

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

**ITERACIÓ DE FUNCIONS
HOLOMORFES DEL PLA
COMPLEX**

Autor: Pol Casellas La Rosa

Director: Dra. Núria Fagella
Realitzat a: Departament
de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 29 de juny de 2017

Abstract

Riemann theorem and its applications in the complex dynamic systems are studied in this final degree project. In this work we will prove that the complementary of Julia set together with the complementary of Mandelbrot set are conformally equivalent with the external of the unitary disc. Although the boundary of these sets is highly fractal, using the function dynamics, we are going to express practically in an explicit way the Riemann conformal map.

Resum

En aquest treball final de grau s'estudia el Teorema de Riemann i les seves aplicacions als sistemes dinàmics complexos. Al llarg d'aquest projecte demostrarem que els complementaris dels conjunts de Julia i del conjunt de Mandelbrot són conformement equivalents a l'exterior del disc unitat. Tot i que la frontera d'aquests conjunts és altament fractal, mitjançant la dinàmica de les funcions, expressarem de forma pràcticament explícita la transformació conforme de Riemann.

Agraïments

L'elaboració d'aquest treball ha estat possible gràcies a l'ajuda i el suport de diverses persones; a totes elles gràcies. En particular:

M'agradaria donar les gràcies a la Núria Fagella, la tutora del meu treball, qui m'ha acompanyat en aquest bonic viatge al món de la dinàmica complexa i m'ha ajudat sempre que ho he necessitat.

Tot el que tinc els hi dec als meus pares i a la meva germana petita Laia, sense vosaltres res hagués estat possible.

Vull agrair a l'Ariadna per estar sempre al meu costat i donar-me sempre el seu suport, fins i tot quan les coses no sortien tal i com esperava.

Un paper molt rellevant durant aquesta etapa l'han tingut tots aquells companys de classe amb els quals he compartit hores d'estudi, dubtes, problemes, estrès... però també alegries i riures. A tots ells, moltes gràcies i ànims.

També m'agradaria recordar tots i cada un dels matemàtics que he tingut com professors al llarg de la meua vida i que a part dels seus valuosos coneixements, m'han transmès la seva passió per a les matemàtiques.

Finalment, donar les gràcies als amics de tota la vida i als companys de pis per confiar incondicionalment en mi com a matemàtic.

Índex

1	Introducció	1
2	Preliminars	4
2.1	Resultats d'anàlisi complexa	4
2.2	L'esfera de Riemann	7
2.3	Funcions de Green	8
3	Representació conforme	10
3.1	Transformacions de Möbius	10
3.2	Automorfismes conformes	13
3.3	Teorema de Riemann	14
4	Iteració al pla complex	18
4.1	Introducció	18
4.2	Teoria local	18
4.3	Teoria global	26
4.4	Polinomis	31
4.5	Pla de paràmetres de la família quadràtica: El conjunt de Mandelbrot	40
5	Bibliografia	47
I	Annex: Programes per a construir imatges	48

1 Introducció

Els nombres complexos neixen de la necessitat de trobar una extensió algebraicament tancada dels nombres reals, quan al segle XVI matemàtics com Tartaglia o Cardano van trobar fórmules explícites per a resoldre equacions de segon i tercer grau.

Per estudiar les funcions en el pla complex, als voltants del segle XIX neix l'anàlisi complexa, una branca de les matemàtiques que investiga principalment les funcions holomorfes o analítiques. Aquestes funcions estan definides en un subconjunt obert del pla complex, prenen valors en el mateix pla i són diferenciables en cada punt del conjunt de sortida. La condició d'holomorfia és molt més forta que la de derivabilitat real, ja que implica ser diferenciable infinites vegades. Gauss, Weierstrass, Riemann, Cauchy, entre d'altres, són considerats dels matemàtics més importants en el camp de l'anàlisi complexa.

Un tipus concret de funcions holomorfes són les transformacions conformes, que preserven angles. En el transcurs d'aquest treball, les transformacions conformes tindran un paper rellevant.

Georg Friedrich Bernhard Riemann en la seva tesis doctoral del 1851 va enunciar el Teorema de Riemann. Aquest teorema assegura l'existència d'una transformació conforme que envia una regió simplement connexa al disc unitat. No obstant, el resultat no va ser demostrat fins a l'any 1912 per Constantin Carathéodory, utilitzant superfícies de Riemann. Una altre demostració, publicada al 1922 per Fejér i Riesz, trobava la transformació conforme com la solució d'un problema maximal.

El Teorema de Riemann és un resultat molt potent ja que certifica que qualsevol regió simplement connexa és conformement equivalent al disc unitat. Aquest teorema és un resultat d'existència, no constructiu. Tot i que sigui possible trobar la representació conforme que envia regions senzilles del pla al disc unitat, en general, donada una regió complint les hipòtesis del teorema trobar aquesta aplicació no és un problema fàcil.

Per altre banda, la dinàmica complexa o l'estudi de la iteració de funcions holomorfes és una branca de les matemàtiques que neix amb els treballs d'Ernst Schröder i Arthur Cayley a finals del segle XIX. Aquest articles tracten sobre algorismes per trobar les arrels de funcions complexes, dels quals el més conegut és el mètode de Newton. El primer enfoc global i sistemàtic en el camp de la iteració complexa, va arribar a principis del segle XX de la mà dels matemàtics Gaston Julia i Pierre Fatou.

Els principals estudis de Fatou i Julia, es van centrar en la iteració de funcions racionals en l'esfera de Riemann identificant-la amb \mathbb{C} mitjançant la projecció estereogràfica. El fet que les funcions racionals són expansives a tot arreu excepte al voltant dels punts on s'anul·la la seva derivada provoca que la dinàmica sigui parci-

alment caòtica. Utilitzant la teoria de famílies normals desenvolupada per Montel van dividir l'esfera de Riemann en dos conjunts segons el seu comportament dels iterats: un de caòtic i l'altre d'estable. Actualment són coneguts com el conjunt de Julia i el conjunt de Fatou respectivament.

El conjunt de Julia va mantenir a Fatou i Julia molt intrigats, ja que en molts cassos semblava molt particular i complicat. Fatou va aconseguir demostrar que per alguns casos el conjunt de Julia és totalment desconnex, a més, d'altres propietats que mostraven una gran complexitat geomètrica i topològica. Tan Julia com Fatou imaginaven que aquest conjunt tenia la propietat d'autosemblança.

Posteriorment a mitjans del segle XX amb l'arribada dels primers ordinadors que tenien la capacitat de realitzar milers d'operacions numèriques per segon, es va aconseguir dibuixar amb molta exactitud el conjunt de Julia i amb aquest fet resoldre grans incògnites i obrir noves preguntes sobre la seva natura.

L'ajut de la tecnologia també va fer més fàcil estudiar les famílies de sistemes dinàmics. La família més emblemàtica i més estudiada és la quadràtica, és a dir $\{c \in \mathbb{C} : z^2 + c\}$. En el seu pla de paràmetres es troba el conjunt de Mandelbrot, un objecte de gran complexitat, moltes de les propietats del qual continuen sent objecte d'investigació actualment.

La dinàmica complexa utilitza moltes eines de l'anàlisi complexa per estudiar els sistemes dinàmics dels quals es preocupa. És precisament l'abast d'aquesta potent maquinària que provoca que aquests siguin essencialment diferents que altres amb menys regularitat.

No obstant, aquesta relació és de fet fructífera en les dues direccions ja que els sistemes dinàmics complexos són una font d'exemples "naturals" de resultats i fenòmens que només són intuïts des de l'anàlisi i la topologia sota un enfoc pràcticament teòric.

El Teorema de Riemann és un dels resultats que troba en la dinàmica complexa multitud de cassos específics, ja que la iteració de funcions holomorfes permet generar, de forma quasi-bé explícita, una gran quantitat d'exemples de transformacions conformes que envien conjunts amb frontera extremadament fractals, com els conjunts de Julia, al disc unitat. Al llarg del treball, en veurem diferents cassos.

Estructura de la Memòria

Abans d'entrar en matèria comencem amb un capítol dedicat a un seguit de preliminars necessaris. En aquest capítol introductorí definim i veiem propietats de les funcions de Green, estudiem l'esfera de Riemann i recordem alguns resultats sobre funcions holomorfes com el Teorema de Weierstrass, el Teorema de Rouché o el Lema de Schwarz.

El Teorema de Riemann és enunciat i demostrat a la tercera secció, on desenvolupem la teoria necessària de representacions conformes que ens permet fer-ho. En aquest capítol també estudiem varies propietats de les transformacions de Möbius, un tipus concret de representacions conformes.

En el següent capítol analitzem com actuen dinàmicament les funcions racionals. Per fer-ho, en primer lloc observem el comportament local en un entorn dels diferents tipus de punts fixos o periòdics. Seguidament, expliquem la dinàmica de les funcions racionals en l'esfera de Riemann. A continuació estudiem, en particular, com es comporten els polinomis del pla complex. Per acabar aquest capítol analitzem el pla de paràmetres de la família quadràtica, que conté el conegut conjunt de Mandelbrot del qual discutim diverses de les seves propietats.

Aquest treball també ha tingut una component tècnica de programació per tal de visualitzar el comportament de diferents sistemes dinàmics complexos. Per fer-ho hem fet diversos programes, el codi dels quals es mostra en l'annex.

2 Preliminars

Durant el transcurs d'aquest capítol veurem un seguit de resultats i definicions que no formen part de la teoria en la que ens centrem al llarg del treball, però són necessaris per obtenir alguns resultats o entendre conceptes.

2.1 Resultats d'anàlisi complexa

Per començar aquesta secció enunciaré i demostraré varis resultats sobre les funcions de variable complexa, com el Teorema de Weierstrass, el Teorema de Montel o el Teorema de Hummitz. Aquests resultats es troben en qualsevol llibre d'anàlisi complexa, com és per exemple [Con].

Teorema 2.1 (Teorema de Weierstrass). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ i $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espai de les funcions holomorfes en Ω llavors:*

i) $\mathcal{H}(\Omega)$ és un subespai tancat de $\mathcal{C}(\Omega)$, és a dir, si $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ convergeix uniformement sobre compactes a $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, llavors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

ii) Per a cada $k \geq 1$ l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Omega) \\ f & \longmapsto & f^{(k)} \end{array}$$

és continua, és a dir, si $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(\Omega)$ i $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ llavors $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ en $\mathcal{C}(\Omega)$

Demostració. *i)* Sigui $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ i $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tals que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ volem provar que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sigui $\Delta \subset \Omega$ un triangle tancat, aleshores $\partial\Delta \subset \Omega$ és un compacte. Com que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ es compleix que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\partial\Delta)$. Aplicant el Teorema de Cauchy, ja que per a tot n , $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tenim

$$0 = \int_{\partial\Delta} f_n dz \rightarrow \int_{\partial\Delta} f dz \Rightarrow 0 = \int_{\partial\Delta} f dz$$

i aplicant de nou el Teorema de Cauchy obtenim que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

ii) Volem veure que si $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ llavors per a tot $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ en $\mathcal{H}(\Omega) \Leftrightarrow$ per a tot $K \subset \Omega$ compacte $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ en $\mathcal{C}(K) \Leftrightarrow$ Per a tot $a \in \Omega$ existeix $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset \Omega$ i $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ en $D(a, r)$.

Sigui $a \in \Omega$, $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$ amb $R = \frac{r}{2}$ aleshores es compleix que $D(a, r) \subset D(a, R)$ i per a qualsevol $z \in D(a, r)$ es compleix $\overline{D(z, r)} \subset \overline{D(a, R)}$:

$$\text{sigui } w \in D(z, r) \text{ tenim } |w - a| \leq |w - z| + |z - a| \leq r + r = 2r = R$$

Aplicant les desigualtats de Cauchy a z i $\overline{D(z, r)} \subset \Omega$ obtenim

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{w \in \partial D(z,r)} |f_n(w) - f(w)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{w \in D(a,R)} |f_n(w) - f(w)| \rightarrow 0.$$

□

Definició 2.2. Sigui $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ és una família normal en $\mathcal{H}(\Omega) \Leftrightarrow \mathcal{F}$ és relativament compacte en $\mathcal{H}(\Omega)$.

Teorema 2.3 (Teorema de Montel). Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ i $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ són equivalents:

- 1) \mathcal{F} és una família normal en $\mathcal{H}(\Omega)$
- 2) \mathcal{F} és localment acotada en $\Omega \Leftrightarrow$ per a tot $K \subset \Omega$ compacte, $\sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{F} \text{ i } z \in K\} < \infty \Rightarrow$ per a tot $K \subset \Omega$ compacte, existeix M_K tal que per a tot $f \in \mathcal{F}$ i per a tot $z \in K$ es compleix $|f(z)| \leq M_K$.

Per a demostrar el Teorema de Montel és necessària la definició de família de funcions equicontínues i aplicar el Teorema d'Arzela-Ascoli el qual enunciaré a continuació i no demostraré. La seva demostració es pot veure en [Con].

Definició 2.4.

- Una família \mathcal{F} de funcions definides en $\Omega \subset \mathbb{C}$ es diu que és equicontínua en Ω si per a tot $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $z, w \in \Omega$ complint $|z - w| < \delta$ llavors, per a qualsevol $f \in \mathcal{F}$ es compleix $|f(z) - f(w)| < \epsilon$.
- Una família \mathcal{F} de funcions definides en $\Omega \subset \mathbb{C}$ es diu que és equicontínua en $z_0 \in \Omega$ si per a tot $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ complint $|z - z_0| < \delta$ llavors, per a qualsevol $f \in \mathcal{F}$ es compleix $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Teorema 2.5 (Teorema d'Arzela-Ascoli). Sigui $K \subset \mathbb{C}$ un compacte i $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ llavors:

\mathcal{F} és relativament compacte en $\mathcal{C}(K)$, si i només si:

- i) \mathcal{F} és equicontínua en z , per a tot $z \in K$.
- ii) Per a tot $z \in K$, $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ és relativament compacte en \mathbb{C} .

Un cop conegut el Teorema d'Arzela-Ascoli procedim a demostrar el Teorema de Montel.

Demostració (Teorema Montel). $i) \Rightarrow ii)$. \mathcal{F} normal $\Rightarrow \mathcal{F}$ és relativament compacte en $\mathcal{C}(\Omega) \Leftrightarrow \mathcal{F}|_K$ és relativament compacte en $\mathcal{C}(K) \Rightarrow \overline{\mathcal{F}|_K}$ és compacte en $\mathcal{C}(K) \Rightarrow \mathcal{F}|_K$ és acotat en $\mathcal{C}(K)$.

$ii) \Rightarrow i)$. Aplicant el Teorema d'Arzela Ascoli és suficient provar:

- a) Per a tot $z \in K$, \mathcal{F} és equicontínua en z .
- b) Per a tot $z \in K$, $\mathcal{F}(z)$ és relativament compacte en \mathbb{C} .

a) Siguien $a \in \Omega$ i $R > 0$ tals que $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$ sigui $c = \sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{F} \text{ i } z \in K\} < \infty$.

Prenem $r = \frac{R}{2}$, $z \in D(a, r)$ i $f \in \mathcal{F}$ en la demostració del Teorema de Weierstrass, hem vist que $\overline{D(z, r)} \subset \overline{D(a, R)}$. Apliquem les desigualtats de Cauchy:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \sup_{w \in \partial D(z, r)} |f(w)| \leq \frac{1}{r} \sup_{w \in D(z, R)} |f(w)| < \frac{c}{r}.$$

Siguien $z \in D(a, r)$ i $f \in \mathcal{F}$ qualsevol, tenim:

$$|f(z) - f(a)| = \left| \int_{[a, z]} f'(w) dw \right| \leq \frac{c}{r} |z - a|.$$

I per tant, \mathcal{F} és equicontinua en a .

b) és conseqüència de *ii*) aplicat a $K = \{z\}$. □

El següent teorema està demostrat en [Con] i per fer la demostració s'utilitza el Teorema de Montel vist anteriorment.

Teorema 2.6 (Teorema de Montel-Caratheodory). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i siguin $a, b \in \mathbb{C}$ dos punts diferents del pla complex. Aleshores les famílies de funcions del tipus $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}\}$ són normals.*

Teorema 2.7 (Teorema de Hummitz). *Siguien $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, D un obert tal que $\overline{D} \subset \Omega$, $(f_n)_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tals que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$. Suposem que f no té cap zero en ∂D llavors existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, f i f_n tenen el mateix nombre de zeros comptant multiplicitat en D , és a dir:*

$$\forall n \geq n_0 \quad \sum_{a \in D \cap Z(f)} m(f, a) = \sum_{a \in D \cap Z(f_n)} m(f_n, a).$$

Per demostrar el Teorema de Hummitz, utilitzarem un resultat del curs d'anàlisi complexa de tercer conegut com el Teorema de Rouché el qual no demostrarem.

Teorema 2.8 (Teorema de Rouché). *Sigui $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$ sense zeros en $\partial D(a, R)$ i tals que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ per a qualsevol $z \in \partial D(a, R)$ llavors:*

$$\sum_{a \in D(a, R) \cap Z(f)} m(f, a) = \sum_{a \in D(a, R) \cap Z(g)} m(g, a).$$

Demostració (Teorema de Hummitz). Per hipòtesi tenim que f no té zeros en $\partial D \subset \Omega$ implica que $\epsilon = \min_{z \in \partial D} |f(z)| > 0$.

