DOCUMENTS DE TREBALL
DE LA FACULTAT DE CIÈNCIES
ECONÒMIQUES I EMPRESARIALS

Col·lecció d'Economia

Un modelo de riesgo de crédito basado en opciones compuestas con barrera. Aplicación al mercado continúo español.

Carmen Badía, Merche Galisteo y Teresa Preixens

Adreça correspondència:

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials
Universitat de Barcelona
Avda. Diagonal, 690
08034 BARCELONA
Tfn. 93 402 45 90
Fax 93 403 48 92
e-mail: cbadia@ub.edu, mgalisteo@ub.edu, tpreixens@ub.edu

Abstract

In this work the valuation methodology of compound option written on a down-and-out call option, developed by Ericsson and Reneby (2003), has been applied to deduce a credit risk model. It is supposed that the firm has a debt structure with two maturity dates and that the credit event takes place when the assets firm value falls under a determined level called barrier. An empirical application of the model for 105 firms of Spanish continuous market is carried out. For each one of them its value in the date of analysis, the volatility and the critical value are obtained and from these, the default probability to short and long-term and the implicit probability in the two previous probabilities are deduced. The results are compared with the ones obtained from the Geske model (1977).

Keywords: Credit risk, default probability, structural approach, compound barrier option.

JEL: G13, G33

Resum

En aquest treball s'ha utilitzat la metodologia de valoració de les opcions compostes amb barrera, *compound option written on a down-and-out call option*, desenvolupada per Ericsson i Reneby (2003) per deduir un model de risc de credit. Se suposa que l'empresa té una estructura de deute amb dos venciments i que el succés de crèdit té lloc quan el valor dels actius de l'empresa cau per sota d'un determinat nivell anomenat barrera. Es realitza una aplicació empírica del model per 105 empreses del mercat continu espanyol. Per cadascuna d'elles s'obté el seu valor en la data d'anàlisis, la volatilitat i el valor crític i a partir d'aquestes, es dedueix la probabilitat de fallida a curt termini, a llarg termini i la probabilitat implícita en les dues anteriors. Els resultats es comparen amb els obtinguts a partir del model de Geske (1977).

1. Introducción

El riesgo de crédito es un tema de gran importancia en la actualidad ya que, tal como se pone de manifiesto en el nuevo acuerdo de Basilea (Basilea II), debe tenerse en cuenta para adecuar las exigencias de recursos propios al capital en riesgo real de las empresas.

Básicamente, existen dos metodologías para la medición del riesgo de crédito que se basan en información proporcionada por el mercado: los denominados modelos estructurales y los modelos reducidos. Los primeros se basan en el valor de la empresa para determinar el suceso de crédito y utilizan información relativa a la cotización de las acciones y su volatilidad. En el segundo grupo de modelos, el suceso de crédito está supeditado a información exógena a la empresa, como es la información de mercado relacionada con los títulos de la entidad de referencia. Dentro de este grupo destacan, entre otros, los trabajos de Jarrow-Turnbull (1995), Duffie–Singleton (1999), Kijima-Muromachi (2000) y Hughston-Turnbull (2001). Una de las restricciones de estos últimos modelos se pone de manifiesto al implementarlos, puesto que el número de empresas cuyas obligaciones cotizan en el mercado no es muy amplio.

En este trabajo se propone un modelo de riesgo de crédito que pertenece al grupo de los estructurales, que deducen probabilidades de impago y *spreads* crediticios como medidas del riesgo de crédito. El riesgo de impago se interpreta como una opción y se aplica la teoría de valoración de opciones para, a partir de la cotización y la volatilidad de las acciones, deducir el valor y la volatilidad de la empresa. En el caso de los *spreads* crediticios se precisa, además, el valor de la deuda pendiente de pago, que se obtiene como diferencia entre el valor de los activos de la empresa y el valor de las acciones.

La estructura de la deuda de la empresa y la definición del momento en que se puede producir el impago determinan el modelo de valoración de opciones que debe utilizarse.

Así, en el modelo pionero de Merton (1974) basado en Black y Scholes (1973), la deuda de la empresa está representada por única obligación cupón cero y el impago sólo puede producirse en el vencimiento de dicha deuda. En este caso, la acción es una opción *call* europea sobre el valor de la empresa.

Posteriormente, Geske (1977) considera un pasivo exigible con múltiples vencimientos y que el impago puede producirse en cualquiera de ellos, destacando su particularización para el caso de dos vencimientos. Bajo este supuesto, la acción es una opción compuesta.

Tanto la opción *call* estándar como la compuesta son opciones *path-independent* puesto que los pagos que genera la opción sólo dependen del valor del subyacente en el vencimiento y no de su evolución. Como alternativa surgen los modelos *first-passage*, basados en opciones barrera, que son *path-dependent*, puesto que los pagos generados dependen de la trayectoria del valor del activo subyacente. De esta forma, en estos modelos el impago puede producirse no sólo en el vencimiento de la deuda si no también en cualquier momento anterior, si el valor de la empresa cae por debajo de un cierto nivel denominado barrera. Black y Scholes (1976), Ericsson y Reneby (1998), Brockman y Turtle (2003), Reisz y Perlich (2004) y Giesecke (2004) aplican la metodología de las opciones barrera, en concreto la de las opciones *down-and-out call*, desarrollada por Merton (1973), para una estructura de deuda con un único vencimiento.

El modelo que se desarrolla en este trabajo tiene en cuenta una estructura de deuda con dos vencimientos y que el impago puede producirse en cualquier instante. Se utiliza la metodología de las opciones compuestas con barrera, *compound option written on a down-and-out call option,* desarrollada por Ericsson y Reneby (2003). Este modelo, por tanto, pretende superar la limitación de los modelos originales en los que el pasivo de la empresa se sustituye por un capital, cuyo vencimiento conduce a la obtención de una única probabilidad de impago. Se abre la posibilidad de sustituir la deuda de la empresa por dos capitales que representarán, respectivamente, el pasivo a corto y el pasivo a largo de la entidad. Se permite, por tanto, que las probabilidades de impago asociadas a cada uno de ellos sean distintas, puesto que son deudas con exigibilidades diferentes. Este enfoque ya fue propuesto por Geske (1977), pero con la limitación de que en su modelo el suceso de crédito sólo puede ocurrir en los dos vencimientos considerados, cuando el valor de la empresa se sitúa por debajo de cada una de las deudas. Como propuesta, en este trabajo, se incorpora la posibilidad de que el impago pueda ocurrir a lo largo de todo el horizonte temporal. Es decir, no sólo en los vencimientos de la deuda a corto y de la deuda a largo, sino también en los momentos anteriores, cuando el valor de la empresa cruce la barrera establecida.

Así, el modelo presentado es una extensión del modelo de Geske (1977), al introducir en éste las barreras o una modificación de los modelos *first-passage*, al introducir en ellos dos vencimientos.

La barrera que determina el impago puede ser endógena, deducida a partir del precio de las acciones de la empresa, o exógena al modelo. En este artículo se considera exógena, como en la mayoría de los trabajos existentes, determinándose como un porcentaje de la deuda de la empresa.

La barrera es aquel nivel del valor de los activos por debajo del cual se hace difícil que la empresa pueda recuperarse, puesto que no le será posible encontrar fondos, ni propios ni ajenos. Se trataría de imponer una barrera, relacionada con el valor nominal de la deuda, compatible con la idea expuesta. Es decir, imponer una barrera que marcase el nivel de confianza en la empresa, tanto de accionistas como de nuevos obligacionistas.

Las únicas restricciones que se imponen a la barrera, constante a lo largo del plazo, son que el valor de la empresa en el momento de análisis y el valor nominal de la deuda a largo plazo sean superiores al nivel de la barrera, en la línea del trabajo de Ericsson y Reneby (2003).

Este trabajo se estructura del siguiente modo. En el apartado 2 se formaliza un modelo que permite valorar las acciones de una empresa aplicando la metodología de valoración de una *call option on a down-and-out call*. En el apartado 3 se deduce el valor y la volatilidad de la empresa, parámetros necesarios para obtener las probabilidades de impago, deducidas en el apartado 4, y los *spreads* crediticios obtenidos en el apartado 5. En el apartado 6 se lleva a cabo una aplicación empírica del modelo propuesto en este trabajo y se compara con el modelo de Geske (1977). Finalmente, en el apartado 7 se presentan las conclusiones del estudio realizado.

2. Formalización teórica del modelo

Se considera una empresa financiada mediante recursos propios, representados por una acción, y recursos ajenos o deuda formalizada por dos obligaciones cupón cero con diferentes vencimientos, que recogen la deuda a corto y a largo plazo.

Tanto la acción como las obligaciones se negocian en un mercado financiero en el que no hay posibilidades de arbitraje, ni costes de transacción, ni impuestos, ni restricciones a la venta al descubierto y los activos son infinitamente divisibles. Se supone una economía en tiempo continuo y que el tipo de interés es constante y cierto. Existe, además, la posibilidad de prestar y endeudarse al mismo tipo de interés.

En un instante $t \in [0, T]$ se cumple que el valor de los activos de la empresa, V_t, es la suma del valor de la acción, E_t y del valor de la deuda, D_t:

$$V_t = E_t + D_t$$

de manera que V_t también puede considerarse un activo negociable en el mercado.

La economía está representada por el espacio completo de probabilidad $\left(\Omega, F_t, P\right)$ donde Ω es el conjunto finito de sucesos posibles ω_i, F_t es una filtración en t generada por un movimiento browniano y P es la medida de probabilidad asociada.

Bajo estas hipótesis, la dinámica del valor de la empresa queda descrita mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica[1]

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t$$

que define un proceso browniano geométrico donde μ es la tendencia instantánea de los cambios en la variable V_t, σ es la volatilidad instantánea o coeficiente de difusión del proceso y dW_t es el proceso de Wiener estandarizado, definido en el espacio de probabilidad.

A su vez, se considera que la deuda de la empresa está formada por dos obligaciones cupón cero[2] de nominal K_1 y K_2 y vencimientos T_1 y T_2 respectivamente, siendo $T_2 > T_1$. La obligación cupón cero que vence en T_1 recoge la deuda a corto plazo de la empresa. Igualmente, las diferentes deudas a largo plazo se reducirán a una sola obligación cupón cero que vence en T_2.

Además

$$D_t = K_{1,t} + K_{2,t}$$

siendo $K_{i,t}$ el valor en t, de la deuda que vence en $T_i \left(i = 1, 2\right)$.

