Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Equacions de Maxwell en termes de formes diferencials

Autor: Germán Pablo Miranda Santos

Tutor: Dr. Ignasi Mundet i Riera
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 29 de juny de 2017

Abstract

Maxwell's equations are one of the cornestones of physics. In this essay, we describe how these equations can be expressed in terms of differential forms. For this purpose, we present some results on smooth, riemannian and pseudo-riemannian manifolds in order to make this reformulation easier to understand.

Resum

Les equacions de Maxwell són la base per una de les branques més importants de la física: l'electrodinàmica. En aquest treball, descrivim com es poden reformular aquestes equacions en termes de formes diferencials. Per aquest objectiu, primer de tot, es presenten uns resultats previs de varietats contínuament diferenciables, riemannianes i pseudo-riemannianes, per tal de realitzar aquesta reformulació d'una manera entenedora.

Agraïments

Primer de tot, agraeixo al Dr. Ignasi Mundet i Riera per introduir-me en aquest tema tan interessant així com per la seva dedicació i ajuda per poder superar els obstacles que m'he anat trobant.

També voldria agrair a la meva família i amics, en especial els meus pares, per haverme donat suport durant tots aquests anys per poder arribar fins aquí.

Índex

1 Varietats diferenciables **3**

1.1 Varietats diferenciables . . . 3

1.2 Espai tangent . . . 5

1.3 Camps vectorials . . . 10

1.4 Tensors i formes diferencials . . . 12

1.4.1 Àlgebra multilineal . . . 12

1.4.2 Camps tensorials i formes diferencials . . . 17

1.5 Operador diferencial d . . . 19

1.6 Integració en varietats diferenciables . . . 22

1.6.1 Integració en varietats diferenciables . . . 23

1.6.2 Integració en varietats diferenciables orientables . . . 24

2 Varietats riemannianes **26**

2.1 Varietats riemannianes i pseudo-riemannianes . . . 26

2.2 Operador $*$ de Hodge . . . 28

2.3 Integració en varietats riemannianes . . . 32

3 Equacions de Maxwell **36**

3.1 Equacions de Maxwell i tensor de Faraday . . . 36

3.2 Forma integral de les equacions de Maxwell. El contingut geomètric de les equacions de Maxwell . . . 39

3.3 Equacions de Maxwell en termes de formes diferencials . . . 42

3.3.1 Equacions homogènies de Maxwell . . . 42

3.3.2 Equacions inhomogènies de Maxwell . . . 43

3.3.3 Equació de continuïtat . . . 45

Bibliografia **47**

Introducció

L'electromagnetisme ha estat present en la història de la humanitat des de fa segles. A l'antiga Grècia ja es coneixen els imants i l'ambre, de fet el terme *elèctric* prové de la paraula grega per denominar l'ambre, *elektron*. Tot i això electricitat i magnetisme eren tractades com matèries completament separades i amb un punt de vista fenomenològic. El canvi del punt de vista de l'electromagnetisme per ser tractat com un camp d'estudi quantitatiu va ser desenvolupat en menys de cent anys. Algunes aportacions claus van ser els experiments d'electrostàtica realitzats per Cavendish en 1771 i les grans investigacions de Coulomb, les quals es van començar a publicar a partir del 1785 i van marcar l'inici de la recerca en electromagnetisme des d'aquest nou punt de vista. [5]

L'any 1820, Oersted va adonar-se'n que un corrent elèctric podia desviar l'agulla d'una brúixola. Aquest resultat experimental va començar a fer pensar que electricitat i magnetisme podien estar relacionats. Poc després Ampere postulava correctament que tots els fenòmens magnètics es produïen a causa del moviment de les càrregues elèctriques. Aleshores, el 1831, Faraday va descobrir que un imant en moviment produïa corrent elèctric. En aquells temps Maxwell i Lorentz estaven ultimant els últims retocs d'una teoria, on electricitat i magnetisme es trobaven inextricablement entrellaçats. Seria a partir d'aquella teoria quan ja es començaria a parlar d'**electromagnetisme**. Va ser en 1864 quan Maxwell va publicar el seu famós article *On a dynamical theory of the electromagnetic field* on aquesta esmentada teoria va ser exposada. La teoria de Maxwell donava entre altres coses una justificació sobre la llum i com aquesta tenia una natura elèctrica com Faraday ja havia especulat. Vint-i-quatre anys després (1888) Hertz publicava els resultats de les seves troballes en ones electromagnètiques transversals, les quals es propagaven a la velocitat de la llum. Aquests resultats experimentals van proporcionar a la teoria de Maxwell una confirmació experimental decisiva. Gràcies a aquest fet abans del segle XX tres grans branques de la física (electricitat, magnetisme i òptica) s'havien unificat en una teoria unificada.

De fet Einstein va buscar com expandir aquesta idea d'unificació combinant gravetat i electrodinàmica tanmateix no va poder-ho fer de forma satisfactòria. Tanmateix, aquest desig de buscar com unificar diferents forces de la física ha inspirat a noves generacions de científics a la recerca d'aquestes teories. Un clar exemple d'això el trobem en la teoria de cordes, la qual és una teoria que busca unificar les forces fonamentals de la física (forta, electromagnètica, feble i gravitatòria). En resum, l'electrodinàmica és el model ideal què es pren com a referència en la formulació d'altres teories a la física. [3][5]

Una propietat rellevant de les equacions de Maxwell és que no totes són invariants sota transformacions del grup de Galileu (grup de transformacions de sistemes de referència que deixen invariants les lleis de Newton), només les dues primeres ho són. Això no era sorprenent des del punt de vista de Maxwell, ja que per a ell el camp elèctric i el camp magnètic representen estats de moviment local d'un medi, *l'èter electromagnètic*, i no era estrany que les equacions fossin més senzilles en un sistema referència on l'èter és estacionari. Això implicaria que en altres sistemes de referència s'haurien de tenir en compte els efectes de no tenir l'èter estacionari i els efectes derivats d'aquest fet haurien de manifestar-se en el laboratori. Aviat però, es va veure la impossibilitat experimental de detectar aquests efectes. Per aquest motiu Lorentz va iniciar la recerca de les transformacions que deixessin invariant l'electrodinàmica de Maxwell. Va ser en 1904 quan finalment Lorentz va trobar les transformacions exactes conegudes com a **transformacions de Lorentz**. En aquestes lleis de transformació, el temps es transformava depenent del punt considerat i això xocava amb la concepció de temps absolut de l'època. Per aquest motiu la variable temporal apareixia en les equacions com a temps local i per a Lorentz només es tractava d'un artefacte matemàtic per tal d'explicar els resultats experimentals negatius dels diversos intents de detectar els efectes electrodinàmics o òptics associats al moviment del laboratori on es feien les mesures respecte a l'èter. [6]

L'any 1904 Poincaré va proposar una solució pels resultats experimentals negatius proposant estendre el principi de relativitat a tota la física. Aquesta idea va ser recollida i ampliada per Einstein en 1905 en un dels seus tres famosos articles. D'aquesta manera apareixia la **relativitat especial** amb els dos postulats següents

...les mateixes lleis de l'electrodinàmica i l'òptica valent en tots els sistemes de referència en què valen les lleis de la mecànica.

...la llum es propaga en el buit a una velocitat definida, c, independent de l'estat [de moviment] del cos emissor. [6]

Un dels aspectes claus de la relativitat especial és que no es considera en un espai purament euclidià, sinó en l'anomenat **espai de Minkowski**. Tot i això presenta certes similituds amb els espais euclidians i per això s'acostuma a classificar-lo dins dels **espais pseudo-euclidians**. Una característica fonamental d'aquest espai és que les transformacions trobades per Lorentz són isometries.

Deu anys més tard, en 1915, Einstein publicaria la teoria de la relativitat on generalitzava la relativitat especial i la teoria de la gravitació universal de Newton. Aquesta revolucionària teoria s'enuncia utilitzant unes estructures matemàtiques anomenades **varietats diferencials** i uns elements anomenats **tensors**. Aquestes varietats diferenciables i aquests tensors són ingredients bàsics en la formulació de la física teòrica actual i una de les característiques principals d'aquests tensors és que permeten fer una formulació que no depèn de les coordenades escollides.

Per aquest motiu, és natural preguntar-se si és possible enunciar les equacions de Maxwell dins d'una varietat diferenciable i utilitzant tensors. La resposta és afirmativa i en aquest treball veurem com es pot fer, quins resultats es poden retrobar i quines conclusions se'n poden extreure. En particular utilitzarem uns elements concrets del càlcul tensorial: les **formes diferencials**.

Abans d'arribar a aquesta formulació es veuran els aspectes bàsics de les varietats diferenciables i, en particular, de les **varietats riemannianes i pseudo-riemannianes**, on considerarem una mètrica definida en aquestes varietats diferenciables.

Capítol 1

Varietats diferenciables

En aquest capítol es busca definir l'espai bàsic utilitzat per la reformulació de les equacions de Maxwell, les varietats diferenciables, i derivar algunes de les propietats rellevants. Aquests espais són localment euclidians i tenen estructura suficient per tal que es puguin traslladar cap a ells la majoria dels conceptes bàsics del càlcul. És a dir, ens ocuparem de les analogies i implicacions dels teoremes fonamentals del càlcul diferencial en ser traslladats cap a aquestes varietats diferenciables. Les demostracions amb més detall i altres observacions no donades es poden a trobar a [1] i [8].

1.1 Varietats diferenciables

Definició 1.1. *Un* ***espai M localment euclidià de dimensió d*** *és un espai topològic Hausdorff M tal que cada punt té un entorn homeomorf a un subconjunt obert de l'espai euclidià* $\mathbb{R}^d$*.*

Definició 1.2. *Un* ***sistema de coordenades*** *és una parella* (U, φ) *on* $U \subset M$ *és un conjunt obert i connex (on M és un espai localment euclidià de dimensió d) i* φ*, al qual anomen* ***mapa de coordenades****, és un homemorfisme entre U i un subconjunt obert de* $\mathbb{R}^d$*.*

El sistema de coordenades es pot escriure de forma anàloga com $(U, x^1, \ldots, x^d)$ *on* $x^i = r^i \circ \varphi$ *s'anomenen* ***funcions de coordenades*** *i* $r^i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *és la funció definida per* $r^i(v) = v^i$ *on* $v = (v^1, \ldots, v^d) \in \mathbb{R}^d$*.*

En algunes referències, a la parella (U, φ) se l'anomena també carta i al conjunt d'aquestes cartes, atles.

Definició 1.3. *Una* ***estructura diferenciable*** $\mathscr{F}$ ***de classe*** C^k $(1 \leq j \leq \infty)$ *en un espai localment euclidià M és una col·lecció de sistemes de coordenades* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ *que satisfà les següents tres propietats:*

(a) $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$*.*

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ *és* C^k *per tot* $\alpha, \beta \in A$*.*

(c) La col·lecció $\mathscr{F}$ *és maximal respecte (b); és a dir, si* (U, φ) *és un sistema de coordenades tal que* $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *i* $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ *és* C^k *per tot* $\alpha \in A$*, aleshores* $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$*.*

Lema 1.4. *Si $\mathscr{F}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ és una col·lecció qualsevol de sistemes de coordenades que satisfan les propietats (a) i (b) de la definició anterior, aleshores existeix una única estructura diferenciable $\mathscr{F}$ que conté $\mathscr{F}_0$.*

Demostració. Aquesta estructura diferenciable és

$$\mathscr{F} = \{(U, \varphi) : \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ i } \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \text{ són } C^k \text{ per tot } \varphi_\alpha \in \mathscr{F}_0\}.$$

És obvi que $\mathscr{F}$ conté $\mathscr{F}_0$, per tant la propietat (a) es satisfà. La propietat (b) es pot veure utilitzant el fet que si $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathscr{F}$ aleshores $\bigcup_{\alpha \in A} U_1 \cap U_2 \cap U_\alpha = U_1 \cap U_2$. Per últim, $\mathscr{F}$ és maximal i única per construcció. □

Definició 1.5. *Una **varietat diferenciable de classe** C^k és una parella $(M, \mathscr{F})$ que consisteix en un espai M localment euclidià, segon numerable i de dimensió d amb una estructura diferenciable $\mathscr{F}$ de classe C^k.*

Com ja hem dit, tractarem **varietats contínuament diferenciables**, les quals són varietats diferenciables de classe C^∞. Per simplificar la notació, sovint ens referirem a la varietat només com M en comptes de $(M, \mathscr{F})$. D'ara en endavant, si no s'especifica, M i N seran sempre varietats diferenciables.

Definició 1.6. *Una **estructura de varietat diferenciable en un conjunt** X és una elecció d'una topologia localment euclidiana i segon numerable alhora que una estructura diferenciable.*

Definició 1.7. *Sigui $U \subset M$ un obert, aleshores $f : U \to \mathbb{R}$ és una **funció** C^∞ **en** U ($f \in C^\infty(U)$) si $f \circ \varphi^{-1}$ és C^∞ per a cada mapa de coordenades φ en M.*

Definició 1.8. *Una aplicació continua $\psi : M \to N$ entre dues varietats diferenciables M i N és **diferenciable de classe** C^∞ si, i només si, $\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1}$ és C^∞ per a cada mapa de coordenades τ de M i φ de N.*

Per últim, introduirem el concepte de **partició de la unitat**. La seva existència en varietats diferenciables prové de la paracompacitat d'aquestes. Recordem que un espai és paracompacte si cada recobriment obert admet un refinament obert localment finit. Les particions de la unitat són una eina de gran utilitat per poder construir globalment funcions i estructures en M quan només les tenim definides localment.

Definició 1.9. *Una **partició de la unitat** en M és una col·lecció $\{\varphi_i : i \in I\}$ de funcions C^∞ en M tal que*

(a) La col·lecció de suports $\{supp\ \varphi_i = \overline{\varphi_i^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})} : i \in I\}$ és localment finita.

(b) $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ per a tot $p \in M$, i $\varphi_i(p) \geq 0$ per a tot $p \in M$, $i \in I$.

*Una partició de la unitat $\{\varphi_i : i \in I\}$ està **subordinada a un recobriment** $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ si per a cada i existeix una α tal que $supp\ \varphi_i \subset U_\alpha$. El recobriment $\{U_i : i \in I\}$ té el mateix índex que la partició de la unitat si $supp\ \varphi_i \subset U_i$ per a cada $i \in I$.*

Proposició 1.10. ***(Existència de particions de la unitat)*** *Sigui M una varietat diferenciable i $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un recobriment obert de M. Aleshores existeix una partició de la unitat comptable $\{\varphi_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$ subordinada al recobriment $\{U_\alpha\}$ amb supp φ_i compacte per a cada i. Si no es requereix que el suport sigui compacte, aleshores existeix una partició de la unitat $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada al recobriment $\{U_\alpha\}$ amb com a molt una quantitat comptable de φ_α que no són idènticament zero.*

1.2 Espai tangent

Una de les nocions que ens interessa traslladar a les varietats diferenciables és la derivada direccional de l'espai euclidià. Donat l'espai euclidià $\mathbb{R}^d$ i un vector $v = (v^1, \ldots, v^d) \in \mathbb{R}^d$, podem considerar aquest vector com un operador actuant sobre funcions diferenciables si assignem

$$v(f) = v^1 \frac{\partial f}{\partial r^1}\bigg|_p + \ldots + v^d \frac{\partial f}{\partial r^d}\bigg|_p$$

on f és una funció diferenciable en un entorn de $p \in \mathbb{R}^d$. Aquesta operació satisfà

$$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g) \qquad (v \text{ és lineal}) \tag{1.1}$$

$$v(f \cdot g) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \qquad (v \text{ és una } \textbf{derivació}) \tag{1.2}$$

on f i g són dues funcions diferenciables en un entorn de p i $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'interès que tenim en traslladar el concepte de derivada direccional és el que motiva la definició de vectors tangents en varietats diferenciables. Aquests vectors tangents seran derivades direccionals, en altres paraules, derivacions lineals en funcions que estaran definides en varietats diferenciables. L'operació de prendre derivades només depèn de les propietats locals de les funcions (en els petits entorns dels punts on derivem). Llavors per expressar aquesta dependència local de la forma més convenient introduirem la noció de **germen d'una funció**.

Definició 1.11. *Sigui $m \in M$, dues funcions f i g definides en conjunts oberts que contenen m es diu que tenen el mateix* ***germen en m*** *si coincideixen en un entorn de m.*

Aquesta definició introdueix una relació d'equivalència entre funcions C^∞ definides en entorns de m si diem que dos funcions són equivalents si, i només si, tenen el mateix germen. Denotarem per **f** el germen d'una funció C^∞ definida en un entorn de m i per **f(m)** el valor a m de qualsevol representant del germen.

Definició 1.12. *Les classes d'equivalència introduïdes en la definició anterior s'anomenen* ***gèrmens*** *i denotem el conjunt de gèrmens com $\widetilde{F}_m$.*

La suma de funcions, la multiplicació per un escalar i la multiplicació de funcions indueixen una estructura de $\mathbb{R}$-àlgebra en $\widetilde{F}_m$. Aleshores si considerem el conjunt de gèrmens que s'anul·len a m i el denotem per F_m, és fàcil veure que és un ideal de $\widetilde{F}_m$. Si identifiquem F_m^k com la potència k-èsima de F_m, tenim que F_m^k és també un ideal de $\widetilde{F}_m$ el qual consisteix en totes les combinacions lineals de multiplicacions de k elements de F_m.

