

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

3264

Autor: Marc Adillon Alberó

Director: Dr. Joan Carles Naranjo
Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i informàtica

Barcelona, 29 de juny de 2017

Abstract

J. Steiner proposed the problem of counting the number of tangent conics to five given conics. His answer, 7776, was wrong because he assumed that the number is finite when, in fact, the whole component of double lines appears on the solution. In later works of De Jonquieres and Chasles it was found is the correct number of solutions once discounted the double lines. The number found is 3264.

Resum

J. Steiner va proposar el problema de comptar el nombre de còniques tangents a cinc còniques donades. La seva resposta, 7776, era errònia perquè parteix de la base de què el nombre és finit quan en realitat tota la component de rectes dobles apareix a la solució. Treballs posteriors de De Jonquieres i Chasles van provar quin és el nombre correcte de solucions un cop descomptades les rectes dobles. El nombre trobat és 3264.

Agraïments

L'elaboració d'aquest treball final de grau ha estat un experiència d'aprenentatge intens, no només en el camp científic, sinó també a nivell personal. Suposa la finalització d'una etapa intensa de formació de 4 anys que ha tingut un gran impacte en la meva vida i és per això que m'agradaria agrair a totes aquelles persones que m'han ajudat i recolzat durant aquest procés.

Primer de tot, m'agradaria agrair al meu tutor, el Dr. Joan Carles Naranjo, pels seus consells, ajuda i dedicació durant tot el desenvolupament d'aquest treball. Voldria fer extensiu aquest agraïment a tots el professorat que he tingut al llarg d'aquests anys de formació i que m'han transmès la passió per les matemàtiques.

Voldria agrair, també, al Dr. Steven Lawrence Kleiman per la seva ajuda desinteressada facilitant-me informació de molta utilitat per a la realització del treball.

També voldria agrair als meus companys i amics que tantes vegades m'han donat suport i sempre han estat aquí per ajudar-me quan ho necessitava. També m'agradaria agrair als meus pares pels seus savis consells i la seva comprensió.

Sempre heu estat aquí per a mi.

Moltes gràcies a tots!

Índex

1	Introducció	1
2	Preliminars	4
2.1	Teoria de la resultant	4
2.2	El graf d'una funció racional	6
3	Còniques planes.	8
3.1	Espai de paràmetres de les còniques planes.	8
3.2	La estratègia bàsica per comptar.	8
4	Algunes qüestions bàsiques de geometria enumerativa.	10
4.1	Cinc punts.	10
4.2	Quatre punts i una recta.	11
4.3	Teorema de Bézout.	12
4.4	Tres punts i dos rectes.	13
4.5	Excés d'intersecció i posició general.	13
4.6	Dualitat en \mathbb{P}^2	14
4.7	La resta dels problemes de punt-línia.	17
5	Superfície de Veronese	18
6	Blowup	19
6.1	Blowup en un punt.	19
6.2	Blowup de \mathbb{P}^5 al llarg de la superfície de Veronese	19
7	Anell de Chow	23
7.1	Cicles	23
7.2	Equivalència racional i grup de Chow	23
7.3	Anell de Chow	25
7.4	Anell de Chow de \mathbb{A}^n	29
7.5	Anell de Chow de \mathbb{P}^n	30
7.6	Anell de Chow del Blowup $Bl_V \mathbb{P}^5$	31
8	Solució del problema d'Steiner	34
9	Transversalitat de les transformades estrictes.	38

1 Introducció

Des de l'antiguitat ens hem interessat per problemes com el problema d'Apol·loni: *construir un cercle tangent a tres cercles donats*. Com els cercles són un tipus de còniques molt concret, Jacob Steiner, al voltant del 1848, es va preguntar que passaria si canvièssim els cercles per còniques arbitràries del pla projectiu complex. Per començar és necessiten 5 no 3 condicions per determinar una cònica. Però cinc condicions no sempre determinen una única cònica, de fet en la majoria de casos en determinaran més d'una. Llavors, la primera feina a fer és saber quantes còniques estaran lligades a cinc condicions donades. Jacob Steiner, per tant va estudiar aquest problema

Donades cinc còniques en posició general, trobar el nombre de còniques tangents a aquestes.

que es va fer famós i va passar a ser un clàssic en geometria enumerativa. Steiner cregué haver resolt el problema i afirmà que la solució era que en general hi havia $6^5 = 7776$ còniques tangents a altres cinc donades. Va explicar que per arribar a aquest nombre es va fixar que hi ha 6 còniques que passen per 4 punts i són tangents a una cònica, n'hi ha 6^2 que passen per 3 punts i són tangents a 2 còniques; i seguint raonant així va concloure que el nombre seria 6^5 .

Johann Brishoff cap al 1859 es va fixar que les còniques, com veurem en la secció 3.1, es poden identificar amb els punts de \mathbb{P}^5 , mitjançant els coeficients de les seves equacions. A més a més, les equacions tangents a una cònica donada formen una hipersuperfície. Tot i que Brishoff no va parlar en cap moment del concepte d'hipersuperfícies, va fer un raonament mitjançant aquesta idea i estudiant problemes previs fent raonaments semblants al del teorema de Bézout va arribar al mateix resultat.

Aviat es va veure que raonar com ho havien fet fins aleshores proporcionava resultats erronis. Per exemple, el nombre de còniques tangents a 5 rectes generals és 1 i no 32, tot i que les hipersuperfícies de còniques tangents a una recta té grau 2. La raó d'aquest error va ser descoberta per Luigi Cremona (1864): les rectes dobles són tangents a tota corba. I com hi ha infinites rectes dobles, tenim que tots els problemes de trobar còniques tangents a corbes donades contindran com a solucions totes les rectes dobles. En particular, el nombre 7776 no té significat enumerativa. L'error que segurament va cometre Steiner va ser suposar que el nombre de solucions era finit, que no ho és per que totes les rectes dobles seran còniques que verificaran les condicions.

Per tant, per obtindre un nombre significatiu, el que s'havia de fer era extreure les rectes dobles de manera que quedessin un nombre finit de còniques verificant les solucions. Ernest de Jonquières, un matemàtic que era mariner de professió, el 1859 mitjançant tècniques rudimentàries va ser el primer en extreure les rectes dobles de l'enumeració i arribar al nombre correcte: 3264; però tot i això, no ho va publicar ja que el seu resultat estava en contradicció amb el d'Steiner, i perquè Micheal Chasles no el va creure.

Finalment, Chasles va desenvolupar la teoria necessària i va ser el primer en publicar la resposta correcta en 1864, resolent també altres qüestions. Théodore Berner novament va arribar a la mateixa resposta el 1865.

Tot i no ser el problema amb que s'originà aquesta branca de les matemàtiques, és un problema que va tenir molt ressò i va posar de manifest la necessitat de fonamentar millor la teoria d'intersecció.

La memòria

En aquest treball anirem de la mà de la història perseguint el nombre 3264. Aquest nombre és la solució del problema que va ser enunciat al voltant de 1848 per Jacob Steiner i és el nombre que dona títol al treball. Resumeix a la perfecció el que mou el treball i quin és l'objectiu.

En el primer capítol introduïrem tant les còniques planes com l'espai de paràmetres d'aquestes, que seran els objectes bàsics amb els que treballarem. Després, també introduïrem la estratègia bàsica que s'utilitza per comptar en els problemes d'enumeració.

En el capítol 4 estudiarem la resolució d'uns primers problemes d'enumeració, coneguts com els problemes punt-recta: *donats p punts i l rectes, de manera que $p+l=5$, quin és el nombre de còniques que passen pels p punts i són tangents a les l rectes?*. Aprofitarem per introduir el teorema de Bézout que usarem per resoldre alguns dels d'aquests problemes.

En aquestes qüestions ja es comencen a veure els problemes que hi pot haver amb les rectes dobles, ja que aquestes són tangents a tota corba i per tant, totes les rectes dobles seran solució de molts dels problemes d'enumeració que involucrin còniques. En aquest capítol també parlarem de la dualitat del pla projectiu que ens servirà per desfer-nos d'aquest excés d'intersecció que proporcionen les rectes dobles en alguns problemes i així acabar de resoldre totes les qüestions punt-recta.

Les rectes dobles estan parametritzades per la superfície de Veronese que serà el que introduïrem en el següent capítol 5. Donarem les seves equacions i algunes de les seves propietats.

La eina que usarem per eliminar l'excés d'intersecció proporcionat per les rectes dobles serà el blowup que introduïrem i estudiarem al llarg de capítol 6.

Treballar en el blowup ens assegura lliurar-nos d'aquest excés d'intersecció, com veurem en el capítol 9, però té un preu. El preu que hem de pagar és que en el blowup no podem usar Bézout. El que farem en el capítol 7 serà introduir el que és conegut com l'anell de Chow que codificarà les propietats d'intersecció de les subvarietats d'una varietat donada. Generalitzant el teorema de Bézout. Donarem la seva descripció, algunes de les seves propietats i alguns exemples previs abans d'entrar a parlar de l'anell de Chow que necessitem.

Finalment, ja per acabar resoldrem el problema d'Steiner en el capítol 8 i donarem la solució per a tots els problemes d'enumeració coneguts com punt-recta-cònica: *quantas còniques hi ha que passin per p punts i siguin tangents a r rectes i*

c còniques, de manera que $p + r + c = 5$?

L'objectiu final del treball, com hem dit, és arribar al nombre 3264 solució del problema d'Steiner. Per arribar-hi treballarem al llarg de tot el treball sobre el cos dels complexos i donarem per assolits molts dels conceptes de l'assignatura de Geometria Projectiva i els conceptes bàsics de Geometria algebraica que han sigut introduïts en l'assignatura de Varietats algebraiques.

Al llarg del treball, per poder arribar al resultat final, haurem d'usar eines molt potents com el teorema de Bézout i la teoria de l'anell de Chow. Tot i ser molt importants per la nostra resolució del problema, s'escapen en temps i conceptes del treball. Per tant, el teorema de Bézout l'enunciarem i no en donarem la demostració. De totes maneres, hem vist una demostració d'aquest en l'assignatura de Varietats algebraiques.

En el capítol de l'anell de Chow donarem la seva construcció a partir del grup de cicles i l'equivalència racional. No entrarem en la demostració del moving lemma, que és el que permet definir l'estructura de producte, sent un lema ja de geometria algebraica avançada. Després donarem algunes de les propietats de l'anell de Chow sense demostració, les que ens permetran estudiar l'anell de Chow que necessitem per resoldre el problema d'Steiner.

Em concentrar en l'apartat 7.3 tots els resultats sense demostració de l'anell de Chow, fora d'això, tota la resta em intentat justificar-ho.

2 Preliminars

En aquesta secció introduïrem i recordarem alguns conceptes bàsics que anirem necessitant al llarg del treball, com la resultat de dos polinomis i els conceptes de morfisme racional i graf de funcions racionals.

2.1 Teoria de la resultant

En aquest apartat introduïrem una mica la teoria de resultants, una teoria molt desenvolupada actualment i que va molt més enllà del que nosaltres necessitem. Nosaltres la usarem per calcular condicions de tangència, és a dir, per forçar zeros dobles.

Recordem un petit lema,

Lema 2.1. *Siguin $f, g \in K[X]$ dos polinomis, $\deg(f) = n > 0$ i $\deg(g) = m > 0$. Els polinomis f i g tenen factors en comú (no primers entre si) si, i només si, existeixen $A, B \in K[X]$ tals que*

- (i) $A, B \neq 0$
- (ii) $\deg(A) \leq m - 1, \deg(B) \leq n - 1$
- (iii) $Af + Bg = 0$

Si tenim que $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ i plantegem el sistema per tal de trobar els coeficients de A i B , obtenim la següent matriu

$$Syl(f, g) = \begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & 0 & b_{m-1} & b_m & \ddots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & 0 & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & \vdots & b_0 & b_1 & \cdots & \vdots \\ 0 & a_0 & \cdots & \vdots & \vdots & b_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

que té m columnes de a_i i n columnes de b_j (per simplificar hem escrit la matriu amb $n = m$). Aquesta matriu s'anomena la matriu de Sylvester.

Definició 2.2. *Donats dos polinomis, no nuls, sobre un cos o un anell commutatiu,*

$$f = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \quad g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$$

de graus n i m positius, respectivament, es defineix la resultant de f i g com:

$$Res(f, g) = \det(Syl(f, g)).$$

Observació 2.3. La resultant és un polinomi a coeficients enters en els coeficients de la matriu de Sylvester.

Teorema 2.4. *Siguin $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ dos polinomis de graus positius. Llavors, $Res(f, g) = 0$ si, i només si, $f(x)$ i $g(x)$ tenen un factor comú de grau positiu o bé $a_n = b_m = 0$.*

Demostració. \Leftarrow) Si $a_n = b_m = 0$ tenim que la primera fila de la matriu de Sylvester és tota zeros i per tant el determinant és zero. Suposem doncs que a_n, b_m no són els dos zero i per tant que $f(x)$ i $g(x)$ tenen un factor comú $h(x)$ de grau positiu. Aleshores, $f(x) = f_1(x)h(x)$, $g(x) = g_1(x)h(x)$ i tenim que $f_1(x) \neq 0$ o $g_1(x) \neq 0$, ja que $a_n \neq 0$ o $b_m \neq 0$. Per simetria podem pensar que $a_n \neq 0, f_1(x) \neq 0$. Si $\deg(h) = r$, llavors $\deg(f_1) = n - r$. Si $g(x) = 0$, tenim que $g_1(x) = 0$; per una altra banda, la relació $f(x)g_1(x) = g(x)f_1(x)$ ens diu que $\deg(g_1) \leq m - r$. En el cas en que g no sigui zero, podem escriure $f_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} -c_i x^i$, $f_1(x) = \sum_{i=0}^{m-1} d_i x^i$ on alguns dels $c_i \neq 0$, i tenim la següent relació

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m-1} d_j x^j\right) + \left(\sum_{k=0}^m b_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n-1} c_l x^l\right) = 0.$$

Si en la igualtat anterior, desenvolupen els productes i calculem els coeficients de $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \dots, 1$ obtenim les següents equacions

$$\begin{aligned} a_n d_{m-1} + b_m c_{n-1} &= 0 \\ a_n d_{m-2} + a_{n-1} d_{m-1} + b_m c_{n-2} + b_{m-1} c_{n-1} &= 0 \\ &\vdots \\ a_0 d_0 + b_0 c_0 &= 0 \end{aligned}$$

Si les considerem com un sistema d'equacions lineal en c 's i d 's establint l'ordre $d_{m-1}, d_{m-2}, \dots, d_0, c_{n-1}, \dots, c_0$, tenim que el determinant dels coeficients dels c 's i d 's que apareixen en el sistema d'equacions anterior és 0, si no totes les c 's i d 's siguin 0. Aquest determinant és exactament la resultant de f i g . Per tant, $Res(f, g) = 0$. \Rightarrow) Si suposem que $Res(f, g) = 0$, podem desfer els passos fets anteriorment i concloure que existeixen $f_1(x), g_1(x)$ tals que $f(x)g_1(x) = g(x)f_1(x)$ on $\deg(f_1) \leq n - 1, \deg(g_1) \leq m - 1$ i no els dos nuls. Suposem que $f_1 \neq 0$. Si $g_1 = 0$, llavors $g = 0$ i per tant $b_m = 0$ i per tant o bé $f(x)$ és un factor comú de f i g o bé es té que $a_n = 0$. Si $g_1 \neq 0$ i $g = 0$ ens serveix el mateix argument per concloure que o bé $a_n = 0 = b_m$ o bé f i g tenen un factor comú de grau positiu. Ara suposem que $g_1 \neq 0$ i $g \neq 0$. Aleshores la relació $f(x)g_1(x) = g(x)f_1(x)$ ens diu que com $f_1 \neq 0, g_1 \neq 0, g \neq 0$ tenim que $f \neq 0$. Llavors, o bé $a_n = 0 = b_m$, o podem assumir que $a_n \neq 0$ el que implica que $\deg(f) = n$. Com que $\deg(f_1) \leq n - 1$, la equació $f(x)g_1(x) = g(x)f_1(x)$ i la factorització de f, f_1, g, g_1 en factors irreductibles implica que $f(x)$ i $g(x)$ tenen un factor comú de grau positiu. \square

Corol·lari 2.5. *Si $K = \overline{K}$, f i g comparteixen una arrel si, i només si, $Res(f, g) = 0$.* \square

Finalment, enunciarem un parell de propietats força interessants de la resultat de dos polinomis i definirem el discriminant.

