



Treball final de grau

**GRAU DE MATEMÀTIQUES**

Facultat de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona

---

**Perspectiva**

---

**Autor: Itziar Zabaleta Razquin**

**Director: Dr. Eduardo Casas-Alvero**  
**Realitzat a: Departament de**  
**Matemàtiques i**  
**Informàtica**

**Barcelona, 17 de enero de 2017**

## **Abstract**

Since before the Renaissance the rules for doing perspective drawings were known, obtaining representations of the reality just like a well placed observer's eye would perceive it. We use our knowledge of extended projective geometry to study the basis of these rules. We obtain some of the basic properties of perspective drawings and learn how to construct simple examples. Finally, we apply this knowledge to a practical exercise, namely to study the perspective in some Canaletto's paintings.

## **Resumen**

Desde antes del Renacimiento se conocen las reglas para dibujar en perspectiva, obteniendo representaciones de la realidad tal y cómo la percibiría el ojo de un observador colocado adecuadamente. Utilizando recursos avanzados de geometría proyectiva, estudiamos una fundamentación de las reglas de la perspectiva. Se obtienen algunas propiedades básicas de la perspectiva, y se construye algún ejemplo sencillo. Para acabar, se aplican estos conocimientos a un caso práctico, concretamente estudiar la perspectiva en algunos cuadros de Canaletto.

## Agradecimientos

Primero de todo me gustaría agradecer a Eduardo Casas-Alvero por su entusiasmo y por haberme ayudado en todo momento hasta el último día. A Joan Carles Naranjo, por sugerirme tanto el tema del trabajo como el tutor. También quería agradecer a mi familia por darme la oportunidad de hacer todo lo que he hecho y a mis amigos por su apoyo.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Espacio proyectivo, espacio afín y cuádricas</b>	<b>3</b>
2.1. Espacio proyectivo . . . . .	3
2.2. Coordenadas proyectivas . . . . .	3
2.3. Espacio afín y clausura proyectiva . . . . .	4
2.4. Proyectividades . . . . .	6
2.5. Afinidades y proyectividades . . . . .	7
2.6. Razón doble y razón simple . . . . .	7
2.7. Involuciones . . . . .	8
2.8. Perspectividades . . . . .	9
2.9. Noción de cuádrica . . . . .	10
2.10. Conjugación respecto a una cuádrica . . . . .	11
<b>3. Cuádrica del absoluto</b>	<b>14</b>
3.1. Cuádrica del absoluto . . . . .	14
3.2. Puntos cíclicos . . . . .	16
3.3. Ortogonalidad . . . . .	16
3.4. Fórmula de Laguerre . . . . .	17
<b>4. Perspectiva</b>	<b>20</b>
4.1. Introducción . . . . .	20
4.2. Definiciones y nociones generales . . . . .	21
4.3. Invariancia afín y métrica . . . . .	22
4.4. Paralelismo . . . . .	23
4.5. Dividir un segmento en perspectiva . . . . .	24
4.6. Ortogonalidad . . . . .	25
4.7. Ángulos . . . . .	30
4.8. Representación mediante homología . . . . .	33
4.9. Problema inverso de perspectiva . . . . .	37
<b>5. Estudio de la perspectiva en Canaletto</b>	<b>42</b>

# 1. Introducción

Desde antes del Renacimiento se ha buscado la sensación de realismo en la pintura. De aquí surge el interés en representar la profundidad e intentar dibujar los objetos tal cómo los ve un observador cuando los tiene delante. Es durante el Renacimiento, mediante el método científico y el uso de las matemáticas, cuando más se desarrollaron las leyes de la perspectiva. Algunos artistas como Alberti, da Vinci y Brunelleschi, entre otros, trabajaron en ello. Brunelleschi, un artista y arquitecto del renacimiento italiano, realizó una serie de estudios con ayuda de instrumentos ópticos, para poder representar sus edificios en perspectiva. Gracias a esto, se empezó a comprender los principios que rigen la perspectiva. Sin embargo, la tarea de representar los objetos en perspectiva era muy laboriosa y se inventaron instrumentos que facilitaron esta tarea, por ejemplo la cámara oscura o el perspectógrafo. El estudio de la perspectiva motivó y avanzó el desarrollo de la geometría proyectiva. Por ejemplo, Desargues, en 1636 escribió un tratado sobre perspectiva titulado *Perspective*, donde fundamentaba matemáticamente los métodos de perspectiva utilizados hasta entonces, y en 1639 un tratado sobre geometría proyectiva titulado *Brouillon project d'une atteinte aux evenmens des rencontres du Cone avec un Plan*.

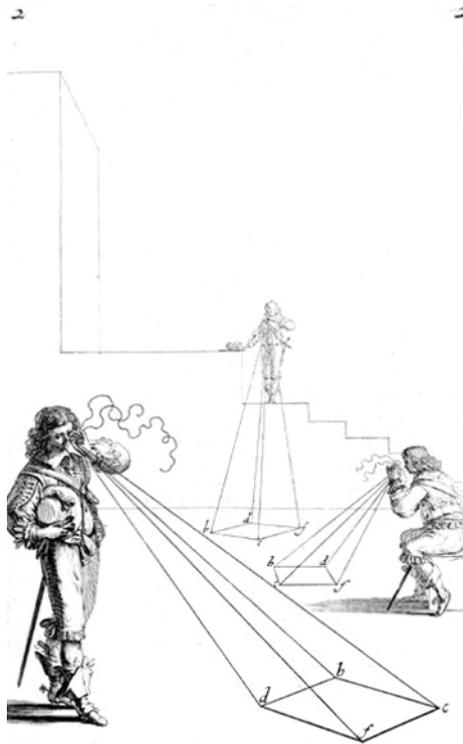


Figura 1. Ilustración de [1]

En este proyecto se demuestran las reglas más importantes para dibujar en perspectiva. Estas reglas, en su comienzo, surgieron al observar la realidad y estudiar el funcionamiento de las máquinas de perspectiva. Más tarde fueron justificadas mediante geometría métrica. Sin embargo, en este trabajo se estudia una fundamentación de las reglas de la perspectiva con uso de recursos de geometría proyectiva.

## Estructura de la memoria

Este trabajo se divide en tres partes. Una primera parte, formada por los capítulos 1 y 2 donde se repasan conceptos de geometría proyectiva, una segunda parte que abarca el tercer capítulo sobre perspectiva y una última parte, formada por el último capítulo, con una aplicación práctica de todo lo anterior.

El primer capítulo hace un repaso de los conceptos básicos de geometría proyectiva: espacio proyectivo, proyectividades, razón doble y cuádricas.

El segundo capítulo comienza definiendo la cuádrica del absoluto, un elemento de tratamiento proyectivo de la geometría métrica, que será clave a lo largo de todo este trabajo. Esta cuádrica nos permite hacer geometría métrica en un contexto proyectivo, ya que permite recuperar ortogonalidad y ángulo. Se acaba el capítulo estudiando la fórmula de Laguerre, que sirve para calcular el ángulo entre dos rectas, utilizando la cuádrica del absoluto.

El tercer capítulo comienza definiendo los elementos básicos de una perspectiva. Se utilizan los anteriores capítulos para demostrar las reglas básicas que rigen el dibujo en perspectiva. El capítulo acaba con el proceso contrario, a partir de un cuadro se estudia cómo obtener los elementos de la perspectiva.

Por último, para poner en práctica todo lo anteriormente aprendido, en el cuarto capítulo se estudian algunos de los cuadros de Canaletto. A este pintor italiano se le atribuye, por una parte, el uso de la cámara oscura para reproducir fielmente la realidad, pero por otra, se dice que deformaba las perspectivas para hacerlas más impresionantes. En el museo Correr de Venecia está expuesta una cámara óptica que presuntamente perteneció al pintor. A su vez, en la exposición “Canaletto: Una Venecia imaginaria”, llevada a cabo en el año 2001 en el CCCB, se defiende la tesis de que Canaletto modificaba las proporciones de la ciudad de Venecia para hacerla más sublime. En este trabajo se intentará comprobar la veracidad de la perspectiva en algunos cuadros de Canaletto, restableciendo primero los elementos de la perspectiva desde la que está hecho el cuadro y después calculando la representación que resultaría desde ese punto de vista. De esta manera se concluirá si la perspectiva está modificada o no.

## 2. Espacio proyectivo, espacio afín y cuádricas

En este capítulo recordaremos algunas nociones previas necesarias para abordar los siguientes temas. De esta manera quedará establecida la notación utilizada a lo largo del trabajo. Algunas demostraciones no se han escrito aquí para no extendernos en este capítulo de recordatorio, pero todas ellas se podrán encontrar en libros de geometría proyectiva y en particular en la referencia indicada en cada demostración.

### 2.1. Espacio proyectivo

**Definición 2.1.** Un *espacio proyectivo* sobre un cuerpo  $k$  es una terna  $(\mathbb{P}, E, \pi)$  donde  $\mathbb{P}$  es un conjunto,  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $k$  y  $\pi$  es una aplicación  $\pi : E - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}$  tal que:

- (a)  $\pi$  es exhaustiva
- (b)  $\forall v, w \in E - \{0\}, \pi(v) = \pi(w)$  si y sólo si  $\exists \lambda \neq 0$  tal que  $v = \lambda w$

Si se cumplen estas condiciones se dice que  $\pi$  y  $E$  definen una estructura de espacio proyectivo sobre  $\mathbb{P}$ .

**Notación 2.2.** Si  $p = \pi(v)$  se dice que el vector  $v$  es un *representante* del punto  $p$ . Se escribe  $p = [v]$ .

**Ejemplo 2.3.** El espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial  $E$ , que denotaremos como  $\mathbb{P}(E)$ , es el conjunto de clases de equivalencia según la relación en  $E - \{0\}$ :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \text{ tal que } x = \lambda y$$

Es decir,  $\mathbb{P}(E) = E - \{0\} / \sim$ .

### 2.2. Coordenadas proyectivas

**Definición 2.4.** Una *referencia proyectiva*  $\Delta$  de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n$  es un conjunto ordenado de  $n + 2$  puntos  $\{p_0, \dots, p_n; A\}$  que cumple

- $p_0, \dots, p_n$  son independientes
- $A \notin p_0 \vee \dots \vee p_{i-1} \vee p_{i+1} \vee \dots \vee p_n \quad \forall i = 0, \dots, n$

donde  $\vee$  indica variedad lineal generada.

**Proposición 2.5.** Sea  $E$  el espacio vectorial asociado a  $\mathbb{P}_n$ . Para cada referencia proyectiva  $\Delta$  de  $\mathbb{P}_n$ , se puede tomar una base  $\{e_0, \dots, e_n\}$  de  $E$ , tal que  $p_i = [e_i]$  y  $A = [e_0 + \dots + e_n]$ , conocida como *base adaptada* a  $\Delta$ .

Si tenemos una base adaptada a una referencia  $\Delta$ , podemos tomar como *coordenadas proyectivas* o *coordenadas homogéneas* de un punto  $p$  las componentes de cualquier vector representante de  $p$ . Es decir, si  $[x_0e_0 + \dots + x_n e_n] = p$ , entonces las coordenadas homogéneas de  $p$  en la referencia  $\Delta$  serán  $x_0, \dots, x_n$  y se escribe  $p = [x_0, \dots, x_n]_\Delta$ . El punto queda determinado por sus coordenadas, y las coordenadas quedan determinadas por el punto, salvo un factor de proporcionalidad.

*Demostración.* Ver [2], secciones 2.1, 2.2. □

### 2.3. Espacio afín y clausura proyectiva

En este apartado se relaciona la geometría proyectiva y la geometría afín mediante el concepto de clausura proyectiva de un espacio afín. Primero se hará un breve recordatorio sobre el espacio afín.

**Definición 2.6.** Un *espacio afín* de dimensión  $n$  ( $n \geq 1$ ), sobre un cuerpo  $k$  es una terna  $(\mathbb{A}_n, F, +)$  donde  $\mathbb{A}_n$  es un conjunto cuyos elementos se llaman *puntos*,  $F$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $k$  cuyos elementos se llaman *vectores* y  $+$  es una aplicación

$$\begin{aligned} + : F \times \mathbb{A}_n &\longrightarrow \mathbb{A}_n \\ (v, p) &\longmapsto p + v \end{aligned}$$

que cumple:

- (a)  $p + (v + w) = (p + v) + w \quad \forall p \in \mathbb{A}_n, \forall v, w \in F$
- (b)  $p + 0 = p \quad \forall p \in \mathbb{A}_n$
- (c)  $\forall p, q \in \mathbb{A}_n$  existe un único  $v$  tal que  $p + v = q$

Sea un espacio afín  $\mathbb{A}_n$ , con espacio vectorial asociado  $F$ . Las direcciones de  $\mathbb{A}_n$  son las clases de equivalencia de vectores no nulos módulo proporcionalidad, por tanto forman el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(F)$  (visto en Ejemplo 2.3).

La *clausura proyectiva*  $\overline{\mathbb{A}_n}$  de  $\mathbb{A}_n$  se obtiene añadiendo puntos a  $\mathbb{A}_n$ , un nuevo punto por cada dirección de  $\mathbb{A}_n$ . Por tanto  $\overline{\mathbb{A}_n}$ , como conjunto, es la unión disjunta  $\overline{\mathbb{A}_n} = \mathbb{A}_n \cup \mathbb{P}(F)$  y se dota de estructura proyectiva (demostración en [2], sección 3.2).

**Definición 2.7.** Dada una referencia  $\Delta = \{O; e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{A}_n$ , se llama *referencia proyectiva asociada* a  $\Delta$ , a la referencia  $\overline{\Delta}$  de  $\overline{\mathbb{A}_n}$ :

$$\overline{\Delta} = \{O, [e_1], \dots, [e_n]; O + e_1 + \dots + e_n\}$$

**Teorema 2.8.** Sobre  $\overline{\mathbb{A}}_n$  se puede establecer una estructura de espacio proyectivo, de manera que:

- (1) Si un punto propio  $p$  tiene coordenadas afines  $(x_1, \dots, x_n)$  en una referencia afín  $\Delta$ , sus coordenadas homogéneas serán  $[1, x_1, \dots, x_n]$  en la referencia proyectiva asociada a  $\Delta$ .
- (2) Si un vector  $v \neq 0$  tiene componentes  $(y_1, \dots, y_n)$  en la referencia afín  $\Delta$ , la dirección  $[v]$  tendrá coordenadas homogéneas  $[0, y_1, \dots, y_n]$  en la referencia proyectiva asociada a  $\Delta$ .

*Demostración.* Ver [2], secciones 3.2, 3.3. □

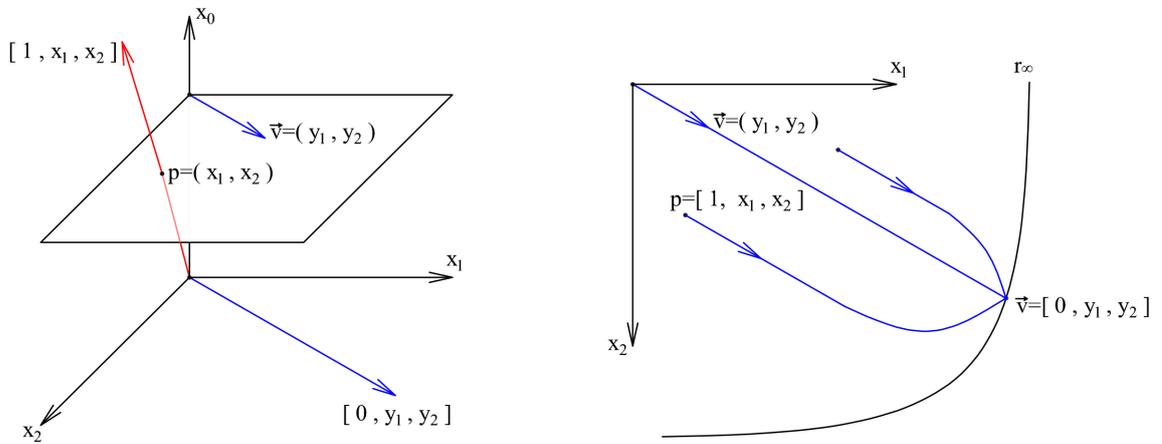


Figura 2. Clausura proyectiva de  $\mathbb{A}_2$ . Al punto propio  $(x_1, x_2)$  le corresponde el punto  $[1, x_1, x_2]$ , a la dirección del vector  $(y_1, y_2)$  le corresponde el punto  $[0, y_1, y_2]$  en  $\overline{\mathbb{A}}_2$ .

**Proposición 2.9.**  $\mathbb{P}(F)$  es un hiperplano de  $\overline{\mathbb{A}}_n$  y lo designaremos  $H_\infty$ .

*Demostración.* Del Teorema 2.8 se deduce que  $H_\infty$  es la variedad lineal de  $\overline{\mathbb{A}}_n$  con ecuación  $x_0 = 0$ , y por tanto un hiperplano de  $\overline{\mathbb{A}}_n$ . □

**Notación 2.10.**  $\mathbb{A}_n$  también se conoce como *parte propia* o *parte finita* de  $\overline{\mathbb{A}}_n$ , y  $H_\infty$  como *hiperplano impropio* o *hiperplano del infinito*.

Los puntos de  $\mathbb{A}_n$  se llaman *puntos propios*, y las direcciones *puntos impropios* o *puntos del infinito* de  $\overline{\mathbb{A}}_n$ .

