Treball final de grau

GRAU MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Modelos estocásticos con tipo de interés

Autor: Eudald Juvanteny Astigarra

Director: **Dr. José Manuel Corcuera Valverde**

Barcelona, **29th June, 2017**

Abstract

The last few years, financial quantitative analysts have used more sophisticates mathematical concepts, such as martingales or stochastic integration, in order to describe the behavior of markets or to derive computing methods.
The objective of this project is to give an introduction to the probabilistic techinques required to study the behavior of the bonds and other contracts that have bonds as underlying stock.

Resumen

En los últimos tiempos, los analistas cuantitativos financieros han usado cada vez más conceptos matemáticos como martingalas o integración estocástica para para describir el comportamiento de los mercados.
El objetivo de nuestro trabajo es estudiar las técnicas probabilísticas que se usan para modelar el precio de los bonos y cualquier contrato que tenga bonos como activo subyacente.

Finanzas, Proceso estocástico, Modelación, Interés, Bonos, Opciones

Índice

Introducción

El proyecto

La aparición de teoría de probabilidad en modelos financieros no es reciente. De hecho, a principios del siglo pasado, Bachelier (1900), cuándo estaba haciendo la tesis "Theory of Speculation"descubrió el que llamamos ahora movimiento browniano.
Des de 1973, las publicaciones de Black and Scholes y Merton sobre la valoración y cobertura de opciones, abrieron una nueva dimensión para el uso de la teoría de probabilidad en las finanzas. Su modelo trataba de definir un precio explícito para un contrato call europeo con un activo subyacente que no paga dividendos.
Des de entonces, los resultados de Black-Scholes y Merton se han desarrollado y son ara más claros, más generales y matemáticamente más rigurosos.
Uno de las extensiones que se ha hecho y que es el tema principal del trabajo es la consideración de que el interés es estocástico y con esto la idea es poder modelar los famosos bonos.

Estructura de la Memoria

En la memoria, primero se introduce los aspectos que queremos modelar del mercado financiero, como pueden ser los tipos de interés de contratos financieros, el funcionamiento de los contratos que mas se usan en el mercado, etc. Se definen des de la perspectiva que en nuestro mundo se conoce todo lo que va a pasar, es decir, se usan funciones deterministas.
Dado que en el mundo real no se sabe lo que va a pasar y claramente el futuro es incierto, en la segunda parte del trabajo se estudia la teoría de probabilidad y procesos estocásticos que nos sirve para describir el comportamiento de los bonos sin cupones, que son los contratos más básicos del mercado y que nos permiten modelar todos los otros.
Por último aplicamos todo lo explicado anteriormente y se presentan diferentes métodos de modelar la dinámica de los bonos mediante procesos estocásticos.

1. Cuestiones básicas

1.1. Tipo de interés y tipo de interés medio

En los contratos financieros existe un determinado tipo de interés.
Imaginamos que el contrato que estudiamos es un préstamo, por lo que en la fecha t nos dejan $F(t,t) = 1$ euro. Al cabo de un tiempo, en T tendremos que devolver el euro que nos han dejado más unos intereses por el servicio que nos han ofrecido.
Entonces si la tasa de interés (por unidad de tiempo) del contrato es $R(t,T)$ pagaremos en T la cantidad $F(t,T) = (1 + R(t,T)(T-t))$ y los intereses de la operación son $F(t,T) - 1 = R(t,T)(T-t)$.
Notamos que los intereses se han pagado una única vez, en la fecha de vencimiento del contrato. Se llama interés simple.
Existe también el interés compuesto, que es cuándo el pago de los intereses se reparte entre n instantes durante el tiempo de vida del contrato (entre t i T), pagando en cada instante $\frac{R(t,T)(T-t)}{n}$.
Podemos definir entonces $F(t,s), t \leq s \leq T$ como la cantidad inicial prestada más los intereses capitalizados que se han pagado hasta la fecha s. Suponiendo por ejemplo que la fecha s equivale al momento en que se han pagado m periodos $\Rightarrow F(t,s) = (1 + \frac{R(t,T)(T-t)}{n})^m$, y en la fecha de vencimiento del contrato, se pagará la cantidad $F(t,T) = (1 + \frac{R(t,T)(T-t)}{n})^n$
En este caso la tasa de interés es la misma sea cuál sea el fraccionamiento de los intereses. Entonces en este tipo de contrato, si varia el fraccionamiento del pago de los intereses también lo hará la cantidad a pagar en T ($F(t,T)$).
En caso de que el valor de $F(t,T)$ sea el mismo sea cual sea el fraccionamiento de los intereses del contrato, lo que variará dependiendo del número de veces que se pagan intereses será la tasa de interés. Entonces si los intereses se pagan n veces, la tasa de interés es $R_n(t,T)$ y la cantidad a pagar en T $F(t,T) = (1 + \frac{R_n(t,T)(T-t)}{n})^n$, dónde este último valor será constante para todo n.
Si los intereses se pagan de forma contínua, entonces la expresión que indica la cantidad que hay que pagar en T es:

$$F(t,T) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + \frac{R_n(t,T)(T-t)}{n})^n = e^{R(t,T)(T-t)},$$

dónde $\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(t,T) = R(t,T)$.
A $R(t,T)$ lo llamamos tipo medio de interés pagado de forma contínua. El resultado anterior nos sirve para empezar a familiarizarnos con las expresiones del tipos de interés en modelos contínuos.
Los contratos también pueden ser tipo depósito bancario, es decir, que tengamos que desembolsar al inicio 1 euro i recibir en un futuro la cantidad $F(t,T) = e^{R(t,T)(T-t)}$.

Una premisa que hay que tener en cuenta antes de nada es que en el modelo que estudiaremos, así como pasa en el mundo real, no habrá oportunidades de arbitraje. Recordamos que una estrategia es de arbitraje si hay oportunidad de ganar dinero sin desembolsar dinero inicialmente y teniendo en cuenta que la probabilidad de

perder dinero durante la inversión es nula.
Sabiendo esto, procedemos a estudiar el tipo medio de interés nombrado anteriormente.
Asumimos que son conocidos los tipos de interés medio $(R(t,T))_{0\leq t\leq T}$. Entonces se cumplirá la siguiente expresión

$$F(t,s) = F(t,u)F(u,s), \forall t \leq u \leq s.$$

Podemos demostrarlo por reducción al absurdo.
Si para ciertos $t \leq u \leq s$ pasa $F(t,s) > F(t,u)F(u,s)$ se contradice la hipótesis de que nuestro modelo no tiene oportunidad de arbitraje. Pues una clara estrategia para ganar dinero sin riesgo sería:
1. En la fecha t, adquirir un contrato financiero tipo préstamo con vencimiento en u y recibir un 1 euro por esto. Invertir el euro recibido en el desembolso inicial de un contrato tipo depósito con vencimiento en s. La inversión total es 0.
2. En la fecha u se acaba el vencimiento del préstamo. Esto conlleva pagar la cantidad $F(t,u)$. Para conseguir este dinero, pediremos $F(t,u)$ préstamos con vencimiento en s, recibiendo por lo tanto la cantidad que necesitamos para saldar el préstamo inicial. En u la inversión continuará siendo 0.
3. En la fecha u se acaba el vencimiento de los $F(t,u)$ préstamos adquiridos en u. Esto conlleva pagar la cantidad $F(t,u)F(u,s)$. Recibimos del depósito inicial $F(t,s)$ euros. Las ganacias de la inversión total son

$$F(t,s) - F(t,u)F(u,s) > 0.$$

Proposición 1.1.1 *Usando el resultado anterior y suponiendo que $F(t,s)$ es diferenciable respecto s, se puede demostrar que existe una función $r(t)$ tal que:*

$$F(t,T) = e^{\int_t^T r(s)ds}.$$

Demostración:
Sea $s \geq t$,
$F(t,s+h) - F(t,s) = F(t,s)F(s,s+h) - F(t,s) = F(t,s)(F(s,s+h) - 1) \Rightarrow$

$$\frac{F(t,s+h) - F(t,s)}{F(t,s)h} = \frac{F(s,s+h) - F(s,s)}{h}$$

.
Haciendo el límtie $h \to 0$ tenemos

$$\frac{\partial_2 F(t,s)/\partial s}{F(t,s)} = \frac{\partial_2 F(s,s)}{\partial s} = r(s),$$

y de aqui deducimos

$$F(t,T) = e^{\int_t^T r(s)ds}.$$

Notamos que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds.$$

La función $r(t)$ puede ser interpretada como el tipo de interés a corto plazo para la fecha t.

Por lo tanto la tipo medio de interés pagado contínuamente $R(t,T)$ de un contrato financiero que tiene una vida entre t y T $(F(t,s), t \leq s \leq T)$ es intuitivamente la media de los tipos de interés a corto plazo para los instantes de tiempo entre t i T. De aquí proviene el nombre "tipo medio".

1.2. Bonos sin cupón

Un bono sin cupón con fecha de vencimiento T es un contrato que garantiza un euro en la fecha T. Para adquirir un contrato de este tipo en $t < T$ tendremos que desembolsar la cantidad que vale en ese instante y que denotamos como $P(t,T)$.
Usando los resultados anteriores, en t tenemos un desembolso de $P(t,T)$ y en T recibiremos $P(t,T)F(t,T) = 1 \Rightarrow P(t,T) = \frac{1}{F(t,T)} = e^{-\int_t^T r(s)ds}$.
Este es un enfoque determinista del modelo, dónde se supone que todo la información de lo que va a pasar es conocida a priori.
Pero es evidente que no pasa esto en el mundo real, pues en los mercados financieros pasa todo lo contrario. Es un mercado lleno de incertidumbres. Entonces, en el modelo que explicaremos en el siguiente capítulo usaremos procesos estocásticos y fijado un T, pasará que en cada instante $t < T$ los precios de los bonos serán variables aleatorias. Entonces en el modelo habrá infinitos contratos, uno para cada T.
La curva de los bonos sin cupón es la función :

$$T \to R(t,T) = e^{\int_t^T r(s)ds}$$

Entonces si hacemos al contrario que antes y fijamos t, ahora $P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$ es una función determinista de T, que tendrá como conjunto imagen los precios en t de los bonos con fecha de vencimiento $t < T$. Ni ahora ni adelante será un proceso estocástico.

1.3. Los diferentes tipos de interés del mercado

Suponemos que estamos en una fecha t, y fijamos dos fechas futuras más S y T, $t < S < T$.
Nos proponemos a construir des de t un contrato que invirtiendo en S un euro, obtengamos un tipo de interés en el periodo entre S y T tal que nos permita recibir una cantidad de dinero en T. Lo podemos hacer de la siguiente manera:

1. En la fecha t vendemos en corto un bono con vencimiento en S. Por lo tanto, recibamos una cantidad de $P(t,S)$ euros por la venta. Invertimos este dinero en adquirir $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ bonos con vencimiento en T. La cantidad a pagar es de $\frac{P(t,S)}{P(t,T)} * P(t,T) = P(t,S)$, que es exactamente la misma cantidad que hemos obtenido por la venta anterior. De momento el coste de la operación es zero.
2. La estrategia de vender en corto implica comprar el activo en su fecha de vencimiento por el precio de esa fecha. Por lo tanto, tenemos que pagar en la fecha S un euro.
3. Como somos propietarios de $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ bonos con vencimiento en T, recibimos en T un euro para cada uno de los bonos. Por lo tanto recibimos en esa fecha $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ euros.
La cantidad que recibimos $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ puede ser capitalizada mediante un interés simple o compuesto.

1.3.1 Interés simple

En caso de ser simple el interés, este se llama LIBOR (London Interbank Offered Rate). Es $L = L(t; S, T)$ tal que cumple

$$1 + (T - S)L = \frac{P(t,S)}{P(t,T)}.$$

Es el interés obtenido del contrato definido inicialmente, entonces se dice que es el tipo de interés garantizado para el periodo $[S,T]$ en la fecha t. Solucionando la ecuación anterior lo podemos expresar en función del precio de los bonos de la siguiente forma:

$$L(t; S, T) = -\frac{P(t,T) - P(T,S)}{(T - S)P(t,T)}.$$

En caso de que en el contrato inicial, la fecha de firma del contrato t sea la misma que la fecha S en la que se invierte el euro, entonces el tipo de interés simple del contrato $L(t,T)$ se llama "spotz se expresa de la siguiente forma:

$$L(t,T) = -\frac{P(t,T) - 1}{(T - S)P(t,T)}.$$

Es el tipo de interés que se usa en el mercado de bonos en la vida real.

1.3.1 Interés continuo

En caso de ser compuesto contínuo, entonces el tipo de interés garantizado para el periodo $[S,T]$ en la fecha t es $R = R(t; S, T)$ tal que cumple

$$e^{(T-t)R} = \frac{P(t,S)}{P(t,T)}.$$

Solucionando la ecuación anterior lo podemos expresar en función del precio de los bonos de la siguiente forma:

$$R(t; S, T) = -\frac{\log P(t,T) - \log P(T,S)}{(T-t)P(t,T)}.$$

En caso de que en el contrato inicial, la fecha de firma del contrato t sea la misma que la fecha en la que se invierte el euro S, entonces el tipo de interés contínuo del contrato $R(t,T)$ se llama *spot* y se expresa de la siguiente forma:

$$R(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{(T-t)}.$$

El interés contínuo aparece solo en estudios teóricos, pero no se usa en los mercados financieros.
Por ejemplo, un tipo de interés que existe es el interés instantáneo en T de un contrato que se firma en t.
En la realidad no encontramos este tipo de contratos con un periodo infinitesimal. El periodo de este es $[T, T + dT]$ y se supone que es firmado en t.
Para encontrar la expresión del interés haremos:

$$lim_{T \longrightarrow S} R(t; S, T) = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T} = f(t,T).$$

Por último existe el tipo de interés instantáneo en t. Se supone que el contrato es firmado en t y su periodo es $[t, t + dt]$. Su expresión es

$$r(t) = f(t,t) = lim_{T \longrightarrow t} f(t,T).$$

Vemos que hay una relación directa entre los tipos de interés definidos anteriormente y el precio de los bonos. Entonces, si conseguimos saber como se comportan en el mercado los tipos de interés sabremos modelar los bonos. Veremos en la siguiente parte del trabajo la importancia de los intereses.

1.4. Bonos con cupones, swaps, caps y floors

Presentamos ahora ciertos contratos financieros más complejos que el bono sin cupón. A diferencia de este contrato tan básico, el propietario de uno de estos contratos recibirá ciertas cantidades de dinero en diferentes instantes.
La idea de este apartado es entender el funcionamiento de estos contratos: cuándo se generan los flujos de dinero, la cantidad y el signo se los flujos, etc. La idea es poder encontrar estrategias de cartera que usen sólo bonos sin cupón y que tengan el mismo funcionamiento que los contratos que queremos estudiar. Entonces, para expresar el precio del contrato para un cierto instante, podemos usar el precio de la estrategia de bonos sin cupones. Así, cuándo en un futuro aprendamos a modelar el comportamiento de los bonos sin cupón, podremos aplicarlo y conocer también la dinámica que seguirán todos esto contratos bonos más complejos.

Bonos con cupones fijos

El propietario de este bono recibirá en unas fechas fijadas una cantidad de dinero predeterminado en el momento de emisión del bono. Entonces, la definición formal sería:
-Sea $T_0, T_1, ..., T_n$, las fechas fijadas, dónde T_0 es la fecha de emisión del bono y $T_1, ..., T_n$ las fechas de cobro del dinero.
-El propietario recibirá una cantidad predeterminada c_i en cada instante T_i.
-A parte se considera que existe un pago extra K al final del contrato, es decir, en T_n.
Obviamente este bono puede ser replicado como una cartera con c_i bonos sin cupones con fechas de vencimiento $T_i, i = 1, ..., n-1$ y K bonos sin cupones con fechas de vencimiento en T_n.
Por lo tanto podemos expresar el precio del bono en alguna fecha $t < T_1$ como:

$$p(t) = KP(t, T_n) + \Sigma_{i=1}^{n} c_i P(t, T_i).$$

Normalmente, los cupones son expresados en términos de ciertos intereses r_i y no de cantidades, por lo tanto en este caso

$$c_i = r_i(T_i - T_{i-1})K.$$

Para un cupón estándard en que los intervalos de tiempo son iguales tenemos:

$$T_i = T_0 + i\delta,$$

y $r_i = r$, de manera que

$$p(t) = K(p(t, T_n) + r\delta\Sigma_{i=1}^{n} P(t, T_i)).$$

Bonos con cupones flotantes

A menudo pasa que los cupones de los bonos no son fijados a priori, sino que se van actualizando en cada periodo del cupón. Un ejemplo es usar como interés del cupón pagado en $T_i \Rightarrow r_i = L(T_{i-1}, T_i)$, dónde L es el interés *spot LIBOR*.
Entonces los cupones del bono serán:

$$c_i = KL(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1}) = K(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1).$$

Para facilitar los cáluclos podemos considerar que $K = 1$. Podemos replicar cada una de estas cantidades con la siguiente estrategia:
1. En $t < T_0$, vender en corto un bono sin cupón con vencimiento en T_i por $P(t, T_i)$ y comprar otro bono sin cupón con vencimiento en T_{i-1} por la cantidad $P(t, T_{i-1})$. Esto quiere decir que el coste en t es de $P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)$.
2. En T_{i-1} vence el bono comprado y obtenemos una cantidad de 1. Con este dinero podemos comprar $\frac{1}{P(t,T_i)}$ bonos con vencimiento en T_i.
3. En T_{i-1} obtenemos la cantidad $\frac{1}{P(t,T_i)}$ de los bonos comprados en T_{i-1}. Recordamos que habíamos vendido en corto al inicio un bono, entonces tenemos que pagar tambi'en una cantidad de 1. El dinero que recibimos entonces en esta fecha es de $\frac{1}{P(t,T_i)} - 1$.
Entonces, si realizamos la estrategia anterior para cada uno de los cupones del bono, podemos expresar el precio del bono para $t < T_0$ como:

$$p(t) = P(t, T_n) + \Sigma_{i=1}^{n}(P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)) = P(t, T_0)$$

Esto quiere decir que de una unidad de dinero en T_0, evoluciona a un bono con cupones con tipos flotantes por el interés simple LIBOR.