Proposició 2.6. *En el cas de polinomis mòncics, f, g , sobre un domini d'integritat la resultant és igual al producte*

$$\prod_{(x,y):f(x)=g(y)=0} (x - y)$$

és a dir, x i y recorren totes les arrels dels polinomis P i G sobre un cos algebraicament tancat que contingui els coeficients. Per als polinomis no mòncics amb coeficients líders a_n i b_m respectivament, el producte anterior queda multiplicat per $a_n^m b_m^n$.

Proposició 2.7. *Siguin $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ dos polinomis amb coeficients en K un cos arbitrari.*

(i) *Suposem que f té n arrels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en alguna extensió de K . Llavors,*

$$\text{Res}(f, g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i).$$

(ii) *Suposem que g té m arrels β_1, \dots, β_m en alguna extensió de K . Llavors,*

$$\text{Res}(f, g) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m g(\beta_j).$$

Definició 2.8 (Discriminant). *Sigui $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ amb $a_n \neq 0$ i $n > 0$, llavors el discriminant de f es defineix com*

$$\text{Disc}(f) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a_n} \cdot \text{Res}(f, f').$$

És clar, que demanar que $\text{Disc}(f)$ sigui zero, és el mateix que demanar que la $\text{Res}(f, f')$ sigui zero.

2.2 El graf d'una funció racional

Em aquest apartat recordarem el conceptes de morfisme entre varietats, funció racional i graf d'una funció racional vistos en l'assignatura de Varietats algebraïques. L'objectiu és fixar terminologia per quan parlem de graf d'una funció racional.

Definició 2.9. *Siguin X, Y dues varietats quasiprojectives, $X \subset \mathbb{P}^n$ i $Y \subset \mathbb{P}^m$. Direm que $f : X \rightarrow Y$ és un **morfisme** (o aplicació regular) si per tot punt $p \in X$ existeix un obert U tal que $\forall q \in U$ llavors*

$$f(q) = [F_0(q), \dots, F_m(q)],$$

amb $F_i \in K[x_0, \dots, x_n]$ polinomis homogenis del mateix grau que no s'anul·len simultàneament en U .

Direm que f és un **isomorfisme** si f és bijectiu i f^{-1} és regular.

Ara es tenen les següents propietats

Lema 2.10. *Sigui $f : X \rightarrow Y$ un morfisme entre conjunts quasiprojectius, $X \subset \mathbb{P}^n$ i $Y \subset \mathbb{P}^m$. Llavors,*

(a) *f és continua respecte la topologia de Zariski. En particular, $\forall q \in Y$, $f^{-1}(q)$ el que s'anomena la fibra sobre q de f , és tancat de X .*

(b) *L'aplicació **graf** és un morfisme i indueix un isomorfisme entre X i $Im(\gamma_f) =:$*

$$\begin{aligned} \gamma_f : X &\longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \\ p &\longmapsto (p, f(p)) \end{aligned}$$

Γ_f . *El graf Γ_f és tancat de $X \times Y$.*

A continuació introduïrem les aplicacions racionals i el graf d'un tipus molt concret d'aplicacions racionals.

Definició 2.11. *Sigui X, Y varietats projectives irreductibles. Considerem parelles (U, Φ) , $U \subset X$ i $\Phi : U \rightarrow Y$ morfisme. Definim la següent relació*

$$(U, \Phi) \sim (U', \Phi') \Leftrightarrow \Phi|_{U \cap U'} = \Phi'|_{U \cap U'}.$$

Es pot veure que és una relació d'equivalència.

*Aleshores, una **aplicació racional***

$$\varphi : X \dashrightarrow Y$$

és la classe d'equivalència d'aquesta relació.

Observació 2.12. Una aplicació racional φ no té perquè esta definida en tot X . El domini de definició de φ és l'obert més gran on φ esta definida.

Exemple 2.13. Com a primer exemple tenim que tot morfisme és una aplicació racional.

Després en l'apartat 6.1 veurem el blowup en un punt que serà construït a partir d'una aplicació racional.

Definició 2.14. *Sigui X una varietat projectiva i $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ un morfisme racional; sigui $U \subset X$ el domini de φ , és a dir el subconjunt obert de X on φ estigui definit. El graf de $\varphi|_U$ és com hem vist un tancat de $U \times \mathbb{P}^n$; quan ens referim al **graf d'una funció racional** φ ens estarem referint a la clausura Γ_φ en $X \times \mathbb{P}^n$ del graf de $\varphi|_U$.*

3 Còniques planes.

Les còniques són els objectes geomètrics més simples que tenen curvatura. Els cercles, les el·lipses, les paràboles i les hipèrboles són alguns exemples de còniques.

3.1 Espai de paràmetres de les còniques planes.

L'equació que defineix una cònica projectiva és

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ = 0,$$

amb no tots els coeficients zero. És a dir, una curva en el pla projectiu és una cònica si té aquesta forma. Ara, variant el sis coeficients, obtenim els diferents tipus de còniques.

Quan el polinomi que defineix la cònica és irreductible, diem que la cònica és **no degenerada**. Si el polinomi que defineix la cònica descompon com a producte de dos factors lineals, llavors, la cònica és la unió de dues rectes i direm que la cònica és **degenerada**. A més a més, quan les dues rectes coincideixin, és a dir, que el polinomi que defineix la cònica sigui el quadrat d'una forma lineal al quadrat, direm que la cònica és una **recta doble**. Les rectes dobles juguen un paper molt important en els problemes enumeratius que involucren còniques.

Observem que si multipliquem tots i cada un dels coeficients de l'equació que defineix una cònica per un $\lambda \neq 0$,

$$\lambda aX^2 + \lambda bY^2 + \lambda cZ^2 + \lambda dXY + \lambda eXZ + \lambda fYZ = 0,$$

aquesta no canvia, en el sentit que segueix anul·lant els mateixos punts. Aquest fet ens recorda a l'espai projectiu.

Per tant, tenim que les variables X , Y i Z poden ser obviades i tota cònica pot ser descrita pels seus coeficients mitjançant unes coordenades de la forma $[a : b : c : d : e : f]$. Aquestes coordenades són un punt del espai projectiu cinc dimensional, \mathbb{P}^5 . Llavors, tenim una correspondència bijectiva entre punts de \mathbb{P}^5 i còniques del pla projectiu.

3.2 La estratègia bàsica per comptar.

Hem descrit l'espai de paràmetres \mathbb{P}^5 per a les còniques planes. Utilitzant certs subconjunts d'aquest espai de paràmetres podem introduir la estratègia bàsica per comptar les còniques que passen a través d'uns punts o tangents a alguna recta o cònica.

Per cada punt p construïm els subespai $H_p \subset \mathbb{P}^5$ de còniques passant pel punt, per cada línia l construïm el subconjunt $H_l \subset \mathbb{P}^5$ de còniques tangents a la recta l , i per cada cònica no degenerada Q donada construïm el subconjunt H_Q de còniques tangents a Q . Els punts en la intersecció de tots aquests subconjunts corresponen a còniques que passen per tots els punts i són tangents a totes les rectes i còniques.

Passar de comptar còniques a comptar el nombre de punts en una intersecció de certs subconjunts de \mathbb{P}^5 ens permet utilitzar la geometria de \mathbb{P}^5 per veure propietats de les còniques planes.

Veurem en el capítol 8 que els conjunts H_p , H_l , i H_Q són exemples de varietats algebraiques projectives, és a dir, són subconjunts de \mathbb{P}^5 que consisteixen en els zeros d'una col·lecció de polinomis homogenis. De fet, les tres varietats són hipersuperfícies i estan definides per un polinomi que donarem explícitament. També veurem que els graus de H_p , H_l , i H_Q són 1, 2 i 6 respectivament.

Si ara volem trobar còniques que passin per certs punts i siguin tangents a certes rectes i còniques, mirarem la intersecció de les corresponents varietats H_p 's, H_l 's i H_Q 's. Quan s'estudien interseccions és interessant considerar la codimensió de les varietats en lloc de la dimensió. Per la majoria de parelles de varietats, la codimensió de la seva intersecció és la suma de les de les seves codimensions (clarament, aquest fet no és cert si les varietats es superposen massa).

En el nostre cas, les varietats H_p , H_l , i H_Q són hipersuperfícies i tenen codimensió 1. Per tant, com l'espai de paràmetres \mathbb{P}^5 té dimensió 5, esperem que donades cinc condicions, la intersecció de les corresponents cinc hipersuperfícies tingui codimensió 5 i sigui un conjunt finit de punts. Per tant, té sentit preguntar-se:

Quantes còniques passen per p punts i són tangents a l rectes i c còniques,
si $p + l + c = 5$?

En la següent secció donarem els fonaments per respondre aquesta pregunta considerant primer el cas on el nombre de còniques és zero.

4 Algunes qüestions bàsiques de geometria enumerativa.

En aquesta secció estudiarem els problemes de geometria enumerativa de punt-línia: trobar el nombre de còniques que passin per p punts i siguin tangents a l rectes amb $p + l = 5$.

4.1 Cinc punts.

Comptarem el nombre de còniques que passen per cinc punts del pla, p_1, \dots, p_5 . Per fer-ho, comencem considerant dos punts $p_1 \neq p_2$, llavors, es té que $H_{p_1} \neq H_{p_2}$ ja que podem trobar rectes dobles per p que no passin per q . Si ara considerem tres punts p_1, p_2, p_3 diferents es té que

$$H_{p_1} \cap H_{p_2} \not\subset H_{p_3},$$

ja que sempre hi ha una cònica per p_3 que no conté p_1 ni p_2 , com a exemple podem mirar la figura 1.

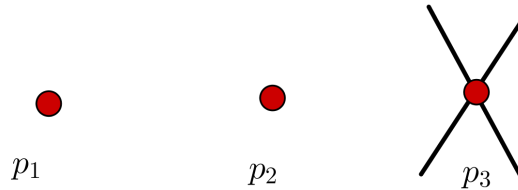


Figura 1: Cònica per un punt que no passi per dos donats.

Al considerar un quart punt p_4 que no estigui alineat amb p_1, p_2, p_3 aleshores,

$$H_{p_1} \cap H_{p_2} \cap H_{p_3} \not\subset H_{p_4}.$$

N'hi ha prou amb donar un exemple, per exemple, si p_1, p_2, p_3 estan alineats existeix una recta doble que passa per p_4 i que no conté p_1, p_2, p_3 . I així amb qualsevol disposició.

Observem que si tenim p_1, p_2, p_3 alineats aleshores, totes les còniques que contenen aquests punts contenen a la recta $p_1 \vee p_2 \vee p_3$. És a dir, que si p_4 està alineat amb p_1, p_2, p_3 llavors tota cònica per aquests tres punts, passarà per p_4 .

Amb tot això tenim que si els quatre punts no estan alineats

$$\dim H_{p_1} \cap H_{p_2} \cap H_{p_3} \cap H_{p_4} = 1$$

i la intersecció serà una recta r .

Al afegir un cinquè punt p_5 tenim que o bé r i H_{p_5} intersequen en un punt o bé $r \subset H_{p_5}$ que serà el cas en que p_5 estigui alineat amb tres dels punts anteriors.

Per tant, resumint, tenim el següent teorema

Teorema 4.1. *Donats cinc punts en el pla, no quatre alineats, hi ha una única cònica que passa pels cinc punts.*

Observació 4.2. La cònica serà no degenerada quan no tres dels punts estiguin alineats. Si tenim tres punts alineats la cònica esta formada per un parell de rectes, on una conté els tres punts alineats i l'altra passa pels altres dos; només hi haurà aquesta ja que si una cònica ha de passar per tres punts alineats llavors conté la recta on es troben els tres punts.

4.2 Quatre punts i una recta.

En aquest apartat resoldrem el problema següent: *Quantes còniques hi ha que passin per quatre punts p_1, p_2, p_3, p_4 donats i siguin tangents a una recta l donada?*

Partint del vist en l'apartat anterior, si tenim quatre punts (no alineats) llavors,

$$H_{p_1} \cap H_{p_2} \cap H_{p_3} \cap H_{p_4} = r$$

és una recta de \mathbb{P}^5 . Cal raonar que $r \subseteq H_l$, és a dir, que sempre hi ha còniques per p_1, \dots, p_4 no tangents a l . Si tres dels quatre punts estan alineats llavors és clar que qualsevol cònica formada per la recta que passa per tres punts i qualsevol recta pel quart punt que no fac i les tres rectes concurrents ens proporcionarà una cònica no tangent a l . Si no tenim tres punts alineats, podem mirar les còniques degenerades que passen pels quatre punts, és a dir, les formades per parells de rectes; tenim tres còniques possibles que ens proporcionaran tres punts (els punts de tall de les rectes que formen les còniques), ara com l és una recta tenim que no pot passar per aquests tres punts i per tant, hi ha com a mínim una de les tres còniques que passa pels quatre punts i no és tangent a la recta l .