En este modelo el suceso de crédito se produce si en T_1 o T_2 la empresa no

---

[1] V_t es el factor de riesgo del modelo puesto que en función de cuál sea su valor los acreedores de la empresa podrán cobrar o no. De ahí que su comportamiento en el tiempo se modelice como un proceso estocástico.

[2] La mayoría de los modelos estructurales de riesgo de crédito presentan la limitación de considerar sólo una obligación cupón cero como representativa de toda la deuda de la empresa, obteniéndose una única probabilidad de impago para un plazo igual al vencimiento de la deuda. En este trabajo, al considerarse dos vencimientos distintos para la deuda, es posible obtener una probabilidad para cada vencimiento y además la probabilidad implícita.

puede hacer frente a sus compromisos de pago o si el valor de la empresa en cualquier momento antes de dichos vencimientos cae por debajo de un cierto nivel de barrera, B, definida de forma exógena como función de la deuda.

Formalmente, se definen las variables aleatorias continuas τ_1 y τ_2 como el primer instante en que el valor de la empresa cruza la barrera en los intervalos $\left[t, T_1\right]$ y $\left(T_1, T_2\right]$, respectivamente.

Para determinar E_t, objetivo de este tipo de modelizaciones, se considera que la acción es una opción compuesta con barrera, debido a la presencia de dos vencimientos en la deuda y la introducción de un cierto nivel por debajo del cual se considera que la empresa está en situación de impago. Por ello, siguiendo a Ericsson y Reneby (2003) se utiliza la metodología de valoración de una *call option on a down-and-out call*.

En $t < T_1$ la acción es una opción *call* que vence en T_1 sobre una opción *call* que vence en T_2. En T_1 la empresa puede o no hacer frente a sus compromisos de pago y si no se produce el impago[3], en T_2 la empresa, de nuevo, puede o no pagar la deuda a largo plazo.

Formalmente, si en el vencimiento de la opción compuesta T_1, el precio del subyacente, que a su vez es el precio de la *down-and-out call* que vence en T_2, es superior al precio de ejercicio K_1, $E^B\left(V_{T_1}, T_1, K_2, T_2\right) > K_1$, la opción compuesta se ejerce. En este caso, no hay situación de impago en T_1 y esto da derecho a comprar el subyacente, es decir, la *down-and-out call* que vence en T_2. El precio de la opción compuesta en T_1 es:

$$E\left(E^B\left(V_{T_1}, T_1, K_2, T_2\right), T_1, K_1, T_1\right) = \mathrm{Max}\left(0, E^B\left(V_{T_1}, T_1, K_2, T_2\right) - K_1\right) \cdot I_{\left\{\tau_1 \notin \left[t, T_1\right]\right\}}$$

donde $I_{\left\{\tau_1 \notin \left[t, T_1\right]\right\}}$ es la función indicador del suceso $\left\{\tau_1 \notin \left[t, T_1\right]\right\}$.

[3] Se supone que la deuda a corto se refinancia con nuevas acciones. De este modo, el valor de la empresa es una función continua en el tiempo.

Si en T_2, vencimiento de la *down-and-out call*, el precio del subyacente, que en este caso es V_{T_2}, es superior al precio de ejercicio K_2, $V_{T_2} > K_2$, la opción se ejerce y, por tanto, no hay impago:

$$E^B\left(V_{T_2}, T_2, K_2, T_2\right) = Max\left(0, V_{T_2} - K_2\right) \cdot I_{\left\{\tau_1 \notin [t, T_1], V_{T_1} > \bar{V}_{T_1}, \tau_2 \notin (T_1, T_2]\right\}}.$$

En la anterior expresión aparece $\bar{V}_{T_1}$, el valor crítico de la empresa en T_1, que indica el valor de los activos para el cual $E^B\left(V_{T_1}, T_1, K_2, T_2\right) = K_1$. Es, por tanto, la cota que marca el valor de la empresa por debajo del cual se produce el impago[4]. El suceso $V_{T_1} > \bar{V}_{T_1}$ indica que en T_1 se ha ejercido la opción, es decir, que $E^B\left(V_{T_1}, T_1, K_2, T_2\right) > K_1$.

Finalmente, si $r(t) = r$ es el tipo de interés instantáneo sin riesgo, el valor de la acción en t, $t < T_1$, es:

$$\begin{aligned}
E_t = V_t \cdot \Bigg[& N\left(d_1^{T_1}, d_1^{T_2}, \rho\right) - \left(\frac{B}{V_t}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1} \cdot N\left(d_1^{BT_1}, d_1^{BT_2}, \rho\right) - \\
& - \left(\frac{B}{V_t}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1} \cdot N\left(\bar{d}_1^{T_1}, d_1^{BT_2}, -\rho\right) + N\left(\bar{d}_1^{BT_1}, d_1^{T_2}, -\rho\right) \Bigg] - \\
& - K_2 \cdot e^{-r\cdot(T_2-t)} \cdot \Bigg[N\left(d_2^{T_1}, d_2^{T_2}, \rho\right) - \left(\frac{B}{V_t}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(d_2^{BT_1}, d_2^{BT_2}, \rho\right) - \\
& - \left(\frac{B}{V_t}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(\bar{d}_2^{T_1}, d_2^{BT_2}, -\rho\right) + N\left(\bar{d}_2^{BT_1}, d_2^{T_2}, -\rho\right) \Bigg] - \\
& - K_1 \cdot e^{-r\cdot(T_1-t)} \cdot \Bigg[N\left(d_2^{T_1}\right) - \left(\frac{B}{V_t}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(d_2^{BT_1}\right) \Bigg]
\end{aligned} \qquad (1)$$

---

[4] De otro modo, $\bar{V}_{T_1}$ es el valor de la empresa para el que se cumple que $V_{T_1} = K_1 + K_{2,T_1}$.

donde

$$d_1^{T_1} = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{\overline{V}_{T_1}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\cdot\left(T_1 - t\right)}{\sigma\cdot\sqrt{T_1 - t}};\ d_2^{T_1} = d_1^{T_1} - \sigma\cdot\sqrt{T_1 - t}$$

$$d_1^{T_2} = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{K_2}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\cdot\left(T_2 - t\right)}{\sigma\cdot\sqrt{T_2 - t}};\ d_2^{T_2} = d_1^{T_2} - \sigma\cdot\sqrt{T_2 - t}$$

$$d_1^{BT_1} = \frac{\ln\left(\frac{B^2}{V_t\cdot\overline{V}_{T_1}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\cdot\left(T_1 - t\right)}{\sigma\cdot\sqrt{T_1 - t}};\ d_2^{BT_1} = d_1^{BT_1} - \sigma\cdot\sqrt{T_1 - t}$$

$$d_1^{BT_2} = \frac{\ln\left(\frac{B^2}{V_t\cdot K_2}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\cdot\left(T_2 - t\right)}{\sigma\cdot\sqrt{T_2 - t}};\ d_2^{BT_2} = d_1^{BT_2} - \sigma\cdot\sqrt{T_2 - t}$$

$$\overline{d}_1^{T_1} = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{\overline{V}_{T_1}}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\cdot\left(T_1 - t\right)}{\sigma\cdot\sqrt{T_1 - t}};\ \overline{d}_2^{T_1} = \overline{d}_1^{T_1} - \sigma\cdot\sqrt{T_1 - t}$$

$$\overline{d}_1^{BT_1} = \frac{\ln\left(\frac{B^2}{V_t\cdot\overline{V}_{T_1}}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\cdot\left(T_1 - t\right)}{\sigma\cdot\sqrt{T_1 - t}};\ \overline{d}_2^{BT_1} = \overline{d}_1^{BT_1} - \sigma\cdot\sqrt{T_1 - t}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{T_1 - t}{T_2 - t}}\,.$$

Si en este modelo se considera igualmente la existencia de dos vencimientos para la deuda, pero que no existe barrera, $B = 0$, se obtiene el modelo de Geske (1977).

Para pasar del modelo propuesto al modelo que considera la existencia de barrera pero un único vencimiento, puede utilizarse el mismo razonamiento que Geske (1979), según el cual el modelo de Black-Scholes-Merton es un caso particular del modelo que utiliza opciones compuestas. En esta línea, se puede considerar que $T_2 = T_1 = T$ y, por tanto, la opción compuesta se convierte en una opción estándar con un precio de ejercicio $K_1 + K_2 = K$.

3. Valor y volatilidad de la empresa

Para obtener las probabilidades de impago a corto y largo plazo es preciso conocer, previamente, el valor y la volatilidad de la empresa y su valor crítico en T_1.

El modelo descrito en el apartado anterior proporciona una expresión analítica para el valor de la acción, que es un dato obtenido del mercado. En ella aparecen como incógnitas las tres variables que determinan las probabilidades. Es necesario, por tanto, definir otras dos ecuaciones para poder obtener el valor de las variables V_t, σ y $\overline{V}_{T_1}$.

La segunda ecuación se plantea a partir de la definición del valor crítico de la entidad, $\overline{V}_{T_1}$, que es el valor de la empresa en T_1 mínimo para que la opción subyacente en la opción compuesta se ejerza. Es decir,

$$E^B\left(V_{T_1}, T_1, K_2, T_2\right) = E^B{}_{T_1} = K_1.$$

Como la opción subyacente es una opción *down- and-out call*, entonces:

$$\begin{aligned} K_1 = \overline{V}_{T_1} \cdot \left[N(d_1) - \left(\frac{B}{\overline{V}_{T_1}} \right)^{\frac{2 \cdot r}{\sigma^2}+1} \cdot N\left(d_1^B\right) \right] - \\ -K_2 \cdot e^{-r\cdot(T_2 - T_1)} \cdot \left[N(d_2) - \left(\frac{B}{\overline{V}_{T_1}} \right)^{\frac{2 \cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(d_2^B\right) \right] \end{aligned} \qquad (2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{\overline{V}_{T_1}}{K_2}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\cdot\left(T_2 - T_1\right)}{\sigma\cdot\sqrt{T_2 - T_1}};\ d_2 = d_1 - \sigma\cdot\sqrt{T_2 - T_1}$$

$$d_1^B = \frac{\ln\left(\dfrac{B^2}{\overline{V}_{T_1}\cdot K_2}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\cdot\left(T_2 - T_1\right)}{\sigma\cdot\sqrt{T_2 - T_1}};\ d_2^B = d_1^B - \sigma\cdot\sqrt{T_2 - T_1}$$

También en este caso, haciendo $B = 0$, se obtiene la expresión deducida por Geske (1977) para el valor crítico.