Swaps

Un swap, o permuta financiera, es un contrato por el cual dos partes se comprometen a intercambiar una serie de cantidades de dinero en fechas futuras. Normalmente los intercambios de dinero futuros están referenciados a tipos de interés, llamándose *Interest Rate Swap* , aunque de forma más genérica se puede considerar un swap cualquier intercambio futuro de bienes o servicios (entre ellos de dinero) referenciado a cualquier variable observable.
Presentamos un swap que se llama de tipo de interés fijo vs tipo variable. Los swaps fijo/variable se pueden definir como el compromiso por el que una parte paga/recibe un tipo fijo (*swap rate*) sobre un nominal prefijado y recibe/paga un tipo variable sobre el mismo nominal. El nominal es la cantidad sobre la que se aplicará el tipo de interés. Un ejemplo en detalle de cómo se definiría un contrato de swap fijo variable sería:
-Sea $T_0, T_1, ..., T_n$, las fechas fijadas, dónde T_0 es la fecha en que se acuerda el contrato y $T_1, ..., T_n$ las fechas en que se intercambia el dinero.
-Suponemos que la diferencia de tiempo entre las fechas es el mismo, y por lo tanto $T_i - T_{i-1} = \delta$.

-A partir de ahora, imaginamos que somos la parte del contrato que paga el tipo fijo y recibe el variable.
-Suponemos como tipo variable el interés *spot LIBOR* $L(T_{i-1}, T_i)$. Entonces, en cada fecha $T_i, i \geq 1$ recibimos $K\delta L(T_{i-1}, T_i)$ y pagamos $K\delta R$, por lo tanto los flujos de caja en esa fecha es

$$K\delta L(T_{i-1}, T_i) - K\delta R = K\delta[L(T_{i-1}, T_i) - R].$$

Siguiendo la misma metodología que en los casos anteriores, existe una estrategia que solo opera con bonos sin cupón tal que genera en T_i la misma cantidad que el del contrato swap. El precio de esta estrategia en $t \leq T_0$ es

$$K(P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)) - K\delta RP(t, T_i) = KP(t, T_{i-1}) - K(1 + R\delta)P(t, T_i).$$

Si hacemos lo mismo con todos los flujos de caja del contrato, obtenemos el precio del contrato para $t \leq T_0$
$p(t) = \Sigma_{i=1}^n((P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)) - K\delta RP(t, T_i) = KP(t, T_{i-1}) - K(1+R\delta)P(t, T_i))$
$= KP(t, T_0) - KP(t, T_n) - KR\delta\Sigma_{i=1}^n P(t, T_i$
$= KP(t, T_0) - K\Sigma_{i=1}^n d_i P(t, T_i),$
con $d_i = R\delta$, $i = 1, ..., n-1$ y $d_n = 1 + R\delta$ R normalmente se escoge de forma que el valor del contrato sea cero. Si $t < T_0$, entonces

$$R = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta\Sigma_{i=1}^n P(t, T_i)}.$$

Caps y Floors

Cuando alguna persona o entidad solicita un préstamo a tipo de interés variable corre un riesgo por la subida posible del tipo de interés, este riesgo se denomina riesgo de tipo de interés.
Si la empresa desea evitar las posibles subidas del tipo, puede adquirir un denominado cap (techo o límite superior), con lo que acuerda con una entidad que si el tipo de interés asciende por encima de un límite máxim, recibirá una determinada cantidad. A cambio el prestatario debe pagar una prima a la entidad con la que contrata el cap.
También podemos definir el floor (suelo), que funciona de forma inversa al cap. Cuando alguien realiza una inversión o depósito que recibe una remuneración variable dependiente de un índice de tipo como puede ser el euribor, corre también un riesgo, en este caso de que el tipo de interés descienda y vea disminuida su rentabilidad. El inversor puede adquirir un floor, por el cual contrata con una entidad, que si el tipo de interés desciende por debajo de un límite mínimo recibirá una determinada cantidad a cambio deberá pagar una prima o precio por este aseguramiento.
Vemos más formalmente el funcionamiento de estos contratos:
-Sea $T_0, T_1, ..., T_n$, las fechas fijadas, dónde T_0 es la fecha en que se acuerda el contrato y $T_1, ..., T_n$ las fechas en que hay el flujo de dinero.
-Suponemos que la diferencia de tiempo entre las fechas es el mismo, y por lo tanto $T_i - T_{i-1} = \delta$.
-Suponemos como tipo de interés variable el interés *spot LIBOR* $L(T_{i-1}, T_i)$.

Respecto los caps, sabemos que en cada instante T_i recibimos la cantidad $K\delta(L(T_{i-1},T_i)-R)_+$. Podemos definir el caplet i como un contrato con un solo pago en T_i, que es el definido anteriormente. Entonces los caps son una suma de caplets.
Respecto los floors la situación es análoga. Sabemos que en cada instante T_i recibimos la cantidad $K\delta(R-L(T_{i-1},T_i))_+$. Podemos definir el floorlet i como un contrato con un solo pago en T_i, que es el definido anteriormente. Entonces los floors son una suma de floorlets.

Proposición 1.4.1 *El valor de un cap con principal K y cap rate R es el de una cartera con $K(1+R\delta)$ opciones del tipo put con vencimiento en T_{i-1}, $i=1,...,n$ que tienen como activos subyacentes bonos con vencimiento en T_i y con strike $\frac{1}{1+R\delta}$.*

Demostración.
$K\delta(R-L(T_{i-1},T_i))_+ = K(\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)} - 1 - \delta R)_+$
$= \frac{K(1+R\delta)}{P(T_{i-1},T_i)}(\frac{1}{(1+R\delta)} - P(T_{i-1},T_i))_+$.
Es decir, si compramos $\frac{1}{1+R\delta}$ opciones put como las del enunciado en un $t < T_0$, obtendremos en T_{i-1} la cantidad $K(1+R\delta)(\frac{1}{(1+R\delta)} - P(T_{i-1},T_i))_+$. Este dinero lo puedo invertir en bonos, pues puedo comprar $\frac{K(1+R\delta)}{P(T_{i-1},T_i)}(\frac{1}{(1+R\delta)} - P(T_{i-1},T_i))_+$ bonos con vencimiento en T_i y obtener finalmente en esta fecha esta cantidad concreta.
Análogamente, el valor de un floor con principal K y cap rate R es el de una cartera con $K(1+R\delta)$ opciones del tipo call con vencimiento en T_{i-1}, $i=1,...,n$ que tienen como activos subyacentes bonos con vencimiento en T_i y con *strike* $\frac{1}{1+R\delta}$.

Vemos que los flujos de caja de un Swap ($K\delta L(T_{i-1},T_i) - K\delta R$) son los mismos que los de una estrategia basada en comprar un Cap y vender un Floor $\Rightarrow$ pues en T_i, pueden pasar dos cosas:
1. $K\delta L(T_{i-1},T_i) - K\delta R > 0 \Rightarrow K\delta(L(T_{i-1},T_i)-R)_+ - K\delta(R-L(T_{i-1},T_i))_+ = K\delta(L(T_{i-1},T_i)-R)$.
2. $K\delta L(T_{i-1},T_i) - K\delta R < 0 \Rightarrow K\delta(L(T_{i-1},T_i)-R)_+ - K\delta(R-L(T_{i-1},T_i))_+ = -K\delta(R-L(T_{i-1},T_i)) = K\delta(L(T_{i-1},T_i)-R)$.

Por lo tanto, Cap(t)-Floor(t)=Swap(t).

2. Teoría de procesos estocásticos

2.1. Cuestiones básicas

Toda la teoría que veremos en el trabajo está destinada a modelar el precio de los bonos. Es una continuación del modelo inventado por Black-Scholes.
Antes de nada definimos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \Im, \mathbb{P}, (\Im_t)_{0 \leq t \leq T'}))$.
A modo de ejemplo, podemos definir un proceso estocástico $(X_t)_{0 \leq t \leq T'}$ que modeliza el precio de un activo cualquiera. Podemos atribuir un significado del mundo real a cada elemento anterior:
-La medida de probabilidad sobre $\Im$ del mundo real será $\mathbb{P}$.
-El intervalo $[0, T']$ es el período de tiempo en el que se modela el precio de los activos.
-Ω es un conjunto (por ejemplo $\Re$), que quiere representar todos los escenarios posibles que ocurren en el mundo real durante $[0, T']$, y que afectarán por lo tanto al precio del activo. Para cada escenario $\omega \in \Omega$, la evolución del precio de los bonos será $t \to X_t(\omega)$.
-Una σ-álgebra sobre un conjunto Ω, es una família de de subconjuntos de Ω. La filtración de las σ-álgebras $(\Im_t)_{0 \leq t \leq T'}$(dónde $\Im_{T'} = \Im$), quiere representar la información que disponemos en cada momento $t \in [0, T']$. Como sabemos que $\Im_s \subset \Im_t$ si $s < t$, esto quiere decir que al paso del tiempo, las $\sigma-$álgebra de la filtración son mas "finas", es decir, la información es acumulativa.
Diremos que el proceso (X_t) será adaptado a la filtración anterior si X_t es $\Im_t$-medible.
Asumimos que la la filtración $(\Im_t)_{0 \leq t \leq T'}$ es la filtración natural de un movimiento browniano estándar $(W_t)_{0 \leq t \leq T'}$: $\Im_t = \sigma(W_t, 0 \leq t \leq T')$.

Definiremos el activo sin riesgo como: $S_t^0 = e^{\int_0^t r(s)ds}$, dónde $(r(t))_{0 \leq t \leq T'}$ es un proceso adaptado a la filtración que satisface $\int_0^{T'} |r(s)|ds < \infty$ c.s. y que representa el interés. Uno puede pensar que es un poco raro que se llame activo sin riesgo si es una proceso estocástico dónde hay por medio el azar. Ya veremos en un futuro porque es de menos riesgo que otros.
Imaginamos que en un instante de tiempo $t \in [0, T']$, tenemos una cantidad de dinero "q"que puede proceder de la venta de otro activo por ejemplo. Entonces, si decidimos invertir en activos sin riesgo y esperar hasta un instante $s > t$, nuestra inversión tendrá con total seguridad y sin riesgos un rendimiento de $qe^{\int_t^s r(s)ds}$ en s.
También nos encontraremos con la expresión $a = qe^{-\int_t^s r(s)ds}$. Diremos que es el valor de q descontado por el interés. Obviamente ."a"se refiere al valor que se tiene que invertir en activos sin riesgo en la fecha t para que en s se obtenga la cantidad $ae^{\int_t^s r(s)ds} = q$.

2.2. Hipótesis principal: no oportunidad de arbitraje

En nuestro modelo habrá también activos con riesgo. Estos serán los bonos sin cupón con fecha de vencimiento $T \in [0, T']$. Definimos $P(t,T)$,$0 \leq t \leq T$ como el precio en t del bono con vencimiento en T. Entonces tal y como hemos definido anteriormente estos bonos, sabemos que $P(T,T) = 1$. Definiremos entonces un proceso estocástico adaptado $(P(t,T))_{0 \leq t \leq T}$.
Nuestro modelo se quiere parecer lo máximo posible al modelo de mercado económico que existe en la realidad. Por lo tanto, sabiendo que teóricamente es un mercado en equilibrio, nuestro modelo también lo será.
Una de las condiciones para la existencia de este equilibrio es que no puedan existir estrategias financieras con arbitraje.

Definición 2.2.1 Una estrategia de arbitraje es cuándo hay la posibilidad de ganar dinero sin riesgo ninguno de perder nada de lo invertido inicialmente.

Definición 2.2.2 Un mercado es viable si y solo si no hay oportunidades de arbitraje.

Teorema 2.2.1 *Un mercado es viable si y solo si existe una probabilidad $\mathbb{P}^*$ equivalente a la probabilidad real $\mathbb{P}$ ($\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}^*$) tal que los precios de los activos con riesgo descontados por el activo sin riesgo son procesos martingalas bajo $\mathbb{P}^*$.*

Por lo tanto tenemos la siguiente hipótesis:
(H) Existe una probabilidad $\mathbb{P}^*$ ($\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$) tal que para todo $T \in [0, T']$, el proceso $(P'(t,T))_{0 \leq t \leq T}$ definido como $P'(t,T) = e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t,T)$ es $\mathbb{P}^*$-martingala.
Sabiendo que $P(T,T) = 1$ y aplicando la propiedad martingala anterior:

$$P'(t,T) = E^*(P'(T,T)|\Im_t) \Rightarrow P'(t,T) = E^*(e^{-\int_0^T r(s)ds}|\Im_t)$$

$$\Rightarrow e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t,T) = e^{-\int_0^t r(s)ds} E^*(e^{-\int_t^T r(s)ds}|\Im_t) \Rightarrow P(t,T) = E^*(e^{-\int_t^T r(s)ds}|\Im_t)$$

Usamos el siguiente ejemplo para entender de forma intuitiva la expresión $P(t,T) = E^*(P(T,T)e^{-\int_t^T r(s)ds}|\Im_t)$ y a la vez introducirnos en el mundo financiero.
Si un gestor de activos financieros es propietario en la fecha t de un bono con vencimiento en T, tiene dos opciones:
-La primera se basa en vender el bono inmediatamente en t. El rendimiento que se obtendría de dicha inversión es $P(t,T)$ (el precio que vale el bono en el mercado).
-La segunda opción consiste en quedárse el cupón hasta T y venderlo en esa fecha. Como queremos comparar las dos opciones como si estuvieramos en la fecha t, descontamos el precio del bono en T por el interés entre t i T y aplicamos la esperanza condicionada a $\Im_t$. Entonces el rendimiento que se espera obtener en t es de $E^*(P(T,T)e^{-\int_t^T r(s)ds}|\Im_t)$.
Entonces, la hipótesis anterior nos dice que en un mercado sin arbitraje, existe una

probabilidad $\mathbb{P}^*$ por la cual el rendimiento de las dos opciones explicadas anteriormente es el mismo. Por esto llamamos a $\mathbb{P}^*$ probabilidad neutral al riesgo.
Esta es una medida teórica que nos sirve solo para calcular el proceso estocástico que modela el precio de los bonos, pues si conocemos la variable aleatoria $\Im_T$-medible $h = P(T,T)e^{-\int_t^T r(s)ds}$ y aplicamos la hipótesis $P(t,T) = E^*(e^{-\int_t^T r(s)ds}|\Im_t)$ podemos conocer con detalle $(P(t,T))$.
Luego se pueden hacer simulaciones de este proceso con la probabilidad real $\mathbb{P}$ que es lo que realmente nos interesa, ya que recordamos que es la probabilidad real del mercado. Bajo esta medida no se cumple la igualdad de los rendimientos de las dos opciones anteriores, porque $P(t,T) \neq E(P(T,T)e^{-\int_t^T r(s)ds}|\Im_t)$.

2.3. Procesos de los bonos

Durante el modelo se usarán continuamente ecuaciones diferenciales estocásticas. Se expresan de la forma

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t$$

$$X(0) = Z,$$

y una solución de la ecuación anterior se llama difusión.

Teorema 2.1. *Sea* $(\Omega, \Im, \mathbb{P}, (\Im_t)_{0\leq t\leq T'}))$ *el mismo espacio definido anteriormente. También tenemos funciones* $\mu : \Re^+ x\Re \rightarrow \Re$, $\sigma : \Re^+ x\Re \rightarrow \Re$; *Z es una variable aleatoria* $\Im_0$*-medible y finalmente un* $\Im_t$*-movimiento browniano* $(W_t)_{t\geq 0}$.
Una solución de la ecuación anterior es un proceso continuo $\Im_t$*-adaptado* $(X(t))_{t\geq 0}$ *que satisface:*

1. Para $t \geq 0$*, las integrales* $\int_0^t \mu(s, r(s))ds$ *y* $\int_0^t \sigma(s, r(s))ds$ *existan:*
$\int_0^t |\mu(s, X(s)|)ds < +\infty$ *y* $\int_0^t |\sigma(s, X(s))|^2 ds$ *c.s.*

2. $\forall t \geq 0$ $X(t) = Z + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))ds$ *c.s.*

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes sobre μ y σ para la existencia y unicidad de una solución de la ecuación estocástica anterior.