## 2.4. Proyectividades

**Definición 2.11.** Sean  $(\mathbb{P}_n, E, \pi)$  y  $(\mathbb{P}'_m, E', \pi')$  dos espacios proyectivos sobre el mismo cuerpo  $k$ . Sea  $\varphi : E \rightarrow E'$  un isomorfismo entre sus espacios vectoriales. La *proyectividad* entre  $\mathbb{P}_n$  y  $\mathbb{P}'_m$  inducida por  $\varphi$  es la aplicación

$$f : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}'_m \\ p = [v] \longmapsto [\varphi(v)] \quad \forall v \neq 0$$

La existencia del isomorfismo  $\varphi$  implica que  $\mathbb{P}_n$  y  $\mathbb{P}'_m$  tienen la misma dimensión, es decir  $n = m$ .

**Proposición 2.12.**  $f$  está bien definida, es decir no depende del representante de  $v$  elegido, ya que  $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$  y además  $[\lambda\varphi(v)] = [\varphi(v)]$ .

**Notación 2.13.** Se dice que  $f$  está representada por  $\varphi$ , y se escribe  $f = [\varphi]$ .

**Definición 2.14.** Una *homología general* del plano es una proyectividad  $\varphi : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  que tiene una recta de puntos fijos  $r$ , llamada *eje* de la homología, y un punto fijo  $O$ ,  $O \notin r$ , llamado *centro* de la homología.

Una homología  $\varphi$  queda determinada por su eje, centro y un par de puntos correspondientes  $p, p' = \varphi(p)$ , a través de la construcción siguiente:

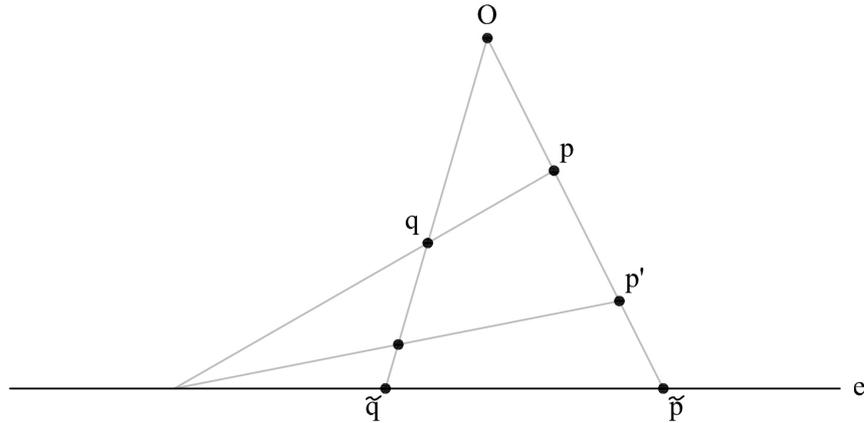


Figura 3. Construcción de la imagen del punto  $q$  por la homología  $\varphi$ , de centro  $O$  y eje  $e$ , que envía el punto  $p$  a  $p'$ . (Demostración ver [2], sección 5.7.)

**Proposición 2.15.** Sean dos puntos cualesquiera  $p, q \in \mathbb{P}_2$ , tales que  $p, q \notin r$  y  $p, q \neq O$ . Sean  $p', q'$  sus respectivas imágenes por una homología  $\varphi$ , de centro  $O$  y eje  $e$ . Sean  $\tilde{p}, \tilde{q}$  las respectivas intersecciones de las rectas  $Op, Oq$  con el eje  $e$ . Entonces

$$(O, \tilde{p}, p, p') = (O, \tilde{q}, q, q')$$

A este valor se le llama el *invariante* de la homología  $\varphi$ .

*Demostración.* Se sigue de la construcción anterior. □

**Observación 2.16.** Las homologías de invariante  $-1$  se les llaman *homologías armónicas*.

## 2.5. Afinidades y proyectividades

**Definición 2.17.** Una *transformación afín* o *afinidad*  $f$  entre dos espacios afines de la misma dimensión  $(\mathbb{A}_n, F, +)$  y  $(\mathbb{B}_n, G, +)$  es una aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}_n &\longrightarrow \mathbb{B}_n \\ p &\longmapsto q_2 + \varphi(p - q_1) \end{aligned}$$

para ciertos puntos  $q_1 \in \mathbb{A}_n$ ,  $q_2 \in \mathbb{B}_n$  y un isomorfismo entre espacios vectoriales  $\varphi : F \longrightarrow G$ .

Sean  $\mathbb{A}_n, \mathbb{A}'_n$  espacios afines de las mismas dimensiones,  $\overline{\mathbb{A}}_n, \overline{\mathbb{A}'_n}$  sus clausuras proyectivas y  $H_\infty, H'_\infty$  sus hiperplanos impropios. Consideraremos las proyectividades  $f : \overline{\mathbb{A}}_n \longrightarrow \overline{\mathbb{A}'_n}$  que cumplen la condición  $f(H_\infty) = H'_\infty$  y por tanto  $f(\mathbb{A}_n) = \mathbb{A}'_n$ . Es decir, proyectividades que llevan puntos impropios a puntos impropios y puntos propios a puntos propios.

**Proposición 2.18.** Si  $f$  cumple las condiciones anteriores,  $f|_{\mathbb{A}_n} : \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}'_n$  es una afinidad. Recíprocamente, cualquier afinidad  $g : \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}'_n$  es restricción de una determinada proyectividad  $h : \overline{\mathbb{A}}_n \longrightarrow \overline{\mathbb{A}'_n}$ , es decir  $g = h|_{\mathbb{A}_n} : \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}'_n$ .

*Demostración.* Ver [2], sección 3.5. □

## 2.6. Razón doble y razón simple

Sean  $q_1, q_2, q_3, q_4$  puntos de un espacio proyectivo unidimensional  $\mathbb{P}_1$ , al menos 3 de ellos distintos. Suponemos una referencia fijada  $\Delta = (p_0, p_1, A)$  de  $\mathbb{P}_1$ . Sean  $q_i = [x_i, y_i]_\Delta$  para  $i = 1, \dots, 4$ .

**Definición 2.19.** Llamamos *razón doble*  $\rho$  al cociente

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \in k \cup \{\infty\}$$

donde se toma  $\infty = a/0$  con  $a \neq 0, a \in k$

**Proposición 2.20.** La razón doble  $\rho$  no depende de la referencia elegida  $\Delta$ , ni de la elección de coordenadas para los puntos  $q_i$ .

*Demostración.* Ver [2], sección 2.9.1. □

**Notación 2.21.** Escribiremos la *razón doble* de  $q_1, q_2, q_3, q_4$  como  $\rho = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ .

**Teorema 2.22** (Invariancia proyectiva de la razón doble). *Sea  $f : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}'_1$  una proyectividad entre espacios proyectivos unidimensionales. Sean  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_1$ , al menos tres de ellos distintos. Entonces sus imágenes por  $f$  son al menos tres de ellas distintas y además*

$$(f(q_1), f(q_2), f(q_3), f(q_4)) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

*Demostración.* Ver [2], sección 2.9.11. □

**Definición 2.23.** Sean  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_1$  cuatro puntos ordenados. Se dice que forman un *conjunto armónico* si y sólo si  $(q_1, q_2, q_3, q_4) = -1$ .

Sean  $q_1, q_2, q_3$  tres puntos alineados de un espacio afín  $\mathbb{A}_n$ , al menos dos de ellos distintos.

**Definición 2.24.** Se define *razón simple* como  $\rho$  tal que

- si  $q_2 \neq q_3$ ,  $\rho$  es el valor que cumple  $q_1 = q_3 + \rho(q_2 - q_3)$
- si  $q_2 = q_3$ ,  $\rho = \infty$

**Notación 2.25.** Escribiremos la *razón simple* de  $q_1, q_2, q_3$  como  $\rho = (q_1, q_2, q_3)$ .

**Observación 2.26.** El punto medio de  $q_1, q_2$  es el único punto  $q_3$ , alineado con  $q_1$  y  $q_2$  y que cumple  $(q_1, q_2, q_3) = -1$ , ya que  $q_1 = q_3 - (q_2 - q_3)$ .

**Proposición 2.27.** Sean  $q_1, q_2, q_3$  tres puntos alineados de un espacio afín  $\mathbb{A}_n$ , al menos dos de ellos distintos. Sea  $l$  la recta sobre la que están estos tres puntos, sea  $q_\infty$  el punto impropio de  $l$ . Entonces se cumple

$$(q_1, q_2, q_3) = (q_1, q_2, q_3, q_\infty)$$

*Demostración.* Ver [2], sección 3.6. □

**Teorema 2.28** (Invariancia afín de la razón simple). *Sea  $f : \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}'_n$  una afinidad. Sean  $q_1, q_2, q_3$  tres puntos alineados de  $\mathbb{A}_n$ , al menos dos de ellos distintos. Entonces la razón simple  $(f(q_1), f(q_2), f(q_3))$  está definida y cumple*

$$(f(q_1), f(q_2), f(q_3)) = (q_1, q_2, q_3)$$

*Demostración.* Se deduce de la Proposición 2.27 y el Teorema 2.22. □

## 2.7. Involuciones

**Definición 2.29.** Sea un espacio proyectivo  $\mathbb{P}_1$  de dimensión  $n = 1$ . Las proyectividades  $\tau$  de  $\mathbb{P}_1$  que cumplen  $\tau^2 = \text{Id}_{\mathbb{P}_1}$  y  $\tau \neq \text{Id}_{\mathbb{P}_1}$  se llaman *involuciones* de  $\mathbb{P}_1$ .

**Observación 2.30.** Sean  $p, q \in \mathbb{P}_1$  puntos cualesquiera, entonces  $q = \tau(p)$  si y sólo si  $p = \tau(q)$ .

**Notación 2.31.** El par de puntos  $\{p, \tau(p)\}$  se llaman *puntos correspondientes* por la involución  $\tau$ .

**Proposición 2.32.** Sean  $q, \bar{q}$  dos puntos distintos de  $\mathbb{P}_1$ . La aplicación que deja  $q, \bar{q}$  fijos y envía cada  $p \neq \{q, \bar{q}\}$  a su cuarto armónico relativo a  $\{q, \bar{q}\}$  es una involución de  $\mathbb{P}_1$ . Además cualquier involución  $\tau$  de  $\mathbb{P}_1$  puede ser obtenida de esta manera, siendo  $q, \bar{q}$  los puntos fijos de  $\tau$  (que pueden ser reales o imaginarios).

*Demostración.* Ver [2], sección 5.6. □

**Corolario 2.33.** Una involución está determinada por sus puntos fijos. Dos puntos  $p, p' \neq \{q_1, q_2\}$  son correspondientes por la involución  $\tau$  de puntos fijos  $q_1, q_2$  si y sólo si  $(q_1, q_2, p, p') = -1$ .

**Proposición 2.34.** Dos pares distintos de puntos correspondientes determinan una involución. Es decir, dados  $p, p', q, q' \in \mathbb{P}_1$  tales que  $\{p, p'\} \cap \{q, q'\} = \emptyset$ , existe una única involución  $\tau$  de  $\mathbb{P}_1$  tal que  $\tau(p) = p'$  y  $\tau(q) = q'$ .

*Demostración.* Ver [2], sección 5.6. □

## 2.8. Perspectividades

Sea  $L$  una variedad lineal de  $\overline{\mathbb{A}}_n$  de dimensión  $d \geq 2$ . Llamaremos  $L^\nabla$  al conjunto de variedades lineales de dimensión  $d+1$  que contienen a  $L$ . Sean  $T_1, T_2$  dos variedades lineales suplementarias a  $L$ .

**Definición 2.35.** Definimos la *perspectividad* de  $T_1$  a  $T_2$  con centro  $L$  como la aplicación  $f : T_1 \rightarrow T_2$  que se obtiene al componer la *proyección* desde  $L$  restringida a  $T_1$

$$\begin{aligned} \delta_L|_{T_1} : T_1 &\longrightarrow L^\nabla \\ p &\longmapsto p \vee L \end{aligned}$$

con la *sección* por  $T_2$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{L, T_2} : L^\nabla &\longrightarrow T_2 \\ L' &\longmapsto L' \cap T_2 \end{aligned}$$

Observamos que por definición  $f = \sigma_{L, T_2} \circ \delta_L|_{T_1}$  cumple que  $\forall p \in T_1$

$$f(p) = \tilde{p} = (p \vee L) \cap T_2$$

**Proposición 2.36.** La perspectividad  $f$  es una proyectividad entre  $T_1$  y  $T_2$ .

*Demostración.* Ver [2], sección 1.9. □

## 2.9. Noción de cuádrica

En este capítulo definiremos el concepto de cuádrica en un espacio proyectivo. Para ello utilizaremos las formas bilineales simétricas. Primero haremos un recordatorio sobre éstas.

**Definición 2.37.** Una *forma bilineal simétrica* en un espacio vectorial  $F$ , sobre un cuerpo  $k$  es una aplicación  $\eta : F \times F \longrightarrow k$  que cumple:

- (a)  $\eta(u, v) = \eta(v, u) \quad \forall u, v \in F$
- (b)  $\eta(u_1 + u_2, v) = \eta(u_1, v) + \eta(u_2, v) \quad \forall u_1, u_2, v \in F$
- (c)  $\eta(\lambda u, v) = \lambda \eta(u, v) \quad \forall \lambda \in k, \forall u, v \in F$

**Definición 2.38.** Sea  $\mathbb{P}_n$  un espacio proyectivo con espacio vectorial asociado  $F$ . Una *cuádrica* de  $\mathbb{P}_n$  es una clase dentro de las formas bilineales simétricas no nulas en  $F$ , módulo proporcionalidad. Es decir, cada cuádrica  $Q$  es una clase no nula  $Q = \{\lambda \eta\}_{\lambda \in k - \{0\}}$ , donde  $\eta$  es una forma bilineal simétrica en  $F$  no nula.

**Notación 2.39.** Se dice que  $Q$  está representada por  $\eta$ , y se escribe  $Q = [\eta]$ .

**Definición 2.40.** Un punto  $p = [v] \in \mathbb{P}_n$  pertenece a una cuádrica  $Q = [\eta]$  si y sólo si  $\eta(v, v) = 0$ . Escribiremos  $p \in Q$  para indicar que el punto  $p$  pertenece a la cuádrica  $Q$ .

**Proposición 2.41.** Esta condición de pertenencia, no depende de los representantes de  $p$  y de  $\eta$  elegidos ya que

$$\lambda \eta(\mu v, \mu v) = \lambda \mu^2 \eta(v, v) = 0$$

**Observación 2.42.** Sea  $Q = [\eta]$  una cuádrica de  $\mathbb{P}_n$  y  $f : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}'_n$  una proyectividad representada por el isomorfismo  $\varphi : E \longrightarrow E'$ . Se comprueba fácilmente que la composición de la aplicación

$$\varphi^{-1} \times \varphi^{-1} : E' \times E' \longrightarrow E \times E$$

con la forma  $\eta$  es una forma bilineal simétrica no nula  $\eta \circ (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1})$  en  $E'$ .

**Definición 2.43.** A esta forma  $\eta \circ (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1})$  la llamamos *imagen* de  $Q$  por  $f$  que también designamos  $f(Q)$ .

**Definición 2.44.** Sea  $e_0, \dots, e_n$  una base de  $F$ , sea  $Q = [\eta]$ . Llamamos *matriz de la cuádrica*  $Q$  relativa a esta base, a la matriz

$$\begin{pmatrix} \eta(e_0, e_0) & \dots & \eta(e_0, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(e_n, e_0) & \dots & \eta(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Llamamos *ecuación de una cuádrica* relativa a una referencia  $\Delta$ , a la condición de que un punto cualquiera  $x$  pertenezca a la cuádrica

$$(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \eta(e_0, e_0) & \dots & \eta(e_0, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(e_n, e_0) & \dots & \eta(e_n, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Donde esta matriz es la *matriz de la cuádrica* relativa a una base adaptada a la referencia  $\Delta$ .

## 2.10. Conjugación respecto a una cuádrica

**Definición 2.45.** El punto  $p = [u]$  es *conjugado* de  $q = [v]$  respecto a la cuádrica  $Q = [\eta]$  si y sólo si  $\eta(u, v) = 0$ .

**Observación 2.46.** Debido a la simetría de la forma  $\eta$ , el punto  $p$  es conjugado de  $q$  respecto a la cuádrica  $Q$  si y sólo si  $q$  es conjugado de  $p$  respecto a la cuádrica  $Q$ .

**Proposición 2.47.** (Invariancia de la conjugación) Sea  $f : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}'_n$  una proyectividad y  $Q$  una cuádrica de  $\mathbb{P}_n$ , entonces los puntos  $p, q$  de  $\mathbb{P}_n$  son conjugados respecto  $Q$  si y sólo si los puntos  $f(p), f(q)$  son conjugados respecto  $f(Q)$ .

*Demostración.* Sean  $f = [\varphi]$ ,  $Q = [\eta]$ ,  $f(Q) = [\eta \circ (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1})]$ ,  $p = [u]$ ,  $q = [v]$ . Utilizamos que

$$\eta(u, v) = \eta \circ (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1})(\varphi(u), \varphi(v)) = 0$$

□

**Definición 2.48.** Sean  $l$  una recta y  $Q$  una cuádrica de un espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n$ . Se dice que  $l$  es *tangente* a  $Q$  si y sólo si  $Q \cap l$  es o bien  $l$  o bien es un par de puntos coincidentes.

En caso contrario diremos que  $l$  es una *cuerda* de  $Q$  y los puntos de intersección de  $l$  con  $Q$  los llamaremos *extremos* de la cuerda.