Aleshores, $r \not\subseteq H_l$ i si resollem el sistema format per l'equació de H_l (que té grau 2) i l'equació de r , aïllant i substituïm obtenim que hi haurà dues solucions o una doble.

Observació 4.3. Es pot veure que el cas de solució doble és quan hi ha tres punts alineats com en la figura 2, llavors hi ha una única cònica pels quatre punts i tangent a la recta l donada.

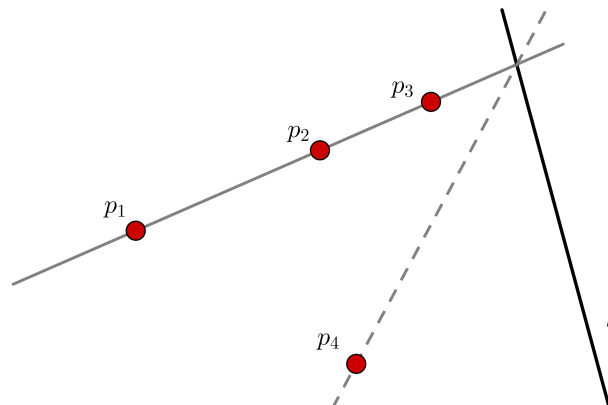


Figura 2: Cònica per quatre punts i tangent a una recta

4.3 Teorema de Bézout.

Treballant en el pla projectiu complex podem discutir la intersecció de curves consistentment. Per exemple, en el pla projectiu, dues línies sempre intersequen en un punt. Un altre exemple és, si considerem un cercle i una recta en el pla. Algebraicament, si aïllem una variable en l'equació de la recta i substituïm en l'equació del cercle obtenim un polinomi de segon grau. Si aquest polinomi té dues arrels reals, el cercle i la recta es tallaran en dos punts diferents. Si el polinomi té dues arrels complexes conjugades llavors, semblarà que el cercle i la recta no es tallen. Però si considerem punts en el pla que tinguin coeficients complexos, llavors intersecaran en aquests dos punts complexos. Per tant, en general tenim que el nombre de punts de intersecció entre una recta i un cercle és dos.

Aquests compte d'intersecció en el pla projectiu complex és descrit pel teorema de Bézout:

Teorema 4.4. *Si n hipersuperfícies de graus d_1, \dots, d_n en \mathbb{P}^n intersequen transversalment, llavors la intersecció consisteix en $d_1 \cdots d_n$ punts.*

Definició 4.5. *Les hipersuperfícies X_1, \dots, X_n intersequen transversalment al punt $p \in X_1 \cap \cdots \cap X_n$ quan els seus espais tangents en p només intersequen en p . Direm que la intersecció $X_1 \cap \cdots \cap X_n$ és transversal si ho és en cada punt.*

Exemple 4.6. Si considerem un altre cop la recta i el cercle. Quan la recta intersequi en dos punts reals al cercle tenim que la recta tangent al cercle en aquests punts només tallarà a la recta donada en un punt; per tant, el cercle i la recta s'intersequen transversalment. El mateix passa quan intersequen en dos punts complexos. No obstant quan la recta és tangent al cercle, els dos espais tangents coincideixen i la seva intersecció no és transversal. En aquest cas, en lloc d'obtenir dos punts d'intersecció n'obtenim un.

Treballar amb Bézout en \mathbb{P}^2 és bastant intuïtiu, però a nosaltres ens interessa treballar en \mathbb{P}^5 per tal de respondre a les nostres qüestions d'enumeració. Primer de tot, tornem a examinar el problema de comptar còniques passant per cinc punts. Hem vist que les còniques estan en bijecció amb els punts de la intersecció de cinc hiperplans H_p i en el capítol 8 veurem que és una hipersuperfície de grau 1. Com H_p són hiperplans, intersecaran transversalment quan els hiperplans imposin condicions linealment independents. I això és cert quan no quatre dels punts estiguin alineats. En aquests cas, les cinc hiperplans intersequen en $1^5 = 1$ punts pel teorema de Bézout.

Si ara tornem a la pregunta “*Quantes còniques passen per quatre punts donats i són tangents a una recta donada?*” El que volem intersecar són quatre hiperplans H_p de grau 1 i una hipersuperfície H_l que en el capítol 8 veurem que té grau 2. Si aquestes intersequen transversalment, el teorema de Bézout ens diu que intersecaran en $1^4 \cdot 2 = 2$ punts, que seran dues còniques. En aquest cas, resulta que la intersecció és transversal menys quan tres dels punts estan alineats (observació 4.3) o bé un dels punts està sobre la recta donada.

Observació 4.7. És possible generalitzar el teorema de Bézout per al cas en que les hipersuperfícies no es tallin transversalment. Si les hipersuperfícies X_1, \dots, X_n tenen graus d_1, \dots, d_n i la intersecció $X_1 \cap \dots \cap X_n$ consisteix en un nombre finit de punts, llavors sempre tindrem $d_1 \cdot \dots \cdot d_n$ punts en la intersecció, si comptem cada punt amb la seva multiplicitat.

Per exemple, si una recta és tangent a un cercle, llavors l'únic punt de la intersecció ha de ser contat amb multiplicitat $1 \cdot 2 = 2$.

Hi ha dues maneres d'explicar aquest fet. Si aïllem una variable en l'equació de la recta i substituïm en l'equació del cercle, obtenim una equació de grau 2, que factoritza en un quadrat perfecte. El punt d'intersecció correspon a l'arrel doble de l'equació. També podem pensar-ho d'una forma més dinàmica. Si fem lliscar la recta a l'altre costat del cercle, podem anar seguint la pista dels punts d'intersecció. Com els dos punts d'intersecció col·lapsen en un punt quan la recta és tangent al cercle, el punt de tangència comptara per dos. Si comptem amb multiplicitat, cada cercle interseccarà amb una recta en dos punts (no necessàriament diferents).

En el que segueix, només necessitarem els dos fets següents: la multiplicitat de la intersecció $X_1 \cap \dots \cap X_n$ a un dels seus punts p és sempre positiva, i és igual a 1 precisament quan els X_i intersequen transversalment en P .

4.4 Tres punts i dos rectes.

Per comptar el nombre de còniques que passen per tres punts i són tangent a dos rectes, podem usar el teorema de Bézout. La resposta que esperem és $1^3 \cdot 2^2 = 4$. En aquest cas, la intersecció serà transversal sempre que els tres punts no estiguin alineats o bé un dels punts pertanyi a una de les rectes.

El que tenim, fins ara, ho podem resumir en la següent taula:

Taula 1: Nombre de còniques per p punts i tangents a l rectes.

p punts	5	4	3	2	1	0
l rectes	0	1	2	3	4	5
Nombre de còniques	1	2	4	?	?	?

4.5 Excés d'intersecció i posició general.

Després del vist fins ara, podem pensar que les entrades no conegudes de la taula 1 continuen com a potències de 2. Al cap i a la fi, si les cinc hipersuperfícies involucrades en cada problema intersequen transversalment, aleshores aquests resultats serien conseqüència del teorema de Bézout. No obstant, resulta que per als tres últims problemes punt-recta les corresponents hipersuperfícies no interseccar transversalment, sigui quina sigui la disposició dels punts i les rectes.

La raó per la que no podem triar els punts i les rectes de manera que les hipersuperfícies corresponents intersequin transversalment recau sobre les rectes dobles.

El polinomi que defineix una recta doble és un quadrat perfecte. Ens referirem a les còniques que el polinomi que les defineix no és un quadrat perfecte com a **còniques reduïdes**. Les còniques reduïdes inclouen tant les no degenerades com les degenerades formades per un parell de rectes diferents. Les úniques còniques que són **no reduïdes** són les rectes dobles.

Per veure com les rectes dobles intervenen en la propietat de intersecció transversal, considerem còniques que passin per un punt donat i siguin tangents a quatre rectes donades. Recordem que en el pla projectiu dues rectes intersequen sempre; en particular, tota recta doble pel punt donat interseccarà cada una de les rectes donades. Ara com en una recta doble l^2 tota recta per un punt de l és tangent a l^2 . Tenim, doncs, que totes rectes dobles pel punt donat seran tangents a les quatre rectes donades i per tant, tenim infinites rectes dobles com a solucions! Com no tenim un nombre finit de solucions, les nostres hipersuperfícies en \mathbb{P}^5 no poden tallar-se transversalment. Aquí veiem que la geometria de les còniques de \mathbb{P}^2 ens dona informació sobre la geometria de \mathbb{P}^5 . Aquest fenomen, en el que esperem que la intersecció consisteixi en un nombre finit de punts però en realitat la intersecció té dimensió major, és anomenat **excés d'intersecció**.

No obstant, el nombre de còniques reduïdes, que passen pel punt donat i són tangents a les quatre rectes, sí que és finit. Ens agradaria ignorar les rectes dobles i comptar només el nombre de còniques reduïdes que passen per p punts donats i són tangents a $5 - p$ rectes donades. Però hi podria haver rectes dobles que realment fossin solució del nostre problema, en el sentit que, tenim una família de solucions que són tangents i el seu límit és una recta doble, llavors aquesta si que comptaria. Per tant, ens interessa comptar les còniques reduïdes i els seus límits. En general hi ha una solució finita per aquests problemes. Per altra banda, en molts casos les còniques reduïdes que verifiquen les hipòtesis són totes no degenerades. En la resta dels problemes d'enumeració considerarem el nombre de còniques reduïdes i els seus límits satisfent les restriccions geomètriques.

En els problemes que ja hem resolt, cap de les solucions pot ser una recta doble perquè, en cada cas, les restriccions que imposen als punts i rectes no permet que tots els punts del problema siguin col·lineals. Posant aquestes restriccions ens assegurem que la intersecció de les hipersuperfícies és transversal, de manera que ens assegura que l'ús de la fórmula de Bézout ens proporciona el nombre de còniques correcte. Observem que les restriccions ens asseguren que no tindrem infinites solucions, no ens asseguren que no en tindrem amb multiplicitat. Quan tinguem un nombre finit de solucions, cada una comptada amb multiplicitat 1, llavors direm que els punts i les rectes donades estan en **posició general**. En cada problema d'enumeració, les condicions de posició general, seran lleugerament diferents, però gairebé totes les disposicions de rectes i punts verificaran les condicions.

4.6 Dualitat en \mathbb{P}^2 .

L'eina que usarem per tal d'eliminar les rectes dobles del nostre compte és la dualitat de \mathbb{P}^2 . La dualitat ens permetrà intercanviar punts i rectes, i a la vegada transforma

còniques no degenerades en còniques no degenerades. La operació de passar al dual respecta les inclusions i les tangències. Això ens permetrà convertir els tres problemes de punt-recta que manquen en els tres ja resoltos.

Recordem alguns dels conceptes del tema de dualitat vist en l'assignatura de Geometria Projectiva. El primer fet a recordar és que el conjunt de les rectes de \mathbb{P}^2 és el que s'anomena el **dual del pla projectiu**. El pla projectiu dual no és res més que una còpia de \mathbb{P}^2 , però per distingir-los denotarem el dual per \mathbb{P}^{2^\vee} i usarem els símbols A , B i C per a les seves coordenades.

Per definició, una recta en \mathbb{P}^2 correspon a un punt en \mathbb{P}^{2^\vee} , que l'anomenarem L^* , recta dual de L . Es defineix també el dual d'un punt $p \in \mathbb{P}^2$ com la col·lecció de totes les rectes que passen per p . Si $p = [x_0 : y_0 : z_0]$ llavors la família de rectes serà $\{[A : B : C]; x_0A + y_0B + z_0C = 0\}$. Aquesta és una equació lineal en les variables A , B i C per tant, tenim que el punt p correspon a una recta en \mathbb{P}^2 , que notarem per p^* . Geomètricament la dualitat associa rectes de \mathbb{P}^{2^\vee} amb punts de \mathbb{P}^2 i vice versa.

Vam veure també el principi de dualitat, que diu

Lema 4.8 (Principi de dualitat). *Suposem que tenim una afirmació en \mathbb{P}^2 que involucra figures lineals i les operacions \in , \subset , \vee , \cap . Aleshores aplicant l'operació de passar al dual i canviant*

$$\begin{aligned} \in & \text{ per } \ni, \\ \subset & \text{ per } \supset \\ \cap & \text{ per } \vee, \\ \vee & \text{ per } \cap, \\ \text{dimensió } d & \text{ per dimensió } n - d - 1, \end{aligned}$$

obtenim una afirmació equivalent en \mathbb{P}^{2^\vee} .

Com les afirmacions que volem estudiar involucren les còniques, ens interessa recordar com actua la dualitat en aquestes.

Definició 4.9. *Sigui Q una cònica no degenerada en \mathbb{P}^2 , definirem la cònica dual Q^* en \mathbb{P}^{2^\vee} com la col·lecció de rectes tangents a Q . És a dir que Q^* contindrà el punt L^* si la corresponent recta L de \mathbb{P}^2 és tangent a Q . El conjunt de tangents d'una cònica, també anomenat envoltent de la cònica.*

Exemple 4.10. Considerem la cònica $X^2 - YZ = 0$. Una recta general $Ax + By + Cz = 0$ interseca amb la corba en dos punts. Si $A \neq 0$, podem multiplicar per A l'equació de la cònica

$$(AX)^2 - A^2YZ = 0$$

i substituir $AX = -(BY + CZ)$ l'equació de la recta, obtenint

$$B^2Y^2 + (2BC - A^2)YZ + C^2Z^2 = 0$$

Mentre el discriminant d'aquesta equació sigui no nul, tenim que la seva solució consistirà en dos punts diferents i la recta $AX + BY + CZ = 0$ serà la secant de Q que uneix aquests dos punts. Quan el discriminant de la equació, $A^2(A^2 - 4BC)$,

sigui zero, la recta serà tangent a la cònica. Com estem suposant que $A \neq 0$ tenim que la recta serà tangent a la corba si $A^2 - 4BC = 0$. Raonant de la mateixa forma per $B \neq 0$ i $C \neq 0$ obtenim la mateixa equació. És a dir, en l'exemple, la equació per el dual de la cònica Q és $A^2 - 4BC = 0$. Observem que el dual de la cònica Q és una cònica en \mathbb{P}^{2^\vee} .

Proposició 4.11. *Sigui una cònica Q en \mathbb{P}^2 d'equació $aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2 = 0$, llavors el dual de la cònica és també una cònica ve donada per l'equació*

$$(e^2 - 4ef)X^2 + (4bf - 2de)XY + (d^2 - 4af)Y^2 + (4cd - 2be)XZ + (4ae - 2bd)YZ + (b^2 - 4ac)Z^2 = 0.$$

La denotarem per Q^* .