Teorema 2.2. *Si μ y σ son funciones continuas, y existe una constante $K < +\infty$ tal que*
1. $|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$
2. $|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$
3. $E(Z^2) < +\infty$
entonces, para cualquier $T \geq 0$, la ecuación admite una única solución en el intervalo $[0,T]$.

La función $\mu(t, X(t))$ de una integral estocástica es $\Rightarrow$

$$\mu(t, X(t)) = lim_{\triangle t \to 0} \frac{E(X(t+\triangle t) - X(t)|\Im_t)}{\triangle t}.$$

Por eso la llamamos la deriva, porque quiere representar una esperanza de la "derivada"del proceso $X(t)$ en t y esta dependerá de la posición de la variable aleatoria $X(t)$.
En la otra parte de la ecuación vemos que aparece el movimiento browniano. Porsus propiedades, esta parte la entendemos como una perturbación del proceso. $\sigma(t, X(t))$, que está en la ecuación junto con la diferencial del m. browniano se define $\Rightarrow$

$$\sigma^2(t, X(t)) = lim_{\triangle t \to 0} \frac{E((X(t+\triangle t) - X(t))^2|\Im_t)}{\triangle t}.$$

La llamamos difusión, porque quiere representar la varianza de la diferencial del proceso $X(t)$ en t y igual que antes, también dependerá de la posición de $X(t)$. Como mayor sea $\sigma(t, X(t))$, entonces mayor será la incidencia de la perturbación en el proceso.

Con todo lo explicado anteriormente, procedemos a modelar los bonos. Se ha dicho anteriormente que las dos medidas de probabilidad $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^*$ definidas en $(\Omega, \Im)$ son equivalentes. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema Radon-Nikodym dado el espacio medible y las dos medidas anteriores, sabemos que existe una función $L_{T'} = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$ en Ω tal que para todo subconjunto de $A \in \Im$, $\mathbb{P}^*(A) = \int_A L_{T'} d\mathbb{P}$.
A ésta función $L_{T'}$ que es $\Im_{T'}$-medible la llamaremos densidad de la probabilidad $\mathbb{P}^*$ respecto de $\mathbb{P}$. Podemos definir también la densidad anterior condicionada por la σ-algebra $\Im_t$ de la filtración $(\Im_t)_{0 \leq t \leq T'}$, $\Rightarrow$ y obtenemos $L_t = E(L_{T'}|\Im_t)$. Entonces podemos definir un proceso $(L_t)_{0 \leq t \leq T'}$ adaptado a la filtración $\Im_t$.

Proposición 2.3.1 *existe un proceso estocástico $(q(t))_{0 \leq t \leq T'}$ adaptado a la filtración definida anteriormente tal que* $\forall t \in [0, T']$,

$$L_t = \exp(\int_0^t q(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t q(s)^2 ds) c.s. \tag{2.1}$$

Demostración:
El proceso $(L_t)_{0\leq t\leq T'}$ definido anteriormente es por construcción un proceso martingala relativo a $(\Im_t)$, que recordamos que es que es la filtración natural del movimiento browniano (W_t). Así pues, por el teorema de representación de martingalas borwnianas, sabemos que existe un proceso $(H_t)_{0\leq t\leq T'}$ adaptado a la filtración $(\Im_t)$ tal que $\int_0^{T'} H_t^2 dt < \infty$ c.s. y que satisface $\forall t \in [0, T']$
$L_t = L_0 + \int_0^t H(s)dW_s$ c.s.
Como el proceso es martingala, entonces el valor $E(L_t)$ es igual $\forall t \in [0, T'] \Rightarrow L_0 = E(L_0) = E(L_{T'}) = \int_\Omega L_{T'} d\mathbb{P} = \mathbb{P}^*(\Omega) = 1$. Para llegar a obtener la ecuación del enunciado, aplicaremos la fórmula de Ito con la función logaritmo, es decir, queremos la expresión del proceso $\log(L_t)$. Para esto necesitamos primero comprobar que $\mathbb{P}(\forall t \in [0, T'], L_t > 0) = 1$. Procedemos a comprobarlo:
Recordamos que por hipótesis $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^*$ son probabilidades equivalentes y $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\omega) > 0$, entonces sabiendo esto y que

$$L_{T'} = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$$

deducimos que $\forall t \in [0, T'], \mathbb{P}(L_t > 0) = 1$ c.s.
Antes de nada vemos que $\tau = (\text{ínf}\{t \in [0, T'] | L_t = 0\}) \bigwedge T$ es un stopping time de la filtración $(\Im_t)$.
Hemos visto anteriormente que $L_0 = 1$. Podemos definir la siguiente igualdad

$$\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega | \inf_{0\leq s\leq t} L_s(\omega) = 0\}.$$

Ahora queremos ver que fijado un $\omega \in \Omega \Rightarrow \text{ínf}_{0\leq s\leq t} L_s(\omega) = \text{ínf}_{0\leq s\leq t, s\in Q} L_s(\omega)$.
Claramente $\text{ínf}_{0\leq s\leq t} L_s(\omega) \geq \text{ínf}_{0\leq s\leq t, s\in Q} L_s(\omega)$ pues puede ser que el ínfimo del camino contínuo sea en puntos irracionales.
Para ver $\text{ínf}_{0\leq s\leq t} L_s(\omega) \leq \text{ínf}_{0\leq s\leq t, s\in Q} L_s(\omega)$ utilizaremos la continuidad del camino $s \to L_s(\omega)$. Sea $s \in [0, t]$ y $(q_i)_{i\in N}$ una sucesión de números racionales que convergen a s, entonces $L_{q_i}(\omega)$ converge hacia $L_s(\omega)$.
Entonces si $L_{q_i}(\omega) \geq \text{ínf}_{0\leq s\leq t, s\in Q} L_s(\omega) \Rightarrow L_s(\omega) \geq \text{ínf}_{0\leq s\leq t, s\in Q} L_s(\omega)$
$\Rightarrow \text{ínf}_{0\leq s\leq t} L_s(\omega) \geq \text{ínf}_{0\leq s\leq t, s\in Q} L_s(\omega)$.
Se cumple entonces $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega | \text{ínf}_{0\leq s\leq t} L_s(\omega) = 0\} = \{\omega \in \Omega | \text{ínf}_{0\leq s\leq t, s\in Q} L_s(\omega) = 0\} \in \Im_t$.
Ésta última igualdad es conocida por la teoría de martingalas en el caso discreto.
La constante T' también puede ser tratada como un stopping time y claramente $\tau \leq T'$. Podemos aplicar el optional stopping theorem
$\Rightarrow E(L_{T'} | \Im_\tau) = L_\tau$ c.s.
Aplicando esperanzas a la última igualdad tenemos

$$\begin{aligned} E(L_{T'}) = E(L_\tau) = E(L_\tau 1_{\tau<T'} + L_{T'} 1_{\tau=T'}) &= E(L_\tau 1_{\tau<T'}) + E(L_{T'} 1_{\tau=T'}) \\ &= E(L_{T'} 1_{\tau=T'}), \end{aligned}$$

dónde usamos que $\omega \in \Omega$ tales que $\tau(\omega) < T \Rightarrow L_{\tau(\omega)} = 0$.
Hemos visto entonces $E(L_{T'}) = E(L_{T'} 1_{\tau=T'})$y sabemos por definición que

$$\mathbb{P}(L_{T'} > 0) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\tau(\omega) = T') = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\forall t \in [0, T'], L_t > 0) = 1.$$

Podemos entonces aplicar la función logaritmo al proceso L_t obteniendo la siguiente expresión:
$\log(L_t) = \int_0^t \frac{1}{L_s} H_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{1}{L_s})^2 H_s^2 ds$ *c.s.*
Finalmente, el proceso $(q(t))_{0\leq t\leq T}$ definido en el enunciado existe y es $q(t) = \frac{H_t}{L_t}$.

Corolario 2.3.1 *El precio en t de los bonos cupón cero con vencimiento en $T \geq t$ puede ser expresado como:*

$$P(t,T) = E(\exp(-\int_t^T r(s)ds + \int_t^T q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T (q(s))^2 ds)|\Im_t)$$

Demostración:
Para demostrar este enunciado usaremos la regla de Bayes para las esperanzas condicionadas.
Sea X una variable aleatoria no negativa $\Im_{T'}$-medible y (L_t) el proceso definido anteriormente:

$$E^*(X|\Im_t) = \frac{E(XL_{T'}|\Im_t)}{L_t}.$$

La anterior expresión es una igualdad de variables aleatorias $\Im_t$-medibles, entonces basta comprobar que

$$A \in \Im_t, \int_A E^*(X|\Im_t)L_t dP = \int_A E(XL_{T'}|\Im_t)dP.$$

$$\int_A E^*(X|\Im_t)L_t dP = \int_A E^*(X|\Im_t)E(L_{T'}|\Im_t)dP = \int_A E(L_{T'}E^*(X|\Im_t)|\Im_t)dP$$
$$= \int_A L_{T'}E^*(X|\Im_t)dP = \int_A E^*(X|\Im_t)dP^* = \int_A XdP^*.$$
$$\int_A E(XL_{T'}|\Im_t)dP = \int_A XL_{T'}dP = \int_A X\frac{dP^*}{dP}dP = \int_A XdP^*$$

Dónde se ha usado la definición de esperanza condicionada y que L es la derivada Radon-Nykodin.

Ahora si aplicamos a la fórmula $E^*(X|\Im_t) = \frac{E(XL_{T'}|\Im_t)}{L_t}$ la expresión de L_s encontrada anteriormente y $X = exp(-\int_t^T r(s)ds)$, obtenemos claramente:

$$P(t,T) = E(exp(-\int_t^T r(s)ds + \int_t^T q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T (q(s))^2 ds)|\Im_t).$$

Proposición 2.3.2: *Para cada tiempo de vencimiento $T \in [0, T']$,existe un proceso adaptado $(\sigma_t^T)_{0\leq t\leq T}$ tal que:*

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r(t) - \sigma_t^T q(t))dt + \sigma_t^T dW_t, 0 \leq t \leq T.$$

Demostración:
Utilizando que el proceso $(P'(t,T))_{0\leq t\leq T}$ es martingala respecto $\mathbb{P}^*$ y la regla de Bayes para las esperanzas condicionadas, vemos que $(P'(t,T)L_t)_{0\leq t\leq T}$ es martingala respecto $\mathbb{P} \Rightarrow$

$$E^*(P'(T,T)|\Im_t)L_t = E(P'(T,T)L_T|\Im_t) \Rightarrow P'(t,T)L_t = E(P'(T,T)L_T|\Im_t).$$

Usando el mismo racionamiento que en la preposición anterior $\Rightarrow$ existe un proceso adaptado $(\theta_t^T)_{0\leq t\leq T}$tal que $\int(\theta_t^T)^2dt < \infty$ casi seguro y

$$P'(t,T)L_t = P'(0,T)\exp(\int_0^t(\theta_s^T)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t(\theta_s^T)^2ds)c.s.$$

Ahora, simplemente sustituyendo $L_t = \exp(\int_0^t q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t q(s)^2ds)$ a la expresión anterior y pasando al otro lado de la igualdad el factor de descuento, obtenemos:

$$P(t,T) = P(0,T)\exp(\int_0^t r(s)ds + \int_0^t(\theta_s^T - q(s))dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t(\theta_s^T)^2 - (q(s))^2ds)c.s.$$

El proceso anterior es de la forma $P(t,T) = f(Z(t)) = P(0,T)\exp(Z(t))$, dónde la dinámica de $Z(t)$ es:

$$dZ_s = r(s)ds + (\theta_s^T - q(s))dW_s - \frac{1}{2}(\theta_s^T)^2 - (q(s))^2ds,$$

y

$$d<Z,Z>_s = (\theta_s^T - q(s))^2ds.$$

Consecuentemente, aplicando la fórmula de Ito al proceso $P(t,T)$:

$$dP(t,T) = f'(Z(t))dZ(t) + \frac{1}{2}f''(Z(t))d<Z,Z>_t$$

$$= P(0,T)\exp Z(t)dZ(t) + \frac{1}{2}P(0,T)\exp Z(t)d<Z,Z>_t$$

Sustituyendo a la ecuación las fórmulas del proceso $Z(t)$ descrito anteriormente se obtiene:

$$dP(t,T) = P(t,T)r(t)dt + P(t,T)(\theta_t^T - q(t))dW_t - \frac{1}{2}P(t,T)((\theta_t^T)^2 - (q(t))^2)dt$$

$$+\frac{1}{2}P(t,T)(\theta_t^T) - (q(t))^2dt)$$

$$= P(t,T)(r(t) + q(t)^2 - q(t)\theta_t^T)dt + (\theta_t^T - q(t))dW_t$$

dónde $\sigma_u^t = \theta_u^t - q(t)$.

Ahora podemos comparar las dos ecuaciones diferenciales estocásticas del activo con riesgo y el activo sin riesgo$\Rightarrow$

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r(t) - \sigma_t^T q(t))dt + \sigma_t^T dW_t$$

$$\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r(t)dt.$$

Podemos apreciar una diferencia en éstas dos fórmulas muy clara, en la del activo con riesgo aparece un movimiento browniano estándard (W_s), que es lo que entendemos como la perturbación que corresponde al riesgo del activo y que no aparece en la fórmula del activo sin riesgo (S_t^0).
Recordando lo explicado al principio sobre la deriva $\mu(t, P(t,T))$, el término $r(t) - \sigma_t^T q(t)$ intuitivamente lo podemos entender como la esperanza de tasa de retorno de los bonos y obviamente $-\sigma_t^T q(t)$ es la diferencia entre la esperanza de la tasa de retorno entre el activo de riesgo y el sin riesgo, y por lo tanto podemos entender $-q(t)$ cómo el risk premium".
Todo esto que hemos aclarado anteriormente es sobre la probabilidad real $\mathbb{P}$. Ahora bién, hemos visto antes la existencia de una probabilidad $\mathbb{P}^*$ neutral y su importancia en nuestro modelo. Entonces, estaría bién poder obtener la ecuación diferencial estocástica del bono sobre $\mathbb{P}^*$, que variará respeto la dinámica anterior porqué con el cambio de medida W_t no es un movimiento browniano.
Podemos aplicar el teorema de Girsanov. Entonces el proceso (W_t') definido $W_t' = W_t - \int_0^t q(s)ds$ es una movimiento browniano en la probabildad $\mathbb{P}^*$y $\Rightarrow$sustituyendo $dW_t' = dW_t - q(s)ds$ a la ecuación estocástica anterior, obtenemos

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r(t))dt + \sigma_t^T dW_t'.$$

Se ve claramente que la esperanza de la tasa de retorno respecto $\mathbb{P}^*$ del activo con riesgo es la misma que la tasa de retorno del activo sin riesgo, que es lo que hemos visto que pasaba bajo la probabilidad neutral. Resolviendo la ecuación anterior obtenemos la siguiente expresión:

$$P(t,T) = P(0,T)exp(\int_0^t r(s)ds + \int_0^t (\theta_s^T)dW_s' - \frac{1}{2}\int_0^t (\theta_s^T)^2)ds).$$

2.4. Opciones en bonos

En este apartado vamos a mezclar la teoría sobre las opciones (call y put) y los bonos. Seguiremos trabajando en el mismo espacio de probabilidad que antes y sabiendo de la existencia de la probabilidad neutral. Ahora vamos a considerar un contrato de tipo Europeo con una fecha de vencimiento en θ dónde el activo subyacente del contrato será un bono sin cupón con una fecha de vencimiento T más tarde que el de la opción, es decir $0 \leq \theta < T \leq T'$.
Si la opción es del tipo call con un "strike"K, es decir, que en θ el propietario de la opción tendrá el derecho de comprar el bono a un precio K, es conocido que el valor del contrato en su vencimiento θ vendrá dado por la variable aleatoria $\Im_\theta$-medible $(P(\theta,T) - K)_+$.
Tal y cómo se estudia en la teoría de las opciones, la cubriremos con una cartera

de activos dónde aparece, a parte del activo sin riesgo (S^0), el activo incluído en el contrato de la opción, que en este caso es el bono cupón zero $(P(\theta,T))_{0\leq t\leq\theta}$. Entonces definiremos una estrategia para la cartera en el periodo de vida de la opción $[0,\theta]$, que es un proceso adaptado $(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq\theta}$ con valores en $\Re^2$, dónde H_t^0 representa la cantidad de activos sin riesgo en la fecha t y H_t representa la cantidad de activos con riesgo (bonos con vencimiento en T) en la fecha t.
Entonces el valor de la cartera en t será

