

**IMPACT OF THE DEPENDENCE STRUCTURE BETWEEN
LONGEVITY AND MORTALITY RISKS IN SOLVENCY CAPITAL
REQUIREMENTS (SCR)**

**ESTRUCTURA DE DEPENDENCIA ENTRE LOS RIESGOS DE
LONGEVIDAD Y DE MORTALIDAD Y SU IMPACTO EN EL
CAPITAL REQUERIDO DE SOLVENCIA (SCR)**

Jaume Belles-Sampera^{1,2*}, Miguel Santolino¹ and Antonio Rubio-Pallarés²

Abstract

As stated by EIOPA in Guideline 51 of BoS-14/253 (Guidelines on system of governance), the Actuarial Function of an undertaking using an internal model should contribute to analyze how dependencies between risks are derived in the framework of the model. A previous step is to investigate the underlying assumptions in the current structure of dependencies between risks considered in the Solvency II standard formula, and implications of considering alternative dependency structures. This paper focuses on longevity risk. We illustrate the longevity risk model of EIOPA-14-322 for a portfolio of life products (the hypothesis of the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation) and we quantify the impact of alternative dependence structures on the SCR. This example should be used as basis for the analysis of more complex longevity risk models. We show that all required calculations can be made in an Excel worksheet to ease the use by practitioners.

Keywords: SCR, longevity risk, mortality risk, dependency, copula, survival copula, co-copula.

Resumen

Tal y como EIOPA indica en la Directriz 51 de BoS-14/253 (Directrices sobre el sistema de gobernanza), la función actuarial de una empresa que

M. Santolino agradece las ayudas MINECO/FEDER ECO2015-66314-R y ECO2016-76203-C2-2-P.

¹ Universitat de Barcelona, Riskcenter - Research Group on Risk in Insurance and Finance, Spain.

² Grupo Catalana Occidente S.A., Actuarial Function, Spain, Las opiniones expresadas en este artículo son exclusivas de sus autores. No hay que tomarlas como opiniones de Grupo Catalana Occidente, S.A.

* Autor para la correspondencia (belles.sampera@ub.edu; jaume.belles@catalanaoccidente.com)

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

utiliza un modelo interno debe prestar especial atención al análisis de las dependencias entre riesgos del modelo. Un paso previo al modelo interno consiste en entender las hipótesis que subyacen en la matriz de dependencias que se utiliza en la fórmula estándar de Solvencia II y las implicaciones si se consideran estructuras de dependencia alternativas. Este trabajo se centra en el caso particular relacionado con el riesgo de longevidad. Mediante un enfoque práctico se analiza el modelo de riesgo de longevidad de acuerdo a EIOPA-14-322 para una cartera de productos de vida (las hipótesis de la fórmula estándar en el cálculo del SCR) y el impacto sobre el valor del SCR de considerar estructuras de dependencias diferentes entre riesgos. Este ejemplo ilustrativo debe servir de base para poder considerar modelos del riesgo de longevidad más complejos. En la aplicación mostramos que los cálculos se pueden realizar en una hoja de cálculo Excel con el objetivo de facilitar su uso entre los profesionales.

Palabras clave: SCR, riesgo de longevidad, riesgo de mortalidad, dependencia, cópula, cópula de supervivencia, co-cópula.

1. Introducción

La Directiva de Solvencia II³ propone una fórmula para calcular los Capitales Requeridos de Solvencia (SCR, según sus siglas en inglés, *Solvency Capital Requirements*), es la conocida como *modelo estándar*. El modelo estándar es un conjunto de fórmulas y parámetros fijados por la Directiva, que son iguales para todas las entidades, y que establecen cómo fijar las necesidades de capital de las entidades para garantizar un nivel adecuado de solvencia a un horizonte temporal de un año. El objetivo del uso del modelo estándar es obtener, mediante relativamente sencillos cálculos, un valor numérico que refleje aproximadamente las necesidades de capital en función del perfil de riesgo de la entidad. Este modelo tiene la ventaja de ser de más o menos fácil y directa aplicación⁴. Por el contrario, tiene la desventaja que no siempre será adecuado para reflejar el perfil de riesgo de todas las entidades aseguradoras, atendiendo a la naturaleza y complejidad de los riesgos asumidos por cada entidad. En el caso que el uso

³ Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo de 25 de Noviembre de 2009 sobre el acceso y ejercicio de la actividad aseguradora y reaseguradora, 2009/138/EC.

⁴ En algunos casos los cálculos son intrincados (por ejemplo, contribuciones al SCR de los riesgos de crédito de las contrapartes o de los riesgos catastróficos del negocio de No Vida) y han requerido significativas inversiones de tiempo y recursos por parte de las compañías. A pesar de ello, lo que se quiere destacar es que la normativa proporciona un manual a seguir para calcular dichas contribuciones al capital requerido de solvencia.

del modelo estándar no refleje adecuadamente el perfil de riesgo de la entidad, el legislador abre la puerta a que la entidad pueda calcular el SCR mediante mecanismos alternativos siempre que la autoridad supervisora se lo autorice⁵. Solvencia II permite dos formas alternativas al modelo estándar de calcular el SCR que son; 1) Mantener el conjunto de fórmulas del modelo estándar pero recalibrar algunos de los parámetros utilizados para adaptarlos al perfil de riesgo de la entidad, es decir, *modelo estándar con parámetros específicos* o, 2) Utilizar un modelo propio de cuantificación del SCR, conocido como *modelo interno*.

La obtención del SCR según el modelo estándar puede dividirse en distintas etapas. La fórmula estándar proporciona tanto un mapa jerárquico de riesgos y sub-riesgos como unas matrices de correlaciones lineales que permiten agregar las contribuciones al capital requerido de los riesgos y sub-riesgos identificados en esta estructura, siguiendo un enfoque *bottom-up* de agregación. Es decir, se calculan los requerimientos de capital de los distintos sub-riesgos en los niveles más inferiores de la estructura jerárquica y las contribuciones en niveles superiores se van obteniendo por agregación, en base a las matrices de correlación indicadas en cada nivel. Es decir, dichas matrices proporcionan el valor de los parámetros de dependencia a considerar entre los distintos riesgos/sub-riesgos.

Entender en profundidad las hipótesis que se asumen en el uso de dichas matrices de correlación es esencial para la política de gestión empresarial del riesgo de la entidad. En primer lugar, permite analizar si los supuestos que se consideran en el modelo estándar son adecuados para reflejar el perfil de riesgo de la entidad aseguradora. En segundo lugar, y relacionado con el punto anterior, permite evaluar el impacto hipotético que representaría calcular el SCR mediante formas alternativas al modelo estándar. En la misma línea se manifiesta la Autoridad Europea de Seguros y Pensiones de Jubilación (EIOPA, según siglas en inglés), remarcando en las directrices sobre el sistema de gobernanza que la función actuarial de una empresa que utiliza un modelo interno debe prestar especial atención al análisis de las dependencias entre riesgos del modelo (EIOPA, 2015).

Para el ramo de no-vida, Ferri-Vidal (2010) analizó la matriz de correlaciones del modelo estándar y cómo recalibrar sus parámetros para su utilización en un modelo interno. En este artículo nos centramos en algunos de los riesgos de suscripción del ramo de vida. En concreto, analizamos el riesgo de longevidad y el riesgo de mortalidad. El riesgo de longevidad hace

⁵ La Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones en el caso de España.

