UNIVERSITAT DE BARCELONA

PER QUÈ CAL SABER PROBABILITATS?

Marta Sanz-Solé
Professora de la Facultat de Matemàtiques

Lliçó inaugural del curs acadèmic 2008·2009
Facultat de Matemàtiques

Per què cal saber probabilitats?

Marta Sanz-Solé
http://www.mat.ub.es/∼sanz
Dept. de Probabilitats, Lògica i Estadística
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

1 d'octubre de 2008

Resum

En aquesta conferència-lliçó es vol fer palès el lloc important que la probabilitat ocupa avui en la recerca matemàtica i en la interdisciplinar, i invitar a reflexionar sobre els canvis que s'haurien de derivar d'aquesta nova situació. Per dur a terme aquests objectius utilitzem el clàssic recurs didàctic de l'exemple. A través d'una versió senzilla del problema de *les grans desviacions*, extraiem algunes característiques comunes a molts temes d'estudi de les probabilitats que, segons l'opinió de la conferenciant, proporcionen raons importants per al coneixement i domini d'aquesta matèria.

1 Introducció

No fa massa anys la probabilitat era considerada con una àrea més aviat marginal de les matemàtiques i subsidiària de l'estadística. La vida relativament tan curta d'aquesta matèria, en contrast amb d'altres amb una tradició molt més àmplia, com per exemple l'aritmètica o la geometria, pot proporcionar-nos una de les explicacions d'aquest fet. Si en seguim, però, l'evolució recent, constatem un canvi força radical. Avui, la probabilitat està present en la modelització i l'anàlisi de problemes en disciplines científiques força diferenciades i també forma part de la metodologia en diferents àrees de la pròpia matemàtica.

Articles de discussió sobre el futur de les matemàtiques es fan ressó del canvi en el paper que la probabilitat pot arribar a jugar. Un exemple significatiu d'aquest estat d'opinió es troba en l'article [1] que acaba de la manera següent:

> *...I believe stochastic methods will transform pure and applied mathematics in the beginning of the third millenium. Probability and statistics will come to be viewed as the natural tools to use in mathematical as well as scientific modeling. The intellectual world as a whole will come to view logic as a beautiful elegant idealization but to view statistics as the standard way in which we reason and think.*

Una declaració com aquesta no deixa indiferent ningú. Pronosticar la rellevància de la probabilitat i l'estadística, tant en l'aspecte purament científic com en les estructures i mecanismes del raonament, és quelcom que segurament, fins fa poc, potser ningú hagués gosat expressar.

L'autor de l'article no ha estat fins ara un professional de la probabilitat o l'estadística, però recentment ha adoptat aquests mètodes en la recerca. De forma breu, assenyalem alguns aspectes de la biografia de l'autor. David Mumford és un matemàtic britànic (Worth, Anglaterra, 1937) que, en la seva tesi doctoral dirigida per Oscar Zariski (1961), va tractar temes de geometria algebraica; ha desenvolupat la seva carrera acadèmica a les universitats de Harvard i de Brown, on treballa actualment. És un matemàtic d'èlit. Va ser guardonat amb una medalla Fields el 1974, i d'aleshores ençà ha estat distingit amb molts premis prestigiosos, el darrer, el Premi Wolf 2008, concedit per la Fundació Wolf amb seu a Israel.

En resum, una persona amb molt pes en la nostra disciplina, les matemàtiques, pronostica una tendència que representa un canvi bastant substancial en el repartiment tradicional de rols de les seves àrees diverses. Crec que el que expressa en David Mumford és avui una opinió compartida per un nombre considerable de matemàtics. En els darrers 10 anys, per fixar un període orientatiu, hi ha hagut una veritable invasió de mètodes probabilistes en totes les matemàtiques, com pot observar-se en el contingut de la producció científica, en els treballs publicats. I aquesta tendència s'ha escenificat en el que podríem anomenar "passarel·les" de les matemàtiques, que són els grans congressos: Els *International Congresses of Mathematicians* (ICM) i, en una escala més petita, els *European Congresses of Mathematics* (ECM).