Per altra banda sabem que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ i, per tant, f_n convergeix uniformement a f en ∂D ; en particular existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $z \in \partial D$ es compleix $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \leq |f(z)|$. Aplicant el Teorema de Rouché obtenim el resultat. □

Corol·lari 2.9. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ una regió i $f_n, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ on $n \leq 1$ tals que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ i complint que per a tot $n \in \mathbb{N}$, f_n no té cap zero en Ω . Llavors o bé $f \equiv 0$ o bé f no té cap zero en Ω .*

Demostració. Suposem $f \not\equiv 0$, com que f és holomorfa, tots els zeros són aïllats. Sigui $z \in \Omega$, aleshores existeix D_z disc centrat en z tal que $\overline{D_z} \subset \Omega$ i $z(f) \cap \partial D_z = \emptyset$. Aplicant el Teorema de Hummitz sabem que existeix $n_z \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \leq n_z$ f i f_n tenen el mateix nombre de zeros en D_z . Com que f_n no té zeros en D_z , f tampoc en té cap. \square

Lema 2.10 (Lema Schwarz). *Sigui $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ complint $f(0) = 0$ i $|f(z)| \leq 1$ llavors:*

- i) Per a tot $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \leq |z|$ i $|f'(0)| \leq 1$*
- ii) Si existeix $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ o bé $|f'(0)| = 1$ llavors existeix $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$ per a qualsevol $z \in \mathbb{D}$.*

Demostració. Com que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ i $f(0) = 0$ sabem que existeix $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ complint $f(z) = zg(z)$ per a tot $z \in \mathbb{D}$. Es compleix

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Per tant, *i)* es dedueix de provar que per a tot $z \in \mathbb{D}$ $|g(z)| \leq 1$. Aplicant el principi del mòdul màxim:

$\sup_{|z|<1} |g(z)| = \limsup_{r \rightarrow 1} \sup_{|z| \leq r} |g(z)| = \limsup_{r \rightarrow 1} \sup_{|z|=r} |g(z)| = \limsup_{r \rightarrow 1} \sup_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} \leq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{r} = 1$ l'última desigualtat l'obtenim de que $|f(z)| \leq 1$.

ii) Si existeix $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $|g(z_0)| = 1$, com que hem vist que per a tot $z \in \mathbb{D}$ $|g(z)| \leq |g(z_0)|$. Aplicant el principi del mòdul màxim obtenim $g \equiv ct$, implica que existeix $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $g(z) = e^{i\theta}$ per a tot $z \in \mathbb{D}$ d'on obtenim $f(z) = e^{i\theta}z$ per a tot $z \in \mathbb{D}$. \square

2.2 L'esfera de Riemann

Moltes de les funcions que utilitzarem en el treball tindran com a conjunt de sortida o d'arribada la unió del pla complex amb el punt infinit, conegut com esfera de Riemann. És aquest el motiu pel qual necessitem definir una topologia sobre ella.

Definició 2.11. *Definim l'esfera de Riemann com $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$*

Es pot definir una topologia a \mathbb{C}_∞ que indueix sobre \mathbb{C} la topologia habitual. Aquesta topologia es defineix fixant una base d'entorns de $\nabla_a \in \mathbb{C}_\infty$:

- Si $a \in \mathbb{C}$ una base d'entorns de a és $\{D(a, r)\}_{r>0}$
- si $a = +\infty$ una base d'entorns de a és $\{\overline{\mathbb{C}_\infty} \setminus \overline{D(0, r)}\}_{r>0}$

En [Con] es pot veure que \mathbb{C}_∞ amb aquesta topologia és homeomorfa.

2.3 Funcions de Green

En aquest apartat introduïrem les funcions de Green i discutirem la seva existència. Tota la informació sobre les funcions de Green s'ha extret de [Con]. Abans de definir les funcions de Green, recordem la definició de funció harmònica.

Definició 2.12. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunt obert, aleshores una funció $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és harmònica si les segones derivades parcials de f són contínues i compleixen l'equació de Laplace:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Definició 2.13. *Sigui Ω una regió del pla i $a \in \Omega$. Una funció de Green en Ω amb una singularitat en el punt a és una funció $f_a : \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ complint:*

- i) f_a és una funció harmònica en $\Omega \setminus \{a\}$.*
- ii) $F(z) = f_a(z) + \log|z - a|$ és harmònica en un entorn de a .*
- iii) $\lim_{z \rightarrow w} f_a(z) = 0$ per a tot $w \in \partial\Omega$.*

A continuació demostrarem varies propietats de les funcions de Green.

Proposició 2.14. *Donada una regió Ω i un punt $a \in \Omega$, si existeix f_a és única.*

Demostració. Suposem que g_a és una altre funció que compleix les propietats de les funcions de Green. Per la propietat *i*) podem assegurar que $g_a - f_a$ és harmònica en $\Omega \setminus \{a\}$. Aplicant *iii*) obtenim $\lim_{z \rightarrow w} [g_a(z) - f_a(z)] = 0$ per a cada $z \in \partial\Omega$. Pel principi del mòdul màxim podem afirmar que $g_a = f_a$. \square

Proposició 2.15. *Donat $\Omega \subset \mathbb{C}$ i un punt $a \in \Omega$, aleshores la funció de Green f_a és positiva.*

Demostració. f_a és una funció harmònica en $\Omega \setminus \{a\}$, $\lim_{z \rightarrow a} f_a(z) = +\infty$ i $f_a(z) + \log|z - a|$ és harmònica en $z = a$. Aplicant el principi del mòdul màxim obtenim que $f_a(z) > 0$ per a qualsevol $z \in \Omega \setminus \{a\}$. \square

Proposició 2.16. *\mathbb{C} no té cap funció de Green amb una singularitat en el zero, i de fet, en cap altre punt.*

Demostració. Suposem que f_0 és una funció de Green amb una singularitat en el zero. Definim $f = -f_0$, per la proposició anterior, f_0 serà positiva i per tant $f(z) < 0$ per a tot z . A continuació veurem que f és una funció constant, fet que resulta una contradicció. Prenem $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dos punts diferents. Donat $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_1)| < \epsilon$ si $|z - z_1| < \delta$. Això implica que $f(z) < f(z_1) + \epsilon$ si $|z - z_1| < \delta$. Sigui $r > |z_1 - z_2| > \delta$ llavors:

$$h_r(z) := \frac{f(z_1) + \epsilon}{\log(\frac{\delta}{r})} \log \left| \frac{z - z_1}{r} \right|$$

és una funció harmònica en $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ que compleix $f(z) \leq h_r(z)$ per a tot z de la frontera de l'anell $A = \{z : \delta < |z - z_1| < r\}$:

- Cas $|z - z_1| = \delta$:

$$f(z) \leq f(z_1) + \epsilon = \frac{f(z_1) + \epsilon}{\log \frac{|z - z_1|}{r}} \log \frac{|z - z_1|}{r} = \frac{f(z_1) + \epsilon}{\log \frac{\delta}{r}} \log \frac{|z - z_1|}{r} = h_r(z)$$

- Cas $|z - z_1| = r$:

tenim que $f(z) \leq 0 = h_r(z)$ si z compleix $|z - z_1| = r$, aleshores

$$\log \frac{|z - z_1|}{r} = \log \frac{r}{r} = \log 1 = 0$$

Pel principi del mòdul màxim, $f(z) \leq h_r(z)$ per a tot $z \in A$. En particular, $h_r(z_2) \geq f(z_2)$. Fent el pas al límit quan $r \rightarrow \infty$ obtenim:

$$f(z_2) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} h_r(z_2) = f(z_1) + \epsilon$$

Com que ϵ és arbitrari, obtenim que $f(z_2) \leq f(z_1)$. Com que z_1, z_2 són arbitraris implica per tant que $f(z_1) = f(z_2)$ i per tant f ha de ser una funció constant. \square

Després de provar aquesta última propietat una pregunta que ens fem és quan existeix la funció de Green. Per obtenir una resposta a aquesta pregunta, primer hem de definir les regions de Dirichlet.

Definició 2.17. Una regió $\Omega \subset \mathbb{C}$ s'anomena regió de Dirichlet si per a cada funció continua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, existeix una funció continua $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que u és harmònica en Ω i es compleix que $u(z) = f(z)$ per a tot $z \in \partial\Omega$.

Teorema 2.18. Si Ω és una regió de Dirichlet acotada, aleshores per a qualsevol punt $a \in \Omega$ existeix una funció de Green en Ω amb una singularitat en a .

Demostració. Definim $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ per $g(z) = \log |z - a|$, sigui $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ l'única funció continua i harmònica en Ω tal que $u(z) = g(z)$ per a tot $z \in \partial\Omega$. Llavors $f_a(z) = u(z) - \log |z - a|$ compleix les propietats de les funcions de Green:

- i) es pot demostrar que f_a és harmònica en $\Omega \setminus \{a\}$.
- ii) $F(z) = f_a(z) + \log |z - a| = u(z)$ és harmònica en Ω i en particular en un entorn de a .
- iii) $\lim_{z \rightarrow w} f_a(z) = \lim_{z \rightarrow w} (u(z) - \log |z - a|) = \lim_{z \rightarrow w} (u(z) - g(z)) = 0$ per a tot $z \in \partial\Omega$.

\square

El següent resultat està demostrat en [Con] i ens afirma que les funcions de Green són conformement invariants.

Teorema 2.19. Sigui Ω_1 i Ω_2 dues regions del pla tals que existeix $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una transformació conforme (holomorfa i bijectiva, veure capítol 3). Sigui $a \in \Omega_1$ i $\alpha = \varphi(a)$. Si g_a i h_α són funcions de Green per Ω_1 i Ω_2 amb singularitats a i α respectivament, llavors:

$$g_a(z) = h_\alpha(\varphi(z)).$$

3 Representació conforme

Aquest capítol té un objectiu clar: enunciar i demostrar el Teorema de Riemann. Per fer-ho necessitarem treballar el concepte de representació conforme. Com en el capítol anterior, la informació sobre representacions conformes es pot trobar en varis llibres d'anàlisi complexa, [Con] és un d'ells.

Definició 3.1. *Siguin Ω_1, Ω_2 oberts de \mathbb{C} . Una transformació o representació conforme entre Ω_1 i Ω_2 és una aplicació $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ holomorfa i bijectiva.*

Es compleix que la composició de transformacions conformes és una transformació conforme.

La propietat geomètrica, que defineix les representacions conformes és el fet que preserva angles. Aquesta i altres característiques estan contingudes en la següent proposició que podem veure en [Con].

Proposició 3.2. *Si φ és una representació conforme d'un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$; llavors*

- φ' no té cap zero en Ω . En particular φ conserva angles en Ω .
- $\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \rightarrow \Omega$ és holomorfa i $(\varphi^{-1})'(\varphi(z)) = \frac{1}{\varphi'(z)}$ per a cada $z \in \Omega$. En particular, φ^{-1} és una representació conforme de $\varphi(\Omega)$.

3.1 Transformacions de Möbius

Seguidament, definirem i veurem varies propietats de les transformacions de Möbius. Un tipus de funcions racionals que ens seran útils per aconseguir demostrar el Teorema de Riemann.

Definició 3.3. *Una transformació de Möbius és una funció racional de la forma $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ on $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ complint que $ad - bc \neq 0$.*

A continuació enunciamos varies propietats de les transformacions de Möbius que no demostrarem.

- La composició de dues transformacions de Möbius és una transformació de Möbius.
- La inversa de φ és $\varphi^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.
- $\varphi : \mathbb{C} \setminus \varphi^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \varphi(\infty)$ és una transformació conforme.

Definició 3.4. *Definim les transformacions de Möbius elementals.*

- *Translació* $z \rightarrow z + a$ on $a \in \mathbb{C}$.
- *Semblança* $z \rightarrow az$ on $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Inversió $z \rightarrow 1/z$.

Proposició 3.5. *Tota transformació de Möbius és composició de transformacions de Möbius elementals.*

Demostració. Considerem $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ on $ad - bc \neq 0$

- **cas 1:** $c = 0, a \neq 0, b \neq 0$ llavors $\varphi(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ considerem $\varphi_1(z) = \frac{a}{d}z$ i $\varphi_2(z) = z + \frac{b}{d}$ transformacions de Möbius elementals. Tenim $\varphi(z) = \varphi_1 \circ \varphi_2(z)$ com volíem.
- **cas 2:** $c \neq 0$ observem que $az + b = \frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}$. Per tant, $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{z + \frac{d}{c}}$. Considerem:

$$\varphi_1(z) = z + \frac{d}{c}, \varphi_2(z) = \frac{1}{z}, \varphi_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z \text{ i } \varphi_4(z) = \frac{a}{c} + z$$

es compleix que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ són transformacions elementals de Möbius complint $\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$.

□

Corol·lari 3.6. *La imatge per una transformació de Möbius d'un cercle o d'una recta ampliada és un cercle o una recta ampliada.*

Per a provar aquest corol·lari necessitem un lema tècnic el qual no farem la seva demostració.

Lema 3.7. *L'equació general d'un cercle o una recta a \mathbb{C} és $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ on $A, C \in \mathbb{R}$ i $B \in \mathbb{C}$ complint $|B|^2 > AC$. Si $A = 0$ és l'equació d'una recta, si $A \neq 0$ és l'equació d'un cercle.*

Demostració (Corol·lari 3.6). Aplicant la proposició 3.5 només ens cal veure que les transformacions elementals compleixen aquesta propietat.

- Per transformacions i semblances resulta immediat veure que la imatge d'un cercle o d'una recta ampliada és un cercle o una recta ampliada.
- Per a provar la inversió, utilitzarem el lema 3.7:

Sigui \mathcal{C} un cercle o una recta invariant de \mathbb{C}_∞ . L'equació dels punts finits de \mathcal{C} ve donada per l'equació $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ on $A, C \in \mathbb{R}$ i $B \in \mathbb{C}$ complint $|B|^2 > AC$. Sigui $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $w = \frac{1}{z} = \varphi(z)$ (φ és la inversa).

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \Leftrightarrow A\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} + B\frac{1}{w} + \bar{B}\frac{1}{\bar{w}} + C = 0 \Leftrightarrow A + \bar{B}w + B\bar{w} + C\bar{w}w = 0$$

Sigui $\mathcal{C} \setminus \{\infty\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0\}$ llavors $\varphi(\mathcal{C} \setminus \{0, \infty\}) = \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : A + \bar{B}w + B\bar{w} + C\bar{w}w = 0\}$.

Si \mathcal{C} és un cercle o recta ampliada que passa per l'origen, llavors $c = 0 \Rightarrow \varphi(\mathcal{C}) = \{w \in \mathbb{C} : A + \bar{B}w + B\bar{w} = 0\}$ que pel lema 3.7 és una recta ampliada.

Si \mathcal{C} no passa per l'origen tenim que $0 \notin \mathcal{C}$ i $\varphi(\mathcal{C}) = \{w \in \mathbb{C} : \bar{B}w + B\bar{w} + C\bar{w}w = 0\}$ que pel lema 3.7 és un cercle o una recta ampliada. □

Proposició 3.8. Cada transformació de Möbius diferent de la identitat té com a molt dos punts fixos.

Demostració. Sigui $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformació de Möbius diferent de la identitat.

- **Cas 1:** Si $c = 0$ tenim $\varphi(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$ i ∞ és un punt fix de φ .
D'altra banda, els punts fixos de φ finits són les solucions finites de $\varphi(z) = z$:

$$\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z \Leftrightarrow (a-d)z + b = 0$$

com a molt té una solució ja que φ és diferent de la identitat.

- **Cas 2:** si $c \neq 0$ llavors ∞ no és un punt fix de φ ja que $\varphi(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C}$. Els punts fixos de φ compleixen:

$$az + b = (cz + d)z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

és una equació de segon grau i com a molt té dues solucions. Com que ∞ no és un punt fix de φ aleshores la transformació de Möbius té com a molt dos punts fixos en \mathbb{C}_∞ .

□

Corol·lari 3.9. Siguin φ, Ψ dues transformacions de Möbius que coincideixen en tres punts diferents de \mathbb{C}_∞ aleshores es compleix que $\varphi \equiv \Psi$.

Demostració. Si $\varphi(z_i) = \Psi(z_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$. On z_1, z_2, z_3 i w_1, w_2, w_3 són tres punts diferents de \mathbb{C}_∞ respectivament. La transformació de Möbius $\varphi \circ \Psi^{-1}$, compleix $\varphi \circ \Psi^{-1}(w_i) = w_i$ per a qualsevol $i = 1, 2, 3$ i com que w_1, w_2, w_3 són punts diferents de \mathbb{C} , per a la proposició 3.8 tenim que $\varphi \circ \Psi^{-1} \equiv Id$ i, per tant, $\varphi \equiv \Psi$. □

Definició 3.10. Si $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ complint que z_2, z_3, z_4 són punts diferents de \mathbb{C}_∞ . Definim la raó doble d'aquests quatre punts com:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \in \mathbb{C}_\infty$$

Tenim que (z_1, z_2, z_3, z_4) és la imatge de z_1 a una transformació de Möbius donada per:

$$\varphi_{z_2, z_3, z_4}(z) = \begin{cases} \frac{z - z_3}{z - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} & \text{si } z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}. \\ \frac{z - z_3}{z - z_4} & \text{si } z_2 = \infty. \\ \frac{z_2 - z_4}{z - z_4} & \text{si } z_3 = \infty. \\ \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} & \text{si } z_4 = \infty. \end{cases}$$

Teorema 3.11. Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ diferents i $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ diferents, llavors existeix una única transformació de Möbius φ tal que $\varphi(z_i) = w_i$ per a $i = 1, 2, 3$.

Demostració. La unicitat l'hem vist en el corol·lari 3.9. L'existència ens ve donada per $\Psi = (\varphi_{w_1, w_2, w_3})^{-1} \circ \varphi_{z_1, z_2, z_3}$ que és una transformació de Möbius que compleix $\Psi(z_i) = w_i$ per a $i = 1, 2, 3$. \square

Corol·lari 3.12. *Siguin $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos cercles o rectes ampliades, llavors existeix una única transformació de Möbius φ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.*

Demostració. Sigui z_1, z_2, z_3 punts diferents de \mathcal{C}_1 i w_1, w_2, w_3 punts diferents de \mathcal{C}_2 . Pel teorema anterior sabem que existeix una transformació de Möbius que compleix $\varphi(z_i) = w_i$ per a $i = 1, 2, 3$. Aplicant el corol·lari 3.6 sabem que $\varphi(\mathcal{C}_1)$ és un cercle o una recta ampliada que passa per $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{C}_2$. Per tant $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$. \square

Teorema 3.13. *Tota transformació de Möbius φ conserva la raó doble, és a dir, si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ llavors $(z, z_1, z_2, z_3) = (\varphi(z), \varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3))$ per a tot $z \in \mathbb{C}_\infty$.*

La demostració d'aquest teorema es pot veure en [Con].

3.2 Automorfismes conformes

Una altra eina necessària per demostrar el teorema de Riemann són els automorfismes conformes.

Definició 3.14. *Sigui Ω una regió del pla complex, un automorfisme conforme de Ω és una transformació conforme de Ω en si mateix. El conjunt d'automorfismes conformes de Ω s'anomena $Aut(\Omega)$.*

Proposició 3.15. $Aut(\mathbb{C}) = \{p : p \text{ polinomi de grau } 1\} = \{p(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.

Demostració. \supset) És clar que $p(z) = az + b \in Aut(\mathbb{C})$ ja que $p(z)$ és composició d'una semblança i una translació.

\subset) Sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ biholomorfa $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ amb convergència uniforme

i absoluta en compactes de \mathbb{C} . Definim per a $z \in \mathbb{C}^*$ la funció $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$.

