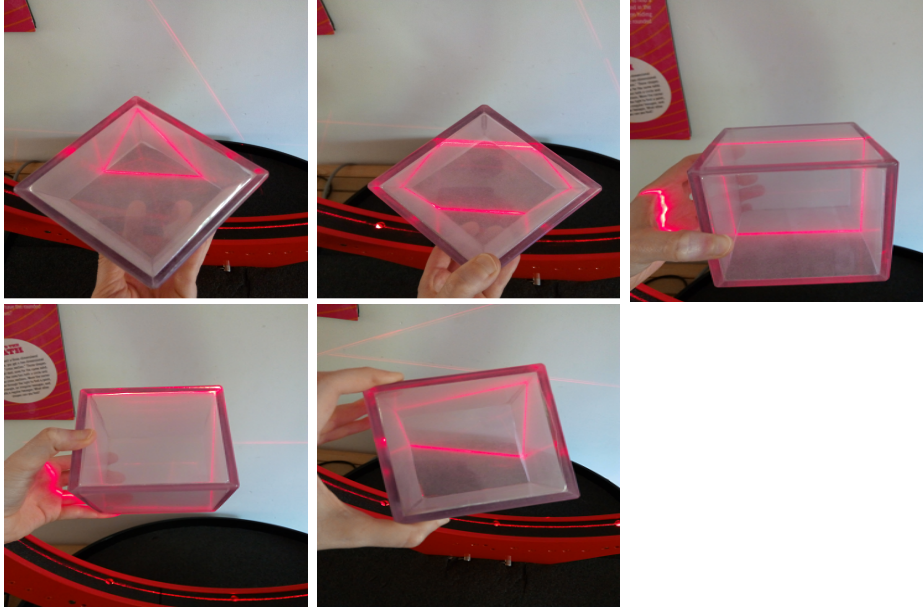
RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

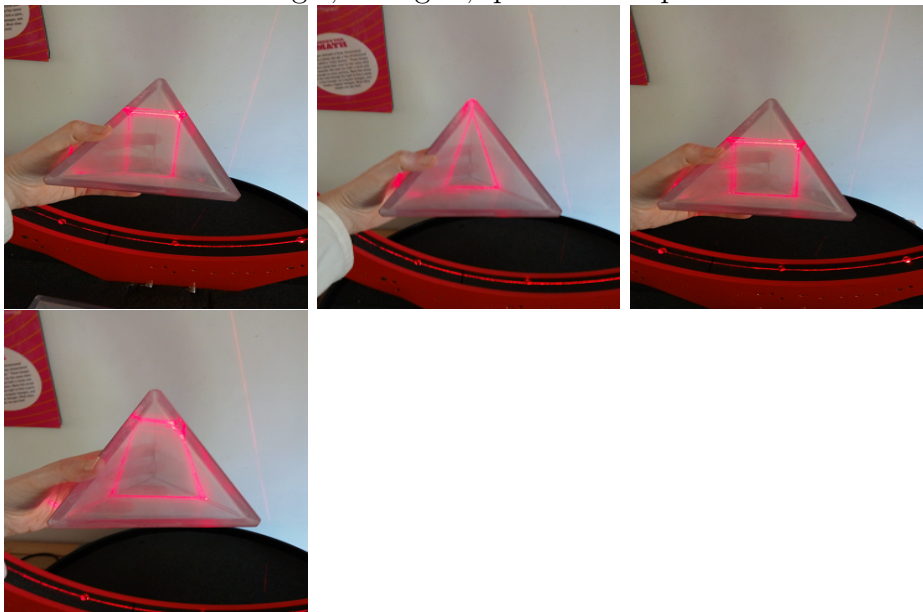
1. Observant el cub i el tetràedre, quines seccions creus que trobarem?

Les seccions que s'haurien de trobar són:

Del cub: triangle, hexàgon, quadrat, rectangle i trapezi.



Del tetràedre: rectangle, triangles, quadrat i trapezi.



2. Sabries dir quines coincideixen?

Sí que es poden trobar algunes seccions de la mateixa forma en el cub i el tetràedre, que són: els triangles, el quadrat, el rectangle i el trapezi.

Seccions d'un cub i d'un tetràedre.

En aquest apartat de l'activitat, s'espera que l'alumnat mostri més habilitat en l'ús del GeoGebra 3D per així ser capaç de distingir els diferents talls que es van obtenint.

A més, es vol que l'alumnat sigui capaç d'observar què succeix a les seccions quan es mouen els lliscadors.

En aquesta activitat es poden tenir diferents nivells de dificultat. Tant es pot donar les instruccions del que han de construir, com donar-les parcialment, com no donar-ne i deixar que siguin els propis alumnes que experimentin completament amb el GeoGebra. A més, també es podria demanar veure amb el GeoGebra quan l'àrea d'alguna de les seccions és màxima o mínima

2.3.3 Activitat 3.

LA HIPÈRBOLA I ELS SEUS ELEMENTS.

DESCRIPCIÓ:

Aquesta activitat consta de tres preguntes, amb l'objectiu treballar l'equació implícita de les hipèrboles mitjançant un cas concret, de conèixer i saber distingir els seus elements, tot utilitzant el GeoGebra quan sigui necessari. Es treballa la hipèrbola equilàtera, i es demana als estudiants que escriguin matemàticament la definició d'hipèrbola.

ETAPA: Batxillerat.

OBJECTIUS:

Conèixer i saber distingir els diferents elements que caracteritzen la hipèrbola, així com la seva expressió, introduir el concepte d'hipèrbola equilàtera i saber manipular el GeoGebra per tal de respondre les preguntes plantejades. A més, es pretén iniciar al l'alumnat en el llenguatge matemàtic.

RECURSOS EMPRATS:

El programa de geometria dinàmica GeoGebra i la fitxa de treball que es troba a continuació.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana fer aquesta activitat individualment o, com a molt, per parelles, doncs els càlculs i raonaments que s'han de fer són força assequibles.

Trobem dues parts en aquesta activitat. La primera és la definició d'hipèrbola equilàtera, necessària per dur a terme l'activitat. La segona està estructurada en tres preguntes.

La primera pregunta dona una hipèrbola que no està expressada de manera implícita i es demana trobar els valors d'un paràmetre pels quals la hipèrbola donada és una hipèrbola equilàtera. La segona consisteix en identificar i saber escriure correctament els seus elements característics: vèrtexs, focus i assímptotes. Per últim, es dona la definició d'hipèrbola i es demana que es redacti de manera formal.

En les activitats, hauria d'haver espai suficient per a respondre les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat de 2n de batxillerat.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Es treballa amb l'equació implícita de la hipèrbola, donant a conèixer els seus elements, doncs rarament es veuen abans d'acabar l'institut.

De tots els tipus d'hipèrboles, aquesta activitat tracta específicament l'equilàtera, que es veia a l'assignatura optativa de Complementos de Geometria Projectiva de la Llicenciatura de matemàtiques.

El GeoGebra permet treballar la hipèrbola en 2D per a comprovar el valor que la

fa equilàtera.

Hi ha una part dedicada al llenguatge matemàtic, per tal d'introduir-lo als estudiants i que comencin a conèixer els seus elements. S'aconsella fer aquesta activitat individualment o com a molt per parelles, doncs el procediment a desenvolupar no és massa complex.

FITXA ACTIVITAT 3: LA HIPÈRBOLA I ELS SEUS ELEMENTS.

Conceptes previs.

La hipèrbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ té per assíptotes les rectes $bx - ay = 0$ i $bx + ay = 0$. Si prenem $a = b$, l'equació anterior de la hipèrbola es transforma en $x^2 - y^2 = a^2$. Obtenim que els eixos de la hipèrbola són, i és per aquest motiu que la hipèrbola rep el nom de hipèrbola **equilàtera**, $y = x$ i $y = -x$.

1. Donada la hipèrbola $a^2x^2 - 25y^2 = 625$, troba els valors del paràmetre a pels quals és una hipèrbola equilàtera.

Pel valor que hagi trobat, contesta a la següent qüestió.

2. Determina les coordenades dels seus vèrtexs i focus, i les seves assíptotes.
3. Escribeu matemàticament la següent definició:

La hipèrbola és el lloc geomètric dels punts del pla tals que la diferència de les seves distàncies a dos punts que són fixos (els focus), és una constant.

Indicació: Aquesta constant la denotem per $2a$, que és la distància entre els vèrtexs.

RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

Quan aquí es defineix el que és una hipèrbola equilàtera, s'unifica el concepte amb la visualització treballada en activitats anteriors.

1. En aquest apartat de l'activitat, donada una hipèrbola amb un paràmetre sense determinar, es demana veure per quin valor del paràmetre és equilàtera. Com l'expressió de la hipèrbola no està simplificada, el raonament que haurien de fer és el següent:

Consideren les seves assíptotes:

$$5x - ay = 0$$

$$5x + ay = 0$$

D'on consideraran $a = b$ i obtindran:

$$x = y$$

$$-x = y$$

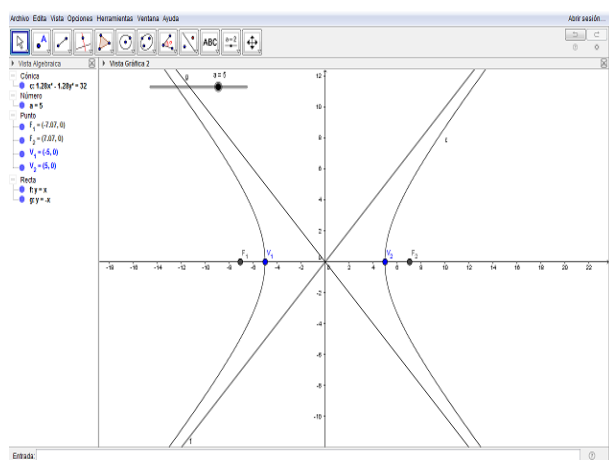
Per tant, la hipèrbola inicial s'ha transformat en $x^2 - y^2 = 25$, i poden concloure que $a = 5$.

La comprovació es pot fer utilitzant el GeoGebra.

2. Tot seguit, i utilitzant el valor trobat en l'apartat anterior, es treballen els elements de la hipèrbola.

En activitats anteriors ja s'havien visualitzat hipèrboles però, d'aquesta manera, coneixem amb més detall els seus elements.

- (a) Els seus vèrtexs són $V_1 = (-5, 0)$, $V_2 = (5, 0)$.
- (b) Els seus focus són $F_1 = (-7.07, 0)$, $F_2 = (7.07, 0)$.
- (c) Les seves assíptotes, com diu la definició, són $y = x$ i $y = -x$.



3. S'espera que els estudiants dedueixin la següent expressió (aquí ve donada per la notació emprada en l'apartat anterior):

$$\text{HIPÈRBOLA: } \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a\}$$

2.3.4 Activitat 4.

SECCIONS DEL TOR. LA CINTA DE MÖBIUS.

DESCRIPCIÓ:

Aquesta activitat consta de dues preguntes i pretén treballar la parametrització i construcció del tor i de la cinta de Möbius, superfícies poc treballades a la ESO i batxillerat. En el cas de la primera, s'estudiarà la seva construcció amb el GeoGebra i les seves diferents interseccions amb un pla; i en el cas de la segona, s'estudiarà la seva naturalesa i la seva parametrització.

ETAPA: Batxillerat.

OBJECTIUS:

Estudiar i conèixer el tor i la cinta de Möbius i les seves corresponents parametritzacions, introduint, així, les equacions paramètriques. Representar les superfícies en 3 dimensions per tal de poder visualitzar-les millor.

RECURSOS EMPRATS:

El programa de geometria dinàmica GeoGebra, tires de paper, tors de porexpan i la fitxa de treball que es troba a continuació.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana que els alumnes realitzin aquesta activitat en grups de dos o tres.

L'activitat consta de 2 apartats.

La primera treballa la construcció d'un tor tant amb GeoGebra com amb porexpan.

En el primer cas, per visualitzar-lo i, en el segon, per conèixer les seves seccions.

La segona estudia la cinta de Möbius experimentant amb material manipulable, per després representar la seva parametrització amb el GeoGebra.

Es pretén introduir la noció de superfície no orientable.

En les activitats, hauria d'haver espai suficient per a respondre les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat de segon de Batxillerat.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Es relacionen conceptes vistos en les activitats 1 i 2 (seccions) amb superfícies que es tracten a la universitat.

Dóna a conèixer les seccions del tor, que no són trivials, i poc tenen a veure amb les seccions obtingudes en les activitats anteriors.

S'introdueixen les equacions paramètriques, amb les quals no es treballa a l'institut; i el concepte de superfície no orientable mitjançant l'experimentació.

S'utilitza el GeoGebra per a construir i visualitzar aquestes superfícies.

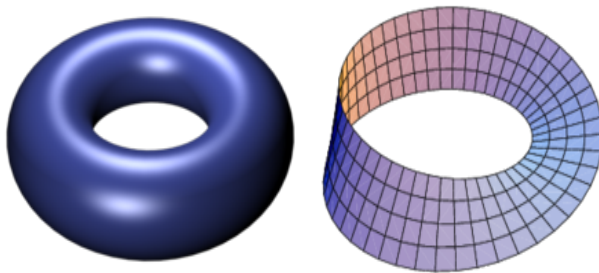
S'aconsella realitzar aquesta activitat en grups de dues o tres persones per a raonar els resultats que es van obtenint.

FITXA ACTIVITAT 4: SECCIONS DEL TOR. LA CINTA DE MÖBIUS.

Conceptes previs.

Donar una **parametrització** d'una corba o superfície és un donar un sistema d'equacions que permet representar-la en el pla o l'espai. Aquest sistema d'equacions ve determinat per diferents **paràmetres** dels quals les funcions hi depenen.

Podem veure un tor i una cinta de Möbius en les següents imatges:



1. Construcció d'un tor amb GeoGebra.

- (a) Definim tres lliscadors R , r i h .
- (b) Introduïm per la barra d'entrada la següent comanda:
 $\text{Superfície}[(R+r \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), (R+r \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), r \cdot \sin(u), u, 0, 2\pi, v, 0, h]$
- (c) Quina és la superfície que obtens?

2. Seccions d'un tor.

- (a) Dels tors de porexpan proporcionats, troba les diferents seccions d'aquesta superfície. Sabries dir quin nom reben?

3. Treballem la cinta de Möbius.

- (a) Agafem una tira de paper i enganxem els extrems. Ressegueix amb un bolígraf la cara de la tira. Què obtenim?
- (b) Agafa una altra tira de paper i gira 180° un dels extrems, i enganxa'ls. Ressegueix amb un bolígraf la cara de la tira. Què obtenim?
La superfície obtinguda s'anomena **cinta de Möbius**.
- (c) Agafa una altra tira de paper i gira dos cops 180° un dels extrems, i enganxa'ls. Ressegueix amb un bolígraf la cara de la tira. Què observes?
- (d) La cinta de Möbius és una **superfície reglada no orientable**, representada per la parametrització

$$(R + v \cdot \cos(u/2)) \cdot \cos(u), (R + v \cdot \cos(u/2)) \cdot \sin(u), R \cdot v \cdot \sin(u/2) \\ 0 \leq u < 2\pi, -0.5 \leq v \leq 0.5.$$

Construeix-la amb el GeoGebra.

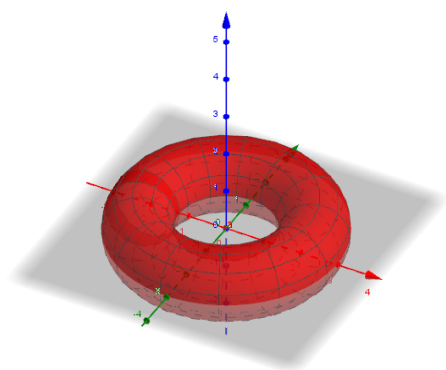
RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

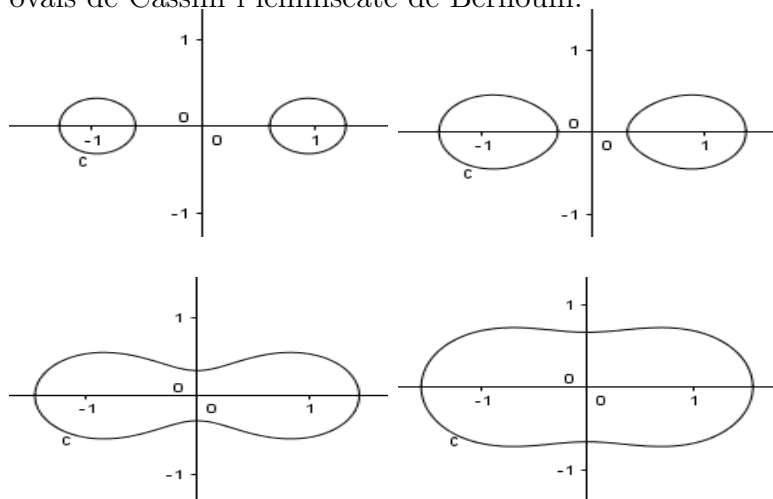
En aquesta activitat es parametritzen dues superfícies tals com el tor i la cinta de Möbius, que són força habituals en cursos acadèmics superiors però pràcticament desconeguts en l'educació secundària i al batxillerat. Per tant, aquesta activitat treballa, per un costat, la construcció d'aquestes superfícies amb l'ajuda del GeoGebra, per l'altre, suposa treballar amb parametritzacions de superfícies i, en el cas del tor, es treballen les seves seccions mitjançant material manipulable.

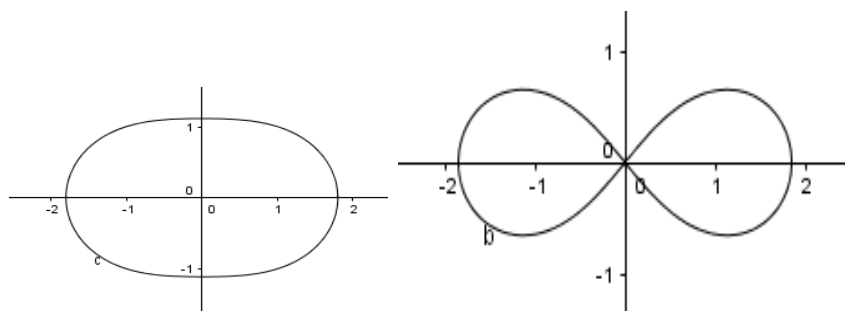
1. Construcció d'un tor amb GeoGebra.

La superfície que s'espera veure construïda és la següent:



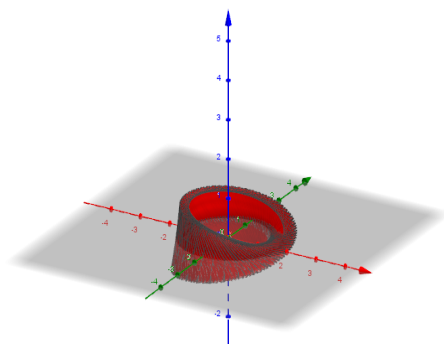
Les seccions del tor que s'esperen haver obtingut amb el GeoGebra són cercles, òvals de Cassini i lemniscate de Bernoulli:





2. Cinta de Möbius.

- (a) Al resseguir la tira amb el bolígraf s'obté que la línia pinta una sola cara de la tira, i acaba i comença al mateix lloc, és a dir: té dues cares.
- (b) Al resseguir la tira amb el bolígraf s'obté que la línia acaba i comença al mateix lloc, però la ha resseguit tota la tira de paper, és a dir: té una única cara. Aquí s'introduiria el concepte de la no orientabilitat.
- (c) En aquest apartat s'espera que vegin que han girat un total de 360° respecte de l'inici i que han tornat a pintar una sola cara de la tira. El que es pretén és que dedueixin que si es gira un nombre senar de vegades, s'obté una cinta de Möbius i que si es gira un nombre parell de vegades, s'obté un cilindre.
- (d) La superfície que s'espera veure construïda és la següent:



2.3.5 Activitat 5.

POSICIONS RELATIVES.

DESCRIPCIÓ:

Aquesta activitat pretén treballar la visualització de les posicions relatives de tres plans diferents, i a partir de la seva representació gràfica s'hauran de calcular distàncies. Consta també d'una part on es treballa la intuïció matemàtica i l'argumentació per tal de refutar o afirmar els enunciats donats.

ETAPA: Batxillerat.

OBJECTIUS:

Habituar-se a treballar amb els objectes en 3 dimensions que ens pot proporcionar l'ús del GeoGebra i, usant aquest programa, veure quines posicions relatives admeten 3 plans diferents. A més, l'activitat pretén que l'alumnat no només sàpiga aplicar la fórmula corresponent de determinació de distàncies, sino que també visualitzi l'operació. Aprendre a raonar matemàticament.

RECURSOS EMPRATS:

El programa de geometria dinàmica GeoGebra i la fitxa de treball que es troba a continuació.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana fer aquesta activitat per parelles.

Trobarem tres apartats en aquesta activitat. En el primer apartat es donen tres plans diferents, definits amb paràmetres variables, i es demana estudiar les seves posicions relatives depenent d'aquests paràmetres.

El segon demana estudiar si els plans inicials formen alguna superfície, amb l'objectiu de que els alumnes vegin més del que les dades proporcionen.

El tercer i últim planteja unes conjetures que l'alumnat ha de saber refutar o afirmar mitjançant un correcte raonament i la seva justificació.

En les activitats, hauria d'haver espai suficient per a respondre les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat de 2n de Batxillerat.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Calcular distàncies entre rectes i plans o entre plans, per exemple, és un tipus d'activitat molt recurrent a batxillerat però, sovint, es redueix només al càlcul sense cap interpretació gràfica.

Aquesta activitat pretén donar un enfocament diferent a aquest estil d'activitats, a més d'afegir-li la component visual que ofereix l'ús del GeoGebra. L'últim apartat està pensat per a que l'alumnat reflexioni sobre diferents aspectes del temari.

S'aconsella realitzar aquesta activitat per parelles, per a raonar els resultats obtinguts.

FITXA ACTIVITAT 5: POSICIONS RELATIVES.

1. Donats els plans següents a $\mathbb{R}^3$:

$$x + y + bz = 1$$

$$-cx - y + z = -1$$

$$z = 3$$

on $b, c \in \mathbb{R}$, estudia les seves posicions relatives segons els valors dels paràmetres b i c .

Formen algun tipus de superfície?

2. Per $b = 1$, i $c = 1$, considera la intersecció de dos dels plans inicials.
Calcula la distància que hi ha des d'aquesta intersecció fins al tercer pla.
3. Digues si són certes o falses les següents afirmacions, justificant la teva resposta:
- (a) Tres plans que s'intersequen mai formen una superfície.
 - (b) Un pla es pot expressar amb una sola variable.
 - (c) La intersecció de 3 plans sempre és un punt.

RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

1. En aquest primer apartat, s'espera que l'alumnat entengui com es determina un pla i com varien les posicions relatives de plans donats depenent en els diferents paràmetres. Tanmateix, s'espera que, a partir dels plans originals, visualitzin una superfície prismàtica.
2. En el segon apartat de l'activitat es vol que els estudiants calculin la distància que hi ha des de la intersecció de dos plans fins al pla oposat, aplicant els coneixements que tenen sobre el càlcul de distàncies.

Hi ha tres possibles casos a calcular.

- (a) Si es calcula la distància entre la intersecció dels plans $x + y + z = 1$ i $-x - y + z = -1$ i el pla $z = 3$, s'obté que la distància és 3, fent el següent raonament:

La intersecció dels plans $x + y + z = 1$ i $-x - y + z = -1$ és la recta $r : (1, 0, 0) + \lambda(-1, -1, 0)$, per tant, per trobar la distància de r al pla $\pi : z = 3$, s'ha de calcular la distància d'un punt de la recta al pla.

Prenem el punt $P = (1, 0, 0)$. Així:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \left| \frac{(1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) - 3}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \right| = 3.$$

- (b) Si es calcula la distància entre la intersecció dels plans $x + y + z = 1$ i $z = 3$ i el pla $-x - y + z = -1$, s'obté que la recta resultant de la intersecció dels plans és $s : (2, 0, 3) + \mu(-1, 1, 3)$. Per averiguar la distància, els càlculs són anàlegs i el resultat és $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

- (c) Si es calcula la distància entre la intersecció dels plans $-x - y + z = -1$ i $z = 3$ i el pla $x + y + z = 1$, la recta que resulta de la intersecció dels dos plans és: $t : (4, 0, 3) + \nu(-1, 1, 3)$. Per trobar la distància, els càlculs són anàlegs i el resultat és $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

3. En aquest tercer exercici s'espera veure que l'alumnat hagi consolidat bé els dos primers apartats de l'activitat. Així mateix, s'introdueix el concepte d'hipèrbola equilàtera, tot i que no directament, i que s'utilitzarà en una activitat posterior.

- (a) És falsa, doncs tres plans que s'intersequen sí poden formar una superfície, com el cas que hem vist en el primer exercici d'aquesta activitat, on obtenim una superfície prismàtica.
- (b) És certa, doncs un pla pot ser expressat amb una sola variable, tal com es veu en el primer exercici d'aquesta activitat.
- (c) És certa: la intersecció de 3 plans pot ser un punt si el sistema que es resol té una única solució.

2.3.6 Activitat 6.

PROJECCIONS ESTEREOGRÀFICA I CENTRAL.

DESCRIPCIÓ:

Aquesta activitat pretén treballar dos tipus de projeccions, l'estereogràfica i la central, i les distàncies entre objectes no bidimensionals. A la fitxa d'enunciats trobem dues imatges que mostren el punt P' que es projecta.

ETAPA: Batxillerat.

OBJECTIUS:

Conèixer diferents tipus de projeccions i veure com canvien els punts resultants. Tanmateix, saber calcular distàncies entre objectes poc habituals.

RECURSOS EMPRATS:

Serà necessària la fitxa d'enunciats que trobem a continuació i l'ús del programa de geometria dinàmica GeoGebra.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Aquesta activitat està pensada per a fer-la individualment, doncs els càlculs a desenvolupar són força simples.

Ja que aquesta activitat treballa dos tipus de projeccions, la fitxa d'enunciats amb la qual procedir està dividida en dos apartats semblants entre ells.

A cada un d'ells es demana calcular el punt P' resultant d'aplicar la projecció corresponent i la distància mínima entre ell i l'esfera.

En les activitats, hauria d'haver espai suficient per a respondre les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat de 2n de batxillerat.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

En aquesta activitat es treballen distàncies però no de la manera en que està acostumat l'alumnat de batxillerat.

Aquestes dues projeccions es veuen al Grau de Matemàtiques, però al relacionar-ho amb distàncies, ho estem donant a conèixer i fent-ho més proper.

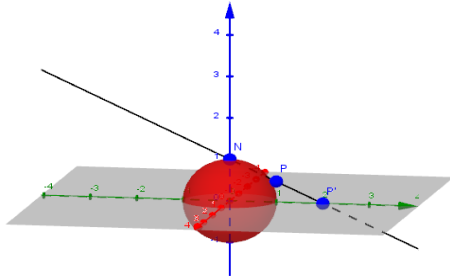
A més de la part calculística, té una part visual, tant al pla, amb les imatges que mostren la projecció buscada, com en 3D, amb l'ús del GeoGebra.

S'aconsella fer aquesta activitat individualment, els càlculs que s'han de dur a terme no són massa complexes.

FITXA ACTIVITAT 6: PROJECCIONS ESTEREOGRÀFICA I CENTRAL.

Projecció estereogràfica.

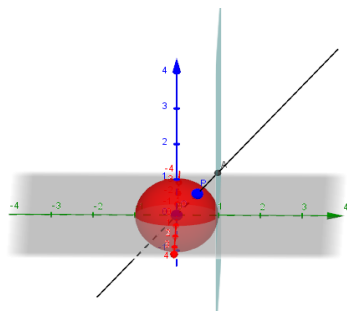
1. Considerem l'esfera de centre $O = (0,0,0)$ i de radi 1, i els seus dos pols: anomenarem $N = (0,0,1)$ al pol nord, i $S = (0,0,-1)$ al pol sud. Observant la imatge següent, troba les coordenades del punt P' , que és la projecció estereogràfica de P des de N .



2. Si $P = (0, 1, \frac{1}{2})$, quin punt serà P' ?
3. Calcula la distància més curta entre l'esfera i el punt P' .

Projecció central.

1. Considerem l'esfera de centre $O = (0,0,0)$ i de radi 1, i pla $y = 1$ tangent a ella tal com indica la imatge següent.



Troba les coordenades del punt P' , que és la projecció central de P .

2. Si $P = (1/2, 1/2, 3/4)$, quin punt serà P' ?
3. Calcula la distància més curta entre l'esfera i el punt P' .

RESPOSTES:

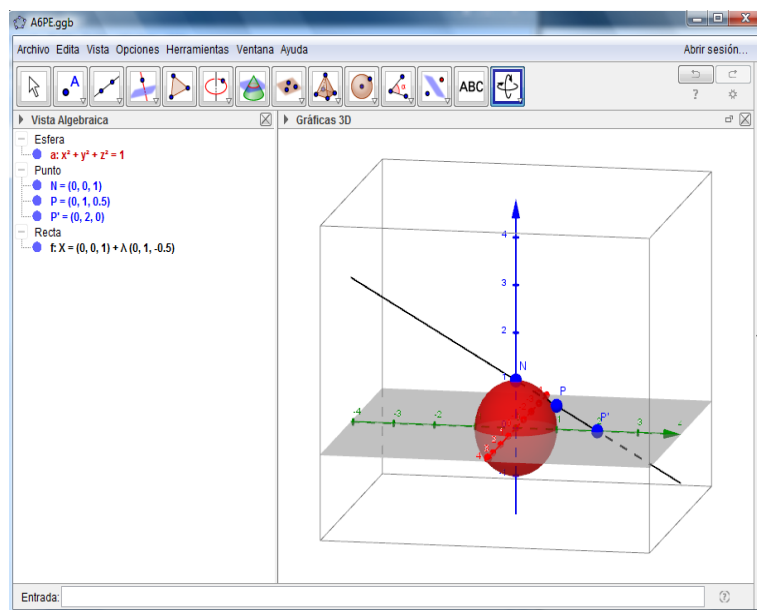
En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

És una activitat que treballa les coordenades estereogràfiques i centrals, que no es veuen en el temari impartit a l'educació secundària o al batxillerat.

Projecció estereogràfica.

1. En aquest apartat de la primera secció de l'activitat, han de construir la recta que passa pels punts N i P, i interseca-la amb el pla $x = 0$ per a obtenir el punt $P' = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$.
2. Donat el punt $P = (0, 1, \frac{1}{2})$, substituint obtenim $P' = (0, 2, 0)$
3. S'ha de considerar el pla $\pi : y = 1$, que és tangent a l'esfera en el punt més proper a P' . Així, aplicant la fórmula de la distància de punt a pla, obtenim que la distància és:

$$d((0, 2, 0), \pi) = \frac{|(0 \cdot 0) + (1 \cdot 2) + (0 \cdot 0) - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

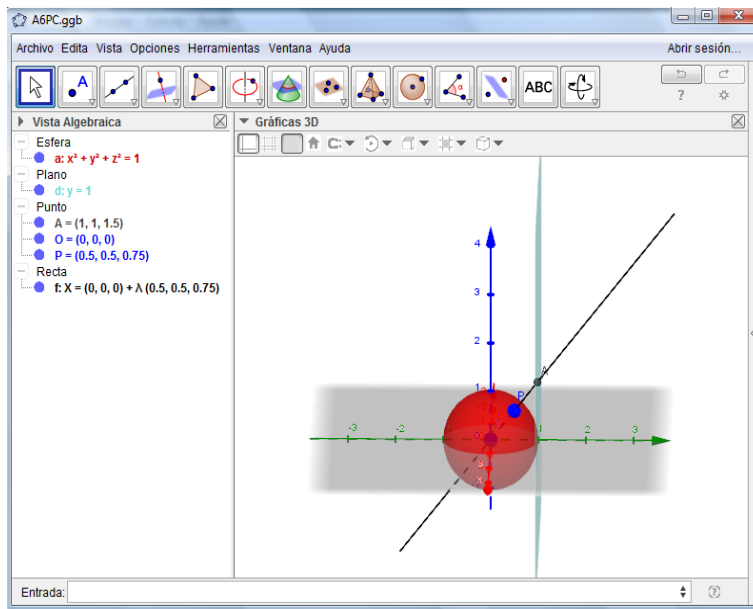


Projecció central.

1. En aquest apartat de la primera secció de l'activitat, s'ha de construir la recta que passa pels punts O i P, i interseca-la amb el pla $y = 1$ per obtenir el punt $P' = (\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y})$.
2. Donat el punt $P = (1/2, 1/2, 3/4)$, substituint obtenim $P' = (1, 1, \frac{3}{2})$.

3. Calcular la distància més curta entre el punt P' i l'esfera, en aquest cas, equival a calcular la distància entre els punts P i P' , de la següent manera:

$$d(P, P') = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{4}}.$$



2.3.7 Activitat 7.

DISTÀNCIES.

DESCRIPCIÓ:

Aquesta activitat és una adaptació d'un exercici que trobem en el llibre *Developing Essential Understanding of Geometry. Grades 9-12*. És de caire teòric, i pretén que l'alumnat agafi confiança en la manipulació de dades sintètiques.

ETAPA: Batxillerat.

OBJECTIUS:

Treballar les matemàtiques d'una manera sintètica, sense necessitat de tenir dades numèriques, i esdevenir familiar amb aquest tipus de desenvolupament de problemes.

RECURSOS EMPRATS:

La fitxa d'enunciats que es troba a continuació i el GeoGebra, si és necessari.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana fer aquesta activitat per parelles, doncs serà necessari raonar els resultats que es van obtenint.

Aquesta activitat pretén ser un primer contacte amb enunciats sense dades concretes i així fer que l'alumnat sigui capaç de desenvolupar un raonament amb el que no ha treballat massa i que, a nivell universitari, és un recurs que utilitzat habitualment.

L'activitat consisteix en trobar un punt sobre un segment donat, que fa que la longitud d'un altre segment sigui, primerament, mínim i, després, màxim.

En les activitats, hauria d'haver espai suficient per a respondre les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat a partir de 1r de batxillerat.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Aquesta activitat proporciona encara un altre enfocament del treball amb distàncies. En aquest cas, és de caire reflexiu i per això s'aconsella fer-la per parelles, doncs serà necessari argumentar, i és un tipus d'activitat amb la qual no estan acostumats a treballar.

S'utilitza el GeoGebra, de manera que la visualització d'una activitat amb rerefons abstracte ajuda a la seva comprensió.

FITXA ACTIVITAT 7: DISTÀNCIES

Utilitzant el GeoGebra si és necessari, contesteu a la següent qüestió.

Sigui ABC un triangle rectangle, de segments AB , AC i BC , i on el segment BC és més llarg que el segment AB .

Siguin P un punt del segment AC , Q un punt del segment BC tal que el segment PQ és perpendicular a BC , i R un punt del segment AB tal que el segment RP és perpendicular a AB .

1. Quin punt del segment AC hauria de ser P per a que la longitud del segment QR fos mínima?
2. I màxima?

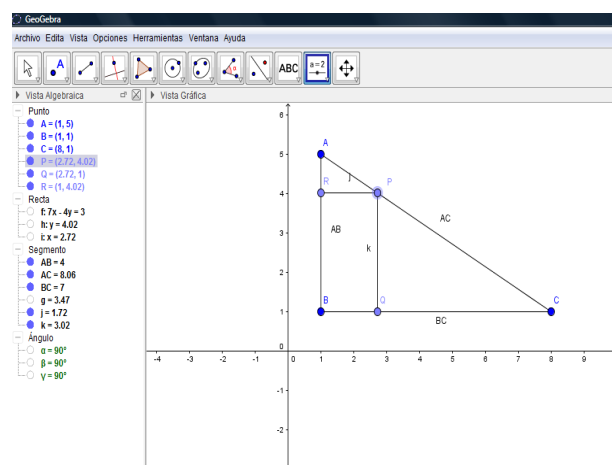
RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

1. Per a determinar el punt P sobre el segment AC, s'ha de trobar la menor distància entre el punt B i aquest segment AC, això és: considerar el segment BP que talla ortogonalment al segment AC.

Aleshores, des d'aquest punt P, es tracen els segments perpendiculars a AB i AC, la intersecció dels quals són els punts R i Q, respectivament.

D'aquesta manera, haurem trobat el punt P que fa que la longitud del segment QR sigui mínima.



2. Serà màxima quan $P=C$.

2.3.8 Activitat 8

DISTÀNCIA DEL TAXI.

DESCRIPCIÓ:

Aquesta activitat planteja una pregunta que ens fem més sovint del que ens adonem: quin és el recorregut mínim que hem de fer per arribar a la nostra destinació? En aquest cas en concret, volem desplaçar-nos d'un punt a un altre de l'Eixample de Barcelona caminant. Plantegem diverses preguntes per tal d'introduir una distància no euclidiana: la distància del taxi i, posteriorment, treballar amb ella.

ETAPA: 2n cicle de l'ESO.

OBJECTIUS:

Donar a conèixer l'existència de distàncies no euclidianes mitjançant un exemple concret per després treballar diferents aspectes que hi podem relacionar.

RECURSOS EMPRATS:

La fitxa de treball que es troba a continuació, un panell de suro que tingui dibuixada una quadrícula, xinxetes per anar-hi marcant posicions o bé paper quadriculat.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana que els alumnes realitzin aquesta activitat per parelles.

És una activitat d'exploració, que permet introduir de forma manipulativa una distància no euclidiana.

L'activitat consta de 3 preguntes: la primera situa als estudiants en un context i els indueix a investigar com funciona la distància. La segona ja introdueix el concepte central de l'activitat i els proposa experimentar sobre quan seran igual les dues distàncies. La tercera, treballa diferents elements geomètrics amb aquesta distància. En les activitats, hauria d'haver espai suficient per a respondre les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat a partir de 2n cicle de l'ESO.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Aquesta activitat permet introduir la noció de que hi han distàncies que no són les habituals, és a dir, no euclidianes, sense treballar-hi explícitament.

S'hi treballa combinatòria, relacionant, així, dues àrees de les matemàtiques.

És una activitat que es recomana fer per parelles per a poder anar raonant els resultats que es van obtenint.

FITXA ACTIVITAT 8: DISTÀNCIA DEL TAXI.

1. Volem anar d'un punt a un altre de l'Eixample de Barcelona caminant, suposant que només podem parar a les cruïlles dels carrers. De quantes maneres diferents podem fer aquest recorregut de manera que sigui el més curt possible?
2. Com deus haver intuït, el càlcul de distàncies en aquestes situacions és força particular. Aquesta distància s'anomena **distància del taxi** i es tracta d'una distància no euclidiana.
Per simular-ho, agafa un panell quadriculat i fes el càlcul de diferents distàncies entre dos punts utilitzant la distància habitual i la distància del taxi.
En quin cas coincideixen les dues distàncies?
3. Com seria una circumferència en la distància del taxi? I una el·lipse? Com seran les mediatrises entre dos punts? Dependrà de la posició d'aquests?

RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

1. Per saber quants recorreguts hi ha, de manera que cada un d'ells sigui el més curt possible, hem de discernir entre si tenim una xarxa quadrada o no.

- (a) Si la xarxa que tenim no és quadrada, el nombre de camins mínims es calcula de la següent manera:

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{(m!)(n!)},$$

on m són les quadrícules que camines horitzontalment, i n les que camines verticalment.

- (b) Si tenim una xarxa quadrada, el nombre de camins mínims es calcula de la següent manera:

$$\binom{n+n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

2. La distància del taxi, o distància de Minkowski, deu el seu nom al matemàtic Hermann Minkowski (s.XIX). Es descriu de la següent manera:

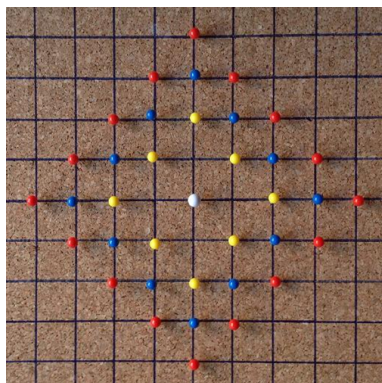
$$d_m(P, Q) = \left(\sum_{i=1}^n |p_i - q_i|^m \right)^{\frac{1}{m}},$$

on $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$.

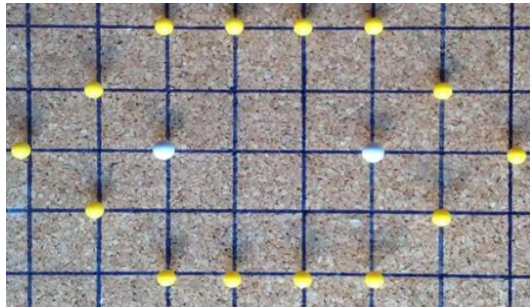
En aquest cas treballem en el pla, per tant, només serà necessari considerar $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$.

L'únic cas en que coincideixen les dues distàncies és quan els dos punts es troben en una mateixa línia horitzontal o vertical.

3. Si prenem la circumferència de centre $(0, 0)$ i de radi r , a mesura que vagi augmentant el radi anirem obtenint circumferències de la següent manera:

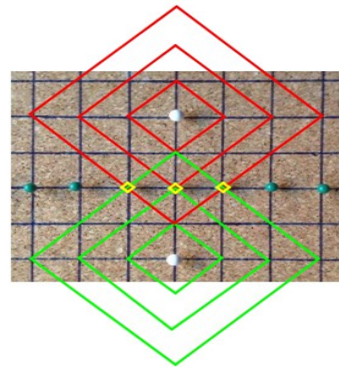
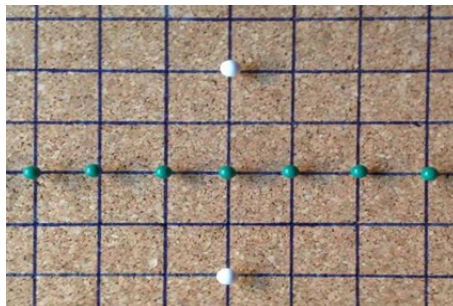


L'el·lipse seria:

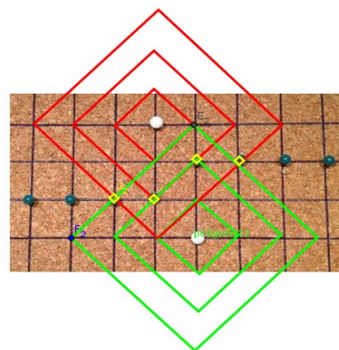
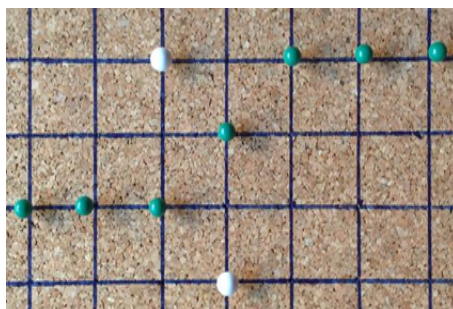


Les mediatrises entre dos punts sí que dependran dels punts considerats, tal com es veu en les següents imatges.

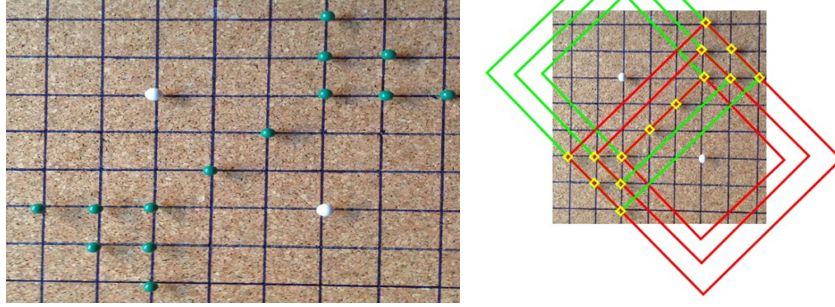
- (a) En aquest primer cas, la mediatriu de la imatge de l'esquerra s'obté tal com es veu a la imatge de la dreta, doncs passa que $X_A = X_B$, on A és el punt superior i B l'inferior, de manera que: $A = (X_A, Y_A)$, $B = (X_B, Y_B)$.



- (b) En aquest segon cas, la mediatriu de la imatge de l'esquerra s'obté com indica la imatge de la dreta, doncs passa que $|X_A - X_B| > |Y_A - Y_B|$, on A és el punt superior i B l'inferior, de manera que: $A = (X_A, Y_A)$, $B = (X_B, Y_B)$.



- (c) En aquest últim cas, la mediatriu de la imatge de l'esquerra s'obté com indica la imatge de la dreta, doncs passa que $|X_A - X_B| = |Y_A - Y_B|$, on A és el punt superior i B l'inferior, de manera que: $A = (X_A, Y_A), B = (X_B, Y_B)$.