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

referencia a la posibilidad de que, en su conjunto, los asegurados de una cartera de negocio vivan más tiempo del esperado. Por el contrario, el riesgo de mortalidad hace referencia a la posibilidad que los individuos de una cartera fallezcan, en su conjunto, antes de lo esperado. Estos dos riesgos a priori deberían tener una dependencia negativa perfecta, puesto que son las dos caras de una misma moneda.

En este artículo se discuten las implicaciones y limitaciones que suponen el uso de dependencias lineales entre riesgos, centrándonos en el grado de dependencia lineal entre el riesgo de longevidad y el de mortalidad considerado en la fórmula estándar. Proponemos el uso de estructuras de dependencia (o asociación) alternativas, aprovechando principalmente la modelización multivariante mediante cópulas. Al utilizar cópulas, medidas de dependencia distintas a la correlación lineal aparecen de forma natural. Este es el caso de las medidas de dependencia por rangos, por ejemplo. Cabe mencionar que la reciente publicación de Latorre (2017) pone de manifiesto que el enfoque seguido en este artículo encaja con las preocupaciones y líneas de investigación de una gran parte de la comunidad actuarial nacional e internacional. En el ámbito concreto de Solvencia II, existe un extenso número de estudios que analizan el uso de cópulas. Pfeifer y Strassburger (2008) pusieron de manifiesto hace casi una década los riesgos del uso de la fórmula estándar para el cálculo de SCR. Diversos estudios han propuesto el uso de modelos internos basados en cópulas para su cálculo (Nguyen y Molinari, 2011; Tang y Valdez, 2009). Por su parte, Devineau y Loisel (2009) muestran cómo un modelo interno puede converger a la fórmula estándar.

Mediante un ejemplo de una cartera de productos de vida, se analizan las hipótesis de la fórmula estándar en el cálculo de las contribuciones al SCR debidas a los riesgos de longevidad y mortalidad, y el impacto sobre el valor de la contribución conjunta de estos riesgos al SCR debido a considerar estructuras de dependencias diferentes entre dichos riesgos, entre las que se incluyen la de dependencia negativa perfecta. Este ejemplo pretende reflejar la importancia de considerar estructuras de dependencia entre riesgos adecuadas y debe servir de base para poder considerar modelos de riesgo más complejos. En la aplicación mostramos que los cálculos se pueden realizar en una hoja de cálculo Excel con el objetivo de facilitar su uso entre los profesionales.

El artículo se estructura de la siguiente forma. En el siguiente apartado se introducen las cópulas así como las distintas medidas de dependencia. En el

apartado 3 se muestra el ejemplo ilustrativo. En el apartado 4 se describen los resultados y en el apartado 5 las principales conclusiones.

2. Metodología

En este apartado introducimos los conceptos de cópulas y medidas de dependencia que pueden ser utilizados en la modelización conjunta de riesgos. Describimos algunas de las principales cópulas, centrándonos en el caso bivalente, ya que únicamente pretendemos modelizar el riesgo de mortalidad y el riesgo de longevidad. La generalización del uso de cópulas a más de dos dimensiones a menudo no es directa y es, ciertamente, más compleja. Una posibilidad es unir las variables dos a dos de forma secuencial (Aas *et al.*, 2009).

2.1 Cópulas

Supongamos el caso de una variable aleatoria continua no negativa que representa una parte de la pérdida total de una cartera del ramo de vida, pérdida asociada exclusivamente a los riesgos de mortalidad y longevidad, a la que denominamos X . Así, podemos suponer que esta pérdida total está compuesta por las posibles pérdidas ocasionadas por los dos sub-riesgos, X_1 y X_2 , que representan las pérdidas derivadas de los productos asociados con el riesgo de longevidad y las pérdidas derivadas de los productos asociados con el riesgo de mortalidad. Por ejemplo, supongamos que la pérdida total y las sub-pérdidas tienen una relación lineal, $X = X_1 + X_2$.

Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio bivalente que representa dos pérdidas dependientes y sean $F_1(x_1) = P(X_1 \leq x_1)$, $F_2(x_2) = P(X_2 \leq x_2)$ y $F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ sus dos funciones de distribución continuas marginales y la función de distribución conjunta, respectivamente. Una cópula es una distribución conjunta bivalente de dos variables aleatorias uniformes (Sklar, 1959; Nelsen, 2006). El teorema de Sklar demuestra que existe una única cópula $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ tal que:

$$F(x_1, x_2) = C(u_1, u_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

donde $u_1 = F_1(x_1)$ y $u_2 = F_2(x_2)$ son los valores de dos variables aleatorias U_1 y U_2 que se distribuyen según una *Uniforme(0,1)*.

Una de las consecuencias del teorema de Sklar es que, ante un problema probabilístico o estadístico multivalente, si conocemos o podemos

aproximar las funciones de distribución de las marginales, la cuestión sobre la estructura de dependencia entre las variables aleatorias marginales la podemos aislar en una cópula. Lo que no proporciona el teorema es la forma particular de la cópula que recoge dicha estructura de dependencia. Es decir, es un teorema que asegura existencia de una cópula (y unicidad cuando trabajamos con marginales absolutamente continuas) pero no informa sobre cuál es dicha cópula. Así pues, problemas abiertos como determinar el conjunto de cópulas más adecuadas en cada situación o calibrar estadísticamente parámetros de cópulas a partir de la información disponible han sido (y continúan siéndolo) problemas de interés tanto a nivel profesional como a nivel de investigación (Genest y Rivest, 1993; Bahraoui *et al.*, 2014; Bolancé *et al.*, 2014; Gronneberg y Hjort, 2014).

Al trabajar con cópulas, con frecuencia aparece la necesidad de tratar con transformaciones de las mismas. Algunas veces la transformación resultante vuelve a ser una cópula y en otras no sucede así. Se exponen a continuación algunos ejemplos de estos tipos de transformación, puesto que se usarán en la aplicación que se presenta en este artículo.

Sea C una cópula bivalente, la cópula de supervivencia \hat{C} asociada a C se define como $\hat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1$, $u_1, u_2 \in [0,1]$. Asimismo, se denomina co-cópula de C a la siguiente función definida en $[0,1]^2$: $C^*(u_1, u_2) = 1 - C(1 - u_1, 1 - u_2)$, $u_1, u_2 \in [0,1]$. Nótese que C^* no es una cópula (Denuit *et al.*, 2005; Nelsen, 2006) pero que $(C^*)^* = C$.

Existen multitud de funciones que cumplen los requisitos de una distribución conjunta de variables aleatorias uniformes, por lo que pueden definirse un gran número de cópulas. Consideramos aquí seis cópulas (o transformaciones de las mismas) que, de acuerdo a la clasificación de cópulas propuesta por McNeil *et al.* (2015), se engloban en las siguientes tres grandes tipologías:

- Cópulas fundamentales: son aquellas que representan casos especiales de estructuras de dependencia (cópula contracomonotónica y cópula comonotónica).
- Cópulas implícitas: su forma funcional coincide con una función de distribución multivariante conocida (Normal, t-Student).
- Cópulas explícitas: poseen una forma funcional propia y sencilla (Frank, Clayton).

Tabla 1. Cópulas, cópula de supervivencia y co-cópula utilizadas

Cópula (o transformación)	Expresión
Contracomonótonica	$\max(u_1 + u_2 - 1, 0)$
Comonotónica	$\min(u_1, u_2)$
Gaussiana	$\Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$
t-Student	$t_{l,2}(t_l^{-1}(u_1), t_l^{-1}(u_2))$
Co-cópula de Clayton	$1 - ((1 - u_1)^{-\theta} + (1 - u_2)^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$
Cópula de supervivencia de Frank	$\frac{u_1 + u_2 - 1}{-\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\theta(1 - u_1)) - 1)(\exp(-\theta(1 - u_2)) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right)}$

Φ , Φ_2 indican la función de distribución estándar normal univariante y bivariante, respectivamente.