La tercera ecuación es la que relaciona la volatilidad de la acción, σ_E, y la volatilidad de la empresa, σ:

$$\sigma_E = \frac{V_t}{E_t}\cdot\frac{\partial E_t}{\partial V_t}\cdot\sigma \qquad (3)$$

siendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_t}{\partial V_t} &= \left[N\left(d_1^{T_1}, d_1^{T_2}, \rho\right) + N\left(\overline{d}_1^{BT_1}, d_1^{T_2}, -\rho\right)\right] - \\ &-B^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1}\cdot\left(-\frac{2\cdot r}{\sigma^2}\right)\cdot V_t^{-\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1}\cdot\left[N\left(d_1^{BT_1}, d_1^{BT_2}, \rho\right) + N\left(\overline{d}_1^{T_1}, d_1^{BT_2}, -\rho\right)\right] + \\ &+K_2\cdot e^{-r\cdot(T_2-t)}\cdot B^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1}\cdot\left(-\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1\right)\cdot V_t^{-\frac{2\cdot r}{\sigma^2}}\cdot\left[N\left(d_2^{BT_1}, d_2^{BT_2}, \rho\right) + N\left(\overline{d}_2^{T_1}, d_2^{BT_2}, -\rho\right)\right] + \\ &+K_1\cdot e^{-r\cdot(T_1-t)}\cdot B^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1}\cdot\left(-\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1\right)\cdot V_t^{-\frac{2\cdot r}{\sigma^2}}\cdot N\left(d_2^{BT_1}\right).\end{aligned}$$

De nuevo, si se elimina la barrera, $B = 0$, se deduce la expresión del modelo de Geske (1977).

4. Probabilidades de impago

Las probabilidades neutrales al riesgo que este modelo permite deducir son tres: probabilidad de impago hasta T_1, probabilidad de impago para el intervalo $\left(T_1, T_2\right]$ y la probabilidad de impago hasta T_2.

La probabilidad de que la empresa no haya quebrado hasta T_1 incluido, es decir, la probabilidad de que $\tau_1 \notin \left[t, T_1\right]$ y que $V_{T_1} > \bar{V}_{T_1}$ es:

$$P\left[t, T_1\right] = N\left(d_2^{T_1}\right) - \left(\frac{B}{V_t}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(d_2^{BT_1}\right). \tag{4}$$

La probabilidad de que la empresa, a corto plazo, no pueda hacer frente a sus obligaciones de pago es $1 - P\left[t, T_1\right]$.

La probabilidad de no haber quebrado hasta T_2 incluido, es decir, la probabilidad de que $\tau_1 \notin \left[t, T_1\right]$, $V_{T_1} > \bar{V}_{T_1}$ y además $\tau_2 \notin \left(T_1, T_2\right]$ y que $V_{T_2} > K_2$ es:

$$\begin{aligned} P\left[t, T_2\right] = {} & N\left(d_2^{T_1}, d_2^{T_2}, \rho\right) - \left(\frac{B}{V_t}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(d_2^{BT_1}, d_2^{BT_2}, \rho\right) - \\ & - \left(\frac{B}{V_t}\right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(\bar{d}_2^{T_1}, d_2^{BT_2}, -\rho\right) + N\left(\bar{d}_2^{BT_1}, d_2^{T_2}, -\rho\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Si ésta es la probabilidad de que la empresa no incurra nunca en impago, la probabilidad de quebrar en el intervalo $\left[t, T_2\right]$ es $1 - P\left[t, T_2\right]$.

Conocidas las probabilidades a corto y a largo plazo y a partir de la igualdad

$$P\left[t, T_2\right] = P\left[t, T_1\right] \cdot P\left(T_1, T_2\right]$$

se deduce la probabilidad *forward* entre T_1 y T_2, $P\left(T_1, T_2\right]$, que es la probabilidad de que la empresa no quiebre en dicho intervalo temporal.

De las expresiones (4) y (5), considerando barrera nula, se obtienen las probabilidades de impago del modelo de Geske (1977). Conceptualmente son distintas ya que no están asociadas a un intervalo temporal. El modelo de Geske conduce a la obtención de dos probabilidades de impago en dos momentos concretos, T_1 y T_2. La probabilidad implícita en las dos anteriores puede interpretarse como la probabilidad de impago en T_2, condicionada a no que no se haya producido el impago en T_1.

5. *Spreads* crediticios

En este modelo, se obtienen dos *spreads* crediticios, uno para cada vencimiento de la deuda:

$$s(t,T_1) = y(t,T_1) - r$$
$$s(t,T_2) = y(t,T_2) - r$$

siendo $y(t,T_i)_{i=1,2}$ los tipos de interés con riesgo en t para los vencimientos T_1 y T_2, respectivamente.

Para determinar los tipos arriesgados es preciso conocer antes el valor de la deuda, tanto a corto como a largo plazo, que se deduce a partir de

$$V_t - E_t = D_t = K_{1,t} + K_{2,t}.$$

El valor de la deuda a corto plazo en t, $K_{1,t}$, depende del importe que los obligacionistas cobran en T_1 que será el mínimo entre el valor nominal de la deuda a corto plazo y el valor de la empresa en T_1:

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}\left(V_{T_1}, K_1\right) \cdot I_{\{\tau_1 \notin [t,T_1]\}} &= V_{T_1} + \mathrm{Min}\left(0, K_1 - V_{T_1}\right) \cdot I_{\{\tau_1 \notin [t,T_1]\}} = \\ &= V_{T_1} - \mathrm{Max}\left(0, V_{T_1} - K_1\right) \cdot I_{\{\tau_1 \notin [t,T_1]\}}. \end{aligned}$$

Aplicando la solución de una *down-and-out call* a la expresión anterior, se obtiene:

$$K_{1,t} = V_t - \left[V_t \cdot \left[N\left(d_1^s\right) - \left(\frac{B}{V_t} \right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1} \cdot N\left(d_1^{sB}\right) \right] - \right.$$

$$\left. - K_1 \cdot e^{-r\cdot(T_1-t)} \cdot \left[N\left(d_2^s\right) - \left(\frac{B}{V_t} \right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(d_2^{sB}\right) \right] \right] =$$

$$= V_t \cdot \left[1 - N\left(d_1^s\right) + \left(\frac{B}{V_t} \right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}+1} \cdot N\left(d_1^{sB}\right) \right] +$$

$$+ K_1 \cdot e^{-r\cdot(T_1-t)} \cdot \left[N\left(d_2^s\right) - \left(\frac{B}{V_t} \right)^{\frac{2\cdot r}{\sigma^2}-1} \cdot N\left(d_2^{sB}\right) \right]$$

donde

$$d_1^s = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{K_1} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot \left(T_1 - t\right)}{\sigma \cdot \sqrt{T_1 - t}}; \; d_2^s = d_1^s - \sigma \cdot \sqrt{T_1 - t}$$

$$d_1^{sB} = \frac{\ln\left(\frac{B^2}{V_t \cdot K_1} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot \left(T_1 - t\right)}{\sigma \cdot \sqrt{T_1 - t}}; \; d_2^{sB} = d_1^{sB} - \sigma \cdot \sqrt{T_1 - t}\,.$$

De $K_{1,t} = K_1 \cdot e^{-y(t,T_1)\cdot(T_1-t)}$ se deduce $y\left(t,T_1\right)$ que es el tipo de interés de la deuda arriesgada a corto. De la diferencia entre este tipo y el tipo de interés libre de riesgo, se obtiene el *spread* crediticio para el corto plazo.

A partir de $K_{2,t} = V_t - E_t - K_{1,t}$ y $K_{2,t} = K_2 \cdot e^{-y(t,T_2)\cdot(T_2-t)}$ se obtiene $y\left(t,T_2\right)$ que es el tipo de interés de la deuda arriesgada a largo plazo. De la diferencia entre este tipo y el tipo de interés libre de riesgo se obtiene el *spread* crediticio para el largo plazo.

6. Estudio empírico

En este apartado se efectúa el análisis empírico del modelo propuesto en este trabajo y se compara con el modelo de Geske (1977). Para ello se han considerado 105 empresas con valores incluidos en el SIBE[5]. Se han excluido del estudio aquellas empresas del mercado continuo de las que no se dispone de los datos necesarios para el análisis (Volkswagen, Bayer, Recoletos y Terra). Tampoco se analizan bancos, compañías de seguros y sociedades de cartera y holdings[6] del sector de servicios financieros e inmobiliarios del Mercado General, ni empresas del Mercado Latibex.

La fecha de análisis es 30/6/2005 y en dicha fecha los datos recopilados para cada empresa analizada son el número de acciones, precio unitario y volatilidad, obtenidos de la Sociedad de Bolsas. Dicha volatilidad es la calculada a partir de las últimas 250 sesiones, excepto para Prim (60 sesiones) y Cintra (120 sesiones). Además, se ha obtenido el valor nominal de la deuda a corto y a largo plazo reflejada en el balance que proporciona la CNMV[7] y la Bolsa para las diferentes entidades. Se ha considerado, como hipótesis de trabajo, que la deuda a corto tiene un vencimiento de 1 año (Martín y Trujillo, 2005) y la deuda a largo tiene un vencimiento de 5 años (Corzo, 2000).

Además, el tipo de interés continuo y constante utilizado es el 2,02% deducido del tipo de interés a un mes vigente en la fecha de estudio según la curva de tipos para España de Serfiex[8] .

El primer paso en la aplicación empírica del modelo es obtener el valor, la volatilidad y el valor crítico de las empresas analizadas, ya que de esta forma

---

[5] Sistema de Interconexión Bursátil Español que conecta electrónicamente a las cuatro bolsas españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia) dando lugar al mercado continuo español.
[6] La estructura del balance es distinta a la estructura del balance del resto de las empresas consideradas
[7] Comisión Nacional del Mercado de Valores.
[8] www.serfiex.es

será posible determinar las probabilidades de impago.

En la **Tabla 1** aparecen los resultados obtenidos para las 105 empresas analizadas, primero para el modelo propuesto y suponiendo una barrera igual al 75% del valor nominal de la deuda a largo plazo y segundo para el modelo de Geske (1977).[9]

En el primer caso, se han aplicado las expresiones asociadas al modelo presentadas en este trabajo. Esto ha supuesto encontrar la solución al sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3). Para la resolución de dicho sistema se ha utilizado el programa Mathematica que aplica métodos numéricos.