És obvi que $F_m^k \supset F_m^{k+1}$, per tant podem escriure la seqüència descendent d'ideals

$$\widetilde{F}_m \supset F_m \supset F_m^2 \supset F_m^3 \supset \cdots .$$

Definició 1.13. *Un **vector tangent v en un punt m**$\in$ M és un derivació lineal de l'àlgebra $\widetilde{F}_m$. És a dir, per tot **f, g** $\in \widetilde{F}_m$ i $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\text{(a) } v(\boldsymbol{f}+\lambda\boldsymbol{g}) = v(\boldsymbol{f}) + \lambda v(\boldsymbol{g}) \qquad \text{(b) } v(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f}(m)v(\boldsymbol{g}) + \boldsymbol{g}(m)v(\boldsymbol{f}). \tag{1.3}$$

Definició 1.14. *L'**espai tangent a** M **en** m és el conjunt de vectors tangents en m on $m \in M$. El denotem per M_m i li diem espai perquè si definim, per qualsevol $v, w \in M_m$ i $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$(v+w)(\boldsymbol{f}) := v(\boldsymbol{f}) + w(\boldsymbol{f})$$

$$(\lambda v)(\boldsymbol{f}) := \lambda(v(\boldsymbol{f}))$$

aleshores $v + w$ i λv són vectors tangents en m i d'aquesta manera M_m esdevé un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Així com en el càlcul diferencial la derivada direccional d'una funció constant és zero, si **c** és el germen d'una funció de valor constant c en un entorn de m i $v \in M_m$, aleshores

$$v(\mathbf{c}) = cv(\mathbf{1}) = 0$$

ja que

$$v(\mathbf{1}) = v(\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}) = 1(m)v(\mathbf{1}) + 1(m)v(\mathbf{1}) = 2v(\mathbf{1}) \Rightarrow v(\mathbf{1}) = 0$$

on 1 és la funció constant amb valor 1. A continuació veurem el teorema que dóna una de les propietats principals de M_m: la seva dimensió.

Lema 1.15. *M_m és isomorf de forma natural a $(F_m/F_m^2)^*$.*

Demostració. Si $v \in M_m$, aleshores v és lineal en F_m i s'anul·la en F_m^2 per la propietat de derivació. D'altra banda considerant $l \in (F_m/F_m^2)$ si definim $v_l(\mathbf{f}) = l(\{\mathbf{f}\text{-}\mathbf{f(m)}\})$ per $\mathbf{f}\in \tilde{F}_m$ aleshores v_l és clarament lineal i es pot veure ràpidament que és una derivació. Per tant, $v_l \in M_m$. En resum, hem vist que hi ha aplicacions de M_m en $(F_m/F_m^2)^*$ i de $(F_m/F_m^2)^*$ en M_m. A més, es pot comprovar que són inverses una de l'altra. ☐

Teorema 1.16. *Sigui (U, φ) un sistema de coordenades en m d'una varietat contínuament diferenciable M amb funcions de coordenades $x^1, \ldots, x^d$ on $\dim M = d$, aleshores $\{\boldsymbol{x^i}$ **-** $\boldsymbol{x^i(m)} : i = 1, \ldots, d\}$ és una base de F_m/F_m^2.*

Demostració. La demostració d'aquest teorema es basa en el següent lema de càlcul:

Lema 1.17. *Sigui g una funció de classe C^k $(k \geq 2)$ en un conjunt obert i convex U entorn un punt p de $\mathbb{R}^d$, aleshores per cada $q \in U$,*

$$g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{\partial g}{\partial r^i}\right|_p (r^i(q) - r^i(p))$$

$$+ \sum_{i,j}(r^i(q) - r^i(p))(r_j(q) - r_j(p)) \int_0^1 (1-t) \left.\frac{\partial^2 g}{\partial r^i \partial r^j}\right|_{(p+t(q-p))} dt.$$

En particular, si $g \in C^\infty$, aleshores l'últim sumand determina un element de F_p^2 perquè la integral, com una funció de q, és de classe C^∞.

Utilitzant aquest teorema, podem escollir un sistema de coordenades (U, φ) adequat (amb $\varphi(U)$ convex) en $m \in M$, tal que si $\mathbf{f} \in F_m$, aleshores apliquem el lema a $f \circ \varphi^{-1}$ i fent la composició del resultat amb φ obtenim

$$f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}\bigg|_{\varphi(m)} (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^i(\mathbf{m})) \bmod F_m^2.$$

Per tant, $\{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^i(\mathbf{m}) : i = 1, \ldots, d\}$ genera F_m/F_m^2. D'altra banda, es pot veure que aquests elements generadors són linealment independents, ja que si

$$\sum_{i=1}^{d} a_i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^i(\mathbf{m})) \in F_m^2$$

fent la composició aquest cop amb φ^{-1}, la igualtat es pot reescriure com

$$\sum_{i=1}^{d} a_i(\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^i(\varphi\ (\mathbf{m}))) \in F_{\varphi(m)}^2$$

i això implica que

$$\frac{\partial}{\partial r^j}\bigg|_{\varphi(m)} (\sum a_i(r_i - r_i(\varphi(m))) = 0$$

per $j = 1, \ldots, d$, per tant tots els a_i han de ser zero. □

Corol·lari 1.18. *dim* $M_m =$ *dim* M.

A la pràctica ens interessa tractar els vectors tangents quan els apliquem a funcions més que a gèrmens. Per aquesta raó definim

$$v(f) = v(\mathbf{f})$$

on $v \in M_m$ i f és una funció diferenciable en un entorn de m. D'aquí es veu que si f i g són dues funcions C^∞ en definides en uns entorns de m aleshores $v(f) = v(g)$ si coincideixen en un entorn de m (tenen el mateix germen). També se satisfan les següents igualtats

$$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad v(f \cdot g) = f(m)v(g) + g(m)v(f),$$

on $f + \lambda g$ i $f \cdot g$ estan definides en la intersecció dels dominis de f i g.

L'objectiu ara és trobar una base de l'espai tangent. Per aquest motiu definim el següent vector tangent.

Definició 1.19. *Sigui* (U, φ) *un sistema de coordenades amb funcions de coordenades* $x^1, \ldots, x^d$, *i sigui* $m \in U$. *Per a cada* $i \in (1, \ldots, d)$, *definim el vector tangent* $(\partial/\partial x^i i)|_m \in M_m$ *com*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\bigg|_m (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}\bigg|_{\varphi(m)} \tag{1.4}$$

per a cada funció f *que és* C^∞ *en un entorn de* m.

El fet que els $(\partial/\partial x^i)|_m$ satisfan (1.3) és immediat per les propietats de la derivada parcial i per la mateixa raó tenim que $(\partial/\partial x^i)|_m(f)$ només depèn del germen de f. Interpretem (1.4) com la derivada direccional de f en m en la direcció de la coordenada x^i.

Proposició 1.20. *$\{(\partial/\partial x^i)|_m : i = 1, \dots, d\}$ és una base de M_m.*

Demostració. El fet que sigui base prové d'observar que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m (x_j - x_j(m)) = \delta_{ij},$$

és a dir, és la base dual de la base de F_m/F_m^2. □

Corol·lari 1.21. *Si $v \in M_m$, aleshores*

$$v = \sum_{i=1}^{d} v(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m \tag{1.5}$$

Corol·lari 1.22. *Si (U, φ) i (V, ψ) són dos sistemes de coordenades en m ($U \cap V \neq \emptyset$) amb funcions de coordenades $x^1, \dots, x^d$ i $y^1, \dots, y^d$ respectivament, tenim*

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_m = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_m \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_m . \tag{1.6}$$

D'aquest últim resultat és important destacar que $(\partial/\partial x^i)|_m$ depèn de φ i no només de x^i. Això té conseqüències rellevants com, per exemple, si x^1 és igual a y^1, això no implica que $\partial/\partial x^1$ sigui igual a $\partial/\partial y^1$, ja que

$$\left.\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\right|_m = \left.\frac{\partial(x^i \circ \varphi^{-1})}{\partial r^1}\right|_{\varphi(m)}$$

no té per què ser zero per $i = 2, \dots, d$, això depèn de φ.

Definició 1.23. *Sigui $\psi : M \to N$ una aplicació C^∞, i $m \in M$. El **diferencial de ψ en m** és l'aplicació lineal*

$$d\psi : M_m \to N_{\psi(m)} \tag{1.7}$$

definida com

$$d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi) \tag{1.8}$$

on $v \in M_m$ i g és una funció C^∞ en un entorn de $\psi(m)$.

*L'**aplicació dual de ψ**, $\delta\psi : N^*_{\psi(m)} \to M^*_m$, es defineix de la forma habitual*

$$\delta\psi(w)(v) = w(d\psi(v)) \tag{1.9}$$

on $w \in N^*_{\psi(m)}$ i $v \in M_m$.

Si es vol ser precís, s'hauria d'escriure $d\psi|M_m$ o, simplement, $d\psi_m$, però per simplificar la notació no es posarà quan no hi hagi possibilitat de confusió. És fàcil comprovar que $d\psi$ està ben definida i és lineal.

Definició 1.24. *L'aplicació ψ es diu que és* ***no singular en m*** *si $d\psi_m$ és no singular, és a dir, si $\mathrm{Ker}\, d\psi_m = \vec{0}$.*

Les següents relacions es poden deduir fàcilment amb les definicions i resultats anteriors respecte al diferencial d'una aplicació C^∞ $\psi : M \to N$ on dim $M = d$:

(a) Sigui $(U, x^1, \ldots, x^d)$ i $(V, y^1, \ldots, y^d)$ dos sistemes de coordenades en m i $\psi(m)$ respectivament. Aleshores

$$d\psi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_m\right) \sum_{i=1}^{l} \left.\frac{\partial(y^i \circ \psi)}{\partial x^j}\right|_m \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\psi(m)}.$$

En el cas particular d'una funció C^∞ $f : M \to \mathbb{R}$, si $v \in M_m$ i $f(m) = r_0$, aleshores sigui $(\mathbb{R}, r)$ el sistema de coordenades canònic de $\mathbb{R}$ tenim

$$df(v) = v(f) \left.\frac{d}{dr}\right|_{r_0}.$$

En aquest cas, normalment prenem df per referir-nos a l'element de M_m^* definit per $df(v) = v(f)$. És a dir, identifiquem df amb $\delta f(w)$ on w és la base de l'espai 1-dimensional $\mathbb{R}_{r_0}^*$ dual a $(d/dr)|_{r_0}$. Per context quedarà clar quina de les dues definicions s'està fent servir.

(b) Sigui $(U, x^1, \ldots, x^d)$ un sistema de coordenades en M i $m \in U$, aleshores $\{dx^i|_m\}$ és una base de M_m^* dual a $\{\partial/\partial x^i|_m\}$ ja que $dx^i|_m(\partial/\partial x^j|_m) = \partial x^i/\partial x^j|_m = \delta_{ij}$. En particular, si $f : M \to \mathbb{R}$ és una funció C^∞, tenim la següent igualtat

$$df_m = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_m dx^i|_m.$$

(c) **Regla de la cadena:** Sigui $\varphi : N \to X$ una altra aplicació C^∞ aleshores

$$d(\varphi \circ \psi)_m = d\varphi_{\psi(m)} \circ d\psi_m,$$

o simplement $d(\varphi \circ \psi) = d\varphi \circ d\psi$.

(d) Si $f : N \to \mathbb{R}$ és una funció C^∞, aleshores $\delta\psi(df_{\psi(m)}) = d(f \circ \psi)_m$.

La matriu $\{\partial(y^i \circ \psi)/\partial x^j\}$ s'anomena **jacobià** de l'aplicació ψ. En el cas que M i N siguin, per exemple, els espais euclidians R^{d_1} i $\mathbb{R}^{d_2}$ aleshores, com en l'apartat (a), considerem sempre el sistema de coordenades canòniques $r^1, \ldots, r^{d_i}$ amb $i = 1, 2$ respectivament. En aquest cas, el mapa de coordenades és la identitat i $(\partial/\partial r^i)$ no és més que la derivada parcial ordinària. El jacobià, en aquest cas, es pren sempre respecte a aquestes coordenades canòniques.

Un cop trobades les bases de l'espai tangent M_m i el cotangent M_m^* en qualsevol punt $m \in M$ veurem ara com la col·lecció de vectors tangents presenta de forma natural una estructura de varietat diferenciable, a la qual anomenarem **fibrat tangent**. De manera semblant obtindrem l'element dual d'aquesta col·lecció, anomenat **fibrat cotangent**.

Definició 1.25. *Sigui M una varietat contínuament diferenciable amb estructura diferencial $\mathscr{F}$. Definim*

$$T(M) = \bigcup_{m\in M} M_m, \qquad T^*(M) = \bigcup_{m\in M} M_m^*. \tag{1.10}$$

D'aquests unions $T(M)$ i $T^*(M)$ tenim les següents projeccions naturals

$$\pi : T(M) \to M, \qquad v \mapsto \pi(v) = m \text{ si } v \in M_m,$$

$$\pi^* : T^*(M) \to M, \qquad w \mapsto \pi^*(w) = m \text{ si } w \in M_m^*.$$

Proposició 1.26. *Sigui $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ amb funcions de coordenades $x^1, \ldots, x^d$. Donats π i π^* com en la definició anterior, definim*

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2d}, \qquad v \mapsto \widetilde{\varphi}(v) = \Big(x^1(\pi(v)), \ldots, x^d(\pi(v)), dx^1(v), \ldots, dx^d(v)\Big)$$

$$\widetilde{\varphi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2d}, \qquad v \mapsto \widetilde{\varphi}(w) = \Big(x^1(\pi^*(w)), \ldots, x^d(\pi^*(w)), w(\frac{\partial}{\partial x^1}), \ldots, w(\frac{\partial}{\partial x^d})\Big)$$

per a tot $v \in \pi^{-1}(U)$ i $w \in (\pi^*)^{-1}(U)$. Aleshores

(a) *La col·lecció $\{\widetilde{\varphi}^{-1}(W) : W$ obert de $\mathbb{R}^{2d}, (U, \varphi) \in \mathscr{F}\}$ és una base d'una topologia en $T(M)$ que fa que $T(M)$ sigui un espai localment euclidià, $2d$-dimensional i segon numerable.*

Cas anàleg per $T^*(M)$ i $\{(\widetilde{\varphi}^*)^{-1}(W) : W$ obert de $\mathbb{R}^{2d}, (U, \varphi) \in \mathscr{F}\}$.

(b) *Sigui $\tilde{\mathscr{F}}$ la col·lecció, maximal respecte la definició 1.3(b), la qual conté $\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathscr{F}\}$. Aleshores $\tilde{\mathscr{F}}$ és una estructura diferenciable en $T(M)$.*

Cas anàleg per $T^*(M)$ i $\mathscr{F}^*$ la col·lecció maximal que conté $\{((\pi^*)^{-1}(U), \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathscr{F}\}$

Definició 1.27. *$T(M)$ i $T^*(M)$ amb les estructures diferenciables presentades en la proposició anterior s'anomenen **fibrat tangent** i **fibrat cotangent** respectivament.*

1.3 Camps vectorials

Una noció molt important en el càlcul diferencial és la dels camps vectorials, els quals associen un vector a cada punt de l'espai euclidià considerat. Aquestes funcions tenen un gran interès a la física, ja que ens ajuden a representar, per exemple, velocitats o forces. Per tant, el que buscarem ara és fer l'analogia d'aquests camps vectorials en varietats diferenciables.

En primer lloc, definirem un camp vectorial al llarg d'una corba per després definir-lo en un subespai obert U de la varietat diferenciable M. És per això que primer cal definir apropiadament el concepte de corba en una varietat diferenciable.

Definició 1.28. *Una **corba** C^∞ és una aplicació $\sigma : (a, b) \to M$ C^∞ amb $(a, b) \in \mathbb{R}$. A més, si $t \in (a, b)$, llavors*

$$\dot{\sigma}(t) := d\sigma\left(\frac{d}{dr}\bigg|_t\right) \in M_{\sigma(t)}$$

*és el **vector tangent a la corba σ a t**.*

Definició 1.29. *Una aplicació $\sigma : [a,b] \to M$ és una **corba** C^∞ **en** M si σ es pot estendre a una aplicació C^∞ de $(a-\epsilon, b+\epsilon)$ en M per $\epsilon > 0$.*

Definició 1.30. *Un **camp vectorial X al llarg d'una corba** $\sigma : [a,b] \to M$ és una aplicació $X : [a,b] \to T(M)$ que aixeca σ; això significa que $\pi \circ X = \sigma$, on π és la projecció descrita en la secció anterior. El camp vectorial X és C^∞ si $X : [a,b] \to T(M)$ és C^∞.*

De forma semblant podem definir un camp vectorial en una regió de M.

Definició 1.31. *Un **camp vectorial** X **en un conjunt obert** U **de** M és un aixecament de U en $T(M)$, és a dir, un aixecament $X : U \to T(M)$ tal que $\pi \circ X = id|_U$. El fet que X sigui C^∞ significa que $X \in C^\infty(U, T(M))$.*

Si considerem $(X+Y)(m) = X(m) + Y(m)$ i $(\lambda X)(m) = \lambda X(m)$ (on X, Y són camps vectorials C^∞) aleshores el conjunt de camps vectorials C^∞ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial i el denotem per $\mathfrak{X}(M)$. A més, també és un mòdul sobre l'anell $C^\infty(U)$ perquè $(f \cdot X)(m) = f(m) \cdot X(m)$ on $f(m) \in \mathbb{R}$ i $X(m) \in M_m$ i ja s'ha vist que M_m és un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Per simplicitat sovint utilitzarem X_m per referir-nos a $X(m)$. També és important observar que si $f \in C^\infty(U)$, aleshores $X(f)$ és una funció en U amb valor $X_m(f)$ a m.

Proposició 1.32. *Sigui X un camp vectorial en M, els següents apartats són equivalents:*

(a) *X és C^∞.*

(b) *Si $(U, x^1, \ldots, x^d)$ és un sistema de coordenades en M i $\{a_i\}$ una col·lecció de funcions en U definides per*

$$X|_U = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

aleshores $a_i \in C^\infty(U)$.

(c) *Sempre que V és un obert de M i $f \in C^\infty(V)$, aleshores $X(f) \in C^\infty(V)$.*

Demostració. (a) $\Rightarrow$ (b) Si X és C^∞, vol dir que $X|_U$ és C^∞, aleshores

$$dx^i \circ X|_U = a_i$$

on dx^i és el mapa de coordenades en $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ descrit en la Definició (1.25), per tant $dx^i \circ X|_U$ és C^∞ i això implica que a_i també ho ha de ser.