Hi ha convergència uniforme i absoluta sobre anells $r < |z| < R$. Com que 0 és una singularitat aïllada de g ; $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ és el desenvolupament de Laurent de g .

Tenim $f \in Aut(\mathbb{C}) \Rightarrow g$ és una transformació conforme de \mathbb{C}^* en $\mathbb{C} \setminus \{f(0)\}$. Anem a veure que 0 no és una singularitat essencial.

g és conforme de \mathbb{C}^* en $\mathbb{C} \setminus \{f(0)\}$ sigui $D'(0, 1) := D(0, 1) \setminus \{0\}$ es compleix $D'(0, 1) \cap \overline{\mathbb{C} \setminus D(0, 1)} = \emptyset \Rightarrow g(D'(0, 1)) \cap \overline{g(\mathbb{C} \setminus D(0, 1))} = \emptyset$ tenim que $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$ és un obert de \mathbb{C} i, per tant, $g(\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)})$ també. Aleshores podem afirmar que $g(D'(0, 1))$ no és densa a \mathbb{C} . Aplicant el Teorema de Cassaroti-Weierstrass, assegurarem que 0 no és una singularitat essencial.

Per tant $\{n : a_n \neq 0\}$ és finit, és a dir, f és un polinomi. Suposem que $gr f > 1$ llavors f' seria un polinomi no constant. Pel Teorema fonamental de l'àlgebra, f' tindria algun zero; això és una contradicció.

En conseqüència f és un polinomi complint $gr f \leq 1$ però $gr f \neq 0$ ja que sinó f seria constant. Això fa que f sigui un polinomi de grau 1. \square

Corol·lari 3.16. *Sigui $f \in Aut(\mathbb{D})$ complint $f(0) = 0$ aleshores existeix $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$ per a tot $z \in \mathbb{D}$.*

Demostració. Aplicant el lema de Schwarz a $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ i $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ amb $f(0) = 0 = f^{-1}(0)$ obtenim $|f'(0)| \leq 1$ i $|(f^{-1})'(0)| = |\frac{1}{f'(0)}| \leq 1$. Per tant, $|f'(0)| = 1$. Aplicant ii) del lema de Schwarz obtenim que existeix $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$ per a tot $z \in \mathbb{D}$. \square

Proposició 3.17. *Les següents afirmacions són equivalents.*

- a) $f \in Aut(\mathbb{D})$.
- b) f és transformació conforme de Möbius complint $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
- c) $\exists \theta \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{D}$ tals que $f = e^{i\theta}\varphi_a$ on $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$.

La demostració d'aquesta proposició es pot trobar en [Con].

3.3 Teorema de Riemann

En aquesta secció i utilitzant varies de les propietats anteriors de les representacions conformes, podem enunciar i demostrar el teorema principal d'aquest capítol. El Teorema de Riemann:

Teorema 3.18 (Teorema de Riemann). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ una regió simplement connexa del pla i $z_0 \in \Omega$, llavors existeix una única transformació conforme $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\varphi(z_0) = 0$ i $\varphi'(z_0) > 0$.*

Demostració. Per provar la unicitat suposem que existeixen $\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ transformacions conformes tals que $\varphi_i(z_0) = 0$ i $\varphi'_i(z_0) > 0$ per a $i = 1, 2$. Definim $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in Aut(\mathbb{D})$. Tenim $\varphi(0) = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(0) = \varphi_2(z_0) = 0$ Aplicant el corol·lari 3.17 sabem que existeix $\theta \in \mathbb{R}$ i $\varphi(z) = e^{i\theta}z$ per a tot $z \in \mathbb{D}$. Tenim doncs

$$e^{i\theta} = \varphi'(0) = \varphi'_2(\varphi_1^{-1}(0))(\varphi_1^{-1})'(0) = \varphi'_2(z_0)\frac{1}{\varphi'_1(z_0)} > 0 \Rightarrow e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \varphi \equiv Id \Rightarrow \varphi_1 \equiv \varphi_2.$$

Per a veure l'existència cal provar que existeix una transformació conforme $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ complint $\Phi(z_0) = 0$. Doncs llavors tindrem que $\Phi'(z_0) \neq 0$ i, per tant, existeix $\theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$ amb $\Phi'(z_0) = re^{i\theta}$. Definint una representació conforme $\varphi = e^{-i\theta}\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\varphi(z_0) = 0$ i $\varphi'(z_0) = e^{-i\theta}re^{i\theta} = r > 0$ obtenim la transformació conforme buscada.

La demostració es basa en provar les quatre afirmacions següents:

1. La transformació conforme de Ω en \mathbb{D} , que envia z_0 a 0, són les funcions $f \in \mathcal{F}$ que maximitzen $|f'(z_0)|$ on $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega), f(z_0) = 0, f \text{ injectiva}, f(\Omega) \subset \mathbb{D}\}$. És a dir, provarem que $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ és una transformació conforme amb $\varphi(z_0) = 0$ si i només si per a tot $f \in \mathcal{F}$ $|f'(z_0)| \leq |\varphi'(z_0)|$.
2. $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
3. $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$.
4. Finalització de la determinació del teorema.

1. Per veure-ho hem de provar:

- a) $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ transformació conforme tal que $\varphi(z_0) = 0$ implica que φ és una solució del problema extremal, és a dir, $\varphi \in \mathcal{F}$ i per a tota $f \in \mathcal{F}$ $|f'(z_0)| \leq |\varphi'(z_0)|$.
- b) Recíprocament si $f \in \mathcal{F}$ és solució del problema extremal implica que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ transformació conforme de Ω en \mathbb{D} tal que $f(z_0) = 0$.

a) És conseqüència del lema de Schwarz. Suposem que $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ transformació conforme complint $\varphi(z_0) = 0$ i $f \in \mathcal{F}$. Definim $h = f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa i complint $h(0) = f(\varphi^{-1}(0)) = f(z_0) = 0$, aplicant el lema de Schwarz tenim que $1 \geq |h'(0)| = |f'(\varphi^{-1}(0))| |(\varphi^{-1})'(0)| = \frac{|f'(z_0)|}{|\varphi'(z_0)|}$ d'on obtenim que $|f'(z_0)| \leq |\varphi'(z_0)|$.

b) Recíprocament si $f \in \mathcal{F}$ és una solució del problema extremal, hem de veure que $f(\Omega) = \mathbb{D}$. Suposem que $f(\Omega) \not\subseteq \mathbb{D}$ i veiem que existeix $g \in \mathcal{F}$ complint $|f'(z_0)| < |g'(z_0)|$. Fixat $a \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$ considerem $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ amb $\varphi_a(a) = 0$. Com que $a \notin f(\Omega) \Rightarrow \varphi_a \circ f$ no té zeros. Al ser Ω simplement connex, existeix $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ satisfent:

- $h^2 = \varphi_a \circ f$.
- com que f és injectiva, h també.
- $\varphi_a \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \Rightarrow h^2(\Omega) \subset \mathbb{D} \Rightarrow h(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Definim $b = h(z_0) \in \mathbb{D}$ i volem provar que $g = \varphi_b \circ h$ és una funció de \mathcal{F} tal que $|f'(z_0)| < |g'(z_0)|$.

Observem que donat $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ injectiva, $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$ i $g(z_0) = \varphi_b((z_0)) = \varphi_b(b) = 0$. Comprovem ara que $|f'(z_0)| < |g'(z_0)|$. En efecte, com que $(\varphi_b)^{-1} = \varphi_b$ implica $h = \varphi_b \circ g$ i per tant tenim:

$$f = \varphi_a \circ h^2 = \varphi_a \circ (\varphi_b \circ g)^2 = \varphi_a \circ \varphi_b^2 \circ g = F \circ g \text{ on } F := \varphi_a \circ \varphi_b^2.$$

F compleix: $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $F(0) = F(g(z_0)) = f(z_0) = 0$.

Per veure b) hem de veure que F no és una rotació. Per absurd, suposem que

ho és, $F(z) = e^{i\theta}z \Rightarrow \varphi_a \circ \varphi_b^2(z) = e^{i\theta}z \Rightarrow \varphi_b^2(z) = \varphi_a(e^{i\theta}z)$ que és una contradicció. Aplicant el Lema de Schwarz obtenim $|F'(0)| < 1$ i per tant $|f'(z_0)| = |F'(g(z_0))||g'(z_0)| = |F'(0)||g'(z_0)| < |g'(z_0)|$.

2. Volem veure que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Com que $\Omega \neq \mathbb{C}$ existeix $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, definim $h(z) = z - a$, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. La funció h no té zeros en Ω , com que Ω és una regió simplement connexa implica que existeix $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ que és una determinació de l'arrel quadrada de la funció h , és a dir, g no té zeros en Ω i compleix $g^2 = h$.

Com que la funció h és injectiva, g si $z, w \in \Omega$ i $g(z) = \pm g(w)$ llavors es compleix que $z = w$ ja que $h(z) = g^2(z) = g^2(w) = h(w)$.

Per una banda podem afirmar que g és una funció injectiva. Per altre banda si $w \in \Omega$ llavors $-g(w) \notin g(\Omega)$ doncs si existeix $z \in \Omega$ complint $-g(w) = g(z)$ llavors $z = w$ i per tant $g(w) = -g(w)$ fet que implica que $g(w) = 0$ que és una contradicció ja que g no té zeros en Ω .

Com que h no és constant, g tampoc i $g(\Omega)$ és un conjunt obert, és a dir, existeix $r > 0$ tal que $r < |g(z_0)|$ i $\overline{D(g(z_0), r)} \subset g(\Omega)$. Comprovem que $g(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{-D(g(z_0), r)}$ on $\overline{-D(g(z_0), r)} = \{-wi : w \in \overline{D(g(z_0), r)}\} = \overline{-D(g(z_0), r)}$. Raonant per absurd, suposem $g(\Omega) \not\subset \overline{-D(g(z_0), r)}$. Per tant tenim que existeix $\xi \in g(\Omega) \cap \overline{-D(g(z_0), r)}$ implica que existeix $\tilde{z} \in \Omega$ tal que $\xi = g(\tilde{z})$ i $\xi \in \overline{-D(g(z_0), r)}$ d'on obtenim $-g(\tilde{z}) = -\xi \in \overline{-D(g(z_0), r)}$ que és una contradicció. Per tant $g(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{-D(g(z_0), r)}$.

Definim $\psi(z) = \frac{r}{z+g(z_0)}$ transformació de Möbius que transforma $\mathbb{C} \setminus \overline{-D(g(z_0), r)}$ en $D(0, 1) \setminus \{0\}$ i envia $g(z_0)$ a $a = \frac{r}{2g(z_0)}$.

Finalment definim $f = \varphi_a \circ \psi \circ g$ que és una funció injectiva i holomorfa en Ω i complint $f(z_0) = 0$ i per tant $f \in \mathcal{F}$.

3. Aplicant el Teorema de Montel tenim que si $f \in \mathcal{F}$ $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$ es compleix que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in \Omega} |f(z)| < 1$, aleshores \mathcal{F} és normal i per tant \mathcal{F} és relativament compacte en $\mathcal{H}(\Omega)$ d'on obtenim que $\overline{\mathcal{F}}$ és compacte. Volem veure que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$:

⊆) Sigui $f \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow$ existeix $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ Aplicant el corollari 2.8 tenim que f és constant i $f_n(z_0) = 0$ per a tot n i per tant $f \equiv 0$ o bé f és injectiva.

Si f és injectiva tenim que f no és constant i per tant $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$ és un obert, de fet, $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$, f és injectiva i $f(z_0) = 0$. Per tant $f \in \mathcal{F}$.

⊇) Òbviament $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$, volem veure doncs que $0 \in \overline{\mathcal{F}}$ aplicant el punt 2 podem suposar que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ i per tant existeix $f \in \mathcal{F}$. Definim $f_n = \frac{1}{n}f \in \mathcal{F}$, com que tenim $f_n \rightarrow 0$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ podem afirmar que $0 \in \overline{\mathcal{F}}$

4. Pel Teorema de Weierstrass tenim que fixat $z_0 \in \Omega$ i la funció $f \in \overline{\mathcal{F}}$ aleshores $|f'(z_0)|$ és continua.

Si $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, $f_n, f \in \overline{\mathcal{F}}$ implica que $f'_n \rightarrow f'$ en $\mathcal{H}(\Omega)$. Per tant $|f'_n(z_0)| \rightarrow |f'(z_0)|$.

Tenim que existeix $\Phi \in \mathcal{F}$ complint que $|\Phi(z_0)| = \max_{f \in \overline{\mathcal{F}}} |f'(z_0)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|$ Per tant Φ no és constant (i tampoc nula), com que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$ tenim que $\Phi \in \mathcal{F}$ i aplicant 1. obtenim que $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ és una transformació conforme tal que $\Phi(z_0) = 0$. \square

4 Iteració al pla complex

4.1 Introducció

L'objectiu d'aquest capítol és estudiar el comportament dels diferents punts del pla complex després d'iterar una funció racional $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Denotem les iterades de f com: $f^1 = f$ i $f^n = f^{n-1} \circ f$. Donada una condició inicial $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ la seva òrbita és

$$\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, z_1 = f(z_0), \dots, z_n = f(z_{n-1}) = f^n(z_0), \dots\}.$$

Per entendre els sistemes dinàmics generats per les iterades de f és necessari entendre el comportament de les òrbites en termes de les condicions inicials. En conceptes d'iteració $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ és un punt fix de f si es compleix que $f(z_0) = z_0$, de forma anàloga, z_0 és un punt periòdic de f si existeix $n \in \mathbb{N}$ complint $f^n(z_0) = z_0$. Anomenem període a la mínima n per a la qual es compleix la condició anterior, en aquest cas, definim el cicle de z_0 com a l'òrbita $\{z_1, z_2, \dots, z_n = z_0\}$.

Un conjunt de punts especials de la funció f són els punts crítics, és a dir, els punts $c \in \mathbb{C}_\infty$ tals que $f'(c) = 0$, ja que en ells la funció no es localment conforme. Aquests tindran un paper rellevant en l'estudi de la dinàmica de la funció f . Donat un punt crític c de f definim $v \in \mathbb{C}$ on $v = f(c)$ com el valor crític.

4.2 Teoria local

En dinàmica complexa, un paper molt important el tenen els punts fixos. En la secció actual estudiem els diferents tipus de punts fixos i el seu comportament local. En el transcurs d'aquest capítol, notem per a f a una funció racional qualsevol de grau $d \geq 2$. Per estudiar la dinàmica local la informació ha estat extreta principalment de [CG] i completada amb [Bea, Ste].

Per començar, classifiquem els diferents tipus de punts fixos:

Definició 4.1. *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$ un punt fix d'una funció analítica f . Aleshores direm que z_0 és*

- *Atractor si $|f'(z_0)| < 1$.*
- *Superatractor si $|f'(z_0)| = 0$.*
- *Repulsor si $|f'(z_0)| > 1$.*
- *Parabòlic o racionalment neutral si $|f'(z_0)| = 1$ i $f'(z_0)$ és una arrel de la unitat.*
- *Irracionalment neutral si $|f'(z_0)| = 1$ i $f'(z_0)$ no és una arrel de la unitat.*

Definició 4.2. El nombre $\lambda = f'(z_0)$ s'anomena multiplicador de f a z_0 .

Definició 4.3. Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$ un punt fix atractiu definim la seva conca d'atracció $A(z_0)$, com el conjunt obert de tots els punts del pla complex tal que la seva òrbita tendeix a z_0 . És a dir $A(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0\}$.

La conca d'atracció no necessàriament ha de ser un conjunt connex. Anomenem conca d'atracció immediata i ho notem per $A^*(z_0)$ a la component connexa de $A(z_0)$ que conté a z_0 .

Definició 4.4. Sigui $f : U \rightarrow U$ una funció analítica, direm que f és conjugada a $g : V \rightarrow V$ un altre funció analítica. Si existeix $\varphi : U \rightarrow V$ tal que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Equivalentment $\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$, que és coneguda com l'equació de Schröder.

La definició anterior implica que les iterades f^n i g^n també són conjugades: $g^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$. Notem, doncs, que φ envia punts fixos de f a punts fixos de g , conques d'atracció a conques d'atracció i els multiplicadors coincideixen.

El nostre objectiu és estudiar, en els diferents casos de punts fixos d'una determinada funció, si podem conjuguar aquesta funció per una de més senzilla, en concret, per una funció lineal.

Punts fixos atractius

Teorema 4.5. Sigui z_0 un punt fix atractiu de f , amb multiplicador λ tal que $0 < |\lambda| < 1$. Llavors existeix una transformació conforme $\xi = \varphi(z)$ d'un entorn de z_0 sobre un entorn de 0, que conjugua $f(z)$ amb la funció lineal $g(\xi) = \lambda\xi$. La funció conjugada és única llevat del producte per un factor escalar diferent de zero.

Demostració. Podem suposar $z_0 = 0$, ja que si $z_0 \neq 0$ fent el canvi de variables $w = z - z_0$ obtenim $w_0 = z_0 - z_0 = 0$.

Definim la successió de funcions $\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z)$. Veiem que se satisfà

$$\varphi_n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi_{n+1}.$$

Si existeix φ tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ llavors $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. Aleshores, tindrem $(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(\xi) = \lambda\xi$ i φ serà una conjugació.

Per a veure la convergència, veiem que per un $\delta > 0$ prou petit, es compleix:

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2, \quad |z| \leq \delta.$$

Ja que $f(z) = \lambda z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \dots$ i per tant $|f(z) - \lambda z| = |\frac{f''(0)}{2}z^2 + \dots| \leq C|z|^2$. Aplicant la desigualtat triangular, obtenim: $|f(z)| \leq |\lambda| + C|z|^2 = (|\lambda| + C|z|)|z| \leq (|\lambda| + C\delta)|z|$. Per inducció, volem veure que per $|\lambda| + C\delta < 1$ es compleix:

$$|f^n(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n |z|, \quad |z| \leq \delta$$

Estudiem primer el cas $n=2$.

$$|f^2(z)| = |f(f(z))| \leq (|\lambda| + C\delta)|f(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)(|\lambda| + C\delta)|z| = (|\lambda| + C\delta)^2|z|$$

on utilitzem la desigualtat trobada anteriorment per $|f(z)|$.

Suposem doncs, que es compleix $|f^n(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n|z|$, per a $|z| \leq \delta$ i veiem que per a $n + 1$.

$$|f^{n+1}(z)| = |f^n(f(z))| \leq (|\lambda| + C\delta)^n|f(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n(|\lambda| + C\delta)|z| = (|\lambda| + C\delta)^{n+1}|z|.$$

Com volíem.