$t_l, t_{l,2}$ indican la función de distribución estándar t univariante y bivariante con l grados de libertad, respectivamente.

2.2 Medidas de dependencia

Uno de los aspectos fundamentales relacionados con las cópulas es que consideran medidas de dependencia alternativas al coeficiente de correlación lineal de Pearson. Si la relación entre las pérdidas no es lineal, el coeficiente de correlación de Pearson no mide correctamente la dependencia. A continuación, describimos las principales medidas de dependencia.

Contracomonotonicidad y comonotonicidad miden la dependencia perfecta negativa y positiva, respectivamente. Consideremos X_1 y X_2 , estas dos variables aleatorias son contracomonotónicas si y solo si

$$(X_1, X_2) = (v_1(Z), v_2(Z)),$$

para una variable aleatoria Z , con una función creciente v_1 y una función decreciente v_2 , o viceversa. La función de distribución conjunta es

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

$F(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0)$, donde $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$ son las funciones de distribución marginales. En caso que las dos funciones v_1 y v_2 sean crecientes, entonces X_1 y X_2 son comonotónicas, o con dependencia positiva perfecta, con $F(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1), F_2(x_2))$.

El coeficiente de correlación de Pearson es una medida de dependencia lineal que equivale a:

$$\rho_P = \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}{\sqrt{\mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)^2]\mathbb{E}[(X_2 - \mu_2)^2]}}$$

donde $\mu_1 = \mathbb{E}[X_1]$ y $\mu_2 = \mathbb{E}[X_2]$.

La τ de Kendall es una medida de asociación por rangos. Consideremos (X_1, X_2) y una copia independiente $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$. La τ de Kendall mide la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia entre pares, y se define como

$$\tau = \mathbb{E} \left[\text{signo} \left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) \right) \right]$$

donde $\text{signo}(x) = \mathbb{I}_{x>0} - \mathbb{I}_{x<0}$ siendo \mathbb{I} la función indicatriz. Otra medida de asociación por rangos es el coeficiente de correlación de Spearman (Nelsen, 2006).

Por último, se pueden calcular dos coeficientes de dependencia de la cola. Pensemos en un cuadrado $[0,1]^2$, en el que cada lado del cuadrado representa los valores de las funciones de distribución de dos marginales. El coeficiente de la cola derecha de la distribución λ_u (que corresponde con lo que sucede en el cuadrante superior derecho del cuadrado al que se ha hecho referencia) y el de la cola izquierda λ_l (que se corresponde con lo que sucede en el cuadrante inferior izquierdo), se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{-1}(q) | X_1 > F_1^{-1}(q)), \\ \lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq F_2^{-1}(q) | X_1 \leq F_1^{-1}(q)). \end{aligned}$$

En la Tabla 2 se muestra la relación entre estas medidas de dependencia y el parámetro de las cópulas explícitas consideradas en este trabajo (Genest y Rivest, 1993; Aas, 2004). En el caso de las cópulas de supervivencia la correlación por rangos de Kendall coincide con la de la cópula original, mientras que para las transformaciones de tipo co-cópula, la intuición lleva a

pensar que, si fueran cópulas, su correlación por rangos de Kendall debería parecerse en valor absoluto a la de la cópula base, pero cambiada de signo. Con las medidas de dependencia en colas, lo que sucede con ambas transformaciones (cópula de supervivencia y co-cópula) es que los valores $\lambda_u(C)$ y $\lambda_l(C)$ de la cópula original pasan a representar lo que sucede en el cuadrante inferior derecho y en el cuadrante superior izquierdo, respectivamente, del cuadrado $[0,1]^2$ de la transformación (sea ésta \hat{C} o C^*).

Tabla 2. Correlaciones por rangos de Kendall y coeficientes de dependencia en la cola para las cópulas Clayton y Frank

Cópula	τ	λ_u	λ_l
Clayton	$\theta/(\theta + 2)$	0	$2^{1/\theta}$
Frank	$1 - 4\theta^{-1}(1 - D_1(\theta))$	0	0

Donde $D_1(\theta) = \theta^{-1} \int_0^\theta t/(e^t - 1) dt$.

2.3 Simulación

La cuantificación del SCR se realiza mediante simulación por el método de Monte Carlo. Este método consiste en generar pseudo-observaciones con la estructura de dependencia descrita en la Tabla 1 y estimar posteriormente el SCR de forma empírica. Es decir, nuestro objetivo es simular a partir de la cópula los valores $(\hat{u}_{r1}, \hat{u}_{r2}), r = 1, \dots, R$, donde R es el número de réplicas simuladas. Posteriormente, obtenemos las pérdidas simuladas como $\hat{X}_{r1} = F_1^{-1}(\hat{u}_{r1})$ y $\hat{X}_{r2} = F_2^{-1}(\hat{u}_{r2})$, donde F_i^{-1} es la función cuantila de X_i , $i = 1, 2$.

Para simular los valores procedentes de una cópula bivalente se parte de la distribución condicionada (Genest y Rivest, 1993),

$$P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = \frac{\partial C_\theta(u_2)}{\partial u_1} = C_{\theta; u_1}(u_2).$$

El algoritmo se implementa del siguiente modo:

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

1. Generar valores de dos variables aleatorias independientes con distribución *Uniforme*(0,1), \hat{u}_1 y v .
2. Obtener $\hat{u}_2 = C_{\theta;u_1}^{[-1]}(v)$, donde el subíndice $[-1]$ indica pseudo-inversa, que equivale a:

$$C_{\theta;u_1}^{[-1]}(v) = \begin{cases} \inf\{x|C_{\theta;u_1}(x) \leq v\}, & \text{si } v = 0 \\ C_{\theta;u_1}^{[-1]}, & \text{si } v \in (0,1) \\ \inf\{x|C_{\theta;u_1}(x) \leq v\}, & \text{si } v = 1. \end{cases}$$

Para el caso de las cópulas fundamentales, la pseudo-inversa del paso 2 anterior se obtiene de forma directa. En el caso de la cópula contracomotónica y comotónica, generaremos valores de una variable aleatoria con distribución *Uniforme*(0,1), \tilde{u}_1 . Posteriormente, generaremos $\tilde{u}_2 = 1 - \tilde{u}_1$, en el caso de la cópula contramonotónica, y $\tilde{u}_2 = \tilde{u}_1$ en el caso de la cópula comotónica. Para el resto de cópulas (o sus transformaciones) de la Tabla 1, también se puede obtener la inversa. Las inversas de las cópulas condicionadas se muestran en la Tabla 3.

3. Aplicación

En este apartado describimos el ejemplo ilustrativo sobre el que vamos a trabajar para analizar las contribuciones al SCR según la fórmula estándar para los riesgos de longevidad (SCR_{Long}), mortalidad (SCR_{Death}) y su contribución conjunta ($SCR_{Long\&Death}$). Ésta última contribución conjunta se comparará con las contribuciones conjuntas a SCR cuando se consideran estructuras de dependencia alternativas entre los riesgos de longevidad y mortalidad.