Una conseqüència lògica d'aquesta dinàmica en són els reconeixements, els premis. A l'ICM 2006 es va atorgar per primera vegada una medalla Fields a un probabilista, en Wendelin Werner. Dos dels altres guardonats, Alexei Okounkov i Terence Tao, utilitzen mètodes probabilistes en els seus treballs. L'any 2007, el Premi Abel —el recentment creat "Premi Nobel" de les matemàtiques, amb la primera edició el 2003— va ser atorgat a un probabilista, en Snirivasa R.S. Varadhan, nascut i graduat a l'Índia, el qual ha desenvolupat tota la seva carrera acadèmica al Courant Institute of Mathematical Sciences de Nova York.

Així doncs, per què cal saber probabilitats? Potser perquè estan de moda? Intentaré donar algunes raons al final de la conferència. Sortiran com a subproducte d'una lliçó de matemàtiques gairebé tradicional, encara que elemental i no del tot rigorosa, per tal de ser assequible a un públic ampli, que girarà entorn d'una de les contribucions per les que en Varadhan va ser guardonat amb el premi Abel 2007.

2 Una breu lliçó sobre "Grans Desviacions"

2.1 Descripció del problema

Hi ha dos resultats de la teoria de les probabilitats que un ampli nombre de científics coneix o almenys n'ha sentit parlar. Poden ser interpretats com a lleis de regularitat estadística. Són la llei dels grans nombres i el teorema del límit central (en les seves diferents versions).

La llei dels grans nombres ens permet d'assegurar un fet que pot semblar evident i que podem contrastar experimentalment: Si llancem moltes vegades una moneda que no estigui trucada, a la llarga, el nombre de cares i de creus serà el mateix, és a dir, aproximadament arribarem a la proporció del 50 %, o a una probabilitat 1/2.

El teorema del límit central és també un resultat que podem intuir experimentant amb dades. Per exemple, si considerem les notes de la selectivitat i dibuixem un histograma de les freqüències d'estudiants que han obtingut $0; 0,1; 0,2; \ldots ; 5; 5,1; \ldots ; 9,9; 10,$ veurem que el perfil del histograma s'assembla a una campana de Gauss. Si agafem només una mostra petita, l'aproximació serà menys clara, si la mostra és gran, la discrepància serà menor. Les campanes no són idèntiques, el seu valor màxim pot variar, poden ser més planes o punxegudes, però podem estandarditzar-les mitjançant una transformació afí i totes s'assemblaran a la corba que representa gràficament la funció

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{2.1}$$

Abans d'enunciar i comentar aquests dos resultats introduïm la notació necessària. Per a $\{X_n, n \geq 1\}$ denotem una successió de variables aleatòries i definim $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Llei dels grans nombres

Suposem que la successió $\{X_n, n \geq 1\}$ està formada per variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes, amb moment de primer ordre finit. Si m és el valor mig comú de les variables de la successió, es compleix

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m, \tag{2.2}$$

en el sentit de la convergència quasi segura.

Teorema del límit central

Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes, amb variància finita i diferent de zero. Aleshores, per a qualssevol nombres reals a, b tals que $-\infty < a \leq b < +\infty$, es compleix

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \leq \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \tag{2.3}$$

Com hem indicat abans amb l'exemple del llançament de la moneda, la llei dels grans nombres ens diu que $S_n \sim nm$, on amb el símbol $\sim$ indiquem una "quasi" igualtat, si n és prou gran. El teorema del límit central va més lluny. Ens diu que $|S_n - nm| \sim \sqrt{n}$, és a dir, dóna una mesura de l'error en l'aproximació de S_n per nm.