La dificultat d'aquesta activitat es podria augmentar preguntant si el nombre mínim de camins es veuria afectat si hi hagués algun carrer tallat o es podria demanar la representació de còniques utilitzant la mètrica no euclidiana, per exemple.

2.3.9 Activitat 9.

Epícloides. Cardioide.

DESCRIPCIÓ:

Es treballen les epícloides per a un nombre determinat de valors k (que determina la relació entre els radis de les circumferències a partir de les quals es treballa), veient el cas concret de $k = 1$, que és la cardioide.

ETAPA: Batxillerat.

OBJECTIUS:

Partir d'un cas concret com és la construcció de la cardioide, per acabar veient com es generen la resta de les corbes de la família de les epícloides. Agafar habilitat amb el GeoGebra.

RECURSOS EMPRATS:

El programa de geometria dinàmica GeoGebra, un got de plàstic transparent i la fitxa d'enunciats que es troba a continuació.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana fer aquesta activitat per parelles.

Aquesta activitat està dividida en dues tasques: la primera consisteix en concloure si podem construir cardioides amb objectes de la nostra vida quotidiana i, després, construir la cardioide amb el GeoGebra a partir d'unes instruccions donades. La segona, de caire més general, consisteix en l'estudi de les corbes epícloides. Al donar valors concrets del paràmetre k , es van veient les diferents corbes que constitueixen aquesta família.

Aquesta activitat parteix d'un cas concret i després treballa el cas general.

Es treballen les coordenades polars, doncs la cardioide es dona en aquestes coordenades, tot i que no de manera directa.

En les activitats, hauria d'haver espai suficient per a respondre les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat de 2n de batxillerat.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Es parteix d'un cas concret com és visualitzar una cardioide en un got de plàstic transparent, i acabem construint, no només una cardioide amb el GeoGebra, sinó tot la família de corbes.

El GeoGebra és una eina molt útil que, en aquest cas, ens permet veure en molt poc temps com van canviant aquestes corbes a mesura que varia el paràmetre k .

La cardioide i la seva parametrització es treballen al Grau de Matemàtiques, però amb aquesta activitat es donen a conèixer i es tracten les coordenades polars.

Es recomana fer aquesta activitat per parelles per a una millor interpretació de les dades i per anar raonant els resultats obtinguts.

FITXA ACTIVITAT 9: EPICICLOIDES. CARDIOIDE.

Generem la cardioide.

1. Sabries dir si hi ha algun objecte de la vida quotidiana amb el qual poguem construir/dibuixar cardioides?
2. Segueix els següents passos per a construir una cardioide amb el GeoGebra.
 - (a) Estableix un lliscador a , entre 1 i 5, amb increment 0.01, i un lliscador α que representi un angle, entre 0° i 360° , i amb increment de 0.01° .
 - (b) Construeix la circumferència de centre $(0, 0)$ i radi 1.
 - (c) Anomena B al punt $(1, 0)$, i marca un punt qualsevol damunt de la circumferència.
 - (d) Estableix que l'angle α definit abans com a lliscador, ara sigui l'angle entre els punts A i B , generant així un punt B' .
 - (e) Apliquem la simetria central de A respecte el punt B' , que serà el centre de simetria, i de la que resulta un punt A' .
 - (f) Construeix una circumferència de centre A' i de radi $A'B'$.
 - (g) Estableix que l'angle α definit abans com a lliscador, ara sigui l'angle entre els punts B' i A' , generant així un punt B'' .
 - (h) Definim el lloc geomètric de B'' i l'angle α .
 - (i) Li donem al punt B'' la comanda d'"animació", i obtenim la cardioide generada.

Construcció d'epicicloides.

1. Segueix els següents passos per a construir una cardioide amb el GeoGebra.
 - (a) Estableix un lliscador r pel radi i un lliscador k , que representarà la relacions entre els radis de dues circumferències.
 - (b) Introdueix per la barra de comandes el següent:
$$\text{Curva}[r \cdot (k + 1) \cdot \cos(t) - r \cdot \cos((k + 1) \cdot t), r \cdot (k + 1) \cdot \sin(t) - r \cdot \sin((k + 1) \cdot t), t, 0, 2\pi]$$
2. Què obtens quan varies el paràmetre k ?

RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

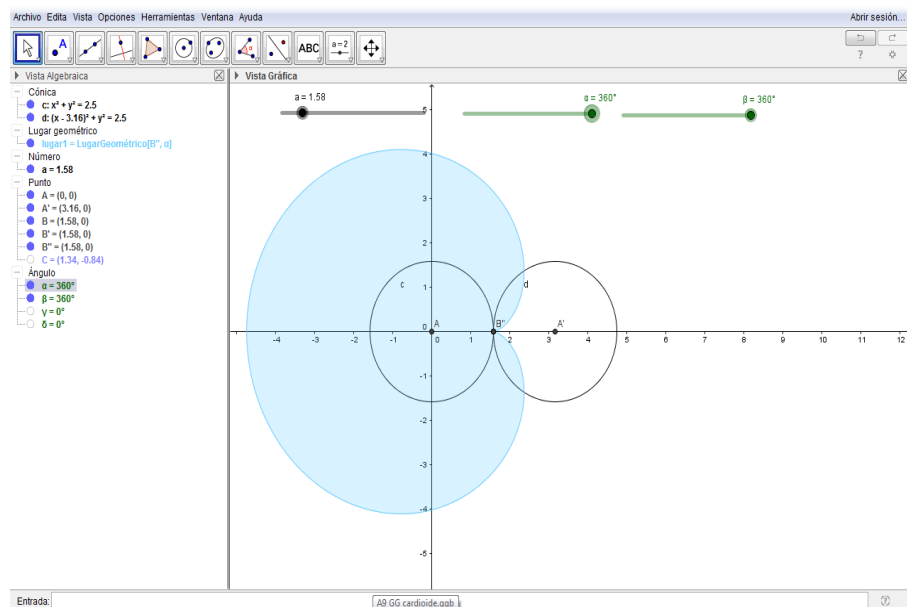
La primera pregunta que fem abans de generar la cardioide és preguntar si la sabrien generar amb algun objecte quotidià, per a que així vegin un cas particular abans de treballar el cas general.

Generem la cardioide.

1. Podem visualitzar una cardioide amb un got de plàstic transparent i una llum que l'enfoqui, tal com es veu a la següent imatge, sense fer res més:



2. Generem la cardioide amb les coordenades cartesianes, i seguint els passos de la construcció s'hauria d'obtenir el següent:



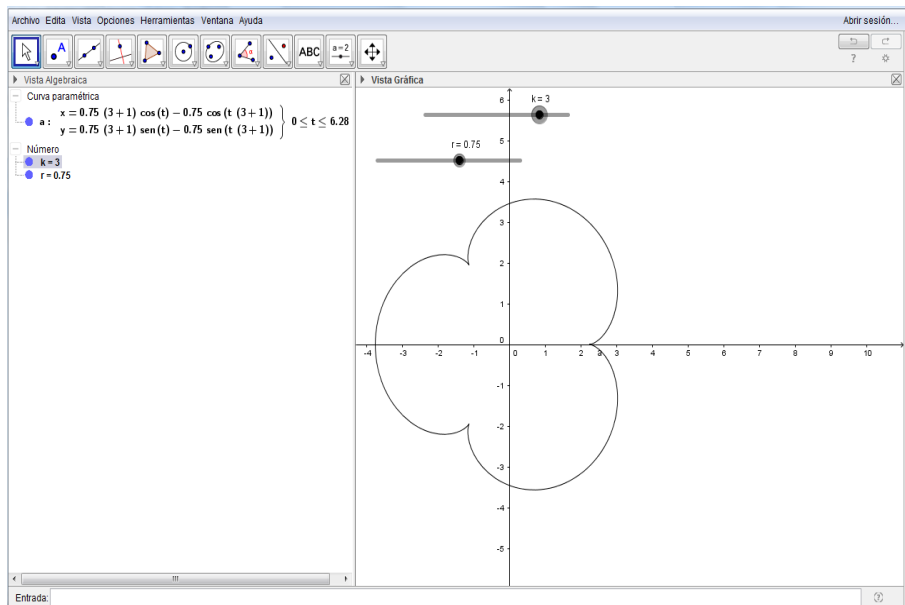
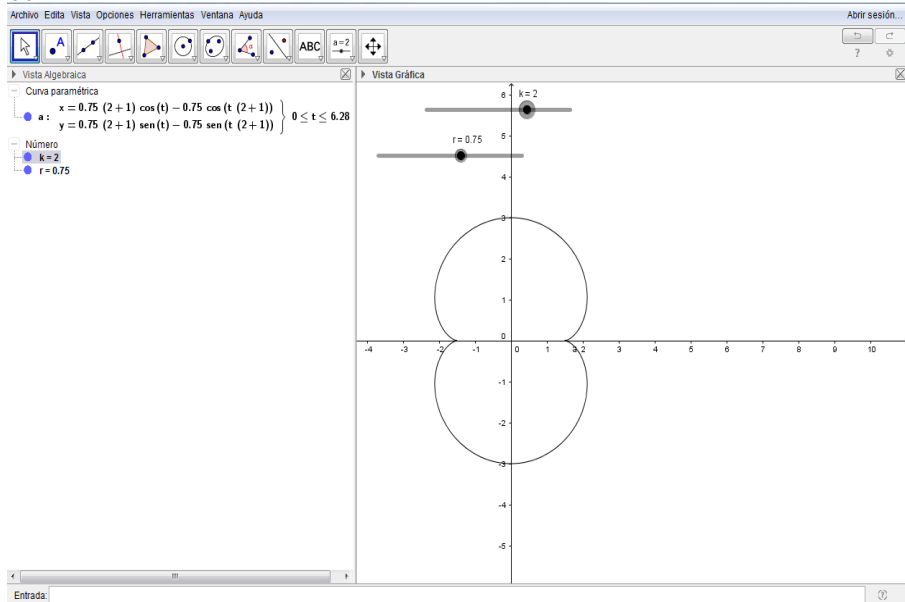
Construcció d'epicicloides.

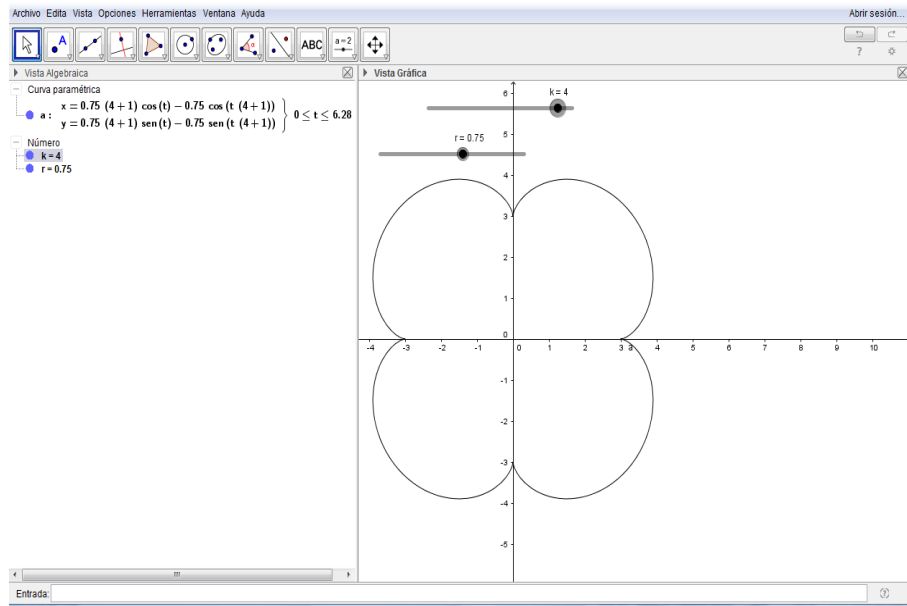
En aquesta construcció es treballa amb coordenades paramètriques:

$$x = r \cdot (k + 1) \cdot \cos(t) - r \cdot \cos((k + 1) \cdot t)$$

$$y = r \cdot (k + 1) \cdot \sin(t) - r \cdot \sin((k + 1) \cdot t)$$

A mesura que es varia el paràmetre k , es van obtenint diferents epicicloides, tals com:





2.3.10 Activitat 10.

SIMETRIES.

DESCRIPCIÓ:

En aquesta activitat es treballen els conceptes matemàtics de simetria i simetria axial, amb l'objectiu d'entendre'ls de forma més intuïtiva. A més, partint del treball amb les simetries axials, s'arriba a tractar amb rotacions, utilitzant recursos extrets del llibre *La Geometria*, d'Emma Castelnuovo.

ETAPA: 2n cicle de l'ESO.

OBJECTIUS:

A partir d'objectes que trobem en el nostre dia a dia, entendre els conceptes de simetria axial i conèixer de forma intuïtiva les rotacions.

RECURSOS EMPRATS:

La fitxa d'enunciats que es troba a continuació.

ASPECTES DIDÀCTICS I METODOLÒGICS:

Es recomana fer aquesta activitat per parelles.

Aquesta activitat està dividida en dues parts: la primera, dóna les definicions dels conceptes que es treballen en l'activitat, i la segona la formen un seguit de preguntes en que es treballa la simetria axial, ja sigui d'objectes concrets o de polígons en general, i s'introdueixen les rotacions a partir de les simetries.

Aquesta activitat relaciona objectes que trobem en la nostra vida quotidiana amb conceptes matemàtics abstractes.

En les activitats, hauria d'haver espai suficient per a respondre les preguntes.

ALUMNAT A QUI S'ADREÇA ESPECIALMENT:

Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat a partir de 2n cicle de l'ESO.

QUÈ APORTA AQUESTA ACTIVITAT?

Aquesta activitat comença treballant casos particulars abans de fer el pas cap a l'abstracció estudiant les simetries dels triangles i quadrilàters i classificant-los segons el nombre d'eixos de simetria que tinguin.

Treballa la simetria axial, de manera que es relaciona un concepte que s'introdueix a l'institut i que es treballa en estudis posteriors. S'introdueix la noció de rotació.

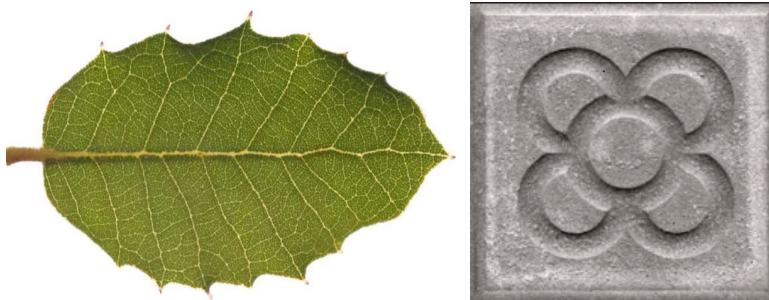
Es recomana realitzar aquesta activitat per parelles per a potenciar l'argumentació i el raonament.

FITXA ACTIVITAT 10: SIMETRIES.

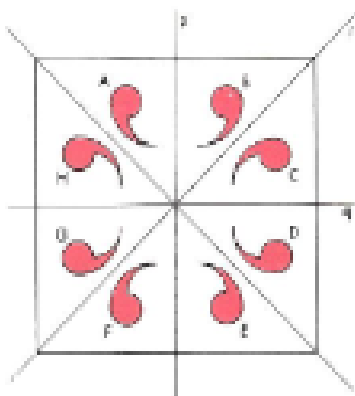
Conceptes previs.

1. Definim la **simetria axial** com una transformació que existeix al voltant d'una recta.

Considerem els següents objectes quotidians: una fulla i una rajola de Barcelona:



1. Estudieu i representeu les simetries d'aquestes figures.
2. Estudieu les simetries dels triangles i els quadrilàters, i classifiqueu els polígons segons els eixos de simetria que tinguin. Tots tenen eixos de simetria?
3. Observeu la següent imatge, extreta del llibre *La Geometria*, d'Emma Castelnuovo.

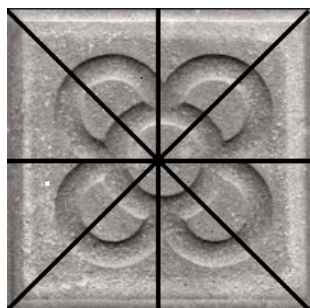
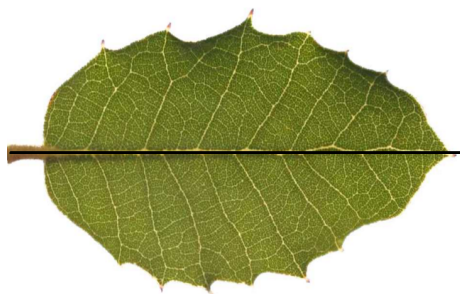


- (a) Com es pot passar del dibuix A al dibuix C? Què en dedueix?
- (b) Com es pot passar del dibuix A al dibuix E, amb el mínim nombre possible de moviments? Què en dedueix?
- (c) Com es pot passar del dibuix A al dibuix D, amb el mínim nombre possible de moviments? Què en dedueix?

RESPOSTES:

En aquesta part de l'activitat detallarem les respostes a les preguntes plantejades per a mostrar què treballem de matemàtiques.

1. Tant la fulla com la rajola de Barcelona tenen simetries axials, on els eixos són els següents, representats amb una línia negra.



2. La classificació és la següent:

(a) **Triangles:**

- i. El triangle equilàter té 3 eixos de simetria: les 3 altures.
- ii. El triangle isòsceles té 1 eix de simetria: l'altura relativa a la base.
- iii. El triangle escalè no té eixos de simetria.

(b) **Quadrilàters:**

- i. El quadrat té 4 eixos de simetria: 2 que són els paral·lels als costats, i els altres 2 que són les diagonals.
- ii. El rombe i el rectangle tenen, cada un, 2 eixos de simetria. En el cas del rombe són les diagonals; en el cas del rectangle són els paral·lels als costats.
- iii. El trapezi isòsceles té 1 eix de simetria.
- iv. El paral·lelogram i el trapezi no isòsceles no tenen eixos de simetria.

No tots tenen eixos de simetria: hem vist que el triangle escalè, el paral·lelogram i el trapezi no isòsceles no en tenen.

En aquest apartat es podria augmentar una mica la dificultat si es considerés el deltoide, quadrilàter poc habitual i que té un eix de simetria, com el trapezi isòsceles.

3. En aquest últim apartat es vol que l'alumnat vegi que en el primer cas el producte de dues simetries axials és una rotació, en el segon, que el producte de dues rotacions és una rotació i, en l'últim cas, que el producte d'una simetria per una rotació és una simetria.

3 Conclusions.

Aquest treball m'ha permès conèixer amb més detall la geometria i totes les oportunitats que els seus continguts ofereixen a l'hora de plantejar activitats. És tant abundant i diversa, que no ha estat fàcil centrar-se en uns temes concrets. Tanmateix, la immersió feta en aquesta branca m'ha fet veure les dificultats que hi ha en la seva assimilació i la millora que es pot fer per posar-hi remei.

Després d'haver dut a terme la recerca i haver realitzat les entrevistes, podem concloure que l'origen del problema que ha motivat aquest treball es troba en el desenvolupament pràctic i metodològic dels currículums escolars.

L'enfocament que es fa dels seus continguts és, en la majoria dels casos, ensenyar i que els alumnes aprenguin per superar les proves que els avaluen; fet que genera un aprenentatge mecànic i superficial de la matèria.

Hi ha un desequilibri entre les activitats de caire més tècnic i les més experimentals. Per a solventar el problema actual, seria bo reequilibrar aquest desajust amb la introducció de més material manipulable a les aules i més ús de programes de geometria dinàmica.

Aquesta desproporció afecta al nivell amb el qual els estudiants arriben a les facultats, doncs al tractar-se d'ensenyaments més teòrics, la capacitat d'abstracció que es necessita és major i cal una comprensió més profunda del que s'està treballant, fet que s'adquireix millor coneixent bé els objectes a través de l'experimentació, la manipulació i la visualització.

La geometria és una de les branques de les matemàtiques on més formalisme trobem, però també és una de les més flexibles a l'hora d'admetre material per a la seva comprensió. Aquest és un fet que s'ha de tenir present, doncs encara és poc l'ús que es fa del GeoGebra per a una millor visualització dels conceptes geomètrics, i encara menys habitual són els recursos manipulables a l'aula. Poder relacionar la idea matemàtica amb la forma física és fonamental per a la correcta assimilació i interiorització de les nocions treballades.

Al tractar-se d'una part de les matemàtiques tan diversa, són moltes les vessants en les que es pot aprofundir i que es poden desenvolupar. Un fet molt interessant i que faria la geometria més atractiva seria treballar la seva relació amb altres àrees de les matemàtiques o altres assignatures curriculars, doncs això suposaria un apropament entre la geometria i els alumnes, i aquests veurien que la geometria no va deslligada de les demés branques. De la mateixa manera, es podrien treballar activitats que la relacionessin amb conceptes universitaris que als instituts no es tracten.

Gran part de les activitats proposades en aquest treball per a la millora de l'aprenentatge de la geometria treballen aquest últim aspecte. Volen ser un apropament. Una millora que es podria fer en les activitats per l'aprenentatge de la geometria, seria enfocar-les amb una perspectiva més universitària, que servissin de pont entre l'institut i la universitat; activitats introductòries per treballar conceptes que es veuen en estudis superiors, doncs així es pot tenir una visió més àmplia del terreny que abarca la geometria.

Per a un millor aprenentatge, les activitats creades amb aquesta finalitat haurien de tenir un component visual. Tant pot ser mitjançant dibuixos o amb l'ús de programes com el GeoGebra. Una visualització de les idees que es volen assimilar permet una interpretació de les mateixes que contribueix a una interiorització que, d'altra manera, pot ser només parcial.

Hi ha d'haver un equilibri entre les activitats de caire reflexiu i les més experimentals, doncs aprendre a raonar i argumentar és igual d'important que saber interpretar o manipular dades. No s'ha d'oblidar la part experimental que moltes activitats tenen, ja que mitjançant les experiències vivencials també s'aprèn i es comprèn. Per tant, una combinació d'activitats d'aquests dos estils aportaria una millora en l'assimilació de la geometria. És fonamental, així mateix, fomentar el treball en equip, sense oblidar l'espai per a la reflexió individual. Si es treballa en grup, també s'està aprenent a argumentar i defensar raonaments i aprendre dels que són equívocs.

Sovint, a les aules, la falta de temps coincideix amb que resta molta matèria per a explicar i, per aquest motiu, es tendeix a la mecanització dels exercicis. Aleshores, el problema que apareix és que s'aprèn a resoldre certs tipus de qüestions, i no s'estan assentant les bases del concepte que es vol transmetre. Cal evitar que això passi, creant activitats menys mecàniques i que estimulin el raonament, doncs així es pot veure si els alumnes estan entenent el que estan fent.