Prova. Sigui L una recta general $AX + BY + CZ = 0$ i suposem que $A \neq 0$. L interseca amb la cònica Q en dos punts tals que

$$a(BY + CZ)^2 - b(BY + CZ)Y + cY^2 - d(BY + CZ)Z + eYZ + fZ^2 = 0$$

la recta L serà tangent a la cònica quan el discriminant del polinomi anterior sigui zero. Si calculem el discriminant i usem que $A \neq 0$, obtenim

$$(e^2 - 4ef)A^2 + (4bf - 2de)AB + (d^2 - 4af)B^2 + (4cd - 2be)AC + (4ae - 2bd)BC + (b^2 - 4ac)C^2 = 0.$$

Si suposem que $B \neq 0$ o bé que $C \neq 0$, raonant de la mateixa manera, obtenim la mateixa equació. \square

Observació 4.12. Només té sentit parlar de dual d'una cònica Q que no sigui degenerada. Però com ho volem aplicar a una situació en que només mirem còniques no degenerades, ja ens serveix.

Observació 4.13. Si mirem l'equació de la cònica dual

$$(e^2 - 4ef)A^2 + (4bf - 2de)AB + (d^2 - 4af)B^2 + (4cd - 2be)AC + (4ae - 2bd)BC + (b^2 - 4ac)C^2 = 0.$$

també hi podem llegir, quan una cònica és tangent a una recta $AX + BY + CZ = 0$ donada, és a dir, tenim una equació explícita per a la hipersuperfície H_l de \mathbb{P}^5 .

L'última cosa que ens quedaria per recordar és com es comporta la tangència. Per definició, si tenim una cònica Q i una recta L que és tangent a aquest, llavors $L^* \in Q^*$. Si ara considerem un punt $p \in Q$, colem veure que la recta p^* és tangent a Q^* . Suposem que no, i.e. que la recta p^* talla a Q en dos punts L_1^* i L_2^* . Llavors, pel principi de dualitat tenim que $p \in L_1$ i $p \in L_2$. A més a més, com L_1^* i L_2^* pertanyen a Q^* tenim que L_1 i L_2 són rectes tangents a Q . Per tant, han de coincidir de manera que $L_1^* = L_2^*$, i p^* és una recta tangent a Q^* en aquest punt.

4.7 La resta dels problemes de punt-línia.

A continuació analitzarem els casos que ens hem deixat sense respondre en la taula 1.

Si tenim cinc línies en el pla, per cada cònica, no degenerada tangent a totes elles tindrem una cònica dual que passarà per els cinc punts duals a les rectes. Com que hem vist que per cinc punts només passa una cònica, tenim que només hi haurà una cònica dual, i en conseqüència, només podrà haver una cònica tangent a totes les línies.

Tota cònica tangent a quatre línies i que passi per un punt donat haurà de tenir una cònica dual que passi per els quatre punts duals a les rectes i que sigui tangent a la recta dual del punt. Si tots els punts duals i la recta dual estan en posició general, tindrem que hi haurà 2 d'aquestes còniques duals, i, per tant, hi haurà 2 còniques tangents a quatre línies i que passin per un punt en posició general.

Finalment, repetint el raonament veiem que hi ha 4 còniques tangents a tres línies i passant per dos punts en posició general, ja que dualitzant tenim que per tres punts i tangents a dues rectes hi ha quatre còniques.

Per tant, podem resumir les solucions al problema de punt-recta en la taula següent:

Taula 2: Nombre de còniques per p punts i tangents a l rectes.

p punts	5	4	3	2	1	0
l rectes	0	1	2	3	4	5
Nombre de còniques	1	2	4	4	2	1

5 Superfície de Veronese

S'anomena superfície de Veronese, i denotarem per V al llarg de tot el treball, al conjunt de punts de \mathbb{P}^5 corresponents a les còniques rectes doble del pla projectiu.

Recordem que, una recta doble és una cònica que el polinomi que la defineix és el quadrat d'un polinomi que defineix una recta:

$$l : (Ax + By + Cz)^2 = A^2x^2 + 2ABxy + 2ACxz + B^2y^2 + 2BCyz + C^2z^2$$

Les rectes en \mathbb{P}^2 estan parametritzades per \mathbb{P}^{2^\vee} . Llavors, la superfície de Veronese és la imatge del morfisme de \mathbb{P}^{2^\vee} en \mathbb{P}^5

$$[A : B : C] \longrightarrow [A^2 : 2AB : 2AC : B^2 : 2BC : C^2]$$

Aquest morfisme és injectiu, doncs si $[A_1 : B_1 : C_1], [A_2 : B_2 : C_2]$ són dos punts de \mathbb{P}^{2^\vee} tals que

$$[A_1^2 : 2A_1B_1 : 2A_1C_1 : B_1^2 : 2B_1C_1 : C_1^2] = [A_2^2 : 2A_2B_2 : 2A_2C_2 : B_2^2 : 2B_2C_2 : C_2^2]$$

aleshores per algun $\lambda \neq 0$ es té

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \lambda A_2^2, & B_1^2 &= \lambda B_2^2, & C_1^2 &= \lambda C_2^2, \\ 2A_1B_1 &= \lambda 2A_2B_2, & 2A_1C_1 &= \lambda 2A_2C_2, & 2B_1C_1 &= \lambda 2B_2C_2, \end{aligned}$$

d'on es dedueix que

$$A_1 = \sqrt{\lambda}A_2, \quad B_1 = \sqrt{\lambda}B_2, \quad C_1 = \sqrt{\lambda}C_2$$

per tant, són el mateix punt projectiu i el morfisme és injectiu.

La imatge d'aquest morfisme, la superfície de Veronese, està definida pels zeros d'uns polinomis homogenis en sis coordenades de \mathbb{P}^5 . Donada una cònica qualsevol representada per un punt de \mathbb{P}^5 , considerem la seva matriu

$$C \mapsto [a : b : c : d : e : f] \mapsto \begin{pmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{pmatrix}$$

ara demanar que C sigui una recta doble és el mateix que dir que la matriu tingui rang 1, és a dir, que s'anul·lin tots els menors 2×2 de la matriu anterior. Per tant, obtenim les sis equacions següents

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 & be - 2cd &= 0 \\ d^2 - 4af &= 0 & bd - 2ae &= 0 \\ e^2 - 4cf &= 0 & de - 2bf &= 0 \end{aligned}$$

Aquestes sis equacions generen, el que és conegut com a, l'ideal radical de la subvarietat, que és la representació algebraica d'aquesta subvarietat en \mathbb{P}^5 .

A més a més, sabem que la superfície de Veronese és llisa i irreductible.

6 Blowup

Abans d'endinsar-nos en el blowup que necessitem, veurem un exemple més senzill, el blowup en un punt. Ens permetrà fer-nos una idea visual del que volem fer.

6.1 Blowup en un punt.

Considerem el morfisme racional, no regular,

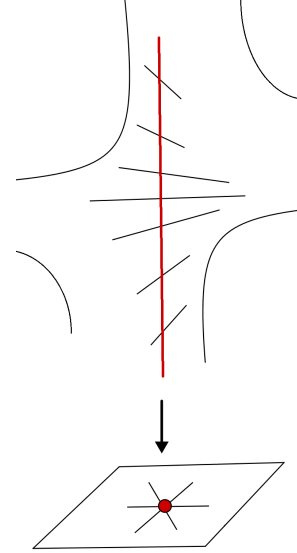
$$\varphi : \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

definit per $\varphi(a, b) = [a : b]$. Notem que està definit exactament en $\mathbb{A}^2 \setminus (0, 0)$, i envia les rectes de \mathbb{A}^2 que passen per l'origen a punts de \mathbb{P}^1 que les representen.

El graf del morfisme racional anterior és

$$\Gamma_\varphi = \{((a, b), [\alpha : \beta]) \mid a\beta = b\alpha\} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1,$$

que, òbviament, té les dues projeccions sobre \mathbb{A}^2 i \mathbb{P}^1 . Aquest graf, Γ_φ , juntament amb el morfisme de projecció $\pi : \Gamma_\varphi \rightarrow \mathbb{A}^2$, s'anomena el blowup de \mathbb{A}^2 en el punt $(0, 0)$ i és l'exemple més simple de blowup. Aquest blowup no és difícil de visualitzar en una imatge.



En particular, observem que el morfisme $\Gamma_\varphi \rightarrow \mathbb{A}^2$ és un isomorfisme fora de l'origen $(0, 0) \in \mathbb{A}^2$, i.e. que la imatge inversa d'un punt $p = (a, b) \in \mathbb{A}^2 \setminus (0, 0)$ és només el punt $((a, b), [a : b])$. Ara bé, la fibra sobre l'origen, és una còpia de \mathbb{P}^1 corresponent a les rectes per aquest punt, ja que $a\beta = b\alpha$ no imposa cap condició sobre α i β si $(a, b) = (0, 0)$.

Conceptualment el que ha passat, és que hem intercanviat l'origen per tot un \mathbb{P}^1 que parametriza les pendents amb que les rectes passen pel punt $(0, 0)$.

6.2 Blowup de \mathbb{P}^5 al llarg de la superfície de Veronese

Comencem fixant-nos en el morfisme racional de \mathbb{P}^5 a \mathbb{P}^5 que envia una cònica a la seva dual

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{P}^5 & \dashrightarrow \mathbb{P}^5 \\ [a : b : c : d : e : f] & \longmapsto [e^2 - 4cf : 4cd - 2be : 4bf - 2de : \\ & 4ae - 2bd : d^2 - 4af : b^2 - 4ac]. \end{aligned}$$

Clarament, no és un morfisme ja que en els punts de la superfície de Veronese la imatge no està definida. Els punts en \mathbb{P}^5 que corresponen a les rectes dobles són enviats a $[0 : 0 : 0 : 0 : 0]$ que no és un punt de l'espai projectiu.

Definició 6.1. *El blowup de \mathbb{P}^5 al llarg de la superfície de Veronese, $Bl_V\mathbb{P}^5$, és la clausura del graf de δ en $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$.*

La projecció natural sobre el primer factor $\pi : Bl_V\mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^5$, s'anomena blow-down.

Disposem-nos a donar algunes equacions per al $Bl_V\mathbb{P}^5$. Primer de tot, fixem-nos en el graf de δ , és el conjunt de punts $([a : b : c : d : e : f], [r : s : t : u : v : w]) \in \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$, tals que, per cert $\lambda \neq 0$ satisfan

$$\begin{aligned} \lambda r &= e^2 - 4cf & \lambda u &= 4cd - 2be \\ \lambda s &= 4bf - 2de & \lambda v &= 4ae - 2bd \\ \lambda t &= d^2 - 4af & \lambda w &= b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Multiplicant en creu, podem eliminar la λ i obtenim quinze equacions:

$$\begin{array}{lll} r(4bf - 2de) = s(e^2 - 4cf) & s(d^2 - 4af) = t(4bf - 2de) & t(4ae - 2bd) = v(d^2 - 4af) \\ r(d^2 - 4af) = t(e^2 - 4cf) & s(4cd - 2be) = u(4bf - 2de) & t(b^2 - 4ac) = w(d^2 - 4af) \\ r(4cd - 2be) = u(e^2 - 4cf) & s(4ae - 2bd) = v(4bf - 2de) & u(4ae - 2bd) = v(4cd - 2be) \\ r(4ae - 2bd) = v(e^2 - 4cf) & s(b^2 - 4ac) = w(4bf - 2de) & u(b^2 - 4ac) = w(4cd - 2be) \\ r(b^2 - 4ac) = w(e^2 - 4cf) & t(4cd - 2be) = u(d^2 - 4af) & v(b^2 - 4ac) = w(4ae - 2bd) \end{array}$$

Observem que pels punts de la superfície de Veronese, totes aquestes equacions es redueixen a $0 = 0$ i, no ens diuen res. Amb aquesta informació, per aquests punts, no podem trobar l'antiimatge de la projecció natural. Ens interessa poder dir alguna cosa per als punts de la superfície de Veronese, per tant, hem de trobar més equacions i que aquestes, al calcular l'antiimatge, no és redueixin totes a $0 = 0$.

És cert que les equacions de la superfície de Veronese que hem donat són linealment independents, però buscarem relacions de dependència algebraica per tal de trobar equacions que no es redueixin a $0 = 0$.

Com que les equacions de la superfície de Veronese apareixen d'anul·lar els menors dos per dos de la matriu general d'una cònica, podem trobar relacions algebraiques entre les 15 equacions. Això és degut a que les equacions dels menors d'ordre dos d'una matriu no són algebraicament independents.

Mitjançant la comanda `syz` en Macaulay2 podem calcular vuit equacions més, anomenades les syzygies,

$$\begin{array}{ll} bu + 2ew + 2cv = 0 & bv + dw + 2au = 0 \\ eu + 2br + 2cs = 0 & dv + 2bt2as = 0 \\ ds + 2et + 2fv = 0 & 4ar - 4ct + du - ev = 0 \\ es + 2dr + 2fu = 0 & 4ct - 4fw + bs + du = 0. \end{array}$$

Ara podríem calcular les syzygies de les syzygies, per tal d'obtenir noves equacions, però si les calculem, les noves equacions ja no són linealment independents amb les anteriors. Per tant, no ens proporcionen nova informació sobre l'ideal. Usant el teorema de les syzygies de Hilbert sabem que no hi haurà més equacions i no trobarem més syzygies. És a dir, ja tenim descrit tot l'ideal.

El $Bl_V \mathbb{P}^5$ i \mathbb{P}^5 .

Anem a intentar entendre una mica més el blowup de \mathbb{P}^5 al llarg de la superfície de Veronese comparant-lo amb el \mathbb{P}^5 original.

Sigui $p = [a : b : c : d : e : f] \in \mathbb{P}^5$ tal que $p \notin V$ (i.e. no representa una recta doble). Aleshores, el morfisme està ben definit en aquest punt. En aquest cas les quinze primeres equacions determinaran completament $[r : s : t : u : v : w]$, i per tant $\pi^{-1}(p)$ és un punt. Tenim doncs, que fora de la superfície de Veronese, \mathbb{P}^5 i $Bl_V \mathbb{P}^5$ són isomorfs.

Sigui ara $p = [a : b : c : d : e : f] \in V$. Observem que ara les quinze equacions primeres es redueixen totes a $0 = 0$. No obstant les últimes vuit equacions ens diuen a quins punts correspon p en el blowup.