Aquests resultats donen molta informació, però no tota. Pot passar que en llançar una moneda obtinguem 100 vegades seguides cara. Pot passar —i passa!— que encertem la combinació guanyadora de la 6/49. Pot passar que S_n es desviï de nm més de n (que és més gran que $\sqrt{n}$). Però passa poc. En la terminologia de les probabilitats parlem d'*esdeveniments rars*. Des de la posició d'un matemàtic, la reacció natural és: Bé, passa poc, però com de poc?; posem-hi nombres, fem una estimació. La teoria de les grans desviacions proporciona els instruments per assignar probabilitats als esdeveniments rars.

Una motivació clara per a l'anàlisi d'aquest problema és fer estimacions de riscs i posar preus a les seves cobertures. Suposem que es vol fixar la dimensió d'un nou servei, per exemple el nombre de places que s'ofereixen en l'AVE Barcelona-Madrid. Pot ser que, a certes hores, hi hagi habitualment poca demanda. Conèixer amb precisió la probabilitat que la demanda superi un cert nivell que es considera l'habitual, pot ser important per decidir si es reforça el servei o es deixa en mínims. Quant de probables són determinats pics? Val la pena una inversió extra per ampliar unes prestacions que potser, en alguns casos, no seran utilitzades?

Qüestions d'aquest estil van estar a l'inici del desenvolupament de la teoria per Harald Cramér. Actualment la metodologia de les grans desviacions és utilitzada en camps diversos, com s'indica per exemple en [5]:

- En estadística, per contrastar hipòtesis i tenir una estimació acurada dels errors.
- En mecànica estadística, per al càlcul de probabilitats de configuracions singulars.
- En el tractament d'imatges.
- En la visió assistida per ordinador
- En el diseny VLSI (*very large-scale integration*) per a la producció de microprocessadors.
- En la programació no lineal.
- En la modelització mitjançant models estocàstics amb petites pertorbacions aleatòries.

2.2 Un resultat de Cramér

Com hem dit abans, les primeres passes en la teoria de les grans desviacions va ser fetes pel matemàtic suec Carl Harald Cramér (Stockholm 1893-1985). Cramér va estudiar química i matemàtiques. Va començar fent recerca en química i fins i tot hi va fer algunes aportacions. Però, al final, va descartar dedicar-se a aquesta disciplina i va fer una tesi en anàlisi sota la direcció de Marcel Riesz. Després es va interessar en la teoria analítica de nombres, però també va abandonar aquesta àrea. Cramér és conegut com a probabilista. L'afició al tema li va venir marcada per la professió. A banda d'exercir com a professor d'universitat, també treballava en una companyia d'assegurances de vida sueca. Cramér va ser un dels grans protagonistes en el desenvolupament de la teoria de la probabilitat, però no va subestimar la importància de la utilització del coneixement científic en l'obtenció del *know-how* pràctic.

Des del seu lloc de treball en una companyia d'assegurances, és natural que s'interessés en el tema dels esdeveniments rars. El preu que fixa una companyia per una pòlissa d'assegurances es basa en una estadística d'accidents. Però pot passar, de la mateixa manera que pot tocar la loteria, que un any sigui especialment desastrós. S'ha de quantificar la probabilitat que això passi i el resultat s'haurà de tenir en compte per fixar el preu de la pòlissa.

Considerem com abans una successió $\{X_n, n \geq 1\}$ de variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes, amb mitjana m. Ja hem vist que, per a n prou gran, $S_n \sim nm$. Sigui $a > m$ i suposem que $P(X > a) > 0$ Quin és el valor aproximat de $P(S_n > na)$? Abans de donar una resposta precisa a aquesta qüestió cal introduir alguns conceptes.

Per a una variable aleatòria X, es defineix la *funció generatriu de moments* com la transformada de Laplace de la llei de probabilitat de X, és a dir,

$$M(t) = E\big(e^{tX}\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La *funció generatriu de cumulants* és el logaritme de la funció generatriu de moments:

$$\Lambda(t) = \log M(t).$$

Finalment, es defineix la transformada de Fenchel-Legendre mitjançant la igualtat

$$\Lambda^*(a) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \big[at - \Lambda(t)\big], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Clarament, $\Lambda(0) = 0$ i, si la derivada de M en $t = 0$ existeix, aleshores $\Lambda'(0) = m$.