Vamos a trabajar con una compañía ficticia que tiene tres carteras de seguros de vida, cada una de ellas con productos que encajan en las siguientes tipologías:

- 1) Una renta individual diferida a partir de los 65 años de edad y mientras el asegurado esté vivo (producto 1);

Tabla 3. Inversas de las cópulas (o sus transformaciones) condicionadas

Cópula (o transformación)	u_2
Contracomonótonica	$1 - u_1$
Comonotónica	u_1
Gaussiana	$\Phi\left(\rho\Phi^{-1}(u_1) + \Phi^{-1}(v)\sqrt{1-\rho^2}\right)$
t-Student	$t_l\left(t_{l+1}^{-1}(t_2) \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\frac{m+1}{m+(t_l^{-1}(u_1))^2}}} + \rho t_l^{-1}(u_1)\right)$
Co-cópula de Clayton	$1 - \left(\frac{(1-v)^{\frac{\theta}{1+\theta}} - 1}{(1-u_1)^\theta} + 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}$
Cópula de supervivencia de Frank	$1 - \left[-\frac{1}{\theta} \ln\left(\frac{\exp(-\theta) - 1}{\frac{1}{(1-v)} \exp(-\theta(1-u_1)) - \exp(-\theta(1-u_1)) + 1} + 1\right)\right]$

Φ indica la función de distribución estándar normal univariante.

t_l, t_{l+1} indican la función de distribución estándar t univariante con l y $l+1$ grados de libertad, respectivamente.

- 2) Una renta para la pareja del asegurado, a cobrar durante todo el periodo en el que la pareja sobreviva al asegurado principal de la póliza, hasta la fecha en la que el asegurado principal hubiera cumplido los 65 años de edad (producto 2);
- 3) Una prestación por fallecimiento del asegurado en forma de un único capital en el año de la defunción, siempre que el asegurado fallezca antes de los 65 años (producto 3).

El número de asegurados son 45.000 para el producto 1 y 15.000 para el producto 2 y producto 3. Esta ilustración de tres carteras de seguros de vida está inspirada en van Gulick *et al.* (2012). Se muestra en el Gráfico 1 la distribución por edades de las tres carteras de asegurados, que por

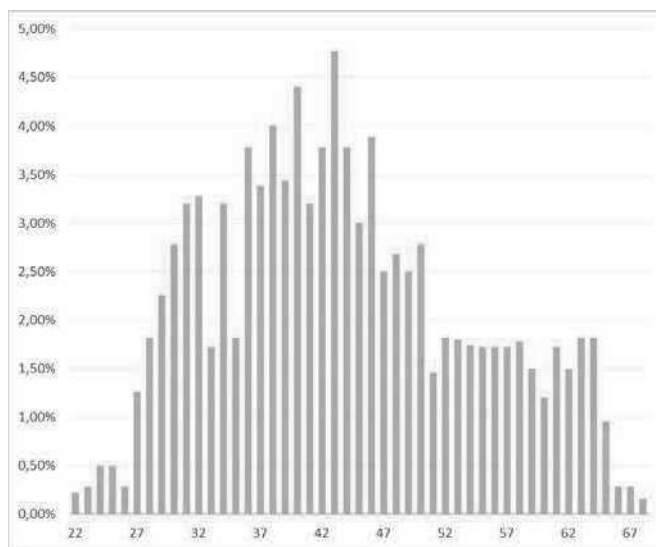
Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

simplicidad se han asumido igualmente distribuidas. Asimismo, la Tabla 4 recoge un breve resumen de los porcentajes de asegurados agrupados por distintas franjas de edad.

Tabla 4. Esquema de distribución por edades de las tres carteras de asegurados

Rango de percentiles	Rango de edades	Probabilidad
[0% , 23,12%]	[22 , 35]	23,12%
[23,12% , 53,88%]	[36 , 43]	30,76%
[53,88% , 75%]	[44 , 50]	21,12%
[75% , 100%]	[51 , 68]	25,00%

Gráfico 1. Distribución por edades de las tres carteras de asegurados consideradas en la aplicación



Para toda la cartera, normalizamos la renta individual a percibir con el valor de 1 unidad monetaria. De igual modo, la renta para la pareja del asegurado

la fijamos en todos los casos en 0,75 unidades monetarias y el capital por fallecimiento se establece igual a 7,5 unidades monetarias.

Algunas consideraciones (hipótesis y/o simplificaciones) con respecto a estos productos y a las carteras:

- Se asume que todos los tomadores son varones y que sus parejas son mujeres dos años menores que ellos.
- Se tarifican los productos 4 años antes del cálculo de solvencia que abordamos (es decir, se tarifica en 31/12/2012 y los cálculos se realizan a 31/12/2016). La tabla de mortalidad que se utiliza es la PASEM. Se considera como hipótesis una tasa de descuento constante e igual al 3%.
- No se consideran gastos de gestión internos ni comisiones, es decir, se tarifica prima pura, considerando en todos los casos una prima anual constante pagadera a final de periodo. No se incluyen prestaciones en caso de rescate y no se tarifica teniendo en cuenta la posibilidad de rescate.
- En los cálculos de *Best Estimate Liabilities* (BEL = provisiones técnicas en entorno Solvencia II – Margen de Riesgo Solvencia II), se asume una tasa de rescate anual (e independiente de la edad del tomador) del 2%.
- Tanto en los cálculos de tarificación como en las proyecciones de BEL se asume que toda prestación se paga a final de año y que toda prima anual se adquiere también a final de año.
- Asimismo, se asume que un tomador de edad x de la cartera es representativo de todos los tomadores de la misma edad en dicha cartera (es decir, lo tomamos como *model point* de los tomadores de esa edad).

3.1 Cálculo del *Best Estimate Liabilities*

En el caso del producto 1, el *Best Estimate Liabilities* $BEL(X_1; r_t; Q; s_t; YYYY)$, entendido como el valor actual, a fecha 31/12/YYYY, de prestaciones menos primas asociadas al producto, teniendo

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

en cuenta los tipos de interés r_t , las tasas de rescate s_t y la tabla de mortalidad Q , se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 BEL(X_1; r_t; Q; s_t; YYYYY) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{t=\max(65-x_{1i}, 0)}^{\infty} (1 \cdot {}_t p(Q; s_t)_{x_{1i}} \cdot f(r_t; YYYYY)) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{t=0}^{\max(65-x_{1i}, 0)} (p_1(x_{1i}) \cdot {}_t p(Q; s_t)_{x_{1i}} \cdot f(r_t; YYYYY))
 \end{aligned}$$

donde

- ${}_t p(Q; s_t)_{x_{1i}} = \prod_{l=0}^t (1 - (q_{x_{1i}+l} + s_t - q_{x_{1i}+l} \cdot s_l))$ es la probabilidad de que un asegurado de edad x_{1i} a 31/12/YYYY haya sobrevivido y no haya rescatado después de t años según la tabla de mortalidad Q y las tasas de rescate s_t .
- $f(r_t; YYYYY)$ es el factor de actualización de 1 unidad monetaria tras t años desde la fecha 31/12/YYYY y en base a los tipos de interés r_t .
- N_1 y $p_1(x_{1i})$ son el número total de asegurados de la cartera del producto 1 (45000) y la prima a pagar (calculada en 31/12/2012) por el asegurado de edad x_{1i} , respectivamente.