Una altra manera de millorar l'aprenentatge de la geometria seria començar el temari, o algunes parts, amb exemples motivadors del que es treballarà en aquella unitat. Així, es comencen a conèixer els conceptes que es tractaran i els alumnes creen ells mateixos connexions entre les diferents idees que se'ls ha introduït.

En quant al temari, seria interessant poder recuperar activitats sobre les còniques, doncs quasi bé no es tracten i en estudis superiors tenen certa relevància. També hauria de ser present una part més teòrica, on es demostrassin algunes propietats bàsiques, o teoremes emprats al llarg del curs, per a educar l'alumnat en aquest sentit i fer que es familiaritzessin amb la part més teòrica i reflexiva de les matemàtiques.

Tanmateix, explicar geometria en moments diferents del curs contribuiria a una

explicació més detallada del temari i, per aquest motiu, una millor assimilació.

També és necessari un continu aprenentatge del professorat, per a poder disposar de tots els recursos a l'abast dels docents i que puguin contribuir a la millora de l'aprenentatge de la geometria.

4 Bibliografia.

El format que segueix la bibliografia ha estat extret de la pàgina web del CRAI de la Universitat de Barcelona, que explica com citar llibres i documents tant físics com electrònics, en la següent direcció web:

<http://crai.ub.edu/ca/que-ofereix-el-crai/citacions-bibliografiques>

Referències

- [1] *Matemàtiques II*. Barcelona: Grup EDEBÉ, 2007. ISBN 978-84-236-6529-7.
- [2] Sinclair, N; Pimm, D; Skelin, M. *Developing Essential Understanding of Geometry. Grades 9-12*. United States of America: National Council of teachers of mathematics, 2013. ISBN 978-0-87353-692-9.
- [3] *Anàlisi dels resultats en geometria de cinc proves d'avaluació de competència matemàtica*[PDF]. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament. Abril 2015 [7 de febrer 2016]
- [4] *Astroide, cardioide y demás -oides* [en línia]. 7 de novembre de 2011 [27 de maig de 2016]. [http : //gaussianos.com/astroide – cardioide – y – demas – oides/](http://gaussianos.com/astroide-cardioide-y-demas-oides/)
- [5] Consell superior d'avaluació del sistema educatiu. Generalitat de Catalunya. *Quaderns d'avaluació. 31. L'avaluació de quart d'ESO 2015*[PDF]Aubanell, A. Barcelona: Departament d'Ensenyament, Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu, abril de 2015, [7 de febrer de 2016]. Part 3. Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria.
- [6] Consell superior d'avaluació del sistema educatiu. Generalitat de Catalunya. *Quaderns d'avaluació. 28. L'avaluació de quart d'ESO 2014*[PDF]Aubanell, A. Barcelona: Departament d'Ensenyament, Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu, abril de 2014, [20 de març de 2016]. Part 5. Orientacions per a la millora de la geometria a l'ESO.
- [7] Centre de Suport a la Innovació i la Recerca Educativa, Generalitat de Catalunya. *Preguntes que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat*. [PDF] Creamat. Barcelona: Departament d'Ensenyament, juny de 2014 [26 de juny de 2016].
- [8] Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Generalitat de Catalunya. *Orientacions per a la millora de l'aprenentatge de la geometria*. [PDF]. Barcelona: Departament d'Ensenyament, juny de 2012, [3 d'abril de 2016].
- [9] Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Generalitat de Catalunya. *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*[PDF]. Barcelona: Servei de Comunicació i Publicacions, novembre de 2015 [7 de febrer de 2016].

- [10] Servei d'ordenació curricular. *Currículum Batxillerat* [PDF]. Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, 2008 [7 de febrer 2016].
- [11] Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. Servei d'ordenació curricular. *Currículum educació secundària obligatòria*. [PDF] Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament. [7 de febrer 2016].
- [12] Sandoval, Ana. *Concepto de simetría axial* [en línia]. 28 de gener de 2016 [23 de juny del 2016], <https://www.oercommons.org/authoring/4097-concepto-de-simetría-axial/view>
- [13] Casas, E. Naranjo, J. *Apunts de Complements de Geometria Projectiva*. [Apunts acadèmics].
- [14] Quintero, Jorge. *Dificultades en el Aprendizaje de la Geometría* [en línia]. 22 de març de 2014 [3 de maig de 2016], <http://es.slideshare.net/JorgeQuintero18/dificultades-en-el-aprendizaje-de-la-geometria>
- [15] Castelnuovo, Emma. *La Matematica/La Geometria*. Barcelona: Ketres, 1981. ISBN 84-85256-23-9
- [16] Macho, Marta. *La banda de Möbius* [PDF]. 14 de març de 2011 [23 de juny 2016],
- [17] *Pla docent de Geometria Lineal*. [en línia]. Universitat de Barcelona, 2015, [7 de febrer de 2015]. Disponible a :
<http://www.ub.edu/grad/plae/AccesInformePD?curs=2015&codiGiga=360151&idioma=CAT&recurs=publicacio>
- [18] Peña Mecina, A. Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO. *Revista Suma* [PDF]. Març 2012, núm.69 [21 d'abril de 2016]. Pàgines 37 a 48. Disponible a:
<http://revistasuma.es/IMG/pdf/69/037-048.pdf>. ISSN: 1130-488X.

A Sessions a l'escola.

Durant el desenvolupament del treball, va sorgir l'oportunitat de fer diverses sessions pràctiques en el col·legi salesià Sant Domènec Savio, de Terrassa. Es tracta d'un centre que ofereix docència fins a 4t d'ESO, i és per aquest motiu que es van fer dues sessions de geometria bàsica a les tres línies de 4t d'ESO del centre.

Segons la programació del curs, es treballava geometria analítica en el pla al llarg del 3r trimestre escolar, fet que va permetre organitzar aquestes sessions amb antelació. L'esmentada organització va consistir en dues trobades. En la primera es van definir els conceptes i continguts que es podien treballar amb el GeoGebra. El temps del qual es disponia per posar en pràctica aquestes activitats era molt limitat, així que es va decidir que dites activitats treballarien part del temari que s'havia d'explicar i formarien part de l'avaluació dels estudiants.

Un cop decidit això, es va procedir a treballar en les activitats. La creació d'aquestes fitxes es va basar en l'anàlisi previ de les dificultats de l'aprenentatge de la geometria i en les línies de millora proposades, tenint present en tot moment la programació de 4t d'ESO del col·legi per aconseguir els objectius del curs establerts. En tractar-se d'exercicis que complementen les explicacions teòriques fetes per la professora a classe, aquestes activitats es van pensar com a eina per reforçar els conceptes més bàsics del tema de geometria analítica en el pla i per a ajudar a assolir els coneixements dels quals després seran avaluats.

Independentment d'aquesta posada en pràctica, i com a conseqüència de l'anàlisi de dificultats en l'aprenentatge de la geometria i de les línies de millora proposades, es va obtenir que una part a reforçar de la geometria era la geometria analítica en el pla. Abans de contactar amb la professora del centre ja s'havia fet un esbós d'una activitat tipus que ho treballaria.

D'aquesta manera, la segona trobada va consistir en la revisió de les fitxes, les quals es van complementar amb l'activitat tipus que s'havia pensat a part i que es van acabar de perfilar amb aportacions que la professora del centre va fer. Es va consultar el calendari per la temporització escolar, i així poder quadrar bé les explicacions prèvies del temari amb les activitats pràctiques. Finalment, es va establir que les sessions a realitzar serien dues, treballant, en la primera, els conceptes bàsics del temari com ara el mòdul o l'equipol·lència de vectors, i en la segona, combinació lineal dels mateixos o bases.

A.1 Resultats a l'escola

Les sessions van ser els dijous 5 i 12 de maig, i es van desenvolupar de la següent manera. En ambdues, la professora va explicar els procediments tècnics de les activitats: on podien trobar els fitxers o com els havien d'entregar, entre d'altres;

i jo vaig explicar quins eren els objectius d'aquelles sessions. Els alumnes podien consultar els apunts donats a classe per poder dur a terme les activitats i, en cas de tenir dubtes, podien consultar-nos.

La primera sessió, que treballava els conceptes més bàsics de la geometria analítica en el pla, es va dividir en 5 exercicis.

1. En el primer exercici, s'havien de representar els vectors que es demanaven a partir d'uns punts que s'havien de representar prèviament. Es treballaven les definicions de components d'un vector i el càlcul del seu mòdul, tant analíticament com amb la funció distància del GeoGebra.
2. En el segon, se'ls donaven uns punts a partir dels quals havien de representar uns vectors de les mateixes característiques a un de donat i dir quins eren els nous punts extrems que obtenien i en quines característiques coincidien o es diferenciaven. L'objectiu d'aquest segon apartat era veure si havien assolit conceptes tals com el de components de vectors o d'equipol·lència.
3. En el tercer, donats dos vectors, havien de calcular tant analítica com gràficament, les operacions que se'ls demanava i el mòdul dels vectors resultants.
4. El quart estava dividit en dos apartats. En el primer, donats tres punts, els alumnes havien de construir els vectors que se'ls demanava i calcular diferents vectors a partir dels dos que havien determinat i que estaven multiplicats, cada un d'ells, per un lliscador. El segon demanava trobar els valors dels lliscadors amb els quals obtenim els vectors de mòdul més petit i més gran.
5. El cinquè i últim exercici d'aquesta primera sessió estava igualment dividit en dos apartats. Al primer, es donaven els mateixos punts que en el 4t i es demanava dos vectors en concret. Després, els alumnes havien de calcular el seu mòdul tant analíticament com amb la funció distància del GeoGebra. En el segon, se'ls demanava representar una combinació lineal a partir dels vectors construïts al principi de l'exercici, i determinar el seu mòdul de manera analítica i amb la funció distància del GeoGebra.

La segona va treballar els conceptes de combinació lineal de vectors, introduïts en la primera sessió, i el de components d'un vector en una base donada. Aquesta activitat estava dividida en 4 exercicis.

1. El primer exercici consistia en dir quins dels conjunts de vectors donats eren linealment dependents o independents, i dels que fossin independents canviar un punt per a que fossin dependents.
2. En el segon es donaven dos vectors, i es demanava als alumnes que representessin diferents combinacions lineals d'aquests vectors, des de diversos punts del pla.

3. El tercer utilitzava la regla del paral·lelogram per expressar un vector com a combinació lineal de dos de donats i es demanava donar les components d'aquest vector obtingut.
4. El quart i últim exercici era molt semblant al tercer, però diferien en un aspecte: per trobar la combinació del vector que passés per un punt concret, s'havia de canviar l'increment dels lliscadors que el definien.

Cada grup classe estava dividit en grups de 3 o 4 persones, els membres del qual tenien diferents nivells de matemàtiques, amb l'objectiu de fomentar el treball en equip. Cada grup es va dividir la feina sabent quina era la manera com treballaven millor.

Com que aquestes activitats formaven part de l'avaluació del curs dels estudiants, la correcció de les mateixes es va fer de manera simultània de dues maneres diferents: per una part, perquè la professora del centre veiés com els alumnes anaven entenent els conceptes i puntuar-los en funció d'això; i, per l'altre, jo podia veure si l'alumnat assolía els continguts del currículum estudiats prèviament, i si l'ús del GeoGebra permetia una millor visualització dels conceptes que es treballaven.

A partir de la correcció i de les observacions fetes els mateixos dies de les sessions, s'han extret les següents conclusions.

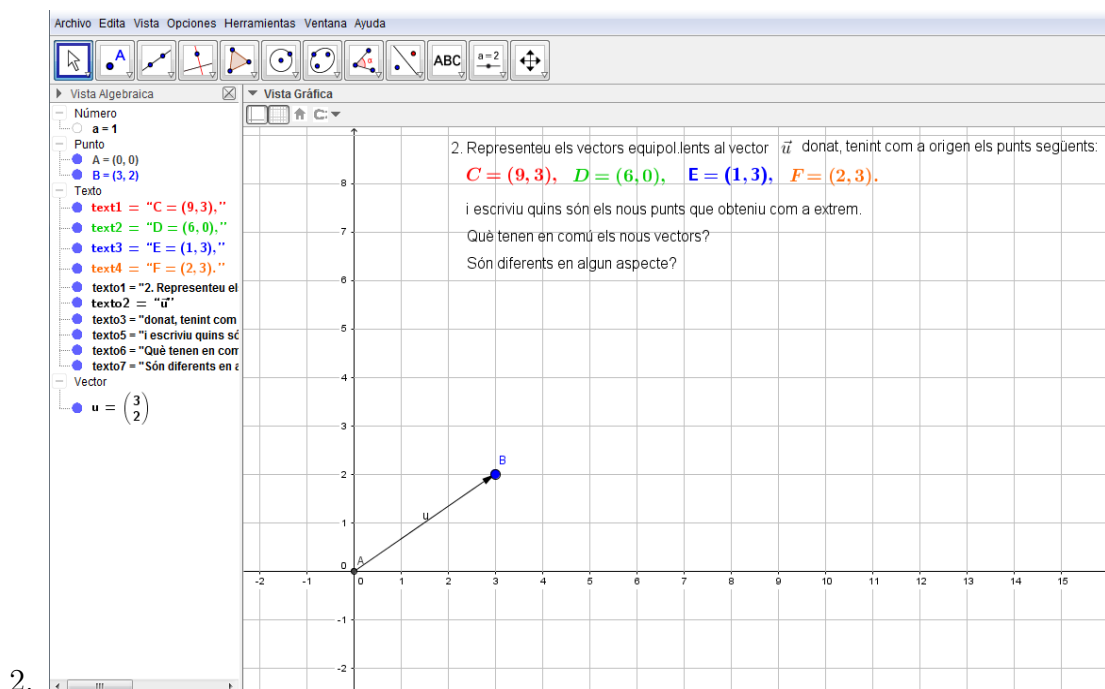
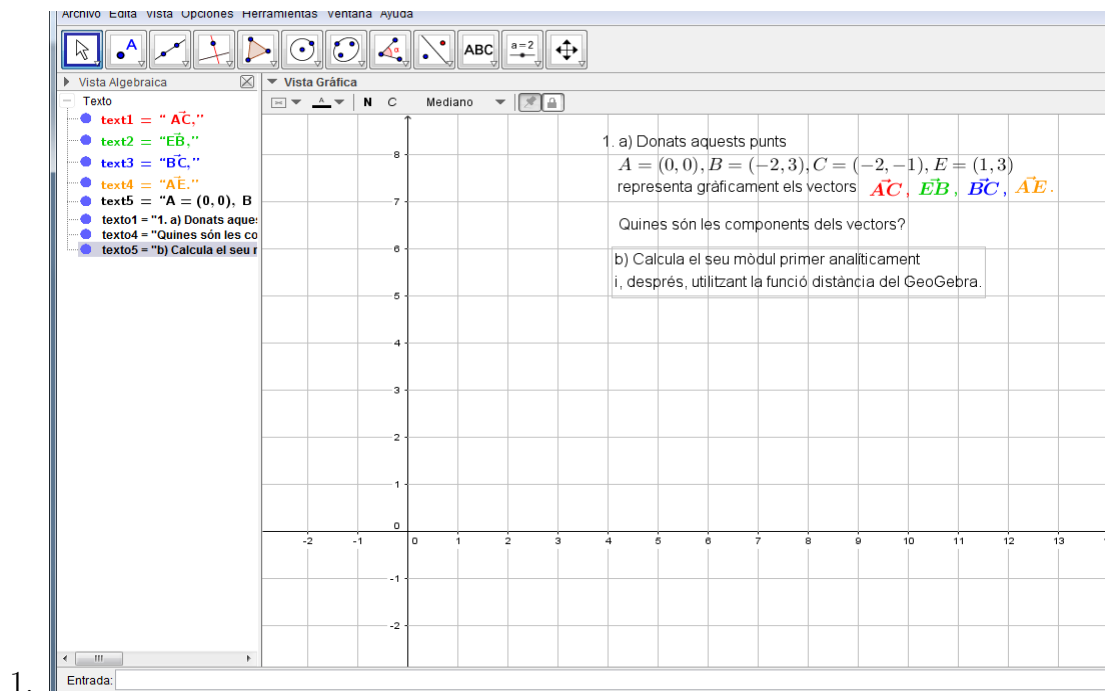
La posada en pràctica de les activitats va funcionar força bé, fent que els alumnes responguessin adequadament a les mateixes.

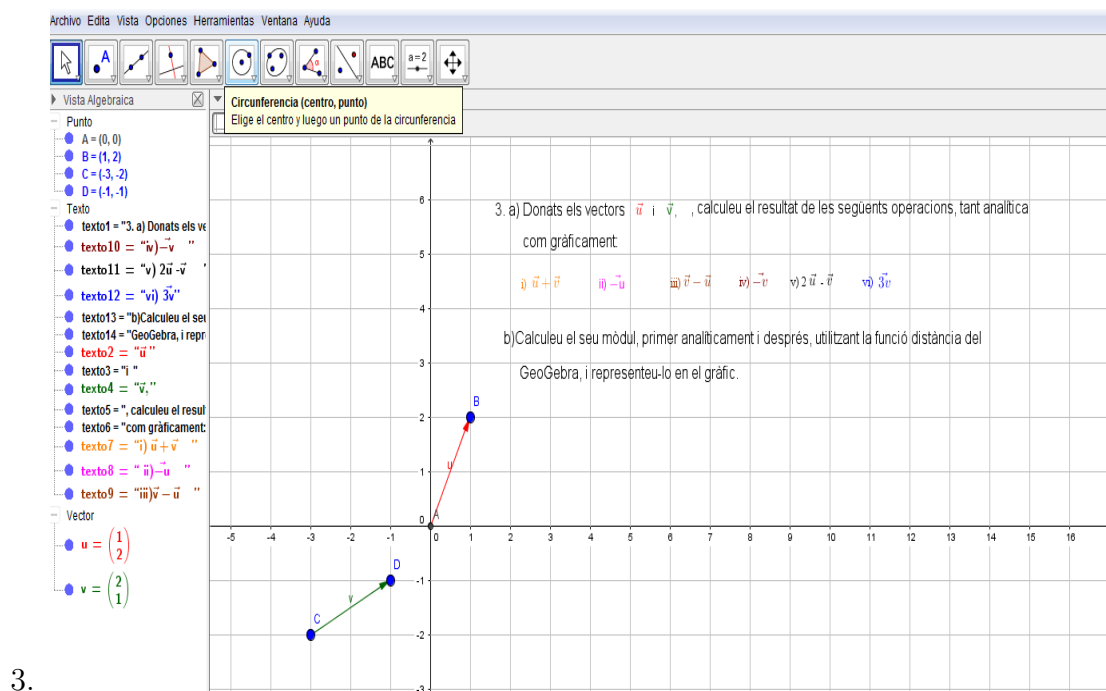
Algunes activitats no han obtingut l'assoliment que s'esperava, però tot sembla indicar que no és tant pel nivell de dificultat de l'activitat en sí, sinó dels hàbits de treball dels estudiants: molts no duïen els apunts amb ells tot i haver-ho demanat prèviament, no dedicaven temps a buscar la informació o no tenien prou paciència per pensar en la resolució del repte plantejat, entre d'altres. Això s'ha observat en grups concrets, la majoria havien estudiat els conceptes vists a classe i que eren necessaris per realitzar les sessions.

Visualitzar determinades operacions o representacions ha permès als estudiants entendre millor el concepte que treballaven, donant lloc a una interiorització que permetrà seguir millor el temari que resta per acabar el curs.

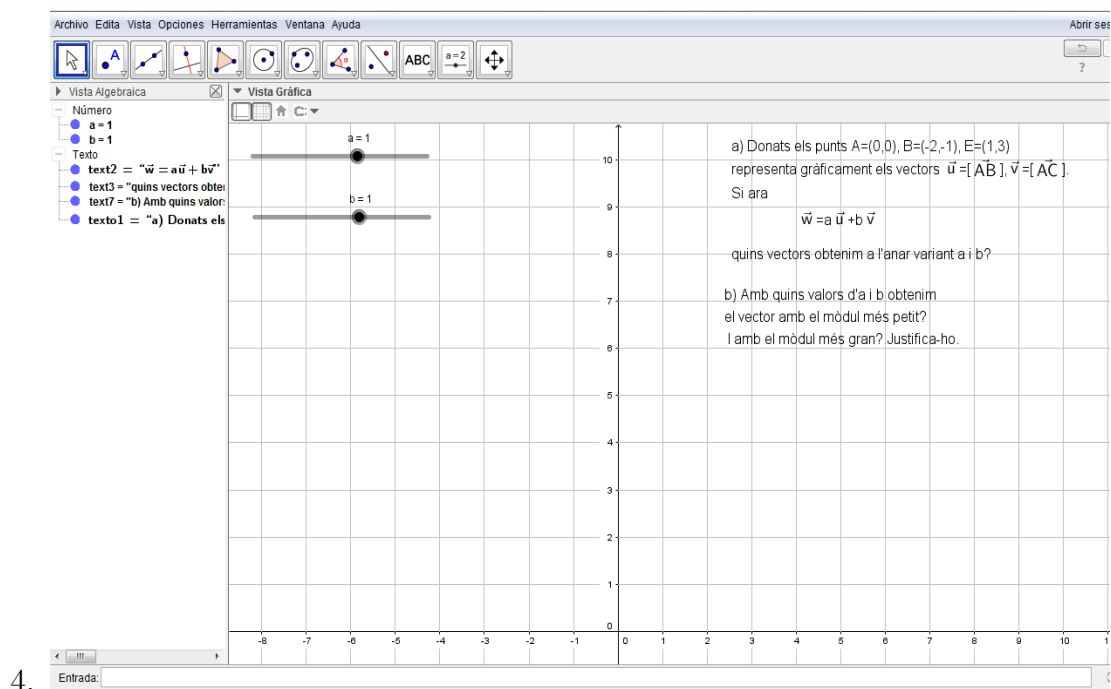
Les notes dels estudiants en aquestes pràctiques no són massa destacables, però les obtingudes en l'examen realitzat sobre aquesta part del temari són molt bones, fet que indica que les activitats amb el GeoGebra han permès una bona assimilació i interiorització dels conceptes.