**Teorema 2.49.** Considerando la conjugación respecto a una cuádrlica  $Q$ :

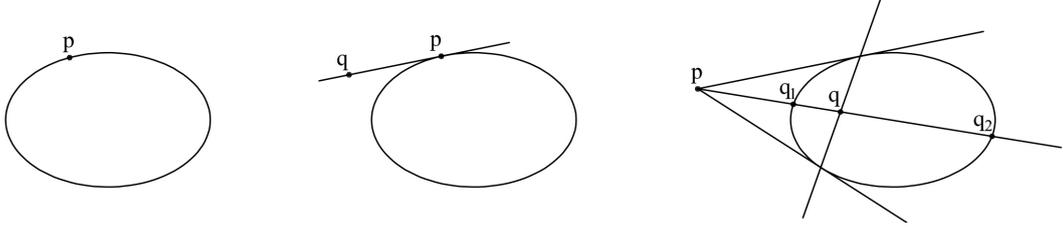


Figura 4. Conjugación respecto una cuádrlica

- (a) Un punto  $p$  es conjugado de sí mismo si y sólo si pertenece a la cuádrlica.
- (b) Dos puntos diferentes  $p$  y  $q$ ,  $p \in Q$ , son conjugados si y sólo si la recta  $pq$  es tangente a  $Q$  en  $p$ .
- (c) Dos puntos diferentes  $p$  y  $q$ ,  $p \notin Q$ ,  $q \notin Q$ , son conjugados respecto a  $Q$  si y sólo si la recta  $pq$  es una cuerda de  $Q$  y el par  $p, q$  divide armónicamente los extremos de la cuerda  $pq$ .

*Demostración.* Ver [2], sección 6.4. □

**Definición 2.50.** Dada una cuádrlica  $Q$  y un punto cualquiera  $p \in \mathbb{P}_n$ , consideramos el conjunto:

$$H_{p,Q} = \{q \in \mathbb{P}_n \mid p \text{ y } q \text{ son conjugados}\}$$

Pueden darse las siguientes situaciones:

- (a)  $H_{p,Q} = \mathbb{P}_n$ . El punto  $p$  se dice un *punto doble* de la cuádrlica  $Q$ .
- (b)  $H_{p,Q}$  es un hiperplano de  $\mathbb{P}_n$ . Este hiperplano es conocido como el *hiperplano polar* de  $p$  respecto a la cuádrlica  $Q$ .

**Definición 2.51.** Una cuádrlica  $Q$  se llama *no degenerada* si no contiene ningún *punto doble*. Se llama *degenerada* si contiene al menos un *punto doble*.

**Definición 2.52.** Sea  $Q$  una cuádrlica no degenerada. La acción de asignar a cada punto su hiperplano polar, define la aplicación biyectiva *polaridad relativa a  $Q$*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_Q : \mathbb{P}_n &\longleftrightarrow \mathbb{P}_n^\vee \\ p &\longleftrightarrow H_{p,Q} \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{P}_n^\vee$  es el espacio dual (o espacio de los hiperplanos) de  $\mathbb{P}_n$ .

**Notación 2.53.** Sea  $Q$  una cuádrica no degenerada en un espacio proyectivo de dimensión  $n = 2$ . A cada punto  $p$  del espacio proyectivo le corresponde una recta por la aplicación  $\mathcal{P}_Q$ , a esta recta se le llama *recta polar* de  $p$  respecto a  $Q$ . A su vez, a cada recta  $r$  del espacio proyectivo le corresponde un punto por  $\mathcal{P}_Q^{-1}$ , a este punto se le llama *polo* de  $r$  respecto la cuádrica  $Q$ .

**Proposición 2.54.** Una cuádrica  $Q$  y su polaridad  $\mathcal{P}_Q$  tienen la misma matriz relativa a cualquier referencia fijada.

*Demostración.* Ver [2] sección 6.5. □

## 3. Cuádrica del absoluto

### 3.1. Cuádrica del absoluto

En este capítulo veremos cómo tratar temas métricos en un contexto proyectivo. Trabajaremos con el espacio proyectivo  $\overline{\mathbb{A}}_n$ , clausura proyectiva del espacio afín  $\mathbb{A}_n$ . Consideramos el espacio euclídeo (o espacio afín con producto escalar) definido por la terna  $(\mathbb{A}_n, F, T)$ , donde

- $\mathbb{A}_n$  es un espacio afín ( $n \geq 2$ )
- $F$  es el espacio vectorial asociado a  $\mathbb{A}_n$
- $T$  es una forma bilineal en  $F$  definida positiva y simétrica, llamada *producto escalar*.

**Definición 3.1.** El hiperplano impropio de  $\overline{\mathbb{A}}_n$ ,  $H_\infty$ , es un espacio proyectivo con espacio vectorial asociado  $F$ . Por lo tanto el producto escalar  $T$  define una cuádrica en  $H_\infty$ . Esta cuádrica  $\mathbf{K} = [T]$  se llama *cuádrica del absoluto*, y será la que nos permitirá controlar las cuestiones métricas en  $\overline{\mathbb{A}}_n$ .

Por lo tanto partimos del espacio afín euclídeo  $(\mathbb{A}_n, F, T)$  y para poder tratar cuestiones métricas dentro de su clausura proyectiva, trabajaremos con la terna  $(\overline{\mathbb{A}}_n, H_\infty, \mathbf{K})$ .

**Observación 3.2.** Fijada una referencia afín ortonormal, trabajamos con la referencia proyectiva asociada. Entonces la *cuádrica del absoluto* tendrá ecuación  $\mathbf{K} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$

**Observación 3.3.** La cuádrica del absoluto  $\mathbf{K}$  no tiene puntos reales, ya que el producto escalar  $T$  es definido positivo, es decir  $T(v, v) > 0 \forall v \in F$ . Además, como no tiene puntos reales, no tiene puntos dobles y por tanto es una cuádrica no degenerada.

Una variedad lineal afín  $L$  es un espacio afín, con espacio director asociado su subespacio director  $F_L$ . Por lo tanto se convierte en espacio euclídeo tomando la restricción  $T|_{F_L}$  como su producto escalar. Esta propiedad afín la traducimos a términos proyectivos en la siguiente observación.

**Observación 3.4.** Si  $\dim L \geq 2$ , la *cuádrica del absoluto* de  $L$  es la sección de la *cuádrica del absoluto* de  $\mathbb{A}_n$  con la parte impropia de  $L$ .

**Teorema 3.5.** *Una cuádrica de un espacio euclídeo  $\mathbb{A}_n$ , no degenerada, con puntos reales y que contiene a la cuádrica del absoluto es una esfera, y recíprocamente.*

*Demostración.* Fijada una referencia ortonormal de  $\mathbb{A}_n$ , utilizaremos coordenadas homogéneas en la referencia proyectiva asociada.

La cuádrica del absoluto en la referencia fijada tendrá ecuación

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

Sea la ecuación de  $Q$

$$\sum_{i,j=0}^n a_{i,j}x_ix_j = 0$$

hacemos la intersección de  $Q$  con el hiperplano del infinito ( $x_0 = 0$ ), tendremos que  $Q$  contiene a la cuádrica del absoluto si y sólo si

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}x_ix_j = 0$$

es la ecuación trivial  $0 = 0$  o es proporcional a  $x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

Por tanto la ecuación de  $Q$  queda

$$\lambda(x_1^2 + \dots + x_n^2) + 2 \sum_{1 < j \leq n} a_{0,j}x_0x_j + a_{0,0}x_0^2 = 0$$

Si  $\lambda = 0$  es una cuádrica degenerada, por tanto suponemos  $\lambda \neq 0$ . Dividimos la ecuación por  $\lambda$  y hacemos  $a_i = a_{0,j}/\lambda$ ,  $a = a_{0,0}/\lambda$  y obtenemos la ecuación

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_ix_0x_i + ax_0^2 = 0$$

para  $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbb{R}$ , no todos cero.

Pasamos de coordenadas homogéneas a coordenadas afines haciendo  $X_i = x_i/x_0$  y la ecuación de  $Q$  queda

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_iX_i + a = 0$$

que completando cuadrados quedará

$$(X_1 + a_1)^2 + \dots + (X_n + a_n)^2 = -a + a_1^2 + \dots + a_n^2$$

La cuádrica definida por  $Q$  es degenerada si y sólo si  $-a + a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0$ . Por lo tanto, como  $Q$  es no degenerada,  $-a + a_1^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$ .

Por otro lado, si  $Q$  tiene puntos reales entonces  $-a + a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$ . Además la ecuación de  $Q$  es la condición de que el punto propio  $(X_1, \dots, X_n)$  esté a distancia  $-a + a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$  del punto  $(-a_1, \dots, -a_n)$ . Por lo tanto la cuádrica  $Q$  es una esfera con centro  $C = (-a_1, \dots, -a_n)$  y radio  $R = \sqrt{-a + a_1^2 + \dots + a_n^2}$ .

El recíproco se obtiene mediante el mismo argumento.  $\square$

## 3.2. Puntos cíclicos

**Observación 3.6.** Supongamos que trabajamos en dimensión  $n = 2$ . Tomamos una referencia proyectiva asociada a una referencia afín ortonormal. El absoluto  $\mathbf{K}$  tiene ecuación  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ , y por tanto  $\mathbf{K}$  es el par de puntos imaginarios  $[0, 1, i], [0, 1, -i]$  de la recta impropia de  $\overline{\mathbb{A}}_2$ .

**Definición 3.7.** Estos puntos se llaman *puntos cíclicos*, y se denotan  $\{I, J\}$ . La razón de este nombre viene del Teorema 3.5 aplicado al plano ( $n = 2$ ).

## 3.3. Ortogonalidad

El concepto de perpendicularidad en  $\overline{\mathbb{A}}_n$  se puede traducir a *conjugación respecto la cónica del absoluto*. Es lógico que la perpendicularidad se controle en el infinito, ya que sólo depende de las direcciones o puntos impropios de las rectas. Como es de esperar, no podremos calcular el perpendicular a un punto propio;  $\mathbf{K}$  es una cuádrica en el hiperplano del infinito y por tanto sólo podemos conjugar puntos del infinito.

**Proposición 3.8.** Dos puntos  $p, q \in H_\infty$  son direcciones ortogonales si y sólo si son puntos conjugados respecto a la *cuádrica del absoluto*  $\mathbf{K}$ .

*Demostración.* Las direcciones  $p = [v]$  y  $q = [w]$  son perpendiculares si lo son sus vectores representantes, es decir  $T(v, w) = 0$ , que es la misma condición que se ha de cumplir para que  $p$  y  $q$  sean conjugadas respecto  $\mathbf{K} = [T]$ .  $\square$

**Corolario 3.9.** Utilizando el Teorema 2.49, podemos decir que dos rectas de un plano son perpendiculares si y sólo si sus puntos impropios dividen armónicamente los puntos cíclicos del plano.

**Observación 3.10.** En la métrica euclídea no hay direcciones perpendiculares a sí mismas ya que, sea  $p = [v] \in H_\infty$

$$v \perp v \Leftrightarrow T(v, v) = 0$$

pero el producto escalar  $T$  es definido positivo, por lo tanto  $T(v, v) > 0 \forall v \in F$ .

**Definición 3.11.** Dos variedades lineales afines se dicen *variedades ortogonales* cuando dos vectores cualesquiera de sus respectivos espacios directores son ortogonales.

Estudiaremos la ortogonalidad en  $\overline{\mathbb{A}}_n$ , para el caso en el que la dimensión sea  $n = 3$ . Los subespacios directores de las variedades lineales afines definen sus partes impropias, por tanto esta definición de ortogonalidad en un espacio afín de dimensión  $n = 3$  se traduce en términos proyectivos al siguiente corolario.

**Corolario 3.12.** Sea  $\overline{\mathbb{A}}_3$ , su hiperplano del infinito  $H_\infty$  tiene dimensión 2, y por tanto aquí la ortogonalidad se reduce a dos casos:

- (1) Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el punto impropio de una es conjugado, respecto del absoluto  $\mathbf{K}$ , del punto impropio de la otra.
- (2) Una recta  $r$  es perpendicular a un plano  $\pi$  si y sólo si el punto impropio de la recta  $r$  es el polo, respecto del absoluto  $\mathbf{K}$ , de la recta impropia del plano  $\pi$ , o también si la recta impropia del plano  $\pi$  es la recta polar, respecto del absoluto  $\mathbf{K}$ , del punto impropio de la recta  $r$ .

**Observación 3.13.** Existe una excepción para la Definición 3.11 de ortogonalidad. Es habitual llamar ortogonales a dos hiperplanos de  $\mathbb{A}_n$  cuando las rectas perpendiculares a cada uno de los planos son ortogonales entre ellas. En un espacio afín de dimensión  $n = 3$  esta definición de ortogonalidad se traduce, en términos proyectivos, al siguiente corolario.

**Corolario 3.14.** Dos planos  $H$  y  $H'$  de  $\overline{\mathbb{A}}_3$  son perpendiculares si y sólo si los polos (relativos al absoluto  $\mathbf{K}$ ) de las respectivas rectas impropias de  $H$  y  $H'$  son conjugados respecto de  $\mathbf{K}$ .

### 3.4. Fórmula de Laguerre

El ángulo, que es un número real que mide la posición relativa entre las direcciones de dos rectas, es uno de los elementos básicos de la geometría métrica. La fórmula de Laguerre establece una relación entre esta propiedad métrica y su traducción a geometría proyectiva; expresa el ángulo en términos de la razón doble, que es un invariante proyectivo.

Tomamos como ángulo de dos rectas propias de  $\overline{\mathbb{A}}_n$ , el ángulo entre sus partes propias, sin tener en cuenta su signo.

**Teorema 3.15** (Fórmula de Laguerre). *Sean  $l_1$  y  $l_2$  dos rectas cualesquiera de un plano euclídeo  $\mathbb{A}_2$ . El ángulo entre las rectas  $l_1$  y  $l_2$  es*

$$\widehat{l_1 l_2} = \pm \frac{1}{2i} \log(I, J, q_1, q_2)$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  son los puntos impropios de  $l_1$  y  $l_2$  respectivamente.

*Demostración.* Si las rectas son paralelas,  $q_1 = q_2$  y por tanto la razón doble será 1. Supongamos entonces que las rectas  $l_1$  y  $l_2$  se intersecan en un punto  $O$ . Tomamos una referencia afín ortonormal, con origen  $O$  y primer eje  $l_1$ , trabajamos con su referencia proyectiva asociada  $\Delta$ . Las coordenadas de la dirección de  $l_2$  serán  $[0, \cos\alpha, \sin\alpha]$  en la referencia  $\Delta$ . Como la referencia  $\Delta$  es ortonormal, por la observación 3.6, tenemos que  $I = [0, 1, -i]$  y  $J = [0, 1, i]$ . Tomamos la referencia  $\bar{\Delta}$ , inducida por  $\Delta$  sobre la recta impropia, y las coordenadas de cada punto quedarán

$$I = [1, -i] \quad J = [1, i] \quad q_1 = [1, 0] \quad q_2 = [\cos\alpha, \sin\alpha]$$

Calculando la razón doble de estos cuatro puntos tendremos

$$(I, J, q_1, q_2) = \frac{-i}{i} : \frac{-i \cos\alpha - \sin\alpha}{i \cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha + i \sin\alpha}{\cos\alpha - i \sin\alpha} = e^{2\alpha i}$$

y despejando  $\alpha$  de la ecuación, obtenemos la fórmula de Laguerre. □

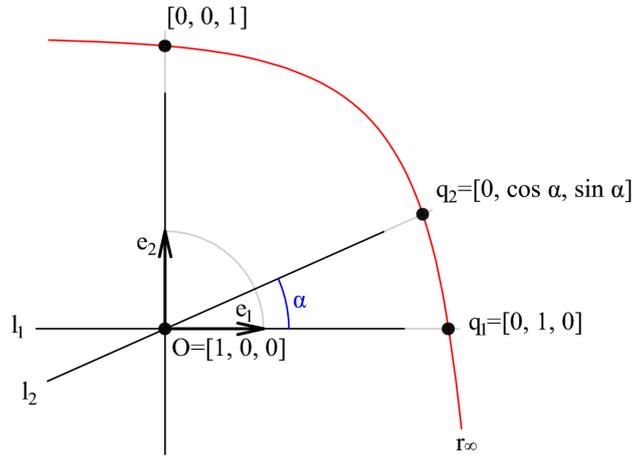


Figura 5. Demostración de la fórmula de Laguerre

**Observación 3.16.** Si en la demostración anterior hacemos la otra elección de puntos cíclicos, tal que  $I = [0, 1, i]$  y  $J = [0, 1, -i]$ , el ángulo que obtenemos cambia de signo respecto al obtenido si la elección es  $I = [0, 1, -i]$  y  $J = [0, 1, i]$ . Por tanto cada elección de orden de  $I, J$  se corresponde con una orientación del plano.

**Observación 3.17.** Sean ahora  $l_1$  y  $l_2$  dos rectas cualesquiera de  $\mathbb{A}_n$ , con  $n > 2$ . Calculamos el ángulo entre estas dos rectas tomando una paralela a una de ellas que se interseque con la otra y aplicando la fórmula de Laguerre a estas dos rectas que sí se intersecan y por tanto contenidas en un plano.

**Teorema 3.18.** Sea  $f : \overline{\mathbb{A}}_n \rightarrow \overline{\mathbb{A}}'_n$  una afinidad entre espacios euclídeos  $\mathbb{A}_n$  y  $\mathbb{A}'_n$ , las siguientes condiciones son equivalentes (sin tener en cuenta signos de ángulos)

- (1)  $\widehat{l_1 l_2} = f(\widehat{l_1})f(\widehat{l_2})$  para rectas cualesquiera  $l_1, l_2$
- (2)  $l_1$  es perpendicular a  $l_2 \Leftrightarrow f(l_1)$  es perpendicular a  $f(l_2)$  para rectas cualesquiera  $l_1, l_2$
- (3)  $f|_{H_\infty(\mathbf{K})} = \mathbf{K}'$

donde  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$  son el absoluto de  $\overline{\mathbb{A}}_n$  y  $\overline{\mathbb{A}}'_n$  respectivamente.