(b) $\Rightarrow$ (c) És suficient comprovar-ho per un sistema de coordenades $(U, x^1, \ldots, x^d)$ arbitrari tal que $U \subset V$. Aplicant (b) tenim

$$X(f)|_U = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

la part dreta de la igualtat és clarament C^∞.

(c) $\Rightarrow$ (a) És suficient veure que $X|_U$ és C^∞ on $(U, x^1, \ldots, x^d)$ és un sistema de coordenades arbitrari en M. Per tant, només cal veure que $X|_U$ és C^∞ per les funcions canòniques de coordenades donades en la Definició (1.25), és a dir, que $x^i \circ \pi \circ X|_U = x^i$ i $dx^i \circ X|_U = X(x^i)$ són C^∞ en U. La primera clarament ho és i la segona ho és gràcies a (c). $\square$

Un camp vectorial molt útil construït a partir de dos camps vectorials és el **claudàtor de Lie**.

Definició 1.33. *Si X i Y són camps vectorials C^∞ en M, definim el camp vectorial $[X,Y]$ anomenat* ***claudàtor de Lie*** *de X i Y com*

$$[X,Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf). \tag{1.11}$$

Es pot comprovar que $[X,Y]$ és un camp vectorial C^∞.

1.4 Tensors i formes diferencials

A partir del $\mathbb{R}$-espai vectorial que és l'espai tangent podem, fent unes assignacions adequades entre M_m i els punts de M, obtenir un bon nombre d'espais vectorials i àlgebres associats de forma natural a l'espai tangent. D'aquestes assignacions apareixeran els tensors i les formes diferencials. Aquests elements provenen de l'aplicació de l'àlgebra multilineal en varietats diferenciables i tenen una importància cabdal en la física d'avui dia, ja que permeten fer una formulació de la física independent de les coordenades escollides. En el nostre cas, seran claus també per aquesta reformulació de les equacions de Maxwell.

Per arribar a la definició dels tensors i les formes diferencials començarem per desenvolupar els conceptes bàsics d'àlgebra multilineal per, a continuació, traslladar-ho a les varietats diferenciables.

1.4.1 Àlgebra multilineal

Definició 1.34. *Sigui $F(V,W)$ l'espai vectorial lliure sobre $\mathbb{R}$ generat pels punts de $V \times W$ i sigui $R(V,W)$ el subespai de $F(V,W)$ generat pels conjunts d'elements de $F(V,W)$ amb la següent forma:*

$$\begin{gathered}(v^1+v^2,w)-(v^1,w)-(v^2,w)\\ (v,w^1+w^2)-(v,w^1)-(v,w^2)\\ (\lambda v,w)-\lambda(v,w)\\ (v,\lambda w)-\lambda(v,w)\end{gathered} \tag{1.12}$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$, $v,v^1,v^2 \in V$ i $w,w^1,w^2 \in W$. L'espai quocient $F(V,W)/R(V,W)$ s'anomena ***producte tensorial de V i W*** *i el denotem com $V \otimes W$. Denotem la classe lateral $(v,w) + R(V,W)$ com $v \otimes w$.*

A partir de (1.12) tenim les següents identitats en $V \otimes W$:

$$(v^1+v^2)\otimes w = v^1 \otimes w + v^2 \otimes w$$

$$v \otimes (w^1+w^2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$

$$a(v \otimes w) = av \otimes w = v \otimes aw$$

En altres paraules, apareix de forma natural una bilinealitat en aquests elements $v \otimes w$.

El producte tensorial, a més, té el que s'anomena **propietat universal** (prové de la teoria de categories), és a dir, donada l'aplicació bilineal $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ tal que $\varphi(v, w) = v \otimes w$, aleshores sempre que U sigui un espai vectorial i $\psi : V \times W \to U$ una aplicació bilineal, existeix una única aplicació lineal $\tilde{\psi} : V \otimes W \to U$ tal que el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[dr, dashed, "\tilde{\psi}"] & \\ V \times W \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"] & U \end{tikzcd}$$

És a dir, $\tilde{\psi} \circ \varphi = \psi$. Si $V \otimes W$ i φ compleixen aquestes condicions descrites, aleshores diem que resolen el **problema universal per aplicacions bilineals**. A partir d'aquesta definició, si X és un espai vectorial i $\tilde{\varphi} : V \times W \to X$ és una aplicació bilineal que resol el problema universal, aleshores existeix un isomorfisme $\alpha : V \otimes W \to X$ tal que $\alpha \circ \varphi = \tilde{\varphi}$. Aquesta propietat es veu si mirem els dos diagrames següents (els quals commuten per les respectives propietats universals):

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\ V \times W \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\tilde{\alpha}"] & \\ V \times W \arrow[u, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"] & V \otimes W \end{tikzcd}$$

on α i α' són úniques.

Proposició 1.35. *El producte tensorial té les següents propietats:*

(a) *$V \otimes W$ és canònicament isomorf a $W \otimes V$.*

(b) *$V \otimes (W \otimes U)$ és canònicament isomorf a $(V \otimes W) \otimes U$.*

(c) *$V^* \otimes W$ és isomorf a $Hom(V, W)$ i, aleshores, $dimV \otimes W = (dimV)(dimW)$.*

(d) *Siguin $\{e^i : i = 1, \dots, dimV\}$ i $\{f^j : j = 1, \dots, dimW\}$ bases de V i W respectivament, aleshores $\{e^i \otimes f^j : i = 1, \dots, dimV \text{ and } j = 1, \dots, dimW\}$ és una base de $V \otimes W$.*

Demostració. Les dues primeres propietats es poden demostrar utilitzant la propietat universal del producte tensorial.
(c) Definim $\psi' : V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ com $\psi'(v^*, w)(v') = v^*(v')w$ on $v^* \in V^*, w \in W, v' \in V$. Com ψ' és bilineal, aleshores podem definir $\psi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ i estem segurs que estarà ben definida. Un element de $V^* \otimes W$ es pot escriure com $\sum_{i,j} a_{ij} v_i^* \otimes w^j$ on $a_{ij} \in R$, $\{v_i^* : i = 1, \dots, c = \dim V\}$ és una base de V^* i $\{w^j : j = 1, \dots, d = \dim W\}$ és una base de W, aleshores sigui $v' \in V$ qualsevol, suposem que

$$\psi(\sum_{i,j} a_{ij} v_i^* \otimes w^j)(v') = \sum_{i,j} a_{ij} v_i^*(v') w^j = 0.$$

En particular, podem escollir $v' = v^i$ (on v_i^* és l'element dual de v^i) per obtenir $\sum_{i,j} a_{ij} w^j = 0$ i com $w^1, \dots, w^d$ són linealment independents tenim que $a_{ij} = 0 \, \forall j$. Si repetim el procés per a cada i arribem a que ha de ser zero $\forall i$ també. Per tant, ψ és injectiva.

Veurem ara que també és exhaustiva. Sigui $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ aleshores per a cada element de la base de V, v^i, tenim que $\varphi(v^i) = \sum_j b_{ij} w^j$ on $b_{ij} \in \mathbb{R}$, aleshores veiem que aquest homeomorfisme té la mateixa imatge per v^i que $\psi(\sum_{ij} b_{ij}(v^i)^* \otimes w^j)$ per qualsevol v^i de la base de V. Per tant, $\psi(\sum_{ij} b_{ij}(v^i)^* \otimes w^j)$ i φ són el mateix homeomorfisme. Això implica que ψ és un isomorfisme i

$$\dim V^* \otimes W = \dim \mathrm{Hom}(V,W) = (\dim V)(\dim W)$$

equivalentment

$$\dim V \otimes W = \dim V^{**} \otimes W = \dim \mathrm{Hom}(V^*,W) = (\dim V^*)(\dim W) = (\dim V)(\dim W)$$

on hem utilitzat el resultat d'àlgebra lineal $V^{**} \cong V$.
(d) Clarament $\{e_i \otimes f_j : i = 1,\dots,c \text{ i } j = 1,\dots,d\}$ genera $V \otimes W$ on c i d són les respectives dimensions dels espais. A més, són linealment independents i per tant utilitzant el resultat anterior veiem que aquest conjunt té els mateixos elements que la dimensió de l'espai, per tant ha de ser una base. $\square$

Definició 1.36. *L'**espai tensorial** $V_{r,s}$ **de tipus (r,s)** associat amb V és l'espai vectorial*

$$V \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes V \otimes V^* \otimes \overset{s}{\cdots} \otimes V^*.$$

Definició 1.37. *L'**àlgebra tensorial de** V és la suma directa $T(V) = \sum V_{r,s}$ amb $V_{0,0} = \mathbb{R}$. Donats $u \in V_{r_1,s_1}$ i $w \in V_{r_2,s_2}$, $u \otimes w$ està definit com*

$$u \otimes w = (u_1 \otimes \cdots \otimes u_{r_1} \otimes u_1^* \otimes \cdots \otimes u_{s_1}^*) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r_2} \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_{s_2}^*) =$$

$$= u_1 \otimes \cdots \otimes u_{r_1} \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r_2} \otimes u_1^* \otimes \cdots \otimes u_{s_1}^* \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_{s_2}^*.$$

*$T(V)$ és, respecte a la multiplicació $\otimes$, una $\mathbb{R}$-àlgebra no commutativa, associativa i graduada ($V_{r_1,s_1} \otimes V_{r_2,s_2} \subset V_{r_1+r_2,s_1+s_2}$). Els elements de l'àlgebra tensorial s'anomenen **tensors**, els quals són combinacions lineals finites sobre $\mathbb{R}$ d'elements de $V_{r,s}$ amb diversos (r,s). Si un tensor està en un espai tensorial concret $V_{r,s}$ s'anomena **tensor homogeni de grau (r,s)**. Un tensor homogeni (per exemple de grau (r,s)) és **descomponible** si es pot escriure com $v_1 \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*$, on $v_i \in V$ i $v_j^* \in V^*$.*

Definició 1.38. *L'**àlgebra exterior** $\Lambda(V)$ **de** V és l'àlgebra graduada $C(V)/I(V)$, on $C(V)$ és la subàlgebra $\sum_{k=0}^{\infty} V_{k,0}$ de $T(V)$ i $I(V)$ és l'ideal per l'esquerra i per la dreta de $C(V)$ generat pel conjunt d'elements de la forma $v \otimes v$ amb $v \in V$.*

Observació 1.39. *Si definim $I_k(V) = I(V) \cap V_{k,0}$, això implica, per la construcció pròpia de $C(V)$, que $I(V) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(V)$. Si també definim $\Lambda_k(V) = V_{k,0}/I_k(V)\,(k \geq 2)$, $\Lambda_0(V) = \mathbb{R}$, $\Lambda_1(V) = V$, aleshores $\Lambda(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(V)$.*

Definició 1.40. *La multiplicació de l'àlgebra exterior s'anomena **producte exterior** i es denota $\wedge$. En altres paraules, la classe d'equivalència que conté $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ és $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.*

Proposició 1.41. *L'àlgebra exterior compleix les següents propietats:*

(a) *Si* $u \in \Lambda_k(V)$ *i* $v \in \Lambda_l(V)$, *aleshores* $u \wedge v = (-1)^{kl} v \wedge u$.

(b) *Si* $e^1, \ldots, e^d$ *és una base de* V, *aleshores* $\{e^\Phi\}$ *és una base de* $\Lambda(V)$, *on* Φ *correspon a tots els subconjunts* $\{i_1, \ldots, i_r\}$ *de* $\{1, \ldots, d\}$, *incloent el conjunt buit, tals que* $i_1 < \cdots < i_r$. *A més* $\{e^\Phi\}$ *està definit de tal manera que quan* Φ=$\{i_1, \ldots, i_r\}$, *aleshores* $e^\Phi = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}$ *i* $e^\Phi = 1$ *quan* $\Phi = \emptyset$.

Demostració. (a) El resultat es pot demostrar fàcilment a partir de la següent propietat: si $u, v \in V$ aleshores, per l'associativitat del producte exterior,

$$0 = (u + v) \wedge (u + v) = u \wedge u + u \wedge v + v \wedge u + w \wedge w \Rightarrow u \wedge v = -v \wedge u.$$

(b) Utilitzant la propietat anterior i el vist en la Proposició (1.35) es dedueix fàcilment que $\{e_\Phi\}$ és una base de $\Lambda(V)$. $\square$

Definició 1.42. *Una aplicació multilineal* $h : V \times \overset{r}{\cdots} \times V \to W$ *es diu que és* ***alternada*** *si*

$$h(v_{pi(1)}, \ldots, v_{pi(r)}) = (sgn\pi) h(v_1, \ldots, v_r)$$

on $v_1, \ldots, v_r \in V$ *i* $\pi \in S_r$ *(*S_r *és el grup de permutacions de r elements). L'espai vectorial de totes les funcions multilineals (*$h : V \times \overset{r}{\cdots} \times V \to \mathbb{R}$*) alternades el denotarem* $A_r(V)$ *i fixarem* $A_0(V) = \mathbb{R}$ *per conveniència.*

De la mateixa manera que havíem vist com el producte tensorial tenia la **propietat universal**, el producte exterior també té la **propietat universal**, però en aquest cas l'aplicació $\varphi(v_1, \ldots, v_k) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ és una aplicació multilineal alternada. Aleshores es pot veure, utilitzant la propietat universal vista anteriorment, que per a cada aplicació multilineal $h : V \times \overset{k}{\cdots} \times V \to W$, on W és un espai vectorial, aleshores existeix una única aplicació lineal $\tilde{h} : \Lambda_k(V) \to W$ tal que $\tilde{h} \circ \varphi = h$. És a dir, el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k(V) \arrow[dr, dashed, "\tilde{h}"] & \\ V \times \overset{k}{\cdots} \times V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

De forma anàloga al vist anteriorment també diem que, en aquest cas, $\Lambda_k(V)$ i φ resolen el **problema universal per aplicacions alternades multilineals** i també es pot veure que si una altra parella d'un espai vectorial X i una aplicació multilineal alternada $\tilde{\varphi} : V \times \overset{k}{\cdots} \times V \to X$ resolen el problema universal per aplicacions multilineals alternades amb domini $V \times \overset{k}{\cdots} \times V$, aleshores hi ha un isomorfisme $\alpha : \Lambda_k(V) \to C$ tal que $\alpha \circ \varphi = \tilde{\varphi}$.

Un cas de particular interès és quan $W = \mathbb{R}$, en aquest cas tenim el següent diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k(V) \arrow[dr, dashed, "\tilde{h}"] & \\ V \times \overset{k}{\cdots} \times V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

el qual commuta. Clarament que $\tilde{h} \in \Lambda_k(V)^*$, considerant això juntament amb el diagrama es pot establir de forma natural un isomorfisme $\Lambda_k(V)^* \cong A_k(V)$.

Definició 1.43. *Siguin V i W dos $\mathbb{R}$-espais vectorials de dimensió finita. Un* ***aparellament de** V **amb** W* *és una aplicació bilineal $(\ ,\ ) : V \times W \to \mathbb{R}$. Un aparellament es diu que és* ***no singular*** *si sempre que $w \in W$ és diferent de zero, existeix un $v \in V$ tal que $(v, w) \neq 0$, i sempre que $v \in V$ és diferent de zero aleshores existeix un $w \in W$ tal que $(v, w) \neq 0$.*

Observació 1.44. *Si V i W són dos espais vectorials tals que hi ha un aparellament $(\ ,\ )$ no singular, podem definir $\varphi : V \to W^*$ com $\varphi(v)(w) = (v, w)$ amb $v \in V$ i $w \in W$. φ és clarament lineal perquè l'aparellament és bilineal, a més és injectiva, ja que si*

$$\varphi(v_1)(w) = \varphi(v_2)(w)$$

per qualsevol $w \in W$ i $v_1, v_2 \in V$. Això és equivalent al fet que $(v_1, w) = (v_2, w)$ i, utilitzant de nou la bilinealitat de l'aparellament $(v_1 - v_2, w) = 0$. Com això és per qualsevol w i l'aparellament és no singular, aleshores $v_1 = v_2$. De forma similar podem veure que hi ha una aplicació injectiva de W cap a V^*. Això implica que $dimV = dimW$ i, per tant, φ és un isomorfisme. A partir d'aquí, és anàleg veure l'isomorfisme entre W i V^*.

A partir d'aquesta observació, podem veure la utilitat de definir aparellaments entre espais com àlgebres exteriors o espais tensorials. A continuació, veurem un exemple relacionat amb l'àlgebra exterior.

Definició 1.45. *Un* ***aparellament no singular de** $\Lambda_k(V^*)$ **amb** $\Lambda_k(V)$* *és una aplicació bilineal $(\ ,\ ) : \Lambda_k(V^*) \times \Lambda_k(V) \to \mathbb{R}$ tal que aplicat en elements descomponibles $v^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^* \in \Lambda_k(V^*)$ i $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \in \Lambda_k(V)$ és igual a*

$$(v^*, u) = det(v_i^*(u_j)).$$

Observació 1.46. *El punt clau d'aquest aparellament és que està ben definit, és a dir, que no depèn de l'element de la classe d'equivalència escollit. Això es satisfà clarament, ja que si agafem un element de la classe del 0, de $I_k(V)$ o $I_k(V^*)$ respectivament, aleshores tindrà iguals dos v_{i_1}, v_{i_2} o u_{i_1}, u_{i_2} respectivament, aleshores dues files, o columnes, seran iguals i per tant el determinant serà zero.*

Utilitzant el vist a l'observació 1.44 tenim $\Lambda_k(V^*) \cong \Lambda_k(V)^*$. Aleshores, havíem vist que $\Lambda_k(V)^* \cong A_k(V)$, per tant $\Lambda(V^*) \cong A_k(V)$. Utilitzant aquest fet i observant que l'espai dual d'una suma finita és canònicament isomorf a la suma directa d'espais duals

$$\Lambda(V^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(V^*) = \sum_{k=0}^{d} \Lambda_k(V^*) \cong \sum_{k=0}^{d} \Lambda_k(V)^* \cong \Lambda(V)^*$$

on $d = \dim V$. A més utilitzant el vist anteriorment tenim $\Lambda(V)^* \cong A(V) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(V)$.