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t P(t,T) = H_t^0 \exp(\int_0^t r(s)ds) + H_t P(t,T).$$

Queremos que la cartera sea autofinanciada.
Para facilitar el significado de auto financiamiento, podemos tratar de ver el problema en tiempo discreto. En este caso el proceso $(H_t^0, H_t)_{0,1,2,\ldots,\theta}$ es predecible, que quiere decir que el valor que tendrán las cantidades de cada activo en un tiempo t se escogen en $t-1$. Es decir, imaginamos que somos el gestor de la cartera y nos encontramos en t y nuestra cartera tiene un valor de $V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t P(t,T)$. Ahora es el momento de comprar o vender activos, y las variaciones que se hagan sobre la cantidad de los activos permanecerán constantes entre el periodo $[t, t+1]$. Imaginamos se compran 100 bonos con riesgo más de los que ya hay en t, y en total se tiene ahora una cantidad de $H_{t+1} = H_t + 100$ (no variará hasta $t+1$). Pero el dinero usado para comprar estos bonos $(100 * P(t,T))$ tiene que salir de la misma cartera, es decir, gastar-se de su bolsillo $100 * P(t,T)$ vendiendo una cantidad concreta del otro activo, que concreto es $\frac{100*P(t,T)}{S_t^0}$. Entonces, una vez hechas las transacciones anteriores:

$$H_{t+1}^0 S_t^0 + H_{t+1} P(t,T) = (H_t^0 - \frac{100 * P(t,T)}{S_t^0}) S_t^0 + (H_t + 100) P(t,T)$$

$$= H_t^0 S_t^0 + H_t P(t,T).$$

Por lo tanto la condición de que una cartera sea autofinanciada es

$$H_{t+1}^0 S_t^0 + H_{t+1} P(t,T) = H_t^0 S_t^0 + H_t P(t,T).$$

Y por lo tanto, si ahora volvemos al caso contínuo $\Rightarrow$

$$V_{t+\triangle t} - V_t = H_{t+\triangle t}^0 (S_{t+\triangle t}^0 - S_t^0) + H_{t+\triangle t}(P(t+\triangle t, T) - P(t,T)).$$

Si hacemos el límite a la igualdad anterior, obtenemos la condición para que la estrategia $(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq\theta}$ se auto financiada:

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dP(t,T).$$

Si queremos en un futuro integrar esta ecuación para obtener una expresión para el proceso de la cartera V_t, ya vimos en el teorema de Itô que se necesita que se cumplan unas condiciones. Entonces el proceso $(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq\theta}$ tendrá que cumplir: $\int_0^\theta |H_t^0 r(t)| dt < \infty$ y $\int_0^\theta (H_t \sigma_t^T)^2 dt < \infty$ c.s.

De esta forma las siguientes integrales están bien definidas:

$$\int_0^\theta H_t^0 dS_t^0 = \int_0^\theta H_t^0 r(t) S_t^0 dt$$

y

$$\int_0^\theta H_t dP(t,T) = \int_0^\theta H_t P(t,T) r(t) dt + \int_0^\theta P(t,T)\sigma_t^T H_t dW_t'$$

Notamos que también se necesita que los procesos $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ $(P(t,T))_{0\leq t\leq T}$ sean continuos y acotados c.s., que lo són por definición.

Definición 2.4.1 *La estrategia $(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq\theta}$ es admisible si es auto financiada y si el valor descontado de su correspondiente cartera $V_t' = H_t^0 + H_t P'(t,T)$ es para todo t, no-negativa ($V_t' > 0$ c.s.) y $sup_{0\leq t\leq\theta} V_t'$ es cuadrado integrable sobre la probabilidad $\mathbb{P}^*$.*

La siguiente proposición muestra que bajo algunas condiciones, es posible cubrir todas los contratos de tipo Europeo con una cartera admisible.

Proposición 2.4.1 *Asumimos $sup_{0\leq t\leq\theta}|r(t)| < \infty$ c.s. y σ_t^T diferente que 0 c.s. para todo $t \in [0,\theta]$. Sea $\theta < T$ y sea h una $\Im_\theta$-medible variable aleatoria tal que $he^{-\int_0^\theta r(s)ds}$ cumple $E^*((he^{-\int_0^\theta r(s)ds})^2) < +\infty$, entonces existe una estrategia admisible el valor del cual en θ es igual a h. El valor en $t \leq \theta$ de tal estrategia es:*

$$V_t = E^*(he^{-\int_t^\theta r(s)ds} | \Im_t).$$

Demostración:
Suponemos que $(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq\theta}$ es una estrategia admisible. Entonces queremos conocer la expresión de dV_t' dónde $V_t' = V_t e^{-\int_0^t r(s)ds}$ es el valor descontado de la cartera de la estrategia anterior. Aplicando la fórmula de Itô al proceso anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
&dV_t' = -V_t e^{-\int_0^t r(s)ds} r(t)dt + e^{-\int_0^t r(s)ds} dV_t \\
&= -(H_t^0 S_t^0 + H_t P(t,T))e^{-\int_0^t r(s)ds} r(t)dt + e^{-\int_0^t r(s)ds}(H_t^0 dS_t^0 + H_t dP(t,T)) \\
&= -(H_t^0 S_t^0 + H_t P(t,T))e^{-\int_0^t r(s)ds} r(t)dt + e^{-\int_0^t r(s)ds}(H_t^0 S_t^0 r(t)dt + H_t dP(t,T)) \\
&= -H_t P(t,T) e^{-\int_0^t r(s)ds} r(t)dt + e^{-\int_0^t r(s)ds} H_t dP(t,T) \\
&= -H_t P(t,T) e^{-\int_0^t r(s)ds} r(t)dt + e^{-\int_0^t r(s)ds} H_t(P(t,T)(r(t))dt + P(t,T)\sigma_t^T dW_t') \\
&= e^{-\int_0^t r(s)ds} H_t(P(t,T)\sigma_t^T dW_t') \\
&= H_t P'(t,T)\sigma_t^T dW_t'.
\end{aligned}$$

$sup_{0\leq t\leq\theta} V_t'$ es cuadrado integrable sobre la probabilidad $\mathbb{P}^* \Rightarrow$,$(V_t')_{0\leq t\leq\theta}$ es cuadrado integrable sobre la probabilidad $\mathbb{P}^* \Rightarrow E(\int_0^\theta (H_t P'(t,T)\sigma_t^T)^2 dt) < \infty \Rightarrow$entonces la integral de dV_t' está bien definida y el proceso $(V_t')_{0\leq t\leq\theta}$es martingala bajo la probabilidad $\mathbb{P}^*$. Entonces tenemos

$$V_t' = E^*(V_\theta' | \Im_t), (0 \leq t \leq \theta)$$

Si imponemos la condición $V_\theta = h$, tenemos

$$V_t = e^{\int_0^t r(s)ds} E^*(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} h | \Im_t). \tag{2.2}$$

Para completar la demostración faltará probar que existe una estrategia admisible con el mismo valor anterior durante todo el tiempo.
No podemos aplicar el teorema de representación de martingalas brownianas, porque éste requiere que nuestro proceso $V'_t = E^*(V'_\theta|\Im_t), (0 \leq t \leq \theta)$ (que és martingala adaptado a $\Im_t$) sea adaptado a la filtración natural de la (W'_t). Éste último proceso está definido cómo $W'_t = W_t - \int_0^t q(s)ds$, es $\Im_t$ medible y por el teorema de Girsanov es un movimiento browniano respecto de la medida $\mathbb{P}^*$. Ahora bién, podria ser que la filtración natural $\Im'_t = \sigma(W'_s|0 \leq s \leq t)$ fuese menos fina que la anterior (para todo t $\Im'_t \subset \Im_t$).
Entonces, $V'_t = E^*(V'_\theta|\Im_t), (0 \leq t \leq \theta)$ no estaría adaptado a la filtración $(\Im'_t)$.
Por lo tanto tenemos que usar otro método. Podemos definir el proceso $(L_t V'_t)_{0 \leq t \leq \theta}$. Siguiendo los mismos pasos que hemos usado a la proposición anterior, sabemos que si $(V'_t)_{0\leq t \leq \theta}$ es un proceso $\Im_t$-martingala con la probabilidad P^*, entonces $(L_t V'_t)$ es un proceso $\Im_t$-martingala con la probabilidad $\mathbb{P}$. Como la filtración $(\Im_t)$ es la natural del movimiento browniano W_t, por el teorema de represtación de martingalas, existe un proceso adaptado $(J_t)_{0\leq t\leq\theta}$ a $(\Im_t)$ tal que $\int_0^\theta J_s^2 ds < \infty$ c.s. que cumple:

$$L_t V'_t = E(L_t V'_t) + \int_0^t J_s dW_s$$

Entonces si aplicamos la fórmula de Itô al proceso anterior:

$$\begin{aligned}
&d(L_t V'_t) = dL_t V'_t + L_t dV'_t + d\langle L, V'\rangle_t = J_t dW_t \Longrightarrow \\
&dV'_t = -\tfrac{1}{L_t} dL_t V'_t - \tfrac{1}{L_t} d\langle L, V'\rangle_t + \tfrac{J_t}{L_t} dW_t = \\
&= -q(t) dW_t V'_t - \tfrac{1}{L_t} d\langle L, V'\rangle_t + \tfrac{J_t}{L_t} dW_t = (-q(t)V'_t + \tfrac{J_t}{L_t}) dW_t - \tfrac{1}{L_t} d\langle L, V'\rangle_t \\
&= (-q(t)V'_t + \tfrac{J_t}{L_t}) dW_t - (-q(t)V'_t + \tfrac{J_t}{L_t}) q(t) dt \\
&= (-q(t)V'_t + \tfrac{J_t}{L_t}) dW'_t = H_t dW'_t
\end{aligned}$$

Deducimos que existe un proceso $(J_t)_{0\leq t\leq\theta}$ tal que $\int_0^\theta J_t^2 dt < \infty$ c.s.,

$$e^{-\int_0^\theta r(s)ds} h = E^*(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} h) + \int_0^\theta J_s dW'_s$$

Una vez probado esto, podemos hacer $H_t = \frac{J_t}{P'(t,T)\sigma_t^T}$ y $H_t^0 = E^*(e^{-\int_0^\theta r(s)ds} h | \Im_t) - \frac{J_t}{\sigma_t^T}$, para $0 \leq t \leq \theta$.
Entonces sabemos que existe una estrategia $(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq\theta}$ auto-financiada que cumple la ecuación 2.2 y $V_\theta = h$ Ahora solo falta comprobar las condiciones para que sea una estrategia admisible.

$$sup_{0\leq t\leq\theta}|r(t)| < +\infty \Rightarrow \int_0^\theta |H_t^0 r(t)| dt < +\infty c.s.$$

La otra condición obviamente se cumple por construcción

$$\int_0^\theta (H_t \sigma_t^T)^2 dt = \int_0^\theta (\frac{J_t}{P'(t,T)})^2 dt < +\infty c.s,$$

pues recordamos que $\int_0^\theta J_t^2 dt+ < \infty$ y que $P'(t,T)$ es un proceso continuo en probabilidad y acotado c.s.
También cumple que su valor descontado es no negativo, pues sabemos

$$V_t' = E^*(-e^{\int_0^t r(s)ds} h|\Im_t), (0 \leq t \leq \theta),$$

dónde $\mathbb{P}^*(h \geq 0) = 1$.
Entonces la estrategia es admisible tal y como queríamos demostrar.
Entonces, por la preposición anterior, el precio justo de la opción h en el instante $t \in [0,\theta]$ será

$$E^*(-e^{\int_t^\theta r(s)ds} h|\Im_t)$$

3. Modelos estocásticos del tipo de interés

Sea $(\Omega, \Im, \mathbb{P}, (\Im_t)_{0\leq t \leq T'}))$ el mismo espacio que antes. Para definir la dinámica del interés presentamos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t$$
$$r(0) = r_0,$$

dónde μ y σ son funciones definidas $\mu : \Re^+ x\Re \to \Re$, $\sigma : \Re^+ x\Re \to \Re$ y W_t es $\Im_t$-movimiento browniano.
Suponemos que se cumplen las condiciones que se necesitan sobre μ y σ para la existencia y unicidad de la solución de la ecuación estocástica anterior.

Proposición 3.1: Sea $\mathbb{P}^*$ una probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$ tal que

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp(-\int_0^{T'} \lambda(s, r(s))dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{T'} \lambda(s, r(s))^2 ds)$$

c.s. Sea F una función $C^{1,2}$ en $(\Re^+, \Re, \Re^+)$. Si asumimos que $F(t, r(t); T) = P(t,T) = E^*(\exp(-\int_t^T r(s)ds)|\Im_t)$, entonces la función cumple la EDP:

$$F_t + F_r\mu + \frac{1}{2}F_{rr}\sigma^2 - rF = \lambda\sigma F_r$$

$$F(T, r(T); T) = 1.$$

También se sabe que bajo probabilidad $\mathbb{P}^*$, el proceso $r(t)$ es descrito como:

$$dr(t) = (\mu - \lambda\sigma)dt + \sigma dW_t',$$

dónde (W_t') es un $\Im_t$-movimiento browniano bajo $\mathbb{P}^*$.
Demostración:
Sea $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp(-\int_0^{T'} \lambda(s, r(s))dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{T'} \lambda(s, r(s))^2 ds).$$

Es suficiente la condición Novikov: $E(e^{0,5\int_0^T \lambda(s,r(s))^2 ds}) < \infty$ para que el proceso $L_t = E(\frac{dP^*}{dP}|\Im_t)$ sea martingala. Suponemos que lo es y por lo tanto el proceso $(W_t$ es $\Im_t$-Brownian motion bajo $\mathbb{P}$. Entonces con la probabilidad $P^*(.) = E(1_{(.)}L_{T'})$, el proceso definido como $W_t' = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$ es $\Im_t$-movimiento browniano bajo $\mathbb{P}^*$.
Si ahora aplicamos la fórmula de Itô al proceso $G(t, r(t)) = F(t, r(t); T)exp(-\int_0^t r(s)ds)$, tenemos:
$d(F(t, r(t); T)\exp(-\int_0^t r(s)ds))$
$= -\exp(-\int_0^t r(s)ds)rFdt + \exp(-\int_0^t r(s)ds)F_t dt + exp(-\int_0^t r(s)ds)F_r dr$
$+\frac{1}{2}\exp(-\int_0^t r(s)ds)F_{rr}dr^2$
$= -\exp(-\int_0^t r(s)ds)rFdt + \exp(-\int_0^t r(s)ds)F_t dt + \exp(-\int_0^t r(s)ds)F_r((\mu-\lambda\sigma)dt +$
$\sigma dW_t') + \frac{1}{2}\exp(-\int_0^t r(s)ds)F_{rr}\sigma^2 dt$
$= \exp(-\int_0^t r(s)ds)(-rF + F_t + F_r(\mu - \lambda\sigma) + \frac{1}{2}F_{rr}\sigma^2)dt + \exp(-\int_0^t r(s)ds)F_r\sigma dW_t'$

Sabemos que $F(t, r(t); T) = E^*(\exp - \int_t^T r(s)ds|\Im_t) \Rightarrow F(t, r(t); T)\exp(-\int_0^t r(s)ds) = E^*(\exp(-\int_0^T r(s)ds)|\Im_t)$

Por lo tanto el proceso $(F(t, r(t); T)\exp(-\int_0^t r(s)ds))$ es $\Im_t$-martingala respeto $\mathbb{P}^*$. La dinámica del proceso es entonces:

$$d(F(t, r(t); T)\exp(-\int_0^t r(s)ds)) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)F_r\sigma dW_t' \Rightarrow$$

se satisface la ecuación

$$-rF + F_t + F_r(\mu - \lambda\sigma) + \frac{1}{2}F_{rr}\sigma^2 = 0$$

$$F(T, r(T); T) = E^*(\exp(-\int_T^T r(s)ds)|\Im_t) = 1.$$

A esta ecuación la llamamos ecuación de estructura.

3.1. Calibración de los parámetros

Veremos que la $\mathbb{P}^*$-dinámica de los short rates dependerán de parámetros, que nombramos como α. Es decir, el proceso que modeliza los precios de los bonos será de la forma $P(t, T) = F(t, r(t); T, \alpha)$. Como usamos la propiedad martingala de los bonos descontados, trabajaremos con la probabilidad $\mathbb{P}^*$ a la hora de definir integrales estocásticas, así pues bajo $\mathbb{P}^*$ definiremos

$$dr(t) = \mu(t, r(t); \alpha)dt + \sigma(t, r(t); \alpha)dW_t'$$

Por la preposición anterior, trataremos de resolver la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$-rF + F_t + F_r\mu + \frac{1}{2}F_{rr}\sigma^2 = 0$$

$$F(T, r(T); T, \alpha) = 1$$

La solución anterior dependerá de los parámetros α. Los parámetros que hacen que el proceso anterior $P(t,T) = F(t, r(t); T, \alpha)$ se ajuste a los valores observados reales de los bonos $P'(t,T)$ serán los escogidos.