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2) es inmediato.

Para demostrar (2)  $\Rightarrow$ (3) utilizaremos la propiedad de que si las conjugaciones respecto dos cuádricas  $Q$  y  $Q'$  coinciden, entonces  $Q = Q'$ . Sean  $q_1, q_2$  direcciones de  $l_1, l_2$  respectivamente, conjugadas respecto  $\mathbf{K}$ , y por tanto  $f(q_1)$  y  $f(q_2)$  serán conjugadas respecto a  $f(\mathbf{K})$  por ser la conjugación un invariante proyectivo (Proposición 2.47). Por tanto, por la propiedad que hemos enunciado anteriormente  $f(\mathbf{K}) = \mathbf{K}'$ .

Supongamos que se cumple (3), y sean  $q_1, q_2$  dos puntos impropios cualesquiera. Si  $\{I, J\}$  es la sección de  $\mathbf{K}$  con  $q_1 q_2$ , entonces  $\{f(I), f(J)\}$  será la sección de  $\mathbf{K}'$  con  $f(q_1)f(q_2)$ , ya que  $f(\mathbf{K}) = \mathbf{K}'$ . Entonces por la invariancia proyectiva de la razón doble, y la fórmula de Laguerre, tenemos (1).  $\square$

**Definición 3.19.** Las afinidades que conservan ángulos (sin tener en cuenta signo) se llaman *semejanzas*.

## 4. Perspectiva

### 4.1. Introducción

El objetivo de la perspectiva es, fijado un punto de vista, representar una figura tridimensional sobre una superficie plana. En medida de lo posible, se intenta que esta representación produzca en el ojo de un observador, convenientemente situado, la misma impresión que produciría la figura.

Entre el punto de vista, que designaremos  $O$ , donde se supone colocado el ojo del observador, y el objeto a representar, se coloca una superficie plana, considerada transparente, que llamaremos *plano del cuadro*  $\Pi$ . Cada punto del objeto envía al ojo un rayo rectilíneo que llega al cristalino, es el *rayo visual* del punto. La representación de un punto es la intersección de su rayo visual con el plano del cuadro.

Una representación obtenida de esta manera se conoce como una *perspectiva*.

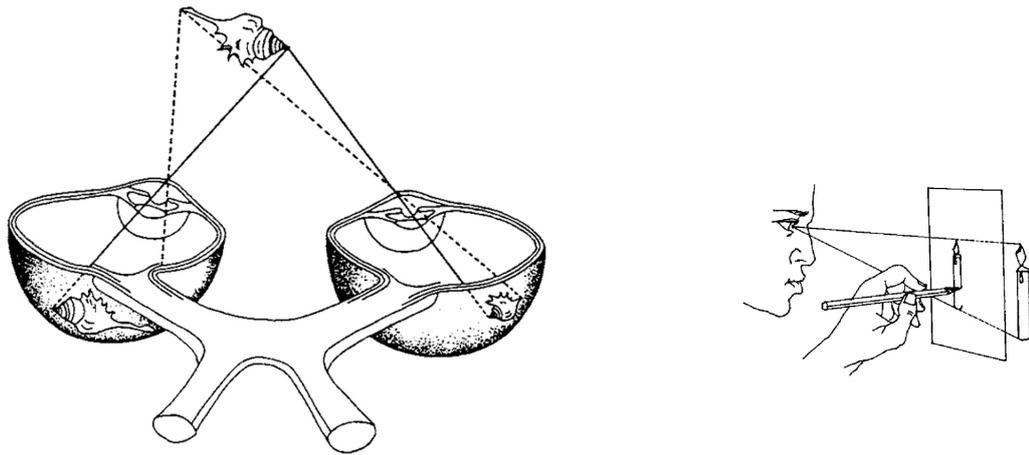


Figura 6. Visión binocular. Cada ojo del espectador capta una perspectiva ligeramente diferente a la del otro ojo, esta información es combinada y procesada en el cerebro para obtener información de profundidad. Es por esto que un solo dibujo no puede conservar exactamente la apariencia del objeto. Para tener una representación exactamente igual a lo que percibimos con la vista habría que hacer dos perspectivas y mostrar a cada ojo su correspondiente dibujo, utilizando un estereoscopio. Imagen de [12].

En este capítulo consideraremos la representación que se obtiene mirando desde un único ojo, en el que situaremos el punto de vista  $O$  de la perspectiva.

## 4.2. Definiciones y nociones generales

Supongamos que nuestro espacio ambiente es un espacio euclídeo tridimensional  $\mathbb{A}_3$ . Trabajaremos sobre la clausura proyectiva  $\overline{\mathbb{A}}_3$  de  $\mathbb{A}_3$ , el plano impropio de  $\overline{\mathbb{A}}_3$  se designará  $\pi_\infty$ , por lo tanto  $\overline{\mathbb{A}}_3 = \mathbb{A}_3 \cup \pi_\infty$ . Los puntos podrán ser propios o impropios y a partir de ahora se hablará indistintamente de direcciones o puntos impropios.

Para definir una perspectiva fijaremos un plano propio  $\Pi$ , llamado *plano del cuadro*, con frecuencia este plano es perpendicular al plano del suelo, aunque aquí estudiaremos el caso general que no sea necesariamente perpendicular. Fijaremos también el *punto de vista* que designaremos  $O$ .

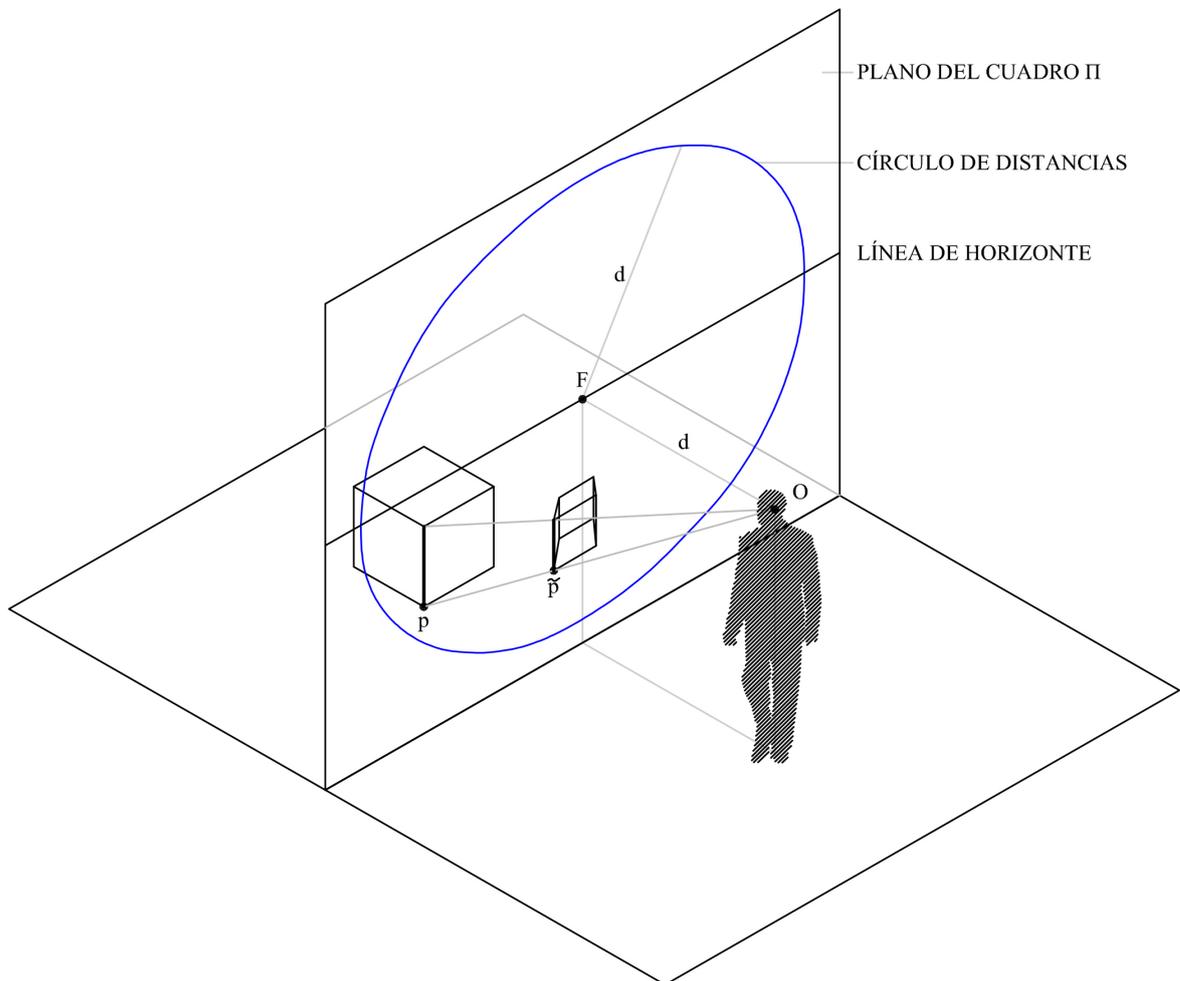


Figura 7. Elementos básicos de una perspectiva

Proyectando desde  $O$  y haciendo la sección con  $\Pi$  definimos una aplicación  $\psi$  que llamaremos *perspectiva*, que nos determina la representación del objeto considerado.

$$\begin{aligned} \psi : \overline{\mathbb{A}}_3 - \{O\} &\longrightarrow \Pi \\ p &\longmapsto (p \vee O) \cap \Pi = \tilde{p} \end{aligned}$$

A la imagen  $\tilde{p} = \psi(p)$  de un punto  $p$  se le llama *representación* de  $p$ . La aplicación  $\psi$  no es inyectiva, hay infinitos puntos cuya representación es  $\tilde{p}$ , todos los puntos en el rayo visual de  $p$ .

Cuando se comienza a dibujar una perspectiva sobre el plano del cuadro, primero de todo se fijan sobre  $\Pi$  los siguientes elementos, que más adelante explicaremos detalladamente:

- *punto principal*  $F$
- *Círculo de distancia*  $D$
- *Línea del horizonte*

Llamamos *línea de vista* a la perpendicular al plano del cuadro por  $O$ . Si hacemos la intersección de la línea de vista con el plano del cuadro, obtenemos el punto  $F$ , que llamaremos *punto principal*, y a la distancia  $FO$  la designaremos como  $d$  o como *distancia focal* de aquí en adelante. A la circunferencia de centro  $F$  y radio  $d$  le llamaremos *círculo de distancia* y lo designaremos  $D$ .

La representación del punto impropio de una recta se conoce como *punto de fuga* de la recta. La representación de la recta impropia de un plano se conoce como *recta de fuga* del plano.

Los planos paralelos al suelo se llaman *planos horizontales*. La recta de fuga de los planos horizontales se conoce como *línea del horizonte*, y como ya hemos visto, es uno de los elementos que se sitúan sobre el plano del cuadro al empezar a dibujar.

### 4.3. Invariancia afín y métrica

Considerando la restricción de  $\psi$  sobre un plano cualquiera  $\pi$  de  $\overline{\mathbb{A}}_3$  que no pase por  $O$  obtenemos la perspectividad

$$\psi|_{\pi} : \pi \longrightarrow \Pi$$

que, por tanto, por la Proposición 2.36, es una proyectividad. Las propiedades proyectivas de cualquier figura en  $\pi$  se mantendrán en su representación. Por ejemplo las rectas concurrentes se representarán como rectas concurrentes, y los puntos alineados como puntos alineados. Sin embargo, en general, en la representación no se conservan las propiedades afines y métricas de  $\pi$ . Primero veamos en qué casos  $\psi_{\pi}$  es una semejanza.

**Proposición 4.1.** *Si el plano  $\pi$  es paralelo al plano del cuadro, entonces  $\psi|_{\pi}$  es una semejanza, en caso contrario,  $\psi|_{\pi}$  no es una afinidad.*

*Demostración.* Sea  $r_{\infty}$  la recta impropia de  $\pi$ ,  $s_{\infty}$  la recta impropia de  $\Pi$ . Si  $\pi$  es paralelo a  $\Pi$ , la recta impropia de  $\pi$  coincide con la de  $\Pi$ .  $\psi|_{\pi}$  deja invariantes los puntos de esta recta, por tanto  $\psi|_{\pi}$  es una semejanza, por el Teorema 3.18.

Supongamos ahora que  $\psi|_{\pi}$  es una afinidad, entonces  $O \vee r_{\infty} \cap \Pi = s_{\infty}$ , y por tanto  $s_{\infty} \subset O \vee r_{\infty}$ . Por otro lado,  $s_{\infty} \subset \Pi_{\infty}$ . La recta  $r_{\infty}$  también cumple  $r_{\infty} \subset O \vee r_{\infty}$  y  $r_{\infty} \subset \Pi_{\infty}$ . Por tanto, las rectas  $r_{\infty}$  y  $s_{\infty}$  pertenecen a dos planos  $\Pi_{\infty}$  y  $O \vee r_{\infty}$ , distintos por ser  $O$  punto propio, por tanto  $r_{\infty} = s_{\infty}$ .  $\square$

Por tanto, si el plano  $\pi$  es paralelo al plano del cuadro, la representación de figuras en  $\pi$  conserva los ángulos y proporciones. Sin embargo, si no es paralelo estas propiedades no se conservan. La pregunta es cómo se ven modificadas. Para resolver este problema expresaremos las propiedades afines y métricas como relaciones proyectivas con el absoluto, y utilizaremos la invariancia proyectiva para identificar estas relaciones después de aplicar  $\psi$ .

#### 4.4. Paralelismo

Considerando la restricción de  $\psi$  sobre  $\pi_{\infty}$ , plano impropio de  $\overline{\mathbb{A}}_3$ , obtenemos la perspectividad

$$\psi|_{\pi_{\infty}} : \pi_{\infty} \longrightarrow \Pi$$

que, por tanto, es una proyectividad. Las relaciones de incidencia entre puntos y rectas de  $\pi_{\infty}$  se mantienen en la representación por ser proyectividad.

**Definición 4.2.** Dos variedades lineales afines se dicen *paralelas* si y sólo si sus espacios directores afines están incluidos uno de ellos en el otro. En términos proyectivos, dos variedades lineales afines serán *paralelas* si y sólo si sus partes impropias están incluidas una en la otra.

**Proposición 4.3.** (a) *Dos rectas de  $\mathbb{A}_3$  son paralelas si y sólo si tienen el mismo punto de fuga.*

(b) *Dos planos de  $\mathbb{A}_3$  son paralelos si y sólo si tienen la misma recta de fuga.*

(c) *Una recta y un plano son paralelos si y sólo si el punto de fuga de la recta pertenece a la recta de fuga del plano.*

**Proposición 4.4.** (a) *Una recta de  $\mathbb{A}_3$  es paralela al plano del cuadro si y sólo si su punto de fuga es un punto impropio del plano del cuadro.*

(b) *Un plano de  $\mathbb{A}_3$  es paralelo al plano del cuadro si y sólo si su recta de fuga es la recta impropia del plano del cuadro.*

*Demostración.* Por ser  $\psi$  proyectividad se conservan las inclusiones de rectas y puntos.  $\square$

Los siguientes corolarios se deducen de la Proposición 4.4, el segundo además utiliza la Proposición 4.1.

**Corolario 4.5.** Dos rectas paralelas, no coincidentes, se representan como rectas paralelas sobre el plano del cuadro si y sólo si son paralelas al plano del cuadro.

**Corolario 4.6.** Si un plano  $\pi$  de  $\mathbb{A}_3$  es paralelo al plano del cuadro  $\Pi$ , entonces dos rectas cualesquiera paralelas de  $\pi$  serán representadas como rectas paralelas sobre el plano del cuadro.

A su vez, si dos pares de rectas paralelas de un plano  $\pi$ , en dos direcciones diferentes, son representadas como pares de rectas paralelas sobre el plano del cuadro, entonces  $\pi$  es un plano paralelo al plano del cuadro.

## 4.5. Dividir un segmento en perspectiva

En este apartado se demuestra cómo dividir un segmento dibujado en perspectiva, dada una razón simple. Un caso particular de esto es dividir un segmento en partes iguales.

**Proposición 4.7.** Sea  $l$  una recta de  $\mathbb{A}_3$  cuya representación se quiere dividir dada una proporción. Supongamos que  $l$  no pasa por  $O$ . Sea  $\tilde{l}$  la representación de  $l$  y  $p \in \tilde{l}$  su punto de fuga. Fijamos un punto propio  $q \in \Pi$ ,  $q \notin \tilde{l}$ , y una recta propia  $s \in \Pi$ , tal que  $s$  es paralela (no coincidente) a  $pq$ . Como  $q \notin s$  podemos considerar la perspectividad  $\varphi : \tilde{l} \rightarrow s$  con centro  $q$ . Entonces, la composición  $\varphi \circ \psi|_l : l \rightarrow s$  es una afinidad.