Para cada una de las empresas y para cada uno de los modelos se ha obtenido el valor de la empresa y su volatilidad a 30/6/2005 y el valor crítico a 30/6/2006.

Una vez obtenidos estos valores, se podrán calcular las probabilidades de impago asociadas a cada empresa y para cada plazo considerado.

TABLA 1

Valor, volatilidad y valor crítico

					Modelo propuesto $B = 0,75 \cdot K_2$			**Modelo Geske (1977)**		
EMPRESA	E_t	σ_E	K_1	K_2	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$
* ABENGOA	868.508,92800	0,209500	1.241.302	981.073	2.971.810	0,061226	2.146.220	2.971.810	0,061226	2.146.220
* ABERTIS	10.839.356,33963	0,138000	1.310.733	3.907.011	15.655.600	0,095546	4.896.040	15.655.600	0,095546	4.896.040
* ACCIONA	5.211.100,00000	0,189500	4.849.503	2.233.381	11.982.500	0,082413	6.909.520	11.982.500	0,082413	6.909.520
* ACERINOX	2.966.264,00000	0,193300	1.522.185	329.196	4.755.580	0,120570	1.825.830	4.755.670	0,120380	1.825.920
* ACS CONST.	8.165.484,32076	0,147300	8.336.080	3.257.578	19.279.500	0,062386	11.340.800	19.279.500	0,062386	11.340.800
A.DOMINGUEZ	232.589,25360	0,201700	25.857	3.003	260.644	0,179990	28.627	260.644	0,179990	28.627
* AGUAS BCN	2.595.716,31726	0,172000	1.626.231	1.661.806	5.691.590	0,078443	3.159.040	5.691.590	0,078443	3.159.040
* ALDEASA	766.500,00000	0,237400	115.712	2.017	881.721	0,206377	117.572	881.721	0,206377	117.572
* ALTADIS	9.819.286,83942	0,164200	7.165.472	2.521.284	19.120.500	0,084324	9.491.050	19.120.500	0,084324	9.491.050
* AMADEUS	4.265.700,00000	0,186700	705.842	231.783	5.166.940	0,154135	919.634	5.166.940	0,154135	919.634
* AMPER	146.523,12150	0,246500	106.700	10.221	260.329	0,138740	116.128	260.329	0,138740	116.128
* ANTENA 3TV	3.675.584,96000	0,268900	628.574	26.385	4.315.440	0,229030	652.911	4.315.440	0,229030	652.911
ARCELOR	10.332.355,38105	0,258600	9.568.183	8.741.534	27.611.000	0,096771	17.631.200	27.611.000	0,096771	17.631.200
* AUXILIAR FF. CC.	293.100,41250	0,204500	419.202	84.070	779.913	0,076854	496.746	779.913	0,076854	496.746
AVANZIT	171.195,88206	0,503400	86.467	153.180	393.606	0,222918	221.885	393.509	0,223154	221.357

[9] Como se comentará posteriormente, se comprueba que en la mayoría de las empresas analizadas, el nivel de la barrera no es determinante para la cuantificación de las variables del modelo. En el apéndice se muestran, para aquellas empresas en que el nivel de la barrera sí influye en el valor de las variables, los resultados obtenidos considerando valores de la barrera que oscilan entre el 5 y el 95% del valor nominal de la deuda a largo plazo. Un estudio sobre el nivel de la barrera puede encontrarse en Reisz y Perlich (2004).

*	AZKOYEN	153.630,00000	0,194900	27.590	23.920	202.290	0,148017	49.644	202.290	0,148017	49.644
	BARON DE LEY	293.894,60000	0,165400	37.395	5.956	335.927	0,144705	42.889	335.927	0,144705	42.889
	BEFESA	428.121,83341	0,302000	228.893	109.453	751.377	0,172075	329.845	751.377	0,172075	329.845
*	BOD. RIOJANAS	49.667,20000	0,214300	16.851	6.618	72.164	0,147494	22.955	72.164	0,147494	22.955
	C.V.N.E.	175.275,00000	0,298700	12.287	12.730	198.823	0,263323	23.696	198.823	0,263323	23.664
*	CAMPOFRIO	784.391,48760	0,139300	331.133	409.616	1.479.170	0,073870	708.954	1.479.170	0,073870	708.954
*	C. PORTLAND	1.810.850,06090	0,154800	236.975	258.699	2.276.930	0,123113	475.531	2.276.930	0,123113	475.531
	CEPSA	9.632.697,87600	0,182000	2.315.296	1.472.670	13.232.900	0,132484	3.673.640	13.232.900	0,125205	3.673.650
*	CIE AUTOMOTIVE	304.608,00000	0,166300	366.111	308.924	942.644	0,053739	651.056	942.644	0,053739	651.056
	CORREA	50.850,00000	0,360100	23.410	10.701	83.467	0,219394	33.274	83.467	0,219394	33.274
	CORTEFIEL	1.479.733,20000	0,271300	261.270	37.493	1.769.670	0,226851	295.853	1.769.670	0,226851	295.853
*	DOGI	113.409,18750	0,239900	63.062	71.451	239.797	0,113458	128.958	239.797	0,113458	128.958
	DURO FELGUERA	167.222,21204	0,270400	286.527	60.348	502.569	0,089972	342.191	502.569	0,089972	342.191
	EAD AERONAUT.	21.340.504,25884	0,248100	25.929.000	25.121.000	69.458.700	0,076226	49.100.100	69.458.700	0,076226	49.100.100
*	EBRO PULEVA	2.261.821,26240	0,181000	816.632	1.147.864	4.099.710	0,099858	1.875.220	4.099.710	0,099858	1.875.220
*	ELECNOR	414.000,00000	0,228900	477.408	248.668	1.106.640	0,085633	706.774	1.106.640	0,085633	706.774
*	ENAGAS	3.497.456,90900	0,178000	505.080	1.561.108	5.403.570	0,115210	1.926.220	5.403.570	0,115210	1.926.190
*	ENCE	568.999,80000	0,184200	322.979	222.330	1.086.490	0,096466	528.051	1.086.490	0,096466	528.051
*	ENDESA	20.550.378,59097	0,122200	7.696.000	29.142.000	54.434.900	0,046133	34.573.200	54.434.900	0,046133	34.573.200
	ERCROS	152.038,85970	0,555600	265.191	276.280	663.221	0,130684	519.934	663.222	0,130684	519.934
*	ESP. DEL ZINC	21.528,00000	0,181500	33.614	2.897	57.089	0,068443	36.286	57.089	0,068443	36.286
*	EUROPISTAS	619.466,72314	0,112500	30.198	360.017	974.492	0,071514	350.736	974.492	0,071514	350.735
*	FADESA	2.654.015,43990	0,237200	1.704.028	818.960	5.064.250	0,124204	2.459.420	5.064.250	0,124309	2.459.420
*	FAES FARMA	889.826,03892	0,137800	53.230	13.562	954.251	0,128497	65.739	954.251	0,128497	65.739
*	FOMENTO	6.083.139,03297	0,172000	4.281.393	1.202.046	11.365.500	0,092059	5.390.130	11.365.500	0,092059	5.390.130
*	FUNESPAÑA	91.770,00000	0,242300	26.831	10.463	127.522	0,174368	36.482	127.522	0,174368	36.482
*	GAMESA	2.727.391,92384	0,217400	1.050.998	1.322.991	4.953.270	0,119706	2.270.700	4.953.270	0,119706	2.270.700
*	GAS NATURAL	10.916.779,56264	0,112200	2.488.004	4.452.983	17.380.228	0,070475	6.595.264	17.380.200	0,070475	6.595.260
*	G. FERROVIAL	7.476.110,80190	0,202400	5.524.091	9.719.013	21.675.100	0,069811	14.488.600	21.675.100	0,069811	14.488.600
	G. INMOCARAL	277.329,52270	0,284300	72.063	62.841	404.755	0,194796	129.795	404.755	0,194798	129.792
*	HULL. C.CORTÉS	36.214,75000	0,153900	17.581	13.483	65.632	0,084920	30.017	65.632	0,084920	30.017
*	IBERDROLA	19.671.802,69302	0,108600	6.883.697	12.873.896	38.055.000	0,056139	18.758.300	38.055.000	0,056139	18.758.300
*	IBERIA	2.235.125,42352	0,216100	1.787.913	1.687.752	5.512.900	0,087615	3.344.660	5.512.900	0,087615	3.344.660
*	IBERPAPEL	204.981,56770	0,143900	43.183	52.759	294.992	0,099992	91.844	294.992	0,099992	91.844
	INBESOS	64.753,00000	0,564300	22.320	48.102	129.257	0,291757	62.581	128.970	0,293756	61.193
*	INDITEX	13.264.470,91200	0,159100	1.103.066	230.158	14.553.600	0,145008	1.315.360	14.553.600	0,145008	1.315.360
	INDO	73.458,00000	0,321600	73.278	23.659	166.659	0,146002	95.101	166.659	0,146002	95.101
	INDRA	2.490.130,12931	0,160000	779.579	90.275	3.335.730	0,119441	862.847	3.335.730	0,119441	862.847
	COLONIAL	2.464.670,42800	0,205700	536.910	2.531.544	5.279.180	0,096037	2.831.180	5.279.180	0,096037	2.831.160
*	INM. URBIS	1.981.428,82775	0,191200	1.727.080	437.123	4.069.520	0,093104	2.130.270	4.069.520	0,093104	2.130.270
	JAZZTEL	970.697,43000	0,762200	144.723	281.872	1.356.310	0,562603	363.144	1.331.180	0,578297	302.034
*	LGT ESPECIALES	50.016,00000	0,254100	31.873	9.462	89.805	0,141519	40.601	89.805	0,141519	40.601
	LOGISTA	1.924.884,00000	0,273300	2.533.831	173.507	4.564.890	0,115243	2.693.870	4.564.890	0,115243	2.693.870
	MECALUX	246.197,60000	0,290000	91.217	49.386	380.232	0,187773	136.755	380.232	0,187773	136.755
*	METROVACESA	3.451.368,35568	0,195000	4.282.293	2.920.050	10.287.600	0,065421	6.975.680	10.287.600	0,065421	6.975.680
*	MIQUEL COSTAS	318.141,60000	0,197900	38.196	13.144	367.455	0,171341	50.320	367.455	0,171341	50.320
*	NATRA	168.746,82024	0,257500	96.398	76.301	332.188	0,130806	166.733	332.188	0,130806	166.773
	NATRACEUTICAL	220.032,89805	0,381100	14.230	4.554	238.095	0,352190	18.396	238.095	0,352190	18.392
	NH HOTELES	1.356.698,39230	0,187600	343.371	869.250	2.478.950	0,102671	1.141.750	2.478.950	0,102671	1.141.750
*	PAP.Y CART.	180.501,54908	0,175900	130.807	184.825	475.762	0,066736	301.285	475.762	0,066736	301.285
	PATERNINA	38.822,40752	0,271400	20.428	34.002	89.577	0,117626	51.734	89.577	0,117626	51.734
*	PESCANOVA	257.790,00000	0,177000	424.966	239.390	890.650	0,051231	645.774	890.650	0,051231	645.774
	PRIM	96.886,94400	0,338300	21.544	18.057	134.320	0,243829	37.986	134.320	0,244046	37.974
*	PRISA	3.507.564,37500	0,200200	581.876	503.330	4.532.780	0,154919	1.045.840	4.532.780	0,154919	1.045.840
*	PROSEGUR	1.077.499,62144	0,187000	488.332	206.245	1.742.500	0,115634	678.568	1.742.500	0,115634	678.568
*	PULEVA BIOTECH	153.330,71064	0,160500	1.993	1.525	156.662	0,157087	3.399	156.662	0,157087	3.399
*	RED ELÉC. ESP.	3.096.330,30000	0,182600	1.542.690	1.990.119	6.407.100	0,088244	3.378.300	6.407.100	0,088244	3.378.300
	RENO DE MEDICI	193.772,90376	0,274100	329.536	92.587	600.411	0,088462	414.936	600.411	0,088462	414.936
*	REPSOL	25.833.470,87708	0,134900	10.898.000	18.104.000	52.878.400	0,065905	27.596.700	52.878.400	0,065905	27.596.700
*	SACYR V.	5.187.328,65507	0,194400	4.002.767	7.660.807	16.034.900	0,062889	11.068.900	16.034.900	0,062889	11.068.900
	SEDA BCN	107.306,63554	0,258800	128.185	174.500	390.655	0,071087	289.140	390.655	0,071087	289.140
	SERVICE POINT	160.481,79479	0,552500	27.576	72.965	251.490	0,360591	85.947	250.468	0,364430	79.609
	SNIACE	43.993,20987	0,389900	80.620	44.454	163.069	0,105208	121.623	163.190	0,105247	121.623
	SOGECABLE	3.925.464,50509	0,222500	565.353	1.428.752	5.771.000	0,151347	1.852.970	5.771.000	0,160984	1.852.560
*	SOL MELIA	1.770.161,52366	0,174200	711.290	1.169.561	3.524.430	0,087493	1.789.930	3.524.430	0,087493	1.789.930
*	SOS CUETARA	1.207.215,00512	0,131400	294.281	257.277	1.728.170	0,091790	531.588	1.728.170	0,091790	531.588
*	SOTOGRANDE	586.386,61200	0,239700	97.481	26.739	706.088	0,199064	122.144	706.088	0,199064	122.144
	TAFISA	581.646,04680	0,476200	445.681	1.187.597	2.108.550	0,136985	1.521.460	2.109.640	0,137107	1.521.260
*	TAVEX ALGOD.	104.892,48000	0,170700	53.210	79.865	229.231	0,078110	126.875	229.231	0,078110	126.875
*	TECNOCOM	90.982,10968	0,282900	29.449	5.234	124.573	0,206616	34.277	124.573	0,206616	34.277
*	TELECINCO	4.774.986,33216	0,238100	282.664	69.678	5.114.980	0,222273	346.932	5.114.980	0,222273	346.932
*	TELEFONICA	66.632.105,57538	0,140490	24.895.681	31.225.427	119.256.000	0,078726	53.697.300	119.256.000	0,078446	53.697.300
*	TELEF. MOV.	37.805.709,32208	0,180100	9.649.692	12.651.104	58.698.200	0,115997	21.313.400	58.698.200	0,115997	21.313.400
*	TEL. PUB. E INF.	2.610.190,39032	0,183200	365.567	131.706	3.087.500	0,154878	487.050	3.087.500	0,154878	487.050
*	TELEPIZZA	371.171,68400	0,255600	62.587	22.878	453.187	0,209343	83.687	453.187	0,209343	83.687
	TESTA INM.	2.170.944,81440	0,228700	98.287	1.343.547	3.481.570	0,142680	1.181.060	3.481.570	0,142680	1.156.110