Observació 1.47. *Si $\{e_1, \ldots, e_d\}$ és una base de V amb base dual $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\}$ de V^*, aleshores utilitzant un dels isomorfismes que acabem de veure tenim que $\{\gamma_\Phi\}$, on Φ està definida com en la Proposició 1.41 (b), és base de $\Lambda(V^*)$.*

Definició 1.48. *Un endomorfisme l de $\Lambda(V)$ (o, en general, de qualsevol àlgebra graduada) és*

(a) *una **derivació** si $l(u \wedge v) = l(u) \wedge v + u \wedge l(v)$ on $u, v \in \Lambda(V)$.*

(b) *una **antiderivació** si $l(u \wedge v) = l(u) \wedge v + (-1)^p u \wedge l(v)$ on $u \in \Lambda_p(V)$ i $v \in \Lambda(V)$.*

(c) *de **grau k** si $l : \Lambda_j(V) \to \Lambda_{j+k}(V)$ per a tot j (s'entén que $\Lambda_i(V) = \{0\}$ si $i < 0$).*

Observació 1.49. *És fàcil veure (mitjançant inducció per exemple) que $l \in End\,\Lambda(V)$ és una antiderivació si, i només si, en elements descomponibles tenim*

$$l(v_1 \wedge \cdots \wedge v_j) = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i+1} v_1 \wedge \cdots \wedge l(v_i) \wedge \cdots \wedge v_j.$$

Definició 1.50. *La **multiplicació interior per** $u \in \Lambda(V)$**, i(u)**, és un endomorfisme de $\Lambda(V^*)$ definit com*

$$(i(u)v^*, w) = (v^*, u \wedge w) \tag{1.13}$$

on $v^* \in \Lambda(V^*)$, $w \in \Lambda(V)$. Si $u \in V$ aleshores $i(u) : \Lambda_k(V^*) \to \Lambda_{k-1}(V^*)$ si $w \in \Lambda_{k-1}(V)$ aleshores $w \wedge u \in \Lambda_k(V)$ i com actua $i(u)$ es veu per com està definit l'aparellament. Si, a més, $v^* \in V$ aleshores

$$i(u)v^* = (i(u)v^*, 1) = (v^*, u) = v^*(u) \in \mathbb{R}.$$

Proposició 1.51. *Si $u \in V$, aleshores $i(u)$ és una antiderivació de grau -1.*

1.4.2 Camps tensorials i formes diferencials

Un cop s'ha vist tota aquesta introducció d'àlgebra multilineal, ara l'aplicarem a les varietats diferenciables. En particular, aquests espais vectorials no seran uns altres que l'espai tangent i cotangent de la varietat.

Definició 1.52. *Definim*

(a) $T_{r,s}(M) = \bigcup_{m \in M} (M_m)_{r,s}$ *com el **fibrat tensorial de tipus (r,s) de** M.*

(b) $\Lambda_k^*(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda_k(M_m^*)$ *com el **k fibrat exterior de** M.*

(c) $\Lambda^*(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda(M_m^*)$ *com el **fibrat d'àlgebres exteriors de** M.*

Observació 1.53. *De manera semblant a com s'ha vist pels camps vectorials es pot veure que $T_{r,s}(M), \Lambda_k^*(M)$ i $\Lambda^*(M)$ tenen estructures naturals de varietats diferencials tals que les projeccions dels seus elements a M són aplicacions C^∞. Això es fa utilitzant les bases $\{\partial/\partial y^i\}$ de M_m, $\{dy^i\}$de M_m^* i $\{dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} : i_1 \leq \cdots \leq i_k\}$ de $\Lambda_k(M_m^*)$ per un sistema de coordenades $(U, y^1, \ldots, y^d)$ per definir les imatges inverses de U en $T_{r,s}(M), \Lambda_k^*(M)$ i $\Lambda^*(M)$.*

Definició 1.54. *Una aplicació C^∞ de M en*

(a) *$T_{r,s}(M)$ s'anomena **camp tensorial** (C^∞) **de tipus (r,s) en** M.*

(b) $\Lambda_k^*(M)$ *s'anomena* ***k-forma diferencial en*** *M.*

(c) $\Lambda^*(M)$ *s'anomena* ***forma diferencial en*** *M.*

Observació 1.55. *Altre cop, de forma anàloga a com s'ha fet per camps vectorials, es pot veure l'equivalència de les definicions amb com s'expressen aquestes aplicacions per qualsevol sistema de coordenades. Per tant si* $(U, y^1, \ldots, y^d)$ *és un sistema de coordenades qualsevol de M*

(a) *Un aixecament* $\alpha : M \to T_{r,s}(M)$ *és un camp tensorial* C^∞ *de tipus (r,s) si, i només si per a cada sistema de coordenades*

$$\alpha|_U = \sum a^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dy^{j_1} \otimes \cdots \otimes dy^{j_s} \tag{1.14}$$

on $a^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \in C^\infty(U)$.

(b) *Un aixecament* $\beta : M \to \Lambda_k^*(M)$ *és una k-forma diferencial si, i només si, per a cada sistema de coordenades*

$$\beta|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} b_{i_1,\ldots,i_k} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \tag{1.15}$$

on $b_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U)$.

Definició 1.56. *El conjunt de totes les k-formes diferencials el denotem* $E^k(M)$ *i el de totes les formes diferencials com* $E^*(M)$.

Observació 1.57. *De la definició del k fibrat exterior tenim que si* $k = 0$, *aleshores*

$$\Lambda_0^*(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda_0(M_m^*) \cong \bigcup_{m \in M} \mathbb{R} \cong M \times \mathbb{R}.$$

Per tant els elements de $E^0(M)$ *són aixecaments* C^∞ *de M en* $M \times \mathbb{R}$, *és a dir, són gràfiques de funcions* C^∞ *en M,* $(m, b(m))$. *Per tant, podem identificar* $E^0(M)$ *amb* $C^\infty(M)$.

Observació 1.58. *Podem traslladar l'estructura de* $\mathbb{R}$*-àlgebra graduada de l'àlgebra exterior cap a* $E^*(M)$ *de la manera següent, siguin* $w, \varphi \in E^*(M)$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$

1. *Suma:* $(w + \varphi)$ *és la forma diferencial tal que* $(w + \varphi)(m) = w(m) + \varphi(m)$ *per qualsevol* $m \in M$.

2. *Multiplicació per escalars:* cw *és la forma diferencial tal que* $(cw)(m) = cw(m)$ *per qualsevol* $m \in M$.

3. *Producte:* $w \wedge \varphi$ *és la forma diferencial tal que* $(w \wedge \varphi)(m) = w(m) \wedge \varphi(m)$ *per qualsevol* $m \in M$.

Gràcies a l'estructura presentada hem vist que $E^*(M)$ *és un* $\mathbb{R}$*-àlgebra graduada amb el producte exterior. A més en el cas que f sigui una 0-forma aleshores expressem* $f \wedge w$ *simplement com* fw, *aquesta diferenciació és per remarcar que* $E^*(M)$ *és un mòdul sobre l'anell* $C^\infty(M)$.

Una de les propietats més interessants que havíem vist de la k-àlgebra exterior era la possibilitat que oferia d'establir un isomorfisme amb $A_k(V)$. A partir d'aquest isomorfisme podem considerar ara una k-forma diferencial $w \in E^k(M)$ que avaluada en $m \in M$ és $w_m \in \Lambda_k(M_m^*)$ i, per tant, via l'isomorfisme explicat en l'observació 1.46 pot ser considerada com una funció multilineal alternada en M_m.

Definició 1.59. *Sigui $\mathfrak{X}(M)$ el $C^\infty(M)$-mòdul de camps vectorials en M i $w \in E^k(M)$, aleshores definim*

$$w : \mathfrak{X}(M) \times \overset{k}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

de tal manera que $w(X_1, \ldots, X_k)$ amb $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ per $i = 1, \ldots, k$ és la funció amb valor a m

$$w(X_1, \ldots, X_k)(m) = w_m(X_1(m), \ldots, X_k(m)).$$

Utilitzant l'isomorfisme vist anteriorment, aquesta $w : \mathfrak{X}(M) \times \overset{k}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ és una aplicació multilineal alternada del mòdul $\mathfrak{X}(M)$ en $C^\infty(M)$, és a dir,

$$w(X_1, \ldots, X_{i-1}, fX + gY, X_{i+1}, \ldots, X_k) = fw(X_1, \ldots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \ldots, X_k)$$

$$+gw(X_1, \ldots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \ldots, X_k).$$

Definició 1.60. *Sigui X un camp vectorial C^∞ en M, i $w \in E^*(M)$, aleshores definim la* ***multiplicació interior de*** *w* ***per*** *X com la forma $i(X)w$ tal que el seu valor a m és la multiplicació interior de w_m per X_m, en altres paraules*

$$(i(X)w)|_m = i(X_m)(w_m).$$

Observació 1.61. *$i(X)w$ és C^∞ i una antiderivació de grau -1. Aquestes propietats es poden comprovar utilitzant la forma que pren w en un sistema de coordenades (U, φ) $w|_U$ i els resultats ja vistos de l'endomorfisme $i(u)$ de $\Lambda(M_m^*)$.*

Definició 1.62. *Sigui $\psi : M \to N$ una aplicació C^∞ i $m \in M$. Aleshores, com ja hem vist , tenim el diferencial $d\psi : M_m \to N_{\psi(m)}$, i la seva trasposta $\delta\psi : N_{\psi(m)}^* \to M_m^*$ i l'homomorfisme d'àlgebres induït $\delta\psi : \Lambda(N_{\psi(m)}^*) \to \Lambda(M_m^*)$ on*

$$\delta\psi(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k) = \delta\psi(dy^1) \wedge \cdots \wedge \delta\psi(dy^k) \qquad i \qquad \delta\psi(1) = 1.$$

Gràcies a aquests resultats podem definir el que s'anomena ***pullback*** *$\delta\psi : E^*(N) \to E^*(M)$ una aplicació C^∞ (prové del fet que l'homomorfisme d'àlgebres induït és lineal i C^∞) definida sobre $w \in E^*(N)$ com*

$$\delta\psi(w)|_m = \delta\psi(w|_{\psi(m)}).$$

1.5 Operador diferencial d

El fet que donada $f \in C^\infty(M)$, el diferencial df és una aplicació C^∞ de $T(M)$ en $\mathbb{R}$ que és lineal en cada espai tangent. És a dir, es pot considerar com $df : M \to \Lambda_1^*(M)$ i s'anomena **derivada exterior**. Aquest fet es pot interpretar com un **operador de derivació exterior d** que aplicat a 0-formes fa que obtinguem 1-formes i aquest punt de vista porta a una extensió en $E^*(M)$. Aquesta extensió serà una de les eines més importants en l'últim capítol.

Definició 1.63. *Sigui $p \in M$ i $E^*(p)$ el conjunt de formes diferencials definides en subconjunts oberts de M tals que p està contingut en aquests subconjunts, i $E^k(p)$ pel conjunt de k-formes. Fixem un sistema de coordenades $(U, x^1, \ldots, x^d)$ amb $p \in U$. Si $w \in E^*(p)$, aleshores*

$$w|_{domini\ de\ w \cap U} = \sum a_\Phi dx^\Phi. \tag{1.16}$$

on Φ està definit com en la Proposició (1.41). Definim dw a p com

$$dw_p = \sum da_\Phi|_p \wedge dx^\Phi|_p \in \Lambda(M_p^*).$$

Lema 1.64. *La definició de dw_p presentada en (1.63) té les següents propietats:*

(a) $w \in E^r(p) \Rightarrow dw_p \in \Lambda_{r+1}(M_p^*)$.

(b) *dw_p depèn només del germen de w a p.*

(c) $d(a_1 w_1 + a_2 w_2)|_p = a_1(dw_1)|_p + a_2(dw_2)|_p$ *on* $a_i \in \mathbb{R}$ *i* $w_i \in E^*(p)$. *El domini de* $a_1 w_1 + a_2 w_2$ *és la intersecció dels dominis de* w_1 *i* w_2.

(d) $d(w_1 \wedge w_2)|_p = dw_1|_p \wedge w_2|_p + (-1)^r w_1|_p \wedge dw_2|_p$ *on* $w_1 \in E^r(p)$ *i* $w_2 \in E^*(p)$.

(e) *Si f és una funció C^∞ en un entorn de p, aleshores $d(df)|_p = 0$.*

Demostració. (a),(b),(c) $w|_{\text{domini de } w \cap U} = \sum a_\Phi dx^\Phi$ on a_Φ és una funció C^∞ en aquest domini i $(U, x^1, \ldots, x^d)$ és un sistema de coordenades tal que $p \in U$. Per tant

$$da_\Phi|_p = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial a_\Phi}{\partial x^i}|_p dx^i|_p.$$

D'aquí es veu ràpidament que (a), (b) i (c) es compleixen.
(d) Utilitzant (b) i (c) només cal que comprovem (d) per $w_1 = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ i $w_2 = g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}$ en un entorn de p. Pel cas $r = s = 0$, la propietat (d) és $d(f \cdot g)|_p = df_p \cdot g(p) + f(p) \cdot dg_p$ i que es compleix per la propietat de derivació de la derivada. Per tant, suposem que $r, s > 0$ i $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_s\} = \emptyset$ ja que si no fos buida aleshores $w_1 \wedge w_2 = 0$ i els dos costats serien zero. En resum tenim

$$w_1 \wedge w_2 = (f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}) \wedge (g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}) = \epsilon f \cdot g dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_{r+s}}$$

on $l_1 < \cdots < l_{r+s}$ i ϵ és el signe de la permutació per tal de tenir els coeficients ordenats. Si calculem $d(w_1 \wedge w_2)|_p$ obtenim

$$d(\epsilon f \cdot g dx^{l_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{l_{r+s}}|_p) = \epsilon(df_p \cdot g(p) + f(p) dg_p) \wedge dx^{l_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{l_{r+s}}|_p) =$$

$$= (df_p \wedge dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}|_p) \wedge (g(p) dx^{j_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}|_p) + (-1)^r (f(p) dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}|_p)$$
$$\wedge (dg_p dx^{j_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{j_s}|_p) = dw_1|_p \wedge w_2|_p + (-1)^r w_1|_p \wedge dw_2|_p.$$

(e) Considerarem el domini donat per la intersecció del domini de f i U. Aleshores

$$d(df)|_p = \sum d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\bigg|_p \wedge dx^i|_p = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\bigg|_p dx^j|_p \wedge dx^i|_p.$$

Com $\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j|_p = \partial^2 f / \partial x^j \partial x^i|_p$ (Schwarz) però $dx^j|_p \wedge dx^i|_p = -dx^i|_p \wedge dx^j|_p$. Això implica que $d(df)|_p = 0$. $\square$

Teorema 1.65. ***(Derivada exterior)*** *L'operador d definit en la definició (1.63) és una antiderivació única $d : E^*(M) \to E^*(M)$ de grau $+1$ tal que*

1. $d^2 = 0$.
2. *Sempre que $f \in C^\infty(M) = E^0(M)$, df és el diferencial de f.*

Demostració. Primer de tot veurem que la definició de d en p és independent de les coordenades escollides. Sigui d' definit en $E^*(p)$ però respecte a unes altres coordenades. w està definit en (domini de w)$\cap U$ com en l'equació (1.16) i com d' ha de satisfer les propietats del lema anterior tenim

$$d'(w)|_p \overset{(b)+(c)}{=} \sum d'(a_\Phi dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r})|_p \overset{d}{=} \sum d'(a_\Phi)|_p \wedge dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}|_p)$$
$$+ \sum (-1)^{k+1} a_\Phi|_p dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge d'(dx^{i_k})|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_r})|_p \overset{(e)}{=}$$
$$\overset{(e)}{=} \sum d(a_\Phi)|_p \wedge dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}|_p = dw_p. \tag{1.17}$$

Un cop vista la independència respecte a les coordenades, sigui $w \in E^*(M)$ definim dw com la forma tal que el seu aixecament de M en $\Lambda^*(M)$ envia p a dw_p. Definit d'aquesta manera tenim que $d^2 = 0$, ja que si $w \in E^*(M)$ i $p \in M$, dw pren la forma $\sum da_\Phi \wedge dx^\Phi$ i per aquest motiu

$$d(dw)|_p = \sum d(da_\Phi \wedge dx^\Phi \overset{(d)+(e)}{=} 0.$$

Per tant d és una antiderivació de $E^*(M)$ de grau $+1$ que satisfà 1 i 2 .
Unicitat: Suposem que hi ha una antiderivació d' de $E^*(M)$ de grau $+1$ tal que satisfà 1 i 2. Primer demostrarem que si $w \in E^*(M)$ i w s'anul·la en un entorn W de p, aleshores $d'w|_p = 0$. Escollim una funció C^∞ φ tal que sigui 0 en un entorn de p i 1 en un entorn de $M - W$. Aleshores $\varphi w = w$ i

$$d'(w)|_p = d'(\varphi w)|_p = d'(\varphi)|_p \wedge w_p + \varphi(p) d'w|_p = 0.$$

Ara volem definir d' en $E^*(p)$, ja que està definida en $E^*(M)$. Si $w \in E^*(p)$ aleshores la podem estendre a una forma en M que té el mateix germen en p que w. Aquesta pot ser escrita, per exemple, com $\varphi w \in E^*(M)$ on ara φ és una funció C^∞ tal que és 1 en un entorn de p i supp$\varphi \subset$ domini w. Per tant

$$d'(w)|_p = d'(\varphi w)|_p$$

i pel vist abans, aquesta definició és independent de l'extensió escollida amb lo qual $d'(w)|_p$ està definida per tota $w \in E^*(p)$ i clarament satisfà les propietats del lema anterior. Per tant, l'equació (1.17) implica que sempre que $w \in E^*(p)$, en particular sempre que $w \in E^*(M)$, $d'(w)|_p = d(w)|_p$. Això prova la unicitat. $\square$

1.66. ***Lema de Poincaré*** *Sigui U la bola oberta unitària de l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$, i sigui $E^k(U)$, com sempre, l'espai de les k-formes diferencials en U. Aleshores per a cada $k \geq 1$ hi ha una transformació lineal $h_k : E^k(U) \to E^{k-1}(U)$ tal que*

$$h_{k+1} \circ d + d \circ h_k = id.$$

Corol·lari 1.67. *Si w és una k-forma, $k \geq 1$, en la bola oberta unitària en $\mathbb{R}^n$ i $dw = 0$, aleshores existeix una $(k-1)$-forma β ($\beta = h_k(w)$) tal que $d\beta = w$.*

Observació 1.68. *De fet el lema de Poincaré es pot enunciar amb dominis contractibles de $\mathbb{R}^n$. En particular, $\mathbb{R}^n$.*

1.6 Integració en varietats diferenciables

En aquesta secció buscarem com traslladar tots els conceptes de la teoria d'integració de Riemann (no caldrà més) cap a les varietats diferenciables. En altres paraules, definirem la integral de k-formes a partir de la integral ja coneguda a $\mathbb{R}^n$ i després veurem quins resultats se'n poden derivar. Tot i això, segons com definim la integral, tindrem diferents formes de procedir amb la integració. Per aquest motiu, distingirem dos casos, un de més general i un quan la varietat sigui orientable.