Para el producto 2, calculamos $BEL(X_2; r_t; Q; s_t; YYYYY)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 BEL(X_2; r_t; Q; s_t; YYYYY) &= \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{t=\max(65-x_{2i}, 0)}^{\infty} (0,75 \cdot (1 \\
 &\quad - {}_t p(Q; s_t)_{x_{2i}}) \cdot {}_t p(Q; s_t)_{y_{2i}} \cdot f(r_t; YYYYY)) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{t=0}^{\max(65-x_{2i}, 0)} (p_2(x_{2i}) \cdot {}_t p(Q; s_t)_{x_{2i}} \cdot f(r_t; YYYYY))
 \end{aligned}$$

donde

- $1 - {}_t p(Q; s_t)_{x_{2i}} = 1 - \prod_{l=0}^t (1 - (q_{x_{2i}+l} + s_t - q_{x_{2i}+l} \cdot s_l))$ es la probabilidad de que un asegurado de edad x_{2i} a 31/12/YYYY no

llegue vivo o haya rescatado después de t años según la tabla de mortalidad Q y las tasas de rescate s_t .

- ${}_t p(Q; s_t)_{y_{2i}} = \prod_{l=0}^t (1 - (q_{x_{2i+l}} + s_t - q_{x_{1i+l}} \cdot s_l))$ es la probabilidad de que la pareja del asegurado, de edad y_{2i} a 31/12/YYYY haya sobrevivido y no haya rescatado después de t años según la tabla de mortalidad Q y las tasas de rescate s_t .
- N_2 y $p_2(x_{2i})$ son el número total de asegurados de la cartera del producto 2 (15000) y la prima a pagar (calculada en 31/12/2012) por el asegurado de edad x_{2i} , respectivamente.

Finalmente, para el producto 3, calculamos $BEL(X_2; r_t; Q; s_t; YYYY)$ como:

$$\begin{aligned}
 & BEL(X_3; r_t; Q; s_t; YYYY) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_3} \sum_{t=0}^{\max(65-x_{3i}, 0)} (7,5 \\
 & \quad \cdot {}_{t-1} p(Q; s_t)_{x_{2i}} \cdot q_{x_{3i+t}} \cdot f(r_t; YYYY)) \\
 & \quad - \sum_{i=1}^{N_3} \sum_{t=0}^{\max(65-x_{3i}, 0)} (p_3(x_{3i}) \cdot {}_t p(Q; s_t)_{x_{3i}} \cdot f(r_t; YYYY))
 \end{aligned}$$

donde

- ${}_{t-1} p(Q; s_t)_{x_{3i}} = \prod_{l=0}^{t-1} (1 - (q_{x_{3i+l}} + s_t - q_{x_{3i+l}} \cdot s_l))$ (con la convención de que vale 1 si $t=0$) es la probabilidad de que el asegurado de edad x_{3i} a 31/12/YYYY haya sobrevivido y no haya rescatado después de $t - 1$ años según la tabla de mortalidad Q y las tasas de rescate s_t .
- $q_{x_{3i+t}}$ es la probabilidad de que el asegurado de edad x_{3i} a 31/12/YYYY fallezca tras t años según la tabla de mortalidad Q .
- N_3 y $p_3(x_{3i})$ son el número total de asegurados de la cartera del producto 3 (15000) y la prima a pagar (calculada en 31/12/2012) por el asegurado de edad x_{3i} , respectivamente.

Cabe señalar que las tarifas por edad x del asegurado para los tres productos $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$ se calculan de forma que satisfacen la siguiente relación:

$$BEL(X_i; 3\%; PASEM; 0\%; 2012) = 0 \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

Es decir, han de cumplir que el valor actual, a fecha 31/12/2012, de prestaciones menos primas asociadas al producto, teniendo en cuenta el tipo de interés del 3%, sin tasa de rescate y la tabla de mortalidad *PASEM*, es igual a cero.

3.2 Cálculo del SCR según fórmula estándar

A continuación analizamos las contribuciones al SCR (capital requerido de solvencia) según la fórmula estándar para los riesgos de longevidad (SCR_{Long}) y mortalidad (SCR_{Death}), teniendo en cuenta que la fórmula estándar asigna una correlación lineal entre las contribuciones SCR_{Long} y SCR_{Death} del -25%.

Calculamos el SCR_{Long} y SCR_{Death} por productos, siguiendo los siguientes pasos:

1. Obtención de las provisiones técnicas sin margen de riesgo de los tres productos. Para su cálculo, asumimos que el mejor estimador sobre la mortalidad de las carteras de asegurados de esta compañía ficticia coincide con la mortalidad con la que tarificó estos productos. Por otro lado, consideramos una estructura temporal de tipos de interés para el descuento (obligatoria, aunque se le añade el *volatility adjustment* que podría ser opcional) y, también, una hipótesis sobre rescate de pólizas. Es decir, calculamos los siguientes valores,

$$\begin{aligned}E_1 &= BEL(X_1; ETTI_{EIOPA} + VA; PASEM; 2\%; 2016) \\E_2 &= BEL(X_2; ETTI_{EIOPA} + VA; PASEM; 2\%; 2016) \\E_3 &= BEL(X_3; ETTI_{EIOPA} + VA; PASEM; 2\%; 2016)\end{aligned}$$

2. Obtención de los BEL introduciendo el estrés necesario para el cálculo del SCR de longevidad (80% de la tabla de mortalidad del escenario central). Es decir, cálculo de:

$$\begin{aligned}L_1 &= BEL(X_1; ETTI_{EIOPA} + VA; 80\% \cdot PASEM; 2\%; 2016) \\L_2 &= BEL(X_2; ETTI_{EIOPA} + VA; 80\% \cdot PASEM; 2\%; 2016) \\L_3 &= BEL(X_3; ETTI_{EIOPA} + VA; 80\% \cdot PASEM; 2\%; 2016)\end{aligned}$$

3. Obtención de los BEL introduciendo el estrés necesario para el cálculo del SCR de mortalidad (115% de la tabla de mortalidad del escenario central). Es decir, cálculo de:

$$\begin{aligned} D_1 &= BEL(X_1; ETTI_{EIOPA} + VA; 115\% \cdot PASEM; 2\%; 2016) \\ D_2 &= BEL(X_2; ETTI_{EIOPA} + VA; 115\% \cdot PASEM; 2\%; 2016) \\ D_3 &= BEL(X_3; ETTI_{EIOPA} + VA; 115\% \cdot PASEM; 2\%; 2016) \end{aligned}$$

4. Determinación de si hay que calcular SCR_{Long} y SCR_{Death} para cada producto, según los criterios establecidos en los artículos 137 y 138 del Reglamento Delegado de Solvencia II⁶:

- a. Si $L_i - E_i > 0$ entonces $SCR_{Long}(X_i) \neq 0$ y $SCR_{Long}(X_i) = L_i - E_i$
 b. Si $D_i - E_i > 0$ entonces $SCR_{Death}(X_i) \neq 0$ y $SCR_{Death}(X_i) = D_i - E_i$

con $i = 1,2,3$.

Para el caso de los productos 2 y 3, como ambos hacen referencia al riesgo de mortalidad, calculamos el SCR conjunto de la siguiente forma

$$E_{2+3} = E_2 + E_3$$

$$D_{2+3} = BEL(X_2 + X_3; ETTI_{EIOPA} + VA; 115\% \cdot PASEM; 2\%; 2016)$$

Si $D_{2+3} - E_{2+3} > 0$ entonces $SCR_{Death}(X_2 + X_3) \neq 0$ y $SCR_{Death}(X_2 + X_3) = D_{2+3} - E_{2+3}$.