	TRANS. AZKAR	333.396,00000	0,167500	110.530	15.998	456.177	0,122417	125.286	456.177	0,122417	125.286
*	TUBACEX	405.585,28510	0,233100	211.663	40.112	649.274	0,145612	248.661	649.274	0,145612	248.661
*	TUBOS REUNIDOS	255.991,72500	0,251800	212.930	134.499	586.242	0,109952	336.989	586.242	0,109952	336.989
*	TUDOR	239.797,92600	0,273600	70.464	6.468	314.699	0,208481	76.430	314.699	0,208481	76.430
*	UNION FENOSA	7.680.965,80846	0,144500	3.872.557	8.537.761	19.193.650	0,057826	11.747.524	19.193.700	0,057826	11.747.500
	UNIPAPEL	190.429,13210	0,129800	42.970	22.030	252.454	0,097910	63.290	252.454	0,097910	63.290
*	URALITA	851.224,16817	0,248900	307.217	161.434	1.298.220	0,163200	456.114	1.298.220	0,163200	456.114
	URBAS	17.149,91145	0,757000	2.801	1.131	20.925	0,624612	3.745	20.877	0,626607	3.665
*	VIDRALA	390.078,50000	0,175500	104.401	218.643	690.030	0,099211	305.753	690.030	0,099211	305.753
*	VISCOFAN	390.078,50000	0,183900	113.828	81.567	575.361	0,124679	189.063	575.361	0,124679	189.063
*	ZARDOYA	5.268.969,78498	0,154200	418.249	26.187	5.702.530	0,142476	442.403	5.702.530	0,142481	442.403
*	ZELTIA	1.184.269,29600	0,220400	78.473	57.773	1.313.400	0,198731	131.634	1.313.400	0,198731	131.633

Las unidades monetarias están expresadas en miles de euros.

De los datos contenidos en la tabla anterior no puede deducirse una relación clara entre el nivel de la barrera y el valor, la volatilidad y el valor crítico de la empresa. Así, la eliminación de la barrera no implica una variación del valor de la empresa en el mismo sentido para todas las empresas analizadas.

En el 89,52% de los casos analizados, el valor de la empresa no se ve afectado por la existencia o no de barrera. En el 5,71% de las empresas, el valor disminuye al eliminar la barrera y en el resto, dicho valor aumenta.

En cuanto a la volatilidad de la empresa, ésta es siempre menor a la volatilidad de la acción, en los dos modelos analizados.

La volatilidad del 83,81% de las 105 empresas analizadas se mantiene constante, independientemente de la presencia o no de barrera. En el 11,43% de los casos, la volatilidad aumenta al eliminar la barrera y, en el resto, disminuye.

En todos los casos en que la existencia de barrera afecta al valor de la empresa, es decir, en el 10,48% de las empresas, también la volatilidad varía y lo hace en sentido contrario a la variación del valor, salvo en Sniace y Tafisa.

El valor crítico de la empresa, que es el valor a 30/06/06 por debajo del cual se produciría el impago en dicha fecha, es siempre menor al valor de la empresa a 30/06/05.

Si se elimina la barrera, el valor crítico de la empresa no sufre variación alguna en el 77,41% de los casos, mientras que en el 20% dicho valor disminuye.

A partir de los datos de la **Tabla 1** se han deducido, aplicando las expresiones (4) y (5) del modelo presentado, y para cada empresa, las probabilidades de impago entre 0 y 1 año (corto plazo), entre 0 y 5 años (largo plazo) y también la probabilidad implícita obtenida de las dos anteriores y que es la probabilidad de impago entre 1 y 5 años, condicionada a que no se haya producido el impago en el corto plazo. Utilizando las expresiones correspondientes se ha repetido el proceso para el modelo de Geske (1977), obteniéndose, en este caso, la probabilidad de impago en 1 año, en 5 años y la condicionada de impago en 5 años.

En función de las probabilidades de impago encontradas para el modelo propuesto, se dividen las 105 empresas analizadas en tres grupos. En el primer grupo se incluyen todas aquellas empresas cuya probabilidad de impago, tanto a corto como a largo plazo, es nula. Dichas empresas están marcadas con un asterisco en la **Tabla 1**. Todas las empresas que formaban parte del IBEX 35 en la fecha 30/6/05, excepto Arcelor y NH Hoteles pertenecen a este grupo. El segundo grupo incluye a aquellas empresas para las que la probabilidad a corto, o a largo, o ambas está comprendida entre 0,000001 y 0,001. Pertenecen al tercer grupo las empresas cuya probabilidad a corto, o a largo, o ambas tiene valores superiores a 0,001.

En la **Tabla 2** figuran las probabilidades de impago de las empresas del segundo grupo.