A continuació prenem $\delta > 0$ petit tal que $\rho = (|\lambda| + C\delta)^2/|\lambda| < 1$ i obtenim:

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z)) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C|f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{\rho^n C|z|^2}{|\lambda|}, \quad |z| \leq \delta.$$

Per tant, $\varphi_n(z)$ convergeix uniformement per a $|z| \leq \delta$ i la conjugació φ existeix.

Un cop vista l'existència, procedim a provar la unicitat.

Suposem que existeixen φ, ϕ dues conjugacions de f . Per tant $\phi \circ \varphi^{-1}$ és una conjugació i així doncs:

$$\phi \circ \varphi^{-1}(\lambda z) = \lambda \phi \circ \varphi^{-1}(z)$$

Desenvolupant la igualtat anterior per a sèries de potències obtenim:

$$\sum_{i \geq 1} (c_i \lambda^i z^i) = \lambda \sum_{i \geq 1} (c_i z^i) \Leftrightarrow c_1 \lambda z + c_2 \lambda^2 z^2 + \dots = \lambda(c_1 z + c_2 z^2 + \dots).$$

Igualant aquesta igualtat terme a terme obtenim:

$$c_1 \lambda = \lambda c_1 \quad \checkmark$$

$$c_2 \lambda^2 = \lambda c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0 \wedge \lambda^2 = \lambda \text{ però per hipòtesi tenim que } 0 < |\lambda| < 1 \Rightarrow c_2 = 0.$$

...

$$c_n \lambda^n = \lambda c_n \Leftrightarrow c_n = 0 \wedge \lambda^n = \lambda \text{ però per hipòtesi tenim que } 0 < |\lambda| < 1 \Rightarrow c_n = 0.$$

Acabem de provar

$$\phi \circ \varphi^{-1}(\lambda z) = c_1 z$$

d'on obtenim: $\phi(u) = c_1 \varphi(u)$. □

La conjugació definida anteriorment és normalitzada i compleix $\varphi'(z_0) = 1$. L'equació de Schröder que satisfà la funció de conjugació φ es converteix en

$$\varphi(f(z)) = \lambda \varphi(z).$$

Aquesta equació ens permet estendre φ analíticament a tota la conca d'atracció $A(z_0)$ a partir de la fórmula

$$\varphi(z) = \varphi(f^n(z))/\lambda^n$$

on n és suficientment gran i $f^n(z)$ pertany a un entorn de z_0 .

L'aplicació φ serà bijectiva fins a trobar un punt crític.

Punts fixos repulsors

L'existència d'una funció de conjugació per a punts fixos repulsors és immediata a partir del cas atractor. Suposant

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \dots \text{ on } |\lambda| > 1.$$

Llavors

$$f^{-1}(z) = z_0 + (z - z_0)/\lambda + \dots$$

té z_0 com a punt fix atractor. Per tant, qualsevol conjugació de $f^{-1}(z)$ amb ξ/λ també conjuga $f(z)$ amb $\xi\lambda$.

Punts fixos superattractos

Teorema 4.6 (Teorema de Boettcher). *Sigui z_0 un punt fix superattractor de f .*

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots, \quad a_p \neq 0, p \geq 2.$$

Aleshores existeix una transformació conforme $\xi = \varphi(z)$ d'un entorn de z_0 a un entorn de 0, que conjuga $f(z)$ amb ξ^p . Aquesta conjugació és única llevat de la multiplicació per una arrel $(p-1)$ -èsima de la unitat.

Demostració. Podem suposar $z_0 = 0$, ja que si $z_0 \neq 0$ fent el canvi de variables $w = z - z_0$ obtenim $w_0 = z_0 - z_0 = 0$. Com que z_0 és un punt fix superattractor, per $|z|$ petit existeix $C > 1$ tal que $|f(z)| \leq C|z|^p$ ja que $f(z) = a_p z^p + \dots \Rightarrow |f(z)| \leq C|z|^p$.

Volem provar mitjançant inducció que $|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}$, $|z| \leq \delta$.

Estudiem primer el cas $n = 2$.

$$|f^2(z)| = |f(f(z))| \leq C|f(z)|^p \leq C|C|z|^p|^p = C|C^p|z|^{p^2} = C^{p+1}|z|^{p^2} \leq (C|z|)^{p^2}.$$

Ja que $C > 1$ i $p \geq 2 \Rightarrow C^{p+1} \leq C^{p^2}$.

Podem suposar que es compleix $|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}$ i volem veure que en el cas $n + 1$ també. Considerem $|f^{n+1}(z)| = |(f^n \circ f)(z)| = |f^n(f(z))|$.

$$\text{Aplicant la hipòtesi d'inducció obtenim } |f^n(f(z))| \leq (C|f(z)|)^{p^n} \leq C^{p^n}|C|z|^p|^{p^n} = C^{2p^n}|z|^{p \cdot p^n} = C^{2p^n}|z|^{p^{n+1}} \leq (C|z|)^{p^{n+1}} \text{ com volíem.}$$

Hem vist doncs $|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}$, $|z| \leq \delta$. Per tant, tenim que $f^n(z) \rightarrow 0$ superexponencialment.

Podem suposar $a_p = 1$, ja que en cas contrari podem fer el canvi de variables $w = cz$ on $c^{p-1} = 1/a_p$. Aleshores podem conjugar f a una funció de la forma $\tilde{f}(w) = w^p + \dots$. El nostre objectiu és trobar una transformació conforme $\varphi(z) = z + \dots$ tal que $\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p$. És equivalent a veure que $(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(\xi) = \xi^p$.
Sigui

$$\varphi_n(z) = f^n(z)^{p^{-n}} = (z^{p^n} + \dots)^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}}$$

està ben definida en un entorn de l'origen. Les funcions φ_n satisfan:

$$\varphi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{p^{-n+1}} = \varphi_n^p$$

Si $\varphi_n \rightarrow \varphi$ aleshores, φ satisfà $\varphi \circ f = \varphi^p$ i per tant també és una solució. Volem doncs demostrar que $\{\varphi_n\}$ convergeix:

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \left(\frac{\varphi_n \circ f^n}{f^n} \right)^{p^{-n}} = \left(\frac{f^n(z)(1 + \mathcal{O}(|f^n|))^{p-1}}{f^n(z)} \right)^{p^{-n}} = (1 + \mathcal{O}(|f^n|))^{p^{-n}} = 1 + \mathcal{O}(p^{-n}) \mathcal{O}(|z|^{p^n} C^{p^n}) = 1 + \mathcal{O}(p^{-n})$$

En la quarta igualtat desenvolupem el binomi de Newton i utilitzem que $|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}$. La cinquena és una conseqüència de que prop de l'origen $|z|^{p^n} C^{p^n} \rightarrow 0$ quan n es fa gran.

Si $|z| \leq 1/C$, el producte

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$$

convergeix uniformement per $|z| \leq c < 1/C$, i per tant $\{\varphi_n\}$ convergeix. Acabem de provar l'existència de φ .

Finalment, hem de veure que la transformació conforme φ és única llevat del producte per arrels $(p-1)$ -èsimes de la unitat:

La demostració de la unicitat és anàloga al cas atractor. Si φ, ϕ són conjugacions aleshores $\phi \circ \varphi^{-1}$ també és una conjugació. Per tant, es compleix

$$\phi \circ \varphi^{-1}(z) = \phi \circ \varphi^{-1}(z)^p.$$

Igualant les sèries de potència, com en el cas anterior, i sota la hipòtesi que $\lambda = 0$ obtenim: $\phi(u) = c_1 \varphi(u)$ on $c_1^p = c_1$ i, per tant, hem vist que φ és única llevat del producte d'arrels $(p-1)$ -èsimes de la unitat. \square

De nou, si f depèn analíticament d'un paràmetre, aleshores el mateix passa amb la conjugació φ construïda anteriorment, queda com a exercici veure que en aquest cas φ satisfà l'equació funcional:

$$\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p.$$

La representació conforme φ es pot estendre fins a trobar un punt crític de f .

Punt fixos parabòlics (racionalment neutrals)

Per a punts fixos d'aquest tipus, tenim un resultat en [Bea], on s'explica com de complicada resulta la dinàmica a l'entorn de l'origen.

Definició 4.7. *Siguin $t \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}$ i $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ aleshores definim els pètals a l'origen com els conjunts següents:*

$$\pi_{\mathbf{k}}(t) = \{re^{ie} : r^p < t(1 + \cos(p\theta)), |2k\pi/p - \theta| < \pi/p\}.$$

Teorema 4.8 (Teorema dels pètals). *Suposem que f té com a expansió de Taylor*

$$f(z) = z - z^{p+1} + \mathcal{O}(z^{2p+1})$$

prop de l'origen. Llavors per a tot t suficientment petita es compleix:

- f envia cada pètal $\pi_{\mathbf{k}}(t)$ a sí mateix.
- $f^n(z) \rightarrow 0$ uniformement en cada pètal quan $n \rightarrow \infty$.
- $\arg f^n(z) \rightarrow 2k\pi/p$ localment uniforme en $\pi_{\mathbf{k}}(t)$ quan $n \rightarrow \infty$.
- $|f(z)| < |z|$ en un entorn de l'eix de cada pètal.
- $f: \pi_{\mathbf{k}}(t) \rightarrow \pi_{\mathbf{k}}(t)$ és pot conjuguar amb una translació.

La demostració del Teorema dels pètals es pot trobar en [Bea].

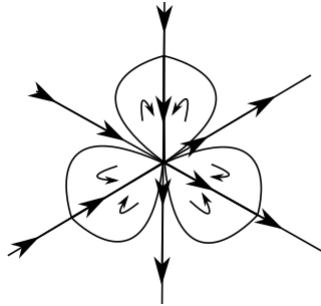


Figura 1: Esbós del Teorema dels pètals per $p=3$

Punts fixos irracionalment neutrals

Considerem ara $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ on θ és irracional. Busquem una solució φ de l'equació de Schröder $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$, normalitzada per $\lambda'(0) = 1$. Per $h = \varphi^{-1}$ l'equació es converteix en

$$f(h(\xi)) = h(\lambda\xi), \quad h'(0) = 1$$

Pels punts fixos irracionalment neutrals les condicions necessàries per a ser linealitzables o no resulta un problema molt complicat, ja que de fet actualment encara hi ha molts problemes oberts.

Definició 4.9. *Els punts linealitzables s'anomenen punts de Siegel i els que no ho són punts de Cremer.*

La classificació dels punts fixos irracionalment neutrals en un dels dos anteriors és un problema que involucra l'aritmètica de θ .

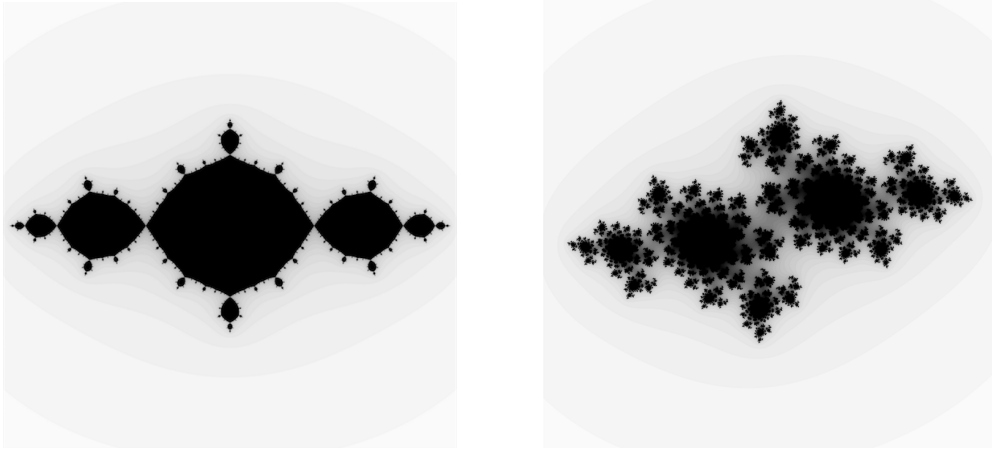


Figura 2: Dinàmica prop de l'origen de $f(z) = z^2 - 1$ i $f(z) = z^2 - 0.7 + 0.3i$.

Teorema 4.10 (Teorema de Jacobi). *L'òrbita de qualsevol punt $z_0 \in \mathbb{C}$ per a la funció $f(z) = ze^{i\theta 2\pi}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ és densa en el cercle de radi $|z_0|$.*

Teorema 4.11. *Una solució h de l'equació de Schröder anterior, en qualsevol disc $\mathbb{D}_r = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r\}$ és injectiva.*

Demostració. Suposem que $h(\xi_1) = h(\xi_2)$. Llavors $h(\lambda^n \xi_2) = h(\lambda^n \xi_1) \forall n > 0$. Com que $\{\lambda^n\}$ pel Teorema de Jacobi és dens en el cercle unitat. Per tant $h(\xi_1 e^{i\theta}) \equiv h(\xi_2 e^{i\theta}) \forall \theta \Rightarrow h(\xi_1 z) = h(\xi_2 z)$ per $|z| < 1$. Com que $h'(0) = 1 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$. \square

Teorema 4.12. *Una funció f és linealitzable si i només si la successió d'iteracions $\{f^n\}$ és uniformement acotada en un entorn de l'origen.*

Demostració. \Rightarrow) Si existeix h aleshores $f^n(z) = h(\lambda^n h^{-1}(z))$ és acotat.
 \Leftarrow) Si $|f^n| \leq M \forall n$, podem definir

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-j} f^j(z).$$

Aleshores $\{\varphi_n\}$ és una successió uniformement acotada de funcions analítiques. Per tant conté una subsuccessió convergent. Tenim $\varphi_n \circ f = \lambda \varphi_n + \mathcal{O}(1/n)$. Qualsevol

limit de φ_n satisfà $\varphi f = \lambda \varphi$. On $\lambda = f'(0)$ tenim doncs $\varphi'_n(0) = 1$ i $\varphi'(0) = 1 \Rightarrow h = \varphi^{-1}$ és solució de l'equació de Schröder. \square

Una conseqüència immediata del teorema anterior és que si f és topològicament conjugada a λz prop del 0, llavors, podem trobar una conjugació conforme.

Definició 4.13. Un nombre real θ és diofàntic si existeixen $c > 0$ i $\mu < \infty$ tals que $|\theta - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^\mu}$ on p, q són enters amb $q \neq 0$. Denotem per \mathcal{D} el conjunt dels nombres diofàntics.

Observació 4.14. Un nombre θ és diofàntic si i només si $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ satisfà

$$|\lambda^n - 1| \geq cn^{1-\mu}, \quad n \geq 1.$$

Teorema 4.15 (Teorema de Siegel). Si θ és un nombre diofàntic, i si f té un punt fix en el 0 amb multiplicador $e^{2\pi i \theta}$, llavors, f és linealitzable. Per tant, f és conjugada prop del 0 a la multiplicació per $e^{2\pi i \theta}$.

Donarem l'idea que segueix la demostració. Per a demostrar-ho, és necessari resoldre $h(\lambda z) = f(h(z))$. Definint \tilde{f}, \tilde{h} per $f(z) = \lambda z + \tilde{f}(z)$ i $h(z) = z + \tilde{h}(z)$ llavors l'equació es pot escriure

$$\tilde{h}(\lambda z) - \lambda \tilde{h}(z) = \tilde{f}(h(z)).$$

La demostració original de Siegel consisteix en desenvolupar els dos costats de la igualtat per a sèries de potències utilitzant

$$\tilde{h}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

Inductivament s'obtenen equacions de la forma $a_n(\lambda^n - \lambda) = A_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_2, \dots, b_n)$, $n \geq 2$. Utilitzant $|\lambda^n - \lambda| > cn^{1-\mu}$ es pot estimar el valor de a_n i així provar la convergència de la sèrie de potències.

Yoccoz va aconseguir fer una demostració geomètrica alternativa a la de Siegel. El mètode de la qual generalitzava el resultat als nombres de la classe $\mathcal{B} \supset \mathcal{D}$ i que definim a continuació. Va ser tal la importància d'aquest fet que a l'any 1994 Yoccoz va guanyar la Medalla Fields.

Definició 4.16. Un nombre irracional θ és un nombre de Bryuno si es compleix que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n}$ convergeix a un nombre finit, on q_n és el denominador de la n -èsima fracció convergent de $\frac{p_n}{q_n}$ de l'expansió continua per fraccions de θ . Denotem per \mathcal{B} el conjunt de tots els nombres de Bryuno.

Es pot demostrar que els nombres de Bryuno inclouen els diofàntics, és a dir, $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$.

Teorema 4.17 (Teorema de Yoccoz, Bryuno i Russmann). : Si θ és un nombre de Bryuno, i si f té un punt fix en el 0 amb multiplicador $e^{2\pi i\theta}$, llavors f és linealitzable. Per tant, f és conjugada prop del 0 a la multiplicació per $e^{2\pi i\theta}$.

La linealització és un concepte local. Però es pot estendre a un entorn d'un punt fix.

Definició 4.18. Anomenem *disc de Siegel al màxim entorn d'un punt fix on f és linealitzable*.

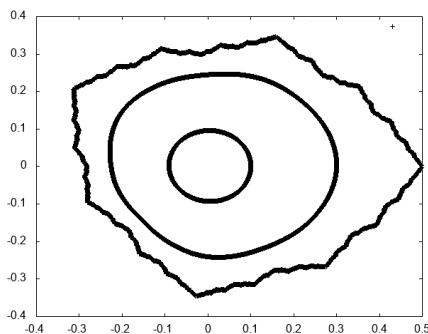


Figura 3: Imatge d'un disc de Siegel per a la funció $f(z) = \lambda z(1 - z)$ on $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ i $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, és a dir, θ és la raó àuria.

Donada una funció racional f , denotem per Δ el seu disc de Siegel. Per definició de Δ podem afirmar que f és linealitzable i que per tant, existeix un homeomorfisme φ que compleix $\Delta = \varphi^{-1}(\mathbb{D})$. La funció φ és la funció de Riemann i aplicant el Teorema de Riemann obtenim que Δ és simplement connex.

El fet que el disc de radi 1 centrat en l'origen i el disc de Siegel siguin conformament equivalents és un fet que pot resultar curiós, ja que el disc de Siegel pot comportar-se de maneres molt estrambòtiques i en la seva frontera és molt irregular (veure per exemple figura 3) tot el contrari que el disc unitat.