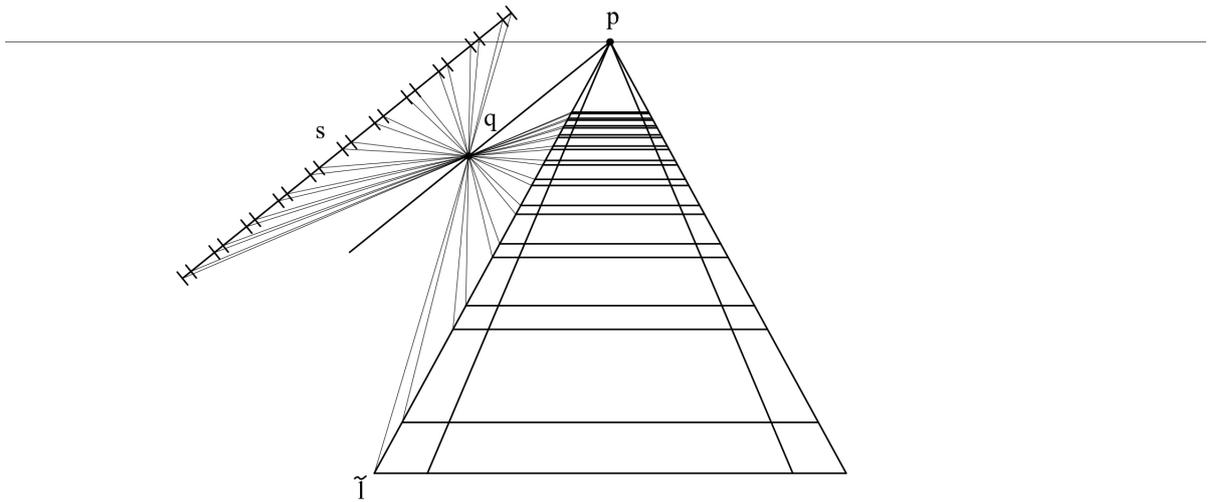


Figura 8. Vista en perspectiva de la división de un segmento.

*Demostración.* Como  $l$  no pasa por  $O$ , su representación  $\tilde{l}$  es una recta en  $\Pi$ . La aplicación  $\psi|_l : l \rightarrow \tilde{l}$  es una perspectividad con centro  $O$ , y por tanto una proyectividad.  $\varphi$  también es una proyectividad, por lo cual la composición  $\varphi \circ \psi|_l$  también será una proyectividad. Para demostrar que es una afinidad hay que ver que envía el punto impropio al punto impropio. Por definición de punto de fuga,  $\psi|_l$  envía el punto impropio de  $l$  a  $p$ . A su vez  $\varphi$  envía  $p$  al punto impropio de  $pq$  por ser rectas paralelas. Por lo tanto la composición  $\varphi \circ \psi|_l$  envía el punto impropio de  $l$  al punto impropio de  $s$  y entonces es una afinidad.  $\square$

De la anterior proposición se deduce el siguiente corolario que nos permite representar tres puntos alineados, con una razón simple dada entre ellos. A su vez, nos permite calcular la razón simple de tres puntos alineados (no alineados con  $O$ ) a partir de sus representaciones.

**Corolario 4.8.** Sean  $p_1, p_2, p_3$  tres puntos diferentes de una recta  $l$ ,  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3 \in \tilde{l}$  sus respectivas representaciones sobre el plano del cuadro. Entonces

$$(p_1, p_2, p_3) = (\varphi(\tilde{p}_1), \varphi(\tilde{p}_2), \varphi(\tilde{p}_3))$$

con la notación de la proposición anterior.

## 4.6. Ortogonalidad

La ortogonalidad depende de la cónica del absoluto  $\mathbf{K}$ . Para poder estudiar la ortogonalidad en el plano del cuadro  $\Pi$ , haría falta obtener la representación  $\psi(\mathbf{K})$  de la cónica del absoluto. Sin embargo,  $\psi(\mathbf{K})$  no tiene puntos reales, por lo que no se puede manejar fácilmente. Trabajaremos con otros objetos que contienen la misma información que el absoluto  $\mathbf{K}$  y que sí se pueden representar sobre el plano del cuadro.

Sea  $L_\infty$  la recta impropia del plano del cuadro,  $\{I, J\}$  el par de puntos cíclicos del plano del cuadro y  $F'$  la dirección ortogonal al plano del cuadro. Entonces,  $\mathbf{K} \cap L_\infty = \{I, J\}$ . Además  $F'$  es el polo respecto a  $\mathbf{K}$  de la recta  $L_\infty$ , y por lo tanto  $F' \notin L_\infty$ . Entonces podemos considerar la homología armónica  $h$ , con centro  $F'$  y eje  $L_\infty$ .

**Proposición 4.9.** Existe una única cónica no degenerada  $C$  de  $\pi_\infty$  tal que

- (a)  $\mathcal{P}_{\mathbf{K}} = \mathcal{P}_C \circ h$ , donde  $\mathcal{P}_{\mathbf{K}}, \mathcal{P}_C$  son las polaridades relativas a  $\mathbf{K}$  y a  $C$  respectivamente

$$\begin{array}{ccc} \pi_\infty & \xrightarrow{\mathcal{P}_{\mathbf{K}}} & \pi_\infty^\vee \\ h \downarrow & \nearrow \mathcal{P}_C & \\ \pi_\infty & & \end{array}$$

- (b)  $C$  tiene puntos reales  
(c)  $\mathbf{K}$  y  $C$  son bitangentes en  $\{I, J\}$

*Demostración.* Primero demostramos la existencia de  $C$ . Para ello tomamos en  $\pi_\infty$  una referencia  $\Delta = (p_0, p_1, p_2; U)$ , tal que sea autopolar respecto  $\mathbf{K}$  (es decir  $p_i, p_j$  conjugados respecto  $\mathbf{K}$  para  $i \neq j$ ) con  $p_0 = F'$  y por tanto  $p_1, p_2 \in L_\infty$ . Elegimos el punto unidad  $U$  de manera que la ecuación reducida de  $\mathbf{K}$  sea  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ . En esta referencia, la homología  $h$  de razón  $-1$ , recta de puntos fijos  $x_0 = 0$  y centro  $F'$ , tendrá matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea  $C$  la cuádrica con ecuación  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ , cuádrica no degenerada (ya que el  $\det$  de la matriz de  $C$  es  $\neq 0$ ) y con puntos reales. Por la Proposición 2.54 sabemos que las matrices de las cuádricas coinciden con la matriz de sus polaridades, y por lo tanto la condición (a) se cumple debido a la igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar (c) primero veremos que la ecuación de  $L_\infty$  es  $x_0 = 0$  en la referencia  $\Delta$ , por tanto  $\{I, J\} = \{[0, 1, i], [0, 1, -i]\}$ . Observamos que  $\mathbf{K} \cap L_\infty = C \cap L_\infty = \{I, J\}$ , además  $F'$  es el conjugado de  $L_\infty$  respecto ambas cuádricas  $\mathbf{K}$  y  $C$ , por tanto las tangentes de  $\mathbf{K}$  y  $C$  en  $I, J$  coinciden.  $\square$

La cuádrica  $C$  y la homología  $h$  sí se pueden representar en el plano del cuadro, y nos permitirán controlar fácilmente la condición de ortogonalidad a partir de los puntos de fuga.

**Notación 4.10.** Llamaremos  $\psi_\infty$  a la proyectividad  $\psi|_{\pi_\infty} : \pi_\infty \longrightarrow \Pi$

**Proposición 4.11.** Las representaciones sobre el plano del cuadro de los elementos más importantes al estudiar ortogonalidad son los siguientes

- (a) La representación  $\psi_\infty(F')$  es el punto principal  $F$ .
- (b) La representación  $\psi_\infty(C)$  es el círculo de distancia  $D$ .
- (c) La representación  $\psi_\infty \circ h \circ \psi_\infty^{-1}$  de  $h$  es la simetría central respecto a  $F$  que designaremos  $S_F$ .

*Demostración.* La demostración de (a) es inmediata por definición de  $\psi$ . Para demostrar (b) primero observamos que  $C$  es no degenerada real y por tanto su representación  $D$  también lo será. Además  $C \cap L_\infty = \{I, J\}$  y como  $\psi|_{L_\infty} = Id$  entonces  $D \cap L_\infty = \{I, J\}$ . Por lo tanto  $D$  es una circunferencia. Como  $C$  y  $\mathbf{K}$  son bitangentes en  $\{I, J\}$ ,  $F'$  es el polo de  $L_\infty$  respecto  $C$ . Debido a la invariancia por proyectividades de la conjugación (Proposición 2.47), tendremos que  $F = \psi_\infty(F')$  es el polo de  $L_\infty = \psi_\infty(L_\infty)$  respecto  $D = \psi_\infty(C)$ . De aquí es fácil demostrar que  $F$  es el centro de  $D$ . Para demostrar que el radio de  $D$  es la distancia  $OF$ , necesitaremos

demostrar primero la Proposición 4.12 que viene a continuación.

Para demostrar (c) primero observamos que  $S_F$  deja invariantes  $F$  (foco de  $h$ ) y  $L_\infty$  o recta de puntos impropios (eje de  $h$ ). Por otro lado, sea un punto propio cualquiera  $q \in \Pi$ ,  $q \neq F$ , sea  $q' = Fq \cap L_\infty$ , entonces

$$(q, S_F(q), F, q') = (\psi^{-1}(q), h(\psi^{-1}(q)), F', q') = -1$$

ya que  $h$  es una homología armónica. Por lo tanto,  $S_F$  es una homología armónica de eje  $L_\infty$  y foco  $F$ . Además, utilizando la Proposición 2.27 y la Observación 2.26:

$$\begin{aligned} (q, S_F(q), F, q') &= -1 \\ (q, S_F(q), F) &= -1 \end{aligned}$$

por tanto se cumple que  $F$  es el punto medio de  $q$  y  $S_F(q)$ , es decir  $S_F$  es la simetría central de centro  $F$ .  $\square$

**Proposición 4.12.** Controlamos la perpendicularidad en el plano del cuadro  $\Pi$  mediante las siguientes proposiciones:

- (a) Dos puntos del plano del cuadro  $p$  y  $p'$  son puntos de fuga de rectas ortogonales si y sólo si cualquiera de ellos es conjugado respecto a  $D$  de la imagen por  $S_F$  del otro punto.
- (b) La recta de fuga de los planos perpendiculares a una recta con punto de fuga  $p$ , es la imagen por  $S_F$  de la recta polar de  $p$  respecto a  $D$ .

*Demostración.* Para demostrar (a), utilizamos la propiedad de invariancia de la conjugación (Proposición 2.47),  $p'$  es conjugado respecto  $D$  de  $S_F(p)$ , si y sólo si  $\psi_\infty^{-1}(p')$  es conjugado respecto  $C$  de  $\psi_\infty^{-1}(S_F(p)) = h(\psi_\infty^{-1}(p))$ , que por la Proposición 4.9, es equivalente a decir que  $\psi_\infty^{-1}(p')$  es conjugado respecto  $\mathbf{K}$  de  $\psi_\infty^{-1}(p)$ , es decir que son direcciones ortogonales.

El apartado (b) es consecuencia directa de lo que acabamos de demostrar.  $\square$

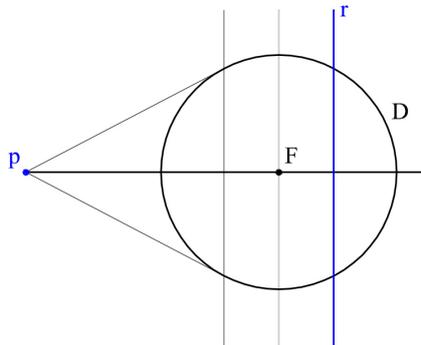


Figura 9.  $r$  es la recta de fuga de planos ortogonales a las rectas con punto de fuga  $p$

En la Proposición 4.12 hemos visto que la recta de fuga de los planos ortogonales a una recta con punto de fuga  $p$  es  $S_F(H_{p,D})$ , es decir, la recta simétrica, respecto  $F$ , de la recta polar de  $p$  respecto  $D$ . Esta recta se conoce como *antipolar* de  $p$ .

*Demostración.* Podemos demostrar ahora el apartado (b) de la Proposición 4.11. Sean  $p$  y  $p'$  los extremos de un diámetro de  $D$ , observamos que las rectas  $Op$  y  $Op'$  tienen como puntos de fuga  $p$  y  $p'$  y por la Proposición 4.12, son rectas ortogonales. Por lo tanto el triángulo  $pOp'$  tiene un ángulo recto en  $O$  y  $p, p'$  son extremos de un diámetro, entonces por semejanza de triángulos, la altura del triángulo  $pOp'$  coincide con el radio de  $D$ .  $\square$

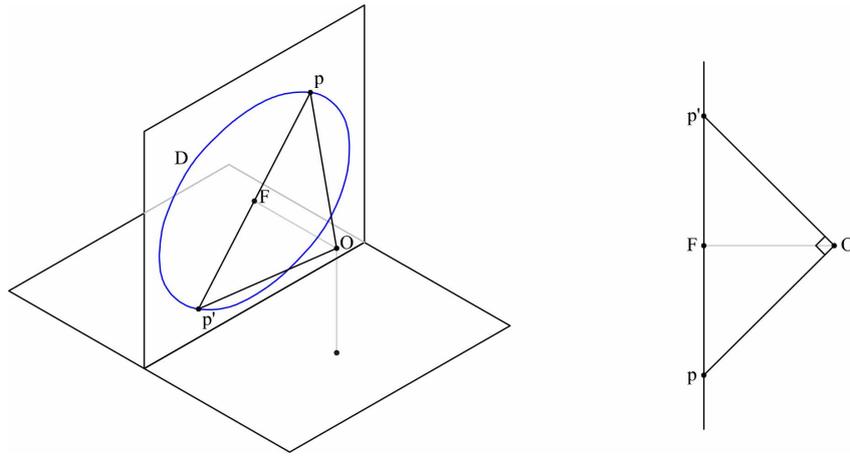


Figura 10. Demostración del apartado (b) de la Proposición 4.11

**Observación 4.13.** En la demostración anterior hemos visto que los ángulos  $\widehat{pOF} = \widehat{p'OF} = 45^\circ$ , para los puntos  $p, p'$  extremos de un diámetro cualquiera de  $D$ . Esto quiere decir que los puntos de  $D$  son los puntos de fuga de las rectas que forman  $45^\circ$  con la línea de vista. En el caso de que el plano del cuadro es perpendicular al plano horizontal, la intersección del círculo de distancia con la línea de horizonte son los puntos de fuga de las rectas horizontales que forman  $45^\circ$  con la línea de vista. Estos puntos se conocen como *puntos de fuga diagonales*.

Podremos hacer una construcción más sencilla de la antipolar de un punto una vez demostrada la siguiente proposición.

**Proposición 4.14.** Sea  $p \in \Pi$ ,  $p \neq F$ , la antipolar de  $p$  es perpendicular a la recta  $Fp$  y la interseca en un punto  $q$  que es

- para  $p$  impropio  $q = F$
- para  $p$  punto propio se cumple que  $d(F, p)d(F, q) = d^2$ , donde  $F$  está entre  $q$  y  $p$ , y donde  $d$  es la distancia focal.

*Demostración.* Tomamos una referencia ortonormal afín en  $\Pi$ , con origen  $F$  y el eje  $Y = 0$  pasando por  $p$ . En esta referencia  $D$  tendrá ecuación  $-d^2 + X^2 + Y^2 = 0$ . Tomando la referencia proyectiva asociada, tendremos que el punto  $p$  que tiene coordenadas afines  $(\alpha, 0)$ , tendrá coordenadas proyectivas  $[1, \alpha, 0]$ . La recta polar de  $p$  la obtenemos de

$$(1, \alpha, 0) \begin{pmatrix} -d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

y por tanto tendrá ecuación  $-d^2 + \alpha X = 0$ . Por tanto la recta antipolar, que es la recta simétrica respecto al eje  $X = 0$ , tendrá ecuación  $d^2 + \alpha X = 0$ . El punto  $q$ , intersección de la recta  $Fp$  y la recta antipolar de  $p$ , tendrá coordenadas afines  $q = (-d^2/\alpha, 0)$ . Ahora comprobamos que se cumple

$$d(F, p)d(F, q) = \alpha(d^2/\alpha) = d^2$$

□

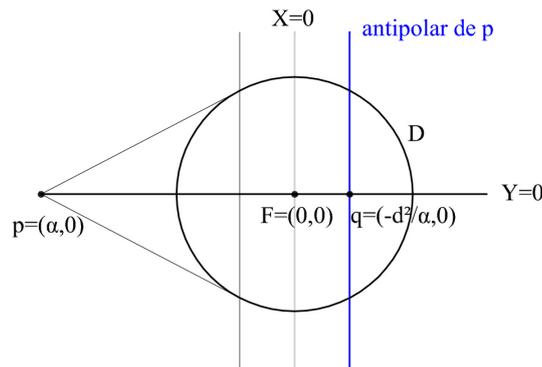


Figura 11. Demostración de la Proposición 4.14

**Corolario 4.15.** Sea  $p \in \Pi$ ,  $P \neq F$ , sea  $M$  uno de los extremos del diámetro de  $D$  perpendicular a la recta  $Fp$ . Sea  $s$  la recta por  $M$ , perpendicular a la recta  $Mp$  y  $q = s \cap Fp$ . Entonces, la recta antipolar de  $p$  será la recta perpendicular a  $Fp$  por  $q$ .