TABLA 2

Probabilidades de impago

	Modelo propuesto $B = 0,75 \cdot K_2$			**Modelo Geske (1977)**		
EMPRESA	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$	$1-P\left(T_1\right)$	$1-P\left(T_2\right)$	$1-P\left(T_2/1-P\left(T_1\right)\right)$
A.DOMINGUEZ	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001
ARCELOR	0,000001	0,000002	0,000001	0,000001	0,000001	0,000000
BARON DE LEY	0,000000	0,000007	0,000007	0,000000	0,000007	0,000007
BEFESA	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000
C.V.N.E.	0,000000	0,000003	0,000003	0,000000	0,000003	0,000003
CEPSA	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000
CINTRA	0,000000	0,000141	0,000141	0,000000	0,000141	0,000141
CORREA	0,000015	0,000032	0,000017	0,000015	0,000015	0,000000
CORTEFIEL	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000

DURO FELGUERA	0,000004	0,000004	0,000000	0,000004	0,000004	0,000000
EAD AERONAUTIC	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000
INDO	0,000047	0,000047	0,000000	0,000047	0,000047	0,000000
INDRA	0,000000	0,000002	0,000002	0,000000	0,000002	0,000002
INM. COLONIAL	0,000000	0,000077	0,000077	0,000000	0,000077	0,000077
INMOCARAL	0,000000	0,000009	0,000009	0,000000	0,000009	0,000009
LOGISTA	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000
MECALUX	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001
NATRACEUTICAL	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001
NH HOTELES	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001
OBRASCOM H.L.	0,000031	0,000031	0,000000	0,000031	0,000031	0,000000
PATERNINA	0,000001	0,000042	0,000041	0,000001	0,000042	0,000041
PRIM	0,000000	0,000165	0,000165	0,000000	0,000000	0,000000
RENO MEDICI	0,000006	0,000006	0,000000	0,000006	0,000006	0,000000
SEDA BARCELONA	0,000004	0,000004	0,000000	0,000004	0,000004	0,000000
SOGECABLE	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000	0,000001	0,000001
T. AZKAR	0,000001	0,000001	0,000000	0,000000	0,000001	0,000001
TESTA	0,000000	0,000841	0,000841	0,000000	0,000840	0,000840
UNIPAPEL	0,000000	0,000002	0,000002	0,000000	0,000002	0,000002

De las 28 empresas que figuran en esta tabla, ninguna ha sufrido variación en el valor de la empresa al eliminar la barrera. En el 14,29% de estas empresas, ha variado el valor crítico y también la volatilidad, en el 21,43% sólo se ha producido variación en el valor crítico y en el resto no ha variado ninguna de las magnitudes calculadas.

En el 75% de las empresas de la **Tabla 2**, las probabilidades de impago en ambos modelos coinciden. En el 25% restante, las probabilidades deducidas a partir del modelo desarrollado son superiores a las obtenidas por el modelo de Geske (1977) y ello es debido a, por un lado, la consideración de una barrera y, por otro, al hecho de que en Geske (1977) el suceso de crédito sólo puede producirse en el vencimiento de las deudas.

En los casos de Cepsa, Cortefiel y Prim las probabilidades de impago se anulan para el modelo de Geske (1977) mientras que toman valores distintos de cero para el modelo propuesto. Estos resultados ponen de manifiesto la posibilidad de quiebra antes del vencimiento de la deuda, hecho que no recoge el modelo de Geske (1977).

En la **Tabla 3** figuran las empresas que pertenecen al tercer grupo, es decir, aquellas en que la probabilidad, para el modelo desarrollado, a corto o a largo o ambas tiene valores superiores a 0,001. Es decir, de todas las empresas analizadas, las contenidas en la **Tabla 3** son las que tienen una probabilidad de impago mayor.

Tabla 3

Probabilidades de impago

	Modelo propuesto $B = 0,75 \cdot K_2$			**Modelo Geske (1977)**		
EMPRESA	$1-P[t,T_1]$	$1-P[t,T_2]$	$1-P(T_1,T_2]$	$1-P(T_1)$	$1-P(T_2)$	$1-P(T_2/1-P(T_1))$
AVANZIT	0,005379	0,037287	0,032081	0,005277	0,036473	0,031361
ERCROS	0,025482	0,025950	0,000480	0,025481	0,025949	0,000480
INBESOS	0,007987	0,101680	0,094447	0,006949	0,096010	0,089684
JAZZTEL	0,018022	0,286343	0,273245	0,010425	0,266501	0,258774
SERVICE POINT	0,002164	0,120031	0,118123	0,001271	0,109845	0,108712
SNIACE	0,001713	0,001713	0,000000	0,001681	0,001681	0,000000
TAFISA	0,006924	0,025817	0,019025	0,006877	0,025755	0,019009
URBAS	0,006671	0,085287	0,079144	0,006286	0,076872	0,071033

En todas las empresas del tercer grupo, al eliminar la barrera ha variado su valor y su volatilidad a 30/6/05 y además, en el 75% de ellas ha variado también el valor crítico. Tal como se ha dicho anteriormente, de todas las empresas que se han analizado, el 10,48% sufren variación en el valor al eliminar la barrera y el 72,72% de éstas últimas son las que tienen la mayor probabilidad de quiebra.

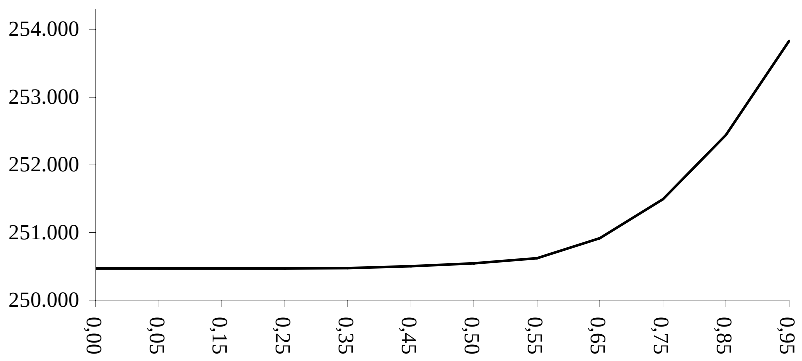
Las empresas de este tercer grupo son las que tienen una mayor volatilidad de las acciones, entre 0,3899 (Sniace) y 0,7622 (Jazztel), y ello conduce a una mayor volatilidad del valor de la empresa, sinónimo de un mayor nivel de riesgo de crédito. Es, por tanto, en este grupo donde más diferencias se aprecian entre ambos modelos, observándose que el modelo presentado en este trabajo recoge en todos los casos unas probabilidades de impago significativamente superiores.

De los resultados obtenidos se deduce que la probabilidad de impago es mayor en las empresas con mayor volatilidad. El 12,38% de las 105 empresas consideradas en el trabajo tienen una volatilidad superior a 0,3000. De éstas, el 61,54% pertenecen al tercer grupo de empresas que es el más arriesgado y el resto al segundo grupo.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos acerca de la influencia del valor de la barrera en las variables analizadas (valor, volatilidad, valor crítico y probabilidades de impago) para el tercer grupo de empresas que son las que tienen una mayor probabilidad de quiebra. Para ello, se ha hecho variar la barrera desde el 0 hasta el 95% del nominal de la deuda a largo plazo[10].

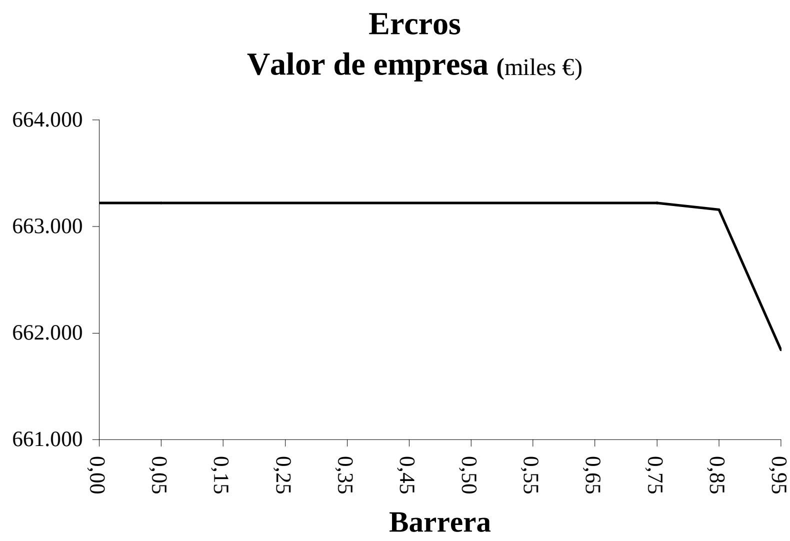
Tal como se ha dicho anteriormente, un incremento en el nivel de la barrera no tiene una misma repercusión en el valor de todas las empresas. Así, el valor de las empresas Avanzit, Inbesos, Jazztel, Service Point y Urbas crece a medida que lo hace la barrera, siendo este crecimiento mayor cuanto mayor es la barrera. En realidad, para valores cercanos a cero, el valor es prácticamente constante. En la siguiente gráfica se representa el comportamiento del valor de Service Point, tomada como representativa de este subgrupo de empresas.

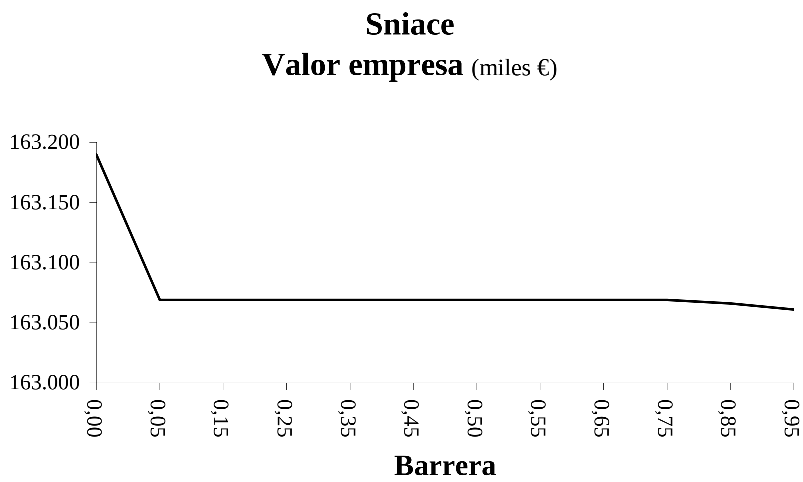
Service Point
Valor de empresa (miles €)



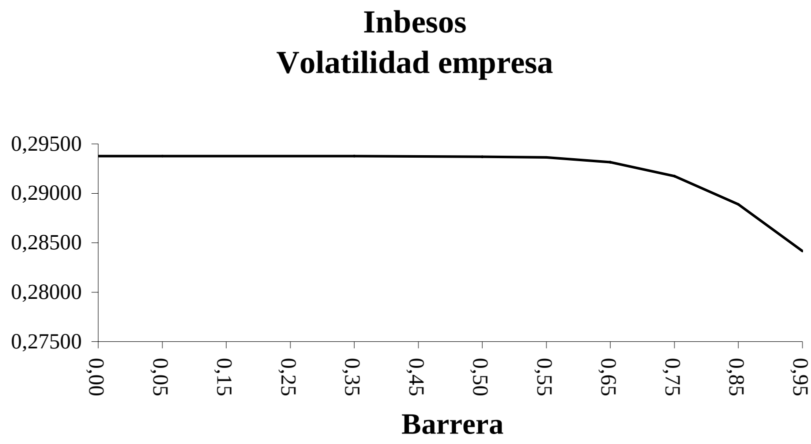
En cambio, el valor de las empresas Ercros, Tafisa y Sniace disminuye a medida que la barrera aumenta. Ahora bien, mientras en las dos primeras, la disminución ocurre para valores de barrera muy altos, en Sniace la mayor disminución tiene lugar para valores de barrera muy pequeños.