3.2. Estructura afín de los bonos cupón zero

Ahora supondremos que el proceso estocástico adaptado $(P(t,T))_{0\leq t\leq T}$ es de la forma:
$P(t,T) = F(t, r(t); T)$ dónde F es una función con las mismas caracterśticas que antes y que cumple

$$F(t, r(t); T) = e^{A(t,T)-B(t,T)r(t)},$$

dónde $A(t,T)$ y $B(t,T)$ son funciones deterministas, es decir, que no tienen componentes de azar.

Si $\mu(t, r(t))$ y $\sigma^2(t, r(t))$ son respectivamente el coeficiente deriva y difusión de la ecuación diferencial estocástica que modela el interés $r(t)$ bajo $\mathbb{P}^*$. Entonces presentamos la siguiente proposición:

Proposición 3.2.1 *La dinámica del interés proporciona una modelación de los precios de los bonos con una estructura afín si y solo si*

$$\mu(t, r(t)) = \alpha(t)r(t) + \beta(t)$$

$$\sigma^2(t, r(t)) = \gamma(t)r(t) + \delta(t),$$

para ciertas funciones contínuas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, y existen funciones $A(t,T)$,$B(t,T)$ que cumplen el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, $\forall t \leq T$:

$$B_t(t,T) = -\alpha(t)B(t,T) + \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t,T) - 1$$

$$A_t(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t,T)$$

$$A(T,T) = 0, B(T,T) = 0$$

Demostración.
Insertamos $F(t, r(t); T) = \exp(A(t,T) - B(t,T)r(t))$ en la ecuación de estructura y deducimos que el modelo estocástico tiene una estructura afín si y solo si

$$-\mu(t, r(t))B(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma)^2(t, r(t))B^2(t,T) = -A_t(t,T) + (1 + B_t(t,T))r(t) \quad (3.1)$$

se cumple para todo $t \leq T$. Y además para la condición de frontera se necesita que

$$A(T,T) - B(T,T)r(T) = 0.$$

Pero como sabemos que $r(T)$ es una variable aleatoria $\Im_T$-medible:

$$\forall \omega \in \Omega, A(T,T) - B(T,T)r(T)(\omega) = 0 \Rightarrow A(T,T) = 0, B(T,T) = 0.$$

Suponemos ahora que se cumple la segunda parte del enunciado. Sustituimos las ecuaciones del enunciado a la ecuación de estructura anterior y se ve fácilmente que ésta se cumple. Con lo que una de las implicaciones es clara.

Para ver la otra implicación $\Rightarrow$, fijamos un $t \geq 0$ y suponemos primero que las funciones $B(t,T)$ y $B^2(t,T)$ son linealmente independientes (respecto T). Entonces podemos encontrar $T_1 > T_2 > t$ tales que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} B^2(t,T_1) & -B(t,T_1) \\ B^2(t,T_2) & -B(t,T_2) \end{pmatrix}.$$

sea invertible.
Podemos explicar este paso por reducción al absurdo, suponiendo que $B(t,)$ y $B^2(t,)$ son linealmente independientes y que no se pueden encontrar $T_1 > T_2 > t$ tales que la matriz anterior sea invertible. Si fijamos $T_1 > t$ y para cualquier T_2 tal que $T_1 > T_2 > t \Rightarrow B^2(t,T_1)B(t,T_2) - B(t,T_1)B^2(t,T_2) = 0 \Rightarrow B(t,)$ y $B^2(t,)$ serían dependientes respecto T en $[t,T_1]$. Llegamos a una contradicción.

Entonces de la ecuación 3.1 sabemos que:

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sigma)^2(t,r(t)) \\ \mu(t,r(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_t(t,T_1) - (1 + B_t(t,T_1))r(t) \\ A_t(t,T_2) - (1 + B_t(t,T_2))r(t) \end{pmatrix}.$$

y al ser M invertible:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sigma)^2(t,r(t)) \\ \mu(t,r(t)) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} A_t(t,T_1) - (1 + B_t(t,T_1))r(t) \\ A_t(t,T_2) - (1 + B_t(t,T_2))r(t) \end{pmatrix}.$$

Esto demuestra que $\mu(t,r(t))$ y $\sigma^2(t,r(t))$ son funciones afines de $r(t)$, tal y como queríamos demostrar.
Si ahora sustituimos las expresiones afines de $\mu(t,r(t))$ y $\sigma^2(t,r(t))$ en la parte izquierda de la ecuación 3.1, obtenemos la expresión

$$(-\alpha(t)B(t,T) + \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t,T))r(t) - \beta(t)B + \frac{1}{2}\delta(t)B^2$$

Los términos que contienen están multiplicados en los dos lados de la igualdad tienen que ser iguales, entonces se obtienen las ecuaciones

$$B_t(t,T) = -\alpha(t)B(t,T) + \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t,T) - 1$$

$$A_t(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t,T),$$

tal y como queríamos demostrar.
Falta comprobar el caso en que $B(t,)$ y $B^2(t,)$ sean funciones linealmente dependientes, es decir, $B(t,) = c(t)B^2(t,)$ dónde $c(t)$ es una constante. Entonces, sabiendo que la función $B(t,T)$ es contínua, sabemos que $B(t,) \equiv B(t,t) = 0$. Por lo tanto se necesita que $B_t(t,T) = -1$ para que se cumpla la ecuación 3.1. Notamos que el conjunto de los t tales que $B(t,)$ y $B^2(t,)$ sean funciones linealmente independientes es abierto y denso en los reales positivos. Mediante la continuidad de $\frac{1}{2}\sigma^2(t,r(t))$ y $\mu(t,r(t))$ deducimos que $\mu(t,r(t)) = \alpha(t)r(t) + \beta(t)$ y $\sigma^2(t,r(t)) = \gamma(t)r(t) + \delta(t)$, para ciertas funciones contínuas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

3.3. El modelo Vasicek

Apliquemos las técnicas anteriores partiendo de que la $\mathbb{P}$-dinámica estocástica del interés del activo sin riesgo es: $dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW_t$, $a, b, \sigma > 0$ y dónde obviamente (W_t) es $\Im_t$-movimiento browniano respecto de $\mathbb{P}$.
Queremos ver de forma intuitiva como es la dinámica del interés. Recordamos que la función $\mu(t,r(t))$ de una integral estocástica es $\Rightarrow \mu(t,r(t)) = lim_{\triangle t \to 0} \frac{E(r(t+\triangle t) - r(t)|\Im_t)}{\triangle t}$.
Por eso la llamamos la deriva, porque quiere representar una esperanza de la "derivada"del proceso $r(t)$ en t y esta dependerá de la posición de la variable aleatoria $r(t)$.
En este caso vemos que $\mu(t,r(t)) = b - ar(t)$. Es decir si el proceso $r(t)$ en t esta por debajo de $\frac{b}{a} \Rightarrow \mu(t,r(t)) > 0$ y por lo tanto se espera que el proceso suba, en cambio si esta por encima de $\frac{b}{a} \Rightarrow \mu(t,r(t)) < 0$ y por lo tanto se espera que el proceso baje.
$\sigma(t,r(t))$ es constante, entonces lo será también la perturbación que provoca el movimiento browniano al proceso.
Intuitivamente llegamos a la conclusión que la $\mathbb{P}$-dinámica de $(r(t))$ será la de oscilar aleatoriamente alrededor de $\frac{b}{a}$. Este tipo de procesos se llaman Ornstein-Uhlenbeck.
Nos interesa cambiar el punto de vista de la dinámica anterior y usar la medida $\mathbb{P}^*$. Suponemos ahora que $q(t) = -\lambda$ es constante y por el teorema de Girsanov $W'_t = W_t + \lambda t$ es una Brownian motion bajo la probabilidad $\mathbb{P}^*$.
Entonces la P^*-dinámica estocástica del interés del activo sin riesgo es

$$dr(t) = (b' - ar(t))dt + \sigma dW'_t,$$

dónde $b' = b - \lambda\sigma$.
Demostración:
$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW_t$
$= (b - ar(t))dt + \sigma(dW'_t - \lambda dt) = (b - \lambda\sigma - ar(t))dt + \sigma dW'_t$
$= (b' - ar(t))dt + \sigma dW'_t$.
Entonces la dinámica del interés respecto $\mathbb{P}^*$ es también un proceso Ornstein-Uhlenbeck, y por lo tanto, el porceso oscilará aleatoriamente alrededor de $\frac{b'}{a}$. Nos interesa conocer la fórmula del proceso que es solución de la ecuación estocástica anterior:

$$dr(t) = (b' - ar(t))dt + \sigma dW'_t \Rightarrow dr(t) + ar(t)dt = b'dt + \sigma dW'_t.$$

Aplicando la fórmula de Itô para la función :

$$d(e^{at}r(t)) = e^{at}dr(t) + ae^{at}r(t)dt \Rightarrow e^{-at}d(e^{at}r(t)) = dr(t) + ar(t)dt = b'dt + \sigma dW'_t$$

$$\Rightarrow d(e^{at}r(t)) = e^{at}b'dt + e^{at}\sigma dW'_t \Rightarrow e^{at}r(t) = r(0) + \int_0^t e^{as}b'ds + \int_0^t e^{as}\sigma dW'_s$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{b'}{a} + e^{-at}(r(0) - \frac{b'}{a}) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dW'_s$$

$E^*(\int_0^t e^{2as}ds) < \infty$, entonces $\sigma \int_0^t e^{as}\sigma dW_s$ es una martingala con valor 0 en tiempo 0, entonces su esperanza es 0 $\Rightarrow$
Se espera que el proceso se acerque exponencialmente a $\frac{b}{a}$ des de arriba o des de abajo (dependiendo si $r(0) > \frac{a}{b}$ o $r(0) < \frac{a}{b}$) , pero el factor perturbación hace que el proceso pueda cruzar la línia $\frac{b}{a}$ y al final pase lo que hemos dicho, que oscile alrededor de $\frac{b}{a}$.
Queremos ver ahora que para cada instante de tiempo, $r(t)$ es una variable aleatoria normal. La podemos poner de la forma $r(t) = m + \int_0^t f(s)\sigma dW'_s$ dónde $f(t)$ es una función detarminista. Intuitivamente esto quiere decir que $r(t)$ es una suma infinita de diferenciales de Brownian motions y por tanto, una suma infinita de variables normales de media 0. Mediante el siguiente lema vemos que tiene una distribución normal. De hecho veremos también que el proceso $(r(t))_{t\geq 0}$ es Gaussiano.

Lema 3.3.1 *Si $f(s)$ es determínistico, $Y(t) = \int_0^t f(s)\sigma dW'_s$ tiene una distribución normal con varianza $\int_0^t f(s)^2 ds$. Además, el proceso $(r(t))_{t\geq 0}$ es Gaussiano.*
Demostración.
Es suficiente probar que la función característica de la variable $Y(t)$ es la misma que la de una normal con esperanza nula y varianza $\int_0^t f(s)^2 ds$. Es decir, que para cualquier λ:

$$E(\exp(i\lambda Y(t))) = \exp(-\frac{\lambda^2 \int_0^t f(s)^2 ds}{2}).$$

Aplicamos la fórmula de Itô para conocer el proceso $F(Y(t)) = E(\exp(i\lambda Y(t)))$. En teoría hasta ahora solo habíamos usado esta fórmula para funciones reales, pero trabajando con las partes real e imaginaria obtenemos fácilmente esta extensión. Entonces, como $F'(x) = i\lambda \exp(i\lambda x), F''(x) = \lambda^2 \exp(i\lambda x) \Rightarrow$

$$\exp(i\lambda Y(t)) = 1 + i\lambda \int_0^t \exp(i\lambda Y(u))f(u)dW_u - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t \exp(i\lambda Y(u))f^2(u)du.$$

Como $|\exp(i\lambda Y(t))| \leq 1, \exp(i\lambda Y(t))$ es claramente integrable. Podemos aplicar esperanzas y mediante Fubini obtenemos:

$$E(\exp(i\lambda Y(u))) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t E(\exp(i\lambda Y(u)))f^2(u)du.$$

Ahora podemos escribir $\Psi(t) = E(\exp(i\lambda Y(t)))$, por lo tanto Ψ satisface

$$\Psi(t) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t \Psi(u)f^2(u)du,$$

$$\Psi'(t) = -\frac{\lambda^2}{2}\Psi(t)f^2(t)dt,$$

con $\Psi(0) = 1$. Y la solución de esta ecuación es justamente la expresión que estábamos buscando.
Ahora es fácil ver que, para cualquier $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n \leq T$, los incrementos $Y(t_k - t_{k-1}), k = 1, ..., n$ son variables independientes y gaussianas, por lo tanto el vector de incrementos $(Y(t_1) - Y(t_0), ..., Y(t_n) - Y(t_{n-1}))$ es gaussiano y entonces lo es el proceso $(Y(t))_{t\geq 0}$.

Entonces como:

$$E^*(r(t)) = E^*(\frac{b'}{a} + e^{-at}(r(0) - \frac{b'}{a}) + e^{-at}\sigma\int_0^t e^{as}\sigma dW_s') = \frac{b'}{a} + e^{-at}(r(0) - \frac{b'}{a})$$

$$Var^*(r(t)) = \sigma^2\frac{(1 - e^{-2at})}{2a}, \Rightarrow$$

la variable

$$r(t) \sim N(\frac{b'}{a} + e^{-at}(r(0) - \frac{b'}{a}), \sigma^2\frac{(1 - e^{-2at})}{2a})$$

Y cuando t tiende a infinito, entonces la distribución de $r(t)$ tiende a una normal $N(\frac{b'}{a}, \frac{\sigma^2}{2a})$. Suponiendo ahora que el proceso que modela el valor de los bonos tienes estructura afín, podemos encontrar su expresión mediante las ecuaciones explicadas anteriormente que cumplen los modelos de este tipo.
En este caso, $\alpha(t) = -a, \beta(t) = b', \gamma(t) = 0$ y $\delta(t) = \sigma^2$, y por lo tanto

$$1 + B_t - aB = 0$$

$$A_t - b'B + \frac{1}{2}\sigma^2B^2 = 0$$

Con la condición: $A(T, T) = 0, B(T, T) = 0$
Resolviendo la primera ecuación diferencial obtenemos

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

Integrando la segunda de t a T: $A(t, T) = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2ds - b\int_t^T Bds$. Si subtituimos B obtenemos

$$A(t, T) = \frac{B(t, T) - (T - t)}{a^2}(ab' - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t, T)$$

Por lo tanto ya se conoce explícitamente la $\mathbb{P}$-dinámica de nuestro proceso $(P(t, T))$.
Si ahora queremos conocer el interés continuo forward entre t i T $R(t, T)$ del bono cupón zero con vencimiento en T:

$$P(t, T) = e^{-(T-t)R(t,T)} = e^{A(t,T)-B(t,T)r(t)} \Rightarrow R(t, T) = -\frac{A(t, T) - B(t, T)r(t)}{T - t}$$

y se deduce que para cada t, $R(t, T)$ es una variable aleatória $\Im_t$-medible.
En el modelo hay un aspecto que falla, porque $lim_{T\to\infty}B(t, T) = 0 \Rightarrow lim_{T\to\infty}R(t, T) = \frac{b'}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$. Es una constante en este caso, ya que no depende de $r(t)$.

3.4. Calibración de los parámetros del modelo Vasicek

Acabamos de ver que en el proceso de modelación de $(P(t,T))$ intervienen los parámetros a, b', σ. Explicaremos un método para calibrarlos suponiendo que conocemos valores históricos del interés y los valores reales de los bonos en el tiempo inicial $P'(0,T), T \geq 0$.
Como tenemos los valores reales del interés, lo que haremos primero es encontrar los parámetros a, b, σ que se encuentran la ecuación diferencial estocástica del interés bajo la probabilidad real $\mathbb{P}$.
Habíamos definido la P-dinámica estocástica del interés como

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW_t.$$

$$r(0) = x$$

Suponemos que tenemos los valores reales históricos del interés $r(t)$ en t_i, dónde $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$. Entonces usaremos un proceso estocástico discreto $(r'_n(t_i))_{i \in 0,...,n}$ que encontraremos aproximando la solución de la ecuación anterior a los instantes t_i.
Consideramos que $\forall i \in 0,...,n-1 \Rightarrow t_{i+1} - t_i = \delta$. Entonces definimos el proceso como

$$r'_n(t_{i+1}) = r'_n(t_i) + (b - ar'_n(t_i))\delta + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \Rightarrow$$
$$r'_n(t_{i+1}) = b\delta + r'_n(t_i)(1 - a\delta) + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

dónde $\sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sim N(0, \delta\sigma^2)$.