Primer de tot, però, introduirem el concepte d'**orientabilitat** en varietats diferenciables. Com es pot veure a partir de la Proposició (1.41), $\Lambda_n(V)$, on V és un espai vectorial n-dimensional, té un únic element a la base $\{e_\Phi\}$, aquest fet fa que no sigui gaire difícil veure que $\Lambda_n(V) \cong \mathbb{R}$. Per tant, si considerem $\Lambda_n(V) - \{0\}$, aquest espai té clarament dos components connexes.

Observació 1.69. *En física s'acostuma a diferenciar els elements de les dues components de $\Lambda_n(V)$ amb el que es coneix com a* ***tensor de Levi-Civita*** *de rang n. El qual es defineix a partir de l'element base $e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$ de $\Lambda_n(V)$ com $\epsilon_{i_1,\ldots,i_n} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}$, on*

$$\epsilon_{i_1,\ldots,i_n} = +1 \qquad si \qquad sgn(i_1, \ldots, i_n) = +1,$$

$$\epsilon_{i_1,\ldots,i_n} = -1 \qquad si \qquad sgn(i_1, \ldots, i_n) = -1.$$

Definició 1.70. *Sigui V un espai vectorial n-dimensional. Una* ***orientació*** *en V és una elecció d'una component de $\Lambda_n(V) - \{0\}$. Una varietat connexa M és* ***orientable*** *si és possible escollir d'una manera consistent, una orientació en M_m^* per a cada $m \in M$. En altres paraules, si definim*

$$\mathfrak{O} := \bigcup_{m \in M} \{0 \in \Lambda_n(M_m^*)\},$$

com tenim dos components connexes per a cada $\Lambda_n(M_m^*) - \{0\}$ i M és connexa, aleshores $\Lambda_n^*(M) - \mathfrak{O}$ té com a molt dos components connexes. Diem que M és ***orientable*** *si $\Lambda_n^*(M) - \mathfrak{O}$ té dues components connexes, i si M és orientable, una* ***orientació*** *en M serà una elecció d'una de les dues components de $\Lambda_n^*(M) - \mathfrak{O}$.*

Definició 1.71. *Un cop escollida una orientació en M, diem que una base (ordenada) $v^1, \ldots, v^n$ de M_m està* ***orientada*** *si $\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n$ pertany a l'orientació, on $\delta_1, \ldots, \delta_n$ és la base dual a $v^1, \ldots, v^n$.*

Definició 1.72. *Siguin M i N varietats diferenciables orientables n-dimensionals, i $\psi : M \to N$ una aplicació C^∞. Aleshores ψ* ***preserva l'orientació*** *si l'aplicació induïda $\delta\psi : \Lambda_n^*(N) \to \Lambda_m^*(M)$ envia la component connexa $\Lambda_n^*(N) - \mathfrak{O}$, la qual determina l'orientació de N a la component $\Lambda_n^*(M) - \mathfrak{O}$ que determina l'orientació de M.*

Proposició 1.73. *Sigui M una varietat diferenciable n-dimensional. Els apartats següents són equivalents:*

(a) M és orientable.

(b) Hi ha una col·lecció $\Psi = \{(V, \psi)\}$ *de sistemes de coordenades en M tal que*

$$M = \bigcup_{(V,\Psi)\in\beta} V \qquad i \qquad det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) > 0 \text{ en } U \cap V$$

sempre que $(U, x^1, \ldots, x^n)$ *i* $(V, y^1, \ldots, y^n)$.

(c) Existeix una n-forma en M que no s'anul·la enlloc.

1.6.1 Integració en varietats diferenciables

A continuació, definirem una integració que no depèn de si la varietat és orientable o no. En primer lloc, integrarem n-formes en $\mathbb{R}^n$ per després passar al que s'anomena integració sobre cadenes.

Definició 1.74. *Sigui w una n-forma en un conjunt obert* $D \subset \mathbb{R}^n$ *, aleshores la n-forma* $dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n$ *fixa l'orientació estàndard. Aleshores hi ha una única determinada funció en D tal que* $w = f dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n$. *Sigui* $A \subset D$. *Definim*

$$\int_A w = \int_A f$$

on la part dreta és l'habitual integral d'una funció a $\mathbb{R}^n$. *La fórmula del canvi de variables es pot restablir si donat un difeomorfisme* φ *i un subconjunt A de D adequa i w una n-forma en* $\varphi(A)$, *llavors*

$$\int_{\varphi(A)} w = \pm \int_A \delta\varphi(w)$$

on tenim $+$ *si* φ *preserva l'orientació i* $-$ *si la canvia.*

Definició 1.75. *Un* ***p-símplex estàndard en*** $\mathbb{R}^p$, Δ^p *es defineix com*

$$\Delta^p = \{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^{p} a_i \leq 1 \text{ on cada } a_i \geq 0\}$$

i fixem $\Delta^0 := \{0\}$ *com el 0-símplex estàndard.*

Definició 1.76. *Un* ***p-símplex diferenciable singular*** σ *és una aplicació de* Δ^p *en M (on M és una varietat diferenciable) que es pot estendre a una aplicació* C^∞ *d'un entorn de* Δ^p *en* $\mathbb{R}^p$ *en M.*

Definició 1.77. *Una* ***p-cadena c en*** *M (amb coeficients reals) és una combinació lineal* $c = \sum a_i \sigma_i$ *de p-símplexs* σ_i *en M amb* $a_i \in \mathbb{R}$. *La vora de la cadena c no és res més que la suma de les vores dels p-símplexs.*

Definició 1.78. *Es defineix la **vora de** σ com la $p-1$ cadena*

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\sigma \circ k_i^{p-1})$$

on $k_0^0(0) = 1$, $k_1^0(0) = 1$ *i per* $p \geq 1$, $(1 \leq i \leq p+1)$

$$k_0^p(a_1,\ldots,a_p) = (1 - \sum_{i=1}^{p} a_i, a_1, \ldots, a_p)\,, k_i^p(a_1,\ldots,a_p) = (a_1,\ldots,a_{i-1},0,a_i,\ldots,a_p).$$

Ara definirem les integrals de p-formes en entorns d'imatges de p-símplexs, per fer-ho diferenciarem dos casos:

1. $p = 0$: Com $\Delta^p = \{0\}$ és un punt i una 0-forma és una funció aleshores definim la integral com
$$\int_\sigma w = w(\sigma(0))$$
és a dir, com el valor de la funció w en el punt $\sigma(0)$.

2. $p \geq 1$: Considerem el pullback $\delta\sigma : E^*(M) \to E^*(\mathbb{R}^p)$ i definim la integral com
$$\int_\sigma w = \int_{\Delta^p} \delta\sigma(w),$$
aquestes integrals es poden estendre a cadenes, com
$$\int_c w = \sum a_i \int_{\sigma_i} \delta\sigma(w).$$
on $c = \sum a_i \sigma_i$.

Un cop tenim aquestes definicions es pot enunciar el següent teorema.

Teorema 1.79. ***(Teorema d'Stokes I)*** *Sigui c una p-cadena ($p \geq 1$) en una varietat diferenciable M, i w una $(p-1)$-forma contínuament diferenciable definida en un entorn de la imatge de c. Aleshores*

$$\int_{\partial c} w = \int_c dw.$$

on ∂c és de la vora de la cadena.

1.6.2 Integració en varietats diferenciables orientables

En aquesta secció considerem que les varietats diferenciables són varietats orientades. En aquest cas, es pot definir una altra manera d'integrar formes diferencials en poder considerar n-símplexs regulars orientats i integrar en els anomenats dominis regulars.

Definició 1.80. *Un subconjunt D de M és un **domini regular** si $\forall m \in M$ es compleix una de les següents condicions:*

(a) Existeix un entorn obert de m contingut en $M - D$.

(b) *Existeix un entorn obert de m contingut en D.*

(c) *Existeix un sistema de coordenades (U, φ) centrat en m tal que $\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap \mathbb{H}^n$, on $\mathbb{H}^n = \{(r^1, \ldots, r^n) \in \mathbb{R}, r^n \geq 0\}$.*

Definició 1.81. *Es defineix ∂D, on D és un domini regular, com el conjunt de punts tipus (c) de la definició anterior. Aquests punts s'anomenen **punts frontera**.*

Observació 1.82. *Els sistemes de coordenades restringits a ∂D es solapen diferencialment (al ferho ja en M) i fan que puguem tenir una estructura de varietat diferenciable de dimensió $n-1$ en ∂D. Això prové del fet que si prenem un sistema de coordenades (U, φ) centrat en $m \in \partial D$ aleshores $r^n \circ \varphi(m) = 0$. De fet, ∂D és una subvarietat on la inclusió és un imbedding (la inclusió és una aplicació oberta en la seva imatge respecte a la topologia induïda).*

Definició 1.83. *Un **vector exterior** respecte a D és un element $v \in M_m$ amb $m \in \partial D$ tal que existeix una corba C^∞ $\alpha(t)$ en M amb $\dot{\alpha}(0) = v$ i $\alpha(t) \notin D$ per $t \in (0, \epsilon)$ amb $\epsilon > 0$.*

Observació 1.84. *L'orientació s'indueix en ∂D de la següent manera: escollida una orientació en M, aleshores una base $v^1, \ldots, v^{n-1}$ de $(\partial D)_m$ és una base orientada si $v, v^1, \ldots, v^{n-1}$ és una base orientada de M_m. Es pot veure que la definició no depèn del vector exterior v escollit.*

Definició 1.85. *Un n-símplex en M és **regular** si s'estén a un difeomorfisme en un entorn de Δ^n. A més, es diu que aquest n-símplex regular està **orientat** si l'aplicació σ preserva l'orientació (en $\mathbb{R}^n$ sempre considerem l'orientació estàndard).*

Definim la integral d'una n-forma diferencial w de suport compacte en un domini regular D com

$$\int_d w = \sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_i} \varphi_i w \tag{1.18}$$

on $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ poden correspondre a dos tipus de n-símplexs orientats

(a) $\sigma(\Delta^n) \subset Int(D)$

(b) $\sigma(\Delta^n) \subset D$ i $\sigma(\Delta^n) \cap \partial D = \sigma^n(\Delta^{n-1})$.

tal que $U_1, \ldots, U_k$ és un recobriment finit de supp$w \cap D$ on els oberts U_i són:

(i) Si σ_i és del tipus (a) aleshores $U_i \subset \text{Int } \sigma_i$.

(ii) Si σ_i és del tipus (b), U_i és la imatge via un n-símplex tipus (b) d'un obert $V \subset \mathbb{R}^n$ que és un entorn d'un punt en l'n-èsima cara de Δ^n, el qual interseca amb la frontera Δ^n només en aquella cara, i la seva imatge via σ_i està continguda en $\sigma_i(\Delta^n) \cup (M - D)$

i $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ és una partició de la unitat subordinada al recobriment abans esmentat. Es pot veure que (1.18) no depèn del recobriment escollit. A partir d'aquesta definició podem enunciar el següent teorema (el qual anàleg al Teorema (1.79)).

Teorema 1.86. *(**Teorema d'Stokes II**) Sigui D un domini regular en una varietat diferenciable n-dimensional orientada M, i sigui w una $(n-1)$-forma contínuament diferenciable de suport compacte. Aleshores*

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w\,. \tag{1.19}$$

Capítol 2

Varietats riemannianes i pseudo-riemannianes

Sovint les varietats diferenciables vénen equipades amb una mètrica i és aquesta la motivació d'aquest capítol per presentar les anomenades **varietats riemannianes**. De fet com treballarem amb l'**espai de Minkowski** (o espai-temps de Minkowski ja que com veurem es considerarà una de les coordenades com el temps) també estudiarem les anomenades **varietats pseudo-riemannianes**. Se li dóna aquest nom ja que presenten certes similituds amb les varietats riemannianes.

Notació: És important remarcar que d'ara endavant la **notació d'Einstein** podrà ser utilitzada, aquesta notació es basa en què si tenim un element amb la mateixa etiqueta en el subíndex que un altre en el superíndex aleshores tenim un sumatori sobre tots els valors possibles. En altres paraules, $a_i b^i := \sum_i a_i b^i$.

2.1 Varietats riemannianes i pseudo-riemannianes

Definició 2.1. *Sigui M una varietat diferenciable, una **mètrica riemanniana** de M és un camp tensorial C^∞ g de tipus $(0,2)$ en M simètric i definit positiu.*

Observació 2.2. *Sigui $(U, x^1, \ldots, x^n)$ un sistema de coordenades de M, aleshores*

$$g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

on s'està utilitzant la notació d'Einstein. És important veure que $g(m)$ és una aplicació bilineal de $M_m \times M_m \to \mathbb{R}$ per tot $m \in M$, recordem que M_m és un $\mathbb{R}$-espai vectorial. Una altra propietat interessant és veure com es comporta la mètrica sota un canvi de coordenades, per exemple de $(U, x^1, \ldots, x^n)$ a $(V, y^1, \ldots, y^n)$. Si denotem per g_{ij} la funció diferenciable del terme $dx^i \otimes dx^j$ i h_{kl} la funció diferenciable de la mateixa mètrica però que correspon a $dy^k \otimes dy^l$ obtenim

$$h_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}$$

per $k, l = 1, \ldots, n$. Això es pot veure en forma matricial com $H = C^T G C$ on $C = (c^i_j) = (\frac{\partial x^i}{\partial y^j})$, $H = (h^i_j) = (h_{ij})$ i $G = (g^i_j) = (g_{ij})$ ja que s'acostuma a considerar la mètrica g_{ij} com una matriu on l'entrada (i, j) correspon a g_{ij}. D'aquest comportament sota canvi de coordenades es diu que la mètrica és una forma quadràtica i és una propietat important en física perquè assegura que aquesta mètrica no depèn de les coordenades escollides. També, freqüentment denotarem g en comptes de $g|_U$ per tal d'estalviar notació.

Definició 2.3. *Una **varietat riemanniana** és una varietat diferenciable amb una mètrica riemanniana.*

Com ja s'ha explicat, la teoria de la relativitat especial sorgida en el segle passat provoca un augment de la importància d'espais equipats amb una mètrica que no és exactament riemmaniana però que manté certes semblances amb les mètriques riemannianes. Per aquest motiu, s'anomenen **espais pseudo-riemannians**. En particular ens centrarem en la **mètrica de Minkowski** la qual permet definir **l'espai de Minkowski**.

Definició 2.4. *Sigui M una varietat diferenciable, un camp tensorial C^∞ g de tipus $(0, 2)$ es diu que és **no degenerat a** $m \in M$ si satisfà qualsevol d'aquestes condicions*

(a) $g_m(u, v) = 0$ *per tot* $v \in M_m$ *si, i només si* $u = \vec{0}$.

(b) La matriu associada a g_m *no és singular.*

Definició 2.5. *Sigui M una varietat diferenciable, una **mètrica pseudo-riemanniana** de M és un camp tensorial C^∞ g de tipus $(0, 2)$ en M simètric, no degenerat per tot $m \in M$ i que no té per què estar definit positiu.*

Observació 2.6. *La propietat de no degeneració és bàsica, ja que permet a la mètrica seguir sent un aparellament respecte als espais tangents i poder ser traslladada cap a l'espai cotangent a través de l'aparellament com veurem més endavant.*

És important observar que tant si la mètrica és riemanniana com pseudo-riemanniana la matriu $(g_{ij}(m))$ té rang maximal a qualsevol punt $m \in M$ i per tant té una inversa que denotem per $(g^{ij}(m))$. A més com, $(g_{ij}(m))$ és simètrica aleshores els valor propis de la matriu són reals. De fet, si la mètrica és riemanniana, els valors propis són positius (en estar definida positiva). En canvi, si és pseudo-riemannina podem tenir i valors positius i j valors negatius fixats amb $i + j = n$. La parella (i, j) s'anomena **índex de la mètrica** i no depèn del punt considerat.

Definició 2.7. *Una mètrica pseudo-riemanniana s'anomena **mètrica lorentziana** si l'índex de la mètrica és $(n-1, 1)$ i, per tant, una **varietat lorentziana** es defineix com la parella (M, g) on M és una varietat diferenciable i g una mètrica lorentziana.*

Un cop la mètrica s'ha diagonalitzat es pot introduir un canvi de base cap a una altra base ortogonal respecte la mètrica tal que introduint un canvi d'escala per tal que tots els elements de la diagonal siguin $+1$ o -1. En el cas d'una mètrica riemanniana obtenim una **mètrica euclidiana** $\delta = diag(1, \ldots, 1)$ i per una mètrica lorentziana obtenim la **mètrica de Minkowski**, $\eta = diag(-1, 1, \ldots, 1)$.

Definició 2.8. *L'**espai de Minkowski** ($\mathbb{R}^4_{1,3}$) és l'espai $\mathbb{R}^4$ equipat amb la mètrica definida en forma matricial com*

$$g \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respecte les coordenades $x^0 = ct, x^1 = r^1, x^2 = r^2, x^3 = r^3$ (c és una constant, la velocitat de la llum al buit) en $\mathbb{R}^4$ i qualsevol punt de $\mathbb{R}^4$. És a dir $g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^{3} dx^i \otimes dx^i$.