Exemple 6.2. Considerem la recta doble $x^2 = 0$, que com a punt de \mathbb{P}^5 correspondria a $[1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0]$. Si mirem les equacions que ens diuen alguna cosa per a aquest punt, tenim

$$2au = 0 \quad 2as = 0 \quad 2ar = 0$$

Aleshores, $r = s = e = 0$ però t, v, w són lliures. Per tant, els punts de $Bl_V \mathbb{P}^5$ que quan fem el blowdown ens queda p seran de la forma

$$([1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0], [0 : 0 : t : 0 : v : w])$$

que defineix un pla. Per tant tenim que $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^2$

Com que per tota recta l podem considerar unes coordenades en les que l sigui $x^2 = 0$, tenim que per qualsevol recta doble l que considerem: *el punt corresponent a l en \mathbb{P}^5 serà substituït per un \mathbb{P}^2 en $Bl_V \mathbb{P}^5$.*

Podem pensar que hem canviat la superfície de Veronese per una varietat de dues dimensions més gran, una superfície de quatre dimensions. Aquesta hipersuperfície s'anomena **divisor excepcional** del blowup i el denotarem per E , i.e. $E := \pi^{-1}(V)$.

Substituïm la varietat de Veronese, de dimensió 2, per una varietat de 4 dimensions que ens parametritzarà la direcció tangent amb que ens apropem a V . És a dir, cada punt $p \in V$ el considerem el tangent el fibrat normal, que és el projectivitzat del quocient entre $T_{\mathbb{P}^5}(p)$ i $T_V(p)$, llavors substituïm p per $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^5}(p)/T_V(p)) \cong \mathbb{P}^2$. El fibrat normal ens parametritza les direccions tangents amb que ens apropem a un punt p de V menys les que s'apropen tangents a la superfície de Veronese que no ens interessa. Sabent com ens apropem podrem salvar l'excés d'intersecció i comptar només les solucions amb significat real.

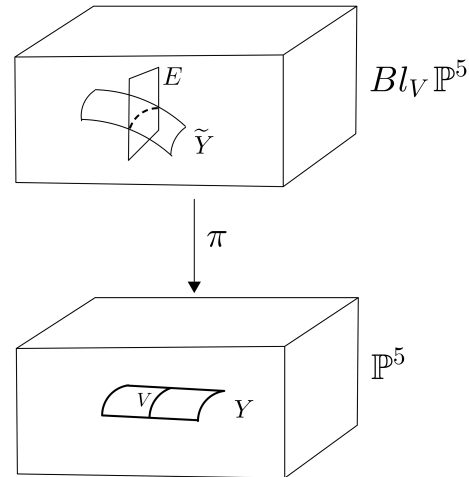


Figura 4: Transformada estricta.

Considerem una hipersuperfície Y en \mathbb{P}^5 que contingui la superfície de Veronese. Llavors la seva preimatge $\pi^{-1}(Y)$ en el blowup contindrà el divisor excepcional. Per altra banda, fora de V i E , tenim que \mathbb{P}^5 i el blowup són idèntics. Si a Y li trèiem V , i considerem la seva imatge inversa $\pi^{-1}(Y \setminus V)$, serà isomorfa a $Y \setminus V$. Si ara considerem la clausura $\overline{\pi^{-1}(Y \setminus V)}$, obtenim una hipersuperfície en el blowup que interseca amb E , però que no el conté. Anomenem a aquesta nova superfície la **transformada estricta** de Y i la denotarem per \tilde{Y} . Per visualitzar-ho tenim la figura 4.

Per resoldre el problema d'Steiner, el que farem serà interseccar les transformades estrictes d'hipersuperfícies de \mathbb{P}^5 . Ja que el procés de construir les transformades estrictes elimina les components de E , i, per tant, l'excés d'intersecció al llarg de la superfície de Veronese.

Una justificació de que realment les transformades estrictes es tallaran transversalment la donarem en el capítol 9.

7 Anell de Chow

En \mathbb{P}^5 som capaços de comptar el nombre de punts que hi ha en la intersecció de cinc hipersuperfícies utilitzant Bézout, però la fórmula de Bézout no és vàlida en el blowup. Això és degut a que en el blowup el concepte de grau d'una hipersuperfície és més complicat (no és només un nombre!). La informació extra que necessitarem es troba en l'anell de Chow del blowup.

En general, per una varietat algebraica, l'anell de Chow és un anell que descriu com intersequen les varietats. Els elements de l'anell són classes de subvarietats que tenen les mateixes propietats d'intersecció (per exemple tots els hiperplans estaran en la mateixa classe).

Començarem introduint els cicles d'una varietat, per als que definirem una equivalència i amb aquesta arribarem al grup de Chow. Després dotarem al grup d'estructura d'anell, arribant així a l'anell de Chow.

7.1 Cicles

Sigui X una varietat algebraica. El **grup dels cicles** en X , denotat per $Z(X)$, és el grup lliure generat pel conjunt de les subvarietats de X . El grup $Z(X)$ és graduat per la dimensió:

$$Z(X) = \bigoplus_{k \geq 0} Z_k(X),$$

on $Z_k(X)$ és el grup de cicles que són combinacions lineals de subvarietats integres de dimensió k .

Els elements de $Z_k(X)$ s'anomenen k -cicles de X . Un cicle $Z = \sum n_i Y_i$ s'anomena **efectiu** si els coeficients n_i són tots no negatius. Un **divisor** és un cicle format per subvarietats $(n-1)$ -dimensionals d'una varietat n -dimensional (i.e. és un cicle les components del qual tenen codimensió 1).

Quan treballarem amb la codimensió, en lloc de dimensió, i ens vulguem referir al grup de cicles que són combinacions lineals de subvarietats integres de codimensió k , escriurem $Z^k(X)$.

7.2 Equivalència racional i grup de Chow

A continuació, definirem l'equivalència racional i també el grup de Chow, que és el grup dels cicles mòdul l'equivalència racional.

Donats dos cicles $A_1, A_2 \in Z(X)$, la idea intuïtiva que siguin racionalment equivalents és que hi ha una família de cicles parametritzada racionalment que interpola entre ells. Formalment, seria la següent definició

Definició 7.1. *Donats dos cicles A_1 i A_2 de X direm que $A_1 \sim_{rac} A_2$ si, i només si, existeix una subvarietat tancada (no necessàriament irreductible), $T \subset \mathbb{P}^1 \times X$, amb la propietat que talla transversalment a la fibra $\{p\} \times X \forall p$, i a més es té que*

$$A_1 = \{(0 : 1)\} \times X \cap T, \quad A_2 = \{(1 : 0)\} \times X \cap T$$

El grup de Chow de X és el grup dels cicles de X mòdul l'equivalència racional, $Ch(X) = Z(X) / \sim_{rac}$.

Exemple 7.2. Sigui $X = \mathbb{P}^2$. Veurem que dues rectes l_1, l_2 són racionalment equivalents.

Per veure que l_1 i l_2 són racionalment equivalents hem de donar una subvarietat tancada de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ tal que $l_1 = \{[1 : 0]\} \times \mathbb{P}^2 \cap T$ i $l_2 = \{[0 : 1]\} \times \mathbb{P}^2 \cap T$. Fixant una referència podem suposar que l_1 és la recta $x = 0$ i l_2 la $y = 0$. Si anomenem $O = l_1 \cap l_2$ i considerem $O^\vee = \{[a : b] \in \mathbb{P}^1\}$, el feix de rectes que passen per O . Tenim que O^\vee és com un \mathbb{P}^1 . Ara si considerem la varietat tancada

$$T = \{(l, p) | p \in l\} \subset O^\vee \times \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$$

tenim el que volíem.

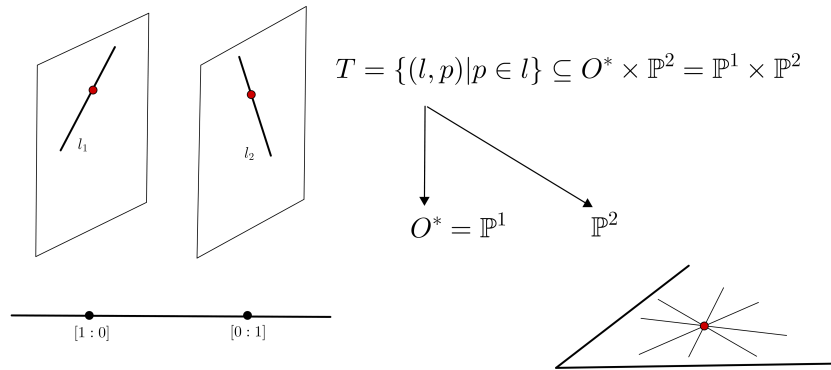


Figura 5: Equivalència racional entre rectes.

Recordem que diem que dues subvarietats A, B de X **intersequen transversalment** en un punt p si A, B i X són totes tres llises en p , i els espais tangents de A i B en p junts generen el espai tangent de X i.e.

$$T_p A + T_p B = T_p X$$

Notem que si $\dim A + \dim B < \dim X$, llavors, A i B no intersecaran transversalment en cap $p \in A \cap B$.

També ho podem interpretar com que en cada punt de $A \cap B$ la intersecció de les varietats tangents a A i a B té dimensió mínima.

Direm que A i B són **genèricament transversals** o que intersequen genèricament transversals si són transversals a qualsevol punt de $A \cap B$.

Observació 7.3. Observem que el grup de Chow hereta la graduació per la dimensió, de $Z(X)$

$$Ch(X) = \bigoplus_{k \geq 0} Ch_k(X),$$

$Ch_k(X)$ s'anomena el grup d'equivalències racionals de classes de k -cicles.

Igual que abans, quan ens vulguem referir al grup d'equivalència racional de les classes de $(n - k)$ -cicles, és a dir, de codimensió k , escriurem $Ch^k(X)$. Usarem la notació $[Y]$ per representar la classe mòdul equivalència racional d'un cicle Y .

Observació 7.4. Es pot veure que l'equivalència racional, que acabem de definir, és una relació d'equivalència.

Exemple 7.5. La mateixa idea ens serveix per veure que en \mathbb{P}^n dos hiperplans h_1 i h_2 són racionalment equivalents. Només cal considerar, si anomenem $l = h_1 \cap h_2$,

$$T = \{(h, p) | p \in h\} \subset l^\times \times \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$$

Exemple 7.6. Un últim exemple que podem donar és el de l'equivalència racional de punts en \mathbb{P}^n . Com que per dos punts de \mathbb{P}^n passa una recta, només cal veure que dos punts en una recta són racionalment equivalents. Si anomenem l la recta pels dos punts donats p_1, p_2 i considerem $q \notin l$. Si treballem en el pla $p_1 \vee p_2 \vee q$. Llavors, només cal considerar,

$$T = \{(r, p) | p \in r\} \subset q^* \times l = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Per tant, els punts en pp^n són racionalment equivalents.

Hem vist que en \mathbb{P}^n els hiperplans són racionalment equivalents. Però, què passa amb totes les altres subvarietats? què passa amb les rectes de \mathbb{P}^3 ? o amb les de \mathbb{P}^4 ? què passa amb les varietats que tenen la mateixa dimensió? i les que tenen el mateix grau? Són racionalment equivalents?

Veurem més endavant que en \mathbb{P}^n dues subvarietats són racionalment equivalents si, i només si, tenen la mateixa dimensió i grau.

7.3 Anell de Chow

Si recordem el clàssic teorema de Bézout: donades dues corbes planes $C, C' \subset \mathbb{P}^2$ de graus d i e respectivament, intersequen transversalment, llavors, intersequen en $d \cdot e$ punts. Fixem-nos en dos fets molt importants, el primer és que el nombre de punts de la intersecció no depèn de les corbes triades, només depèn del seu grau i de que tinguin intersecció transversal.

L'altre fet és la resposta, $d \cdot e$, és un producte, això ens suggereix que hi ha present algun tipus d'estructura d'anell. Aquestes idees, ens condueixen cap a intuir que la intersecció de varietats està relacionada amb la multiplicació.

Després d'un gran desenvolupament en geometria algebraica, durant els últims 200 anys, s'ha pogut arribar a entendre, generalitzar i definir aquest producte:

Teorema 7.7 (Definició). *Si X és una varietat llisa quasiprojectiva, existeix una única estructura de producte en $Ch(X)$ satisfent la condició: si dues subvarietats A, B de X són genèricament transversals llavors*

$$[A][B] = [A \cap B].$$

Aquesta estructura fa de $Ch(X)$ un anell associatiu, commutatiu, graduat per la codimensió.

Definició 7.8. Anomenarem **anell de Chow** a $Ch(X)$ amb el producte descrit en el teorema anterior.

Fixem-nos que en el teorema 7.7 necessitem comparar dos cicles donats arbitràriament amb dos, tals que la seva intersecció, sigui transversal. Ja que ens interessa calcular producte de cicles donats arbitràriament, i.e. que a priori no tenen perquè ser transversals.

Observem que si per exemple tallem dues còniques en el pla projectiu, el nombre de punts que obtenim depèn de les còniques, figura 6. Podem obtenir 4, 3, 2, 1 o fins a infinits punts.

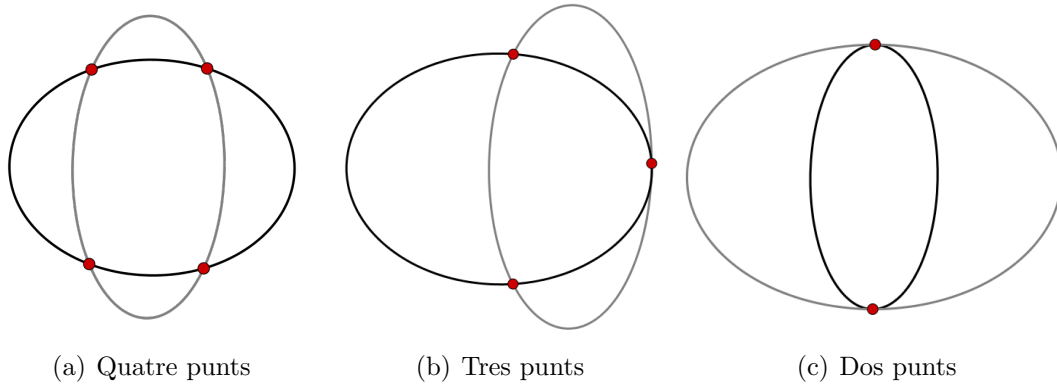


Figura 6: Intersecció de dues còniques.

Però només en el primer cas hi ha intersecció transversal.

El teorema 7.9 ens assegurarà transversalitat per poder definir el producte.

Teorema 7.9 (Moving lemma). *Sigui X una varietat quasiprojectiva llisa.*

(a) *Per cada $\alpha, \beta \in Ch(X)$ existeixen cicles $A = \sum m_i A_i$ i $B = \sum n_j B_j$ en $Z(X)$ que representen a α i β respectivament, de manera que A_i, B_j són genèricament transversals per cada i i j .*

(b) *La classe*

$$\sum m_i n_j [A_i \cap B_j]$$

en $Ch(X)$ és independent de la tria dels A, B .