[10] Los resultados completos pueden verse en el apéndice.

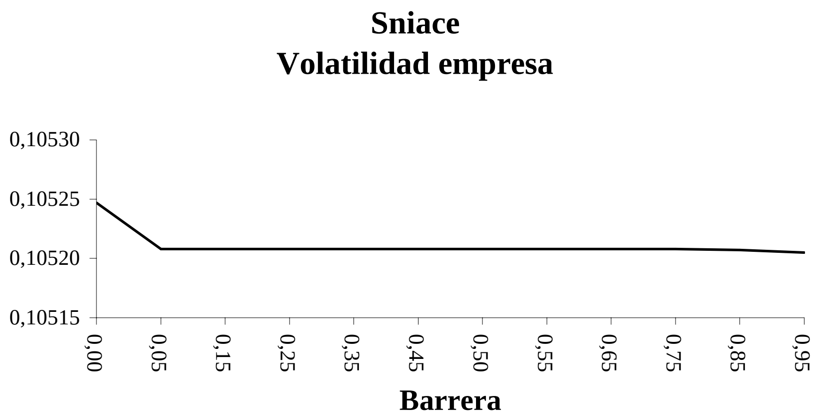




En cuanto a la influencia del nivel de la barrera en la volatilidad de la empresa puede apreciarse que para todas las empresas, excepto para Sniace, al aumentar la barrera disminuye la volatilidad. Además dicha disminución se hace más evidente para valores elevados de la barrera. El comportamiento de la volatilidad con respecto a la barrera puede verse reflejado en la gráfica de Inbesos.

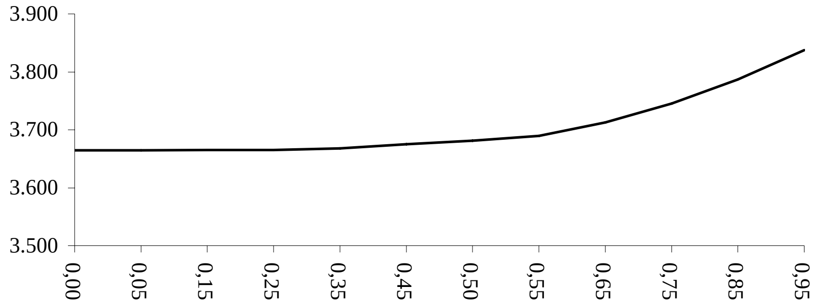


En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento distinto de Sniace:



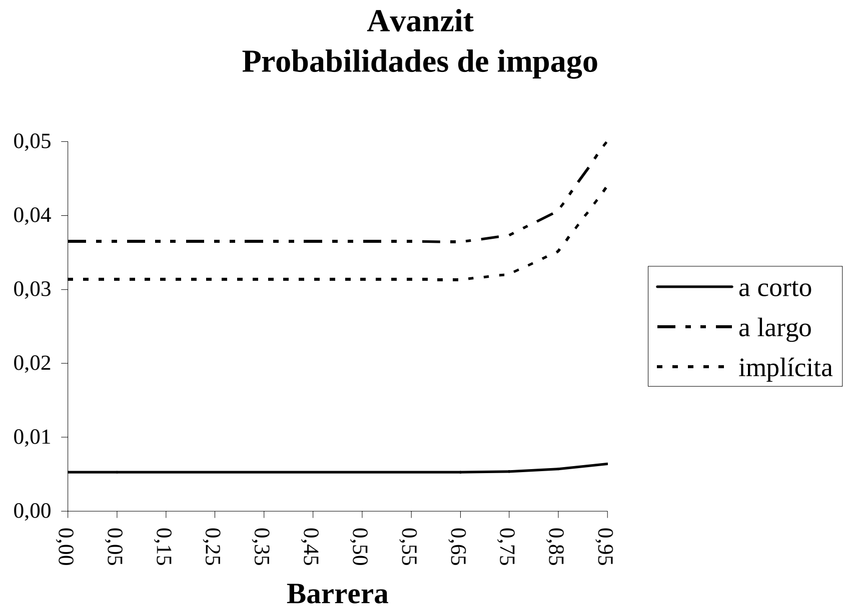
El valor crítico es creciente respecto al nivel de la barrera para todas las empresas del tercer grupo y dicho crecimiento se acentúa con valores altos de la barrera, excepto para el caso de Sniace que permanece constante. El comportamiento del valor crítico de Urbas puede considerarse como representativo de todas estas empresas:

Urbas
Valor crítico (miles €)



Respecto a la probabilidad de impago, se constata que dicha probabilidad es creciente en relación al nivel de la barrera. Además, la probabilidad de impago a largo plazo siempre es mayor que la asociada al corto plazo. Por otra parte, el comportamiento de la probabilidad de impago a corto plazo es más estable que el de la probabilidad de impago a largo plazo. Para valores altos de la barrera, $B > 0,6 \cdot K_2$, la probabilidad a largo plazo crece mas rápidamente que para valores bajos de dicha barrera.

Un comportamiento de las probabilidades de impago representativo de las empresas del tercer grupo se puede observar en la siguiente gráfica correspondiente a la empresa Avanzit:



7. Conclusiones

En este trabajo se ha utilizado la metodología de valoración de las opciones compuestas con barrera, *compound option written on a down-and-out call option*, desarrollada por Ericsson y Reneby (2003) para cuantificar el riesgo de crédito de 105 empresas del mercado continuo español. La ventaja de este modelo frente a otros tradicionales, como el de Black-Scholes-Merton, es que permite dividir la deuda, en función de su vencimiento, en deuda a corto y a largo plazo. Si bien esta ampliación a más de un vencimiento ya fue considerada por Geske (1977), el modelo propuesto ofrece otra ventaja que deriva de la introducción de una barrera, es decir, un nivel del valor de los activos por debajo del cual se hace difícil que la empresa pueda recuperarse y, por tanto, se produce el impago. La presencia de la barrera permite que el impago pueda ocurrir a lo largo de todo el horizonte temporal considerado y no sólo en el vencimiento de la deuda. Y, si como es el caso, son dos los vencimientos que se tienen en cuenta, ello permite deducir probabilidades de impago a corto y a largo plazo, además de la probabilidad de impago implícita en las anteriores.

Aplicando esta metodología y a partir del valor y volatilidad de las acciones y el nominal de la deuda a corto y a largo plazo, se han deducido mediante métodos numéricos el valor, la volatilidad y el valor crítico de las empresas analizadas. La cuantificación de estas variables permite determinar las probabilidades de impago.

De los resultados obtenidos se puede apreciar que el 65,71% de las empresas del mercado continuo español tienen una probabilidad de impago nula, tanto a corto como a largo plazo, según el modelo propuesto y considerando una barrera del 75% del nominal de la deuda a largo plazo. Son las empresas con una mayor volatilidad de las acciones las que acaban teniendo una mayor probabilidad de impago, destacando los casos de Jazztel, Service Point e Inbesos cuyas probabilidades de impago a largo plazo son 0,286343, 0,120031 y 0,101689, respectivamente.

Se han comparado las probabilidades de impago del modelo presentado con las deducidas del modelo de Geske (1977). Los resultados empíricos obtenidos en esta comparación son coherentes. Se comprueba empíricamente que cuando las probabilidades del modelo presentado son nulas, las de Geske también lo son. Este hecho es lógico ya que si no se puede quebrar en un plazo concreto, tampoco se puede quebrar al final de dicho plazo. Por otra parte, también se comprueba numéricamente que cuando las probabilidades son distintas de cero, las asociadas al modelo presentado son siempre superiores y ello es debido al hecho de que dichas probabilidades están asociadas a un intervalo de tiempo y a la existencia de barrera. De esta forma, las probabilidades propuestas recogen de una forma más precisa el riesgo de crédito del corto y largo plazo.

Por otra parte, mientras que la relación entre probabilidades de impago y nivel de la barrera es clara, a mayor barrera mayor probabilidad de impago, no ocurre lo mismo con el resto de las variables consideradas. No puede, por tanto, deducirse ninguna relación entre la presencia de barrera y el comportamiento de dichas variables. Ahora bien, se aprecia que las mayores variaciones en el valor, volatilidad y valor crítico se producen en las empresas del tercer grupo.

Del análisis de los datos obtenidos se concluye que las empresas del mercado continuo español incluidas en los grupos 1 y 2 son empresas con un riesgo de crédito prácticamente nulo, independientemente del modelo considerado. En cambio, para las empresas del tercer grupo, que son las que presentan una mayor volatilidad, la determinación de las probabilidades de impago mediante el modelo propuesto mejora la percepción de riesgo de crédito.

Bibliografía

[1] Ammann, M. (2001) "*Credit risk valuation. Methods, models and applications*", Springer, Berlin.

[2] Bielecki, R. and M. Rutowski (2002) "*Credit risk: modeling, valuation and hedging*", Sprringer, Berlin.

[3] Black, F. and M. Scholes (1973) "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

[4] Black, F. and J.C. Cox (1976) "Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions", *Journal of Finance*, 31, nº 2, 351-367.

[5] Briys E. and F. Varenne (1997) "Valuing risk fixed rate debt: an extension", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, nº 2, 239-248.

[6] Brockman, P. and H.J. Turtle (2003) "A barrier option framework for corporate security valuation", *Journal of Financial Economics*, 67, 511-529.

[7] Blum, C., L. Overbeck and C. Wagner (2003) "*An introduction to credit risk modeling*", Chapman & Hall/CRC, New York.

[8] Corzo, T. (2000) **"**Aplicación de la teoría de opciones a la evaluación del riesgo de crédito**",** *Seminario de Matemática Financiera MEFF-UAM*, 3, 37-49.

[9] Delianedis, G. and R.L. Geske (2003) "Credit risk and risk neutral default probabilities: information about rating migrations and defaults", *EFA 2003 Annual Conference Paper nº 962*. http://ssrn.com/abstract=424301.

[10] Duffie, D. and K.J. Singleton (1999) "Modeling term structures of defaultable bonds", *Review of Financial Studies*, 12, nº 4, 687-720.