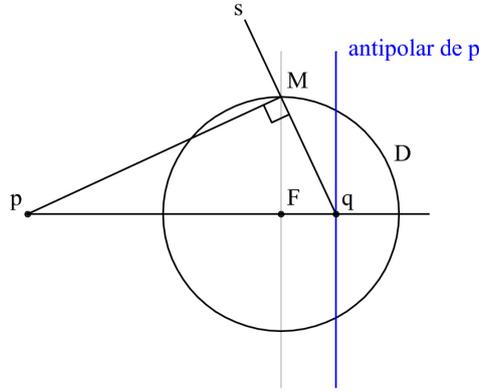


Figura 12. Construcción de la recta antipolar mediante perpendiculares

*Demostración.* Por la Proposición 4.14, sabemos que la recta antipolar es la única perpendicular a la recta  $Fp$  y que la interseca en un punto  $q$  tal que  $d(F, p)d(F, q) = d^2$ , quedando  $F$  entre  $q$  y  $p$ . Comprobamos que la construcción propuesta cumple esta propiedad. Observamos en el dibujo que los triángulos  $pFM$  y  $qFM$  son semejantes, y por tanto

$$\frac{Fp}{FM} = \frac{FM}{Fq}$$

y de aquí obtenemos  $d^2 = d(FM)^2 = d(F, p)d(F, q)$ . Además observamos que  $F$  queda entre  $q$  y  $p$ .  $\square$

**Observación 4.16.** La construcción del Corolario 4.15 se puede invertir para obtener un punto  $p \neq F$  a partir de su antipolar, es decir, el punto de fuga de las rectas perpendiculares a un plano dada su recta de fuga.

## 4.7. Ángulos

En este apartado estudiaremos cómo representar dos rectas bajo un determinado ángulo. También, a partir de la representación de dos rectas, veremos cómo hallar el ángulo que forman estas dos rectas.

**Observación 4.17.** Si dos rectas están en un plano  $\pi$ , paralelo al cuadro, el ángulo que forman coincidirá con el de su representación, ya que por la Proposición 4.1,  $\psi|_{\pi}$  es una semejanza entre el plano  $\pi$  y el plano del cuadro.

Para rectas que no cumplan la condición anterior, tendremos que hacer una construcción con un par de puntos llamados *centros conformes*.  
 Sea  $\pi$  el plano (no paralelo al cuadro) que contiene a las rectas. Sea  $l_\infty$  la recta impropia de este plano y  $v$  su recta de fuga,  $v = \psi_\infty(l_\infty)$ , que podemos dibujar en el plano del cuadro ya que es una recta propia.

**Definición 4.18.** Llamamos *centros conformes* al par de puntos obtenidos con la siguiente construcción:

- (1) Trazamos  $s$ , perpendicular a  $v$  por  $F$ . Sea  $q = v \cap s$ .
- (2) Sea  $q_1$  un punto propio cualquiera de  $v$ ,  $q_1 \neq q$  y  $r$  su recta antipolar. Sea  $q_2 = r \cap v$ .
- (3) Trazar  $T$ , circunferencia de diámetro  $q_1q_2$ . Entonces  $T \cap s = \{X_1, X_2\}$  son los *centros conformes* del plano  $\pi$ .

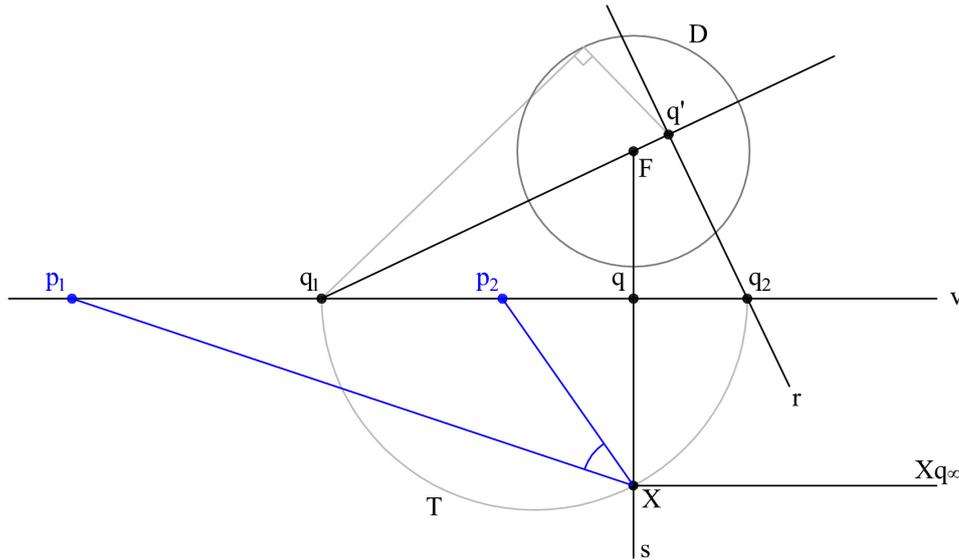


Figura 13. Construcción de los centros conformes del plano  $\pi$ . El ángulo que forman las rectas con puntos de fuga  $p_1$  y  $p_2$  es el ángulo  $\widehat{p_1 X p_2}$ .

**Observación 4.19.** (a) El punto  $q$  y el punto impropio  $q_\infty$  de  $v$  son puntos de fugas de rectas ortogonales, ya que la recta antipolar de  $q_\infty$  es  $s$ , por la Proposición 4.14.

(b) Por construcción,  $q_1$  y  $q_2$  son puntos de fuga de rectas ortogonales.

**Proposición 4.20.** Si  $X$  es uno de los *centros conformes*  $\{X_1, X_2\}$ , entonces para dos rectas no paralelas cualesquiera  $l_1, l_2$  en un plano  $\pi$ , con puntos de fuga  $p_1, p_2$ , se cumple

$$\widehat{l_1 l_2} = \widehat{p_1 X p_2}$$

*Demostración.* Definimos la aplicación  $g : l_\infty \rightarrow L_\infty$ , que es la composición  $f \circ \psi_\infty|_{l_\infty}$ , donde  $\psi_\infty|_{l_\infty}$  es

$$\psi_\infty|_{l_\infty} : l_\infty \rightarrow v$$

y  $f$  es la perspectividad con centro  $X$

$$\begin{aligned} f : v &\rightarrow L_\infty \\ p &\mapsto (pX) \cap L_\infty \end{aligned}$$

Entonces,  $g$  es una proyectividad que envía el punto impropio de una recta con punto de fuga  $p$ , al punto impropio de la recta  $pX$ .

Sean  $\{I', J'\}$  los puntos cíclicos de  $l_\infty$ . Utilizando la fórmula de Laguerre y la invariancia de la razón doble (Prop. 2.22), si demostramos que  $\{g(I'), g(J')\} = \{I, J\}$ , entonces tendremos que los ángulos entre dos direcciones coinciden con los ángulos de sus imágenes por  $g$ , demostrando así la proposición.

Sea  $\tau$  la involución de ortogonalidad en  $l_\infty$ , con puntos fijos  $\{I', J'\}$ . En la observación anterior hemos hallado dos pares de puntos de fuga de direcciones ortogonales:

$$\{q_1, q_2\} \text{ y } \{q_\infty, q\}$$

por lo tanto tendremos dos pares de puntos correspondientes por  $\tau$ :

$$\{\psi_\infty^{-1}(q_1), \psi_\infty^{-1}(q_2)\} \text{ y } \{\psi_\infty^{-1}(q), \psi_\infty^{-1}(q_\infty)\}$$

Entonces los puntos impropios de las rectas  $Xq_1$  y  $Xq_2$  y los puntos impropios de las rectas  $Xq$  y  $Xq_\infty$  son dos pares de puntos correspondientes por la involución  $g \circ \tau \circ g^{-1}$  de  $L_\infty$ .

A su vez, son pares de direcciones ortogonales en  $\Pi$ :

- la recta  $Xq_1$  es ortogonal a la recta  $Xq_2$  ya que  $q_1 q_2 X$  forman un triángulo circunscrito a una circunferencia de diámetro  $q_1 q_2$ , y por tanto es un triángulo rectángulo.
- La recta  $Xq$  es perpendicular a  $Xq_\infty$  ya que  $Xq = s$  y  $Xq_\infty$  es paralela a  $v$ .

Por lo tanto la involución  $g \circ \tau \circ g^{-1}$  y la involución de ortogonalidad de  $L_\infty$  comparten dos pares de puntos correspondientes y por la Proposición 2.34 son involuciones iguales. Es fácil comprobar que  $\{g(I'), g(J')\}$  son los puntos fijos de  $g \circ \tau \circ g^{-1}$ , y por tanto son los puntos fijos de la involución de ortogonalidad en  $L_\infty$ , entonces  $\{g(I'), g(J')\} = \{I, J\}$ .  $\square$

**Proposición 4.21.** Sean dos rectas no paralelas cualesquiera  $l_1, l_2$  en un plano  $\pi$ , con puntos de fuga  $p_1, p_2$ , sea  $X$  un punto de  $\Pi$  que cumple

$$\widehat{l_1 l_2} = \widehat{p_1 X p_2}$$

entonces  $X$  es uno de los centros conformes  $\{X_1, X_2\}$ .

*Demostración.* Por un lado  $X$  cumple que las rectas  $Xq$  y  $Xq_\infty$  son perpendiculares, por tanto  $X \in s$ . Por otro lado  $X$  cumple que las rectas  $Xq_1$  y  $Xq_2$  son perpendiculares, por tanto  $X$  estará en el arco capaz de  $90^\circ$  de  $q_1 q_2$  es decir en  $T$ . Por tanto

$$X \in s \cap T = \{X_1, X_2\}$$

□

**Observación 4.22.** Esta última proposición demuestra que los centros conformes no dependen de la elección de  $q_1$  para su construcción. Por lo tanto se habla de los centros conformes del plano  $\pi$ , ya que son únicos para cada plano. Los centros conformes son los mismos para  $\pi$  y todos los planos paralelos a  $\pi$ .

**Corolario 4.23.** Sea  $\pi$  un plano ortogonal al plano del cuadro, entonces su recta de fuga  $v$  es un diámetro del círculo de distancia  $D$  y sus centros conformes son los extremos del diámetro de  $D$  ortogonal a  $v$ .

A partir de las representaciones de dos rectas en un mismo plano  $\pi$  se puede hallar el ángulo que forman originalmente. Para ello, una vez dibujado uno de los centros conformes  $X$  del plano  $\pi$ , se mide el ángulo que forman las rectas obtenidas al unir sus puntos de fuga con  $X$ .

A su vez, se puede hallar el punto de fuga de una recta que forme un ángulo  $\alpha$  con otra recta dada, ambas en un plano  $\pi$ . Para ello se traza una recta que forme un ángulo  $\alpha$  con  $pX$  y se interseca con  $v$  (recta de fuga de  $\pi$ ). Este punto de intersección es el punto de fuga de la recta buscada.

## 4.8. Representación mediante homología

Sea  $\pi$  un plano no paralelo al plano del cuadro, tal que  $O \notin \pi$ . Sea  $v$  la recta de fuga del plano  $\pi$  y  $s$  una recta perpendicular a  $v$  por  $F$  punto de vista principal, sea  $q = s \cap v$ . Sea  $X$  uno de los centros conformes del plano  $\pi$ . Sea  $e$  una recta cualquiera, propia, de  $\Pi$ , tal que  $X \notin e$ , paralela (no coincidente) a  $v$ . Sea  $\varphi$  la homología general de  $\Pi$ , con centro  $X$  y eje  $e$ , que envía el punto  $q$  al punto impropio de  $s$ .

**Proposición 4.24.** La composición de la perspectividad  $\psi_\pi$  y la homología  $\varphi$ , es una semejanza

$$\varphi \circ \psi_\pi : \pi \longrightarrow \Pi$$

*Demostración.* Observamos primero que  $\varphi$  deja invariante el punto impropio de  $v$ , ya que pertenece al eje de la homología. Por otro lado envía el punto  $q$  a un punto impropio, por lo tanto  $\varphi$  envía la recta  $v$  a la recta impropia de  $\Pi$ , es decir  $\varphi \circ \psi_\pi$  es una afinidad.

Además,  $\varphi$  deja invariantes las rectas por  $X$  y asigna a cada punto  $p \in v$  una dirección, concretamente la dirección de la recta  $Xp$ . Observamos entonces que la restricción  $\varphi \circ \psi|_{l_\infty}$  a la recta impropia de  $\pi$ , es la misma aplicación que la proyectividad  $g$  de la Proposición 4.20. En esa demostración habíamos visto que  $g$  enviaba los puntos cíclicos de  $l_\infty$  a los puntos cíclicos de  $L_\infty$ , y por tanto  $\varphi \circ \psi|_{l_\infty}$  también lo hace.  $\square$

**Ejemplo 4.25.** (Homología en un plano horizontal)

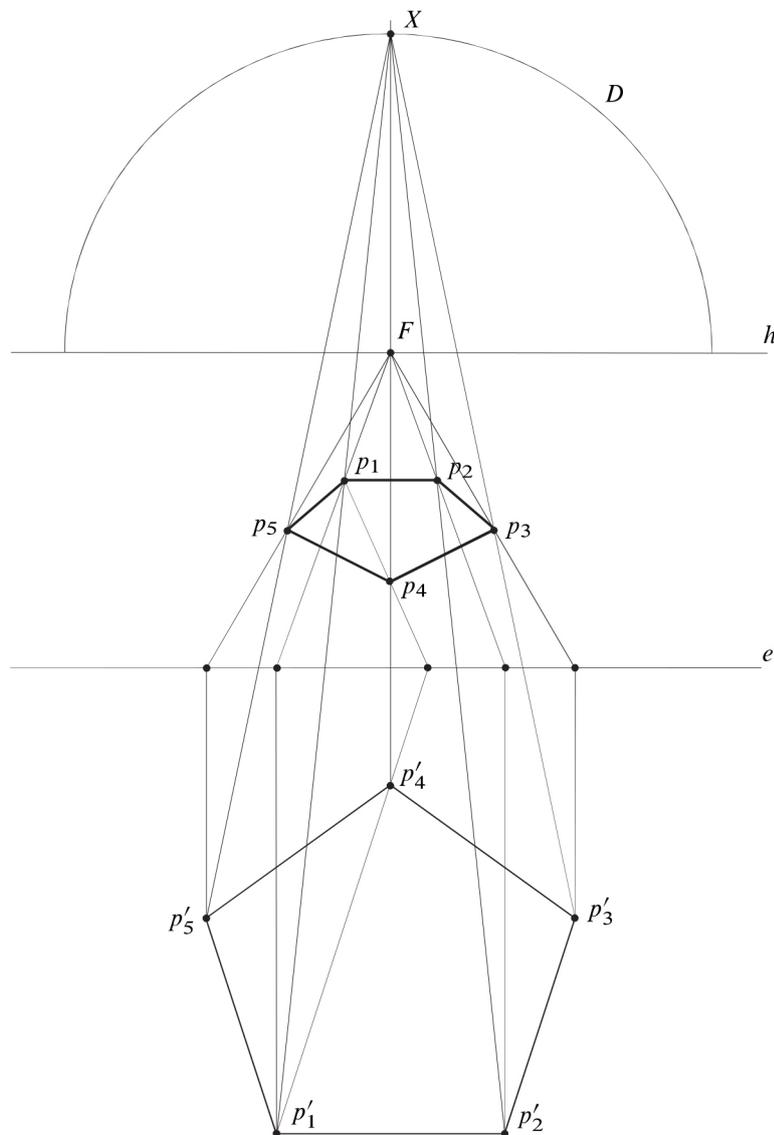


Figura 14. Representación de un pentágono regular en un plano horizontal. Imagen de [2], apéndice A.

Para representar este pentágono se ha utilizado una homología de las descritas en la Proposición 4.24. En este ejemplo,  $h$  es la línea de horizonte,  $F$  el punto de vista principal,  $D$  el círculo de distancia y  $X$  uno de los centros conformes de los planos horizontales. La homología  $\varphi$  tiene centro  $X$ , eje  $e$ , y envía  $F$  al punto impropio de las rectas verticales.

El ejercicio consiste en representar en perspectiva un pentágono regular dada la representación  $p_1p_2$  de uno de sus lados. Para ello, primero se obtiene la imagen por  $\varphi$  de  $p_1p_2$ , obteniendo  $p'_1p'_2$ . A continuación se dibuja un pentágono regular con uno de los lados  $p'_1p'_2$ . Por último se calcula la imagen de este pentágono regular por  $\varphi^{-1}$ , obteniendo la representación buscada.

Por lo tanto, supongamos que tenemos dibujados uno de los centros conformes  $X$  de un plano  $\pi$ , la recta de fuga  $v$  del plano  $\pi$  y el eje  $e$  de la homología  $\varphi$  descrita anteriormente. A partir de la representación de una figura en el plano  $\pi$ , se pueden hallar sus proporciones y forma originales, para ello se aplica la homología  $\varphi$  a la representación.

A su vez, se puede hallar la representación en perspectiva de una figura dada. Para ello se dibuja la figura sobre el plano del cuadro a una escala adecuada al tamaño del plano del cuadro. Después se calcula la imagen por  $\varphi^{-1}$  de determinados puntos de la figura, y finalmente se acaba de dibujar la figura a partir de estas imágenes.

**Ejemplo 4.26.** (Método del geometral o “*méthode du géométral*“ en [6])  
Antiguamente, este método era muy utilizado por los arquitectos para dibujar imágenes de sus edificios en perspectiva. El método utiliza la homología existente entre el dibujo en planta del edificio y la vista en perspectiva de esta planta.