Les activitats de la primera sessió van ser les següents:



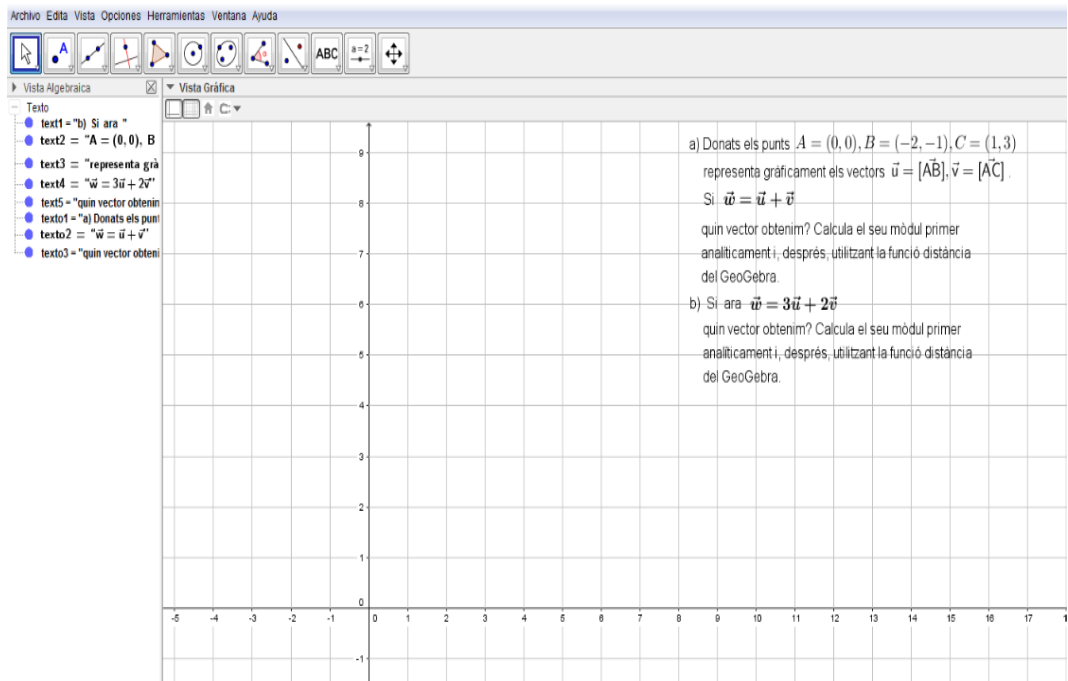


3.



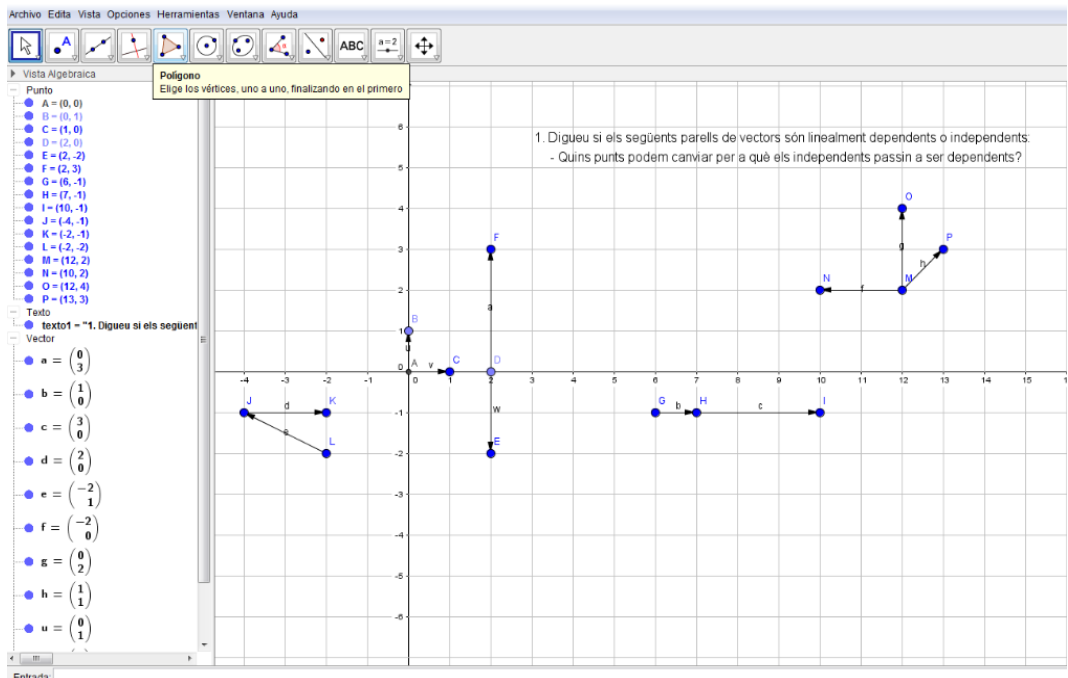
4.

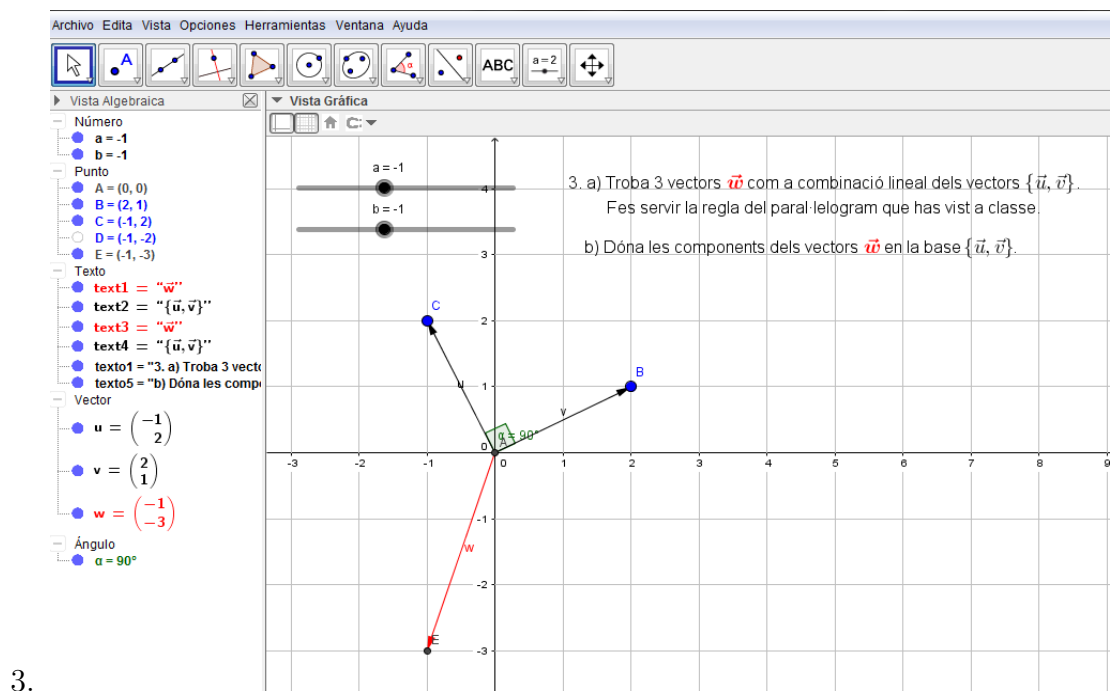
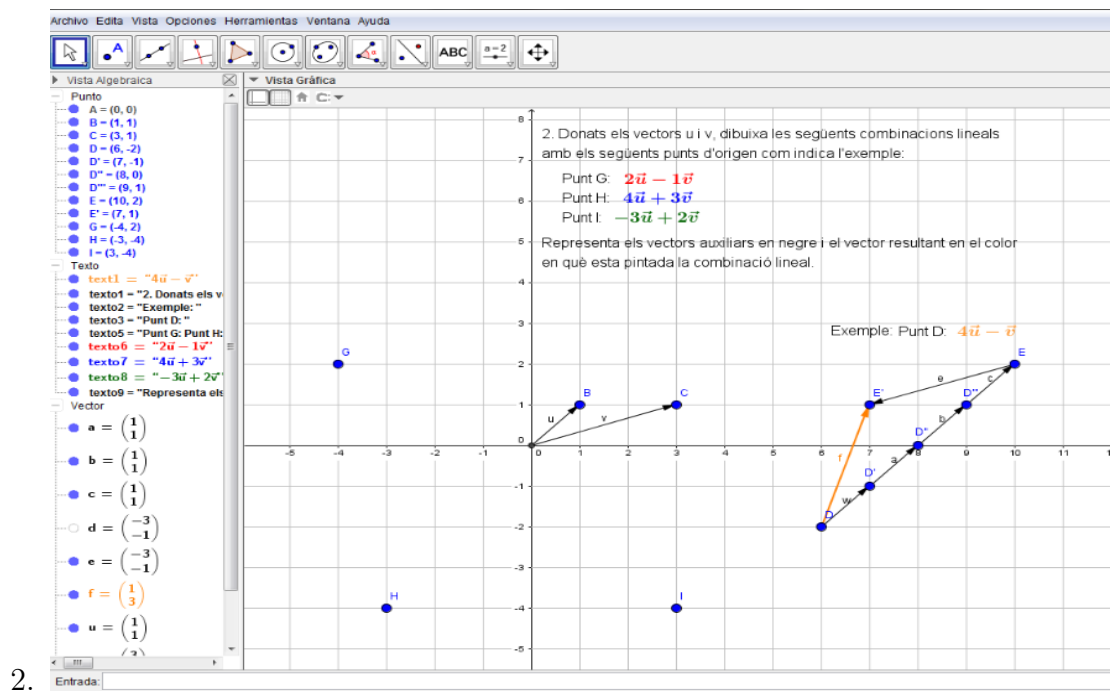
5.

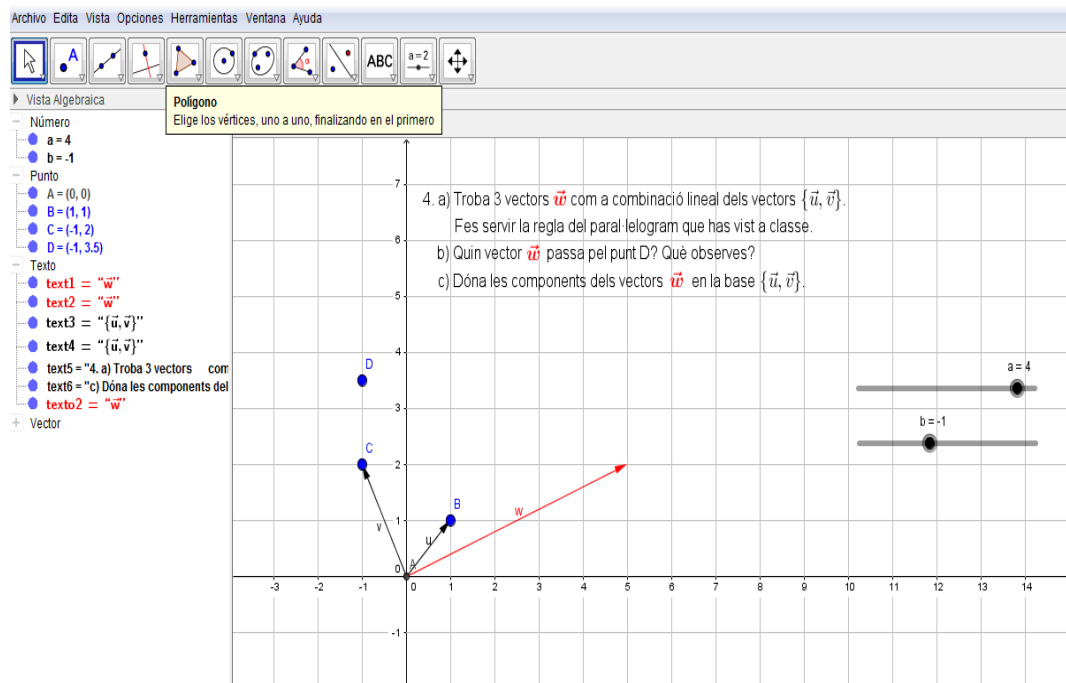


Les activitats de la segona sessió van ser les següents:

1.







4.

B Entrevistes.

B.1 Entrevista a Anton Aubanell.

La primera entrevista realitzada va ser a Anton Aubanell, que va ser professor a l'IES Sa Palomera de Blanes i professor associat de Didàctica de les Matemàtiques a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, fins l'any 2013 i, actualment, és professor honorífic de la Universitat de Barcelona.

1. **Sovint, les matemàtiques es veuen com quelcom llunyà i inassolible, i això porta als alumnes a distanciar-se fins al punt de no voler entendre o esforçar per entendre. De quina manera podem ensenyar als alumnes que la geometria és a tot arreu i, així, apropar-los a la matemàtica?**

Les matemàtiques, com dius en l'enunciat de la pregunta, tenen dificultats especials: per que requereixen fer un camí cap a l'abstracció, per que a vegades són tan fonamentals que estan en els fonaments i, per tant, no es veuen en l'edifici de la ciència o de la tècnica i això fa que passin desapercbudes i no sembla que estiguin tant en el món real com altres ciències o matèries; perquè són progressives: quan una persona no agafa l'etapa A, difícilment agafarà la B, m'explico: és una escala; i per que a vegades té un aspecte de llenguatge iniciàtic que hi ha gent que no creua la frontera d'aquest llenguatge. Llavors, no entenen el llenguatge matemàtic, hi ha alumnes que no l'entenen per que no han entrat en el llenguatge.

Bé, totes aquestes dificultats i, probablement, d'altres més relacionades amb la cultura acadèmica nostra fan que la matemàtica, a vegades, no tingui la millor imatge social ni la millor imatge entre els alumnes. I la geometria és la part de les matemàtiques que més pateix això. Què hauríem de fer per aconseguir que la geometria arribés més als alumnes? Mira, primer, fer una geometria menys associada a reconeixement de formes i aplicació de fórmules. Fem una geometria en que sembla que l'important sigui reconèixer formes: què és un rombe o què és un con, per exemple; i aplicar fórmules: trobar longituds, àrees i perímetres. Hauríem de sortir d'aquesta geometria per anar a una altra en que hi hagués més espai per a l'experimentació en l'espai: més material manipulable, més programes tipus GeoGebra, scratch, més contextos. En aquest sentit, els contextos ens ajuden a veure geometria, a fer sorgir els fonaments i més, també, raonament geomètric. Hi ha un tipus de raonament que si no es fa a geometria, no es fa enlloc. Aquest tipus de problema, que sobretot, surt en les proves cangur, que surt un dibuix i tu dius si tracem aquesta recta i mirem aquest angle, triangles semblants... Aquest tipus de raonament de recursos propi de la geometria s'ha perdut durant els últims 20 anys en el nostre món acadèmic i trobo que l'hauríem de recuperar. Jo crec que aquests 5 elements: més experimentació, més material, més GG, més contextos i més raonament geomètric serien essencials.

2. El currículum s'acaba molt aviat? És a dir, els alumnes surten amb prou coneixements de matemàtiques?

Hem de pensar-ho. Què entenem per coneixements de matemàtiques? El currículum té dues ànimes: per un costat els continguts, pròpiament, i per l'altre, les competències. Entenem per competències, bàsicament, coneixement aplicat a contextos. Per tant, per un costat, els alumnes han de saber el que és un triangle equilàter o que la suma dels angles d'un quadrilàter és 360° ; però també han d'adquirir altres habilitats com són la resolució de problemes, com són les connexions entre idees matemàtiques i amb idees matemàtiques i el món real, com són el raonament, la capacitat de fer proves, la comunicació en el món matemàtic i a través i a dins de les matemàtiques, i la representació de conceptes matemàtics de varies formes si cal. És a dir, han d'adquirir continguts i competències, i tot això forma part de coneixement matemàtic, jo trobo.

El currículum s'acaba aviat? Penso que, a vegades, que el currículum és més lleuger que els llibres de text. El gran problema, a vegades, és que els llibres de text no s'acaben mai i no donen espai a que el professorat faci autènticament classes on les matemàtiques es visquin, es construeixin. El professorat ha de córrer, està pressionat i quan està pressionat al que es tendeix és a la mecanització, l'automatització... I això és poc competencial. És una trista paradoxa: la pressió del currículum, la dels llibres de text almenys, fa que no siguem fidels a la idea de crear competència en els alumnes. És molt curiós, i això també fa que no aprenguin massa bé. Jo seria partidari de llibres de text punxats: que deixessin espai pel professor i seria partidari de que el professor veiés molt més el currículum que no els llibres de text. El currículum és una invitació a fer les coses bé, i amb calma. Els llibres de text són una invitació a xafar. Hi ha molta més matèria de la que s'acaba ensenyant.

3. Observant l'anàlisi dels resultats de geometria (<http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/orientacionsgeometria/>, 2n document), quins canvis creu que s'han produït a l'hora d'ensenyar per obtenir, al 2015, una puntuació quasi bé 10 punts per sota a la de l'any anterior?

Això ho vaig analitzar, efectivament, i és sorprenent. No només hem obtingut quasi 10 punts per sota, sinó que ja estava molt avall. És curiós, la geometria està per sota, està avall, des de fa molt temps. A les proves PISA també està per sota. És molt curiós. Però és que aquest any és massa com hem baixat. És una tendència que, per un costat, és molt robusta: és molt difícil dir que això és un accident estadístic, entenc que qualsevol mesura és discutible per que els exàmens són una mesura tant discutible com vulguis, però és difícil que això es repeteixi any rere any; per l'altre és molt persistent.

Això vol dir que tenim un problema. D'on ens ve aquest problema? Des del meu punt de vista ve, bàsicament, probablement, una tendència excessiva a la formalització matemàtica. És a dir, a intentar que les matemàtiques visquin a la pissarra. Això és fruit, potser, de la pròpia formació del professorat de matemàtiques, dels matemàtics, fins i tot; i d'altre professorat que, tot i no

ser matemàtics, pensen que la matemàtica formalitzada és la matemàtica amb D.O, deixem-ho així; i la matemàtica que no està formalitzada, la que hi ha al MMACA, per exemple, és una matemàtica secundària. No sé si m'explico. Aquesta tendència ha fet molt de mal a l'ensenyament de secundària; de fet, no és que ho digui jo, és que ho diu en Miguel de Guzmán, que ja és mort, però era un professor de la Complutense, una referència; i ho diu clar: la tendència que es va produir en els anys 70-80 cap a la matemàtica moderna, dèiem llavors, que era la matemàtica de teoria de conjunts, de relacions, estructures, aplicacions, etc; tota aquesta tendència era maquíssima però va formalitzar tant la matemàtica, o li va donar rigor (el que per nosaltres era rigor, per l'alumne era innecessari i no l'arribava a entendre), doncs per aquest rigor es va sacrificar manuals, temes d'intuïció i clar, en quant es va sacrificar la intuïció, la geometria va patir.

Llavors la geometria que es va començar a fer era la geometria analítica, és a dir: doneu-me un problema de geometria, us imposaré un sistema de coordenades i el solucionaré. Quan es va perdre el raonament genuïnament matemàtic que venia d'Euclides, aquí vam tenir molta pèrdua. Penso que aquí tenim un problema.

Llavors què es va fer? Una geometria molt analítica per un costat i, per l'altre, la que no era analítica es reduïa a coneixement de formes i aplicació de fórmules, com si això fos tota la geometria i s'oblidava de moltíssims aspectes. S'hauria de recuperar l'experimentació, els materials manipulables, programes com el GeoGebra, el treball sobre contextos i el raonament geomètric.

Això es pot recuperar dins de l'aula mitjançant activitats experimentals, és a dir: portar a la geometria activitats experimentals que no siguin de més a més; que siguin claus. Que les visquem, que el professor les visqui com a elements claus. No pot ser que l'element clau sigui la pissarra i que l'altre siguin "jocs". Complementar-ho. Un equilibri. No estic menyspreant el formalisme, però, seria bo una educació oberta: no tothom serà matemàtic, ha de ser una educació que contempli la geometria com una part essencial del seu programa.

4. Creu que un canvi en la manera d'ensenyar invertiria les dades? (més dinàmica, més amena, menys teòrica, més participativa, més didàctica... Canviar la metodologia, vaja.)

I tant. Ho crec absolutament. I demostració: a primària, el professorat procedent de magisteri que, probablement, sàpiga molt poc de matemàtiques, però que no han deixat la tradició dels materials, i de retallar, de construir els hi va millor. Hi ha una certa baixada a la geometria, però no tant grossa com a secundària. A la formació de professorat de secundària es fa un ensenyament més teòric, més sòlid. Aquest ensenyament et deixa marques. Això passa perquè el professor de secundària encara no ha fet el camí d'adonar-se'n de que una cosa és la seva formació matemàtica i l'altra és la formació matemàtica dels ciutadans en general que no faran matemàtiques. Hem de fer unes matemàtiques més comprensibles i comprensives per a tothom. En canvi, no fer-ho així, és ocultar una part de les matemàtiques.

5. Potser el problema no radica en l'ensenyament sinó en la manera d'avaluar? (tipus de problema PISA, el que es busca obtenir amb aquestes proves: saber fer un examen o aprendre a raonar?)

Bé, l'avaluació forma part de l'ensenyament i és molt important que avaluem atenent a això que dèiem; és a dir: no pot ser que fem una classe, una matemàtica més experimental, més viva, més funcional, més aplicada i llavors, a l'hora d'avaluar, fem els mateixos exàmens. No! Siguem conseqüents. Ens estem fent trapes, m'explico? Per tant, l'avaluació ha de condicionar també l'ensenyament. De fet, l'alumne dona importància a allò que nosaltres donem importància. Per tant, si nosaltres no donem importància a l'avaluació, si fem una avaluació clàssica, l'alumne es pensarà que, quan estem fent una experiència amb materials, estem fent jocs que després no sortirà en exàmens. Per tant, l'avaluació ha de jugar un paper de compromís també. No es pot fer una didàctica a classe i una avaluació d'una altra. Si ens decidim d'anar per un camí, hi hem d'anar en la metodologia docent i en l'avaluació. És aprendre a raonar, és més important aprendre a raonar geomètricament que saber fer un examen de geometria per saber calcular una àrea.

Fixa't que aquí ens estem fent un truc per que l'avaluació la fem nosaltres. Per tant, hauríem d'ensenyar per aprendre a raonar, per tenir intuïció matemàtica; resulta que ensenyem a calcular àrees i venen les proves PISA, els posen al foto d'una habitació i els pregunten: des d'on està tirada, aquesta foto? I ja estem perduts. Llavors els alumnes pregunten: "però això és geometria?" Hauràs de dir-li: "Per suposat!" El que quasi no és geometria és calcular àrees.

I ubicar-se a l'espai? Clar que és geometria! Per tant, l'avaluació hauria d'estar en concordança amb el que fem sinó ens estem fent trapes.