Aquest teorema ens diu que, per exemple en la figura 7 podem intercanviar la cònica C_1 per una que sigui racionalment equivalent, C_2 , de manera que la intersecció de la nova cònica i Q siguin transversals. A més a més, el producte d'intersecció no dependrà del representant, C_2 , que haguem triat.

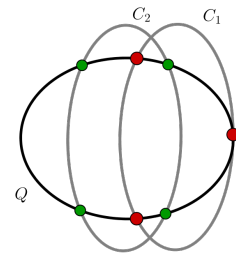


Figura 7: M.lemma

El Moving Lemma, per tant, ens permet definir el producte d'intersecció.

$$\begin{aligned} Ch^i(X) \times Ch^j(X) &\rightarrow Ch^{i+j}(X) \\ ([A], [B]) &\mapsto [A][B] = [A \cap B] \end{aligned}$$

Observació 7.10. El producte que fa que el grup de Chow sigui un anell, defineix la següent aplicació

Una de les propietats que té l'anell de Chow i que usarem és la següent.

Proposició 7.11. *Sigui X una varietat algebraica i sigui $Y \subset X$ tancat, llavors la inclusió i restricció en $X \setminus Y$ dels cicles ens proporciona una successió exacta*

$$Ch(Y) \rightarrow Ch(X) \rightarrow Ch(X \setminus Y) \rightarrow 0$$

A continuació estudiarem el comportament respecte morfismes, entre varietats, del grup de Chow. Entendre'l serà una eina clau.

Pushforward.

Sigui $f : Y \rightarrow X$ un morfisme entre dues varietats projectives. Sabem que la imatge d'una subvarietat $A \subset Y$ és una subvarietat, $f(A) \subset X$. El que voldriem és que la classe de A fos enviada a la classe de $f(A)$, però això no preservaria l'equivalència racional.

Exemple 7.12. Considerem en \mathbb{P}^2 una cúbica X i una recta $X' \cong \mathbb{P}^1$ com les del dibuix i f la projecció de X en X' des un punt de l'infinít.

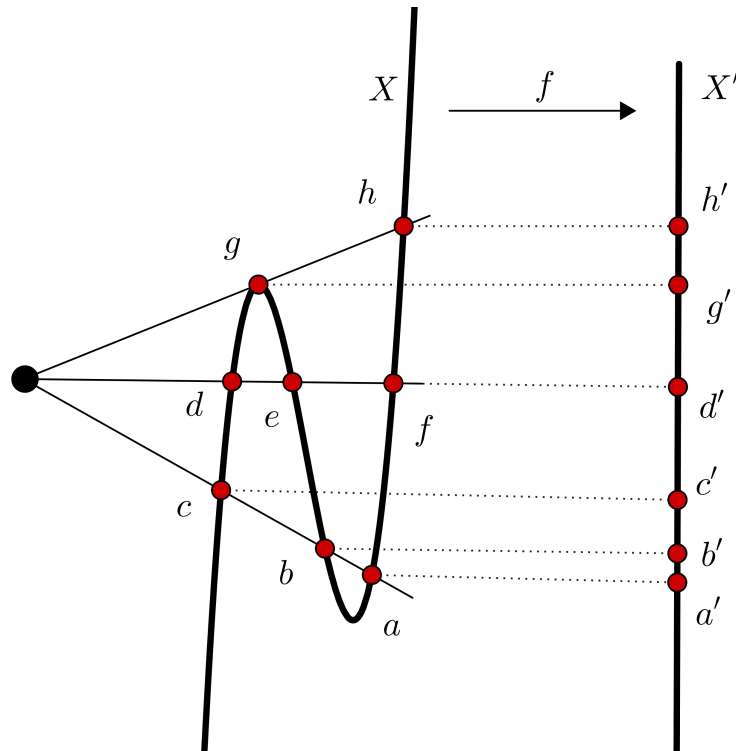


Figura 8: Pushforward de cicles equivalents.

Considerem en X els tres cicles: $Z_1 : a + b + c$, $Z_2 : d + e + f$ i $Z_3 : g + h$; clarament aquests tres cicles són racionalment equivalents. Quan fem imatge per f , com a conjunts, d'aquests cicles obtenim els cicles $f(Z_1) : a' + b' + c'$, $f(Z_2) : d'$ i $f(Z_3) : g' + h'$, aquests tres cicles no poden ser racionalment equivalents ja que en \mathbb{P}^1 dos conjunts finits de punts són racionalment equivalents si, i només si, els dos tenen el mateix cardinal.

Per tant, el pushforward de cicles no el podem definir d'aquesta manera, i haurem d'involucrar la multiplicitat.

Direm que un morfisme $f : A \rightarrow B$ dominant ($\overline{f(A)} = B$ i $\dim A = \dim B$) és **genèricament finit** si, per un punt general $x \in f(A)$, la seva preimatge $Y = f^{-1}|_A(x)$ en A és una subvarietat finita, o equivalentment, si el cos de funcions racionals $K(A)$ és una extensió finita del cos $K(f(A))$. El grau $n := [K(A) : K(f(A))]$ d'aquesta extensió de cossos és el que anomenarem grau de f .

Observació 7.13. Si $\dim f(A) = \dim A$, llavors el morfisme $f|_A : A \rightarrow f(A)$ és genèricament finit. Si $n := [K(A) : K(f(A))]$ és el grau de l'extensió de cossos de funcions racionals, direm que $f|_A$ és genèricament finit de grau n .

Hem de comptar $f(A)$ amb multiplicitat n en el pushforward del cicle:

Definició 7.14 (Pushforward de cicles). *Sigui $f : Y \rightarrow X$ un morfisme entre dues varietats projectives, i sigui $A \subset Y$ una subvarietat.*

- (a) *Si $f(A)$ té dimensió estrictament menor que A , llavors definim $f_*([A]) = 0$.*
- (b) *Si $\dim f(A) = \dim A$ i $f|_A$ té grau n llavors, definim $f_*([A]) = n \cdot [f(A)]$.*
- (c) *Si $A = \sum n_i A_i \in Z(Y)$ és una combinació lineal de subvarietats, llavors definim $f_*([A]) = \sum n_i f_*([A_i])$.*

Amb aquesta definició, tenim que, el pushforward de cicles conserva la equivalència racional:

Teorema 7.15. *Si $f : Y \rightarrow X$ és una morfisme entre varietats, llavors el morfisme $f_* : Z(Y) \rightarrow Z(X)$ definit abans indueix un morfisme de grups $f_* : Ch_k(Y) \rightarrow Ch_k(X)$ per cada k .*

Exemple 7.16. Seguint amb l'exemple 7.12, si ara ens fixem en les multiplicitats, tenim que, el punt g és un punt de tangència, i per tant, el cicle Z_3 seria $2g + h$. Per tant, els pushforwards dels cicles, d'acord amb la definició, quedarien: $f_*(Z_1) : a' + b' + c'$, $f_*(Z_2) : 3d'$ i $f_*(Z_3) : 2g' + h'$; i aquests si que són racionalment equivalents en X .

Pullback.

A continuació ens fixarem en el pullback de cicles. Sigui $f : Y \rightarrow X$ un morfisme, i sigui $B \subset X$ una subvarietat de codimensió c . Un bon pullback $f^* : Z(X) \rightarrow Z(Y)$ en els cicles ha de preservar la equivalència racional. Comencem donant una definició:

Definició 7.17. *Sigui $f : Y \rightarrow X$ un morfisme de varietats llises. Direm que una subvarietat $B \subset X$ és genèricament transversal a f si la preimatge $f^{-1}(A)$ és íntegra i $\text{codim}_Y(f^{-1}(B)) = \text{codim}_X(A)$.*

Amb això, tenim el següent teorema:

Teorema 7.18. *Sigui $f : Y \rightarrow X$ un morfisme de varietats quasiprojectives llises.*

(a) *Existeix un únic morfisme de grups $f^* : Ch^c(X) \rightarrow Ch^c(Y)$ tal que per tota subvarietat $B \subset X$ genèricament transversal a f , es té que*

$$f^*([B]) = [f^{-1}(B)].$$

(b) *(fórmula de projecció) El morfisme $f_* : Ch(Y) \rightarrow Ch(X)$ és un morfisme de mòduls graduats sobre l'anell graduat $Ch(X)$. Més explícitament, si $\alpha \in Ch^k(X)$ i $\beta \in Ch_l(Y)$, llavors*

$$f_*(f^*(\alpha) \cdot \beta) = \alpha \cdot f_*(\beta) \in Ch_{l-k}(X).$$

Finalment, enunciaré un parell de resultats que ens ajudaran a tractar l'anell de Chow del blowup. Si posem la següent notació en el diagrama del blowup,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & Bl_V \mathbb{P}^5 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ V & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^5 \end{array}$$

Llavors, tenim els següents resultats sobre l'anell de Chow del blowup:

Proposició 7.19. *L'anell de Chow $Ch(Bl_V \mathbb{P}^5)$ està generat per $\pi^*(Ch(\mathbb{P}^5))$ i $j_*(Ch(E))$.*

7.4 Anell de Chow de \mathbb{A}^n .

Com a exemple d'anell de Chow, abans de passar a estudiar el cas que a nosaltres ens interessa, descriurem l'anell de Chow de \mathbb{A}^n que ens servirà per construir el de \mathbb{P}^n .

Proposició 7.20. $Ch(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{A}^n]$.

Prova. Sigui $Y \subsetneq \mathbb{A}^n$ una subvarietat pròpia, i triem coordenades $z = z_1, \dots, z_n$ en \mathbb{A}^n de manera que l'origen no pertanyi a Y . Considerem

$$\begin{aligned} W^\circ &= \{(t, tz) \in (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^n \mid z \in Y\} \\ &= V(\{f(\frac{z}{t}) \mid f(z) \text{ s'anul·la en } Y\}). \end{aligned}$$

Si mirem la fibra de W° sobre un punt $t \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ aquesta és $t \cdot Y$, és a dir, és la imatge de Y per l'automorfisme de \mathbb{A}^n de multiplicar per t .

Sigui $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n$ la clausura de W° en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n$. Observem que W° és la imatge de $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times Y$ i per tant, és irreductible, llavors, també ho serà W . La fibra W sobre el punt $t = 1$ és exactament Y . Per altra banda, com l'origen en \mathbb{A}^n no pertany a Y hi ha algun polinomi $g(z)$ que s'anul·la en Y i té terme independent no nul. Llavors, $G(t, z) = g(\frac{z}{t})$ en $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^n$ s'estén a una funció regular en $(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^n$ amb valor constant (el terme independent de g), en la fibra $\infty \times \mathbb{A}^n$. Per tant, la fibra de W sobre $t = \infty \in \mathbb{P}^1$ és buida, això estableix l'equivalència $Y \sim_{rac} 0$. \square

7.5 Anell de Chow de \mathbb{P}^n .

Recordem que hem vist que els hiperplans en \mathbb{P}^n són racionalment equivalents entre si, mitjançant el dual de la intersecció. A raó d'això em deixat obertes certes preguntes.

Per exemple, en un \mathbb{P}^3 dues rectes no tenen perquè tallar-se, per tant, no té sentit considerar la seva intersecció, i no podem repetir el raonament que hem fet per hiperplans. Si vulguéssim veure que dues rectes l_1 i l_2 en \mathbb{P}^n , que no es tallin, són racionalment equivalents, per exemple, podríem raonar de la següent manera: siguin $p \in l_1$ i $q \in l_2$, considerem la recta $l : p \vee q$, que tallarà a l_1 i l_2 . Com que l i l_1 es tallen, formen un pla, per tant, si les mirem en aquest pla són racionalment equivalents. El mateix passarà per l_2 , i llavors, $l \sim_{rac} l_2$. Ara com l'equivalència racional és una relació d'equivalència, tenim que $l_1 \sim_{rac} l_2$.

Observem ara que si considerem dues varietats de la mateixa dimensió però de diferent grau, és clar no seran racionalment equivalents ja que hem vist que l'equivalència racional conserva les propietats d'intersecció. Per exemple, si en \mathbb{P}^2 tenim la recta $l_1 : \{x = 0\}$ i la recta doble $l_2 : \{z^2 = 0\}$, per veure que no poden ser racionalment equivalents considerem $l_3 : \{y = 0\}$, l_3 interseca transversalment amb l_1 i l_2 ; per tant mitjançant Bézout tenim que

$$\#\{p \in l_1 \cap l_3\} = 1 \cdot 1 \neq 2 \cdot 1 = \#\{p \in l_2 \cap l_3\},$$

és a dir, que no poden ser racionalment equivalents.

Podríem seguir fent raonaments d'aquest tipus per acabar de respondre totes les preguntes, però construïm el grup de Chow de \mathbb{P}^n mitjançant el grup de Chow de \mathbb{A}^n i la proposició 7.11.

Teorema 7.21. *L'anell de Chow de \mathbb{P}^n és*

$$Ch(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[A]/(A^{n+1}),$$

on $A \in Ch^1(\mathbb{P}^n)$ és la classe d'equivalència racional d'un hiperplà.

El teorema ens diu que $Ch^k(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ per $0 \leq k \leq n$, generat per la classe d'una varietat lineal de codim k .

Demostració. Ho veurem per inducció.

El cas inicial $Ch(\mathbb{P}^1)$, ja hem vist que els punts són racionalment equivalents. Per tant, tenim que $Ch(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}[p]$ on $[p]$ és la classe d'un punt.

Suposem-ho cert per $n - 1$ i vegem-ho per n . Considerem la successió exacta de la proposició 7.11 graduada

$$Ch_k(\mathbb{P}^{n-1}) \longrightarrow Ch_k(\mathbb{P}^n) \longrightarrow Ch_k(\overbrace{\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}}^{\mathbb{A}^n}) \longrightarrow 0.$$

Si $k = n$ tenim que $Ch_n(\mathbb{P}^{n-1}) = 0$, ja que en \mathbb{P}^{n-1} no hi ha subvarietats lineals de dimensió n . I per tant, $Ch_n(\mathbb{P}^n) = Ch_n(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Z}$.

Si $k \leq n - 1$, llavors el que és zero és $Ch(\mathbb{A}^n)$. Ara tenim que

$$Ch_k(\mathbb{P}^{n-1}) \hookrightarrow Ch_k(\mathbb{P}^n)$$

és exhaustiva. Per veure la injectivitat, com que és el morfisme d'inclusió a \mathbb{P}^n de cicles, si la imatge d'un cicle Z és racionalment equivalent a 0, llavors, $Z \sim_{rac} 0$. Per tant, el morfisme d'inclusió és isomorfisme i tenim que $Ch_k(\mathbb{P}^n) = Ch_k(\mathbb{P}^{n-1})$.