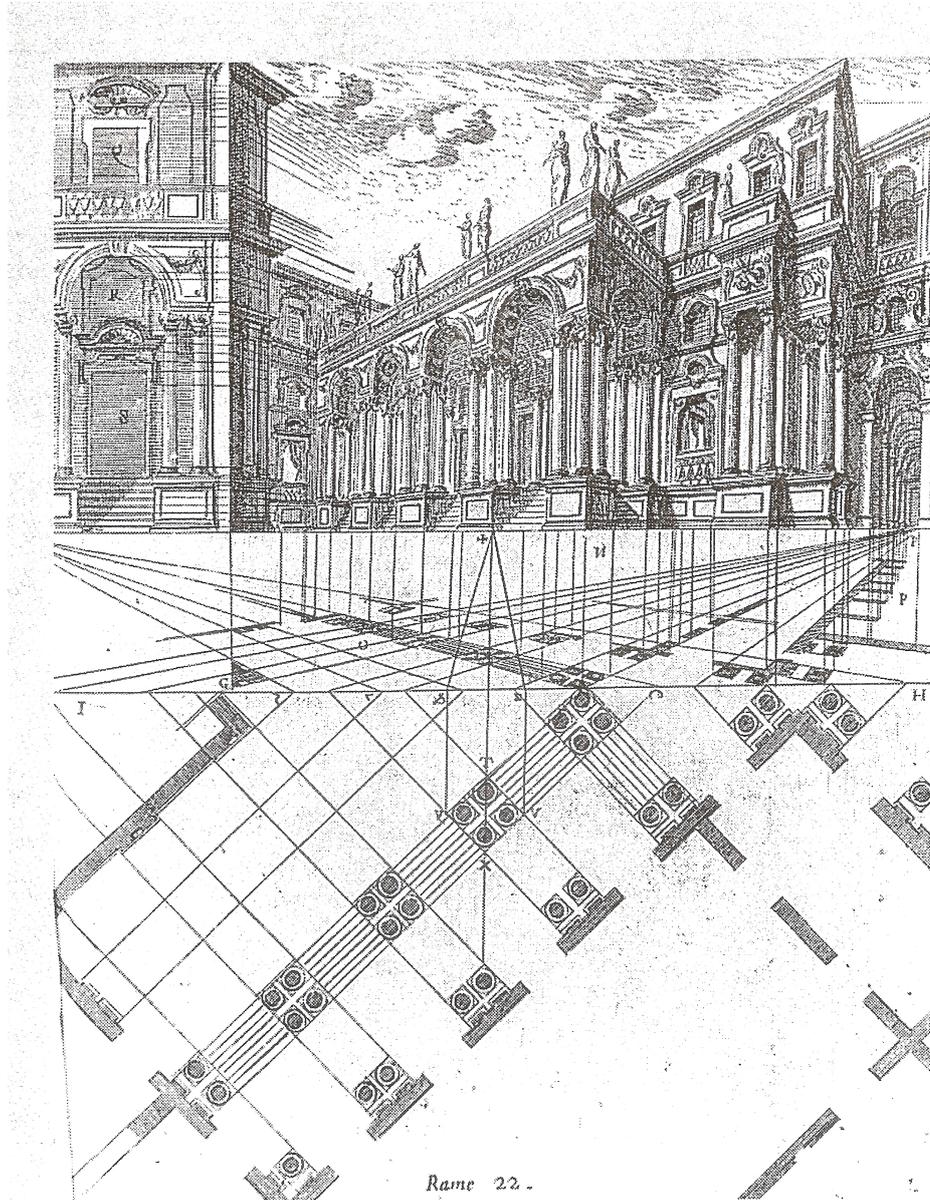


Figura 15. Dibujo de Canaletto. Imagen de [14].

En esta imagen de Canaletto, se calcula la representación en perspectiva de la planta de un edificio mediante el método del geometral. Se utiliza la homología  $\varphi^{-1}$  descrita en las proposiciones anteriores. Esta homología tiene centro  $X$  que es el centro conforme de los planos horizontales, y como eje la recta  $IH$  de la imagen. Además, utilizando la notación de las anteriores proposiciones, sabemos que la homología  $\varphi^{-1}$  envía la dirección vertical (punto impropio de la recta  $s$ ) al punto principal  $F$  del cuadro.

Para calcular la representación en perspectiva se utilizan las siguientes propiedades de  $\varphi^{-1}$

- los puntos del eje de homología son puntos fijos
- la homología envía la dirección vertical al punto principal  $F$

Además, debido a la peculiar situación del punto de vista al nivel del suelo, es necesaria una construcción auxiliar para determinar la posición de los elementos del edificio. Se sitúan en un nivel inferior al plano del suelo y luego se trasladan verticalmente esas posiciones para poder dibujar la perspectiva.

## 4.9. Problema inverso de perspectiva

Hasta ahora hemos visto cómo dibujar una perspectiva a partir de una figura a representar. Pero nos podríamos preguntar ¿es posible es restituir la figura a partir de su representación? En general, este es un problema indeterminado, ya que cada punto de la perspectiva se corresponde con cualquier punto situado en el rayo visual correspondiente. Por lo tanto, si queremos hacer una reconstrucción a partir de una única representación de una imagen, tendremos que hacer algunas suposiciones o disponer de una información previa, por ejemplo conocer paralelismo o perpendicularidad entre rectas o planos de la figura. Si tenemos un dibujo en el que aparece un suelo embaldosado, podríamos suponer, en caso de ser baldosas rectangulares, que los lados de cada baldosa son direcciones ortogonales entre ellas, por ejemplo.

Por otro lado también se pueden restituir algunos de los elementos de la perspectiva, por ejemplo el punto de vista principal  $F$ , la distancia focal  $d$  o la línea de horizonte. Cuando se observa un cuadro es natural preguntarse ¿dónde debería colocarme para ver lo que el artista quería que viese? Para que la representación sea lo más fiel posible, el observador debería colocarse a la misma distancia del cuadro que el pintor al realizar el cuadro, y por tanto necesitaría saber la distancia focal  $d$ . Ahora veremos algunos ejemplos de cómo obtener esta información.

**Corolario 4.27.** Para hallar la línea de horizonte estudiaremos dos casos. Si el plano del cuadro es perpendicular al plano horizontal, la línea de horizonte será la recta horizontal que pasa por cualquier punto de fuga de rectas horizontales. En caso contrario la línea de horizonte se obtendrá uniendo dos puntos de fuga diferentes de rectas horizontales.

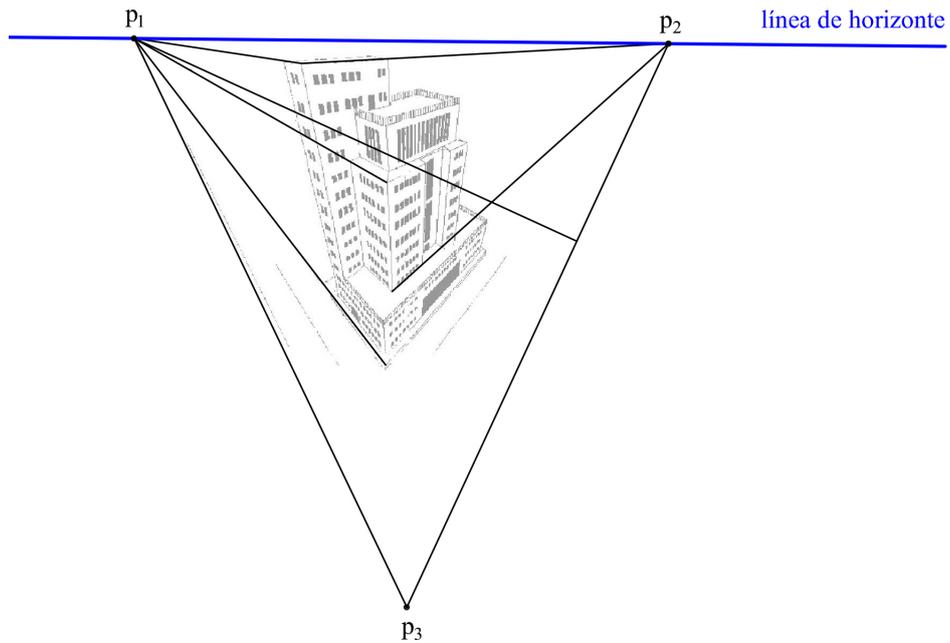


Figura 16. Restitución de la línea del horizonte en el caso de plano del cuadro no perpendicular al plano horizontal. Aquí suponemos que el edificio tiene algunas de sus aristas horizontales.

**Corolario 4.28.** El punto principal  $F$  es el ortocentro de cualquier triángulo cuyos vértices sean puntos de fuga de rectas ortogonales dos a dos, siempre que las rectas no sean paralelas al plano del cuadro (ya que si no sus puntos de fuga no serían propios).

*Demostración.* Sean  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  los vértices del triángulo. Por hipótesis la recta antipolar de  $p_1$  es  $p_2p_3$ , y por el Corolario 4.15 sabemos que  $p_1F$  es ortogonal a  $p_2p_3$  y por lo tanto  $p_1$  está en la altura del lado  $p_2p_3$ . Aplicando el mismo argumento para  $p_2$  se llega a que  $F$  está en el ortocentro del triángulo.  $\square$

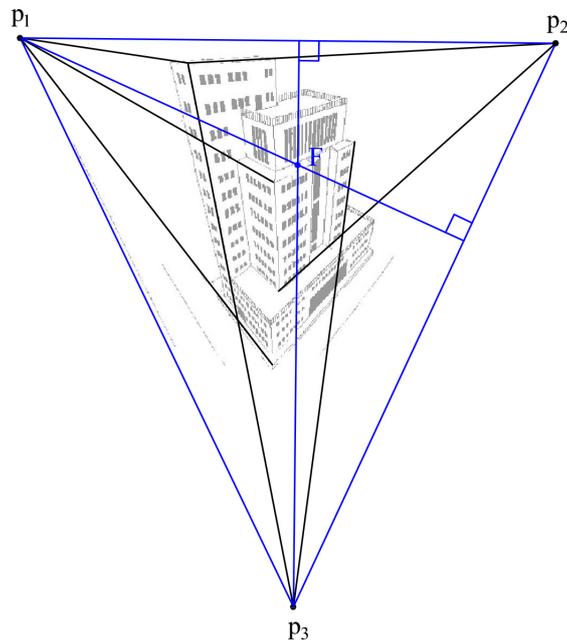


Figura 17. Restitución de el punto de vista principal  $F$ . Aquí hemos supuesto que las aristas principales del edificio son perpendiculares dos a dos.

**Corolario 4.29.** Una vez se ha hallado el punto principal  $F$ , a partir un triángulo cuyos vértices son puntos de fuga de rectas ortogonales dos a dos, se puede hallar ahora el círculo de distancia  $D$ . Sean  $p_1, p_2, p_3$  los vértices del triángulo, sean  $q_1$  el pie de la altura del triángulo, donde  $q_1 \in p_2p_3$ . La distancia  $d$  se halla de la siguiente manera

- Trazar recta  $s$  paralela a  $p_2p_3$  por  $F$ .
- Hallar el arco capaz de  $90^\circ$  de  $p_1q_1$ .
- Sea  $M$  la intersección de la recta  $s$  con el arco capaz anterior.

La circunferencia de centro  $F$  y radio  $FM$  es  $D$ .

*Demostración.* Se sigue del Corolario 4.15. □

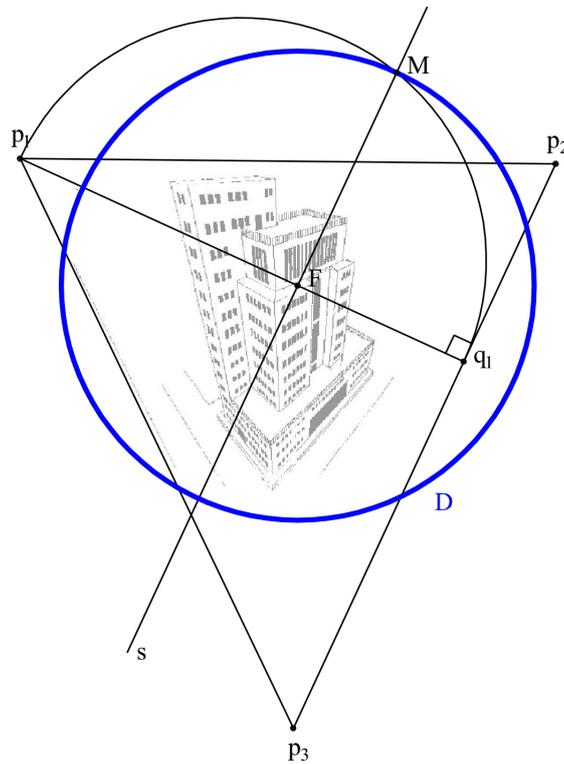


Figura 18. Restitución del círculo de distancia  $D$  en una perspectiva de tres puntos de fuga.

**Corolario 4.30.** Supongamos ahora que el plano del cuadro es perpendicular al plano horizontal. Sean dos pares de puntos de fuga de rectas horizontales perpendiculares entre ellas, el punto principal  $F$  y el círculo de distancia  $D$  se hallan de la siguiente manera

- Hallar el arco capaz de  $90^\circ$  del primer par de puntos de fuga de rectas perpendiculares.
- Hallar el arco capaz de  $90^\circ$  del segundo par de puntos de fuga.
- Sea  $P$  la intersección de los arcos capaces, por  $P$  trazar una recta vertical y el punto de corte con la línea del horizonte será  $F$ . El círculo de distancia será la circunferencia de centro  $F$  y radio  $FP$ .

*Demostración.* Por ser el plano del cuadro perpendicular al plano horizontal sabemos que  $F$  se encuentra en la línea del horizonte. Sean  $\{p_1, p_2\}$  y  $\{q_1, q_2\}$  los dos pares de puntos de fuga de rectas ortogonales. Por el Corolario 4.15 sabemos que los ángulos  $p_1 P p_2$  y  $q_1 P q_2$  son rectos y así demostramos la construcción anterior.  $\square$

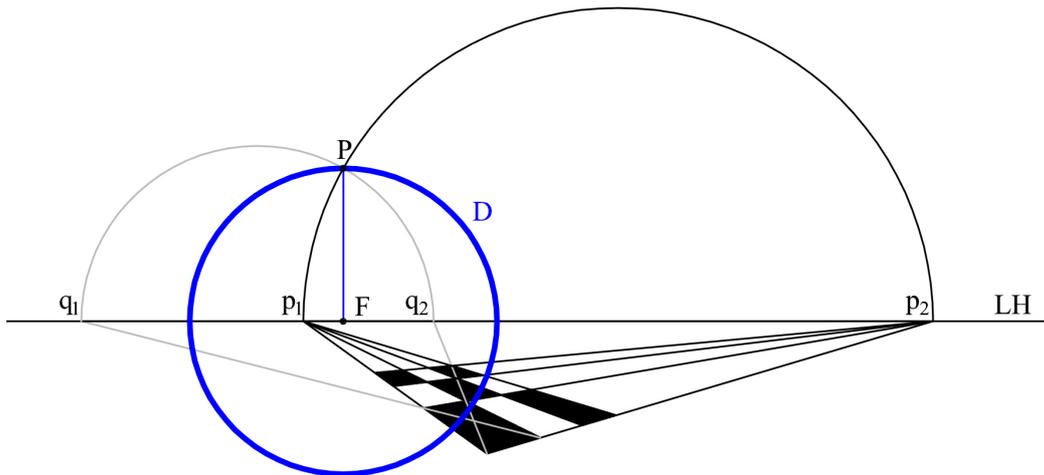


Figura 19. Restitución del punto de vista principal y del círculo de distancia. En el caso de un suelo con baldosas cuadradas se tienen dos pares de direcciones ortogonales, los lados del cuadrado y las diagonales.

## 5. Estudio de la perspectiva en Canaletto

En este apartado se aplicarán los capítulos anteriores con una utilidad práctica, hacer un estudio de la perspectiva en algunos de los cuadros de Canaletto. Primero se comprobará si aparecen contradicciones en los cálculos de la perspectiva y en caso de que no haya se restablecerán los elementos de la perspectiva desde la que está hecho el cuadro y después se calculará la representación que resultaría desde ese punto de vista. De esta manera se concluirá si la perspectiva está modificada o simplemente se ciñe a la realidad. La información se ha obtenido del programa Google Earth, tanto las imágenes en planta de la plaza de San Marcos como las alturas de los edificios que aparecen en los cuadros. Dicho esto, hay que recalcar que las alturas son siempre una aproximación debido a la dificultad de precisión milimétrica al obtener medidas en el citado programa. También se han sacado los planos originales de la plaza de San Marcos y del campanario de [10], tanto las plantas como los alzados y secciones.

Analizaremos con detalle el cuadro, “Piazza San Marco con la Basílica”, 1730.



PASO 1. Hallar la línea del horizonte y los puntos de fuga principales. Para encontrar la línea de horizonte aplicamos lo descrito en el Corolario 4.27. Por otro lado observamos que es una perspectiva de dos puntos de fuga, ya que las líneas verticales del cuadro se representan como líneas verticales. Podemos decir entonces que el plano del cuadro está colocado perpendicularmente al plano del suelo.