El cálculo de la contribución para la compañía ficticia, se obtiene como,

$$SCR_{Long\&Death} = \frac{SCR_{Long\&Death}}{\sqrt{SCR_{Long}^2 + SCR_{Death}^2 - 2 \cdot 25\% \cdot SCR_{Long} \cdot SCR_{Death}}}$$

siendo $SCR_{Long} = SCR_{Long}(X_1)$ y $SCR_{Death} = SCR_{Death}(X_2 + X_3)$.

⁶ Reglamento Delegado (UE) 2015/35 de la Comisión, de 10 de octubre de 2014, por el que se completa la Directiva 2009/138/CE.

3.3 Cálculo de los SCR de longevidad y mortalidad, por separado, en base a las hipótesis subyacentes en la fórmula estándar

A continuación, calculamos el SCR_{Long} y SCR_{Death} según fórmula estándar por productos a partir de simulaciones basadas en las hipótesis subyacentes a la fórmula estándar. Utilizando algo similar a lo hecho en UNESPA (2009) aunque sin distinguir por tramos de edad, se establecen dos factores de impacto aleatorios sobre las tablas de mortalidad, comunes para todas las edades de la tabla y para ambos géneros, y que satisfacen las hipótesis subyacentes a la fórmula estándar según lo establecido en EIOPA (2014), de la siguiente forma:

$$m_L(z) = 1 - (0\% + \sigma \cdot z)$$
$$m_D(z) = 1 - \left(0,0001\% + \frac{15\%}{20\%} \cdot \sigma \cdot z\right)$$

donde z se distribuye según una normal estándar. Por otro lado, σ se determina de la siguiente manera:

$$\sigma = \frac{20\%}{\phi^{-1}(99,5\%)} \cong \frac{20\%}{2,57583} = 0,07764$$

Con esto, lo que se consigue es lo siguiente:

$$m_L(z) \simeq Normal$$
$$\mathbb{E}(m_L(z)) = 1$$
$$VaR_{0,5\%}(m_L(z)) = 1 - 20\% = 80\%$$

$$m_D(z) \simeq Normal$$
$$\mathbb{E}(m_D(z)) = 99,9999\%$$
$$VaR_{99,5\%}(m_D(z)) = 99,9999\% + 15\% = 114,9999\%.$$

Es decir, se consiguen reflejar las siguientes hipótesis:

Para el riesgo de longevidad:

- Las mejoras anuales se distribuyen como una normal,
- El factor de estrés (para el cálculo de la contribución a SCR) sobre la tabla de mortalidad es del 80%,
- Se asume que la tasa media de mortalidad de la población no crece más de un 10% cada año.

Para el riesgo de mortalidad:

- La función de distribución de la mortalidad está sesgada, tiene cierta tendencia hacia una mejora de la mortalidad (es decir, tendencia hacia que se reduzcan las probabilidades de fallecimiento),
- El factor de estrés (para el cálculo de la contribución a SCR) sobre la tabla de mortalidad es (muy cercano al) 115%.

Una vez definidas las variables aleatorias m_L y m_D , el siguiente paso para calcular el SCR es generar S simulaciones de z_s , $s = 1, \dots, S$, siendo cada z_s una normal estándar. En esta aplicación hemos establecido $S = 4000$. A continuación, obtenemos

$$\begin{aligned} L_1(z_s) &= BEL(X_1; ETTI_{EIOPA} + VA; m_L(z_s) \cdot PASEM; 2\%; 2016) \\ D_2(z_s) &= BEL(X_2; ETTI_{EIOPA} + VA; m_D(z_s) \cdot PASEM; 2\%; 2016) \\ D_3(z_s) &= BEL(X_3; ETTI_{EIOPA} + VA; m_D(z_s) \cdot PASEM; 2\%; 2016) \end{aligned}$$

Se comprueba que, aproximadamente:

$$\begin{aligned} \widehat{E}(L_1(z_s)) &\cong E_1 \\ VaR_{99,5\%}(L_1(z_s)) &\cong L_1 \\ SCR_{Long}(X_1) &\cong VaR_{99,5\%}(L_1(z_s)) - \widehat{E}(L_1(z_s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{E}(D_2(z_s)) &\cong E_2 \\ VaR_{99,5\%}(D_2(z_s)) &\cong D_2 \\ SCR_{Death}(X_2) &\cong VaR_{99,5\%}(D_2(z_s)) - \widehat{E}(D_2(z_s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{E}(D_3(z_s)) &\cong E_3 \\ VaR_{99,5\%}(D_3(z_s)) &\cong D_3 \\ SCR_{Death}(X_3) &\cong VaR_{99,5\%}(D_3(z_s)) - \widehat{E}(D_3(z_s)) \end{aligned}$$

Una vez realizadas dichas comprobaciones, calculamos el SCR conjunto de los productos 2 y 3, y comprobamos que se cumple:

$$\begin{aligned} \widehat{E}(D_{2+3}(z_s)) &\cong E_{2+3} \\ VaR_{0,5\%}(D_{2+3}(z_s)) &\cong D_{2+3} \\ SCR_{Death}(X_2 + X_3) &\cong VaR_{99,5\%}(D_{2+3}(z_s)) - \widehat{E}(D_{2+3}(z_s)), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $D_{2+3}(z_s) = BEL(X_2 + X_3; ETTI_{EIOPA} + VA; m_D(z_s) \cdot PASEM; 2\%; 2016)$.

3.4 Cálculo de la contribución conjunta a SCR de los riesgos de longevidad y mortalidad en función de distintas estructuras de dependencia

Por último, calculamos el $SCR_{Long\&Death}$ considerando las diferentes estructuras de dependencia listadas a continuación:

1. Cópula contracomotónica (dependencia opuesta extrema)
2. Cópula comotónica (dependencia directa extrema)
3. Dependencia lineal (directa, causal)
4. Cópula Gaussiana (con parámetro $\rho = -25\%$)
5. Cópula t-Student – Caso básico (con parámetro $\rho = -25\%$ y 3 grados de libertad)
6. Cópula de supervivencia de Frank – Caso básico ($\theta = -0,3125$)
7. Co-cópula de Clayton – Caso básico ($\theta = 1,5$)
8. Cópula t-Student – Caso alternativo (con parámetro $\rho = -85\%$ y 3 grados de libertad)
9. Cópula de supervivencia de Frank – Caso alternativo ($\theta = -15$)
10. Co-cópula de Clayton – Caso alternativo ($\theta = 12$)

El procedimiento de cálculo está basado en lo expuesto en la Sección 2.3. Se han considerado 200 escenarios aleatorios, realizando para cada uno de ellos los siguientes pasos⁷:

1. Generar series $\{v_s\}_{s=1,\dots,S}$ de $S = 4000$ simulaciones uniformes $(0,1)$ independientes, que sirvan para generar las distintas estructuras de dependencia a analizar.
2. Generar series $\{u_{2,s}(u_{1,s}, v_s)\}_{s=1,\dots,S}$ de S simulaciones de uniformes $(0,1)$, para que los pares $\{(u_{1,s}, u_{2,s})\}_{s=1,\dots,S}$ tengan una de las estructuras de dependencia listadas al principio de esta sección.
3. Cálculo de la contribución $SCR_{Long\&Death}$ a partir de las S simulaciones $L_1(z_s)$ y $D_{2+3}(z_s)$, reordenando los resultados para que coincidan con la estructura de dependencia determinada en 2. Para ello, basta reordenar los $D_{2+3}(z_s)$ de manera que la serie $\{z_s\}_{s=1,\dots,S}$ esté ordenada igual que la serie $\{u_{2,s}(u_{1,s}, v_s)\}_{s=1,\dots,S}$. Así, la contribución conjunta al SCR por los riesgos de longevidad y mortalidad se calculará como