L'espai de Minkowski, un cas particular d'una varietat lorentziana, també es coneix com l'espai-temps de Minkowski per aquesta interpretació de la primera coordenada, x^0, com a temporal i les altres com les de l'espai. Els elements de l'espai de Minkowski s'anomenen 4-vectors i la transformació del sistema de referència d'un cos a un l'altre es fa utilitzant les **transformacions de Lorentz**, les quals són isometries lineals de l'espai de Minkowski. De vegades, per conveni, en certs camps de la física es considera la mètrica com $\delta = diag(1, -1, -1, -1)$. Aquesta elecció no canvia substancialment els resultats.

2.2 Operador $*$ de Hodge

L'operador de Hodge és l'última eina que necessitem per poder procedir amb la reformulació de les equacions de Maxwell en termes de formes diferencials. Es tracta d'un operador lineal que es pot definir gràcies a la presència de la mètrica i el que permet és obtenir una $(n-k)$-forma diferencial a partir d'una k-forma diferencial on $\dim M = n$.

Abans de definir l'operador de Hodge comprovarem com actua l'isomorfisme, ja esmentat, que indueix la mètrica entre M_m i M_m^*. L'isomorfisme (prové de la definició 1.43 i l'observació posterior), anomenat **isomorfisme de contracció interna**, ve donat per $\varphi_m : M_m \to M_m^*$ amb $\varphi_m(v_m)(u_m) = g_m(v_m, u_m)$ per $v_m, u_m \in M_m$. Com g és no degenerada aleshores és un aparellament i per tant φ_m és un isomorfisme. Aquest fet permet definir un camp tensorial diferenciable simètric de tipus $(2,0)$, g^*, definit en cada punt $m \in M$ de la manera següent

$$g_m^*(w_m, \tau_m) = g_m(\varphi_m^{-1}(w_m), \varphi_m^{-1}(\tau_m))$$

on $w_m, \tau_m \in M_m^*$. En el cas d'una varietat riemanniana g^* estarà definit positiu. L'aplicació φ_m s'estén a una aplicació:

$$\varphi : \mathfrak{X}(M) \to E^1(M)$$

amb $\varphi(X)(Y) = g(X, Y)$ i on per cada $m \in M$ tenim que

$$\varphi(X)(Y)(m) = \varphi_m(X_m)(Y_m) = g_m(X_m, Y_m).$$

Del fet que φ_m fos un isomorfisme i que M_m és un $\mathbb{R}$-espai vectorial es pot veure que φ és un isomorfisme de C^∞-mòduls i φ^{-1} ve donat per

$$(\tau)(\varphi^{-1}(w)) = g^*(\tau, \varphi^{-1}(w))$$

ja que tenim $g_m(\varphi_m^{-1}(\tau_p), \varphi_m^{-1}(w_p)) = (\tau_p)\varphi_m^{-1}(w_p)$.

Ara ens interessa veure com s'expressa g^* utilitzant coordenades. Com ja s'ha vist donat un sistema de coordenades $(U, x^1, \ldots, x^n)$ $g|_U = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, aleshores es pot comprovar que $g^*|_U = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ on $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Com tenim bilinealitat, és suficient comprovar-ho pels elements de la base. Sigui $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ per un cert $j \in \{1, \ldots, n\}$, aleshores

$$\varphi(X) = g_{ij}dx^i$$

per tant

$$g^*(\varphi(X), dx^l) = \frac{\partial}{\partial x^j}(dx^l) = \delta_{jl}$$

on $l \in \{1, \ldots, n\}$. D'altra banda,

$$g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{ij}dx^i \otimes dx^l) = g^{li}g_{ij} = \delta_{jl}$$

ja que g^{li} poden ser considerats com els elements (g^{li}) de la matriu inversa. Una conseqüència interessant del que s'ha vist és que si tenim un camp vectorial $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ aleshores la 1-forma $\varphi(X) = \xi_i dx^i = X^j g_{ij}dx^i$ i, a l'inrevés, si tenim una 1-forma $w = w_i dx^i$, aleshores $\varphi^{-1}(w) = \lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i} = w_j g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}$. És a dir, gràcies a la mètrica podem **pujar i baixar els índexs** dels tensors.

Definició 2.9. *(**Operador $*$ de Hodge**) Sigui (M, g) una varietat riemanniana o pseudo-riemanniana orientada n-dimensional. Definim l'operador $* : E^k(M) \to E^{n-k}(M)$ com una aplicació lineal tal que actua sobre un element $w \in E^k(M)$, on $w|_U = b_{i_1,\ldots,i_k}dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ en un sistema de coordenades $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de M, de manera que si $(*w)|_U = *b_{i_1,\ldots,i_k}dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}$ aleshores per tot $m \in U$*

$$*b_{i_1,\ldots,i_k}(m) = \frac{1}{k!}\sqrt{|g|}\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}b^{i_1,\ldots,i_k}(m) \tag{2.1}$$

amb $b^{i_1,\ldots,i_k} = g^{i_1j_1}\cdots g^{i_kj_k}b_{j_1,\ldots,j_k}$, $*b_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U)$ i on $|g| = |det((g_{ij}))|$.

Observació 2.10. *Sovint escriurem simplement $*b_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{1}{k!}\sqrt{|g|}\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}b^{i_1,\ldots,i_k}$ en comptes de $*b_{i_1,\ldots,i_k}(m) = \frac{1}{k!}\sqrt{|g|}\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}b^{i_1,\ldots,i_k}(m)$.*

Observació 2.11. *L'operador de Hodge, com és un operador lineal, serà suficient conèixer com actua sobre aquests elements $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ en $m \in U$, on $(U, x^1, \ldots, x^n)$ és el sistema de coordenades. En la definició hem fet servir $\{dx^i : i = 1, \ldots, n\}$ ja que aquesta col·lecció forma una base de M_m^* per tot $m \in U$, respecte a la qual la mètrica té la matriu donada per $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$. Tanmateix, es pot fer servir qualsevol altra col·lecció d'1-formes d'aquest tipus. Per exemple, la donada per un altre sistema de coordenades $(V, y^1, \ldots, y^n)$ amb $U \cap V \neq \emptyset$. És a dir, si tenim les 1-formes $\{w_1, \ldots, w_n\}$ tals que $\{w_1(m), \ldots, w_n(m)\}$ és una base de M_m^* per tot $m \in W$ on $W \subset U$. Aleshores el producte de Hodge es defineix respecte a $w|_W = \sum_{i_1,\ldots,i_k} c_{i_1,\ldots,i_k}w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}$ com*

$$*c_{i_1,\ldots,i_k}(m) = \frac{1}{k!}\sqrt{|g'(m)|}\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}c^{i_1,\ldots,i_k}(m) \tag{2.2}$$

amb $c^{i_1,\ldots,i_k} = g'^{i_1j_1}\cdots g'^{i_kj_k}c_{j_1,\ldots,j_k}$, $*c_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U)$ i on $|g'| = |det((g'_{ij}))|$ amb g' la matriu de la mètrica expressada respecte a $\{w^1, \ldots, w^n\}$.

A més, també és important veure

$$*1 = \frac{1}{n!}\sqrt{|g|}\epsilon_{i_1,\dots,i_n} b^{i_1,\dots,i_k} dx^{i_n} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} = \sqrt{|g|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

ja que aquesta n-forma tindrà importància més endavant.

Proposició 2.12. *Sigui (M, g) una varietat riemanniana o pseudo-riemanniana de dimensió n i $w \in E^k(M)$ aleshores*

$$*(*w) = (-1)^{k(n-k)} sgn(g) w.$$

Demostració. Considerem el sistema de coordenades $(U, x^1, \dots, x^n)$, aleshores

$$w|_U = b_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

i aplicant l'opeador $*$ de Hodge obtenim, per definició,

$$(*w)|_U = *b_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} = \frac{1}{k!}\sqrt{|g|}\epsilon_{i_1,\dots,i_n} b^{i_1,\dots,i_k} dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}.$$

Si apliquem l'operador un altre cop, utilitzant la linealitat de $*$, obtenim

$$*(*w)|_U = \frac{1}{k!(n-k)!}|g|(\epsilon_{i_1,\dots,i_k} b^{i_1,\dots,i_k})\epsilon_{i_{k+1},\dots,i_n,i_1,\dots,i_k}\epsilon^{i_{k+1},\dots,i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \frac{1}{k!(n-k)!}|g|(\epsilon_{i_1,\dots,i_k} b^{i_1,\dots,i_k})(-1)^{k(n-k)}\epsilon_{i_1,\dots,i_k,i_{k+1},\dots,i_n}\epsilon^{i_{k+1},\dots,i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= (-1)^{k(n-k)}\frac{1}{k!(n-k)!}|g|(\epsilon_{i_1,\dots,i_k} g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_k j_k} b_{j_1,\dots,j_k})\epsilon_{i_1,\dots,i_k,i_{k+1},\dots,i_n} g^{i_{k+1} l_{k+1}}\cdots g^{i_n l_n}\epsilon_{l_{k+1},\dots,l_n}$$

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \frac{k!(n-k)!}{k!(n-k)!}(-1)^{k(n-k)}|g|g^{-1} b_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= (-1)^{k(n-k)}\mathrm{sign}(g) b_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = (-1)^{k(n-k)}\mathrm{sgn}(g) w$$

on $g^{-1} = det((g^{ij})$. Hem fet servir que el determinant d'una matriu $k \times k$ $A = (a^{ij})$ es pot expressar com

$$det(A) = \frac{1}{k!}\sum \epsilon_{i_1,\dots,i_k}\epsilon_{j_1,\dots,j_k} a^{i_1 j_1}\cdots a^{i_k j_k}$$

i $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ s'ha escollit per tal que (g_{ij}) sigui una matriu diagonal (ho denotem directament com a partir del sistema de coordenades però es podria tractar d'una combinació lineal d'aquests elements). □

Corol·lari 2.13. *Sigui (M, g) una varietat riemanniana o pseudo-riemanniana de dimensió n i $w \in E^k(M)$, aleshores*

$$**w = (-1)^{k(n-k)} w \qquad \text{si } (M, g) \text{ és una varietat riemanniana}$$

$$**w = (-1)^{k(n-k)+1} w \qquad \text{si } (M, g) \text{ és una varietat lorentziana.}$$

Proposició 2.14. *Sigui (M, g) una varietat riemanniana o pseudo-riemanniana de dimensió n i $w_1, w_2 \in E^k(M)$ tals que fixat un sistema de coordenades $(U, x^1, \ldots, x^n)$ aleshores*

$$w_1|_U = \sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k}$$

$$w_2|_U = \sum_{j_1<\ldots<j_k} S_{j_1,\ldots,j_k} dx^{j_1} \wedge \cdots dx^{j_k}$$

on $T_{i_1,\ldots,i_k}, S_{j_1,\ldots,j_k} \in C^\infty(U)$. Aleshores

$$w_1 \wedge *w_2|_U = \frac{1}{k!} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} T_{i_1,\ldots,i_k} S_{j_1,\ldots,j_k} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Demostració. Per simplificar la notació ens referirem a w_1 i w_2 en comptes de $w_1|_U$ i $w_2|_U$. Com

$$*w_2 = \sum_{j_{k+1}<\ldots<j_n} \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} \epsilon_{j_1,\ldots,j_n} S^{j_1,\ldots,j_k} dx^{k+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

quan fem el producte exterior $\wedge$ amb w_1 el sumatori de $*w_2$ ja no caldrà, ja que $i_1, \ldots, i_p$ determina $j_{k+1}, \ldots, j_n$ completament arran del fet que $j_{k+1} < \ldots < j_n$. Per tant podem identificar $j_{p+1} = i_{p+1}, \ldots, j_n = i_n$ sense pèrdua de generalitat. Un cop fet el canvi podem expressar $w_1 \wedge *w_2$ com

$$\begin{aligned}
w_1 \wedge *w_2 &= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} T_{i_1,\ldots,i_k} \epsilon_{j_1,\ldots,j_k,i_{k+1},\ldots,i_n} S^{j_1,\ldots,j_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^n = \\
&= \sum_{i_1<\cdots i_k} \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} T_{i_1,\ldots,i_k} \epsilon_{j_1,\ldots,j_k,i_{k+1},\ldots,i_n} S^{j_1,\ldots,j_k} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\
&= \sum_{i_1<\cdots i_k} \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} T_{i_1,\ldots,i_k} \epsilon_{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1},\ldots,i_n} S^{i_1,\ldots,i_k} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{i_1<\cdots i_k} \frac{k!}{k!} \sqrt{|g|} T_{i_1,\ldots,i_k} S^{i_1,\ldots,i_k} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} T_{i_1,\ldots,i_k} S^{i_1,\ldots,i_k} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

En (a) hem utilitzat la igualtat $\epsilon_{j_1,\ldots,j_k,i_{k+1},\ldots,i_n} S^{j_1,\ldots,j_k} = k! \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} S^{i_1,\ldots,i_k}$. A més, s'està considerant que $T_{i_1,\ldots,i_k} = \text{sign }(\sigma) T_{\sigma(i_1),\ldots,\sigma(i_k)}$ on $\sigma \in S_k$ (permutació de k lletres) ($T_{i_1,\ldots,i_k}$ o qualsevol funció que apareix en la definició d'una forma diferencial). □

Observació 2.15. *Un cas interessant de considerar és $w_1 = w_2$, per exemple, en el cas més bàsic on $w_1 = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ obtenim*

$$w_1 \wedge *w_1 = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} \sum_{j_1,\ldots,j_k} \sqrt{|g|} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

si la mètrica té matriu diagonal aleshores

$$w_1 \wedge *w_1 = sign\ (g) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

De fet es pot definir l'operador de Hodge a partir de la condició de la proposició ja que

$$\frac{1}{k!} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} T_{i_1,\ldots,i_k} S_{j_1,\ldots,j_k}$$

representa $g^*(w_1, w_2)$ i $\sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ és la n-forma esmentada anteriorment.

2.3 Integració en varietats riemannianes

En el capítol anterior havíem vist que el fet que una varietat diferenciable n-dimensional M sigui orientable implica l'existència d'una n-forma que no s'anul·la enlloc. Si M està equipada amb una mètrica, existeix un **element de volum** que es pot definir, donat un sistema de coordenades $(U, x^1, \dots, x^n)$ com

$$w := \sqrt{|g|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

on $g = \det(g_{ij})$. La propietat més important d'aquesta n-forma, la qual veurem a continuació, és la invariància sota transformacions de coordenades.

Proposició 2.16. *Sigui (M, g) una varietat orientada riemanniana o pseudo-riemanniana, aleshores donats dos sistemes de coordenades de M $(U, x^1, \dots, x^n)$ i $(V, y^1, \dots, y^n)$ amb $U \cap V \neq \emptyset$ si $\{x^i\}$ i $\{y^j\}$ defineixen la mateixa orientació (és a dir, els dos sistemes de coordenades pertanyen a la mateixa col·lecció esmentada en la Proposició 1.73(b) aleshores*

$$\sqrt{|g|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sqrt{|g|}dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

en $U \cap V$.

Demostració. Considerem a $U \cap V$, respecte les coordenades $(y^1, \dots, y^n)$ tenim que l'element de volum es defineix com

$$\sqrt{|h|}dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

on, com hem vist en una secció anterior, $h_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}$ i, com és usual, $h = det(h_{kl})$. Per tant,

$$\sqrt{|h|}dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \sqrt{\left|\det(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial y^l})\right|} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n =$$

$$= \left|\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right)\right| \sqrt{|g|} \det\left(\frac{\partial y^j}{\partial y^l}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sqrt{|g|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

□

Observació 2.17. *La invariància obtinguda comporta que si recobrim M amb una col·lecció de coordenades definint la mateixa orientació, aleshores allà on es superposen, l'element de volum és igual i per tant es pot considerar com una n-forma definida en tot M que no s'anul·la enlloc.*

Un altre fet interessant relacionat amb l'element de volum és el fet que $*1$ és exactament l'element de volum. Aquesta n-forma està fixant una orientació en M i per tant considerar $-\sqrt{|g|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ seria prendre l'altra orientació disponible. D'aquí podríem pensar a prendre l'operador de Hodge amb el signe canviar, ja que d'aquesta manera $*1 = -\sqrt{|g|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. És a dir, podem relacionar quina definició de l'operador $*$ fem en termes de l'orientació escollida. Tot i això, sempre considerarem l'elecció positiva de l'element de volum.

D'aquesta manera, és natural definir la integral de $f \in C^\infty(M)$ sobre M com

$$\int_M f\sqrt{|g|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n := \int_M f\sqrt{|g|}dx^1 dx^2 \cdots dx^n$$

i aleshores identifiquem el volum de M com $\int_M \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Anteriorment hem vist com gràcies a la mètrica tenim un isomorfisme entre M_m o M_m^* per qualsevol $m \in M$ i que aquest isomorfisme permet definir un camp tensorial diferenciable simètric de tipus $(2,0)$. Per les següents definicions denotarem aquest isomorfisme al qual abans denotàvem per φ com $\sim$. En altres paraules, si $v \in M_m$ aleshores $\tilde{v} \in M_m^*$ i si $w \in M_m^*$ $\tilde{w} \in M_m$. Utilitzant aquesta notació establim les següents definicions:

Definició 2.18. *Sigui $f \in C^\infty(M)$, $V \in \mathfrak{X}(M)$*

*(a) El **gradient d'una funció** f (grad f) està definit com*

$$grad\, f := \widetilde{df}.$$

*(b) La **divergència d'un camp vectorial** V (div V) està definida com*

$$div\, V = sign(g) * d * \tilde{V}.$$

*(c) El **laplacià d'una funció** f (Δf) està definit com*

$$\Delta f = -sign(g) * d * df.$$

Observació 2.19. *Es pot generalitzar la definició del laplacià actuant sobre un k-forma qualsevol, $\Delta : E^k(M) \to E^k(M)$, si el definim com*

$$\Delta = dd^\dagger + d^\dagger d$$

on $d^\dagger = (-1)^{n(k+1)+1} sign(g) * d *$.