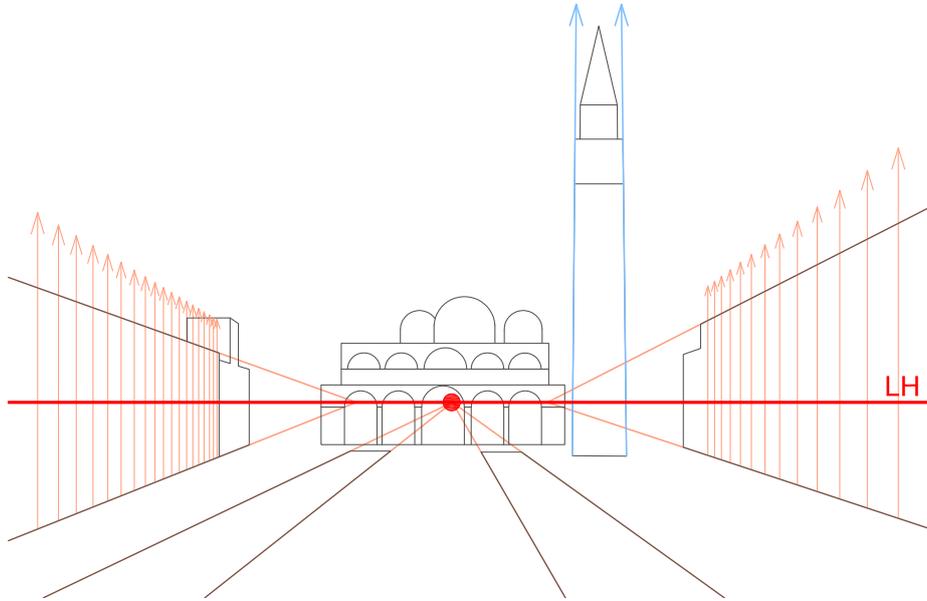


Figura 20. Restitución de la línea de horizonte.

PASO 2. Hallar el círculo de distancia. Como se trata de una perspectiva de dos puntos de fuga, podemos hallar el círculo de distancia tal como hemos descrito en el Corolario 4.30. Buscamos un cuadrado en el plano del suelo y partiendo de los puntos de fuga de sus lados y de sus diagonales hallamos el círculo de distancia  $D$  y el punto de fuga principal  $F$ .

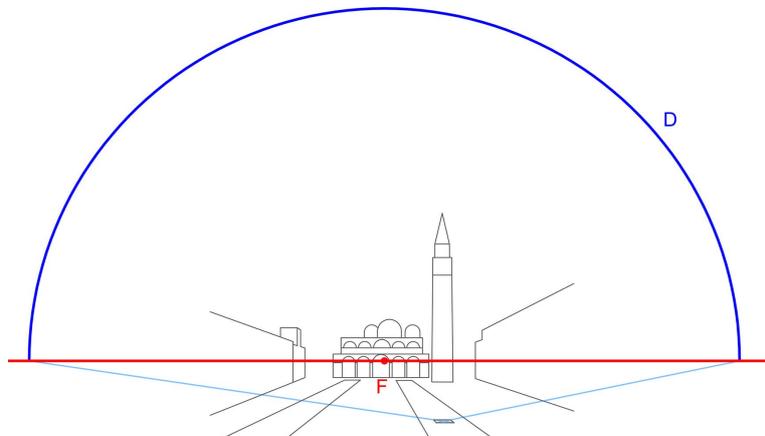


Figura 21. Restitución del círculo de distancia y el punto principal  $F$ .

Merece especial atención el campanario. En el cuadro de Canaletto, sus aristas no son exactamente paralelas sino que forman un pequeño ángulo de  $1^\circ$  aproximadamente. A partir de los planos originales del campanario de 1831, encontrados en [10], y que adjuntamos en la imagen siguiente, hemos observado que efectivamente no es un paralelepípedo sino que sus aristas convergen ligeramente en la parte superior formando un ángulo de aproximadamente  $1^\circ$ . Es muy difícil que el pintor supiese las medidas exactas del campanario, lo normal sería que pensase que se trataba de un paralelepípedo. Si Canaletto no tuviese ningún aparato para calcular perspectivas lo esperado sería que, utilizando las reglas de la perspectiva, hubiese dibujado el campanario con sus aristas paralelas, pero no es así, lo que sugiere que quizás utilizó una cámara óptica u otro instrumento auxiliar.

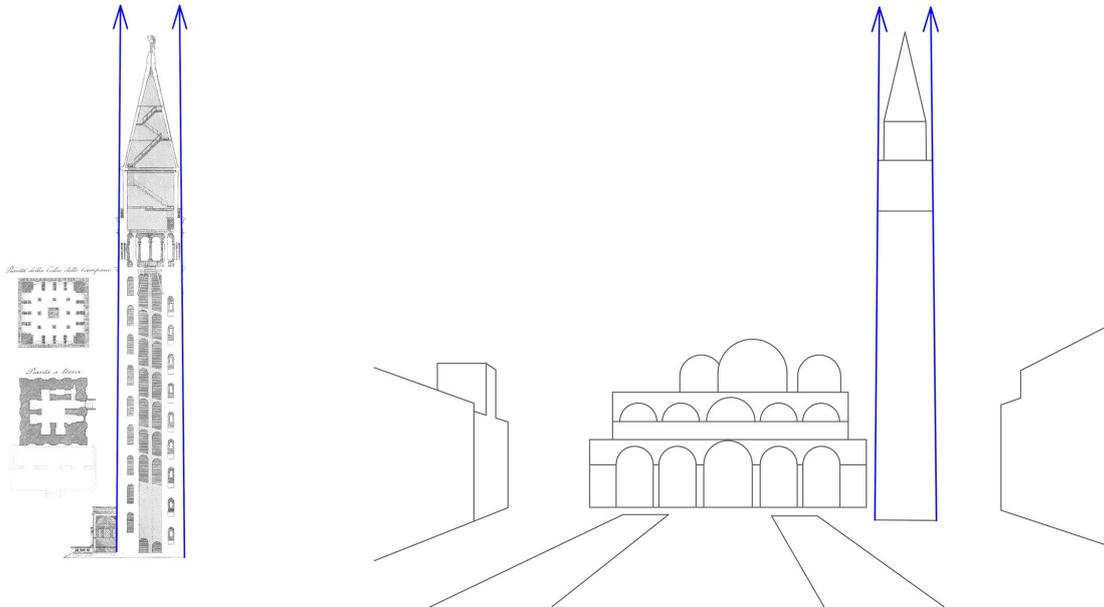


Figura 22. Campanario de la plaza de San Marcos.

PASO 3. Una vez que tenemos determinados los elementos principales de esta perspectiva, podemos pasar a hallar la antiimagen de algunos de los puntos del cuadro, mediante una homología  $\varphi$  como las descritas en la Proposición 4.24.

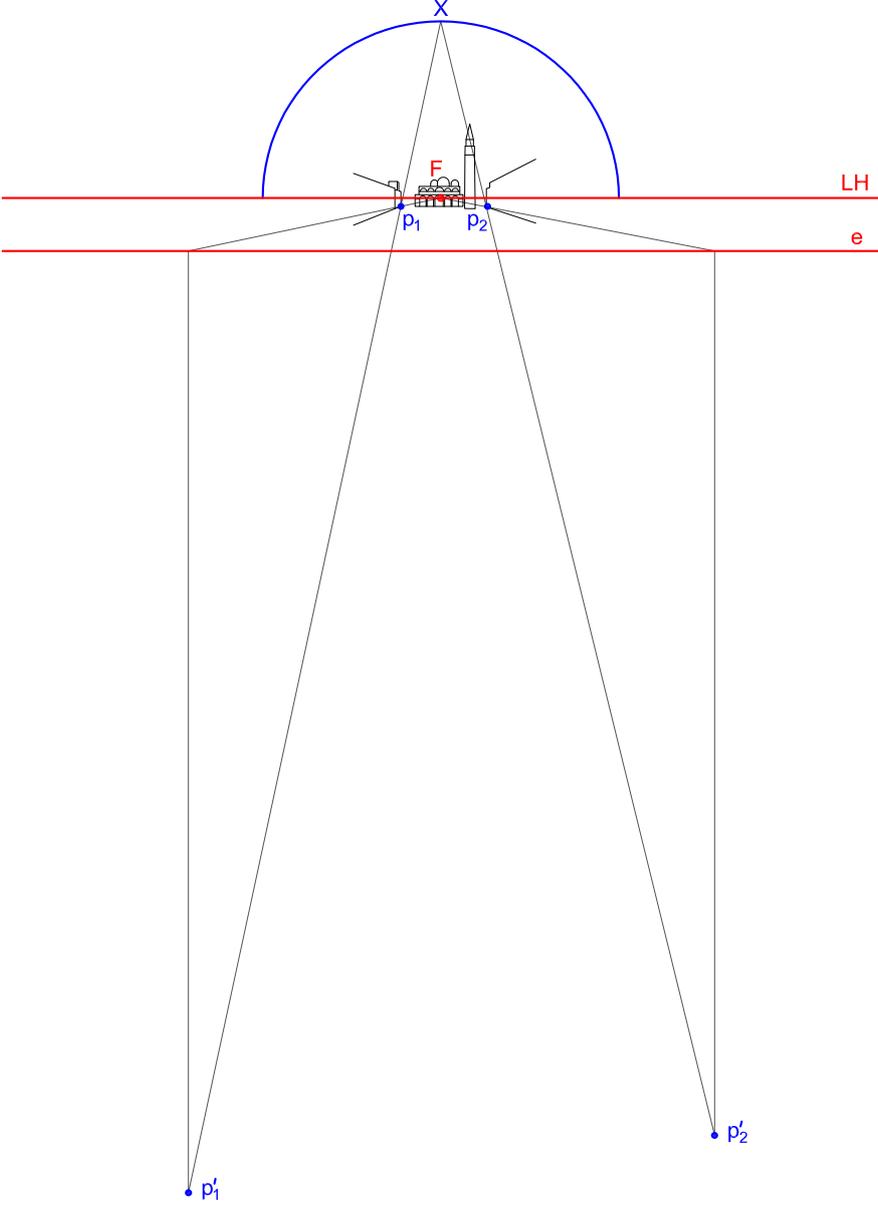


Figura 23. Homología de centro  $X$  y eje  $e$ , que envía el punto  $F$  al punto impropio de las rectas verticales.

PASO 4. A partir de los puntos  $p'_1$  y  $p'_2$  calculados mediante la homología  $\varphi$ , situamos la planta real de la plaza de San Marcos encontrada en [10]. Mediante la homología  $\varphi^{-1}$  calculamos la planta en perspectiva de la plaza.

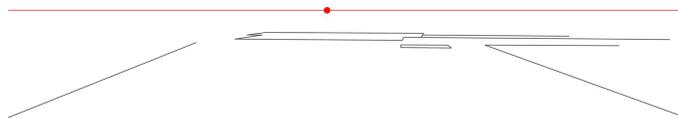


Figura 24. Planta de la plaza en perspectiva

Podemos comparar ahora ambas perspectivas en busca de contradicciones. Superponemos el cuadro con la planta en perspectiva calculada a partir de la homología. Observamos que en general las dimensiones coinciden, con excepción del campanario, que en el cuadro es mucho más estrecho.

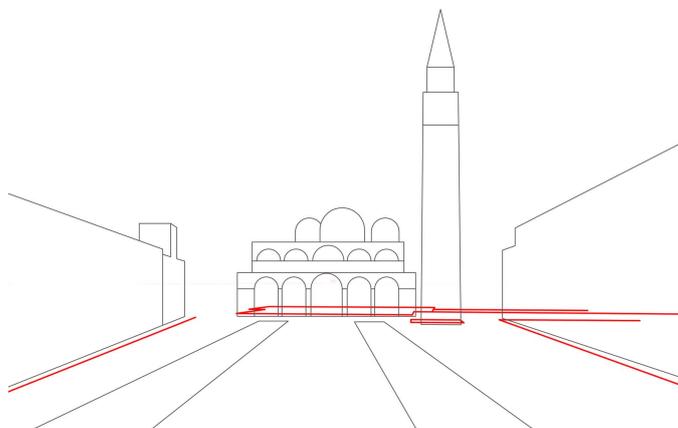


Figura 25. Superposición del cuadro con la planta en perspectiva

Por último situamos ambas perspectivas una al lado de la otra para comparar la perspectiva del cuadro con la que resulta a partir de los cálculos. Se observa que en general el cuadro de Canaletto está dibujado correctamente pero claramente se ha estilizado el campanario, haciéndolo mucho más estrecho, y algo más pequeño.

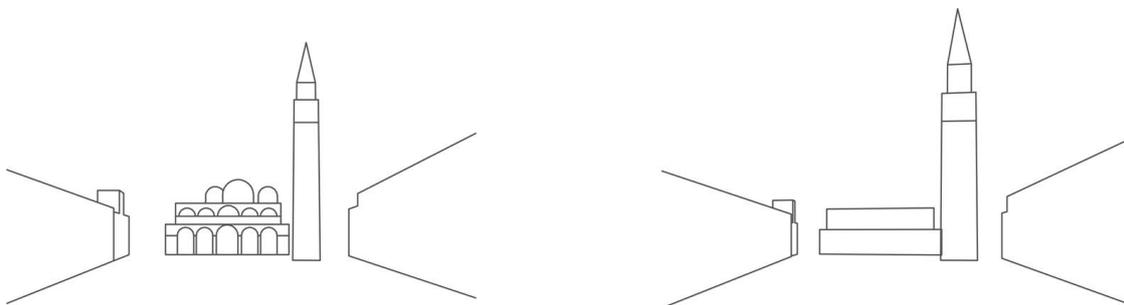


Figura 26. Cuadro de Canaletto a la izquierda y cálculo de la perspectiva a la derecha.

Esta deformación del campanario para hacerlo más estilizado la podemos encontrar en otros cuadros de Canaletto de la Plaza de San Marco. Aplicando el mismo procedimiento que en el cuadro anterior, observamos también que en los dos siguientes cuadros se ha dibujado más estrecho y un poco más bajo.

“Piazza San Marco”, 1724.

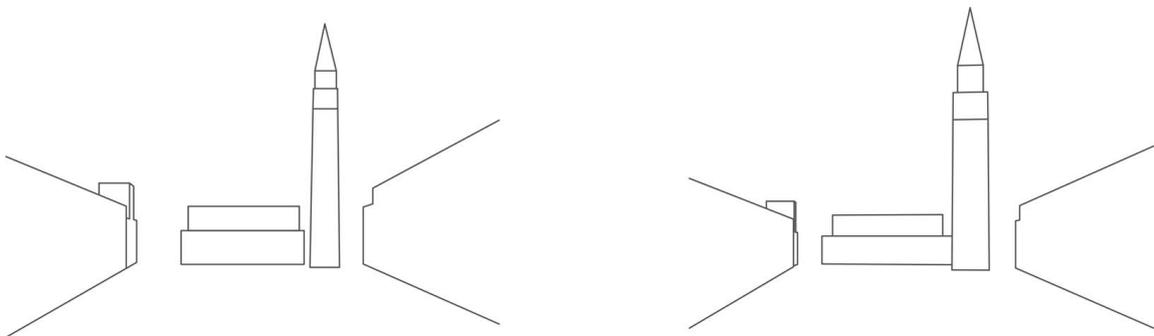


Figura 27. Cuadro de Canaletto a la izquierda y cálculo de la perspectiva a la derecha.

“Piazza San Marco”, 1720.

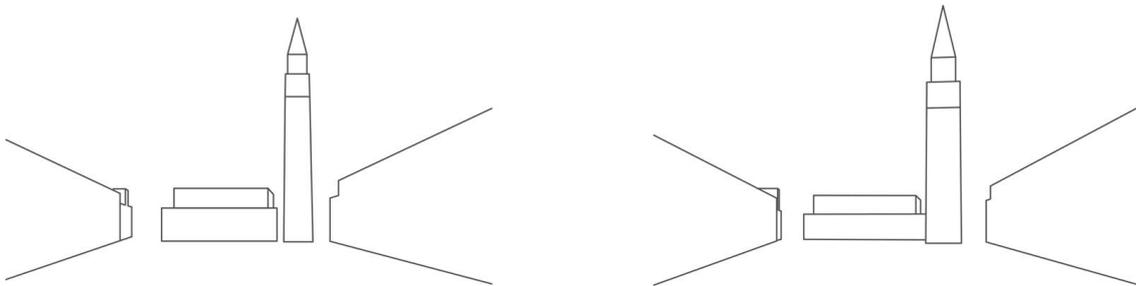


Figura 28. Cuadro de Canaletto a la izquierda y cálculo de la perspectiva a la derecha.

## Referencias

- [1] Bosse, A. *Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective*. París: P. Des Hayes, 1648.
- [2] Casas-Alvero, E. *Analytic Projective Geometry*. Zurich : European Mathematical Society, 2014.
- [3] de Clinchamp, F. E. V. *Nouveau traité de la perspective linéaire à l'usage des artistes et des écoles de dessin*. París : Carilian-Goeury et V. Dalmon, 1840.
- [4] Fano, G. *Lezioni di geometria descrittiva*. Torino : Paravia, 1932.
- [5] Field, J.V. ; Gray, J.J. *The geometrical work of Girard Desargues*. New York [etc.] : Springer, cop. 1987.
- [6] la Gournerie, J. de. *Traité de perspective linéaire*. París : Gauthier-Villars, 1884.
- [7] Hartley, R. ; Zisserman, A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [8] Krylov, N. ; Lobandievsky, P. ; Men, S. *Descriptive geometry*. Moscow : Mir, 1968.
- [9] Mannheim, A. *Cours de géométrie descriptive de l'école polytechnique*. París : Gauthier-Villars, 1886.
- [10] Quadri, A. ; Moretti, D. *La Piazza di San Marco in Venezia, descritta da Antonio Quadri e rappresentata in XVI*. Venecia: Vianello Libri, 1831.
- [11] Reventós, A. *Geometria projectiva*. Bellaterra : Universitat Autònoma de Barcelona. Servei de Publicacions, 2000.
- [12] Row, D. ; Reid, T.J. *Geometry, perspective drawings and mechanisms*. Singapore ; Hackensack, NJ : World Scientific, 2012.
- [13] Steadman, P. *Vermeer's Camera: Uncovering the Truth Behind the Masterpieces*. Oxford : Oxford University Press, 2002.
- [14] Terpitz, D. *Giovanni Antonio Canal, known as Canaletto*. Keoln : Könemann Verlagsgesellschaft, 1998.