És a dir, hem vist que $Ch(\mathbb{P}^n) = Ch(\mathbb{P}^{n-1}) \oplus \mathbb{Z}A$, on $A \subset \mathbb{P}^n$ és la classe d'un hiperplà.

□

Per tant, resumint tenim la següent proposició

Proposició 7.22. *Sigui $X \subset \mathbb{P}^n$ varietat irreductible de codimensió k i grau d . Si L és una varietat lineal de codimensió k i A un hiperplà, aleshores,*

$$X \sim_{rac} d \cdot L \sim_{rac} d \cdot A^k$$

7.6 Anell de Chow del Blowup $Bl_V \mathbb{P}^5$.

Hem vist com és l'anell de Chow de \mathbb{P}^5 , però nosaltres volem fer els càlculs en el blowup. Per tant, ara estudiarem a partir de l'anell de Chow de \mathbb{P}^5 , l'anell de Chow de $Bl_V \mathbb{P}^5$. Ho farem mitjançant el morfisme de projecció o blowdown

$$\pi : Bl_V \mathbb{P}^5 \longrightarrow \mathbb{P}^5.$$

Observem que, per resoldre el problema d'Steiner, hem de fer un càlcul molt concret, en el que només hem de saber com funciona $\langle \pi^*(H), E \rangle \subset Ch(Bl_V \mathbb{P}^5)$, on H és un hiperplà de \mathbb{P}^5 . No necessitem tot l'anell de Chow, per tant, només estudiarem la part que ens interessa.

Primer de tot, considerem un hiperplà H de \mathbb{P}^5 que no contingui la superfície de Veronese, V . Com que no conté a V : $\pi^{-1}(H) = \tilde{H}$ ($= \pi^{-1}(H \setminus V)$ la transformada estricta). Prendrem la classe de \tilde{H} com un generador de l'anell de Chow del $Bl_V \mathbb{P}^5$. Ara si Y és una hipersuperfície de grau d en \mathbb{P}^5 tenim que $[\pi^{-1}(Y)] = d[\tilde{H}]$.

El divisor excepcional no es equivalent a $d[\tilde{H}]$, per a cap d , ja que tenim que $\dim(E) < \dim(\pi(E))$, llavors per definició del pushforward de cicles tenim que

$\pi_*([E]) = 0$ i $0 \neq d[H]$. Per la proposició 7.19 el divisor excepcional representa una nova classe de l'anell de Chow, $[E]$ i serà l'únic nou generador de l'anell de Chow. Per tant, qualsevol hipersuperfície en $Bl_V \mathbb{P}^5$ vindrà representada per la classe

$$m[\tilde{H}] + n[E].$$

Sigui Y una hipersuperfície general de grau d en \mathbb{P}^5 que contingui la superfície de Veronese. Aleshores,

$$[\pi^{-1}(Y)] = [\tilde{Y}] + n[E]$$

per algun n , per tant,

$$[\tilde{Y}] = d[\tilde{H}] - n[E].$$

A continuació ens interessarà calcular l'enter n de l'equació anterior. Aquest enter representarà "quant" $\pi^{-1}(Y)$ conté E .

Definició 7.23. Donada una funció F , direm que aquesta funció s'anul·la amb ordre n al llarg d'una varietat Z , si F i totes les seves derivades parcials d'ordre menor que n s'anul·len arreu de Z , i no totes les d'ordre n ho fan.

Exemple 7.24. $F = (x - 3y)^2$ s'anul·la amb ordre 2 al llarg de la línia $l : x - 3y = 0$ ja que $F, F_x = 2(x - 3y), F_y = -6(x - 3y)$ s'anul·len totes en l mentre que $F_{xx} = 2$ no ho fa.

Ara, com que Y és una hipersuperfície en \mathbb{P}^5 , està definida per una equació polinòmica $P_Y = 0$. La seva imatge inversa $\pi^{-1}(Y)$ estarà definida per $P_Y \circ \pi = 0$. L'enter n que busquem és l'ordre d'anul·lació del polinomi $P_Y \circ \pi$ al llarg d' E . Afortunadament, tenim que coincideix amb l'ordre d'anul·lació de P_Y al llarg de $V = \pi(E)$.

Lema 7.25. $ord_E(P_Y \circ \pi) = ord_{\pi(E)}(P_Y)$.

Idea de la prova. És clar que tenim \geq , ja que si les derivades d'ordre k de P_Y s'anul·len, llavors al compondre amb π també.

Considerant coordenades locals veurem que es dona la igualtat.

Considerem V com una subvarietat de \mathbb{C}^5 , $V = V(F_1, \dots, F_k)$. Com que V és no singular tenim que la matriu de Jacobi té rang màxim

$$rg \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right) = \text{codim}(V).$$

Aleshores, pel Teorema de la funció implícita tenim que per tot $p \in V$, existeix un entorn obert U de p en V tal que, en U la varietat és de la forma $(0, 0, 0, f_1, f_2)$. És a dir, que pel T.F.I. treballant localment V és $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ i ve donat per les variables z_4, z_5 . Fixem-nos ara en el blowup, també localment. Tenim que

$$B = \{((z_1, z_2, z_3, z_4, z_5), (y_1, y_2, y_3)) \mid y_1 z_2 = y_2 z_1, y_1 z_3 = y_3 z_1, y_2 z_3 = y_3 z_2\} \subset U \times \mathbb{P}^2$$

Si estem fora de U tenim que la antiimatge del morfisme de projecció sobre la primera component està completament determinada. En canvi, si considerem un

punt de U , serà de la forma $(0, 0, 0, z_4, z_5)$, la antiimatge serà $(0, 0, 0, z_4, z_5) \times \mathbb{P}^2$, és a dir, isomorfa a un \mathbb{P}^2 .

Ara estudiarem el resultat per cartes de \mathbb{P}^2 , observem que hi ha tres cartes, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ i $y_3 \neq 0$. Si considerem la carta de \mathbb{P}^2 , $y_1 \neq 0$, per tant podem suposar que $y_1 = 1$; en cada carta obtindrem el mateix. Tenim doncs que les equacions de B es reduiran a

$$z_2 = y_2 z_1 \quad z_3 = y_3 z_1$$

i per tant, el blowup serà els punts

$$\left((z_1, y_2 z_1, y_3 z_1, z_4, z_5), \overbrace{(y_2, y_3)}^{\mathbb{C}^2} \right)$$

Fixem-nos ara que el divisor excepcional, E en $U \times \mathbb{C}^2$, correspon a fer $z_1 = 0$.

Comprovem ara que si $H \subset \mathbb{P}^5$ és una hipersuperfície

$$\text{ord}_V(H) = \text{ord}_E(H \circ \pi)$$

on π denota la projecció del blowup en la primera component.

Com que $H \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_5] = (\mathbb{C}[z_4, z_5])[z_1, z_2, z_3]$ el podem escriure com

$$H = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i+j+k=m} H_{ijk}(z_4, z_5) z_1^i z_2^j z_3^k \right)$$

on $H_{000} = 0$ ja que H s'anul·la al llarg de V . Llavors, si definim l'ordre com l'enter m tal que $\forall i, j, k$ amb $i+j+k < m$ es té que $H_{ijk} = 0$ i $\exists i_0, j_0, k_0$ amb $i_0+j_0+k_0 = m$ tal que $H_{i_0 j_0 k_0} \neq 0$; tenim que aquesta definició i la de les derivades parcials són equivalents, i per tant

$$\text{ord}_V(H) = m.$$

Composant amb π obtenim

$$H \circ \pi = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{i+j+k=m} H_{ijk}(z_4, z_5) z_1^i y_2^j y_3^k \right)$$

per tant, demanar que l'ordre d'anul·lació de $H \circ \pi$ sobre E sigui m , com E el divisor excepcional és fer $z_1 = 0$, és dir que en el polinomi $i = m$. Per tant, els ordres coincideixen. \square

O sigui, l'enter n que busquem, és l'enter més gran tal que P_Y i totes les derivades parcials de fins a ordre $n - 1$ s'anul·lin en V i no totes les d'ordre n .

8 Solució del problema d'Steiner

Busquem ara les transformades estrictes que necessitem per resoldre els nostres problema d'enumeració.

Sigui p un punt del pla, podem trobar rectes que no passin per aquest punt i, per tant, rectes dobles que no hi passin, llavors, l'hiperplà H_p de còniques per p no conté la superfície de Veronese. A més a més, si $p = [p_0 : p_1 : p_2]$, la condició que ha de satisfer una cònica, $ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$, per passar per p és

$$ap_0^2 + bp_0p_1 + cp_1^2 + dp_0p_2 + ep_1p_2 + fp_2^2 = 0,$$

aquesta equació lineal en els coeficients de la cònica definirà la hipersuperfície H_p , que tindrà grau 1. Per tant,

$$[\widetilde{H}_p] = [\widetilde{H}].$$

Sigui l una recta, per exemple fixant una referència podem pensar que és $x = 0$. Tenim que com dues rectes en \mathbb{P}^2 es tallen, aleshores tota recta doble tallarà l , i per tant, la hipersuperfície H_l de còniques tangents a la recta l contindrà a V .

Donada una cònica,

$$ax^2 + cy^2 + fz^2 + bxy + dxz + eyz = 0$$

si la intersequem amb l obtenim,

$$cy^2 + fz^2 + eyz = 0$$

que tindrà dues solucions. Si volem que la cònica sigui tangent a l hem de demanar que la solució sigui doble, i per tant que,

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2c & e \\ e & 2f \end{pmatrix} = 4cf - e^2.$$

Obtenim doncs, que l'equació $4cf - e^2 = 0$ defineix la hipersuperfície H_l , de manera que H_l té grau 2.

Calculem ara $ord_V(4cf - e^2)$. Com hem observat en el raonament anterior (dues rectes en el pla projectiu es tallen i, per tant, H_l contindrà V), tenim que l'equació que defineix H_l s'anul·la al llarg de V ja que és una de les equacions que defineixen la superfície de Veronese. Ara com que per $q = [0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1] \in V$,

$$\frac{\partial}{\partial e}(4cf - e^2)|_q = -2 \neq 0,$$

tenim que, $ord_V(4cf - e^2) = 1$. Per tant, tenim que

$$[\widetilde{H}_l] = 2[\widetilde{H}] - [E].$$

Estudiarem ara, la hipersuperfície H_Q de còniques tangents a una cònica Q . Fixant una referència com en la figura 9, podem pensar que Q és $xz = y^2$, i per

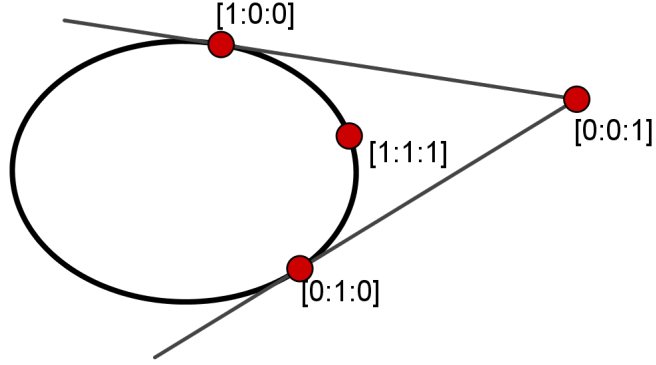


Figura 9: Referència cònica $xz = y^2$.

tant els punts de Q poden ser parametritzats per $[s^2 : st : t^2]$, amb $[s : t] \in \mathbb{P}^1$. Si intersequem la nostra cònica Q amb una cònica qualsevol, $ax^2 + cy^2 + fz^2 + bxy + dxz + eyz = 0$, obtenim

$$as^4 + cs^2t^2 + ft^4 + bs^3t + ds^2t^2 + est^3 = 0$$

com que o bé $s \neq 0$ o bé $t \neq 0$, podem suposar que $t = 1$ i, per tant, obtenim la següent equació,

$$as^4 + bs^3 + (d+c)s^2 + es + f = 0,$$

la denotarem F . Les solucions de l'equació $F = 0$, seran els punts de tall entre una cònica arbitrària i Q . Per tant, demanar que les dues còniques siguin tangents, és demanar que F tingui una arrel doble, i.e. que la resultant de $F = as^4 + bs^3 + (d+c)s^2 + es + f$ i $F' = 4as^3 + 3bs^2 + 2(d+c)s + e$, sigui 0. Calculem la resultat,

$$Res(F, F') = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 4a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 3b & 4a & 0 & 0 \\ (d+c) & b & a & 2(d+c) & 3b & 4a & 0 \\ e & (d+c) & b & e & 2(d+c) & 3b & 4a \\ f & e & (d+c) & 0 & e & 2(d+c) & 3b \\ 0 & f & e & 0 & 0 & e & 2(d+c) \\ 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix} =$$

$$= a(b^2c^2e^2 - 4ac^3e^2 + 2b^2cde^2 - 12ac^2de^2 + b^2d^2e^2 - 12acd^2e^2 - 4ad^3e^2 - 4b^3e^3 + 18abce^3 + 18abde^3 - 27a^2e^4 - 4b^2c^3f + 16ac^4f - 12b^2c^2df + 64ac^3df - 12b^2cd^2f + 96ac^2d^2f - 4b^2d^3f + 64acd^3f + 16ad^4f + 18b^3cef - 80abc^2ef + 18b^3def - 160abcdef - 80abd^2ef - 6ab^2e^2f + 144a^2ce^2f + 144a^2de^2f - 27b^4f^2 + 144ab^2cf^2 - 128a^2c^2f^2 + 144ab^2df^2 - 256a^2cdf^2 - 128a^2d^2f^2 - 192a^2bef^2 + 256a^3f^3).$$

Per tant, com $a \neq 0$ i volem que $Res(F, F') = 0$ obtenim la següent equació que

defineix H_Q

$$\begin{aligned}
& b^2c^2e^2 - 4ac^3e^2 + 2b^2cde^2 - 12ac^2de^2 + b^2d^2e^2 - 12acd^2e^2 - 4ad^3e^2 - \\
& -4b^3e^3 + 18abce^3 + 18abde^3 - 27a^2e^4 - 4b^2c^3f + 16ac^4f - 12b^2c^2df + \\
& +64ac^3df - 12b^2cd^2f + 96ac^2d^2f - 4b^2d^3f + 64acd^3f + 16ad^4f + \\
& +18b^3cef - 80abc^2ef + 18b^3def - 160abcdef - 80abd^2ef - 6ab^2e^2f + \\
& +144a^2ce^2f + 144a^2de^2f - 27b^4f^2 + 144ab^2cf^2 - 128a^2c^2f^2 + \\
& +144ab^2df^2 - 256a^2cdf^2 - 128a^2d^2f^2 - 192a^2bef^2 + 256a^3f^3 = 0,
\end{aligned}$$

llavors, H_Q té grau 6.