6. Creu que ha variat l'enfocament de la geometria en els darrers anys?

En els últims 25-30 anys jo crec que sí. Degut a la formació nostra, teva i meva, la de molt de professorat que, potser, l'ha rebut a les facultats, i ens ha seduït per una bellesa formal, indiscutible, sobretot la geometria analítica; i jo crec que això ha portat a que hi hagués una geometria pura, de coordenades; i l'altra experimental es considera més secundària, i no la fem viure. Una demostració brillant d'això és l'el·lipse: a primària estudien la circumferència, però ni a l'ESO es fa: només a batxillerat. I això perquè? Per que quan els matemàtics pensem en l'el·lipse, pensem en la seva fórmula, però una el·lipse és una altra cosa: és el lloc geomètric dels punts que la suma de la distància de dos focus és constant. Si veiéssim l'el·lipse com això: una circumferència amb dos centres, viuríem una altra experiència amb les el·lipses. I es podria fer a primària, seria divertit; però hem convertit l'el·lipse en una fórmula! Doncs sí, crec que ha canviat i que hauríem de fer un recanvi.

7. S'hauria de fomentar treball entre companys? (Els que tenen menys dificultat ajudar als que en tenen més).

I tant! Sempre penso que aquí s'ha de vigilar, i s'ha de fer per fases. Davant d'una resolució de problemes, s'ha de fer que hi hagi una part individual per a que l'alumne entri al problema; una part en parella per a que l'alumne

comenci a compartir allò que ha descobert i verbalitzi; i una part en grup. Però és important que hi hagi una tasca individual, perquè sinó, a vegades, la tasca de grup pot ofegar a l'individu i al seu raonament, i això no estaria bé. És important buscar l'equilibri. Però sí, s'ha de treballar en grup per que al treballar en grup, les persones ens veiem obligades a argumentar i l'argumentació és una manera de raonar; a vegades les coses s'entenen més quan s'han d'explicar. Això és important.

8. Seria millor una atenció més individualitzada?

Sí, sempre és millor. Però jo diria una atenció més individualitzada a cada activitat que fem a classe, no només al alumne. Sí, a cada alumne, i cada activitat. Cal que el problema del dia sigui EL problema; és a dir: individualitzar el problema. Cal que la classe d'avui sigui LA classe, també individualitzar la classe. Ens convé que les activitats docents, que les matemàtiques, s'individualitzin, siguin grans activitats. Per que sinó, a base de fer activitats repetitives no arribarem enlloc. S'ha d'individualitzar. I, evidentment, individualitzant les activitats també hem d'individualitzar l'atenció a cada alumne dins d'aquelles activitats. No oblidem que si parlem un sol llenguatge, arribarem a uns quants alumnes però deixarem d'arribar a molts; si parlem molts llenguatges (el de la pissarra, el de l'experiència, el dels experiments, el dels experiments manipulables, el llenguatge dels ordinadors) arribarem a molts més alumnes. Com més llenguatges parlem, a més cors arribarem, a més estils d'aprenentatge arribarem.

9. Qualitat i quantitat.

Sense dubte, qualitat. La responsabilitat més gran que té un professor és administrar el temps que els alumnes li posen a les seves mans. L'ha d'administrar no per fer moltes coses, sinó per fer-les molt bé. I penso que és millor fer 5 problemes ben fets que 10 atrotinadament. Cal fer-los ben fets, cal individualitzar aquell problema, cal veure que aquell és el problema d'aquella hora. És molt important.

Estic convençut que dedicar-hi més hores donaria un millor resultat. El temps escolar és un bé molt limitat, i molt preuat. Així que benvingut tot temps escolar, però en el currículum això és molt difícil per que totes les assignatures aspiren a més hores. El que hem d'intentar és, en aquestes hores, fer una bona feina. Jo crec que la feina d'individualitzar el tracte i les activitats ens pot ajudar a fer una bona feina amb aquestes hores. Si n'arriben més, millor.

10. Quines activitats canviaria per tal d'aconseguir una millor comprensió?

Em fa molta por plantejar els temes didàctics ens termes de blanc o negre, sí o no; no hi ha activitats bones o dolentes, per sí mateixes. Lo bo és una bona combinació de tot, però donat que en aquests temps, trobo, que hi ha un desequilibri per excés en temes de pissarra, jo sí que canviaria activitats de pissarra o llibre de text per activitats més experimentals. No per produir un desequilibri, sinó per precisament, per assolir un millor equilibri. Per que ara hi ha un desequilibri evident.

Més GeoGebra, més material manipulable, més experimentació, més activitats per reconèixer la matemàtica que ens envolta. Des d'una gimcana geomètrica per un parc fins a un concurs de fotografia matemàtica on s'educa la mirada matemàtica del nano. Penso que substituir activitats simplement reproductives o activitats que simplement formalitzin per activitats més experimentals, més vivencials, seria essencial. Repeteixo, sense ometre absolutament les primeres, no: buscant un equilibri, però és que en aquests moments hi ha un desequilibri cap a l'altre costat.

11. Què el va impulsar a formar part d'un museu de matemàtiques?

De fet, jo vaig ser una de les dues persones que van estar en l'inici del museu: vam ser en Josep Rey i jo. Per tant, d'alguna manera, a nosaltres ens va impulsar, crec, somiar amb un Museu de Matemàtiques. Jo pensava en donar una visió de les matemàtiques que sortís en la línia del que estavem dient fins ara: que no fos tant de pissarra o del quadernet d'exercicis i més d'experimentar. Jo crec que aquesta era la idea fonamental a l'hora de crear el Museu de Matemàtiques, però amb dues finalitats: des d'aquesta perspectiva intentar influir en dos aspectes. Primer: ajudar l'escola a que descobrís aquest sistema de fer matemàtiques; aquesta visió de les matemàtiques que no és que sigui nouvinguda, sinó que és recuperar una que s'havia interromput fa 50 anys; per tant, recuperar aquesta visió viva i experimental de les matemàtiques, per tant, servir a l'escola des de fora l'escola i des d'un format no acadèmic. No volem ser acadèmics. Segon: influir en la societat per intentar canviar la imatge social de les matemàtiques. Per molts dels nostres conciutadans, les matemàtiques són pilons d'exercicis i pissarres plenes de números. El museu ajuda, penso jo, molt a les persones que ens visiten, a descobrir que les matemàtiques són molt més que números.

B.2 Entrevista a Josep Rey.

Aquesta segona entrevista ens la va concedir en Josep Rey, actual president del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA).

1. **Sovint, les matemàtiques es veuen com quelcom llunyà i inassolible, i això porta als alumnes a distanciar-se fins al punt de no voler entendre o esforçar per entendre. De quina manera podem ensenyar als alumnes que la geometria és a tot arreu i, així, apropar-los a la matemàtica?**

Estem parlant de la motivació. La qüestió no és que estudiïn coses, sinó que facin coses. Fes-los moure els dits, treballar. No pensaria tant en la vida quotidiana, m'agrada més pensar en el que deia l'Emma Castelnuovo, que era la matemàtica de la realitat. Què és la realitat pels alumnes? És allò que els hi poses a les mans. Pot ser una realitat inventada, pot ser un joc només per aprendre, hi ha jocs que són només per aprendre. És fonamental que l'alumne sàpiga que el que ha de fer és aprendre: em refereixo a que hi ha jocs molt avorrits però ells veuran que faran una experiència i, tot i que aquell joc no tingui excessiu interès lúdic, sí el tindrà per aprendre. L'alumne ha d'haver après que no va a divertir-se sinó que va a aprendre.

Un pas previ pel MMACA podria ajudar a introduir certs conceptes geomètrics abans de treballar-los a classe. Pot haver alguna construcció que atreu molt però un cop l'han après, ja no els hi agrada perquè ja no és una novetat per ells. Els hi pots portar una cosa a classe que per ells no sigui novetat però dir-los que hi ha un repte nou que anirà be per aprendre i ells l'hauran de manipular i aprendre, però no ha de ser tot ni espectacular ni molt divertit. Ha de ser que es toqui i que, amb seriositat, es pugui aprendre. I la por no la tindran si és una cosa que, tocant, surt. S'atreveixen més per que pensen que faran servir aquests recursos que ja tenen interioritzats, les matemàtiques innates que ja tenen. S'atreveixen, i aprenen. En canvi, si venen amb un discurs que per ells sigui molt elevat o que els hi costi de seguir, aleshores es distreuen, i no tenen la motivació adequada.

2. **El currículum s'acaba molt aviat? És a dir, els alumnes surten amb prou coneixements de matemàtiques?**

No, no surten prou preparats. La geometria té unes dificultats i, per l'experiència que jo tinc, hi ha una part de la població a qui la geometria no li va bé. És a dir, tenen una mancança important de visualitzar l'espai. Aleshores, s'ha de tenir present que, quan fas geometria, a una part els hi serà fàcil, i a una altra, difícil. Justament per aprendre, va bé detectar a qui li és difícil, ja sigui el professor o el propi alumne qui ho detecti, perquè sap que allò que li resulta difícil o que no li surt, sap que allà hi ha un punt ple d'aprenentatge important, ha d'aprendre uns exercicis. Això passa amb la població adulta també.

No hauríem de passar per alt la geometria, quan es veu que hi ha una dificultat, doncs treballar-la. Però aquí entra en joc la diversitat a l'aula: hi ha els que els hi resulta molt fàcil i els que no. Llavors, potser es podrien

preparar més activitats pels qui els hi resulti més fàcil i, mentrestant, que el professor ajudi als altres. Jo això ho arreglava fent-los fer dibuixos. Són bastant espectaculars de fer, poden costar més o menys de fer. N'hi ha que són més senzills, però als que els hi costa també els hi costa. Així, que mentre els que els hi costava feien aquests dibuixos, els altres podien anar aprenent coses que eren més del seu interès.

A matemàtiques s'ha de dibuixar molt, i mirar de dibuixar prou bé. En matemàtiques es diu que la geometria és l'art de pensar bé. S'haurien d'acceptar els dibuixos en brut, perquè tot i no haver-se esforçat prou en dibuixar-lo bé, és un dibuix que està prou bé per poder-hi veure allò que hem de pensar; és a dir, per entreveure la idea. Poder treballar amb allò i poder treure conceptes: el dibuix ajuda a la intuïció.

3. Observant l'anàlisi dels resultats de geometria

(<http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/orientacionsgeometria/>, 2n document), **quins canvis creu que s'han produït a l'hora d'ensenyar per obtenir, al 2015, una puntuació quasi bé 10 punts per sota a la de l'any anterior?**

No puc saber què ha passat, s'hauria de mirar les proves que eren. Vols dir si jo percebo que anem a pitjor? No ho sé. A vegades, quan hi ha un canvi de mètode, empitjora la geometria per que el professorat va molt coix de geometria i si canvia mètodes, posa més èmfasi en allò que ell domina més i per això, pot ser, quan hi ha un canvi, la geometria encara empitjori per que el canvi és global. Pot ser. Però és que el professorat va coix, i sempre es deixa pel final per no fer-la. Podria ser que fos això, però jo no puc pas saber-ho.

4. Creu que un canvi en la manera d'ensenyar invertiria les dades? (més dinàmica, més amena, menys teòrica, més participativa, més didàctica... Canviar la metodologia, vaja.)

Un canvi en la manera d'ensenyar només funciona si el professor s'ho creu. Un professor ho ha de fer de la manera que ell creu les coses. Jo he estat en departaments en que companys han fet coses de diferents maneres però com que hi creien, i com no eren la meua, no tinc per que criticar-la. El professor ho ha de fer a gust, i els alumnes aniran forts d'allò on el professor s'hi senti a gust. Des de l'administració no es pot dir: s'ha de canviar. La millor cosa que es pot fer des de l'administració és donar confiança al professor, i donar-li idees. Però dir, des de dalt, això s'explicarà d'aquesta manera, és un fracàs. No s'ha d'imposar res i s'ha de donar confiança al professorat.

Trobo que no importa tant l'ús de programes informàtics o introduir altres novetats, com la confiança i habilitats que tingui el professor. Hi ha professors que utilitzant pissarra són molt bons, que et fan una classe magistral fantàstica. Aleshores, que a la classe s'aprofiti que aquest professor s'explica tan be, si és que els alumnes estan atents, em refereixo. Així no hi ha cap problema. El professor s'hi ha de sentir a gust i els alumnes també, així hi ha aprenentatge.

L'ús d'ordinadors no ha donat millors resultats, i menys en geometria. Tenim el GeoGebra, però els professors no el fan servir i hauria de ser fonamental.

És una eina imponent. Ajudaria en la visualització, però hem de tenir present que les pantalles són planes i l'espai no és pla. No n'hi ha prou, però ajudaria a treballar en pla. La circumferència la pots fer amb el dit, amb un compàs per que rodes la mà, la pots fer en la pissarra per que mous el braços. Estàs utilitzant un concepte diferent de circumferència. O al pati amb un cordill molt llarg. Les coses s'han de viure, i la geometria és això i s'ha de fer de totes les maneres per tenir ben interioritzat el que és una circumferència. Tot això amb la pantalla de l'ordinador no ho aprens. Tot i que per mi és fonamental l'ús d'ordinadors, però el que passa és que aquí al MMACA volem fer allò que l'escola no té i d'entrada vam dir: ni vídeos ni coses que a internet hi siguin, ni ordinador; allò que ja no tenen no cal que ho fem. Aleshores fem l'experiment manual, amb material que normalment a l'escola no tenen i volem ajudar a l'escola des de fora l'escola. No és que tinguem prohibides les coses digitals, és que volem complementar i ens sembla que avui dia, ja hi és a tot arreu. És important abordar-ho per tots els costats.

El cervell té una part molt important dedicada a la psicomotricitat i és una part molt important de la intel·ligència. Fer moure les mans, els braços, fer construir coses; si no ho fas, estàs oblidant una part del cervell. El cervell també t'ajuda a construir imatges cerebrals al fer moure mans, braços; t'ajuda a acabar d'entendre les coses. Al llarg de la seva vida, un que ho hagi après així li vindran aquestes imatges per que va fer unes connexions neuronals en el seu temps que sempre més podrà utilitzar. Aconsegueixes que els alumnes vulguin aprendre i entenguin que fent una cosa aprenen i així estan més motivats. També s'han de divertir.

5. Potser el problema no radica en l'ensenyament sinó en la manera d'avaluar? (tipus de problema PISA, el que es busca obtenir amb aquestes proves: saber fer un examen o aprendre a raonar?)

Hi ha instituts que els hi quedaven unes hores lliures i les van utilitzar per practicar competències bàsiques, es preparaven per les proves PISA. I no han millorat, això vol dir que no han fet un canvi global. Les proves PISA poden induir un canvi global en l'ensenyament, però com això potser ho fa l'equip directiu o la coordinació pedagògica, el professorat passa per que ho fa a la seva manera. I com aquestes hores es dediquen a això, els professors ja no canvien la metodologia en les hores normals; fan el que fan sempre però aquelles altres hores ja els ajudaran de cara a les proves PISA. I no n'hi ha prou, per que si no ho fas lligat, no funciona. M'agraden les proves PISA per que estàs en un context i has de fer servir els teus recursos. Les competències bàsiques són, encara, massa acadèmiques.

En un curs vaig tenir una alumna que era la millor de la classe i que abans d'un examen se'm va posar a plorar, per que deia que no sabia fer combinatòria. D'això vaig aprendre dues coses: que els exàmens no serveixen per res, perquè aquell dia estudiarien més per aquella cosa, serà una petita motivació; i que la combinatòria no es pot ensenyar a determinades edats. O feia exàmens sorpresa, però ja s'ho veien venir. Feia diferents tipus d'exàmens i així es veia que tenien el concepte interioritzat. Una de les coses que pitjor es pot

fer és donar una determinada puntuació als exercicis, perquè tot depèn de la manera en que els resolguin. Jo els hi deia: un examen serveix per ensenyar-li al professor el que saps, però el que has de demostrar en un examen és que saps. En un examen ho pots fer tot malament, però amb que haguessis explicat amb text (cosa que en matemàtiques no ho fan) perquè fas cada cosa, aleshores ja veuries que aquella persona sap fer les coses, però que s'equivoca al fer les operacions. Aquesta persona se l'ha d'aprovar, encara que ho tingui tot malament. Jo sóc molt crític amb els exàmens. Jo no n'hauria fet mai.

6. Creu que ha variat l'enfocament de la geometria en els darrers anys?

No, no ho crec; ni tan sols la manera d'ensenyar-la, tot i que fa dos anys que no dono classe. Sí que he fet alguna formació de professorat, poca, i he vist com treballa el professorat, però, clar, els que venen a la formació són els que tenen més interès. Tota la vida he quedat parat dels companys de departament que, a vegades, no són ni matemàtics. No saben. En principi, les matemàtiques podrien no existir. Em sembla que és en l'informe de Delors, que es van plantejar que, com les calculadores ja ho fan tot, si vas a fer matemàtiques aplicades a altres assignatures, com ja estan aplicades, potser no fan falta. S'ho van estudiar, i van veure que sí són necessàries. Abans les matemàtiques fabricaven calculadors, tots érem calculadors per que s'havia de fer tot a mà. Fa 40 anys van aparèixer les calculadores i es van preguntar: "Què fan ara, els matemàtics? Ja no fan falta". Més o menys s'ho van plantejar, sabent quina era la resposta: "Sí fan falta. Les matemàtiques ensenyen a pensar. I les matemàtiques et fan intel·ligent". I la geometria i totes les altres coses que fem és tot allò que et deia de les connexions de les neurones; per tant les matemàtiques són fonamentals, però amb una visió diferent: primer interioritza i després aplica. Per això fan falta les matemàtiques: t'ensenyen a pensar.

7. S'hauria de fomentar treball entre companys? (Els que tenen menys dificultat ajudar als que en tenen més).

Totalment. Sempre. Jo havia fet grups heterogenis. Interacció a classe: fonamental. Discussions a classe: fonamental. Treball en parelles, 3,4: boníssim. Quan jo vaig començar a ensenyar es feia molt, però avui en dia costa: t'ho has de guardar per activitats que saps segur que aniran bé. Això ja és dinàmica de la classe.

8. Seria millor una atenció més individualitzada?

Sí. Una cosa més individualitzada va més bé. La diversitat ens dona les diferents maneres de fer-ho: potser tenir dos professors alhora a l'aula també és bona idea i fer pràctiques de laboratori de matemàtiques. És molt enriquidor. Jo ho feia un dia a la setmana i veia que alumnes que anaven molt malament durant el curs, en allò anaven bé. Com passa a vegades al MMACA, que alumnes que no són bons a classe al museu sí que ho són.

Tenir 2 professors a l'aula ajudaria, doncs si no han entès al primer professor que els havia explicat quelcom, demanaven l'explicació a l'altre, és a dir: més recursos. Al principi xoca, però després veus que és normal per que volen saber

més. És positiu. Volen aprofundir més. O per que a vegades no t'entenen a classe, i si els hi explica l'altre potser sí. També potenciàvem molt que quan un havia acabat la feina, s'aixequés i anés a explicar-li als altres. Avui en dia ho fan menys: són menys solidaris. Encara que els hi demanis, no volen. Són mandrosos. Abans es dinamitzava més. Jo m'ho proposava com a objectiu didàctic: que un alumne fos capaç d'explicar-li el que havia fet/après a un altre. Per que aprèn molt més i per que també es fa més solidari (fomenta més aspectes).

9. Qualitat i quantitat.

Abans les hores de classe eren 5; ara són 3 o 4. Segur que això té que haver afectat a la qualitat. A matemàtiques, com a tot, s'aprèn per immersió. Immersió també vol dir continuïtat, així que com menys continuïtat tinguis, no serà tan bo. El que està bé és, que quan passen uns dies sense matemàtiques, proposar que facin unes activitats per fer a casa. Activitats, que no exercicis. Amb que preparin la feina pel dia següent és suficient. Que sigui una espècie de deures suaus, en el sentit que no hi hagi dificultat de comprensió i que siguin divertits.

10. Quines activitats canviaria per tal d'aconseguir una millor comprensió?

Coses pràctiques, materials, de tocar, de manipular. Jo a les classes de geometria, feia 4 vessants. Tu tens un objecte geomètric, que té molta potencialitat. Que facis geometria, no vol dir que no facis aritmètica o combinatòria: pintant de colors les cares ja estàs fent combinatòria. Aleshores, jo deia:

- (a) Observar: això té tantes cares, tants vèrtexs...
- (b) Descriure'l: simetries, part literària per a que ho entengui un altre...
- (c) Dibuixar.
- (d) Construir

Pere Puig i Adam feia proves de llenguatge: dos alumnes passaven a la pissarra, cada un a una punta, un feia un dibuix i li explicava a l'altre com era per que no el veia. A més, la classe ho veu i participa una mica; o es pot fer per parelles a classe. Aquí hi ha expressió: podràs observar i saber explicar tot el que fas fet. El dibuix el poden haver fet ells o ser un objecte que tu portis, o del llibre, però és millor que el dibuixin ells per saber veure.

Al MMACA tenim mòduls per cecs, ells hi toquen per veure. Tocant, ells construeixen en el mateix lloc la cosa. Saber observar. Fer pràctiques amb els ulls embenats per descriure alguna cosa també pot ser interessant.

11. Què el va impulsar a crear un museu de matemàtiques? Arrel de quina idea va sorgir crear un museu de matemàtiques?

La idea jo l'he tingut des de fa molts i molts anys, però tampoc hi ha cap paternitat. Molta gent pot haver tingut aquesta idea. T'explico la història.

L'Anton Aubanell va venir a fer bombolles de sabó al meu institut i vam dir: "Mira, seria molt interessant que hi hagués un museu de matemàtiques". Vam

tenir la sort d'oferir-ho a la FEEMCAT. Va donar la casualitat que jo anava a Girona a fer taller de poliedres amb els professors de l'associació d'allà, i la presidenta era de la FEEMCAT. Jo per un costat, i l'Anton per un altre, li havíem dit i ens vam trobar. Va dir que sí, es va entusiasmar. De seguida vam fer la primera reunió. Aviat farà 10 anys (19 d'abril) que ho va aprovar la junta de la FEEMCAT i venia gent de cada una de les associacions.

Els objectius són els següents:

- (a) Que la societat vegi les matemàtiques d'una manera més assequible, que no els hi facin por (aspecte social).
- (b) Ajudar l'escola des de fora de l'escola, per això hem prioritzat allò que hem prioritzat.