⁷ Siendo siempre u_1 la función de distribución empírica de $\{L_1(z_s)\}_{s=1,\dots,S}$.

$$SCR_{Long\&Death} \cong VaR_{99,5\%} \left[\left\{ L_1(z_s) + D_{2+3}(u_{2,s}(u_{1,s}, v_s)) \right\}_{s=1,\dots,S} \right] - \widehat{\mathbb{E}} \left[\left\{ L_1(z_s) + D_{2+3}(u_{2,s}(u_{1,s}, v_s)) \right\}_{s=1,\dots,S} \right]$$

En los casos 1 y 2 se ha considerado un solo escenario, en lugar de los 200 escenarios considerados para el resto de estructuras de dependencia (ver Gráfico 1). Para el caso 3, que se ha denominado dependencia lineal causal, se ha forzado la siguiente asociación entre las pérdidas L_1 y D_{2+3} :

$$u_2 = \widehat{F}_2(\widehat{F}_1^{-1}(u_1)a + b + \epsilon)$$

siendo \widehat{F}_2 la función de distribución empírica de D_{2+3} , \widehat{F}_1^{-1} la función cuantila empírica de L_1 y a, b y ϵ tales que

$$a = -25\% \frac{\widehat{\sigma}_2}{\widehat{\sigma}_1}, b = \widehat{\mu}_2 - a\widehat{\mu}_1, \epsilon \sim \mathcal{N}\left(0, \widehat{\sigma}_2 \sqrt{1 - (-25\%)^2}\right).$$

4. Resultados

En la Tabla 5 se muestran los resultados cuando la contribución conjunta de los riesgos de longevidad y mortalidad al SCR se calcula teniendo en cuenta las diferentes estructuras de dependencia. Como se ha mencionado con anterioridad, para este supuesto de aplicación se han considerado 4.000 simulaciones. Este número relativamente bajo de simulaciones se debe a que realizar todos los cálculos en un libro Excel consume un tiempo considerable.

En el caso de la cópula t-Student, la cópula de supervivencia Frank y la cópula Clayton se calcula el SCR considerando dos posibles escenarios. En el primer escenario, denominado ‘básico’, se consideran parámetros de las cópulas que generan dependencias que aproximadamente equivaldrían al grado de dependencia recogido en la fórmula estándar, es decir, una correlación lineal del -25%. En el segundo escenario, denominado ‘alternativo’, se consideran valores para los parámetros de las cópulas que reflejen un mayor grado de dependencia negativa entre riesgos que el establecido en la fórmula estándar.

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

En concreto, se considera una τ de Kendall del -3.5% en el caso de la cópula de Frank y del 42,85% en la cópula de Clayton para el escenario ‘básico’, y del -76% y 85%, respectivamente, para el escenario ‘alternativo’.

Como puede apreciarse, la dependencia lineal y la cópula gaussiana ajustan muy bien al valor de SCR por medio de la fórmula estándar. Las diferencias en promedio se mueven entre el +1% del SCR como se puede apreciar en el Gráfico 2.

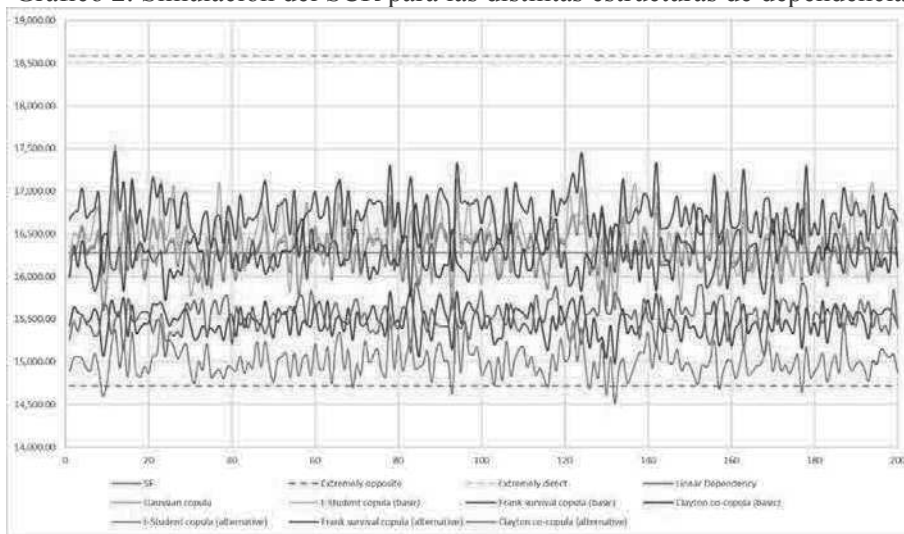
Como cabía esperar, la dependencia contracomotónica es la que genera un SCR menor, ya que su valor coincide con el límite inferior de Fréchet (Nelsen, 2006; McNeil *et al.*, 2015) En nuestro caso, mediante el cálculo del SCR con la cópula contracomotónica se considera un ahorro de capital de casi el 10%.

Tabla 5. Cálculo del SCR para la cartera de productos de vida considerando diferentes estructuras de dependencia

Hipótesis	$\widehat{VaR}_{99,5\%}$	Promedio	SCR	Dif. Rel. vs FE
Fórmula Estándar			16.279,24	0,00%
Cópula contracomotónica	89.139,99	74.423,07	14.716,92	-9,60%
Cópula comotónica	93.012,37	74.423,07	18.589,30	14,07%
Dependencia lineal	90.711,24	74.423,62	16.287,62	0,05%
Cópula gaussiana	90.752,50	74.423,63	16.328,87	0,30%
Cópula t-student (básico)	90.854,94	74.423,53	16.431,41	0,93%
Cópula de supervivencia Frank (básico)	91.167,69	74.423,65	16.744,04	2,86%
Co-cópula Clayton (básico)	90.683,42	74.421,27	16.262,15	-0,10%
Cópula t-Student (alternativo)	89.425,98	74.423,15	15.002,83	-7,84%
Cópula de supervivencia Frank (alternativo)	89.902,74	74.422,83	15.479,91	-4,91%
Co-cópula Clayton (alternativo)	89.950,16	74.421,97	15.528,19	-4,61%

Nota: Cópulas básicas se asemejan al grado de dependencia entre riesgos de la fórmula estándar, es decir, un coeficiente de correlación lineal de Pearson aproximado del -0.25. Cópulas alternativas consideran una dependencia entre riesgos de $\rho=-0.85$ (cópula t-student), $\tau=-0.76$ (Frank cópula) y $\tau=0.85$ (Clayton cópula). Las cópulas t-student (básico) y (alternativo) tienen en ambos casos 3 grados de libertad.

Gráfico 2. Simulación del SCR para las distintas estructuras de dependencia



Por otro lado, la calibración “básico” utilizada para la cópula t-Student, la Frank y la Clayton generan un SCR que no difiere mucho del de la Fórmula Estándar: es decir, en este supuesto de aplicación, calibrando los parámetros de las cópulas de forma que la correlación por rangos de Kendall sea similar a la correlación lineal del -25%, no podríamos distinguir claramente qué estructura de dependencia está asumiendo la fórmula estándar (esto sería, hasta cierto punto, un resultado no esperado al empezar el análisis). Sorprende principalmente para las cópulas t-Student y Clayton, que, a diferencia de la cópula gaussiana y la cópula de Frank, tienen dependencia en la cola superior (Tabla 2) y no están recogiendo un ahorro de capital significativo.