4.3 Teoria global

En la secció anterior hem estudiat com era la dinàmica al voltant dels diferents tipus de punts fixos. Aquesta secció té com objectiu caracteritzar la dinàmica per a qualsevol punt del pla complex per a funcions racionals $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ de f major que 1.

La teoria global, pretén classificar els punts del pla en termes de la seva dinàmica. Per això serà molt útil el concepte de normalitat, que hem vist en seccions anteriors, aplicat a la família de funcions formada pels iterats de la funció que considerem. La informació d'aquesta secció esta extreta bàsicament de [BF, CG] i algun detall ha estat comparat amb [Bea, Ste].

El primer conjunt que estudiem és el conjunt de punts "estables" sota la iteració de f . S'anomena el conjunt de Fatou. Altrament, la dinàmica de f sobre el conjunt complementari, el conjunt de Julia, és inestable o "caòtica" com veurem posteriorment.

Definició 4.19. Donada $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una funció holomorfa, definim el conjunt de Fatou de f com

$$\mathcal{F}(f) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \{f^n\}_n \text{ és una normal en un entorn de } z\}.$$

Definició 4.20. Definim el conjunt de Julia com el seu complementari.

$$\mathcal{J}(f) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{F}(f).$$

El conjunt de Fatou és un subconjunt obert de \mathbb{C}_∞ , el conjunt de Julia és compacte en \mathbb{C}_∞ . És fàcil veure que aquests dos conjunts són totalment invariants.

Efectivament, si $z \in \mathcal{F}(f)$ aleshores $\{f^n\}_n$ són normals en un entorn U de z , i per tant també ho són en l'entorn $f(U)$ de $f(z)$.

La invariància sota f^{-1} es veu de manera similar, i això assegura la invariància de $\mathcal{J}(f)$.

Els conjunts de Fatou i Julia es conserven per conjugacions topològiques. En el sentit que si h és un homeomorfisme tal que $h \circ f = g \circ h$ on f, g són funcions holomorfes llavors

$$\mathcal{J}(g) = h(\mathcal{J}(f)) \text{ i } \mathcal{F}(g) = h(\mathcal{F}(f)).$$

Una propietat del conjunt de Julia que és conseqüència del Teorema de Montel-Caratheòdri és que si tenim $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ i U un entorn obert de z_0 aleshores, $\bigcup_{n \geq 0} f^n(U) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{E}(f)$ on $\mathcal{E}(f)$ és el conjunt excepcional definit seguidament.

Definició 4.21. Donat $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ i $z \in \mathbb{C}_\infty$ definim la gran òrbita de z com

$$GO(z) = \{w \in \mathbb{C}_\infty : f^p(z) = f^q(w) \text{ per algun } p, q \in \mathbb{N}\}.$$

Definició 4.22. Definim el conjunt excepcional $\mathcal{E}(f)$ com el conjunt de punts amb una gran òrbita finita.

Observació 4.23. És directe veure, a partir de les propietats descrites anteriorment, que el cardinal de $\mathcal{E}(f)$ és més petit o igual a 2 i que $\mathcal{E}(f) \subset \mathcal{J}(f)$

A continuació enunciem varies propietats fonamentals dels conjunts de Fatou i Julia.

Proposició 4.24 (Propietats dels conjunts de Julia i Fatou). *Sigui $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una funció holomorfa.*

- 1) Per a qualsevol $k > 0$ es compleix $\mathcal{J}(f^k) = \mathcal{J}(f)$.
- 2) Cada cicle atractiu de f i la seva conca d'atracció pertanyen a $\mathcal{F}(f)$.
- 3) Sigui z_0 un punt fix atractiu, sigui $A(z_0)$ la seva conca d'atracció aleshores es compleix $\mathcal{J}(f) = \partial A(z_0)$.
- 4) Cada cicle repulsor o parabòlic pertany a $\mathcal{J}(f)$.
- 5) $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ i és infinit.
- 6) Es compleix o bé $\text{int}(\mathcal{J}(f)) = \emptyset$ o bé $\mathcal{J}(f) = \mathbb{C}$.
- 7) $\mathcal{J}(f)$ no té punts aïllats.
- 8) O bé $\mathcal{J}(f)$ és connex o bé té incontables components.
- 9) Els iterats d'un punt $z \in \mathcal{J}(f)$ són densos en $\mathcal{J}(f)$.
- 10) Els punts fixos repulsors són densos en $\mathcal{J}(f)$.

Seguidament demostrarem algunes de les propietats esmentades anteriorment, les altres poden trobar-se per exemple en [Bea, CG].

Demostració.

- 1) Es dedueix de que $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^k)$ ja que $\{f^n\}_n$ és un conjunt normal i obert de Ω si i només si $\{f^{nk}\}_n$ és normal en Ω .
- 6) Suposem que existeix un obert $U \subset \mathcal{J}(f)$. Llavors $f^n(U) \subset \mathcal{J}(f)$. Però $\cup f^n(U) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{E}(f)$ és dens en \mathbb{C}_∞ , no obstant $\mathcal{J}(f)$ és tancat, aleshores $\mathcal{J}(f) = \mathbb{C}_\infty$.
- 7) Prenem $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ i U un entorn obert de z_0 . Sabem que els iterats de z_0 per f estaran en $\mathcal{J}(f)$, en conseqüència tenim $\mathcal{J}(f) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$ i com que $\mathcal{J}(f)$ és invariant podem afirmar que U conté punts de $\mathcal{J}(f)$, és a dir, z_0 no és un punt aïllat.

□

$\mathcal{F}(f)$ és un obert i generalment té infinites components connexes anomenades components de Fatou. Per tant, és una conseqüència de la invariància dels conjunts $\mathcal{J}(f)$, $\mathcal{F}(f)$ i del principi del mòdul màxim que aquestes components es corresponen entre elles per f . En altres paraules si U és una component de Fatou llavors $f(U)$ també ho és.

Definició 4.25. Sigui U una component del conjunt de Fatou de f , llavors U és:

- *p*-periòdic: si $f^p(U) \subset U$ per a un mínim $p > 0$.
- Preperiòdic: si $f^k(U)$ és periòdic per algun $k > 0$ però U no ho és.

- *Errant: si $f^k(U) \cap f^m(U) = \emptyset$ per tot $k, m > 0, k \neq m$.*

Si U és p -periòdic, denotem per $\mathcal{O}(U)$ el cicle de les components del conjunt de Fatou el qual U pertany.

El següent teorema és un dels pilars de la dinàmica complexa i és una barreja entre un teorema inicial de Fatou amb una aportació posterior i molt important de Sullivan. De fet, aquests dos teoremes, es poden veure per separat en [BF] i són el teorema 3.39 i el teorema 4.2 respectivament.

Teorema 4.26. *(Classificació de les components periòdiques del conjunt de Fatou) Sigui $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ holomorfa, és a dir, f és racional i U una component del conjunt de $\mathcal{F}(f)$. Llavors, U és periòdica o preperiòdica i només pot passar un dels casos següents:*

- i) *U conté un punt p -periòdic atractor z_0 i $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ quan $n \rightarrow \infty$ per a tot $z \in U$. El cicle $\mathcal{O}(U)$ s'anomena conca d'atracció immediata del cicle atractor $\mathcal{O}(z_0)$ i es denota $\mathcal{A}^*(z_0)$.*
- ii) *∂U conté un punt periòdic z_0 i $f^{np} \rightarrow z_0$ quan $n \rightarrow \infty$ per a tot $z \in U$. El cicle $\mathcal{O}(U)$ s'anomena conca parabòlica d'atracció immediata del cicle parabòlic $\mathcal{O}(z_0)$.*
- iii) *Existeix una representació conforme $\psi : U \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $(\psi \circ f \circ \psi^{-1})(z) = e^{2\pi iw} z$ per algun $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. El cicle $\mathcal{O}(U)$ s'anomena p -cicle de discs de Siegel.*
- iv) *Existeix $0 < r < 1$ i una representació conforme $\psi : U \rightarrow A_r := \{r < |z| < 1\}$ tal que $(\psi \circ f \circ \psi^{-1})(z) = e^{2\pi iw} z$ per algun $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. El cicle $\mathcal{O}(U)$ s'anomena p -cicle dels anells de Herman.*

La demostració d'aquest teorema, que pot trobar-se a [Mil] excedeix l'abast d'aquest treball.

Punts crítics de f

En aquesta subsecció volem veure la relació que existeix entre les diferents components de Fatou i el conjunt de punts crítics de f . Demostrarem que la conca d'atracció d'un cicle atractor o neutral conté un punt crític de la funció racional f . També veurem que els cicles irracionalment neutrals necessiten un punt crític "associat". Això significa que el nombre de cicles no repulsors és més petit o igual al nombre de punts crítics de la funció f de grau $d > 1$, que és $2d - 2$. En primer lloc, veiem que el nombre de punts crítics és $2d - 2$.

Proposició 4.27. *Sigui f una funció racional de grau d , aleshores f té com a molt $2d - 2$ punts crítics en \mathbb{C} .*

Demostració. Sigui $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ sabem que $d = \max\{d_p, d_q\}$ on d_p i d_q són els graus dels polinomis p i q respectivament.

La derivada de f , $f'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q^2(z)}$ té grau $d_q + d_p - 1$, que a menys que $d_q = d_p$, es compleix $d_q + d_p - 1 \leq 2d - 2$. En el cas que es compleixi $d_q = d_p = d \geq 2$, dividint el numerador per el denominador, la funció f es pot reescriure de la següent manera: $f(z) = \frac{aq(z) + S_{d-1}(z)}{q(z)} = a + \frac{S_{d-1}(z)}{q(z)}$, on S_{d-1} és el polinomi de grau $d - 1$ (residu de la divisió) i a una constant. D'aquesta forma, ens trobem en la situació anterior i per tant f té com a molt $2d - 2$ punts crítics. \square

Anteriorment, hem mencionat que volíem veure que les conques d'atracció d'un cicle no repulsor contenen un punt crític de la funció racional f , ho veiem en els dos teoremes que es mostren a continuació.

Teorema 4.28. *Si z_0 és un punt periòdic atractiu d'una funció racional f , llavors la seva conca de atracció immediata $A^*(z_0)$ conté com a mínim un punt crític de f .*

Demostració. Suposem que z_0 és un punt fix atractiu, és a dir, el seu multiplicador λ compleix: $0 < |\lambda| < 1$. Considerem U_0 un entorn de z_0 invariant per f , on es compleix que existeix una branca g de f^{-1} que satisfà $g(z_0) = z_0$ i està ben definida. La branca g envia U_0 a $A^*(z_0)$ i és injectiva. Llavors $U_1 = g(U_0)$ és un obert simplement connex complint $U_0 \subset U_1$.

Suposem que $A^*(z_0)$ no conté cap punt crític, o sigui, la inversa no té cap obstrucció. Reiterant el procés anterior i estenent g a cada pas, obtenim una successió d'oberts $\{U_n\}_n$ complint $U_n \subset U_{n+1} = g(U_n)$. Aleshores U_n es pot estendre analíticament per g a U_{n+1} . Si aquest procediment no acaba, obtenim la successió $\{g^n\}_n$ tal que per a tot n , $g^n|_{U_0}: U_0 \rightarrow U_n \subset A^*(z_0) \subset F(f)$. Com que $z_0 \in U_0$ és un punt fix repulsor de g això implica que $g^n|_{U_0}$ no és normal, fet que és una contradicció i obtenim que no podem arribar a U_n estenent g , és a dir, existeix un punt crític $p \in A^*(z_0)$ de f tal que $f(p) \in U_n$.

Si z_0 és un punt periòdic atractiu amb període $n > 1$ i complint $|(f^n)'(z_0)| < 1$. L'argument anterior demostra que cada component de $A^*(z_0)$ conté un punt crític de f^n . Sabem que $(f^n)'(z) = \prod_{j \geq 0} R'(R^j(z))$ i per tant $A^*(z_0)$ també conté un punt crític de f . \square

De forma anàloga en [CG] es demostra el mateix resultat per a punts periòdics parabòlics.

Teorema 4.29. *Sigui z_0 un punt periòdic parabòlic, aleshores la conca d'atracció associada al cicle de z_0 conté un punt crític.*

A partir dels dos teoremes anteriors que ens proven que les conques d'atracció d'un punt periòdic atractiu o parabòlic tenen com a mínim un punt crític de f , podem demostrar el següent teorema.

Teorema 4.30. *Sigui f una funció racional de grau $d > 1$. El nombre de cicles atractius més el nombre de cicles parabòlics (contats amb multiplicitat) és com a molt $2d - 2$.*

Demostració. Aplicant els dos teoremes anteriors, utilitzant que les conques d'atracció són disjunts i fent servir que f té com a molt $2d - 2$ punts crítics, obtenim el resultat. \square

Observació 4.31. En general, aquesta afirmació és falsa en dinàmica real, ja que una funció diferenciable de \mathbb{R} pot tenir infinits punts atractors.

Definició 4.32. Donada una funció f definim el conjunt postcrítics com

$$P_f = \overline{\bigcup_{v \in \text{sing}(f^{-1})} \bigcup_{n \leq 0} f^n(v)}$$

on $\text{sing}(f^{-1})$ denota el conjunt dels punts crítics de f .

El següent resultat es pot veure en [BF] i ens relaciona els cicles de Siegel, Herman o Cremer amb els punts crítics.

Teorema 4.33. Siguin f una funció racional de grau $d > 1$ i U una component de Fatou.

- Sigui $\mathcal{O}(U)$ un cicle de Siegel o un anell de Herman, aleshores per a cada $U' \in \mathcal{O}(U)$ es compleix que $\partial U' \subset P_f$.
- Si $\mathcal{O}(z_0)$ és un cicle de Cremer, per a cada $z \in \mathcal{O}(z_0)$ tenim $z \in P_f$.

4.4 Polinomis

En el transcurs d'aquesta secció estudiarem com es comporta un polinomi complex p de grau $d \leq 2$ quan l'iterem. En general, la informació d'aquesta secció ha estat extreta de [BF, CG, Mil].

Tenim doncs que p és de la següent forma

$$p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

on $a_d \neq 0$. Notem doncs que $p(\infty) = \infty = p^{-1}(\infty)$. El polinomi p té $d - 1$ punts crítics en \mathbb{C} comptats amb multiplicitat i un punt crític amb multiplicitat $d - 1$ a l'infinit. Notem per $\text{Crit}(p)$ el conjunt de punts crítics finits de p .

El punt d'infinit sempre és un punt fix superatractor, veiem-ho.

Per tal de trobar el valor de la derivada del punt infinit, hem de fer primer el canvi de cartes $z \rightarrow \frac{1}{\zeta}$. Definim la funció $f(\zeta) = \frac{1}{p(1/\zeta)} = \frac{\zeta^d}{a_d + a_{d-1}\zeta + \cdots + a_0\zeta^d}$ complint $p(\infty) = f(0)$ i $p'(\infty) = f'(0)$. Calculem $f'(0)$:

$$f'(\zeta) = \frac{d\zeta^d(a_d + a_{d-1}\zeta + \cdots + a_0\zeta^d) - \zeta^d(a_{d-1} + \cdots + da_0\zeta^{d-1})}{(a_d + a_{d-1}\zeta + \cdots + a_0\zeta^d)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{0-0}{a_d^2} = 0 = p'(\infty).$$

Concloem doncs que l'infinit és un punt fix superatractor i definim la seva conca d'atracció.

Definició 4.34. *Donat un polinomi p , anomenem conca d'atracció de l'infinit al conjunt*

$$\mathcal{A}_p(\infty) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} p^n(z) = \infty\}.$$

La conca de l'infinit sempre és un conjunt obert connex, ja que p no té pols i per tant $\mathcal{A}_p(\infty)$ no té cap antiimatge diferent de si mateixa. El seu complementari és conegut com al conjunt ple de Julia:

Definició 4.35. *Donat un polinomi p definim el conjunt ple de Julia com:*

$$\mathcal{K}(p) := \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{A}_p(\infty).$$

Lema 4.36. *Per a qualsevol polinomi p de grau $d \geq 2$, el conjunt ple de Julia $\mathcal{K}(p) \subset \mathbb{C}$ és compacte, $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}(p)$ és connex, o equivalentment, totes les components de Fatou acotades U són simplement connexes.*

Demostració. És evident que $\frac{p(z)}{z^d} \rightarrow a_d$ quan $|z| \rightarrow \infty$. Podem suposar que p és un polinomi mónico, és a dir, $a_d = 1$. Prenem $r_0 \geq 2$ una constant tal que $|\frac{p(z)}{z^d} - 1| < \frac{1}{2}$ per a $|z| > r_0$, d'on segueix:

$$|p(z)| > \frac{|z^d|}{2} > 2|z| \text{ per a } |z| > r_0.$$

En deduïm que per a z tal que $|z| > r_0$ aleshores $z \in \mathcal{A}_p(\infty)$. Com que $\mathcal{K}(p) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{A}_p(\infty)$, $\mathcal{K}(p)$ és compacte.

Veiem ara que una component de Fatou acotada no pot estar en $\mathcal{A}_p(\infty)$. Sigui $U \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \partial\mathcal{K}(p)$ una component de Fatou acotada. Per a $z \in U$ i $n \geq 0$ qualsevol, es compleix que $|f^n(z)| \leq r_0$. Per altre banda, aplicant el principi del mòdul màxim tenim que existeix $w \in \partial U \subset \partial\mathcal{K}(p)$ tal que $|f^n(w)| > r_0$. Això implica que $w \in \mathcal{A}_p(\infty)$, aquest fet és una contradicció perquè cada component acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus \partial\mathcal{K}(p)$ està continguda en $\mathcal{K}(p)$ i l'única component no acotada s'identifica amb $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}(p) = \mathcal{A}_p(\infty)$.

De manera similar, si γ és una corba tancada de U , considerem V com la component connexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. És conseqüència del principi del mòdul màxim que $V \subset \mathcal{K}(p)$, i en particular, V no pot contenir punts de $\partial\mathcal{K}(p)$. Concloem que $V \subset U$ i per tant, U és simplement connex. \square

La següent proposició relaciona el conjunt ple de Julia amb els conjunts de Julia i Fatou.