Aplicant la desigualtat de Cauchy-Schwarz es prova fàcilment que, si M és derivable, la segona derivada Λ'' existeix i és no negativa. Per tant, Λ és una funció convexa.

Així doncs, la transformada de Fenchel-Legendre mesura la discrepància màxima entre la funció convexa Λ i la funció lineal $y = at$.

Podem ara enunciar un resultat de grans desviacions.

Teorema 2.1. Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents, idènticament distribuïdes, amb mitjana m. Suposem que la funció generatriu de moments és finita en un entorn de $t = 0$. Fixem un $a > m$ tal que $P(X > a) > 0$. Aleshores

1. $\Lambda^*(a) > 0$,
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n > na) = -\Lambda^*(a)$.

Tenim, doncs, que l'esdeveniment rar $\{S_n > na\}$, per a n gran, té una probabilitat de l'ordre de $e^{-n\Lambda^*(a)}$ i, en augmentar n, aquesta probabilitat decreix exponencialment.

Com es pot arribar a intuir un resultat que sembla tan complicat? Intuir-ho no és gaire difícil. Provem d'utilitzar una idea similar a la de la demostració de la desigualtat de Txebishev.

Podem suposar que $m = 0$ i, com que en aquest cas $a > 0$, resulta que

$$\Lambda^*(a) = \sup_{t>0} \big[at - \Lambda(t)\big].$$

Per a $t > 0$ i $a > 0$,

$$e^{tS_n} > e^{tna} 1\!\!1_{\{S_n > na\}}.$$

Prenent esperances,

$$\begin{aligned} P\left(S_n > na\right) &\leq e^{-tna} E\left(e^{tS_n}\right) \\ &= \left(e^{-ta} M(t)\right)^n = e^{-n\left(at - \Lambda(t)\right)}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log P(S_n > na) &\leq -\big[at - \Lambda(t)\big] \\ &\leq -\sup_{t>0} \big[at - \Lambda(t)\big] = -\Lambda^*(a). \end{aligned}$$

És a dir,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n > na) \leq -\Lambda^*(a).$$

Ens faltaria, doncs, obtenir la desigualtat en sentit contrari i aquesta és la part més difícil. Però la validesa del resultat pot venir suggerida per l'anàlisi del cas normal, com mostrem tot seguit.

La variable aleatòria $\frac{S_n}{n}$ té llei $N(0, \frac{1}{n})$ i per tant

$$P(S_n > na) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{nx^2}{2}} dx.$$

Se'n dedueix que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(S_n > na) = -\frac{a^2}{2}.$$

Calculem ara la transformada de Fenchel-Legendre d'una llei normal, tot començant per la transformada de Laplace, que és

$$M(t) = E\big(e^{tX}\big) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

El valor màxim de la funció $\phi(t) = tx - \frac{t^2}{2}$ s'assoleix per a $t = x$ i val $\frac{x^2}{2}$. Per tant

$$\Lambda^*(a) = \frac{a^2}{2}.$$

Per tant, el teorema de Cramér per a la llei normal s'obté d'un càlcul ben senzill.

2.3 Cap a una teoria de les grans desviacions

El teorema anterior dóna un resultat de grans desviacions respecte de la mitjana. Però hom es pot plantejar problemes que conserven aquesta idea de desviació en termes i contextos molt més generals.

Per exemple, considerem un gas en un recinte i suposem que la distribució de les seves molècules segueix una llei de probabilitat, deguda a la dinàmica determinada per diverses causes, entre elles els xocs d'unes molècules amb les altres. Són els models de la mecànica estadística (Gibbs).

D'acord amb la llei de probabilitat, podem determinar regions del recinte poc visitades pel gas. Però, es pot tenir una estimació precisa de la probabilitat que es visitin tals regions a llarg termini?