Si considerem l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ amb la mètrica euclidiana habitual, aleshores les definicions coincideixen amb definicions habituals donades en qualsevol text de càlcul.

(a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial r^1}\frac{\partial}{\partial r^1} + \frac{\partial f}{\partial r^2}\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r^3}\frac{\partial}{\partial r^3} = \left(\frac{\partial}{\partial r^1}, \frac{\partial f}{\partial r^2}, \frac{\partial f}{\partial r^3}\right).$$

(b) $V = (V^1, V^2, V^3)$, aleshores

$$divV = *d * \tilde{V} = *d(V^1 dr^2 \wedge dr^3 - V^2 dr^1 \wedge dr^3 + V^3 dr^1 \wedge dr^2) =$$

$$= *((\frac{\partial V^1}{\partial r^1} + \frac{\partial V^2}{\partial r^2} + \frac{\partial V^3}{\partial r^3}) dr^1 \wedge dr^2 \wedge dr^3) = \frac{\partial V^1}{\partial r^1} + \frac{\partial V^2}{\partial r^2} + \frac{\partial V^3}{\partial r^3}.$$

(c) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\Delta f = - * d * df = - * d * (\frac{\partial f}{\partial r^1} dr^1 + \frac{\partial f}{\partial r^2} dr^2 + \frac{\partial f}{\partial r^3} dr^3) =$$

$$= - * d\left(\frac{\partial f}{\partial r^1} dr^2 \wedge dr^3 - \frac{\partial f}{\partial r^2} dr^1 \wedge dr^3 + \frac{\partial f}{\partial r^3} dr^1 \wedge dr^2\right) =$$

$$= - * (\frac{\partial^2 f}{\partial r^{1^2}} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^{2^2}} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^{3^2}}) dr^1 \wedge dr^2 \wedge dr^3 = -\frac{\partial^2 f}{\partial r^{1^2}} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^{2^2}} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^{3^2}}.$$

De la mateixa manera també es poden retrobar resultats ja coneguts derivats de la versió habitual del teorema d'Stokes però ara en el llenguatge de les formes diferencials. Per aquest motiu ens centrarem en integrar en varietats riemannianes orientades com és l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$.

Per simplificar els càlculs amb l'operador de Hodge, donat un sistema de coordenades $(U, x^1, \ldots, x^n)$ en un entorn d'un punt del domini regular on ens interessa fer la integració, aplicarem Gram-Schmidt respecte al producte escalar donat per la mètrica g_{ij}, el qual denotarem per $\langle\ ,\ \rangle_m$, a $\{\partial/\partial x^i\}$, els quals són una base de M_m $\forall m \in U$, per tal d'obtenir una base ortonormal $\{e^i\}$ per tot $m \in U$. Així doncs, respecta la base ortonormal òbviament la mètrica presenta un aspecte de mètrica euclidià i la seva inversa, que indueix el producte escalar en M_m^*, també.

Un cop concluida la normalització definim $w_1, \ldots, w_n$ com $w_i(e^j) = \delta_{ij}$ ($w_i = \tilde{e^i}$ i viceversa) i aleshores $\{w_i\}$ serà una base ortonormal de $E^1(U)$ respecte al producte escalar donat per g^{ij} ja que el dual d'una base ortonormal és ortonormal.

Si considerem dos bases ortonormals d'entorns U i U' respectivament, aleshores en $U \cap U'$

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \det(\sigma) w_1 \wedge \cdots \wedge w_n'$$

on σ és una matriu de canvi de coordenades, que al tractar-se de dos bases ortogonals, és una matriu ortogonal i això implica $\det(\sigma) = \pm 1$. Si les dues bases tenen la mateixa orientació aleshores $\det(\sigma) = 1$ i aleshores coincideixen allà on es solapen. Si considerem l'operador $*$ de Hodge respecte a aquesta base, tenim que $\sqrt{|g|} = 1$ i per tant el nostre element de volum invariant és $w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$, on ja s'ha fet un tria de l'orientació. Seguint aquest raonament la integral d'una funció $f \in C^\infty(D)$ resulta

$$\int_D f = \int_D *f = \int_D f w_1 \wedge \cdots \wedge w_n.$$

Teorema 2.20. *(**Teorema de la divergència**) Si V és un C^∞ camp vectorial en una varietat riemanniana orientada M, D és un domini regular de M i $\vec{n}$ un camp vectorial unitari exterior en ∂D, es compleix*

$$\int_D div\, V = \int_{\partial D} \langle V, \vec{n} \rangle \tag{2.3}$$

on $\langle\, ,\rangle$ correspon al producte escalar definit per la mètrica i $divV$ té suport compacte.

Demostració. Per la demostració d'aquest teorema ens interessa trobar una n-forma de volum $w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$ que no s'anul·la en tot D i tal que $w_1|_{\partial D} = 0$ amb la qual definir la integral de la funció amb suport compacte, que en aquest cas serà $*d*\tilde{V}$. Per aquest motiu, en el procés explicat més amunt fem Gram-Schmidt però considerant $e^1 = \vec{n}$, és a dir $w_1(\vec{n}) = 1$, el qual al ser unitari formarà part de la base i el farem considerant els entorns de cada punt de ∂D. Com hem vist que en el solapament la n-forma resta invariant a l'hora d'integrar tindrem sempre aquesta n-forma.

Respecte a la base considerada tenim

$$V = V_1 e^1 + \ldots + V_n e^n \Rightarrow \tilde{V} = V_1 w_1 + \ldots + V_n w_n$$

on f_i són funcions contínuament diferenciables amb suport compacte en D. Si apliquem l'operador $*$ de Hodge

$$*\tilde{V} = V_1 w_2 \wedge \cdots \wedge w_n + \ldots + (-1)^{n-1} V_n w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-1} \Rightarrow *\tilde{V}|_{\partial D} = V_1 w_2 \wedge \cdots \wedge w_n.$$

A més,

$$\langle V, \vec{n} \rangle = \langle V, e^1 \rangle = V_1.$$

Si integrem

$$\int_D \operatorname{div} V = \int_D *d*\tilde{V} = \int_D **d*\tilde{V} = \int_D d*\tilde{V}$$

$$\overset{(Stokes)}{=} \int_{\partial D} *\tilde{V} = \int_{\partial D} \langle V, \vec{n} \rangle w_2 \wedge \cdots \wedge w_n = \int_{\partial D} \langle V, \vec{n} \rangle$$

on, en aquest cas, $** = (-1)^n(n-n) = 1$. $\square$

Proposició 2.21. *(**Identitats de Green**) Siguin M una varietat riemanniana orientada, D un domini regular en M, f i g funcions contínuament diferenciables amb suport compacte en D. Si $\vec{n}$ és un camp vectorial unitari exterior al llarg de ∂D, denotem $\vec{n}(g)$ com $\partial g/\partial n$, aleshores tenim les següents igualtats*

$$\int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial n} = \int_D \langle grad\, f, grad\, g \rangle - \int_D f\Delta g\,). \tag{2.4}$$

$$\int_{\partial D} (f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}) = \int_D (g\Delta f - f\Delta g)\,. \tag{2.5}$$

Demostració. Els càlculs previs a fer són semblants als fets en el teorema de la divergència. En aquest cas, en comptes de $*\tilde{V}$ tenim $f*dg$, per tant tornem a fer una elecció concreta de base ortonormal ($e_1 = \vec{n}$) per tal que

$$\int_{\partial D} f*dg = \int_{\partial D} f\langle dg, \vec{n} \rangle w_2 \wedge \cdots \wedge w_n = \int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial n}.$$

D'altra banda,

$$-\int_D f\Delta g = \int_D f(*d*dg) = \int_D f(**d*dg) = \int_D f(d*dg) = \int_D d(f*dg) - \int_D df \wedge *dg$$

si utilitzem la Proposició 2.14, tenim en compte que $|g| = 1$, obtenim

$$\int_D d(f*dg) - \int_D df \wedge *dg = \int_D d(f*dg) - \int_D \langle df, dg \rangle$$

com $\langle df, dg \rangle = \langle \widetilde{df}, \widetilde{dg} \rangle = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$, aleshores

$$-\int_D f\Delta g = \int_D d(f*dg) - \int_D \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$$

i aplicant Stokes al primer terme de la dreta de la igualtat

$$\int_{\partial D} f*dg = \int_D \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle - \int_D f\Delta g$$

on, com ja hem demostrat, $\int_{\partial D} f*dg = \int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial n}$.

La segona identitat es veu fàcilment si utilitzem la que ja hem demostrat:

$$\int_{\partial D} (f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}) = \int_D \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle - \int_D f\Delta g - \int_D \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle + \int_D g\Delta f =$$

$$= \int_D (g\Delta f - f\Delta g)$$

ja que $\langle\, , \rangle$ és simètric. $\square$

Capítol 3

Equacions de Maxwell

En els capítols anteriors hem exposat tots els continguts necessaris per desenvolupar, en tota la seva extensió, les equacions de Maxwell en termes de formes diferencials. Per simplificar les equacions fixem les següents constants $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} C^{-2}\, kg\, m$, $\epsilon_0 = 1/(36\pi 10^9)\, C^2\, kg^{-1}\, m^{-3}\, s^2$ i c, la velocitat de la llum, a 1. El fet de fixar aquestes constants no canvia absolutament en res el contingut matemàtic de les equacions de Maxwell.

3.1 Equacions de Maxwell i tensor de Faraday

Les equacions de Maxwell al buit són

$$\vec{\nabla}\ \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0} \tag{3.1}$$

$$\vec{\nabla}\ \vec{E} = \rho, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \tag{3.2}$$

on $\vec{j}$ és la densitat de corrent elèctric total, ρ la densitat de càrrega elèctrica total, $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$ el camp elèctric i $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ el camp magnètic. Les dues primeres equacions, (3.1), són equacions homogènies i les altres dues, (3.2), són inhomogènies.

El fet que $\vec{\nabla}\ \vec{B} = 0$, fa que si considerem $\vec{B}$ com un camp vectorial, podem definir una 2-forma diferencial $w_1 = *\tilde{B} \in E^2(\mathbb{R}^3)$ on $\mathbb{R}^3$ està dotat amb la mètrica euclidiana, com $w_1 = B^1 dr^2 \wedge dr^3 + B^2 dr^3 \wedge dr^1 + B^3 dr^1 \wedge dr^2$ aleshores

$$dw_1 = \left(\frac{\partial B^1}{\partial r^1} + \frac{\partial B^2}{\partial r^2} + \frac{\partial B^3}{\partial r^3}\right) dr^1 \wedge dr^2 \wedge dr^3 = (\vec{\nabla}\ \vec{B}) dr^1 \wedge dr^2 \wedge dr^3 = 0.$$

Per tant, com $dw_1 = 0$ podem aplicar el lema de Poincaré i aleshores sabem que ha d'existir una 1-forma diferencial $\alpha \in E^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\alpha = A^1 dx^1 + A^2 dx^2 + A^3 dx^3$ amb A^i funcions contínuament diferenciable tal que $w_1 = d\alpha$, és a dir,

$$d\alpha = \left(\frac{\partial A^2}{\partial r^1} - \frac{\partial A^1}{\partial r^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial A^3}{\partial r^1} - \frac{\partial A^1}{\partial r^3}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial A^3}{\partial r^2} - \frac{\partial A^2}{\partial r^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= B^1 dr^2 \wedge dr^3 - B^2 dr^1 \wedge dr^3 + B^3 dr^1 \wedge dr^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^1 = \frac{\partial A^3}{\partial r^2} - \frac{\partial A^2}{\partial r^3},\ B^2 = \frac{\partial A^1}{\partial r^3} - \frac{\partial A^3}{\partial r^1},\ B^3 = \frac{\partial A^2}{\partial r^1} - \frac{\partial A^1}{\partial r^2}$$

això és equivalent a si considerem $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$ i

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{3.3}$$

Aquest camp vectorial $\vec{A}$ és conegut a la física com **vector potencial**. D'una manera semblant, utilitzant l'altra equació de (3.1), tenim que $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = \vec{0}$, si definim una 1-forma $w_2 = C^1 dr^1 + C^2 dr^2 + C^3 dr^3$ amb $C^i = E^i + \partial A^i$ on $i = 1, 2, 3$ aleshores podem prendre dw_2,que com hem vist per una 1-forma, i aleshores

$$dw_2 = \left(\frac{\partial C^2}{\partial r^1} - \frac{\partial C^1}{\partial r^2}\right) dr^1 \wedge dr^2 + \left(\frac{\partial C^3}{\partial r^1} - \frac{\partial C^1}{\partial r^3}\right) dr^1 \wedge dr^3 + \left(\frac{\partial C^3}{\partial r^2} - \frac{\partial C^2}{\partial r^3}\right) dr^2 \wedge dr^3 = 0$$

per la condició $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = \vec{0}$. Novament estem en disposició d'utilitzar el lema de Poincaré per assegurar que existeix una 0-forma, és a dir, una funció diferenciable, que anomenarem $-\phi$ on el signe negatiu s'incorpora per motius físics tal que $w_2 = d(-\phi)$. Si apliquem d en aquesta funció obtenim

$$\begin{aligned} d(-\phi) &= -\frac{\partial \phi}{\partial r^1} dr^1 - \frac{\partial \phi}{\partial r^2} dr^2 - \frac{\partial \phi}{\partial r^3} dr^3 = \\ &= C^1 dr^1 + C^2 dr^2 + C^3 dr^3 \to \vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\vec{\nabla}\phi. \end{aligned}$$

Aquesta funció escalar ϕ es coneix com a **potencial escalar elèctric**. Aquest nom prové del fet que en l'electrostàtica (quan el camp magnètic i elèctric no depenen del temps) tenim $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ que és la definició habitual d'un potencial. Reordenant, el camp elèctric és igual a

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{3.4}$$

Un punt crucial de les equacions de Maxwell és que donats $\vec{E}$ i $\vec{B}$ els potencials ϕ i $\vec{A}$ no estan definits únicament. Si considerem una funció escalar $\Lambda(\vec{x}, t)$ aleshores si introduïm els canvis

$$\begin{cases} \vec{A} \leftrightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}, t) \\ \phi \leftrightarrow \phi + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \end{cases}$$

aleshores

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\text{i } \vec{E} = -\vec{\nabla}(\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

D'aquesta llibertat per tirar ϕ i $\vec{A}$ en diem **simetria gauge**.

Considerem ara l'espai de Minkowski $\mathbb{R}^4_{1,3}$ i definim en aquest espai el 4-vector del potencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, el qual es pot interpretar com un camp vectorial en $\mathbb{R}^4$. Mitjançant la mètrica podem transformar el 4-vector A^μ en

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (-\phi, \vec{A}) \Leftrightarrow A = -\phi dx^0 + A^1 dx^1 + A^2 dx^2 + A^3 dx^3.$$

Per simplificar la notació, de vegades, denotarem $F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ simplement per $F_{\mu\nu}$ i el mateix per $F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ i $F^{\mu\nu}$.

Definició 3.1. *El **tensor de Faraday** és un tensor antisimètric tipus* $(0,2)$*,* $F_{\mu\nu}$*, la matriu del qual queda definida per*

$$(F_{\mu\nu}) := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.5}$$

Els coeficients són $F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -E^i$ *per* $i = 1,2,3$*,* $F_{12} = B^3$*,* $F_{13} = -B^2$ *i* $F_{23} = B^1$*. En forma matricial, el tensor de Faraday, té la següent forma*

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

De fet el tensor de Faraday considerat com a una 2-forma (un tensor antisimètric tipus $(0,2)$ no deixa de ser una 2-forma) F no és res més que dA on A és la 1-forma descrita anteriorment. És a dir,

$$F = dA = \sum_{i<j} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = -\sum_{\alpha=1}^{3} E^\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha + B^1 dx^2 \wedge dx^3 + B^2 dx^3 \wedge dx^1 + B^3 dx^1 \wedge dx^2. \tag{3.7}$$

Un element important per desenvolupament de la següent secció és veure com actua l'operador * de Hodge en els elements de F.

Lema 3.2. $*F = \sum_{\alpha=1}^{3} B^\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha + E^1 dx^2 \wedge dx^3 - E^2 dx^1 \wedge dx^3 + E^3 dx^1 \wedge dx^2$.

Demostració. Per la definició del producte de Hodge tenim, en aquest cas, $(*F)_{ik} = \frac{1}{2}\epsilon_{iklm}F^{lm}$, on $F^{ik} = g^{ip}g^{kq}F_{pq}$. La matriu de F^{ik} és

$$(F^{\mu\nu}) = (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicant aquestes igualtats per cada possible coeficient de $*F$ obtenim

$$(*F)_{01} = \frac{1}{2}(\epsilon_{0123}F^{23} + \epsilon_{0132}F^{32}) = B^1, \qquad (*F)_{02} = \frac{1}{2}(\epsilon_{0213}F^{13} + \epsilon_{0231}F^{31}) = B^2,$$

$$(*F)_{03} = \frac{1}{2}(\epsilon_{0312}F^{12} + \epsilon_{0321}F^{21}) = B^3, \qquad (*F)_{12} = \frac{1}{2}(\epsilon_{1203}F^{03} + \epsilon_{1230}F^{30}) = E^3,$$

$$(*F)_{23} = \frac{1}{2}(\epsilon_{2301}F^{01} + \epsilon_{2310}F^{10}) = -E^2, \qquad (*F)_{23} = \frac{1}{2}(\epsilon_{2301}F^{01} + \epsilon_{2310}F^{10}) = E^1.$$

Que són exactament els coeficients que buscàvem. $\square$

Observació 3.3. *Com ja s'ha dit* $(*F)_{01}$ *representa* $*F_{01}dx^0 \wedge dx^1$*,* $(*F)_{02}$ *representa* $*F_{01}dx^0 \wedge dx^2$ *i el mateix per la resta.*

3.2 Forma integral de les equacions de Maxwell. El contingut geomètric de les equacions de Maxwell

Un cop presentades les equacions de Maxwell, a l'estar descrivint una teoria física, un dels aspectes claus és interpretar físicament que ens diuen aquestes equacions. Per aquest motiu, una de les formes de veure el contingut físic, en aquest cas geomètric, és expressar les equacions de Maxwell en forma integral. Per aquesta transformacions serà important considerar els resultats presentats en les seccions 1.6 i 2.4.