Proposició 4.37.

$$i) \text{ int}(\mathcal{K}(p)) \subset \mathcal{F}(p)$$

ii) $\partial\mathcal{K}(p) \subset \mathcal{J}(p)$

Demostració.

i) Sigui $z \in \text{int}(\mathcal{K}(p))$ i $U \subset \text{int}(\mathcal{K}(p))$ un entorn obert de z , per definició existeix $R > 0$ tal que per a tot $n > 0$, $p^n|_U(z) \subset D(0, R)$. Aplicant el Teorema de Montel-Caratheodory obtenim que p^n és normal en U i per tant $z \in \mathcal{F}(p)$.

ii) Sigui $z \in \partial\mathcal{K}(p)$ i U un entorn obert de z . Com que $z \in \partial\mathcal{K}(p)$, aleshores U té punts de $\mathcal{K}(p)$ i de $\mathcal{A}_p(\infty)$. Suposem que per a tot $n > 0$, la funció $p^n|_U$ és normal, això implica que existeix una subsuccessió parcial p^{n_k} que convergeix uniformement a p en U . Però p no pot ser continua ja que per $z \in \mathcal{A}_p(\infty)$, tenim $p(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} p^{n_k}(z) = \infty$. En canvi si $z \in \mathcal{K}(p)$, llavors $p^{n_k}(z) \not\rightarrow \infty$ que està en contradicció amb el fet que p sigui continua, per tant $z \in \mathcal{J}(p)$. □

Un cop demostrada aquesta proposició podem donar les definicions dels conjunts de Julia i de Fatou adaptades als polinomis:

Definició 4.38. *Sigui p un polinomi, definim el conjunt de Julia com la frontera dels dos conjunts anteriorment descrits, és a dir:*

$$\mathcal{J}(p) = \partial\mathcal{K}(p) = \partial\mathcal{A}_p(\infty).$$

Definició 4.39. *Sigui p un polinomi, el conjunt de Fatou $\mathcal{F}(p)$ consisteix en la unió de la component connexa de $\mathcal{A}_p(\infty)$ i totes les components connexes de l'interior de $\mathcal{K}(p)$, si n'hi ha.*

Recordem que el punt infinit és un punt fix superatractor per a qualsevol polinomi p de grau d . El Teorema de Boettcher ens assegura l'existència d'un entorn U de ∞ i una conjugació local φ tal que $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ conjugua $p(z)$ amb $z \mapsto z^d$. Proseguim a trobar de forma gairebé explícita aquesta conjugació:

Podem suposar que p és un polinomi mónico. Per estudiar p al voltant de l'infinit fem el canvi de cartes descrit anteriorment $z = \frac{1}{\zeta}$ i considerem la funció racional $f(z) = \frac{1}{p(1/\zeta)}$.

De la igualtat asimptòtica $p(z) \sim z^d$ quan $z \rightarrow \infty$, obtenim que $f(\zeta) \sim \zeta^d$ quan $\zeta \rightarrow 0$ ja que 0 és un punt fix superatractor de f .

Pel Teorema de Boettcher (4.6), existeix una funció

$$\phi(\zeta) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(\zeta)^{\frac{1}{d^k}} \in \mathbb{D}.$$

que és biholomorfa per a $|\zeta|$ suficientment petit, amb $\phi'(0) = 1$, ja que p és un polinomi mónico.

Tornant al punt de l'infinit, definim la funció φ com la composició

$$\varphi(z) = \frac{1}{\phi(1/z)} = \lim_{k \rightarrow \infty} p^k(z)^{\frac{1}{d^k}} \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

La funció φ envia un entorn de l'infinit biholomorfament a un altre entorn de l'infinit, amb $\varphi(z) \sim z$ quan $|z| \rightarrow \infty$ i φ conjuga el polinomi p de grau d amb la d -èsima potència:

$$\varphi(p(z)) = \varphi(z)^d.$$

En el cas en que φ es pot estendre conformement a $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}(p)$ aleshores es compleix que $U = \mathcal{A}_p(\infty)$.

Definició 4.40. *La funció de Green $G : U \rightarrow [0, +\infty)$ associada al conjunt ple de Julia $\mathcal{K}(p)$ d'un polinomi mónico p de grau d , és la següent:*

$$G(z) = \log |\varphi(z)|$$

Aquesta funció es pot estendre a \mathbb{C}_∞ mitjançant $G(z) = 0$ quan $z \notin U$. Més endavant, veurem que el nom de funció de Green és justificat. Aquesta funció de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}(p)$ compleix:

$$G(p(z)) = d \cdot G(z) \text{ per a } z \in \mathcal{A}_p(\infty)$$

Les funcions de Green donen una mesura precisa de la freqüència d'escapament a l'infinit. L'exterior $\{z \in \mathbb{C} : G(z) > r\}$ de la corba de nivell, és invariant per p que és una funció de grau d sobre $\{z \in \mathbb{C} : G(z) > rd\}$. Per una r gran, $\varphi(z)$ està definida en $\{z \in \mathbb{C} : G(z) > r\}$ i l'envia conformement en $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > e^r\}$. L'equació $\varphi(z) = (\varphi(p(z)))^{\frac{1}{d}}$ permet estendre $\varphi(z)$ a $\{z \in \mathbb{C} : G(z) > \frac{r}{d}\}$ ja que cap punt crític de p pertany a aquest domini.

Definició 4.41. *Per $\rho > 0$, el conjunt de nivell*

$$G_\rho := G^{-1}(\rho) = \{z \in \mathcal{A}_p^*(\infty) : G(z) = \rho\}$$

s'anomena l'equipotencial de potencial ρ .

En el cas que $e^\rho > r$ l'equipotencial de potencial ρ és una corba tancada al voltant del conjunt de Julia.

El següent teorema ens mostra que la connexitat topològica i el comportament dinàmic al voltant de les orbites crítiques estan relacionats.

Teorema 4.42.

i) $\mathcal{K}(p)$ és connex si i només si $\text{Crit}(p) \subset \mathcal{K}(p)$. En aquest cas, la restricció del polinomi p a $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}(p)$ és conformement conjugada a $z \rightarrow z^d$ en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

ii) $\mathcal{K}(p)$ és totalment desconex si $\text{Crit}(p) \subset \mathcal{A}_p(\infty)$. En aquest cas $\mathcal{J}(p) = \mathcal{K}(p)$ i és el conjunt de cantor.

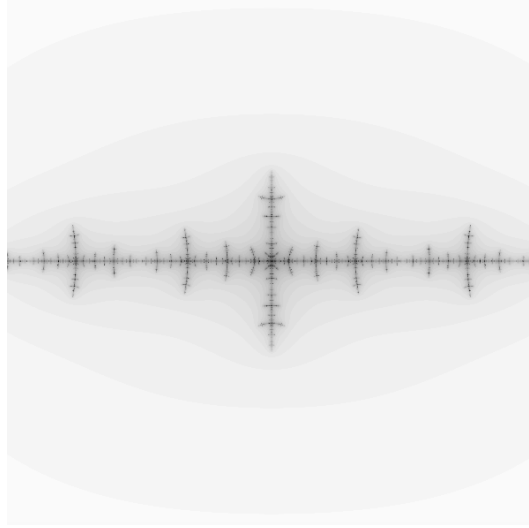


Figura 4: En l'imatge es pot observar la dinàmica en el pla complex del polinomi $p = z^2 - \frac{3}{2}$. En aquest cas el polinomi té un únic punt crític $z_0 = 0$. Es compleix que $z_0 \in \mathcal{K}(p)$ i com es veu en l'imatge $\mathcal{K}(p)$ és connex.

iii) Si com a mínim un punt crític de p pertany a $\mathcal{A}_p(\infty)$ i un altre a $\mathcal{K}(p)$, llavors tan $\mathcal{J}(p)$ com $\mathcal{K}(p)$ són desconnexes i tenen infinites components connexes.

Demostració. Per a fer aquesta demostració, utilitzem la transformació conforme φ i la funció de Green G definides anteriorment. Demostrem els tres casos per separat:

- i) Si no hi ha cap punt crític de p en $\mathcal{A}_p(\infty)$. Llavors podem estendre φ continuament per a tot $\mathcal{A}_p(\infty)$. La transformació conforme φ envia $\mathcal{A}_p(\infty)$ al complementari de \mathbb{D} . En particular el conjunt de Julia $\mathcal{J}(p) = \partial\mathcal{A}_p(\infty)$ és connex.*
- ii) Si tots els punts crítics de p estan en $\mathcal{A}_p(\infty)$. Sigui D un disc obert arbitràriament gran tal que $\mathcal{J}(p) \subset D$ i $p(\overline{\mathbb{C}} \setminus D) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$. Prenem una $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientment gran tal que p^n envii els punts crítics de p a $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Per a cada $n \geq n_0$ no existeixen punts crítics de p^n en \overline{D} , per tant qualsevol branca de la inversa p^{-n} està ben definida i envia conformement \overline{D} a D .*

Sigui $z_0 \in \mathcal{J}(p)$, llavors $p^n(z_0) \in \mathcal{J}(p)$ i podem definir f_n com la branca de la inversa de p^n que envia $p^n(z_0)$ a z_0 . Per a tot $n \geq n_0$, f_n està uniformement acotada en un entorn de \overline{D} i per tant formen una família normal. $f_n(z)$ s'acumula en $\mathcal{J}(p)$ per a $z \in D \cap \mathcal{A}_p(\infty)$. Qualsevol funció f tal que $f_n \rightarrow f$ quan $n \rightarrow \infty$, envia $z \in D \cap \mathcal{A}_p(\infty)$ a $\mathcal{J}(p)$. Com que $\mathcal{J}(p)$ no conté conjunts oberts en deduïm que f ha de ser constant.

Llavors el diàmetre de $f_n(\overline{D})$ tendeix cap a zero i $f_n(\partial D)$ és disjunt de $\mathcal{J}(p)$. Per tant $\{z_0\}$ és una component connexa de $\mathcal{J}(p)$ i és totalment desconnex.

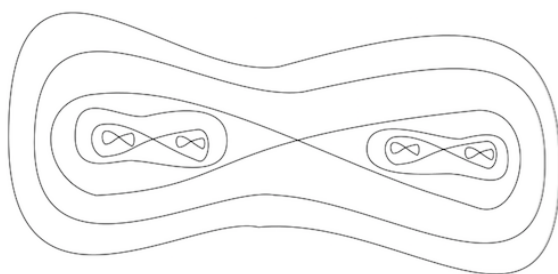


Figura 5: Esbós de les corbes de nivell de la funció de Green on $\mathcal{J}(p)$ té infinites components connexes.

- iii)* Si hi ha algun punt crític de p en $\mathcal{A}_p(\infty)$. Aleshores podem estendre φ fins a arribar a la línia de nivell $\{z \in \mathbb{C} : G(z) = r\}$ tal que la funció de Green conté un punt crític de p . El domini $\{z \in \mathbb{C} : G(z) > r\}$ és simplement connex i φ l'envia a $\{z \in \mathbb{C} : G(z) = e^r\}$. El domini està format per varies cúspides en els punts crítics, $\varphi(z)$ envia valors z propers al punt crític a les seves respectives cúspides.

Dins de cada una d'aquestes corbes o bé hi ha punts de $\mathcal{J}(p)$ o bé G ha de ser harmònica i positiva, per tant, constant dins la corba. Llavors $\mathcal{J}(p)$ és desconx; de fet, en aquest cas que $\mathcal{J}(p)$ té incomptables components connexes ja que els punts crítics de G són els punts crítics de p i tots els iterats de la seva inversa, que desdoblen les corbes de nivell en cadascun d'aquests punts crítics tal i com es mostra a la figura 5.

□

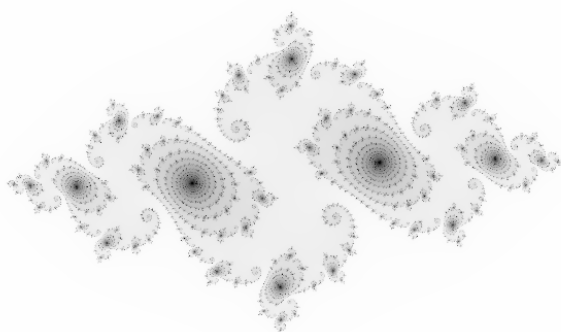


Figura 6: En l'imatge es pot observar la dinàmica en el pla complex del polinomi $p = z^2 - 0.75 + 0.11i$. En aquest cas el polinomi té un únic punt crític $z_0 = 0$. Es compleix que $z_0 \in \mathcal{A}_p(\infty)$ d'acord amb el teorema 4.42 $\mathcal{K}(p)$ és un conjunt de Cantor. En l'imatge, no es pot veure que és un conjunt de Cantor, però sí que pot observar que el conjunt $\mathcal{K}(p)$ es desconx.

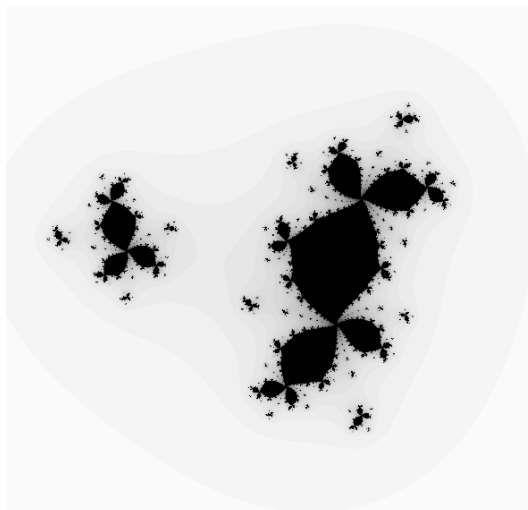


Figura 7: En l'imatge es pot observar la dinàmica en el pla complex del polinomi $p = z^3 - 0.48z + 0.7 + \frac{i}{2}$. En aquest cas el polinomi té un únic punt crític $z_0 \in \mathcal{K}(p)$ i un altre $z_1 \in \mathcal{A}_p(\infty)$. Com es veu en l'imatge $\mathcal{K}(p)$ té infinites components connexes coincidint així amb el punt *iii*) del teorema 4.42.

La regió $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}(p)$ en el cas que $\mathcal{K}(p)$ sigui connex

En el cas que $\mathcal{K}(p)$ sigui connex, llavors la transformació conforme $\varphi : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}(p) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ que conjuga $p(z)$ amb ζ^d prop de l'infinit de l'apartat *i*) del teorema anterior, s'anomenen coordenades de Boettcher i és la transformació conforme descrita pel Teorema de Riemann.

Veiem ara que quan $\mathcal{K}(p)$ és connex, aleshores $G(z) : \mathcal{A}_p(\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definida per $G(z) = \log |\varphi(z)|$ és una funció de Green.

Considerem U un entorn del punt infinit, fixat $n \in \mathbb{N}$, si φp^n està definida en $p^{-n}(U)$, aleshores podem definir la funció G_n tal que

$$G_n(z) = \frac{1}{d^n} \log |\varphi(p^n(z))|.$$

Anteriorment hem vist que la funció $\varphi(z) \sim z$ quan $|z| \rightarrow \infty$ i que envia U a l'exterior de $\overline{\mathbb{D}}$. Per tant, G_n és positiva i harmònica en $p^{-n}(U)$ (excepte en ∞).

Observem que $p^n(U) \subset p^{n-1}(U)$, prenem $z \in p^n(U)$, llavors G_n i G_{n+1} estan definides per a z . Com que

$$\varphi p^{n+1}(z) = \varphi p(p^n(z)) = [\varphi(p^n(z))]^d$$

es compleix que $G_{n+1}(z) = G_n(z)$ en $p^{-n}(U)$. Com que estem en el cas en que $\mathcal{K}(p)$ és connex, aleshores la unió dels dominis $p^{-n}(U)$ coincideix amb $\mathcal{A}_p(\infty)$. A continuació definim la funció harmònica i positiva G en $\mathcal{A}_p(\infty)$ per a $G = G_n$ en $p^{-n}(U)$. Es compleix que al voltant de ∞ ,

$$G(z) = \log |\varphi(z)| = \log |z| + \mathcal{O}(1)$$

Per acabar la demostració, hem de veure que $G(z) \rightarrow 0$ quan $z \in \partial\mathcal{A}_p(\infty)$.

Per a qualsevol $z \in \mathcal{A}_p(\infty)$, existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $z \in p^{-(m+1)}(U)$ complint

$$dG_{m+1}(z) = \frac{1}{d^m} \log |\varphi p^m(p(z))| = |G_n(P(z))|.$$

D'on n'obtenim les relacions $d^{-1}G(p(z)) = G(z)$ i $d^{-n}G(p^n(z)) = G(z)$.

Considerem $M = \sup \{G(w) : w \in p^{-1}(U), w \notin U\}$. Si $z \notin p^{-n}(U)$, aleshores existeix $m \geq n$ tal que $z \in p^{-(m+1)}(U)$ però $z \notin p^{-m}(U)$. Així $G(p^m(z)) \leq M$, d'on obtenim

$$d^n G(z) \leq d^m G(z) = G(P^m(z)) \leq M.$$

Finalment obtenim que $0 < G(z) < \frac{M}{d^n}$ en $\mathcal{A}_p(\infty) \setminus p^{-n}(D)$ com volíem.

Extensió a la frontera

Una pregunta que ens pot sorgir de forma natural és la de saber si φ es pot estendre fins a la frontera del conjunt ple de Julia. Tot seguit veurem sota quines circumstàncies φ es pot estendre fins a $\partial\mathcal{K}(p)$.

Definició 4.43. Si $\mathcal{K}(p)$ és connex. Aleshores per a cada $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definim el raig extern de argument t com el conjunt:

$$R_p(t) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}(p) : \arg(\varphi(z)) = 2\pi t\}.$$

Observem que $p : R_p(t) \rightarrow R_p(d \cdot t)$ és una funció bijectiva per a arguments $t \in \mathbb{T}$.

Si existeix el limit $\gamma(t) = \lim_{r \rightarrow 1^+} \phi(re^{2\pi it})$, aleshores diem que $R_p(t)$ aterra al punt $\gamma(t)$ i per tant pertany al conjunt de Julia.

A continuació introduïm el concepte topològic de conjunt localment connex:

Definició 4.44. Un conjunt Ω es diu localment connex si per a tot punt $z \in \Omega$ i tot entorn U de Ω , existeix un entorn connex de z contingut a U .

Seguidament es mostren exemples que demostren que ni connex implica localment connex, ni localment connex implica connex:

Exemple 4.45.

1. \mathbb{C} és connex i localment connex.
2. \mathbb{Q} no és ni connex ni localment connex.

3. El subconjunt $(0, 1) \cup (2, 3)$ de \mathbb{R} no és connex, però és localment connex.
4. El conjunt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\}$ és connex, però no localment connex en cap punt de la forma $(x, 0)$.

En [Mil] està demostrat el següent teorema que ens mostra les propietats d'aterament dels raigs externs i ens mostra l'extensió de les transformacions conformes a la frontera del domini.