Teorema 3.4.1 *Sea $s_n(t) = r'_n[t_i]$, $T > 0$, el proceso $(s_n(t))_{t \geq 0}$ aproxima a $(r(t))_{t \geq 0}$ de la forma:*

$$E(\sup_{t \leq T} |r'_n(t_i) - r(t)|^2) \leq C_T\delta,$$

dónde C_T es una constante que depende de T.
Entonces para un δ cercano a 0, el proceso discreto $(r'_n(t_i))_{i \in 0,...,n}$ es proceso que se aproxima bastante al proceso del interés, y por lo tanto podemos usarlo para calibrar los parámetros.
Entonces notamos que la relación entre las observaciones consecutivas $r(t_i), r(t_{i+1})$ es lineal, es decir existen β_1, β_2 tales que:

$$r(t_{i+1}) = \beta_1 + \beta_2 r(t_i) + \epsilon_i,$$

dónde $\forall i \in 0,...,n-1$ $\epsilon_i \sim N(0, \delta\sigma^2)$ y si $i \neq j, \epsilon_i$ y ϵ_j son independientes por las propiedades del movimiento browniano.
Tenemos que $\beta_1 = b\delta$, $\beta_2 = 1 - a\delta$ y $\epsilon_i = \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$
Encontramos ahora los parámetros β_1 y β_2 que minimizan

$$f(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=0}^{n-1} (r(t_{i+1}) - \beta_1 - \beta_2 r(t_i))^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \beta_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial \beta_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_1 = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}$$

$$\beta_2 = \frac{S_y - \beta_1 S_x}{n}.$$

Dónde $S_x = \sum_{i=0}^{n-1} r(t_i)$, $S_{xx} = \sum_{i=0}^{n-1} r(t_i)^2$, $S_y = \sum_{i=0}^{n-1} r(t_{i+1})$, $S_{yy} = \sum_{i=0}^{n-1} r(t_{i+1})^2$, $S_{xy} = \sum_{i=0}^{n-1} r(t_i)r(t_{i+1})$.

Finalmente obtenemos

$$b = \frac{\beta_1}{\delta}$$

y

$$a = \frac{1 - \beta_2 a}{\delta}.$$

Procedemos a encontrar σ.
Sabemos que $\forall i \in 0, ..., n-1 \Rightarrow r(t_{i+1}) = \beta_1 + r(t_i)\beta_2 + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \Rightarrow r(t_{i+1}) - \beta_1 - r(t_i)\beta_2 = \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \Rightarrow$

$$X_i = r(t_{i+1}) - \beta_1 - r(t_i)\beta_2 \sim N(0, \delta\sigma^2)$$

Encontramos el estimador de la varianza muestral insesgado

$$Var(X) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

y lo usamos para encontrar $\sigma^2 = \frac{Var(X)}{\delta}$.

Ahora nos falta encontrar λ, para conocer el último parámetro que nos falta: $b' = b - \lambda$. Para conocer el proceso estocástico del precio de los bonos, hacemos referencia a la dinámica del interés bajo la probabilidad $\mathbb{P}^*$. Entonces la fórmula afín

$$P(t, T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}$$

depende del parámetro b'.
Para estimarlo podemos utilizar el método comentado anteriormente que consiste en igualar el precio observado de los bonos en el tiempo inicial $P'(0, T), T \geq 0$ a los valores téoricos del mismo.
Suponemos que tenemos los valores $P'(0, t_i)$, dónde $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T \Rightarrow$.

$$\forall i \in 0, ..., n, P'(0, t_i) \approx e^{A(0,t_i) - B(0,t_i)r(0)} \Rightarrow$$

$$\log P'(0, t_i) \approx A(0, t_i) - B(0, t_i)r(0) = \Theta_1^i + \Theta_2^i b',$$

dónde $\Theta_1^i = -\frac{(B(0,t_i) - t_i)\sigma^2}{2a^2} - B(0, t_i)r(0)$ y $\Theta_2^i = \frac{B(0,t_i) - t_i}{a}$.

Aplicamos otra vez la técnica de los mínimos cuadrados:
Queremos encontrar b' tal que minimice la expresión:

$$f(b') = \sum_{i=0}^{n-1} (\log P'(0,t_i) - \Theta_1 - \Theta_2 b')^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial b'} = 0 \Rightarrow$$

$$b' = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (\log P'(0,t_i) - \Theta_1^i)\Theta_2^i}{\sum_{i=0}^{n-1} (\Theta_2^i)^2}$$

3.5. El modelo Ho-Lee

Seguimos la misma estrategia que en el modelo anterior. La $\mathbb{P}^*$-dinámica estocástica del interés del activo sin riesgo es: $dr(t) = \Theta(t)dt + \sigma dW_t$, dónde obviamente (W_t) es $\Im_t$-movimiento browniano respecto de $\mathbb{P}^*$.
En este caso no podemos deducir intuitivamente como sera la dinámica del interés, porque $\mu(t, r(t)) = \Theta(t)$, y por lo tanto dependerá de ésta última función.
En este caso, $\alpha(t) = 0, \beta(t) = \Theta, \gamma(t) = 0$ y $\delta(t) = \sigma^2$, y por lo tanto

$$1 + B_t = 0$$
$$A_t - \Theta B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 = 0$$

Con la condición: $A(T,T) = 0, B(T,T) = 0$
De la primera ecuación se deduce fácilemnte integrando de t a T

$$B(t,T) = T - t.$$

De la segunda ecuación tenemos por el mismo razonamiento:

$$A(t,T) = \int_t^T \Theta(s)(s-T)ds + \frac{\sigma^2}{2}\frac{(T-t)^3}{3}$$

En este caso la expresión de $F(t, r(t), T)$ depende de un parámetro de infinita dimensión $\Theta(s)$.
En este caso, para estimar los parámetros usaremos el método explicado inicialmente que consiste igualar el precio observado de los bonos en el tiempo inicial $P'(0,T), T \geq 0$ a los valores téoricos del mismo. Veremos que es mucho más fácil que la calibración en el modelo Vasicek y no se requieren métodos numéricos.

$$P(0,T) \approx P'(0,T), T \geq 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2 logP(0,T)}{\partial T^2} \approx -\frac{\partial^2 logP'(0,T)}{\partial T^2} = \frac{f'(0,T)}{\partial T}.$$

Por lo tanto, sabiendo que

$$\log P(0,T) = A(0,T) - B(0,T)r(0) \Rightarrow \frac{\partial \log P(0,T)}{\partial T} = \int_0^T \Theta(s)ds + \frac{\sigma^2 T^2}{2} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \log P(0,T)}{\partial T^2} = \Theta(T) + \sigma^2 T \Rightarrow \Theta(T) = \frac{f'(0,T)}{\partial T} + \sigma^2 T$$

Esto se cumple para $0 \leq T$, entonces podemos estimar la función Θ tal y como queríamos.

3.6. Modelo Cox-Ingersoll-Ross

Apliquemos las técnicas anteriores partiendo de que la $\mathbb{P}^*$-dinámica estocástica del interés del activo sin riesgo es: $dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t$, $a, b, \sigma > 0$y dónde obviamente (W_t) es $\Im_t$-movimiento browniano respecto de $\mathbb{P}^*$.
Vemos que el modelo es muy parecido al de Vasicek, y la $\mu(t, r(t))$ de los modelos es la misma, entonces se espera que este modelo haga lo mismo que el Vasicek, acercarse asimptoticamente a una constante. La diferencia radica en que el proceso adaptado que está junto la Brownian motion no es constante, y en cambio es: $\sigma\sqrt{r(t)}$.
Si el proceso esté cerca del 0, $\mu(t, r(t)) = a(b - r(t)) > 0$ y $\sigma\sqrt{r(t)} \approx 0$. Por lo tanto, en esta situación la actuación del factor perturbación al proceso será muy leve, con lo que el valor del proceso será muy parecido a lo que se espera que pase, es decir, intuitivamente vemos que el proceso tendirá a subir y no cruzará nunca el eje de las abscisas.
No pasa como en el otro modelo. En el modelo Vasicek la perturbación es constante sea cual sea el valor del proceso, así que aunque se espera que el proceso suba $\mu(t, r(t)) > 0$, la perturbación provocada por la Brownian motion σdW_t puede cambiar la situación y hacer que el proceso cruce el eje abscisas.
Veamos ahora más formalmente que según condiciones de los parámetros del modelo, el proceso $(r(t))$ será estrictamente positivo.

Proposición 3.6.1 *Sean W_1, W_2 dos movimientos brownianos independientes y sea X_1, X_2 dos procesos Ornstein-Uhlenbeck soluciones de*

$$dX_i(t) = -\frac{a}{2}X_i(t)dt + \frac{\sigma}{2}dW_i(t), i = 1, 2$$

entonces el proceso

$$r'(t) = X_1^2 + X_2^2,$$

satisface

$$dr'(t) = (\frac{\sigma^2}{2} - ar'(t))dt + \sigma\sqrt{r'(t)}dW_t,$$

dónde (W_t) es un movimiento browniano respecto $\mathbb{P}$.

Demostración:
Aplicando la fórmula de Itô en el caso bidimensional para la función $f(t, X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 \Rightarrow$

$df = f_{X_1}dX_1 + f_{X_2}dX_2 + \frac{1}{2}(f_{X_1X_1}d\langle X_1, X_1\rangle + f_{X_2X_2}d\langle X_2, X_2\rangle + f_{X_1X_2}d\langle X_1, X_2\rangle)$
$= 2X_1dX_1 + 2X_2d\langle X_2, X_2\rangle + d\langle X_1, X_1\rangle + d\langle X_2, X_2\rangle$
$= -ar'dt + \sigma X_1dW_1 + \sigma X_2dW_2 + \frac{\sigma^2}{2}dt$
$= (-ar' + \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma\sqrt{r'}(\frac{X_1}{\sqrt{r'}}dW_1 + \frac{X_2}{\sqrt{r'}}dW_2)$

Vemos ahora que $dW(t) = \frac{X_1(t)}{\sqrt{r'(t)}}dW_1(t) + \frac{X_2(t)}{\sqrt{r'(t)}}dW_2(t)$ es un movimiento browniano.
Sabemos que la variación cuadrática de un movimiento browniano es: $[W_1, W_1]_t = \int_0^t dW_1^2 = t$. También ocurre que $[W_1, W_2]_t \to 0$ c.s.
Sabiendo todo esto, podemos calcular ahora:

$$[W, W]_t = \int_0^t dW^2 = \int_0^t (\frac{X_1(t)}{\sqrt{r'(t)}}dW_1(t) + \frac{X_2(t)}{\sqrt{r'(t)}}dW_2(t))^2 = \int_0^t \frac{X_1^2(t)}{r'(t)}dt + \frac{X_2^2(t)}{r'(t)}dt$$
$$= \int_0^t dt = t$$

De momento (W_t) cumple una conidición para ser un movimiento browniano. Para comprobar las otras, utilizaremos una función $f(x) = e^{i\lambda x}$

Podemos aplicar la fórmula de Itô a la función $f(W_t) = e^{i\lambda W_t}$ para saber su dinámica:

$$df = i\lambda f dW_t - \frac{\lambda}{2}2f dt \Rightarrow$$
$$e^{i\lambda W_t} = e^{i\lambda W_u} + i\lambda\int_u^t e^{i\lambda W_s}dW_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_u^t e^{i\lambda W_s}ds \Rightarrow$$
$$e^{i\lambda(W_t - W_u)} = 1 + e^{-i\lambda W_u}i\lambda\int_u^t e^{i\lambda W_s}dW_s - e^{-i\lambda W_u}\frac{\lambda^2}{2}\int_u^t e^{i\lambda W_s}ds$$

Entonces si aplicamos esperanzas condicionadas a los dos lados de la igualdad anterior:

$$E^*[e^{i\lambda(W_t - W_u)}|\Im_u] = E^*[1 + e^{-i\lambda W_u}i\lambda\int_u^t e^{i\lambda W_s}dW_s - e^{-i\lambda W_u}\frac{\lambda^2}{2}\int_u^t e^{i\lambda W_s}ds|\Im_u]$$
$$= 1 + e^{-i\lambda W_u}i\lambda E^*[\int_u^t e^{i\lambda W_s}dW_s|\Im_u] - e^{-i\lambda W_u}\frac{\lambda^2}{2}E^*[\int_u^t e^{i\lambda W_s}ds|\Im_u]$$
$$= 1 - e^{-i\lambda W_u}\frac{\lambda^2}{2}\int_u^t E^*[e^{i\lambda W_s}|\Im_u]ds.$$

En la última igualdad usamos que

$$\int_u^t e^{i\lambda W_s} dW_s = \int_u^t e^{i\lambda W_s} \frac{X_1(s)}{\sqrt{r'(s)}} dW_1(s) + \int_u^t e^{i\lambda W_s} \frac{X_2(s)}{\sqrt{r'(s)}} dW_2(s).$$

Entonces vemos que es el límite de un sumatorio de diferenciales de movimientos brownianos, que son independientes a $\Im_u$ y tienen esperanza nula, por lo tanto su esperanza condicionada es zero.
Si ahora entendemos $E^*[e^{i\lambda(W_t-W_u)}|\Im_u]$ como una función $g(t)$:

$$g_t(t) = -\frac{\lambda^2}{2} g(t)$$

$$g(u) = 1$$

Resolviendo la ecuación anterior llegamos a

$$E^*[e^{i\lambda(W_t-W_u)}|\Im_u] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-u)}$$

.
Si aplicamos esperanzas a la igualdad anterior, se obtiene

$$E^*[e^{i\lambda(W_t-W_u)}] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-u)}.$$

La ley de una variable aleatoria es determinada por su función característica. Sabemos que la ley de una variable aleatoria puede ser determinada por su función característica. Entonces que la función característica tenga el mismo valor que ella misma condicionada por $\Im_u$, quiere decir que la ley de la variable es la misma que la ley condicionada, y por lo tanto la condición a la que hemos llegado es suficiente para probar que los incrementos $(W_t - W_u)$ son independientes de $\Im_u$ y homogéneos. Por lo tanto llegamos a la conclusión que $(W_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano bajo $\mathbb{P}$.

Este resultado lo podemos utilizar para ver intuitivamente que el proceso que es solución del modelo CIR

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t,$$

$a, b, \sigma > 0$ es estrictamente positivo si $ab > \frac{\sigma^2}{2}$. Veámoslo:

$$dr(t) = (ab - ar(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t = (ab - \sigma^2 2) + (\frac{\sigma^2}{2} - ar(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t.$$

Por el teorema anterior, el proceso que es solución de la ecuación

$$dr'(t) = (\frac{\sigma^2}{2} - ar'(t))dt + \sigma\sqrt{r'(t)}dW_t$$

es $r'(t) = X_1^2 + X_2^2 \geq 0$.
Suponemos que los dos procesos salen del mismo punto $r(0) = r'(0) = X_0$.

Entonces, los procesos $r'(t)$ y $r(t)$ estarán respectivamente al cabo de un diferencial de tiempo en la posición:

$$r'(\triangle\, t) = X_1' \simeq X_0 + \triangle\, t(\frac{\sigma^2}{2} - aX_0) + \sigma\sqrt{X_0}(W_{\triangle t} - W_0)$$

$$r(\triangle\, t) = X_1 \simeq X_0 + \triangle\, t(ab - \sigma^2 2) + \triangle\, t(\frac{\sigma^2}{2} - aX_0) + \sigma\sqrt{X_0}(W_{\triangle t} - W_0),$$

dónde $(W_{\triangle t} - W_0) \sim N(0, \triangle\, t)$. Claramente $X_1 > X_1' \Rightarrow r(\triangle\, t) > r'(\triangle\, t)$.
Podemos hacer un segundo paso para ver que vuelve a pasar lo mismo. La diferencia es que ahora los procesos parten de posiciones distintas. Para poder comparar mejor, imaginamos que la posición del proceso $r'(t)$ es la misma que la del proceso $r(t)$, es decir, des de X_1. Por lo tanto que lo trasladamos $(X_1 - X_1')$ hacia arriba.
Entonces, las posiciones de $r'(t)$ y $r(t)$ al cabo del mismo diferencial de tiempo que antes serian:

$$r'(2\triangle\, t) = X_2' \simeq X_1 + \triangle\, t(\frac{\sigma^2}{2} - aX_1) + \sigma\sqrt{X_1}(W_{2\triangle t} - W_{\triangle t})$$

$$r(2\triangle\, t) = X_2 \simeq X_1 + \triangle\, t(ab - \sigma^2 2) + \triangle\, t(\frac{\sigma^2}{2} - aX_1) + \sigma\sqrt{X_1}(W_{2\triangle t} - W_{\triangle t}),$$

dónde $(W_{2\triangle t} - W_{\triangle t}) \sim N(0, \triangle\, t)$. Otra vez tendríamos que $X_2 > X_2' \Rightarrow r(2\triangle\, t) > r'(2\triangle\, t)$.
Habíamos trasladado el proceso $r'(t)$, entonces la posición $r'(2\triangle\, t)$ no es la que realmente ocurre. Si calculamos su verdadero valor considerando que sale des de X_1':
$r'(2\triangle\, t) = X_2'' \simeq X_1' + \triangle\, t(\frac{\sigma^2}{2} - aX_1') + \sigma\sqrt{X_1'}(W_{2\triangle t} - W_{\triangle t})$
$= X_1 - (X_1 - X_1') + a\triangle\, t(X_1 - X_1') + \sigma\sqrt{X_1'}(W_{2\triangle t} - W_{\triangle t}) < X_2' < X_2$

$$r'(2\triangle\, t) < r(2\triangle\, t)$$

Queda claro que para todo t $0 \leq r'(t) < r(t)$.