Si la equació anterior la denotem amb F_Q i considerem un punt de V , $p = [A : 2AB : B^2 : 2AC : 2BC : C^2]$, es té que

$$F_Q(p) = 0,$$

i per tant, la equació que defineix H_Q s'anul·la al llarg de V ; hem de calcular l'ordre d'anul·lació. Si calculem les derivades parcials d'ordre 1, i les avaluem en $p = [A : 2AB : B^2 : 2AC : 2BC : C^2]$, obtenim que totes elles s'anul·len,

$$\frac{\partial}{\partial a}(F_Q)|_p = \dots = \frac{\partial}{\partial f}(F_Q)|_p = 0,$$

i.e. $ord_V(F_Q) \geq 1$. Si mirem ara les derivades d'ordre 2, tenim que

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}(F_Q) = -54e^4 + 288ce^2f + 288de^2f - 256c^2f^2 - 512cdf^2 - 256d^2f^2 - 384bef^2 + 1536af^3;$$

que, considerant el punt $q = [0 : 0 : 1 : 0 : 2 : 1] \in V$, tenim que

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}(F_Q)|_q = (32B^4C^4 - 256AB^2C^5 + 512A^2C^6)|_q = 32 \neq 0.$$

Per tant, $ord_V(F_Q) = 2$. I llavors, la transformada estricta, es pot escriure com

$$[\widetilde{H}_Q] = 6[\widetilde{H}] - 2[E].$$

A continuació, intersecarem les transformades estrictes en el blowup lliures de les rectes dobles, ho farem mitjançant un càlcul en l'anell de Chow del blowup, trobant la resposta al problema d'Steiner. Hem vist que les nostres transformades estrictes es poden expressar com les tenim totes en termes de $[\widetilde{H}]$ i $[E]$, per tant, si

$$\begin{aligned}
[\widetilde{H}_p] &= [\widetilde{H}], \\
[\widetilde{H}_l] &= 2[\widetilde{H}] - [E], \\
\text{i } [\widetilde{H}_Q] &= 6[\widetilde{H}] - 2[E].
\end{aligned} \tag{8.1}$$

sabem com intersequen aquestes dues entre elles haurem acabat. Però, si ens fixem, podem reescriure-ho tot en termes de $[\widetilde{H}_p]$ i $[\widetilde{H}_l]$ i amb això guanyem que la feina

de saber com intersequen aquestes hipersuperfícies ja l'hem feta en el capítol 4. Recordem que hem resolt qüestions com: “*Quantes còniques passen per tres punts i són tangents a dues rectes?*”.

A continuació, podem resumir les qüestions resoltes en el capítol 4 amb la notació de l'anell de Chow del blowup. Hem vist que el nombre de cònique que passen per cinc punts o son tangents a cinc rectes és una, i.e. en la notació de l'anell de Chow

$$[\tilde{H}_p]^5 = [\tilde{H}_l]^5 = 1[p];$$

el nombre que passen per 4 punts i són tangents a una recta és 2 (igual que el seu dual),

$$[\tilde{H}_p]^4[\tilde{H}_l] = [\tilde{H}_p][\tilde{H}_l]^4 = 2[p]$$

i el de còniques per 3 punts i tangents a 2 rectes és 4 (com el de la situació dual),

$$[\tilde{H}_p]^3[\tilde{H}_l]^2 = [\tilde{H}_p]^2[\tilde{H}_l]^3 = 4[p];$$

on $[p]$ denota la classe d'un punt en l'anell de Chow del blowup.

A partir de les equacions (8.1) podem reescriure $[\tilde{H}_Q]$ i obtenim

$$[\tilde{H}_Q] = 6[\tilde{H}] - 2[E] = 2[\tilde{H}_l] + 2[\tilde{H}_p].$$

La resposta al problema d'Steiner “*Donades cinc còniques en posició general, quin és el nombre de còniques tangents a aquestes?*”, és

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_Q]^5 &= (2[\tilde{H}_l] + 2[\tilde{H}_p])^5 = \\ &= 32([\tilde{H}_p]^5 + 5[\tilde{H}_p]^4[\tilde{H}_l] + 10[\tilde{H}_l]^3[\tilde{H}_p]^2 + \\ &\quad + 10[\tilde{H}_l]^2[\tilde{H}_p]^3 + 5[\tilde{H}_p][\tilde{H}_l]^4 + [\tilde{H}_l]^5) = \\ &= 32(1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1) = \\ &= 3264. \end{aligned}$$

(Notem que en les dues últimes línies hem fet un abús de notació: els nombres que hem posat representen múltiples de la classe d'un punt en l'anell de Chow). De forma similar, per cada tria de c , l i c satisfent $p + l + c = 5$, podem obtenir la resposta a la pregunta “*Quantes còniques passen per p punts i són tangents a l línies i a c còniques en posició general?*”. La taula 3 conté els resultats.

	0	1	2	3	4	5
0	3264	816	184	36	6	1
1	816	224	56	16	2	
2	184	56	16	4		
3	36	12	4			
4	6	2				
5	1					

Taula 3: Nombre de còniques per p punts, tangents a l rectes i tangents a $5 - p - l$ còniques en posició general.

9 Transversalitat de les transformades estrictes.

Com podem assegurar que fent els càlculs en el grup de Chow obtindrem el nombre correcte, quan una tècnica similar (una aplicació ingènua del teorema de Bézout) falla en \mathbb{P}^5 ? Volem arribar a justificar que realment, quan considerem les transformades estrictes, estem eliminant l'excés d'intersecció, i.e. que les hipersuperfícies H_Q es tallaran transversalment.

Per provar, que els cicles H_{Q_i} és tallen transversalment, quan les còniques Q_1, \dots, Q_5 són generals, necessitarem una descripció dels espais tangents en els punts d'intersecció dels H_{Q_i} .

Lema 9.1. *Sigui Q una cònica llisa de \mathbb{P}^2 , i sigui l'obert de Zariski $H_Q^\circ \subset H_Q \subset \mathbb{P}^5$ la varietat de les còniques llises C tangents a Q .*

- (a) *Si C té un punt p de tangència amb Q i en els altres punts es tallen transversalment, llavors, H_Q° és llisa en $[C]$ i $[C] \in H_Q^\circ$.*
- (b) *En aquest cas, el pla tangent $T_{[C]}H_Q^\circ$ a H_Q° és l'hiperplà $H_p \subset \mathbb{P}^5$ de les còniques passant per p .*

Prova. Fixant una referència podem pensar que $Q : y^2 = xz$, i que els seus punts estan parametritzats per $[s^2 : st : t^2]$ amb no t i s els dos nuls. Podem fixar el nostre punt $p = [1 : 0 : 0]$. La nostra cònica C ha de passar per p amb tangent $z = 0$, i.e. la matriu de C ha de ser de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 2b & e \\ d & e & 2f \end{pmatrix}$$

C ha de ser no degenerada, per tant, això ens diu que $c \neq 0$ i $d \neq 0$; a més a més, fora de p , ha de tallar a Q en punts simples, és a dir, que si tenim un punt

$q = [s^2 : st : t^2] \in Q$, diferent de p , tal que

$$cs^2t^2 + ft^4 + ds^2t^2 + est^3 = 0$$

com $q \neq p$, tenim que $t \neq 0$ i podem suposar que $t = 1$, per tant,

$$(c + d)s^2 + es + f = 0,$$

com q ha de ser un zero simple, tenim que el discriminant de la equació anterior ha de ser no nul,

$$e^2 - 4(c + d)f \neq 0.$$

Amb tot això, C com a punt de \mathbb{P}^5 és $[0 : 0 : c : d : e : f]$, amb c i d diferents de 0. Recordem que en el capítol 8, hem vist que H_Q estava definit pel polinomi

$$\begin{aligned} F_Q = & b^2c^2e^2 - 4ac^3e^2 + 2b^2cde^2 - 12ac^2de^2 + b^2d^2e^2 - 12acd^2e^2 - 4ad^3e^2 - \\ & - 4b^3e^3 + 18abce^3 + 18abde^3 - 27a^2e^4 - 4b^2c^3f + 16ac^4f - 12b^2c^2df + \\ & + 64ac^3df - 12b^2cd^2f + 96ac^2d^2f - 4b^2d^3f + 64acd^3f + 16ad^4f + \\ & + 18b^3cef - 80abc^2ef + 18b^3def - 160abcdef - 80abd^2ef - 6ab^2e^2f + \\ & + 144a^2ce^2f + 144a^2de^2f - 27b^4f^2 + 144ab^2cf^2 - 128a^2c^2f^2 + \\ & + 144ab^2df^2 - 256a^2cdf^2 - 128a^2d^2f^2 - 192a^2bef^2 + 256a^3f^3; \end{aligned}$$

per tant, si ara calculem el seu gradient i avaluem en C obtenim

$$\begin{aligned} \nabla(F_Q)|_C &= \left(\frac{\partial}{\partial a}(F), \frac{\partial}{\partial b}(F), \frac{\partial}{\partial c}(F), \frac{\partial}{\partial d}(F), \frac{\partial}{\partial e}(F), \frac{\partial}{\partial f}(F) \right) \Big|_{[a:0:0:d:e:f]} = \\ &= (4(c + d)(-e^2 + 4f(c + d)), 0, 0, 0, 0, 0) \neq 0; \end{aligned}$$

i.e. l'hipersuperfície H_Q° és no singular en $[C]$, es té que $a = 0$ és l'hiperplà de les còniques per $[1 : 0 : 0 : 0 : 0]$, H_p . □

Ara veurem una altra propietat sobre còniques tangents a cinc còniques:

Lema 9.2. *Siguin $Q_1, \dots, Q_5 \subset \mathbb{P}^2$ còniques generals, i sigui $C \subset \mathbb{P}^2$ una cònica no degenerada tangent a les cinc. Es té que cada cònica Q_i és tangent a C en un punt p_i , i en els altres talls amb C són transversals; i els punts $p_i \in C$ són diferents.*

Prova. Sigui U el subconjunt de les còniques no degenerades i considerem la correspondència d'incidència

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(Q_1, \dots, Q_5; C) \in U^5 \times U \mid \text{cada } Q_i \text{ tangent a } C\} \\ &\subset \Phi' = \{(Q_1, \dots, Q_5; C) \in (\mathbb{P}^5)^5 \times U \mid \text{cada } Q_i \text{ tangent a } C\} \end{aligned}$$

El subconjunt Ψ és un obert del conjunt Ψ' . Com U és irreductible de dimensió 5 i el morfisme de projecció en l'últim factor, $\psi' \rightarrow U$, té fibres irreductibles $(H_C^\circ)^5$ de dimensió 20, tenim que Ψ' , i també Ψ , és irreductible de dimensió 25.

Certament, hi ha punts en Ψ en els que les condicions del lema se satisfan: triem C una cònica i cinc còniques generals Q_i tangents a aquesta. Llavors el conjunt dels $(Q_1, \dots, Q_5; C) \in \Psi$ que no verifiquen les condicions del lema és un subconjunt tancat propi, i per tant, pot tenir com a molt dimensió 24, i no pot dominar tot el U^5 quan el projectem en el primer factor.

Amb això queda provat el lema. □

Per acabar l'argument de transversalitat, sigui $[C] \in H_{Q_i}^\circ$ un punt corresponent a una cònica $C \subset \mathbb{P}^2$. Pel lema 9.2 els punts p_i de tangència de C amb Q_i són punts diferents de C . Com C és la única cònica per aquests cinc punts, la intersecció dels espais tangents a $H_{Q_i}^\circ$ en $[C]$

$$\bigcap_{i=1}^5 T_{[C]} H_{Q_i}^\circ = \bigcap_{i=1}^5 H_{p_i} = \{[C]\}$$

que és de dimensió zero, això prova la transversalitat.

10 Conclusions

La resolució del problema d'Steiner posà de manifest la necessitat de fonamentar millor la teoria d'intersecció i revisar tots els resultats trobats fins al moment. Per mostrar aquest fet adjuntarem la taula 4 que conté una llista del nombre de còniques que passen per p punts, són tangents a l rectes i són tangents a c còniques. Es pot veure la clara discrepància entre el nombre que s'esperava que dones mitjançant un raonament ingenu amb el teorema de Bézout i el nombre actual de còniques que satisfan les condicions.

p	l	c	Nombre esperat	Nombre actual
5	0	0	1	1
4	1	0	2	2
3	2	0	4	4
2	3	0	8	4
1	4	0	16	2
0	5	0	32	1
4	0	1	6	6
3	0	2	36	36
2	0	3	216	184
1	0	4	1296	880
0	4	1	96	6
0	3	2	288	36
0	2	3	864	184
0	1	4	2592	880
1	1	3	432	224
2	1	2	72	56
3	1	1	12	12
1	3	1	48	12
2	2	1	24	16
1	2	2	144	56
0	0	5	7776	3264

Taula 4: Solucions a variacions del problema d'Steiner.

Aquest projecte m'ha permès seguir al llarg de la “història” un problema. Començant amb la seva proposta per Jacob Steiner, en el 1848, i les primeres respostes errònies: 7776. Amb el fonament de la teoria que va venir després, hem pogut veure perquè aquells raonaments fallaven. Els primers conceptes en definir-se van ser el teorema de Bézout i les hipersuperfícies, després el blowup i finalment la teoria de l'anell de Chow que és la que, en aquest treball, ha permès arribar a la resposta correcta: 3264.

A més a més, tot el que hem anat veient al llarg del treball tenia un objectiu, les eines que hem anat desenvolupant ens han servit per arribar a resoldre el problema d'Steiner. Això ha sigut força satisfactori, en el sentit que l'estudi de cada una de les pàgines que formen el treball eren necessàries si no ens volíem quedar sense el

resultat final.

També m'ha ajudat a introduir-me una mica més en la geometria algebraica. Una branca de les matemàtiques que des d'un principi em va cridar l'atenció. En la que he pogut adquirir nous punts de vista i nous coneixements. I m'ha descobert, també, el món de la geometria numerativa amb el que he disfrutat al llarg de tot el treball.

Referències

- [1] Kleiman, S.L. *Chasles's enumerative theory of conics. A historical introduction.*, Studies in Math. 20, M.A.A.,1980.
- [2] Harris, Joe. *Algebraic Geometry.* New York:Spriner-Verlag, 1992.
- [3] Bashelor, Andrew C. *Enumerative algebraic geometry: counting conics.* Trident Scholar Project Report, no. 330, United States Naval Academy, Annapolis, MD, 2005.
- [4] Bashelor, Andrew C.; Ksir, Amy; Traves, Will. *Enumerative algebraic geometry of conics.* Mathematical Association of America, October 2008.
- [5] Eisenbud, David; Harris, Joe. *3264 & All That. Intersection Theory in Algebraic Geometry* Cambridge: Cambridge University Press, 2016.