[11] Elizalde, A. (2005) "Credit risk models II: structural models", www.abelelizalde.com.

[12] Eom, Y.-H., J. Helwege and J. Huang (2004) "Structural models of corporate bond pricing: an empirical analysis", *Review of Financial Studies*, 17, 499-544.

[13] Ericsson, J. and J. Reneby (1998) "A framework for valuing corporate securities", *Applied Mathematical Finance*, 5, 143-163.

[14] Ericsson, J. and J. Reneby (2003) "Stock options as barrier contingent claims", *Applied Mathematical Finance*, 10, 21-147.

[15] Forte, S. y J.I. Peña (2003) "Debt refinancing and credit risk", Universidad Carlos III, Madrid, Working Paper 03-17, Business Economics Series 04.

[16] Geske, R. (1977) "The valuation of corporate liabilities as compound options", *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 12, nº 4, 541-552.

[17] Geske, R. (1979) "The valuation of compound options", *Journal of Financial Economics*, 7, 63-81.

[18] Giesecke, K. (2004) "Credit risk modeling and valuation: an introduction", en D.Shimko (ed), *Credit Risk: Models and Management,* Second edition, Riskbooks, London, 487-526.

[19] Hughston, L.P. and S. Jarrow (2001), "Credit risk: constructing the basic building correlations", *Economic Notes*, 30, nº 2, 281-292.

[20] Jarrow, R. and S. Turnbull (1995) "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk", *Journal of Finance*, 50, nº 1, 53-85.

[21] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000) "Credit events and the valuation of credit derivatives of basket type", *Review of Derivatives Research*, 4, 55-79.

[22] Hull, J.C. (2006) "*Options, futures and other derivatives*", Sixth Edition, Prentice Hall, New Jersey.

[23] Martín, J.L. y A. Trujillo (2005) "Los modelos estructurales y la probabilidad de insolvencia: aplicación a las empresas del IBEX-35", *V Jornadas sobre Predicción de la Insolvencia Empresarial, La Gestión del Riesgo Financiero y la Nueva Ley Concursal.*

[24] Martín, J.L. y A. Trujillo (2003) "Los modelos de valoración de opciones en la gestión del riesgo de crédito: ¿Una alternativa?", *Boletín de Estudios Económicos*, LVIII, nº 179, 329-365.

[25] Merton, R.C. (1974) "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates", *Journal of Finance*, 29, 449-470.

[26] Peña, J.I. (2003) *"La gestión de riesgos financieros de mercado y de crédito"*, Prentice Hall, Madrid.

[27] Reisz, A. S. and C. Perlich (2004) "A market-based framework for bankruptcy prediction", *10th Symposium on Finance, Banking and Insurance*, Diciembre 2005, Universidad de Karlsruhe.

[28] Shimko, D.C., N. Tejima and D. R. Van Deventer (1993) "The pricing of risk debt when interest rates are stochastic", *Journal of Fixed Income*, 3, 58-65.

Apéndice I

En las siguientes tablas se presentan los resultados obtenidos para el valor y la volatilidad a 30/6/05, el valor crítico a 30/6/06 y las probabilidades de impago a corto, a largo plazo e implícitas para las empresas del tercer grupo, considerando una barrera que varía desde el 0 hasta el 95% del nominal de la deuda a largo plazo.

Avanzit[11]						
B	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$
0,00	393.509	0,223154	221.357	0,005277	0,036473	0,031361
0,05	393.509	0,223154	221.357	0,005277	0,036473	0,031361
0,15	393.509	0,223154	221.357	0,005277	0,036473	0,031361
0,25	393.509	0,223154	221.357	0,005277	0,036473	0,031361
0,35	393.509	0,223154	221.357	0,005277	0,036473	0,031361
0,45	393.510	0,223154	221.357	0,005277	0,036473	0,031361
0,50	393.510	0,223153	221.358	0,005277	0,036473	0,031361
0,55	393.511	0,223151	221.362	0,005278	0,036476	0,031364
0,65	393.526	0,223117	221.432	0,005290	0,036433	0,031309
0,75	393.606	0,222918	221.885	0,005379	0,037287	0,032081
0,85	393.889	0,222197	223.495	0,005700	0,040626	0,035126
0,95	394.714	0,220427	227.157	0,006423	0,050134	0,043994

Ercros						
B	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$
0,00	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,05	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,15	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,25	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,35	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,45	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,50	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,55	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,65	663.222	0,130684	519.934	0,025481	0,025949	0,000480
0,75	663.221	0,130684	519.934	0,025482	0,025950	0,000480
0,85	663.156	0,130675	519.936	0,025520	0,025992	0,000484
0,95	661.842	0,130493	519.972	0,026292	0,026873	0,000597

[11] En todas las tablas, V_t y $\bar{V}_{T_1}$ están expresados en miles de euros.

Inbesos						
B	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$
0,00	128.970	0,293756	61.193	0,006949	0,096010	0,089684
0,05	128.970	0,293756	61.193	0,006949	0,096010	0,089684
0,15	128.970	0,293756	61.193	0,006949	0,096010	0,089684
0,25	128.970	0,293756	61.193	0,006949	0,096010	0,089684
0,35	128.970	0,293756	61.193	0,006949	0,096011	0,089685
0,45	128.973	0,293742	61.202	0,006955	0,096021	0,089690
0,50	128.978	0,293709	61.226	0,006972	0,096069	0,089723
0,55	128.990	0,293627	61.286	0,007017	0,096225	0,089838
0,65	129.062	0,293136	61.649	0,007287	0,097484	0,090859
0,75	129.257	0,291757	62.581	0,007987	0,101680	0,094447
0,85	129.663	0,288881	64.251	0,009240	0,110961	0,102670
0,95	130.405	0,284172	66.629	0,010952	0,126701	0,117031

Jazztel						
B	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$
0,00	1.331.180	0,578297	302.034	0,010425	0,266501	0,258774
0,05	1.331.180	0,578297	302.034	0,010425	0,266501	0,258774
0,15	1.331.200	0,578286	302.078	0,010430	0,266515	0,258784
0,25	1.331.510	0,578107	302.953	0,010532	0,266519	0,258712
0,35	1.332.740	0,577362	306.702	0,010986	0,267082	0,258941
0,45	1.335.400	0,575622	314.891	0,011998	0,269069	0,260193
0,50	1.337.670	0,574287	320.719	0,012715	0,270735	0,261343
0,55	1.340.330	0,572616	327.595	0,013573	0,272933	0,262929
0,65	1.347.260	0,568257	344.000	0,015630	0,278781	0,267329
0,75	1.356.310	0,562603	363.144	0,018022	0,286343	0,273245
0,85	1.367.330	0,555790	384.241	0,020615	0,295366	0,280534
0,95	1.380.150	0,547963	406.725	0,023287	0,305672	0,289118

Service Point						
B	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$
0,00	250.468	0,364430	76.609	0,001271	0,109845	0,108712
0,05	250.468	0,364430	76.609	0,001271	0,109845	0,108712
0,15	250.468	0,364430	76.609	0,001271	0,109845	0,108712
0,25	250.468	0,364429	76.609	0,001271	0,109845	0,108712
0,35	250.473	0,364416	79.638	0,001274	0,109848	0,108712
0,45	250.504	0,364308	79.875	0,001303	0,109979	0,108818
0,50	250.546	0,364156	80.204	0,001344	0,110252	0,109055
0,55	250.620	0,363883	80.761	0,001415	0,110836	0,109576
0,65	250.914	0,362776	82.746	0,001683	0,113685	0,112191
0,75	251.490	0,360591	85.947	0,002164	0,120031	0,118123
0,85	252.440	0,357028	90.179	0,002880	0,130950	0,128440
0,95	253.829	0,351971	95.169	0,003811	0,146867	0,143603

Sniace						
B	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$
0,00	163.190	0,105247	121.623	0,001681	0,001681	0,000000
0,05	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,15	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,25	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,35	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,45	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,50	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,55	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,65	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,75	163.069	0,105208	121.623	0,001713	0,001713	0,000000
0,85	163.066	0,105207	121.623	0,001714	0,001714	0,000000
0,95	163.061	0,105205	121.623	0,001715	0,001715	0,000000

Tafisa						
B	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$
0,00	2.109.640	0,137107	1.521.260	0,006877	0,025755	0,019009
0,05	2.109.640	0,137107	1.521.260	0,006877	0,025755	0,019009
0,15	2.109.640	0,137107	1.521.260	0,006877	0,025755	0,019009
0,25	2.109.640	0,137107	1.521.260	0,006877	0,025755	0,019009
0,35	2.109.640	0,137107	1.521.260	0,006877	0,025755	0,019009
0,45	2.109.640	0,137107	1.521.260	0,006877	0,025755	0,019009
0,50	2.109.640	0,137107	1.521.260	0,006877	0,025755	0,019009
0,55	2.109.640	0,137107	1.521.260	0,006877	0,025755	0,019009
0,65	2.109.630	0,137106	1.521.270	0,006878	0,025757	0,019010
0,75	2.108.550	0,136985	1.521.460	0,006924	0,025817	0,019025
0,85	2.094.390	0,135242	1.524.320	0,007529	0,026805	0,019422
0,95	2.087.720	0,133250	1.537.350	0,008610	0,033425	0,025031

Urbas						
B	V_t	σ	$\bar{V}_{T_1}$	$1-P\left[t,T_1\right]$	$1-P\left[t,T_2\right]$	$1-P\left(T_1,T_2\right]$
0,00	20.877	0,626607	3.665	0,006286	0,076872	0,071033
0,05	20.877	0,626605	3.665	0,006286	0,076872	0,071033
0,15	20.878	0,626581	3.665	0,006287	0,076874	0,071034
0,25	20.878	0,626581	3.665	0,006287	0,076875	0,071035
0,35	20.880	0,626588	3.668	0,006295	0,076981	0,071134
0,45	20.885	0,626279	3.675	0,006326	0,077464	0,071591
0,50	20.889	0,626117	3.681	0,006355	0,077972	0,072075
0,55	20.894	0,625912	3.689	0,006393	0,078731	0,072803
0,65	20.907	0,625361	3.713	0,006507	0,081215	0,075197
0,75	20.924	0,624612	3.745	0,006671	0,085287	0,079144
0,85	20.947	0,623660	3.787	0,006887	0,091207	0,084905
0,95	20.973	0,622509	3.838	0,007152	0,099117	0,092627