3.7. Precio de los bonos para el modelo CIR

Una vez analizada la $\mathbb{P}^*$ dinámica del proceso $dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t$, $a, b, \sigma > 0$, procedemos a buscar una expresión para el precio de los bonos suponiendo como siempre que tiene una estructura afín.

$$\alpha(t) = -a, \beta(t) = ab, \gamma(t) = \sigma^2, \delta(t) = 0 \Rightarrow$$

$$1 + B_t - aB - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 = 0$$
$$A_t - abB = 0$$

Con la condición:

$$A(T, T) = 0, B(T, T) = 0$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales e integrando obtenemos:

$$B(t,T) = \frac{2(e^{c(T-t)} - 1)}{d(t)},$$

dónde $c = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$, $d(t) = (c+a)(e^{c(T-t)-1}) + 2c$. Integrando obtenemos:

$$A(t,T) = \frac{2ab}{\sigma^2}(\frac{(a+c)(T-t)}{2} + \log\frac{2c}{d(t)})$$

3.8. Modelo Hull-White

La $\mathbb{P}^*$-dinámica estocástica del interés del activo sin riesgo del modelo es: $dr(t) = (\Theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW_t$, dónde obviamente (W_t) es $\Im_t$-movimiento browniano respecto de $\mathbb{P}^*$. Vemos que es una generalización del modelo Vasicek. La diferencia es que al existir el término $\Theta(t)$ y no una constante, el proceso no oscilará alrededor de una constante sino de una función.
Deducimos entonces, que las fórmulas de $A(t,T)$ y $B(t,T)$ son:

$$B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

$$A(t,T) = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2 ds - \int_t^T \Theta(s)Bds$$

Con la existencia de un parámetro de infinita dimensión, vemos que el modelo tiene puntos en común a la vez con el Ho-Lee. Por lo tanto podemos realizar un método parecido al que usamos en ese modelo para aproximar el parámetro.
Es decir, aproximaremos los valores teóricos de los precios iniciales de los bonos a los precios observados $P'(0,T), T \geq 0 \Rightarrow P(0,T) \simeq P'(0,T), T \geq 0 \Rightarrow f(0,T) \simeq f'(0,T), T \geq 0$. Dónde recordamos que $f(0,T) = -\partial_T logP(0,T)$ son las instantánas forward rates con vencimiento T y construídas en 0.
Procedemos a calcular la expresión de las forward rates téoricas:

$$f(0,T) = -\partial_T logP(0,T) = \partial_T(B(0,T)r(0) - A(0,T))$$

$$= r(0)\partial_T B(0,T) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_T \int_t^T B^2 ds + \partial_T \int_t^T \Theta(s)Bds$$

$$= r(0)\partial_T B(0,T) - \sigma^2 \int_t^T B(s,T)\partial_T B(s,T)ds + \int_t^T \Theta(s)\partial_T B(s,T)ds$$

$$= e^{-aT}r(0) - \sigma^2 \int_s^T \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-s)})e^{-a(T-s)}ds + \int_t^T \Theta(s)e^{-a(T-s)}ds$$

$$= e^{-aT}r(0) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2 + \int_t^T \Theta(s)e^{-a(T-s)}ds$$

Para facilitar la notación: $g(T) = e^{-aT}r(0) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-aT})^2$.
Vemos que en la ecuación anterior no aparece $\Theta(t)$ fuera de la integral y no lo podemos despejar. Probamos de derivar otra vez:

$$\partial_T f(0,T) = \partial_T g(T) + \partial_T(e^{-aT}\int_t^T \Theta(s)e^{as}ds)$$

$$= \partial_T g(T) + \Theta(T) - a(f(0,T) - g(T)),$$

Por lo tanto,

$$\Theta(T) = \partial_T f(0,T) - \partial_T g(T) + a(f(0,T) - g(T)) \Rightarrow$$

$$\Theta(T) = \partial_T f'(0,T) - \partial_T g(T) + a(f'(0,T) - g(T))$$

Hemos visto anteriormente un método de modelar los precios de los bonos, suponiendo que estos tienen una estructura afín y suponiendo que se conoce la $\mathbb{P}^*$-dinámica del interés $r(t)$. Pero la dinámica depende de unos parámetros que se tienen que ajustar usando los precios iniciales observados de los bonos $P'(0,T) \approx P(0,T)$. Es aqui dónde podemos encontrar dificultades. Si que es verdad que en los modelos Hull-White y Ho-Lee al ser los parámetros de dimensión infinita ($\Theta(t)$) vimos un método para conocerlos, pero cuándo los parámetros són de dimensión finita (como en el modelo Vasicek o CIR) podemos tener dificultades para ajustarlos. Es por esto que existen otros métodos para modelar los precios de los bonos.

4. Modelos de tipo *forward*

Este modelo utiliza las *forward rates* $f(t,T)$, que como vimos es el interés instantáneo en T de un contrato signado en t. Sabiendo que $P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$, la idea del modelo Heath-Jarrow-Morton es modelizar $f(t,T)$ con un proceso estocástico, y usarlo para conocer finalmente la dinámica que seguirán $P(t,T)$, los precios de los bonos.
Suponemos que la $\mathbb{P}^*$-dinámica de $f(t,T)$ es:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW'_t.$$

Seguimos con la misma tónica anterior, y usamos la probabilidad $\mathbb{P}^*$ porque estamos en un modelo económico sin arbitraje.
Cuándo definimos al principio del todo los intereses de los contratos, vimos que para conocer el *forward rate* $f(t,T)$, nos basábamos en un contrato entre S i T ($S < T$) que se firmaba en t, y hacíamos lo siguiente: $e^{R(T-S)} = \frac{P(t,S)}{P(t,T)}$y $f(t,T) = lim_{T\longrightarrow S}R(t;S,T)$. Era una simple iniciación al tema y eran funciones deterministas,$\Rightarrow$ $\frac{P(t,S)}{P(t,T)} = \frac{P(t',S)}{P(t',T)} \Rightarrow f(t,T) = f(t',T)$ y entonces el valor de $f(t,T)$ era el mismo para todo t, es decir, que el interés en T anticipado no dependía de cuándo se había firmado el contrato.
Por esta razón puede parecer raro que modelizamos $f(t,T)$ en función de t. Pero

des de que vimos $(P(t,T))$como un proceso estocástico adaptado, es evidente que $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$será diferente a $\frac{P(t',S)}{P(t',T)} \Rightarrow f(t,T)$ y $f(t',T)$también lo serán. Y ahora ya tiene más sentido que se modelice $f(t,T)$ respecto de t de la forma tal y como hemos indicado anteriormente.
Como condiciones iniciales se tiene que: $f(0,T) = f'(0,T)$, dónde $f'(t,T)$ representan los intereses observados que provienen de los precios de los bonos observados.
Ahora el objetivo es usar lo definido para llegar a conocer la $\mathbb{P}^*$-dinámica de $P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$. Por lo tanto primero veremos como se comporta el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ dónde $X_t = -\int_t^T f(t,s)ds$.
Podemos verlo primero de forma intuitiva, pues cuando $\triangle t \longrightarrow 0$:

$$X_{t+\triangle t} - X_t = (-\int_{t+\triangle t}^T f(t+\triangle t, s)ds) - (-\int_t^T f(t,s)ds)$$

$$= -\int_{t+\triangle t}^T (f(t+\triangle t, s) - f(t,s))ds + \int_t^{t+\triangle t} f(t,s)ds\triangle t \Rightarrow$$

$$dX_t = f(t,t)dt - \int_t^T df(t,s)ds = f(t,t)dt - \int_t^T \alpha(t,s)dtds - \int_t^T \sigma(t,s)dW'_t ds$$

$$= (f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,s)ds)dt - (\int_t^T \sigma(t,s)ds)dW'_t,$$

dónde el último paso hemos aplicado el teorema de Fubini para procesos estocásticos.
Ahora sabiendo que $P(t,T) = e^{X_t}$, aplicamos la fórmula de Itô para conocer la dinámica de $P(t,T)$.

$$dP(t,T) = P(t,T)dX_t + \frac{1}{2}P(t,T)dX_t^2 = P(t,T)dX_t + \frac{1}{2}P(t,T)(\int_t^T \sigma(t,s)ds)^2 dt \Rightarrow$$

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,s)ds + (\int_t^T \sigma(t,s)ds)^2)dt - (\int_t^T \sigma(t,s)ds))dW'_t.$$

Recordamos que al principio definimos la ecuación $\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = (r(t))dt + \sigma_t^T dW'_t$ con la hipótesis de que en nuestro modelo no existen oportunidades de arbitraje.
Como ahora queremos seguir trabajando en el mismo contexto, igualamos las dos ecuaciones y notamos que:

$$-\int_t^T \alpha(t,s)ds + (\int_t^T \sigma(t,s)ds)^2 = 0,$$

al ser $f(t,t) = r(t)$ por definición.
Ahora si vemos $h(T) = \int_t^T \alpha(t,s)ds$ y $g(T) = \int_t^T \sigma(t,s)ds \Rightarrow$
$h(T) = \frac{g(T)^2}{2} \Rightarrow \partial_T h(T) = \partial_T \frac{g(T)^2}{2} = g(T)\partial_T g(T) \Rightarrow$

$$\alpha(t,T) = (\int_t^T \sigma(t,s)ds)\sigma(t,T).$$

Entonces la solución de:

$$df(t,T) = (\int_t^T \sigma(t,s)ds)\sigma(t,T)dt + \sigma(t,T)dW'_t$$

$$f(0,T) = f'(0,T)$$

es un proceso estocástico que modeliza el forward interest de un bono. Notamos que las ecuaciones anteriores solo dependen de $\sigma(t,s)$, que es la volatilidad segura. Se necesita que sea una función acotada. El método Heath-Jarrow-Morton entonces, se basa en:
1. Especificar la función $\sigma(t,s)$.
2. Tenemos la ecuación $df(t,T) = \int_t^T \sigma(t,s)ds)\sigma(t,T)dt + \sigma(t,T)dW'_t$. Podemos obtener el proceso estocástico que sigue esta ecuación con las condiciones iniciales $f(0,T) = f'(0,T)$.
3. Calcular el proceso que siguen el precios de los bonos de la fórmula $P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$.
4. Entonces, se puede usar este precio por ejemplo para calcular derivados como calls i puts que tienen como activo en su contrato un bono.

Ejemplo:

Suponemos que $\sigma(t,T) = \sigma$ es constante. Entonces

$$df(t,T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma dW_t.$$

Integrando obtenemos,

$$f(t,T) = f'(0,T) + \sigma^2 t(T - \frac{t}{2}) + \sigma W_t.$$

En particular,

$$r(t) = f(t,t) = f'(0,t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W_t$$

y por lo tanto la $\mathbb{P}^*$-dinámica del interés será

$$dr(t) = (\partial_T f'(0,T)|_{T=t} + \sigma^2 t)dt + \sigma dW_t.$$

Notamos que es el modelo Ho-Lee ajustado al valor inicial observdo de las *forward rates*.
Como más lejano sea el tiempo de vencimiento de la forward rate, menor es su fluctuación. Podemos verlo con un ejemplo:

$$\int_t^T \sigma(t,s)ds = \int_t^T e^{-b(s-t)}ds = -\frac{\sigma}{b}(e^{-b(T-t)} - 1),$$

, y

$$df(t,T) = -\frac{\sigma^2}{b}e^{-b(T-t)}(e^{-b(T-t)} - 1)dt + \sigma e^{-b(T-t)}dW_t.$$

Entonces integrando de 0 a t:

$$f(t,T) = f(0,T) + \frac{\sigma^2 e^{-2bT}}{2b^2}(1-e^{2bt}) - \frac{\sigma^2 e^{-bT}}{b^2}(1-e^{bt}) + \sigma e^{-bT}\int_0^t e^{bs}dW_s.$$

Al ser e^{-bT}es el factor que multiplica el factor perturbación del proceso estocástico anterior, vemos que se cumple el enunciado.
Aplicando

$$r(t) = f(t,T) \Rightarrow r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2b^2}(-1+e^{-2bt}) - \frac{\sigma^2}{b^2}(-1+e^{-bt}) + \sigma e^{-bt}\int_0^t e^{bs}dW_s.$$

5. Cambio de *numéraire* y medida *forward*

Definición 5.1 : *Para una fecha de vencimiento fijada $T \in [0,T']$, la medida de probabilidad T-forward es la medida de probabilidad $\mathbb{P}^T$ que cumple*

$$\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*} = \frac{exp(-\int_0^T r(s)ds)}{P(0,T)}$$

Notamos que P^T es una medida de probabilidad definida en $\Im_T$:
$A \in \Im_T, \mathbb{P}^T(A) = E^*(\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}1_A)$
y obviamente: $\mathbb{P}^T(\Omega) = E^*(\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}) = E^*(\frac{exp(-\int_0^T r(s)ds)}{P(0,T)}) = \frac{E^*(exp(-\int_0^T r(s)ds))}{P(0,T)} = \frac{P(0,T)}{P(0,T)} = 1$
Por definición, sabemos que $\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*} = \frac{exp(-\int_0^T r(s)ds)}{P(0,T)}$ es una variable aleatoria $\Im_T$-medible tal que $\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*} > 0$ c.s. , entonces claramente $\mathbb{P}^T$ es equivalente a $\mathbb{P}^*$ y como consecuencia también equivalente a P.
La implicación que hemos usado en la afirmación anterior sabemos que es cierta. Lo podemos comprobar por recíproco: si $\mathbb{P}^T$ no fuera equivalente a $\mathbb{P}^*$, entonces existiria $A \in \Omega$ tales que $\mathbb{P}^T(A) = 0$ y $\mathbb{P}^*(A) \neq 0 \Longrightarrow \frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}(A) = 0$.
Podemos definir ahora el proceso martingala $(L_t^T) = (E^*(\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}|\Im_t))$, $t \in [0,T]$, dónde usando teoría anterior sabemos que: $E^*(\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}|\Im_t) = \frac{P'(t,T)}{P(0,T)}$, $t \in [0,T]$ (ya hemos visto anteriormente que es integrable, pues la esperanza de $\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}$ es 1 respecto a $\mathbb{P}^*$).
Veremos ahora que utilidad tiene esta medida. Sea θ una fecha de vencimiento $(0 \leq \theta \leq T')$.
Suponemos que $(X_t)_{0\leq t\leq\theta}$ es el proceso de una cartera con una estrategia admisible y que contiene como activos un bono con vencimiento en θ y el activo sin riesgo.
Vimos anteriormente que bajo la hipótesis de que el mercado está libre de arbitraje, el proceso $(\frac{X_t}{S_t^0})$, que es el valor descontado de la cartera, es $\mathbb{P}^*$-martingala.
Intuitivamente, uno puede pensar que debe existir otra probabilidad $\mathbb{P}^\theta$ por la que los valores capitalizados en θ de la cartera sean también martingalas. En la siguiente proposición lo vemos de una forma rigurosa.
Antes de nada, para expresar los valores capitalizados en θ de la cartera, dividimos la cartera X_t por $P(t,\theta) = E(e^{-\int_t^\theta r(s)ds}|\Im_t) \Rightarrow F_X(t,\theta) = \frac{X_t}{P(t,\theta)} = \frac{X_t}{E(e^{-\int_t^\theta r(s)ds}|\Im_t)}$,

que llamaremos como el precio *θ-forward* de la cartera.

Preposición 5.1 *Sea θ un fecha de vencimiento de alguna opción tal que $\theta \in [0,T']$:*
1. Si h es una variable aleatoria $\Im_\theta$-medible no negativa, tenemos para $t \in [0,\theta]$:

$$E^*(he^{-\int_t^\theta r(s)ds}|\Im_t) = P(t,\theta)E^\theta(h|\Im_t)$$

2. Si $(X_t)_{0\leq t\leq \theta}$ es un proceso estocástico adaptado, entonces el proceso $(\frac{X_t}{S_t^0})_{0\leq t\leq\theta}$ es P^*-martingala $\Longleftrightarrow$ $(\frac{X_t}{P(t,\theta)})_{0\leq t\leq\theta}$ es P^θ-martingala.