Aquest és també un problema de les grans desviacions, però s'ha de plantejar en un context més general del que hem parlat abans. Voldríem poder fer estimacions de quantitats com $P\{\frac{S_n}{n} \in A\}$. En l'exemple d'abans, $A = (a, \infty)$. I sobretot voldríem passar de successions de variables aleatòries a famílies de variables aleatòries indexades per a conjunts no necessàriament numerables, que s'anomenen processos estocàstics.

El problema que hem estudiat a la secció anterior es pot identificar con una qüestió relativa a la successió de lleis (o de funcions de distribució) de les variables aleatòries de la successió $(\frac{S_n}{n}, n \geq 1)$. Concretament, l'estudi asimptòtic de $1 - F_{\frac{S_n}{n}}(a)$. En aquest exemple, les lleis són probabilitats sobre $\mathbb{R}$. Podem situar-nos en un escenari més ampli, com el que descrivim tot seguit.

Considerem una família de probabilitats $(P_\varepsilon, \varepsilon > 0)$ en un espai mètric, separable i complet que denotem $\mathcal{X}$. Sigui $x_0 \in \mathcal{X}$ i $\delta_{\{x_0\}}$ la mesura de Dirac en x_0. Suposem que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon = \delta_{\{x_0\}},$$

en el sentit de la convergència feble de mesures. Més precisament, per a tot conjunt $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que la seva frontera tingui mesura $\delta_{\{x_0\}}$ igual a 0, es compleix

$$P_\varepsilon(A) \to \delta_{\{x_0\}}(A) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x_0 \in A, \\ 0, & \text{si} \quad x_0 \notin A. \end{cases}$$

De la definició de convergència feble de mesures (veieu per exemple [3]) se'n dedueix

$$\delta_{\{x_0\}}(\mathring{A}) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon(\mathring{A}) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon(\bar{A}) \leq \delta_{\{x_0\}}(\bar{A}).$$

Si A és un esdeveniment *rar*, volem precisar i ajustar aquestes desigualtats.

L'exemple tractat a la secció anterior correspondria a fixar $\varepsilon = \frac{1}{n}$, P_ε la llei de $\frac{S_n}{n}$ i $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

Definició del principi de les grans desviacions

Per descriure les fites superiors i inferiors a les quals ens hem referit abans necessitem el concepte de *funcional d'acció.* Per definició, és una aplicació

$$I : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$$

que compleix:

a) I és semicontínua inferiorment,

b) Per a tot $a < +\infty$, el conjunt de nivell $\{x : I(x) \le a\}$ és un compacte de $\mathcal{X}$.

Les famílies de probabilitats per a les quals es pot donar una descripció asimptòtica dels esdeveniments rars són les que compleixen les condicions explicitades en la propera definició.

Definició 2.1. La família de probabilitats sobre $\mathcal{X}$, $\{P_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, satisfà un *principi de grans desviacions* amb funcional d'acció I si es compleix la propietat següent, vàlida per a tot $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$:

$$\begin{aligned} -\inf_{x\in \mathring{A}} I(x) &\le \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P_\varepsilon\big(\mathring{A}\big) \\ &\le \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P_\varepsilon\big(\bar{A}\big) \le -\inf_{x\in \bar{A}} I(x). \end{aligned}$$

Clarament, si $\inf_{x\in \mathring{A}} I(x) = \inf_{x\in \bar{A}} I(x) := I(A)$, la darrera condició esdevé

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(A) = -I(A).$$

En el marc més general d'aquesta secció no hem mencionat cap concepte que estengués la transformada de Fenchel-Legendre i, en canvi, ha aparegut una altra noció, la de funcional d'acció. De fet, ambdues nocions estan relacionades de la manera següent:

Sigui $\mathcal{X}$ un espai vectorial topologic de Hausdorff, localment convex i denotem per $\mathcal{X}^*$ el seu dual topològic. Suposem que I és convexa. Aleshores

$$I(x) = \sup_{\lambda\in\mathcal{X}^*} \big[\langle \lambda, x\rangle - \Lambda(\lambda)\big],$$

amb $\Lambda(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \int_{\mathcal{X}} e^{\frac{\lambda}{\varepsilon} x} P_\varepsilon(dx)$, $\big($veieu [5]$\big)$.