Teorema 4.46 (Criteri d'aterament). *Per a qualsevol polinomi p tal que $\mathcal{J}(p)$ és un conjunt connex, les següents condicions són equivalents:*

- i) Cada raig extern $R_p(t)$ que aterra a un punt $\gamma(t)$ depèn contínuament de l'argument t .*
- ii) El conjunt de Julia $\mathcal{J}(p)$ és localment connex.*
- iii) El conjunt ple de Julia $\mathcal{K}(p)$ és localment connex.*
- iv) La inversa de les coordenades de Boettcher $\phi : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}(p)$ s'exten contínuament a $\partial\mathbb{D}$ i indueix una parametrització $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{J}(p)$ del conjunt de Julia donada per $\gamma(t) = \phi(e^{2\pi it})$.*

Observació 4.47. La condició *ii*) \Leftrightarrow *iv*) del teorema anterior, és conegut com el Teorema de Caratheodory.

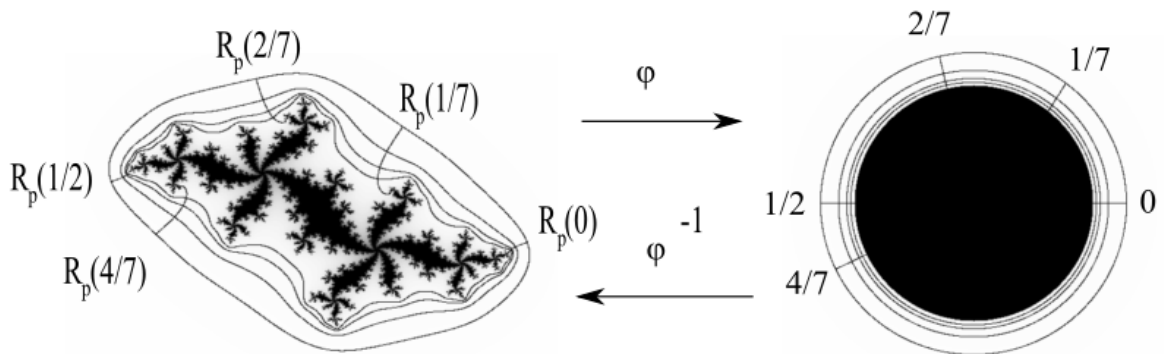


Figura 8: En l'imatge es mostra el comportament de la transformació conforme φ que té com a conjunt de sortida l'exterior de $\mathcal{K}(p)$ per a $p = z^2 - 0.5 + 0.6i$ i com a conjunt d'arribada $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Es pot apreciar com actua φ en els raigs externs i en els equipotencials.

La parametrització ϕ descrita en *iv*) del teorema anterior és l'aplicació que ens descriu el Teorema de Riemann. La transformació conforme ϕ envia raigs que surten del cercle a raigs externs que aterren en el conjunt de Julia. Per tant, per pas al límit, obtenim que el conjunt de Julia del polinomi p i la vora del disc de radi 1 i centre l'origen són conformement conjugades per ϕ .

El resultat que enunciem a continuació es troba demostrat en [Mil] i ens mostra propietats per assegurar que un raig extern aterra en el conjunt de Julia.

Teorema 4.48. *Cada raig extern periòdic aterra a un punt periòdic repulsor o parabòlic. Si t és racional però no periòdic, aleshores el raig $R_p(t)$ aterra en un punt que és eventualment periòdic però no periòdic.*

4.5 Pla de paràmetres de la família quadràtica: El conjunt de Mandelbrot

En el transcurs d'aquesta secció hem estudiat el comportament dels polinomis en general. En aquest apartat, volem estudiar la dependència respecte paràmetres. Concretament, ens centrarem en la següent família de polinomis quadràtics

$$\{p_c(z) = z^2 + c : c \in \mathbb{C}\}$$

Donat p un polinomi quadràtic, és fàcil comprovar que existeix una única $c \in \mathbb{C}$ tal que p és conjugat al polinomi $p_c(z) = z^2 + c$ per a un canvi afí, és a dir, existeix un polinomi $h(z) = az + b$ tal que $h^{-1} \circ p \circ h = p_c$. Com a conseqüència, és suficient conèixer el comportament dinàmic dels polinomis p_c per entendre com es comporta qualsevol polinomi quadràtic p després de ser iterat.

Definició 4.49. *Definim el conjunt de Mandelbrot com*

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : p_c^n(0) \not\rightarrow \infty \text{ quan } n \rightarrow \infty\}$$

El nostre proper objectiu és descompondre el pla de paràmetres en regions segons el comportament dinàmic de p_c . La dictomia del comportament dinàmic del conjunt de Julia està determinada en funció de si aquest conjunt és o no connex. Pel teorema 4.42, un altre criteri també pot ser observar si l'òrbita del punt crític 0 està acotada o no al iterar el polinomi p_c . Utilitzant aquets criteris, podem descompondre el pla de paràmetres en dos conjunts complementaris; el conjunt de Mandelbrot \mathcal{M} i el seu complementari $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$.

Podem doncs donar dues definicions equivalents a la definició del conjunt de Mandelbrot:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \{c \in \mathbb{C} : p_c^n(0) \not\rightarrow \infty \text{ quan } n \rightarrow \infty\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}(p_c) \text{ és connex}\} = \{c \in \mathbb{C} : c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots \not\rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

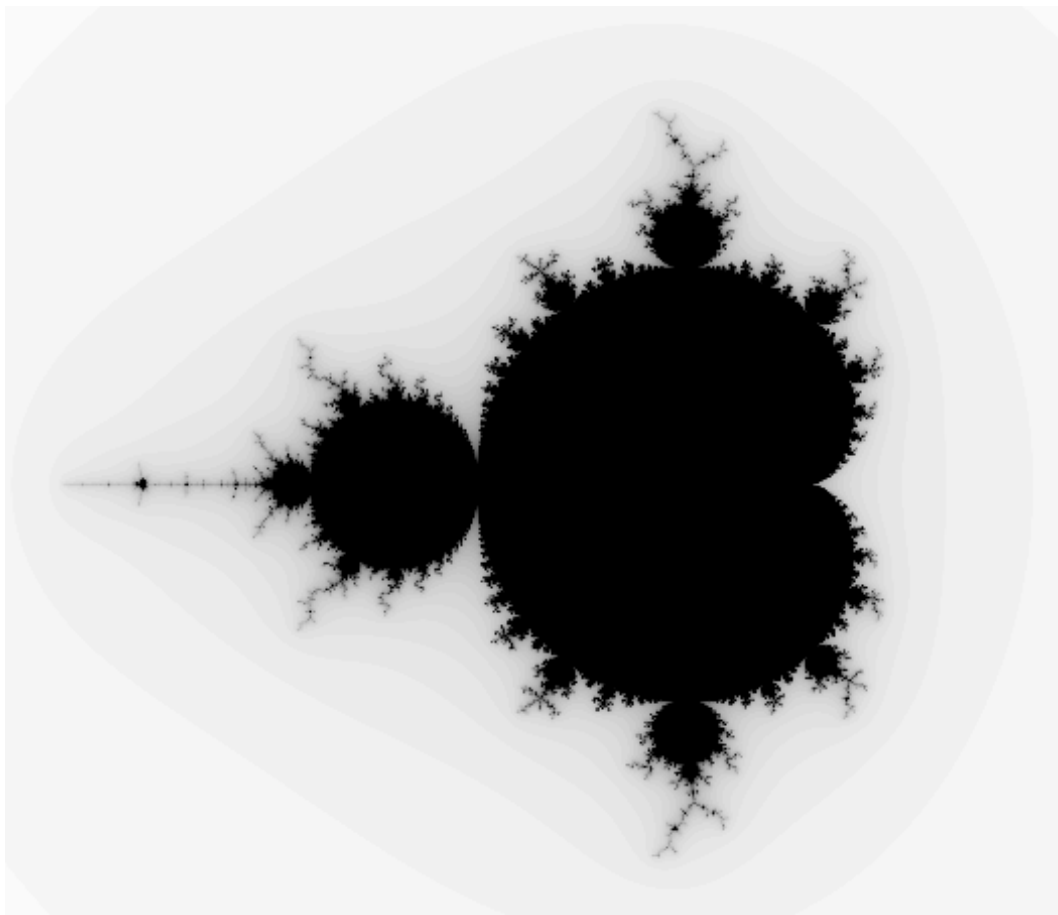


Figura 9: El conjunt de Mandelbrot.

Teorema 4.50. *El conjunt de Mandelbrot \mathcal{M} és un subconjunt tancat i simplement connex del disc $\overline{\mathbb{D}_2}$.*

Demostració.

- Si $|c| > 2$ implica que $|p_c^2(0)| > |c|$ i $p_c^n(0) \rightarrow \infty$. Tenim doncs que si $|c| > 2$ llavors $c \notin \mathcal{M}$.
- Prenem c tal que $|c| \leq 2$ i $c \in \mathcal{M}$. Per absurd, suposem que existeixen $m \geq 1$ i $\delta > 0$ tal que $|p_c^m(0)| = 2 + \delta$. Iterant aquesta igualtat obtenim que $|p_c^{m+1}(0)| \geq (2 + \delta)^2 - 2 \geq 2 + 2\delta$ i inductivament obtenim que $|p_c^{m+k}(0)| \geq 2 + 2^k\delta \rightarrow \infty$ quan $k \rightarrow \infty$ que resulta una contradicció ja que $c \in \mathcal{M}$.

Acabem de provar que $\mathcal{M} \subset \overline{\mathbb{D}_2}$, a més, hem vist que \mathcal{M} és un conjunt tancat. Aplicant el principi del modul màxim obtenim que $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ no té components acotades i per tant el conjunt de Mandelbrot és simplement connex. \square

Proposició 4.51. $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} = [-2, \frac{1}{4}]$.

Demostració. Si $c \in \mathbb{R}$, el polinomi $p_c(x) - x$ no té arrels reals si $c > \frac{1}{4}$, té una arrel en $x = \frac{1}{2}$ si $c = \frac{1}{4}$ i té dues arrels quan $c < \frac{1}{4}$.

En el cas en que $c > \frac{1}{4}$ o bé $c < -2$, $|p_c^n(0)|$ és creixent i es compleix $|p_c^n(0)| \rightarrow \infty$ quan $n \rightarrow \infty$.

Si $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$, sigui $a = \frac{(1+\sqrt{1-4c})}{2}$ l'arrel més gran de $p_c(x) - x$, es compleix que $a \geq |c| = |p_c(0)|$. Llavors $|p_c^n(0)| \leq a$ i per tant $|p_c^{n+1}(0)| = |p_c^n(0)^2 + c| \leq a^2 + c = a$ i la successió està acotada. Per tant $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} = [-2, \frac{1}{4}]$. \square

A continuació definim les components hiperbòliques del conjunt de Mandelbrot.

Considerem el conjunt:

$$H(\mathcal{M}) = \{c \in \mathbb{C} : p_c \text{ té un cicle atractor}\}.$$

El teorema de la funció implícita ens diu que $H(\mathcal{M})$ és un conjunt obert. Una altra conseqüència del teorema de la funció implícita és que cada cicle es mou holomorfament pels valors propers al paràmetre c . Aquests cicles són atractors, i per tant $H(\mathcal{M}) \subset \text{int}(\mathcal{M})$.

Definició 4.52. *Anomenem component hiperbòlica a una component connexa $\Omega \subset H(\mathcal{M})$.*

La conjectura enunciada a continuació ens diu que l'interior del conjunt de Mandelbrot i les seves components hiperbòliques són el mateix. Aquest problema és obert i rep el nom de la conjectura hiperbòlica per a polinomis de grau 2.

Conjectura 4.53. $\text{int}(\mathcal{M}) = H(\mathcal{M})$.

Definició 4.54. *Donat una component hiperbòlica Ω de període m definim la funció multiplicador com:*

$$\begin{aligned} \Lambda : \Omega &\longrightarrow \mathbb{D} \\ c &\longmapsto \Lambda(c) = (p_c^m)'(\zeta(c)) \end{aligned}$$

On $\zeta(c)$ per a cada $c \in \Omega$ denota un punt del cicle atractor de període m . Per tant $\Lambda(c)$ és el multiplicador del cicle atractor.

Tenim que $c \mapsto \zeta(c)$ és holomorfa i per tant, Λ també ho és.

El següent teorema va ser demostrat per D.Sullivan.

Teorema 4.55. *Si Ω és una component hiperbòlica de període m de \mathcal{M} . Aleshores la funció multiplicador és un isomorfisme conforme que estén continuament $\Lambda : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$*

Com que Ω és connexa, l'isomorfisme conforme Λ , és la transformació conforme de Riemann. D'aquí en deduïm que totes les components hiperbòliques són conformement equivalents al disc unitat. Cada component hiperbòlica Ω té un centre

$\Lambda^{-1}(0)$, que és l'únic valor on el cicle atractor resulta ser superatractor.

De forma anàloga a l'apartat anterior de polinomis procedim a construir les funcions de Green i de Riemann pel conjunt de Mandelbrot.

Considerem $p_c(z) = z^2 + c$ i la seva funció de Green $G_c : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ tal que

$$G_c(z) = \begin{cases} 0 & \forall z \in \mathcal{K}(p_c). \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} \log |p^k(z)| & \text{si } z \notin \mathcal{K}(p_c). \end{cases}$$

En el teorema 4.50 hem vist que el conjunt de Mandelbrot és un compacte de \mathbb{C} , per tant existeix una única funció de Green $G_{\mathcal{M}} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Aquesta funció està definida per $G_{\mathcal{M}}(c) = G_c(c)$.

Anàlogament, per a cada polinomi p_c podem definir una transformació conforme φ_c tal i com hem vist en la secció anterior complint $\varphi_c : U_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ on $U_c = \{z \in \mathbb{C} : G_c(z) > G_c(0)\}$ és un entorn de l'infinit. La transformació conforme φ_c conjuga p_c amb p_0 en U_c .

Definim la funció analítica $\varphi_{\mathcal{M}} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ complint $\varphi_{\mathcal{M}}(c) = \varphi_c(c)$ per a tot $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$. Està ben definida ja que $c \in U_c$ i per tant $\varphi_c(c)$ sempre està definida. El següent teorema el podem trobar per exemple en [Bra].

Teorema 4.56. *La funció*

$$\varphi_{\mathcal{M}} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

definida anteriorment és un isomorfisme conforme

En el conjunt de Mandelbrot, també podem definir raigs externs i conjunts equipotencials, tal i com hem vist anteriorment pel conjunt ple de Julia d'un polinomi p , utilitzant la transformació conforme $\varphi_{\mathcal{M}}$ i la funció de Green $G_{\mathcal{M}}$ definides anteriorment.

La transformació conforme $\varphi_{\mathcal{M}}$ que envia l'exterior del conjunt de Mandelbrot a l'exterior del disc unitat és la funció de Riemann.

Tot seguit, parlarem de la frontera del conjunt de Mandelbrot, ja que resulta un objecte molt interessant i fascinant on es centren varies recerques molt intenses. Aquest conjunt té una estructura altament fractal. La frontera de \mathcal{M} es pot caracteritzar en termes de famílies normals:

$$\partial\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \{g_n(c) := p_c^n(0)\}_n \text{ no és normal en cap entorn de } c\}.$$

Definició 4.57. *Un punt c és un punt de Misiurewicz si l'òrbita de 0 del polinomi p_c és estrictament periòdica.*

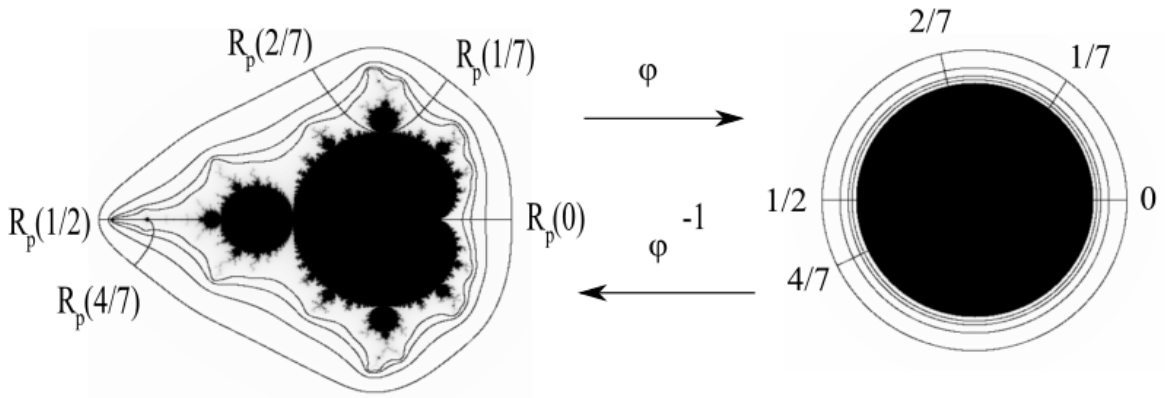


Figura 10: En l'imatge es mostra el comportament de la transformació conforme $\varphi_{\mathcal{M}}$ que té com a conjunt de sortida $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ i per a conjunt d'arribada l'exterior de \mathbb{D} . Es pot apreciar com actua $\varphi_{\mathcal{M}}$ en els raigs externs i en els equipotencials.

Exemple 4.58. Dos exemples de punts Misiurewicz són els punts $c = i$ i $c = -2$:

$$p_i : 0 \mapsto i \mapsto -1 + i \mapsto -i \mapsto -i + 1.$$

$$p_{-2} : 0 \mapsto -2 \mapsto 2 \mapsto 2.$$

El següent teorema es troba en [BF] i classifica els diferents paràmetres de $\partial\mathcal{M}$.

Teorema 4.59.

- i) *Els punts de Misiurewicz són densos en $\partial\mathcal{M}$*
- ii) *Per a cada $c \in \partial\mathcal{M}$ existeix una successió $\{c_n\}_n$ de centres de components hiperbòliques tal que $c_n \rightarrow c$ quan $n \rightarrow \infty$.*
- iii) *Si p_c és parabòlic, un cicle de Siegel o bé un cicle de Cremer, aleshores $c \in \partial\mathcal{M}$.*

A continuació veiem i) i ii) del teorema anterior.

Demostració. Considerem la família de funcions $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definides recursivament per

$$f_1(c) = c, \quad f_n(c) = (f_{n-1}(c))^2 + c$$

Observem que per a un c fixat la seqüència $(0, f_1(c), \dots, f_n(c), \dots)$ coincideix amb l'òrbita del punt 0 pel polinomi p_c .