Demostración:
El primer punto se demuestra fácilmente aplicando la regla de Bayes para esperanzas condicionadas:

$E^*(hL_\theta^\theta|\Im_t) = L_t^\theta E^\theta(h|\Im_t)$, $L_t^\theta = \frac{P'(t,\theta)}{P(0,\theta)}$, $0 \leq t \leq \theta$

El segundo punto se demuestra usando el primer apartado:
$(\frac{X_t}{S_t^0})_{0\leq t\leq\theta}$ es $\mathbb{P}^*$-martingala $\Leftrightarrow$ $X_t = E^*(X_\theta e^{-\int_t^\theta r(s)ds}|\Im_t) = P(t,\theta)E^\theta(X_\theta|\Im_t)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{X_t}{P(t,\theta)} = E^\theta(X_\theta|\Im_t) = E^\theta(\frac{X_\theta}{P(\theta,\theta)}|\Im_t)$ $\Leftrightarrow$ $(\frac{X_t}{P(t,\theta)})_{0\leq t\leq\theta}$ es $\mathbb{P}^\theta$-martingala.

A partir del resultado anterior, en caso de conocer la variable aleatoria que expresa un *θ-payoff* h que puede ser replicado por una cartera con estrategia admisible $(X_t)_{0\leq t\leq\theta}, X_T = h \Rightarrow$ podemos conocer el valor de la cartera a través de la expresión $X_t = P(t,T)E^\theta(h|\Im_t)$.
Es decir, hemos encontrado otra medida a parte de $\mathbb{P}^*$ con la que podemos encontrar el valor de ciertos productos financieros.

Suponemos ahora que queremos conocer el valor de un contrato europeo del tipo call con fecha de vencimiento θ y strike K dónde el activo del contrato es un bono cupón zero con fecha de vencimiento T, es decir, $h = (P(\theta,T) - K)_+$. Ya hemos calculado anteriormente el valor de la opción mediante la probabilidad $\mathbb{P}^*$, pero ahora, lo queremos hacer usando la nueva medida $\mathbb{P}^\theta$.
Sea $(P(t,T))_{0\leq t\leq\theta}$ el proceso hasta θ del bono con vencimiento en T. Podemos definir la probabilidad $\mathbb{P}_\mathbb{T}^\theta$ en $\Im_\theta$ como

$$\frac{d\mathbb{P}_T^\theta}{d\mathbb{P}^*} = \frac{exp(-\int_0^\theta r(s)ds)P(\theta,T)}{P(0,T)}.$$

Sabemos por la proposición anterior que bajo esta probabilidad, sea h una v.a.

no-negativa tenemos para $0 \leq t \leq \theta$

$$E^*(hP(\theta,T)e^{-\int_t^\theta r(s)ds}|\Im_t) = P(t,T)E_T^\theta(h|\Im_t)$$

Proposición 5.2 *El precio de un contrato europeo del tipo call con fecha de vencimiento θ, strike K y que tiene por activo subyacente un bono cupón zero con fecha de vencimiento T vendrá dado por el proceso siguiente:*

$$C_t^\theta = P(t,T)\mathbb{P}_{\mathbb{T}}^\theta(P(\theta,T \geq K|\Im_t) - K\mathbb{P}_{\mathbb{T}}^\theta(P(\theta,T \geq K|\Im_t)$$

Demostración:
$C_t^\theta = E^*((P(\theta,T)-K)_+ e^{-\int_t^\theta r(s)ds}|\Im_t)$
$= E^*((P(\theta,T)-K)e^{-\int_t^\theta r(s)ds}1_{P(\theta,T)\geq K}|\Im_t)$
$= E^*(P(\theta,T)e^{-\int_t^\theta r(s)ds}1_{P(\theta,T)\geq K}|\Im_t) - KE^*(e^{-\int_t^\theta r(s)ds}1_{P(\theta,T)\geq K}|\Im_t)$
$= P(t,T)E_T^\theta(1_{P(\theta,T)\geq K}|\Im_t) - KP(t,\theta)E^\theta(1_{P(\theta,T)\geq K}|\Im_t)$
$= P(t,T)\mathbb{P}_{\mathbb{T}}^\theta(P(\theta,T) \geq K|\Im_t) - KP(t,\theta)\mathbb{P}^\theta(P(\theta,T) \geq K|\Im_t)$
dónde $0 \leq t \leq \theta$.

$C_t^\theta = P(t,T)\mathbb{P}_{\mathbb{T}}^\theta(P(\theta,T) \geq K|\Im_t) - KP(t,\theta)\mathbb{P}^\theta(P(\theta,T) \geq K|\Im_t) =$
$= P(t,T)\mathbb{P}_{\mathbb{T}}^\theta(\frac{P(\theta,T)}{P(\theta,\theta)} \geq K|\Im_t) - KP(t,\theta)\mathbb{P}^\theta(\frac{P(\theta,T)}{P(\theta,\theta)} \geq K|\Im_t)$

Procedemos a resolver la ecuación anterior. Sea $P^\theta(t,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,\theta)}$ el precio "θ-forward" del bono sin cupón con vencimiento en T, notamos que $P^\theta(\theta,T) = P(\theta,T)$. El objetivo ahora es intentar buscar la integral estocástica que defina el proceso $(P^\theta(t,T))$ respecto las probabilidades $\mathbb{P}^\theta$ y $\mathbb{P}_T^\theta$. Una vez tengamos esto, podemos conocer la ley de la variable aleatoria $P^\theta(\theta,T)$ bajo las dos probabilidades. En la siguiente proposición encontraremos la integral estocástica bajo $\mathbb{P}^\theta$.

Proposición 5.3 *Dadas dos fechas de vencimiento θ y T, el θ-forward price del bono cupón zero con vencimiento en T definido como $P^\theta(t,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,\theta)}$ satisface*

$$\frac{dP^\theta(t,T)}{P^\theta(t,T)} = (\sigma_t^T - \sigma_t^\theta)dW_t^\theta, 0 \leq t \leq \theta,$$

(suponiendo $\theta < T$)
dónde $W_t^\theta = W_t' - \int_0^t \sigma_s^\theta ds$, y el proceso $(W_t^\theta)_{0\leq t\leq\theta}$ es un $\Im_t$-movimiento browniano respecto a $\mathbb{P}^\theta$.
Demostración:
Hemos explicado anteriormente que para cada fecha de vencimiento T, existe un proceso adaptado $(\sigma_t^T)_{0\leq t\leq T}$ tal que la dinámica del bono con vencimiento en T se define:

$$P(t,T) = P(0,T)\exp(\int_0^t r(s)ds + \int_0^t (\sigma_s^T)dW_s' - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma_s^T)^2)ds),$$

dónde (W'_t) es un $\Im_t$-movimiento browniano respecto $\mathbb{P}^*$. Por lo tanto si aplicamos la fórmula a $P^\theta(t,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,\theta)}$:

$$P^\theta(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,\theta)} \exp(\int_0^t (\sigma_s^T - \sigma_s^\theta) dW'_s - \frac{1}{2}\int_0^t ((\sigma_s^T)^2 - (\sigma_s^\theta)^2) ds).$$

Ya hemos visto que el proceso adaptado $(L_t^\theta) = (E^*(\frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P}^*}|\Im_t)) = (\frac{P'(t,\theta)}{P(0,\theta)})$, $t \in [0,\theta]$ es $\Im_t$ martingala respecto $\mathbb{P}^*$. Sustituyendo por las fórmulas de los bonos en la ecuación anterior:

$$L_t^\theta = \exp(\int_0^t \sigma_s^\theta(s) dW'_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma_s^\theta)^2 ds) c.s.$$

Ahora mediante el teorema de Girsanov $W_t^\theta = W'_t - \int_0^t \sigma_s^\theta ds$ es un $\Im_t$-movimiento browniano respecto $\mathbb{P}^\theta \Rightarrow dW_t^\theta = dW'_t - \sigma_s^\theta ds$. Sustituyendo a $P^\theta(t,T)$ obtenemos:

$$P^\theta(t,T) = P^\theta(0,T) exp(\int_0^t (\sigma_s^T - \sigma_s^\theta) dW_s^\theta - \frac{1}{2}\int_0^t ((\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)^2) ds)$$

Mediante la fórmula de Itô, obtenemos

$$\frac{dP^\theta(t,T)}{P^\theta(t,T)} = (\sigma_t^T - \sigma_t^\theta) dW_t^\theta, 0 \leq t \leq \theta.$$

Entonces, si suponemos que el proceso ha avanzado hasta t, podemos integrar la fórmula anterior entre t y θ para obtener la expresión de la variable aleatoria $P^\theta(\theta,T)$ respecto $\mathbb{P}^\theta \Rightarrow$

$$P^\theta(\theta,T) = P^\theta(t,T) \exp(Z(t,\theta)),$$

dónde $Z(t,\theta) = \int_t^\theta (\sigma_s^T - \sigma_s^\theta) dW_s^\theta - \frac{1}{2}\int_t^\theta ((\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)^2) ds$.
Suponiendo que las volatilidades (σ_s^θ) y (σ_s^T) son determinísticas, sabemos que bajo $\mathbb{P}^\theta$, la variable $Z(t,\theta)$ es independiente de $\Im_t$, gaussiana con media $-\frac{1}{2}\int_t^\theta ((\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)^2$ y varianza $\int_t^\theta ((\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)^2$. Para facilitar la notación, $\Sigma^2(t,\theta) = \int_t^\theta ((\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)^2$.
Ahora podemos aplicar logaritmos a $P^\theta(\theta,T) \Rightarrow$

$$\log P^\theta(\theta,T) = \log P^\theta(t,T) + Z(t,\theta).$$

Por lo que hemos explicado antes la ley variable aleatoria $\log P^\theta(\theta,T)$ condicionada por $\Im_t$ es gaussiana bajo $\mathbb{P}^\theta \Rightarrow$

$$(\frac{\log P^\theta(\theta,T) - \log P^\theta(t,T) + \frac{1}{2}\Sigma^2(t,\theta)}{\Sigma(t,\theta)}|\Im_t) \sim N(0,1)$$

Para encontrar la ley de $P^\theta(t,T)$ bajo la probabilidad $\mathbb{P}_T^\theta$, seguimos el mismo razonamiento que la demostración anterior.
La diferencia radica en la expresión de $(L_t^\theta) = (E^*(\frac{d\mathbb{P}_T^\theta}{d\mathbb{P}^*}|\Im_t)) = (\frac{P'(t,T)}{P(0,T)})$. Como

antes, para $t \in [0,\theta]$ el proceso anterior $\Im_t$ martingala bajo $\mathbb{P}^*$. Sustituyendo por las fórmulas de los bonos en la ecuación anterior:

$$L_t^\theta = \exp(\int_0^t \sigma_s^T(s)dW_s' - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma_s^T)^2 dsc.s.$$

Ahora mediante el teorema de Girsanov $W_t^T = W_t' - \int_0^t \sigma_s^T ds$ es un $\Im_t$-movimiento browniano bajo $\mathbb{P}_T^\theta \Rightarrow dW_t^T = dW_t' - \sigma_s^T ds$. Ahora sustituyendo a la expresión $P^\theta(t,T)$ obtenemos:

$$P^\theta(t,T) = P^\theta(0,T)exp(\int_0^t (\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)dW_s^T + \frac{1}{2}\int_0^t ((\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)^2)ds).$$

Suponiendo que conocemos la posición del proceso en t, obtenemos la expresión de la variable aleatoria $P^\theta(\theta,T)$ bajo la probabilidad $\mathbb{P}_T^\theta \Rightarrow$

$$P^\theta(\theta,T) = P^\theta(t,T)exp(\int_t^\theta (\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)dW_s^T + \frac{1}{2}\int_t^\theta ((\sigma_s^T - \sigma_s^\theta)^2)ds) \Rightarrow$$

bajo $\mathbb{P}_T^\theta$ tenemos

$$(\frac{\log P^\theta(\theta,T) - \log P^\theta(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma^2(t,\theta)}{\Sigma(t,\theta)}|\Im_t) \sim N(0,1)$$

Finalmente tenemos para $0 \leq t \leq \theta$,
$C_t^\theta = P(t,T)\mathbb{P}_{\mathbb{T}}^\theta(P^\theta(\theta,T) \geq K|\Im_t) - KP(t,\theta)\mathbb{P}^\theta(P^\theta(\theta,T) \geq K|\Im_t)$
$= P(t,T)\mathbb{P}_{\mathbb{T}}^\theta(\log P^\theta(\theta,T) \geq \log K|\Im_t) - KP(t,\theta)\mathbb{P}^\theta(\log P^\theta(\theta,T) \geq \log K|\Im_t)$
$= P(t,T)\mathbb{P}_{\mathbb{T}}^\theta((\frac{\log P^\theta(\theta,T) - \log P^\theta(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma^2(t,\theta)}{\Sigma(t,\theta)} \geq \frac{\log K - \log P^\theta(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma^2(t,\theta)}{\Sigma(t,\theta)}|\Im_t)$
$-KP(t,\theta)\mathbb{P}^\theta(\frac{\log P^\theta(\theta,T) - \log P^\theta(t,T) + \frac{1}{2}\Sigma^2(t,\theta)}{\Sigma(t,\theta)} \geq \frac{\log K - \log P^\theta(t,T) + \frac{1}{2}\Sigma^2(t,\theta)}{\Sigma(t,\theta)}|\Im_t)$
$= P(t,T)\Phi(d_+) - KP(t,\theta)\Phi(d_-)$
con

$$d_\pm = \frac{-\log K + \log P^\theta(t,T) \pm \frac{1}{2}\Sigma^2(t,\theta)}{\Sigma(t,\theta)}$$

Conclusiones

Los modelos estocásticos que hemos presentado son utilizados en la vida real por parte de los analistas cuantitativos para modelar el precio de una gran número de contratos que se compran y venden en los mercados financieros.
En el trabajo hemos estudiado con detalle el mercado de bonos sin cupón, que es uno de los contrato más básicos que existen, y se han presentado diversos métodos que usan procesos estocásticos para describir su comportamiento.
Entonces, para poder valorar y describir la dinámica de contratos mas complejos, lo ideal es poder encontrar estrategias de cartera que usen sólo bonos sin cupón y que tengan el mismo flujo de dinero que los primeros.

Hemos visto que es muy importante entender el funcionamiento del mercado que nos disponemos a modelar. Las leyes que rigen el mercado, luego serán las hipótesis del modelo teórico. Toda la teoría se desarrolla en base estas hipótesis, por lo tanto, hay que hacerlo de una forma rigurosa.
Toda la teoría probabilística que nació con los estudios de Black-Scholes, deriva de la hipótesis inicial de que en el mercado no hay oportunidades de arbitraje. A partir de este concepto, nace la famosa probabilidad neutral que va apareciendo en cada uno de los resultados del modelo.
Entonces, a partir de la base del modelo Black-Scholes, hemos introducido el mercado de los bonos y sus principales características.
Lo primero que hemos hecho es, mediante la probabilidad neutral, encontrar un proceso estocástico contínuo que modela el precio que tienen los bonos en el mercado.
Como ya hemos dicho, hay una gran cantidad de instrumentos financieros con los que se opera diariamente en los mercados cuyos valores dependen del precio de los bonos.
El que hemos estudiado es el contrato europeo call que tiene un bono como activo subyacente. Mediante una cartera se puede cubrir la opción. El proceso que modela la cartera es martingala con lo que podemos encontrar su expresión.
A parte de los contratos call o put, también son muy usados los contratos *Swaps* o los *Caps and Floors*.
Estos tipos de instrumentos, son usados por los bancos, empresas y cualquier agente que opere en los mercados para cubrirse en caso de cambio de los tipos de interés.

En la segunda parte del trabajo, hemos visto un enfoque más práctico de la modelación de los bonos, y se han presentado diferentes métodos para lograrlo.
Un método es la de suponer que el precio de los bonos sigue una estructura afín. Es una manera de facilitar los cálculos a la hora de la modelación. Pues bajo la hipótesis de que los procesos de los bonos descontados son martingalas se obtienen unas ecuaciones que permiten encontrar fácilmente la expresión del proceso estocástico

de los bonos.
Hay diferentes versiones de este método dependiendo de la dinámica que sigue el interés. Esta dinámica depende de unos parámetros que se pueden estimar con valores históricos de mercado de los bonos o los intereses. El Vasicek y el CIR tienen dinámicas parecidas y la calibración de los parámetros requiere métodos estad 'isticos o numéricos. En cambio la calibración en el modelo Ho-Lee o el Hull-White es mucho más fácil por tener estos funciones como parámetros.
Luego se ha presentado otro método, que se basa en modelar el interés *forward* de los bonos. Hemos visto que la ecuación que describe la dinámica de este interés solo depende de un de un parámetro.
Finalmente, hemos encontrado otra medida diferente de la neutral con la que podemos modelar el valor de ciertos productos financieros. Entre ellos los de una opción europea del tipo call.

Bibliografía

Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models-theory and practice.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

José Manuel Corcuera. *Quantitative Finance* . Universitat de Barcelona.

Masaaki Kijima. *Stochastic Processes with Applications to Finance* Hapman Hall/CRC FINANCIAL MATHEMATICAL SERIES.

Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Hapman Hall/CRC FINANCIAL MATHEMATICAL SERIES.

Jan R. M. Roman. *Analytical Finance I,II* . Malardalen University .