El segon membre de la igualtat anterior correspon a l'extensió de la transformada de Fenchel-Legendre. Per tant, almenys en situacions *regulars*, el funcional d'acció coincideix amb aquesta transformada.

2.4 Un exemple: El moviment brownià

Ara, en comptes de considerar la successió de mitjanes aritmètiques de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, ens interessem per un procés estocàstic que denotem per a

$$B = \{B_t, t \in [0,T]\},$$

i que té les propietats següents:

1. Les distribucions de qualsevol nombre finit de variables del procés, $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$, és normal multidimensional.
2. Cada B_t té mitjana zero.
3. Per a qualssevol $0 \le s < t \le T$, $E(B_t B_s) = \min(s,t)$.

És conegut que les trajectòries del moviment brownià són contínues (veieu per exemple [16]). Per tant, el procés es pot veure globalment com una variable aleatòria a valors en l'espai $\mathcal{C}([0,T])$:

$$\begin{aligned} B : \Omega &\to \mathcal{C}([0,T]) \\ \omega &\to B(\omega) = (B_t(\omega), t \in [0,T]). \end{aligned}$$

Considerem ara el procés perturbat B_ε obtingut multiplicant totes les trajectòries per $\varepsilon > 0$. En fer $\varepsilon \to 0$, aquestes s'aproximen a la funció idènticament nul·la. Les lleis respectives de $(B_\varepsilon, \varepsilon \in]0,1])$ formen una família de probabilitats $(P_\varepsilon, \varepsilon \in]0,1])$ en $\mathcal{X} = \mathcal{C}([0,T])$ que convergeix cap a una mesura de Dirac en la funció zero.

Si $(B_\varepsilon, \varepsilon \in]0,1])$ compleix un principi de grans desviacions, hom pot esperar poder descriure asimptòticament probabilitats d'esdeveniments rars, o de desviacions respecte a la trajectòria nul·la.

El principi de les grans desviacions per al moviment brownià és un resultat degut a Schilder ([17]) que enunciem tot seguit.

Teorema 2.2. El moviment brownià satisfà un principi de grans desviacions amb funcional d'acció

$$I(h) = \begin{cases} +\infty, & \text{if} \quad h \notin H \\ \dfrac{\int_0^T |\dot{h}(s)|^2 ds}{2}, & \text{if} \quad h \in H \end{cases},$$

on
$$H=\left\{h:[0,T]\to\mathbb{R};h(t)=\int_0^t \dot{h}(s)ds,\int_0^T|\dot{h}(s)|^2ds<\infty\right\}.$$

En comparar el valor del funcional d'acció I d'aquest resultat amb la transformada de Fenchel-Legendre per a successions normals s'observa una gran analogia; el valor de l'argument d'aquesta $x\in\mathbb{R}$ és substituït ara per $h\in H$, i la norma euclidiana per una norma d'espai de Hilbert.

Una petita indicació del perquè això és així pot extraure's d'un resultat d'Itô i Nisio que estableix que
$$B_t=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle 1\!\!1_{[0,t]},e_n\right\rangle_{L^2\left([0,T]\right)}g_n,$$
on la sèrie convergeix uniformement en $[0,T]$, $(e_n,n\geq 0)$ és una base de $L^2\big([0,T]\big)$ i $(g_n,n\geq 0)$ és una successió de variables aleatòries independents i igualment distribuïdes $N(0,1)$ $\big($veieu [15]$\big)$. Per tant, el moviment brownià es pot considerar com una successió infinita de variables aleatòries independents i normals estàndard.

2.5 Per saber-ne més

Fins aquí he fet un petit esbós de la teoria de les grans desviacions. Per tenir-ne una idea molt més àmplia, recomanem al lector els textos [2], [5], [6], [14], [18] i [19]. Per conèixer les aportaciones de Varadhan sobre aquest tema, remetem el lector als treballs [7], [8], [9], [10], [11], [12] i [13].