Jo vaig demanar una llicència d'estudis i vaig dedicar-la a recórrer uns quants museus i vaig fer una memòria: "Aprentatge en un museu de matemàtiques". Allà ho explica tot, fins i tot les reunions que va tenir el grup nostre. L'any abans, l'Anton havia fet una llicència de 101 materials, que és més aprofitable que la meua per que la meua és més de veure com pot ser un museu. Ara en sé molt més, però llavors vaig començar a saber què era un museu. Vam anar veure el mathematicum. Els nostres fons són Pere Puig i Adam, Emma Castelnuovo (havia fet una exposició de matemàtiques amb els seus alumnes) i Maria Montessori (la geometria s'aprèn amb les mans). Aleshores, entenem que el museu és un lloc d'aprenentatge lliure: els monitors no han de fer classe, ells dinamitzen. Al MMACA no s'hi va a fer classe, ja fan classe a classe. El professor, si ve aquí, ja ho podrà aprofitar. Tampoc ens hem negat mai a que, si hi havia un mòdul molt didàctic, hi hagués un professor i el seu grup d'alumnes davant del mòdul, només fent aquell mòdul i fer una classe. No passa res, però la idea és que cada mòdul es faci, alhora, per dos alumnes, per a que així parlin entre ells del que van veient. També es pot fer en solitari, però està pensat per a fer-ho, com a mínim, per parelles.

Els materials per ells sols parlen, els colors són importants: quan hi ha color, quan no n'hi ha, per que atrau o no atrau; i, a vegades, tu l'hauràs provat per a que facin una cosa, però ells acaben fent una altra i això és important tenir-ho present per que el material els hi ha fet fer una altra cosa.

B.3 Entrevista a Josep Bujosa.

En Pep Bujosa és l'actual president de l'Associació Catalana de GeoGebra (ACG) i director de l'Institut Secretari Coloma, de Barcelona.

1. **Sovint, les matemàtiques es veuen com quelcom llunyà i inassolible, i això porta als alumnes a distanciar-se fins al punt de no voler entendre o esforçar per entendre. De quina manera podem ensenyar als alumnes que la geometria és a tot arreu i, així, apropar-los a la matemàtica?**

L'objectiu és fer-los veure que la geometria és a tot arreu, és un tema molt general. D'entrada, hi ha alumnes més predisposat que uns altres, no tots són iguals: això és una utopia que a la realitat es desmenteix totalment. Hi ha alumnes que, per molt que intentis donar-li la volta a tot, a ells no els hi interessa en absolut i, per tant, són difícils d'agafar, segons el meu punt de vista. Ara, la majoria, no són aquests, aquests són una minoria; estic convençut que tot allò que s'acosti més al que estan acostumats a tractar, doncs, és molt però no suficient. S'ha de fer el pas, per que sinó es quedaria en una cosa totalment de casos particulars i que, jo penso, també ha de ser capaç l'alumne, a una determinada edat, a no només pensar en els diferents tipus de finestres sinó en els diferents tipus de quadrilàters. D'aquest pas de l'abstracció. I això és el que costa més. Quedar-te en el nivell bàsic és al que, més o menys, pot arribar tothom; anar una mica més enllà ja depèn de l'habilitat de l'artista ja sigui el professor, o la metodologia.

L'alumnat d'ESO i batxillerat es passa moltes hores dins d'una classe escoltant moltes coses i, l'experiència ens diu que, quan ells es posen en marxa és quan realment aprenen. Les matemàtiques ho tenen, sobretot la geometria, que pot ser una part més activa que les altres, fins i tot, més activa que altres matèries. Perquè han de moure: hi ha manipulació material per una banda, positiva; per l'altra hi ha la manipulació no material, el GeoGebra. Són dues coses complementàries, i penso jo, que s'han de fer les dues coses. Manipulant, ells, veuen quina és la manera de construir el poliedre, quines eren les possibles encaixades de les peces. Què és el que es pot construir? Què és el que no es pot construir? Tot això ho veuen manipulant i provant.

2. **El currículum s'acaba molt aviat? És a dir, els alumnes surten amb prou coneixements de matemàtiques?**

Fa mal de dir perquè, d'entrada, no hem fet cap seguiment; no tenim dades objectives. Tot el que tenim són sensacions. A veure, en aquest centre, en aquest departament, procurem fer les coses molt manipulables, amb el GeoGebra i tal, però no tenim un estudi amb un centre que no ho faci i veure el què. Jo et podria dir que jo estic satisfet, però no sé si seria massa objectiu. Si realment és un estudi, un estudi vol dir dades i veure què passa. Per una altra banda, també s'ha de dir que la geometria és una mica la pobra de la família. De fet, hi ha dues pobres: l'estadística i la geometria. Hi ha anys, que una té més fortuna que l'altra. Per exemple, a selectivitat, que podria ser un lloc més objectiu, la geometria no hi compta per res. Perquè la geometria,

és la geometria analítica. Però la geometria sense coordenades es deixa de fer, pràcticament, a 2n d'ESO, amb alguna excepció. Ho treballem sobretot a 1r i 2n, i no hauria de ser així. Ho hauríem de mantenir una mica més.

3. Observant l'anàlisi dels resultats de geometria (<http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/orientacionsgeometria/>, 2n document), quins canvis creu que s'han produït a l'hora d'ensenyar per obtenir, al 2015, una puntuació quasi bé 10 punts per sota a la de l'any anterior?

És una mala notícia això, que vagi cap avall. Jo tinc la visió una miqueta curta, de l'entorn més proper. Jo diria que, nosaltres, hem millorat; però clar, no sé si això és molt significatiu respecte els altres. D'uns anys ençà, parlem d'anys, hem passat de no tenir GeoGebra a tenir-ne i, a mi, personalment, m'ha canviat la manera d'enfocar la geometria, totalment. Però no només la geometria, les matemàtiques en general. Per tant, des del meu punt de vista, trobo que han millorat, però això contradiu la part general. Però una cosa és el que pot fer un grup de professorat i l'altra cosa és el que es faci en general. A més, les proves PISA són de tota Espanya i pot haver moltes diferents escoles.

Hi ha moltes escoles que encara no han introduït el GeoGebra. Jo sóc el president de l'Associació Catalana de GeoGebra (ACG). Fa dos dies vam fer unes jornades i cada any tenim al voltant de 150 professors que s'apunten per estar un divendres i dissabte treballant. Però això no és exhaustiu, perquè no és tota la gent; i jo estic una mica decebut en aquest sentit. Parlant del GeoGebra, eh? Per exemple: en aquest departament som 4 persones: dos fixes; i els altres dos són places que, més o menys, va venint gent nova, que pot ser jove, també clar; doncs d'aquesta gent nova, poca coneix el GeoGebra tot i els esforços per fer jornades, per intentar difondre'l al màxim. No sé si, des de l'ACG, hem aconseguit el que volíem. Això és una autocrítica. No sé si caldria més propaganda. I ja no parlem de primària, primària és un món... Precisament, en aquestes jornades volíem incidir-hi molt, però ens han vingut, com a molt 20 professors de primària; i clar, tenint en compte que són molts més que nosaltres, alguna cosa no fem bé. Ara, la gent que ho prova i s'hi posa, veuen evident que el GeoGebra dóna unes facilitats; més que res que el GeoGebra et permet, a partir de casos particulars, generalitzar cap a casos generals (fent canvis arrossegant objectes, observar les propietats que es mantenen). Això és formidable per que ni tan sols amb les peces ho pots fer. No pots modificar el plàstic, ni la fusta! Amb el GeoGebra sí, perquè pots trencar la figura, i te un potencialment enorme, visualment i a nivell d'aprenentatge també.

4. Creu que un canvi en la manera d'ensenyar invertiria les dades? (més dinàmica, més amena, menys teòrica, més participativa, més didàctica... Canviar la metodologia, vaja.)

Jo crec que sí, però és el que penso i desitjo només. A més, penso que la geometria és una de les parts en que més es pot fer. L'àlgebra és més mecànica. La geometria sí que dóna de sí fer manipulacions, mesures, etc. Clar, si has

de treballar segons quines coses, és més complicat trobar acció; en canvi, en la geometria, és més fàcil trobar acció.

5. Potser el problema no radica en l'ensenyament sinó en la manera d'avaluar? (tipus de problema PISA, el que es busca obtenir amb aquestes proves: saber fer un examen o aprendre a raonar?)

Segurament. És un tema que, personalment, sempre m'ha costat molt. Innovar l'avaluació paral·lelament a la innovació del dia a dia. Això, ho reconec, per aquí podria anar bastant la cosa per que és difícil. Per que clar, tu pots avaluar el treball en grup, com treballen ells i després la part que ha fet cadascú... Avui en dia també hi ha mecanismes per fer-ho: les famoses rúbriques, per exemple, però tot i així, podem dir que això seria la pota coixa del sistema. Estaria d'acord amb tu. Segurament, l'avaluació s'hauria de millorar, canviar.

Per a la geometria, canviar-ho, seria més fàcil perquè els exàmens de geometria així més clàssics són molt fàcils segons com ho poses. Si tu els poses una examen amb el GeoGebra, que han de construir una determinada cosa, han de posar més mecanismes en marxa i, per exemple, podríem avaluar aquest procés, i no sempre ho hem fet. No sempre ho hem fet, això és una autocrítica. Així com totes les activitats d'aprenentatge són clarament més cap aquí, diguem-ne que, a la cua del tren està això. Anem fent, que no es pot abordar tot alhora.

6. Creu que ha variat l'enfocament de la geometria en els darrers anys?

Sí. També té a veure amb l'entrada del GeoGebra. Per un costat això, i per l'altre, sobretot a secundària, que hem après a utilitzar materials manipulables. Això sempre ho veies com una cosa més de nens petits, de primària. Ara es manipula més perquè hi ha hagut un corrent a favor d'això. Així que penso que en això hem millorat, perquè hem après a valorar la manipulació. La gran obertura de portes va ser el GeoGebra, trobo.

A Catalunya el vam descobrir el curs 2004-2005 i vaig tenir sort de poder participar activament en la difusió de la primera vegada que vam veure el GeoGebra. Ho vam donar a conèixer un company i jo. El programa ve d'un austríac, Marcus Hohenwarter, que el va fer pel treball de final de màster. El va penjar al 2000-2001, algú el va descobrir i el va començar a conèixer. Aquí va arribar poc a poc al 2004. De boca-orella. Llavors va haver la creació de ACG, després les jornades, que ja portem 8 anys; publicacions...

7. S'hauria de fomentar treball entre companys? (Els que tenen menys dificultat ajudar als que en tenen més).

Per descomptat. De fet, s'intenta que sigui un treball on es col·labori. Aquí estem en contra del 1per1. Tenim 4 aules d'informàtica bastant ben dotades, que és com si fossin el laboratori per altres assignatures, i el fet que estiguin dos treballant alhora és normal. Així ja ho fomentes. Després, a casa seva, també ho poden treballar individualment. Aquí ja ens agrada que no sigui un per ordinador.

No fem lliures els grups, els manipulem nosaltres. Clar, tampoc pot haver-hi

una gran diferència. Pot haver-hi una gran diferència quan l'objectiu és que un determinat alumne que vagi més avançat ajudi a un altre que no ho va tant, però en general quan és un procés d'aprenentatge de coses noves, hem de procurar que siguin més o menys equilibrats.

8. Seria millor una atenció més individualitzada? Per detectar problemes, per exemple.

Sí, per descomptat. Això ho intentem fer, malgrat el nombre d'alumnes que tenim. També s'ha de dir que el treball amb ordinador et permet més veure aquestes coses per que quan fan alguna pràctica deixen la feina visible al moodle, i quan ho revises te n'adones més de les diferències que hi ha pogut haver. I, a més a més, el fet de que es pugui fer en equip també pot fer que les dificultats individuals que pot tenir l'alumnat es redueixin, perquè un company el pot ajudar. Però una cosa és la teoria i l'altra és que es pugui fer, i que se sapiga fer de veritat. I aquí està la gràcia, gestionar una aula a aquest nivell.

Seria ideal poder focalitzar més l'atenció en cada alumne, per saber on té més dificultats, però no sempre es pot aconseguir. Si fossin menys alumnes aniria encara millor. Però clar, a la ESO estem al voltant de 30 alumnes per aula.

9. Qualitat i quantitat.

Ha millorat una mica. Trobo que no està gens malament ara per ara. A 1r d'ESO són 3h per setmana, però a la resta de cursos són 4h per setmana; però fins fa un parell d'anys tots feien 3 només. Però aquí hem fet algunes maniobres: fins l'any passat, a 1r d'ESO teníem una hora més que li dèiem *càlcul mental*. Això anava molt bé, perquè el càlcul mental no s'ha de deixar mai. Es refien de la calculadora, però després no la saben utilitzar per que no saben quina ordre li han de donar als dits.

Ara, a nivell de 2n, 3r i 4t d'ESO, fem 1h més i el currículum, pràcticament, no s'ha tocat. Una mica, però molt poc. En aquest centre acabem el currículum. Llavors, clar, amb aquest augment de l'hora per setmana, la qualitat ha millorat perquè no cal fer les coses tant ràpidament, i això implica millor qualitat. Quan intentes una cosa "diferent" és quan pots o vols invertir més temps i això implica una despesa de temps; així que si tens més hores, te'n surts millor.

10. Quines activitats canviaria per tal d'aconseguir una millor comprensió?

És el que dèiem abans: hi ha l'entorn proper a l'alumne en quant a aquelles formes geomètriques que pot observar, després, la variació dels models que observa: manipulacions materials o no materials, fer generalitzacions. Hem començat de l'exterior i hem anat interioritzant perquè cada vegada que fem un procés d'aquest vol dir interioritzar propietats i anar per aquí. Això és el que s'intenta. Passar del cas concret a l'abstracte. I més en la geometria que, quan toques, és un cas particular i aleshores el GeoGebra t'ajuda a generalitzar i, a partir d'aquí ja agafes la idea més abstracte, que és la idea de la geometria. Com una part del pensament humà, per entendre'ns.

Les còniques com a tals s'estudien a batxillerat. Però això no implica que

es pugui simular el tall del con i això es pot fer amb GeoGebra i amb peces, però amb peces és més complicat; amb GeoGebra ho tenim muntat i es pot fer. Sobretot es fa a batxillerat. A l'ESO s'estudia més la circumferència i la paràbola, aquesta última més des d'un punt de vista funcional i no tant geomètric.

T'he de dir que nosaltres tendim a pintar les coses molt maques, d'això també has de ser conscient. En el dia a dia no és tan senzill. A vegades, t'has d'enfrontar amb realitats i situacions de l'aula que no et permeten desenvolupar tots els teus desitjos. Una cosa és la teoria, però posar-la en pràctica no és tan senzill. S'intenta, és clar. Però a vegades, la sensació que donem els docents és que, com que ens agrada, tot és meravellós però les coses no ho són tant.

B.4 Entrevista a Joan Carles Naranjo.

El doctor Joan Carles Naranjo és professor de Geometria Lineal i Projectiva a la Universitat de Barcelona.

1. **Sovint, les matemàtiques es veuen com quelcom llunyà i inassolible, i això porta als alumnes a distanciar-se fins al punt de no voler entendre o esforçar per entendre. De quina manera podem ensenyar als alumnes que la geometria és a tot arreu i, així, apropar-los a la matemàtica?**

Això prové ja de la manera com s'ensenya les matemàtiques des de molt avall. Tindria a veure amb quina formació tenen els mestres; majoritàriament és un tipus d'alumne que quan va fer formació de professorat no era massa procliu a interessar-se per les ciències, i menys les matemàtiques, i això ja és un problema; perquè si el professor ja no té la motivació, difícilment la podrà transmetre. A secundària també s'haurien de canviar moltes coses; i aquí segurament també. Si comencem per la base, jo crec que, en general, els temaris estan molt carregats. Crec que el problema no és la quantitat de coneixements sinó la qualitat dels coneixements. Moltes vegades veus els temaris de secundària i dius: "Fan tot això?". Ja no només parlant de matemàtiques, sinó de les altres assignatures també. Potser tindria més importància que es parlessin d'experiències vitals, de viatges que permetin situar les coses més bàsiques; que tot això sigui més vivencial. Amb les matemàtiques passa igual: s'han de posar en context, els problemes s'han de situar.

La geometria és una de les branques de les matemàtiques que més s'ha anat despoblant dels temaris de secundària. Hem passat, pràcticament, de que les matemàtiques semblaven que era geometria a que ara ja no es fan ni còniques; de geometria analítica es toca la plana, es toca una mica la geometria al batxillerat amb l'excusa que estan resolent sistemes d'equacions i s'interpreten, però no és ben bé l'esperit de fer geometria: és amb l'esperit d'interpretar equacions; queda una mica la trigonometria, que no és ben bé geometria, però que poden treballar amb triangles, resolució de problemes, mesura de distàncies inabastables... Però, en general, hi ha molt poca geometria, problema que també afecta a altres assignatures.

Aquí a la facultat, per sort, els alumnes estan molt motivats.

2. **Creu que un canvi en la manera d'ensenyar invertiria les dades? (més dinàmica, més amena, menys teòrica, més participativa, més didàctica... Canviar la metodologia, vaja.)**

Segurament s'han de fer molts canvis en la manera d'ensenyar a la universitat, tant o més que en altres llocs. Una de les coses que podria fer factible canviar la manera d'ensenyar passaria per implicar més l'alumnat. L'alumnat, a vegades, té dinàmiques de no participació.

Per exemple: a Itàlia, a tothom se l'examina oralment de les assignatures. Això pot semblar una tonteria o pot semblar, fins i tot, una cosa pesadíssima, tant pels professors com pels alumnes. Però el fet de verbalitzar el que has après t'obliga a aprendre d'una altra manera i, pel que a mi m'arriba i pel que

veig, la gent està molt més acostumada a interrompre i preguntar, participar en el procés d'aprenentatge d'una manera activa.

Una manera d'avaluar diferentment la teoria seria quedar en un dia per fer un petit examen de teoria, discutint més que escrivint; però requereix una participació a la que no estem acostumats i que no sé si funcionaria, perquè això s'hauria de començar a treballar molt abans. Ja hem creat un perfil d'alumne, per dir-ho d'alguna manera. Com a professor, intentes fer alguna cosa més dinàmica, i veus que l'alumne es posa com en guàrdia, es refugia darrere de la carpeta com dient: explica el que vulguis, que jo ho anoto i ja m'ho miraré quan tingui temps, però no m'obliguis a intervenir per que vol dir que he de fer aquest esforç i he de portar l'assignatura al dia. Això s'ha de trencar d'alguna manera, i no només en una assignatura. Són uns hàbits de treball que s'haurien de canviar d'alguna manera com, per exemple, descarregant alguns continguts. Fer continguts més reduïts, o igual de profunditat però menys quantitat per treballar d'una altra manera.

Ja intentem que les classes de laboratoris siguin més dinàmiques.

Quan estàs molt acostumat a que participar és quelcom positiu, tot i que comporti l'error, ja tens l'experiència de que no és un problema (es premia al participant encara que sigui contestant preguntes de manera errònia). Fa que es perdi la por. Però com no tenim aquesta cultura, sembla que només es pugui participar per dir una cosa molt encertada perquè sinó quedes com que no en saps. I això no sé com es canvia, potser es canvia des de la primària. Quan parles amb gent d'altres universitats veus que tenen el mateix problema i no sembla que tingui una solució específica, i per geometria encara menys. Potser algunes assignatures de geometria, l'única avantatge que poden tenir és que poden ser visuals: es pot recórrer a material visual: GeoGebra mateix, per visualitzar construccions de còniques, o de corbes i superfícies; fer un vídeo de com es mou... Però no està massa implementat.

Tenim un problema transversal a aquest, però que no es pot obviar, que és real. Hi ha una política de reemplaçament de professorat bastant pobra d'abans de la crisi. La crisi ha fet que hagi entrat molt poc professorat jove i, llavors, la mitjana d'edat del professorat que estem donant classes cada vegada és més alta i ara és massa alta. Aleshores, el professorat que podria tenir més habilitat, més inventiva i més competències audiovisuals, no hi és. Que també podem reciclar-nos; que dir que no es pot fer és una excusa barata, però és evident que algú que entra amb 30 anys i que ha vist unes coses diferents i que té unes habilitats diferents, tindrà una iniciativa diferent a la que pot tenir algú que porta 20 anys fent la mateixa assignatura, per molt que sigui autocrític i revisis les teves pràctiques docents.

Per exemple, a les classes de problemes: no és el mateix que tu estiguis fent la teva classe com a alumne i et vingui al laboratori un doctorand de 28 anys, que està acabant la tesi i que t'entusiasma les primeres classes que fa i que el de teoria té 65 i el de problemes 52. Això està passant ara per falta de relleu generacional. Clar, no és culpa ni vostra ni nostra; és una situació global que també es reflecteix en el que es fa a les aules.

3. Veient com arriben de preparats els alumnes, creus que ha variat l'enfocament de la geometria en els darrers anys?

A mi m'agradaria que al batxillerat es fes una geometria més de reflexió, no diré sintètica per que és una mica massa ambiciós, però si de descriure la geometria com un element d'interacció amb l'arquitectura, la física, amb la vida real... Que no es quedi tot amb la trigonometria. En canvi, ara mateix només entra a través de les equacions, des d'un punt de vista molt algebraic i, al mateix temps, enamora poc, respecte la geometria. El mateix fet de fer còniques és una cosa molt rica, que té molt a veure amb arquitectura; però clar, també requereix que tot això es treballi.

4. Creus que el nivell amb el que els estudiants de batxillerat arriben a la universitat és suficient?

És un tema etern a la universitat. Fa 25 anys que estic a la universitat i sempre sento la queixa permanent del que saben els alumnes; i és igual que passin les generacions. És una cosa inherent. "Per que no saben prou, o per que abans es feien més demostracions...". Això és veritat. Però potser sí que és veritat que si a un alumne se l'ha treballat fent demostracions on ha reflexionat sobre les coses, té una maduresa diferent. Potser sí que notes que manca això, que ha mancat sempre. Penses que, si potser això es fes... Però manca més això que no pas el contingut.

Més que treballar una part més teòrica, s'hauria de treballar l'actitud, la reflexió; de pensar la matemàtica críticament.