Ahora bien, al considerar parámetros alternativos para las cópulas t-Student, Frank y Clayton, que reflejan un mayor grado de dependencia negativa entre los riesgos que el recogido por la fórmula estándar, sí se pueden obtener ahorros significativos de capital. En concreto, si consideramos la calibración

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

“alternativo” de forma que la correlación lineal fuera -85% en el caso de la cópula t-Student, la correlación por rangos de Kendall fuera del -76% en el caso de la cópula de Frank y del 85% en el caso de la cópula de Clayton, se obtuvieron valores del SCR sensiblemente inferiores a los obtenidos mediante la fórmula estándar. En este caso, la cópula t-Student es la que reportaría en promedio un menor SCR (-7,84%), seguidas a cierta distancia de la cópula de supervivencia de Frank (-4,91%) y de la co-cópula de Clayton (-4,61%).

5. Conclusiones

Entender las implicaciones de las hipótesis subyacentes en la fórmula estándar para el cálculo del SCR en el riesgo de longevidad y mortalidad es relevante para los gestores de riesgos en el ramo de vida. Dependiendo de la estructura de dependencia considerada, puede tener un impacto significativo en el valor del SCR y, por tanto, en un ahorro o sobrecoste de capital. De acuerdo con nuestros resultados, el valor de SCR de la fórmula estándar puede ajustarse adecuadamente considerando dependencia lineal y cópula gaussiana. La calibración utilizada para la cópula t-Student, la cópula de supervivencia de Frank y la co-cópula de Clayton que aproximan la correlación de la fórmula estándar generan valores de SCR cercanos a los obtenidos mediante la fórmula estándar. Seguramente, debido a que la dependencia lineal considerada en la fórmula estándar es relativamente suave.

La dependencia contracomotónica, que intuitivamente parece la que mejor debería representar la dependencia entre los riesgos de longevidad y mortalidad, genera SCR claramente menores que los de fórmula estándar. Aunque en menor medida, también se observan importantes ahorros de capital al usar parámetros alternativos para las cópulas t-Student, la cópula de supervivencia de Frank y la co-cópula de Clayton. En ese sentido, para el supuesto de aplicación realizado, lo que estaríamos viendo es que la fórmula estándar es conservadora en lo que se refiere a requerimientos de capital en lo que respecta a la contribución conjunta de los riesgos de longevidad y mortalidad al SCR.

La bondad que tiene el enfoque del artículo es que permite “corregir” el hecho de que se consideren variables aleatorias distintas para la mortalidad y la longevidad en las hipótesis de fórmula estándar. Ahora bien, el artículo muestra algunas limitaciones, como puede ser la simplicidad de las hipótesis

consideradas en el cálculo del mejor estimado o de los factores de impacto en la mortalidad.

Para terminar, nos gustaría trasladar al lector la siguiente reflexión. Opinamos que la fórmula estándar es, aparentemente, conservadora por el hecho de optar por utilizar en sus cálculos una medida de riesgo con un nivel de confianza muy elevado (el 99,5%), más que por utilizar estructuras de dependencia que reflejen adecuadamente las relaciones entre riesgos en aquellos casos que pueden representar un serio peligro para las entidades (dependencias en las colas). Podemos justificar esta opinión en base al trabajo realizado: puesto que tomando en cuenta un par de riesgos de impacto opuesto en la solvencia de la entidad (como ya se ha mencionado con anterioridad, longevidad y mortalidad son dos caras de la misma moneda) observamos importantes ahorros de capital al usar estructuras de dependencia con fuerte relación en las colas (caso contracomotónico, por ejemplo), es altamente probable que, al usar estructuras de dependencia con fuerte relación en las colas para riesgos que impacten de modo similar en la solvencia de la entidad (por ejemplo, cualquier par de riesgos para los que la fórmula estándar esté considerando un coeficiente de correlación positivo), lo que detectemos es que la fórmula estándar está infra-estimando las necesidades de capital para la contribución conjunta de dichos riesgos. De algún modo, y a falta de contrastar la intuición que aflora tras la aplicación realizada con investigaciones futuras al respecto, una de las conclusiones que se puede inferir del trabajo realizado es que, tal vez y desde un punto de vistas de las estructuras de dependencia que tiene en consideración, la fórmula estándar no sea tan conservadora como pudiera pretenderse desde las instancias europeas y se pueda estar incurriendo en cierto riesgo sistémico difícil de cuantificar.

Referencias

- Aas, K. (2004). Modelling the dependence structure of financial assets: A survey of four copulas.
<https://www.nr.no/files/samba/bff/SAMBA2204b.pdf> (18 de septiembre de 2017).
- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. y H. Bakken (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics* 44(2), 182-198.

Estructura de dependencia entre el riesgo de longevidad...

- Bahraoui, Z., Bolancé, C. y A. M. Pérez-Marín (2014). Testing extreme value copulas to estimate the quantile. *Statistics and Operations Research Transactions (SORT)* 38, 89-102.
- Bolancé, C., Bahraoui, Z. y M. Artís (2014). Quantifying the risk using copulae with nonparametric marginals. *Insurance: Mathematics and Economics* 58, 46-56.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. y R. Kaas (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons. Ltd. Chichester (England).
- Devineau, L. y S. Loisel (2009). Risk aggregation in Solvency II: How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula? *Bulletin Français d'Actuariat*, Institut des Actuaire 9 (18), 107-145.
- EIOPA (2014). The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation, EIOPA-14-322. https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA-14-322_Underlying_Assumptions.pdf (18 de septiembre de 2017).
- EIOPA (2015). Guidelines on System of Governance, EIOPA-BoS-14/253. https://eiopa.europa.eu/GuidelinesSII/EIOPA_Guidelines_on_System_of_Governance_EN.pdf (18 de septiembre de 2017).
- Ferri-Vidal, A. (2010). Estructuras de Dependencia aplicadas a la Gestión de Riesgos en Solvencia II. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.
- Genest, C. y L. Rivest (1993). Statistical inference procedure for bivariate archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association* 88, 1034-1043.
- Gronneberg, S. y N. Hjort (2014). The copula information criteria. *Scandinavian Journal of Statistics* 41, 436-459.
- Latorre Lloréns, L. (2017). *Teoría de cópulas. Introducción y aplicaciones a Solvencia II*. Fundación Mapfre. Madrid (España).
- McNeil, A., Frey, R. y P. Embrechts (2015). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press (USA).

- Nelsen, R. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer (USA).
- Nguyen, T. y R. Molinari (2011). Risk Aggregation by Using Copulas in Internal Models. *Journal of Mathematical Finance* 1(3), 50-57.
- Pfeifer, D. y D. Strassburger (2008). Solvency II: stability problems with the SCR aggregation formula. *Scandinavian Actuarial Journal* 1, 61-77.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'université de Paris* 8, 229-231.
- Tang, A. y E. Valdez (2009). Economic Capital and the Aggregation of Risks Using Copulas. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1347675> (15 septiembre 2017).
- UNESPA (2009). Longevity Risk Investigation. Estudio sobre el riesgo de longevidad bajo Solvencia II. <http://unespa-web.s3.amazonaws.com/main-files/uploads/2017/06/Longevity-Risk-Investigation.pdf> (18 de septiembre de 2017).
- van Gulick, G., De Waegenaere, A. y H. Norde (2012). Excess based allocation of risk capital. *Insurance: Mathematics and Economics* 50, 26-42.