Sigui $c_0 \in \partial\mathcal{M}$, per a qualsevol $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ es compleix que $f_n(c) \rightarrow \infty$. Per a $c \in \mathcal{M}$ tenim que $|f_n(c)| \leq 2$. Aleshores per a qualsevol entorn U de c_0 la família de funcions $f_n|_U : U \rightarrow \mathbb{C}$ no és normal.

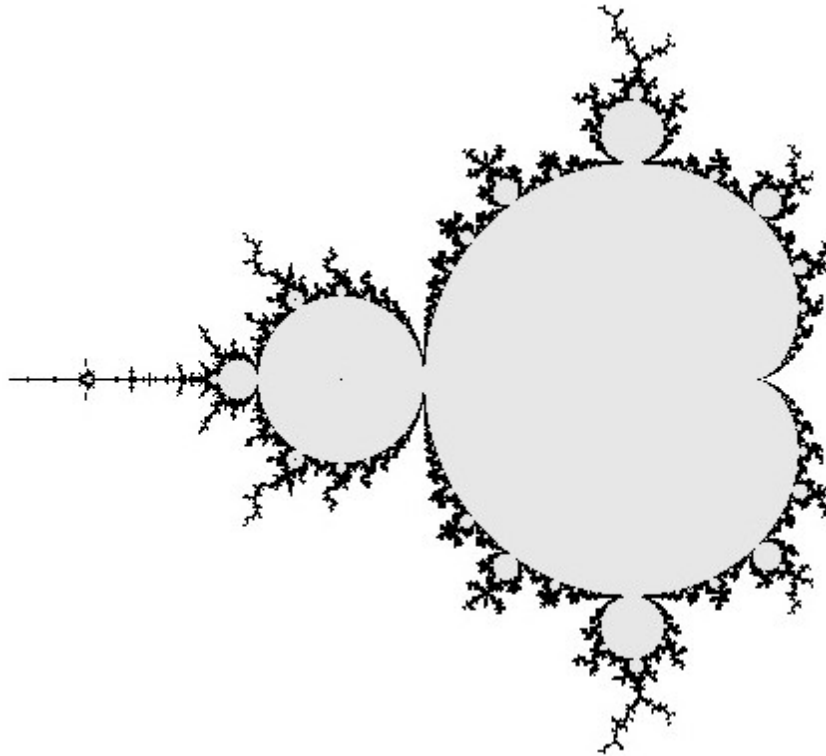


Figura 11: Frontera del conjunt de Mandelbrot.

- i)* Per reducció a l'absurd suposem que l'afirmació és falsa. Suposem que $c_0 \neq \frac{1}{4}$. Seleccionem un entorn simplement connex U de c_0 tal que $\frac{1}{4} \notin U$ i U conté punts que no són de Misiurewicz pels quals el 0 eventualment va a parar en un punt fix. Siguin $g_1, g_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ dues branques diferents de l'arrel quadrada de $1 - 4c$. Com que $\frac{1}{4} \notin U$ i U és simplement connex no hi ha problema per a definir les dues branques. Llavors $f_n(c)$ omet (per exemple) els tres punts:

$$h_1(c) = \frac{1}{2} + g_1(c), \quad h_2(c) = \frac{1}{2} + g_2(c), \quad \infty.$$

Observem que $h_1(c)$ i $h_2(c)$ són dos punts fixos diferents (només coincideixen en el cas $c = \frac{1}{4}$). Considerem la família de funcions $F_n : U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ que omet $0, 1, \infty$ determinada per a una única transformació afí definida per

$$F_n = \frac{f_n - h_1}{h_2 - h_1}$$

Llavors, aplicant el Teorema de Montel-Caratheodory (teorema 2.6), obtenim que $\{F_n\}_n$ és normal. Per tant $\{f_n\}_n$ també ho és, fet que és una contradicció. Acabem de veure doncs, que els punts de Misiurewicz són densos en la frontera del conjunt de Mandelbrot.

- ii)* La demostració d'aquesta afirmació és anàloga a la del cas anterior. Suposem que és fals i prenem un entorn U simplement connex de c_0 tal que U no conté

centres de components hiperbòliques. Considerem $g_1, g_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ dues branques de l'arrel quadrada de $-c$. Aleshores f_n omet tres punts: $0, g_1(c), g_2(c)$ que tal i com en el cas anterior, ens porta fins a una contradicció.

□

La convergència dels centres de components hiperbòliques cap a la frontera de \mathcal{M} és molt ràpida. Aquesta propietat s'utilitza per a construir algorismes per a dibuixar aproximacions, molt acurades, de la frontera del conjunt de Mandelbrot. Com per exemple l'algoritme de Hen, utilitzat per a l'imatge 11.

La següent conjectura és considerada, juntament amb la hiperbòlica, una de les conjectures més importants sobre el conjunt de Mandelbrot.

Conjectura 4.60. *\mathcal{M} és localment connex.*

Si la conjectura anterior fos certa, llavors, aplicant el Teorema de Carathéodory, podríem estendre continuament la transformació conforme $\varphi_{\mathcal{M}} : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ fins a la frontera del conjunt de Mandelbrot. D'aquesta manera aconseguiríem trobar una parametrització de $\partial\mathcal{M}$ i també assegurar l'aterrament dels raigs externs en $\partial\mathcal{M}$.

5 Bibliografia

- [Bea] Beardon, A. F.: *Iteration of rational functions : complex analytic dynamical systems*, Springer, New York; Barcelona, 1991.
- [Bra] Branner, B.: *The Mandelbrot Set* Proc. Symp. Applied Math. 39, 75-103, New York; 1989.
- [BF] Branner, B.; Fagella, N. R.: *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics*, Cambridge, Cambridge, 2014.
- [CG] Carleson, L. A.; Gamelin, T. W.: *Complex dynamics*, Springer, Copenhagen, 1993.
- [Con] Conway, J. B.: *Functions of one complex variable I*, 2n edició, Springer, New York, 1978.
- [FJ] Fagella, N. R.; Jarque, X. R.: *Iteración compleja y fractales*, Vicens Vives, Barcelona, 2007.
- [Mil] Milnor, J.: *Dynamics in One complex Variable: Introductory Lectyres*, 3ra edició, Princeton University Press, New York, 2006.
- [Ste] Steinmetz, N.: *Rational iteration : complex analytic dynamical systems*, Walter de Gruyter, Berlin; New York, 1993.

I Annex: Programes per a construir imatges

En el fragment de codi que es mostra a continuació s'implementa, mitjançant el llenguatge de programació c, un algoritme d'escapament per tal de dibuixar la dinàmica d'una funció al voltant de l'origen, com en les imatges 2, 4, 6 i 7.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "image.h"
#include <complex.h>
#include <stdlib.h>

int main(int argc, char **argv) {
    Image *im = createImage(10000, 10000);
    int x,y, color, i, iter=50;
    double complex z, c0=-1;

    for (x = 0; x < 10000; x++) {
        for (y = 0; y < 10000; y++) {
            z=x+I*y;
            z=z-10000./2-(10000./2)*I;
            z=z/3000.;
            i=0;
            while(cabs(z)<4 && i<iter){
                /*Funció a iterar*/
                z=z*z+c0;
                i++;
            }
            color= (int)i*255/iter;
            imageSetPixel(im, x, y, color);
        }
    }
    imageSaveAsGif(im, "c0.gif", "blue.map");
    return 0
}
```

Per a dibuixar el conjunt de Mandelbrot de l'imatge 9 de nou hem utilitzat algoritmes d'escapament, seguidament es mostra el codi en c.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "image.h"
#include <complex.h>
#include <stdlib.h>
```

```

int main(int argc, char **argv) {
    Image *im = createImage(10000, 10000);
    int x,y, color, i, iter=50;
    double complex fz,z;

    for (x = 0; x < 10000; x++) {
        for (y = 0; y < 10000; y++) {
            z=x+I*y;
            z=z-10000./2-(10000./2)*I;
            z=z/2000.;
            i=0;
            fz=z;
            while(cabs(fz)<4 && i<iter){
                fz=fz*fz+z;
                i++;
            }
            color= (int)i*255/iter;
            imageSetPixel(im, x, y, color);
        }
    }
    imageSaveAsGif(im, "M1.gif", "blue.map");
    return 0;
}

```

El següent programa en c pinta els punts del disc de Siegel amb un fitxer de dades. Llavors utilitzant l'aplicació Gnuplot hem pintant els punts al pla per tal de dibuixar l'imatge 3.

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <complex.h>
int main(void){
    int i,j,iter;
    double complex lambda, fz, z;
    FILE *dad;
    lambda=-0.73736887807831990151-0.67549029426152364234*I;
    iter=15000;
    dad=fopen("dades.res","w");
    if(dad==NULL){
        puts("Error en obrir el fitxer de sortida de les dades.");
        exit(1);
    }
    for(j=0; j<5; j++){
        fz=z;

```

```

        for(i=0; i<iter; i++){

                fz=lambda*fz*(1-fz);
                fprintf(dad,"%lf\\setminus t\\%lf\\setminus n"
, creal(fz),cimag(fz));
                }
                z=z+0.2;
        }
        fclose(dad);
        return 0;
}

```

Utilitzant l'eina IT per a Macintosh de Mannes Technology i mitjançant el codi que es mostra tot seguit hem dibuixat els conjunts de Julia i Mandelbrot juntament amb els raigs d'aterrament i els equipotencials de les imatges 8 i 10.

```

CLASS(Quadraticrays, "Quadratic: z^2 + c") { public:
    complex z, c;
    int depth;
    double escape;
    // for rays
    int p;
    int q;
    double startingpot;
    // for equipotentials
    double poten;
    int p_ini;
    int q_ini;
    double theta_fin;
    //for all
    int npoints;

    Quadraticrays(String name, String label, int pspace) :
    Function(name, label, pspace) {
        PARAM(c, "c", complex, complex(0,0), complex(-1,0));
        PARAM(depth, "depth", int, 75, 75);
        PARAM(escape, "escape", double, 1000, 1000);
        PARAM(p, "(r)p", int, 1, 1);
        PARAM(q, "(r)q", int, 7, 7);
        PARAM(startingpot, "(r)startingpot", double, 0.25, 0.25);
        PARAM(poten, "(eq)pot(log|phi|)", double, 0.25, 0.25);
        PARAM(p_ini, "(eq)initial_p", int, 0, 0);
        PARAM(q_ini, "(eq)initial_q", int, 1, 1);
        PARAM(theta_fin, "(eq)final_theta", double, 1.0, 1.0);
        PARAM(slope, "(s)slope", double, 0.1, 0.1);
    }
};

```

```

PARAM(ps, "(s)p_ray", int, 1, 1);
PARAM(qs, "(s)q_ray", int, 7, 7);
PARAM(pot_ini, "(s)pot_ini", double, 0.25, 0.25);
PARAM(npoints, "(r,eq,s)npoints", int, 40000, 40000);
setDefaultRangeParameterSpace(-2.2, 1.4, -1.8, 1.8);
setDefaultRangeDynamicalSpace(-2, 2, -2, 2);
}

Function *copy() {
    Quadraticcrays *f = new Quadraticcrays(name, "", pspace);
    return f->copyArgsFrom(this);
}

byte iterate(double x, double y) {
    int i;
    if (PARAMETER_SPACE) {
        z = complex(0, 0);
        c.set(x, y);
    } else {
        z = complex(x, y);
    }
    for(i = 0; i < depth; i++) {
        z = z * z + c;
        if( norm(z) > escape * escape) break;
    }
    return (byte)(255*i/depth);
}

void orbit(complex &x) {
    x = x * x + c;
}

void setParameter(double x, double y) {
    c = complex(x, y);
}

void sandbox() {

    draw_equi(c, poten, p_ini, q_ini, theta_fin, escape);
    draw_equi(c, poten/2.0, p_ini, q_ini, theta_fin, escape);
    draw_equi(c, poten/4.0, p_ini, q_ini, theta_fin, escape);
    draw_equi(c, poten/8.0, p_ini, q_ini, theta_fin, escape);

    rational_rays(c, depth, 2, 7, startingpot, escape, npoints);
    rational_rays(c, depth, 4, 7, startingpot, escape, npoints);
    rational_rays(c, depth, 0, 7, startingpot, escape, npoints);
    rational_rays(c, depth, 1, 2, startingpot, escape, npoints);
}

```

```

/* int i;
   complex z(-0.20,-0.20);
   complex w(-0.3,-0.3);
   complex u(-0.12,-0.12);
   byte q = 200;
   for (i = 0; i < depth; i++) {
       orbit(z);
       orbit(w);
       orbit(u);
       SETPIXEL(z.re, z.im, q);
       SETPIXEL(w.re, w.im, q);
       SETPIXEL(u.re, u.im, q);
   }*/
//HLINE(-1,-1,2,25);
//VLINE(-1,-1,2,25);
}
void annotate() {
    /*
    SetFillColor(1, 1, 0, 1);
    FillRect(-1, -1, 2, 2);

    SetFillColor(1, 0, 0, 0.5);
    FillRect(0, 0, 300, 300, false);

    SetFillColor(1,1,1,1);
    SetFont("Arial", 1);
    DrawText("foo", 1,1);

    SetStrokeColor(0, 0, 1, 1);
    SetLineWidth(1);
    DrawLine(-1, -1, 1, 1);
    */
}

};

```

Utilitzant l'eina IT per a Macintosh de Mannes Technology i mitjançant el codi que es mostra tot seguit hem dibuixat l'imatge 11, que és la frontera del conjunt de Mandelbrot.

```

CLASS(QuadraticHen, "Quadratics with Henriksen's algorithm") { public:
    // Declare your parameters and working variables here
    complex c;

```



```

int depth;
double escape;
complex z;
double pixfactor;

QuadraticHen(String name, String label, int pspace) : Function(name, label, pspace)
// List every parameter you want to appear in the "parameters" section
// using ARG(variable, parameter-name, default-value, allowed-values)
ARG(c, "c", complex, complex(-1,0), ANY);
ARG(depth, "depth", int, 500, ANY);
ARG(escape, "bound", double, 1000, ANY);
ARG(pixfactor, "pixfactor", double, 4, ANY);
}

void defaults() {
// Default settings, shown initially and on "restore defaults"
if (PARAMETER_SPACE) {
    c.set(0,0);
    setDefaultRange(-2.2, 1.4, -1.8, 1.8);
} else {
    c.set(-1,0);
    setDefaultRange(-2, 2, -2, 2);
}
}

// Main function: given coordinates (x, y), return a value from
// 0 to 255, representing the color to assign to the pixel
byte iterate(double x, double y) {
    int i = 0;
    int inJ = 0, goal = 0, gone = 0;
// complex z, c;
    complex epsilon,w;
    complex alpha;
    complex der,der0;
    double dx = (state->xmax - state->xmin)/(2*(state->xres));
    double dy = (state->ymax - state->ymin)/(2*state->yres);
    if (PARAMETER_SPACE) {
        setParameter(x,y);
        /* we will try to check if c=c(b) is mapped to 0=w(b) */
        w = complex(0);
        der0 = 0; /* der0 = (d/db) w(b) */
        z = c; /* c = c(b) is the critical value. For M it is simply c */
        der = 1; /* initially der = (d/db)c(b) */

        while(i < depth && goal == 0 && gone == 0){
            /* der(n+1) = der(n) * (d/dz)(f_b)(zn) + (d/db) (f_b)(zn) */

```

```

/* in this case (d/dc)(z^2+c) = 1 and (d/dz)(z^2+c)=2*z */
der = der * 2 * z + 1;
z = z*z + c;          /* z(n+1) = z(n)^2 + c */
if (norm(z) > escape) gone = 1;
else
  if (norm(der - der0) > 1e-12) {
    epsilon = (z - w)/(der - der0);
    /* checking if z + epsilon * der = w + epsilon * der0 */
    if (fabs(epsilon.re) < (dx/pixfactor)
&& fabs(epsilon.im) < (dy/pixfactor)) {
      goal = 1;
    }
  }
  i++;
};
//   if ( gone == 1) return (byte) (255*i/depth);
   if ( gone == 1) return (byte) 0;
   if ( goal == 1) return (byte) 255;
   return (byte) 50;
} else {
  z = complex(x, y);
  alpha = z;
  der = complex(1,0);
  while( i < depth && inJ == 0 && gone == 0) {
der = 2.0 * z * der;
  z = z * z + c;
if (norm(z) > escape) gone = 1;
  else
    if (norm(der) > 1.1) {
      epsilon = (z-alpha)/(der-1);
      if (fabs(epsilon.re) < (dx/pixfactor)
&& fabs(epsilon.im) < (dy/pixfactor)) {
inJ = 1;
      }
    }
  i++;
};
   if ( gone == 1) return (byte) 0;
   if ( inJ == 1) return (byte) 255;
   return (byte) 50;
}
}

// Forward orbit: assign f(x) to x
void orbit(complex &x) {
  x = x * x + c;

```

```

}

// Set the parameter in dynamical space
void setParameter(double x, double y) {
    c.set(x, y);
}

void sandbox() {
    // Use sandbox to manipulate the image by setting pixels
    // SETPIXEL(x, y, color) -- set a pixel corresponding to real coordinates x, y
    // SETPIXEL_(x, y, color) -- set a pixel in image coordinates (0, 0) is lower left
    // GETPIXEL(x, y) -- returns the pixel value at real coordinates x,y
    // GETPIXEL_(x, y) -- returns the pixel value at image coordinates x, y
    // HLINE(x, y, dx) -- draw a line from point x, y to x+dx, y
    // VLINE(x, y, dy) -- draw a line from x, y to x, y+dy
    // HLINE_(x, y, dx) -- draw a line from point x, y to x+dx, y (image coordinates)
    // VLINE_(x, y, dy) -- draw a line from x, y to x, y+dy (image coordinates)
}

void annotate() {
    // Add vector graphics on top of the image. You can use the entire Quartz
    // drawing API, documented at
    // https://developer.apple.com/library/mac/#documentation/GraphicsImaging/Concepts
    // Your current context is called ctx.
    // Your coordinates correspond to image coordinates (0, 0 is lower left corner)
    /*
    SetFillColor(1, 1, 0, 1);
    FillRect(-1, -1, 2, 2);

    SetFillColor(1, 0, 0, 0.5);
    FillRect(0, 0, 300, 300, false);

    SetFillColor(1,1,1,1);
    SetFont("Arial", 1);
    DrawText("foo", 1,1);

    SetStrokeColor(0, 0, 1, 1);
    SetLineWidth(1);
    DrawLine(-1, -1, 1, 1);
    */
}

void setColors() {
    SETCOLOR(255, 0, 0, 0);
}
};

```