Igual has treballat un temari molt curt, però sobre aquell temari t'has parat a pensar què estàs fent, i potser de forma dinàmica. Tot això ho estàs incorporant al teu bagatge però potser no t'han explicat un teorema en concret. Al final, si els coneixements i la formació els tens... Si analitzes fredament, un alumne a l'escola fa 3 ó 4 hores a la setmana de matemàtiques, aquí els alumnes en fan 20; per tant, si els alumnes que arriben tinguessin un dèficit de que no han treballat quelcom en concret, amb la quantitat d'hores que fem, en un mes podrien fer tot el que al batxillerat no han fet. Que sàpiga més o menys coses comparant la quantitat d'hores setmanals que fem de matemàtiques amb les que els hi fan fer, haurien de ser capaços de tapar tots els forats en poc temps. Quan, a més, aquestes hores són fetes amb alumnes amb interessos diversos, que un està pensant en la biologia, l'altre vol ser metge... Aquí els tens tots interessats en les matemàtiques, vol dir que encara pots treballar més.

Per tant, no és un problema de saber una mica més o una mica menys, és un problema de com se li ha transmès el coneixement de matemàtiques. Són més important les aptituds. L'alumne que no ha pogut fer estadística al batxillerat i que després entra aquí, segur que en el primer mes de l'assignatura d'Introducció a l'estadística ha pogut fer 30 vegades la poqueta estadística que està en els temaris de batxillerat. Per tant, no és aquest el problema.

El que passa també és que hi ha un salt molt bèstia entre com s'ensenya a les escoles i com s'ensenya a les universitats.

L'ideal seria que allà fessin el que puguin per que tenen un públic molt variat

amb interessos molt diversos i trobo que, potser no és adient que avancin en la direcció de fer les coses com fem nosaltres de teoremes, per exemple.

És el que dèiem: que ho facin més vivencial, més en context... Ara, el salt teòric, en algun moment, s'ha de fer. Potser és massa brusc, i potser també una mica irreal perquè tal com ho expliquem nosaltres, i aquesta és una cosa que potser ens costa reeducar-nos, no és com realment es treballen les matemàtiques. Tu expliques tal teorema, la primera cosa que fas del tema tal; però la història de les matemàtiques, de l'evolució de les coses, no és aquesta. Normalment, el que hi ha, és un problema concret i sobre aquell problema concret es busca una solució; la solució moltes vegades es restringeix a aquell problema, després ha vingut algú i se n'ha adonat de que aquella solució o aquell enunciat val més en general, s'ha anat generalitzant i al final, la teoria s'acaba formalitzant, s'acaba trobant la manera que funciona més. És com un engranatge que s'ha anat polint; i quan ensenyes l'engrenatge polit potser sí que el mires com un mecanisme de rellotgeria i dius: amb aquell lema s'utilitza allò, aquesta és la demostració més curta després de mil demostracions del mateix al llarg de l'història. Potser hauríem d'impregnar més que el formalisme hi arribi, però que quan arriba el formalisme és per que primer has transmès la necessitat. Però clar, tornant a abans, això vol dir fer menys temari per que si en el temari t'has d'entretenir a motivar-lo, a allargar-lo i arribar a tot això...

Una mostra molt clara és que els teoremes que recordes d'una manera més clara són aquells que t'han posat un exemple previ, un cas particular, diguem. Ho visualitzes i, llavors, com et posen el teorema, que és molt més general, si t'has quedat amb aquella fotografia del cas particular, normalment, aquell teorema, el recordes. Mentre que si ho fas al revés, a no ser que l'hagis de treballar molt i fer molt problemes, no passa tant.

5. S'hauria de fomentar treball entre companys? (Els que tenen menys dificultat ajudar als que en tenen més).

Potser serviria en els laboratoris, potser no el potenciem prou. Quan ens plantejem com formar als nostres alumnes, entren molts factors que, normalment, oblidem. És a dir, quan ens posem a fer un pla d'estudis, reflexionem sobre el que posem a dins de cada assignatura i quins són els coneixements que volem que assoleixin els alumnes al final. És el que fem tots, jo el primer. Sí és cert que, potser perquè m'han caigut a sobre processos d'avaluació i d'acreditació; deixem de banda les habilitats que té un quan acaba. Clar que convindria que sabessis anglès, però nosaltres no som professors d'anglès; com a molt, el que podem fer, és premiar a qui faci el treball final de grau en anglès amb millor nota, això ho incentiva. Però hi ha d'altres coses que quan surts d'aquí i te'n vas a la vida real i treballes, són crucials; i el treball en equip n'és una, i expressar-se bé oralment i per escrit és una altra. Això últim, a les classes de laboratori, la gent participa en els problemes i encara es pot pensar que es treballa; en el Treball Final de Grau es treballa molt perquè és una memòria molt llarga, s'ha de pensar molt bé com s'escriu i després l'has de defensar públicament i això ja és un valor en sí mateix; més que el contingut del tre-

ball.

Ara, s'hauria de treballar molt més. No sé com, perquè el contingut matemàtic està molt pensat per la reflexió individual, però hi ha moltes coses que es podrien fer en grup. S'hauria d'incentivar més del que s'incentiva per la conseqüència final que té: no podem enviar cada any, a la societat, 50 petits individus que són incapaços d'interaccionar; que són molt capaços d'analitzar un problema individualment però que quan el poses amb algú que no pensa com ell, no sap com relacionar-se. I això és un problema quan arriben a les empreses, per que hi ha empreses on els equips són multidisciplinaris. Reconeixes el que és matemàtic per que dius "Ostres, aquest pensa com jo", això a la vida real ho notes. Aquesta flexibilitat és necessària, hem d'empènyer més a la gent a treballar en grup; ara, quines pràctiques docents caldria introduir? Es podria fer a les classes de laboratori, que la gent treballés de 2 en 2; de 3 en 3 o que exposi un, amb gent que no es coneix. Hi ha assignatures que es presten més que d'altres. És més complicat fer-ho a les bàsiques dels dos primers cursos.

6. A l'hora de detectar problemes que tenen els alumnes quan arriben aquí, seria millor una atenció més individualitzada?

Potser sí, però això requeriria que ells es volguessin deixar. Fer tutories és un intent molt petit en aquesta direcció, detectar els problemes que tenen els alumnes, però per l'experiència que tenim, en general, és que quan l'alumne té un problema, l'últim que vol és que el resolgui el professor. A vegades, a primer, pots detectar si tenen mancances molt fortes però quan li dius el que podria fer per millorar-ho o li dius que vingui a les hores de consulta, l'alumne es retrau.

Potser tornem a entrar en la diferència d'edat, professorat jove... En alguns llocs s'intenta fer, a informàtica, per exemple; s'intenta buscar beques de la generalitat per a que alumnes d'últims cursos siguin els tutors, o facin una mica de suport, a alumnes de primer. A informàtica s'ha començat a fer i no funciona malament, potser seria més continuar en aquesta direcció que no pas oferir una atenció més individualitzada per part nostra (del professorat); que fossin alumnes d'últim curs, becaris, de màster o doctorands que ho facin, no tant un suport d'anar a classe, sinó de fer atencions individualitzades als alumnes que han passat una etapa complicada pel que sigui. Hi ha alumnes que tenen una actitud fantàstica, estan motivats i mostren molt d'interès però que tenen un nivell molt baix.

El problema és vehicular tot això, fer publicitat i que els alumnes no escapin d'aquesta oportunitat. No sé si va amb el caràcter o amb la tradició d'aprenentatge que porten al darrere.

7. Qualitat i quantitat. (Pla Bolonya ha reduït les hores de classes però no tant la matèria).

El temari no s'ha reduït proporcionalment al nombre d'hores que han quedat. S'hauria d'estudiar cas per cas si això ha afectat a la qualitat: crec que hi ha assignatures en que sí que s'ha fet, però hi ha una cosa que no depèn tant d'això que estàs dient: el nombre d'hores no ha canviat tant. Potser

abans es feien 21 ó 22 i ara es fan 20 a la setmana. El que ha canviat és com es distribueixen aquestes hores. L'idea inicial era fer 4 assignatures de 5h a la setmana per semestre però quasi bé se'ns va imposar des de fora que les assignatures tinguessin un màxim de 4h i aleshores vam passar a fer 5 de 4h. Això et permet fer coses més variades, i es fan coses més variades de les que es feien abans: història, grafs... Més assignatures de matemàtica discreta també estan agafant més protagonisme, però el preu és que no és el mateix fer poquetes hores de moltes coses, perquè encara que aquestes es facin proporcionalment al temari que toca, aquesta diversitat complica que l'alumne centri la seva atenció i s'aprèn tot més superficialment... Crec que és el que dóna la sensació de que s'estan carregant les coses. Estic segur de que en alguna assignatura han intentat ficar en 4h el que abans ficaven en les hores que tenien. Quan això passa, que normalment passa al principi, el que acaba passant és que la realitat s'acaba imposant. Que diguis: "jo tinc un temari i he de retallar un 20%", i mirant, doncs acabes retallant només un 10% i que després arribes a classe i tens temps d'explicar el que et dona temps a explicar i acaben caient les coses soles. S'acaba revisant, però no sempre. Ara et parlo com equip deganal en col·laboració amb el cap d'estudis, que estem molt a sobre de les assignatures que veiem que estan produint taps, que és un mal símptoma. Quan això passa doncs intentem incidir: canviar el professor, oferir assignatures cada semestre... Això últim ho estem intentant fer amb totes les assignatures, però hem començat pels llocs més crítics.

A vegades es cau en una cosa que tapa el problema però que és perillosa: jo intento fer tota la matèria, perquè em quedo més tranquil, perquè explico tot però com que això és inviable, després poso uns exàmens molt estàndards, un problema molt tipus amb la qual cosa el nombre d'aprovat no es veu tan afectat però és una mica mentida; per que el que l'alumnat acaba aprenent és que per l'examen s'han de saber fer els problemes tipus amb la qual cosa, la qualitat, evidentment, ha baixat. No ha servit de res posar tot allò a la pissarra perquè només ho ha seguit el que ho està posant a la pissarra.

Una facultat és molt complicada per que entren molts paràmetres transversals:

Primer: el professorat. La plaça fixa que té el professorat, la té per la seva qualitat investigadora, no per la seva qualitat docent. Com aquí hi ha la doble vessant de docent i d'investigador, doncs el que es mira és la quantitat de publicacions, la seva qualitat; i sí que intervé una mica que t'expliqui alguna cosa i vegis com ho fa, però et pots trobar amb gent que realment no li agrada: no que no serveixi, simplement que no li agrada; que el que li agrada és la recerca i llavors dedica un gran temps a la recerca i intenta minimitzar el que dedica a la docència, aleshores tot el que sigui activitats de reciclatge del professorat per aprendre noves tècniques o altres activitats, doncs té molta resistència. El professorat el pots moure, però no farà mal a un curs, però el farà en un altre, saps? Són els que són.

Segon: fins i tot els que tenen vocació per la docència, que són molts, la concepció del que és la docència i la concepció del que és formar un matemàtic és molt diferent. Molta gent té al cap que un matemàtic és una cosa monolítica

i que tots els que acaben la carrera han de tenir aquesta formació i que està molt enfocada cap a la recerca. Això és una cosa que costa molt de refutar, perquè és injusta i no s'hauria d'anar en aquesta direcció. Haurien de deixar, quasi al final de la formació, a tots en les mateixes disposicions com si tots anessin a fer recerca, com a mínim màster i potser doctorat. Clar, això és una mica irreal. A l'hora de la veritat un percentatge relativament petit d'alumnes continua estudis; hauríem de desitjar que la majoria fessin un màster d'un tipus o d'un altre, però la majoria no es dedica a la recerca. Aleshores, formar-los pensant només en això és una mica ridícul.

Per exemple, per posar el focus en un problema que tenim dins de la facultat, això és una opinió molt personal: la majoria d'optatives que fem estan molt dedicades com si fos introducció a àrees de recerca i això pot ser molt interessant i molt motivador, però entre cometes, inútil, perquè si tu fas una assignatura introductòria a tal teoria, pensant que el recorregut del teu alumne és fer la troncalitat, aprendre aquella introducció, que l'aprofundirà durant el màster i, després si vol fer el doctorat, ja sabrà molt d'allò... La primera barrera que et trobes és que quan arriba al màster, al màster venen alumnes de molts llocs diferents. Encara que estigui el teu alumne allà dintre, el faràs començar des de zero aquella teoria de tal perquè els demès no ho sabran, aleshores tampoc haurà servit de res. O ho repeteixes i l'alumne està fent dues vegades el mateix; o fas una cosa absolutament diferent, però el que no pots fer és una continuació perquè no pots suposar que la gent sap això. Per tant, valdria més que les optatives fossin més transversals, que tinguessin un punt de vista més terminal.

Això faria que les optatives fossin, probablement, de menys nivell, no dic que no; però sí serien més atractives i arrodonirien més el coneixement general de l'alumne, i així no hi haurien tants alumnes que s'escaparien cap a les mencions i farien les optatives nostres. Això té moltes resistències, per que els professors veuen que en algunes optatives és l'únic lloc on els alumnes poden aprendre certes coses i li pot servir per després fer el màster, o per motivar-lo. Aquesta és una discussió que no tenim resolta, els punts de vista, com pots comprendre, són molt variats. Jo t'he explicat el meu, però molts poden divergir.

El 80% dels alumnes que acaben la carrera es dediquen a la docència de secundària. I si no és docència, és empresa, i si no és empresa, és dades.

Almenys, pel que fa a la part que es vol dedicar a la docència de matemàtiques a l'institut, d'optatives només hi ha didàctica; i és una entre, ben bé, 6 o 7 que pots escollir.

Però és que, a més a més, hi ha una didàctica però la resta tampoc estan dedicades a coses que tinguin a veure amb el que fa un professional. Per desgràcia, cada vegada tenim menys estudiants interessats en la didàctica. La mostra és que vas al màster de formació de professorat de secundària de matemàtiques i hi ha pocs matemàtics, n'hi ha una miqueta més, però són pocs. La majoria venen d'altres carreres, perquè els que acaben la carrera de matemàtiques, moltes vegades, troben amb facilitat feines d'informàtic amb biaix una miqueta científic, de dades, finances... Empreses variadíssimes.

Tampoc acaben tants matemàtics, i hi ha un fotimer d'empreses molt variat que, com a molt agafen 1 o 2, però com són tantes...

Quants anys fa que no hi ha oposicions per professor d'institut? Clar, la majoria d'ells veuen que igual encara trigaran anys en fer-les i no hi veuen futur. A més, s'estan jubilant la tira; així que, o comencen a fer oposicions, o no tindran matemàtics. Però aquests tampoc estan interessats en la recerca, amb la qual cosa, aquestes optatives tampoc els interessin. Els interessa més una optativa de finances, o d'informàtica aplicada.

Pots veure que hi ha molts paràmetres a la facultat, a totes, vaja; i fer-los quadrar és complicat.

8. Quines activitats canviaria per tal d'aconseguir una millor comprensió?

Introduiria activitats que involucressin la visualització del que s'està treballant. Hi ha un tipus de geometria plana que, per treballar-la, el GeoGebra és fantàstic. Però tornem al tema del temps: m'encantaria poder-lo utilitzar a geometria projectiva però el temari és el que és. Aquest any m'agradaria poder fer alguna sessió de GeoGebra, per poder visualitzar alguns teoremes de còniques. Abans fèiem una optativa de geometria clàssica (Complements de geometria projectiva) i es basava molt en el GeoGebra. Ja no hi és per que ens van obligar des de dalt a reduir el nombre d'optatives. Almenys, en àlgebra i geometria, estem agrupats per grups de recerca, no com a grups docents: estan els que treballen geometria algebraica, teoria de nombres, etc. La inèrcia de cada grup va ser "ostres, que no em toquin la introducció a tal". Com moltes vegades es pensen les optatives com a afegits, doncs els complements es van sacrificar, tot i tenir molt d'èxit, i es van deixar les varietats algebraiques. Era una assignatura amb contingut geomètric molt fort i s'aprenia una geometria amb aroma una mica clàssic, però molt formatiu, sobretot si després feies didàctica de la geometria a batxillerat. Ja m'agradaria que es recuperés. Ajudaria a una comprensió de les geometries prèvies.

El paper de les optatives és important, explica una mica el moment en que estem. L'únic que et puc prometre és que continuaré lluitant, perquè crec que ens estem equivocant, perquè cada cop que hi ha una matrícula veiem que hi ha pocs estudiants que es matriculin de les optatives de matemàtiques. Hi ha un alt percentatge de gent que acaba, que ha fet dobles titulacions i ells quasi bé no fan optatives perquè se les gasten fent la troncalitat de l'altra carrera per no fer tants crèdits, perquè llavors seria etern.

Si restes tots els de doble titulacions que quasi no fan optatives ja no hi ha tants alumnes per fer optatives, però, si a més a més, a aquests alumnes els poses optatives amb caire de recerca, doncs canvien de menció i se'n van a economia o informàtica i així aprenen una altra cosa. Podria passar que oferíssim unes optatives més atractives i tot i amb això se n'anessin a fer aquestes altres perquè els hi donen unes sortides professionals més àmplies, però almenys ens quedariem tranquils de que fem el que podem per atreure'ls.

9. Quins aspectes de la geometria s'han de treballar més des de secundària?

Trobo que s'haurien de recuperar les còniques, pràcticament han desaparegut dels temaris. Treballar una mica més sintèticament: demostrar o treballar amb figures però no estar amb l'equació sempre a la mà, amb arguments; que és el que fan, per exemple, a dibuix tècnic. Seria interessant que això ho fessin a matemàtiques, amb una estructura més matematitzada i trobo que això reforçaria el gust de la geometria dels alumnes abans de venir aquí.

No m'atreveixo ni a suggerir un treball conjunt! És una cosa que, tornant als treballs en grup, no som els únics que tenen aquest problema. Quan tu veus les dinàmiques de treball, et sorprèn l'incapacitat que tenen de treballar en grup en la majoria de seminaris. També seria bo per l'alumne veure que el professorat va coordinat. Seria ideal que les assignatures anessin coordinades, sobretot a matemàtiques, que estàs tocant objectes que al final t'influeixen en altres. Seria crucial a nivell de comprensió. Però no sé on es pot arreglar, o si ja entra en joc una manca de governances: quines capacitats reals té un equip directiu; imposar unes maneres de treballar dins d'un centre.

10. Els objectius d'aprenentatge de geometria lineal són molt diferents als d'ESO/Batxillerat i demanen un nivell d'abstracció que a l'escola no es té. S'haurien de tractar aquests conceptes abans? (conceptes d'espai vectorial, espai afí, desplaçaments d'espais afins/vectorials euclidians, grups de matrius ortogonals...)

Sí, a mi em sembla bé que des del context a batxillerat i, sobretot a l'ESO, sempre s'ha de passar de lo concret a lo abstracte, és el que jo penso. Aquest trànsit s'ha de començar allà i acabar aquí. Aquí, moltes vegades, comença l'abstracte per dalt i allà no surten de lo concret. Això ja és un tema de coordinar temaris.

En algun moment s'ha decidit que els alumnes, a batxillerat, no estan madurs per veure demostracions; és un procés que s'ha anat perdent de mica en mica i hem passat a l'altre extrem. Quan vaig acabar el batxillerat als '80, no et diré que havia vist tot el que es feia a primer de carrera, però sí que, almenys, fins a Taylor estava tot demostrat. Ara et trobes amb alumnes que pràcticament no han vist ni una demostració en tot el batxillerat, i això és l'altre extrem. Clar, hi hauria d'haver algun petit pas intermig. Sí que es van fent petites abstraccions: gràfics, discret, continu, etc. L'altra qüestió és l'abstracció del pensament: raonar les coses. Fins i tot penso que això es podria treballar abans de tenir elements abstractes, fent més reflexió i menys contingut. És una cosa, jo crec, que ve de molt avall. Que les coses no són per que sí, que no tot s'ha de memoritzar... Hi ha un moment que la memòria s'ha d'utilitzar, no és que sigui antimemòria, però sí que moltes coses es poden raonar i fer descobrir als alumnes. Això del pensament crític i de fer girar el cap és el que fa que, després, quan es demostrï alguna cosa, l'alumne trobi amb naturalitat que li intentin justificar que les coses són així. No només a matemàtiques: a socials, memoritzant dates, fenòmens i perquè passen...

Si t'obliguen a pensar, tot va lligat i llavors ja ho trobes natural. És tot un

sistema d'ensenyament.

Tenim un problema amb el perfil d'estudiant que es dedica a la docència de matemàtiques, sobretot de primària. La manca de motivació és el principal obstacle.

Mira el perfil de l'alumne de batxillerat que, quan acaba, se'n va cap a la facultat de magisteri, de formació de professorat. Quan un estudiant no sap quina carrera fer, normalment es decanta per la modalitat d'humanitats. Ja hi ha un trajectòria de "fujo de tot el que és científic" perquè normalment no agrada o no s'entenen les matemàtiques. Acaba el batxillerat humanístic i no haver fet matemàtiques limita moltíssim: ni psicologia pots fer. La limitació és bestial. Potser ets una persona amb una motivació bestial cap a l'ensenyament, però amb gens motivació cap a les matemàtiques, amb la qual cosa, el perfil del 90-95% dels alumnes que arriben a la facultat de professorat és així i els alumnes que arriben als instituts als 12 anys han estat rebent ensenyament per part de persones que tenen aquesta prevenció per les matemàtiques, doncs potser sí que hem de revisar les matemàtiques que saben els professors que ensenyaran a l'ESO, el que els hi ensenyen al màster i tal, però realment ja tenen un terreny molt complicat per començar a treballar. No s'hauria de permetre a qualsevol entrar.

Com? Potser revaloritzant socialment el paper del mestre, fent-lo atractiu... Que com a feina en sí, és una feina digníssima i atractivíssima. De fet, a mi em sembla una feina molt més atractiva i, probablement, et dona més mal de cap ser professor de secundària que primària. És una feina que si l'equipares socialment i salarialment pot ser més interessant que fer batxillerat, segons com. Però clar, has de donar un prestigi social, ha de ser atractiu per tot-hom i ha de tornar a agafar valor. Hi ha gent que acaba a magisteri que és valuossíssima, que li interessa vocacionalment; però hi ha molts que igual són vocacionals, però en el terreny nostre, parteixen d'aquella prevenció, pel que hem dit abans. No saben com tractar la matèria, no la coneixen bé. Potser aquest no és el problema més important, però sí l'inicial.

11. Perque hi ha un enfocament tan teòric de la geometria a la Universitat, quan a l'escola quasi bé només es resolen exercicis?

Clar, és que en algun moment l'has de fer. Si no fas aquest salt a l'abstracció amb els matemàtics, sigui del que sigui, quan el faràs? Sí que és veritat que tenim aquest vici de no anar de lo concret a lo general, i tenir-lo evitaria molts distanciaments. Si et diuen d'inici: jo vull resoldre això i aquests són els problemes interessants i després construïm l'abstracció, així ja tenim la generalització. Ha de ser un pas més esglaonat.