3 Conclusions

Això és una mostra infinitesimal d'un tema de recerca extraordinàriament actiu amb aplicacions als camps que he esmentat anteriorment i encara a d'altres, per exemple la teoria quàntica de camps, la dinàmica de poblacions, les finances o la gestió de trànsit.

En relació al títol de la conferència voldria destacar algunes de les seves característiques:

- El problema de les grans desviacions deriva de dos resultats crucials en la teoria de les probabilitats: la llei dels grans nombres i el teorema del límit central.

- Té motivacions pràctiques importants.
- En l'anàlisi del problema es combinen tècniques d'altres camps de la matemàtica: anàlisi convexa, topologia, anàlisi funcional...
- És útil en l'estudi de problemes de disciplines diverses.

Resumint, té motivacions tant teòriques i internes com externes i pràctiques; té molts aspectes transversals i pluridisciplinars.

Aquestes característiques no són exclusives de les grans desviacions, les comparteixen molts dels camps de recerca en probabilitats i segons la meva opinió proporcionen unes quantes raons convincents per les quals cal saber probabilitats.

En un to una mica agosarat diria que en un futur molt proper, un matemàtic que no sàpiga probabilitats serà com un científic que no sàpiga anglès. Resultarà difícil participar activament en els avenços de la matemàtica i entendre els grans corrents que la dirigeixen sense una base sòlida en aquesta matèria.

Referències

[1] D. Mumford (2000). "The dawning of the age of stochasticity". A *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur, Eds. IMU and AMS 2000.

[2] R. Azencott (1980), "Grandes déviations et applications". A P. L. Hennequin, Ed., *Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour VIII-1978. Lecture Notes in Math.* 774, pp 1–176, Springer Verlag, Berlin.

[3] P. Billingsley (1968). *Convergence of Probability Measures.* John Wiley, New York.

[4] H. Cramér (1938). "Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités". *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 736, 5–23. *Colloque Consacré à la Théorie des Probabilités*, 3. Hermann, Paris.

[5] A. Dembo and O. Zeitouni (1998). *Large Deviations Techniques and Applications*, 2nd ed. Springer, New York.

[6] J. D. Deuschel and D. W. Stroock (1989). *Large Deviations.* Academic Press, Boston.

[7] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan (1975). "Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time I". *Comm. Pure Appl. Math.*, 28, 1–47.

[8] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan (1975). "Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time II". *Comm. Pure Appl. Math.*, 28, 279–301.

[9] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan (1976). "Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time III". *Comm. Pure Appl. Math.*, 29, 389–461.

[10] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan (1983). "Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time IV". *Comm. Pure Appl. Math.*, 36, 183–212.

[11] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan (1985). "Large deviations for stationary Gaussian processes". *Comm. Math. Physics*, 97, 187–210.

[12] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan (1987). "Large deviations for noninteracting particle systems". *J. Stat. Physics*, 46, 1195–1232.

[13] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan (1989). "Large deviations from a hydrodynamic scaling limit". *Comm. Pure Appl. Math.*, 42, 243–270.

[14] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell (1998). *Random Perturbations of Dynamical Systems*, 2nd ed. Springer, New York.

[15] K. Itò and M. Nisio (1968). "On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables". *Osaka J. Math.*, 5, 35–48.

[16] I. Karatzas and S. D. Shereve (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag, New York.

[17] M. Schilder (1966). "Some Assymptotic Formulae for Wiener Integrals". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 125 63–85.

[18] D. W. Stroock (1984). *An Introduction to the Theory of Large Deviations*. Springer Verlag, Berlin.

[19] S. R. S. Varadhan (1984) *Large Deviations and Applications*. SIAM, Philadelphia.

[20] S. R. S. Varadhan (2008) "Large Deviations". *The Annals of Probability*, 36 No. 2, 397–419.