Específicament ens centrarem a examinar el comportament del tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$ sota canvis de coordinades que no canvien la coordenada del temps x^0, és a dir, sota transformacions de la forma

$$x'^0 = x^0, \qquad x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3).$$

Com les coordenades x^1, x^2, x^3 per un x^0 fixat són essencialment euclidianes (si traiem la primera coordenada la mètrica de l'espai de Minkowski es pot considerar com euclidiana) podrem aplicar tota la informació que tenim d'integració en varietats diferenciables riemannianes. En aquest cas, estem considerant l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$.

(a) En primer lloc, considerem el camp vectorial $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ en $\mathbb{R}^3$, mitjançant el teorema de la divergència (2.20) obtenim per un domini regular tridimensional U amb vora Γ:

$$\iiint_U div\, \vec{B} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_\Gamma \langle \vec{B}, \vec{n} \rangle d\sigma \tag{3.8}$$

on $d\sigma = w_2 \wedge w_3$, la unitat d'àrea, amb w_2, w_3 descrits com en la secció 2.3. Aquesta equació també es coneix con la fórmula de Gauss-Ostrogradski. Mirant les equacions de Maxwell veiem que $div\, \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ i, per tant,

$$\iint_\Gamma \langle \vec{B}, \vec{n} \rangle d\sigma = 0.$$

Aquesta igualtat ens diu que el flux del camp magnètic a través d'una superfície tancada és sempre zero. Això ja ens dóna una idea sobre que les línies del camp magnètic són tancades, és a dir, no tenim monopols (en cas d'existir $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$).

(b) A continuació, ens centrem en l'altra equació homogènia, $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Sigui

$$\oint_\Gamma E^1 dx^1 + \oint_\Gamma E^2 dx^2 + \oint_\Gamma E^3 dx^3.$$

on $\oint$ es refereix al fet que Γ és un camí tancat. Aplicant el teorema d'Stokes obtenim

$$\oint_\Gamma E^1 dx^1 + \oint_\Gamma E^2 dx^2 + \oint_\Gamma E^3 dx^3 =$$

$$= \iint_U [(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}) dx^1 \wedge dx^2 + (\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3}) dx^1 \wedge dx^3 + (\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}) dx^2 \wedge dx^3]$$

aleshores podem utilitzar el següent resultat:

Teorema 3.4. *En l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$, la integral doble d'una 2-forma en una superfície U parametritzada per les coordenades z^1, z^2 on $r^i = r^i(z^1, z^2)$ (r^1, r^2, r^3 són les coordenades euclidianes habituals) es pot reduir a la següent integral*

$$\iint_U T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iint_U \langle T, \vec{n} \rangle \sqrt{|g|} dz^1 \wedge dz^2 \tag{3.9}$$

on $\vec{n}$ és el vector normal unitari a la superfície, T és el vector amb $T^1 = T_{23}$, $T^2 = -T_{13}$, $T^3 = T_{12}$ i g és el determinant de la matriu (g_{ij}) on g_{ij} és la mètrica induïda en la superfície per la mètrica euclidiana.

Demostració. Per mètrica induïda ens referim a la 2-forma diferencial no degenerada $h_{kl} dz^k \wedge dz^l$ amb $k, l = 1, 2$ tal que

$$h_{kl} = \frac{\partial r^i}{\partial z^k} g_{ij} \frac{\partial r^j}{\partial z^l}$$

on g_{ij} és la mètrica euclidiana habitual de $\mathbb{R}^3$ i per qualsevol punt de la superfície. Per tant, es pot reescriure h_{kl} com

$$h_{kl} = \frac{\partial r^i}{\partial z^k} g_{ii} \frac{\partial r^i}{\partial z^l}$$

Per a tot punt m de la superfície $\frac{\partial}{\partial z^1}|_m, \frac{\partial}{\partial z^2}|_m$ és una base de l'espai tangent en aquest punt (estem considerant la superfície com a varietat diferenciable). Aquests vectors s'expressen respecte a la base de l'espai tangent de $\mathbb{R}^3$ $\{\frac{\partial}{\partial r^1}, \frac{\partial}{\partial r^2}, \frac{\partial}{\partial r^3}\}$ en qualsevol punt de la superfície (a partir d'ara per simplificar notació no escriurem explícitament que estem avaluant en aquell punt)

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z^1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r^i}{\partial z^1} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\eta = \frac{\partial}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r^i}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Així doncs $\vec{n}$ serà igual al producte vectorial habitual en $\mathbb{R}^3$ de ξ i η en cada punt, $[\xi, \eta]$. En altres paraules,

$$\vec{n} = \frac{[\xi, \eta]}{\sqrt{\langle [\xi, \eta], [\xi, \eta] \rangle}}.$$

És fàcil calcular que

$$[\xi, \eta] = (\frac{\partial r^2}{\partial z^1}\frac{\partial r^3}{\partial z^2} - \frac{\partial r^3}{\partial z^1}\frac{\partial r^2}{\partial z^2}, \frac{\partial r^3}{\partial z^1}\frac{\partial r^1}{\partial z^2} - \frac{\partial r^1}{\partial z^1}\frac{\partial r^3}{\partial z^2}, \frac{\partial r^1}{\partial z^1}\frac{\partial r^2}{\partial z^2} - \frac{\partial r^2}{\partial z^1}\frac{\partial r^1}{\partial z^2})$$

en la base de l'espai tangent de $\mathbb{R}^3$. De fet, aquests termes es poden identificar com els menors del jacobià $(\partial r^\alpha / \partial z^\beta)$ i són els mateixos termes que acompanyen T_{ij} quan apliquem el canvi de coordenades. Per aquesta raó podem escriure

$$\iint_U T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iint_U \langle T, [\xi, \eta] \rangle dz^1 \wedge dz^2$$

on $T = (T_{23}, -T_{13}, T_{12})$. Per últim observem que

$$\langle [\xi, \eta], [\xi, \eta] \rangle = h$$

on h és el determinant de la matriu (h_{kl}). Gràcies a aquesta igualtat $\vec{n} = \frac{[xi,\eta]}{\sqrt{h}}$ i, per tant,

$$\iint_U T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iint_U \langle T, \vec{n} \rangle \sqrt{|h|} dz^1 \wedge dz^2$$

com volíem veure. □

Gràcies a aquest teorema i expressant el resultat en una base ortonormal dels espais tangents de la superfície (fent $\sqrt{|g|} = 1$) que estem considerant, obtenim

$$\iint_U [(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}) dx^1 \wedge dx^2 + (\frac{\partial E_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^3}) dx^1 \wedge dx^3 + (\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}) dx^2 \wedge dx^3] =$$

$$= \iint_U \langle \vec{\nabla} \times \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

on $d\sigma$ és l'habitual element d'àrea i $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ és aquest camp vectorial definit com en el teorema. Si incorporem la informació donada per l'equació de Maxwell, obtenim

$$-\iint_U \langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{n} \rangle d\sigma = \sum_{i=1}^{3} \oint_\Gamma E^i dx^i. \tag{3.10}$$

Aquesta igualtat ens diu que el ràtio del canvi de flux del camp magnètic a través d'una superfície respecte al temps és igual a la circulació del camp elèctric al voltant de la vora de la superfície. Aquest fet posa de manifest com un corrent elèctric pot fer aparèixer un camp magnètic.

(c) Considerem ara l'equació inhomogènia $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$, es tracta d'un cas semblant a l'apartat (a) i per tant si considerem el camp vectorial $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$ aleshores mitjançant el teorema de la divergència (2.20) obtenim per un domini regular tridimensional U amb vora Γ:

$$\iiint_U div\, \vec{E}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_\Gamma \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \tag{3.11}$$

i utilitzant la relació obtinguda de les equacions de Maxwell

$$\iiint_U \rho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_\Gamma \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \tag{3.12}$$

on $d\sigma$ és, com abans, la unitat d'àrea. Aquesta última igualtat s'interpreta com que el flux del camp elèctric a través de la superfície d'una regió de l'espai és igual a la càrrega total continguda en la regió. És a dir, el flux elèctric no es veu afectat per càrregues fora de la regió considerada.

(d) Per últim veurem la forma integral de l'equació inhomogènia $\vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$ la qual la calcularem de forma similar a (b) però ara considerant el camp magnètic. Sigui

$$\oint_\Gamma B^1 dx^1 + \oint_\Gamma B^2 dx^2 + \oint_\Gamma B^3 dx^3.$$

on $\oint$ es refereix al fet que Γ és un camí tancat. Aplicant el teorema d'Stokes i pel ja vist anteriorment

$$\oint_\Gamma B^1 dx^1 + \oint_\Gamma B^2 dx^2 + \oint_\Gamma B^3 dx^3 = \iint_U \langle \vec{\nabla} \times \vec{B}, \vec{n} \rangle d\sigma,$$

fent servir l'equació inhomogènia i la bilinealitat del producte escalar resulta

$$\oint_\Gamma B^1 dx^1 + \oint_\Gamma B^2 dx^2 + \oint_\Gamma B^3 dx^3 = \iint_U \langle -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{n} \rangle d\sigma + \iint_U \langle \vec{j}, \vec{n} \rangle d\sigma. \tag{3.13}$$

Aquesta última igualtat s'interpreta com que el corrent net a través d'una superfície menys el ratio de temps de canvi del flux del camp elèctric és igual a la circulació del camp magnètic al voltant de la frontera de la superfície.

3.3 Equacions de Maxwell en termes de formes diferencials

En el moment de presentar les equacions de Maxwell hem diferenciat dos tipus (3.1) i (3.2). Aquesta distinció és important, ja que expressarem les dues equacions homogènies com una de sola i el mateix per les inhomogènies.

3.3.1 Equacions homogènies de Maxwell

Expandint (3.1) s'obté

$$\vec{\nabla}\ \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3} = 0 \tag{3.14}$$

i

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial E^3}{\partial x^2} - \frac{\partial E^2}{\partial x^3} + \frac{\partial B^1}{\partial x^0} = 0,\ \frac{\partial E^1}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^0} = 0,\ \frac{\partial E^2}{\partial x^1} - \frac{\partial E^1}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^0} = 0. \tag{3.15}$$

Considerant el tensor de Faraday F en termes de formes diferencials podem provar el següent resultat:

Teorema 3.5. *Les equacions homogènies de Maxwell vénen donades per $dF = 0$.*

Demostració. Si calculem dF obtenim

$$dF = -\sum_{\alpha=1}^{3} dE^\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha + dB^1 dx^2 \wedge dx^3 + dB^2 dx^3 \wedge dx^1 + dB^3 dx^1 \wedge dx^2 =$$

$$= -\frac{\partial E^1}{\partial x^2} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial E^1}{\partial x^3} dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial E^2}{\partial x^1} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial E^2}{\partial x^3} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 -$$
$$-\frac{\partial E^3}{\partial x^1} dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial E^3}{\partial x^2} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B^1}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$+\frac{\partial B^2}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B^3}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial B^3}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= (-\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} + \frac{\partial B^3}{\partial x_0})\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + (\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial B^2}{\partial x_0})\, dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1$$
$$+(-\frac{\partial E^2}{\partial x^3} + \frac{\partial E^3}{\partial x^2} + \frac{\partial B^1}{\partial x^0})dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3})dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Si igualem $dF = 0$, aleshores això és equivalent a

$$(-\frac{\partial E^1}{\partial x^2} + \frac{\partial E^2}{\partial x^1} + \frac{\partial B^3}{\partial x^0}) = 0,\ (\frac{\partial E^1}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^0}) = 0,\ (-\frac{\partial E^2}{\partial x^3} + \frac{\partial E^3}{\partial x^2} + \frac{\partial B^1}{\partial x^0}) = 0$$

les quals són les mateixes equacions que en (3.15), i

$$(\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3}) = 0$$

correspon a (3.14). □

Hem vist que, utilitzant formes diferencials, podem reduir les dues equacions homogènies de les equacions de Maxwell a una equació simple i compacte, $dF = 0$. Una altra forma de veure aquesta igualtat és observar que

$$dF = ddA = 0. \tag{3.16}$$

És important observar que no hi ha cap connexió entre l'obtenció de $dF = 0$ i la mètrica. Això no passarà en les equacions inhomogènies. Aquesta part es veurà en la secció següent.

3.3.2 Equacions inhomogènies de Maxwell

De (3.2) obtenim

$$\vec{\nabla}\,\vec{E} = \rho \Leftrightarrow \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = \rho \tag{3.17}$$

i també

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial B^3}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2}{\partial x^3} - \frac{\partial E^1}{\partial x^0} = \rho v^1,\ \frac{\partial B^1}{\partial x^3} - \frac{\partial B^3}{\partial x^1} - \frac{\partial E^2}{\partial x^0} = \rho v^2,\ \frac{\partial B^2}{\partial x^1} - \frac{\partial B^1}{\partial x^2} - \frac{\partial E^3}{\partial x^0} = \rho v^1 \tag{3.18}$$

on $\vec{j} = (\rho, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3)$ amb ρ, com ja hem vist abans, la densitat total de càrrega i $v = (v^1, v^2, v^3)$ la velocitat de càrrega en cada punt de l'espai 3-dimensional amb coordenades x^1, x^2, x^3. Abans d'entrar en la demostració de l'obtenció de les equacions en termes de formes diferencials definirem respecte a l'espai de Minkowski el 4- vector del corrent.

Definició 3.6. *El 4-vector del corrent $j^{\mu}_{(4)}$ està definit com*

$$j^{\mu}_{(4)} = (\rho, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3).$$

Podem expressar $j_{(4)\,\mu} = g_{\mu\nu} j^{\nu}_{(4)} = (-\rho, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3)$ en termes d'una 1-forma diferencial, J,

$$J = \sum_{i=0}^{3} j^i dx^i = -\rho dx^0 + \rho v^1 dx^1 + \rho v^2 dx^2 + \rho v^3 dx^3. \tag{3.19}$$

Teorema 3.7. *Les equacions inhomogènies de Maxwell vénen donades per* $*d*F = J$.

Demostració. En comptes de veure $*d*F = J$ demostrarem que $d*F = *J$ ja que $*J$ és una 3-forma diferencial i per tant $** = (-1)^{(4-3)3+1} = 1$.

Pel lema 2.2 sabem que

$$*F = \sum_{\alpha=1}^{3} B^{\alpha} dx^0 \wedge dx^{\alpha} + E^1 dx^2 \wedge dx^3 - E^2 dx^1 \wedge dx^3 + E^3 dx^1 \wedge dx^2$$

si apliquem d obtenim

$$d*F = \sum_{\alpha=1}^{3} dB^{\alpha} dx^0 \wedge dx^{\alpha} + dE^1 dx^2 \wedge dx^3 - dE^2 dx^1 \wedge dx^3 + dE^3 dx^1 \wedge dx^2 =$$

$$= \frac{\partial B^1}{\partial x^2} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial B^1}{\partial x^3} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \frac{\partial B^2}{\partial x^1} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial B^2}{\partial x^3} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$- \frac{\partial B^3}{\partial x^1} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \frac{\partial B^3}{\partial x^2} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E^1}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$- \frac{\partial E^2}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E^3}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$
$$= (\frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (\frac{\partial B^2}{\partial x^3} - \frac{\partial B^3}{\partial x^2} + \frac{\partial E^1}{\partial x^0}) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$(\frac{\partial B^1}{\partial x^3} - \frac{\partial B^3}{\partial x^1} - \frac{\partial E^2}{\partial x^0}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + (\frac{\partial B^1}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2}{\partial x^1} + \frac{\partial E^3}{\partial x^0}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

$$(*J)_{123} = \epsilon_{0123} j^0 = \rho, \qquad (*J)_{023} = \epsilon_{1023} j^1 = -\rho v^1,$$
$$(*J)_{013} = \epsilon_{2013} j^2 = \rho v^2, \qquad (*j)_{012} = \epsilon_{3012} j^3 = -\rho v^3,$$

En altres paraules,

$$*J = \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \rho v^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \rho v^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \rho v^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2.$$

Si considerem $d*F = *J$, aleshores

$$(\frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3}) = \rho, \qquad (-\frac{\partial B^2}{\partial x^3} + \frac{\partial B^3}{\partial x^2} - \frac{\partial E^1}{\partial x^0}) = \rho v^1,$$
$$(\frac{\partial B^1}{\partial x^3} - \frac{\partial B^3}{\partial x^1} - \frac{\partial E^2}{\partial x^0}) = \rho v^2, \qquad (-\frac{\partial B^1}{\partial x^2} + \frac{\partial B^2}{\partial x^1} - \frac{\partial E^3}{\partial x^0}) = \rho v^3$$

i això prova el teorema. □

En aquest cas, com hem utilitzat el producte de Hodge, la mètrica si juga un paper important en les definicions. En resum, hem demostrat que les equacions de Maxwell en termes de formes diferencials podem ser escrites mitjançant dues equacions aparentment senzilles

$$dF = 0 \tag{3.20}$$

$$*d*F = J. \tag{3.21}$$

Un cop obtingudes aquestes equacions volem veure ara quins resultats ja coneguts podem retrobar utilitzant aquest llenguatge de formes diferencials.

3.3.3 Equació de continuïtat

L'equació de continuïtat dóna una idea sobre el canvi del flux de corrent elèctric segons la variació de la càrrega total que tinguem. Es tracta d'una formulació matemàtica que recull la idea de la conservació de càrrega i l'equació que s'obté de forma natural de les equacions de Maxwell és $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Si utilitzem (3.21) es pot obtenir fàcilment l'equació de continuïtat

$$*d * F = J \Leftrightarrow d * F = *J \Rightarrow dd * F = d * J \Rightarrow d * J = 0,$$

Utilitzant els càlculs fets en el Teorema 2.5 sabem que

$$*J = j^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + j^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - j^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

i, per tant,

$$d * J = (\frac{\partial \rho}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = (\frac{\partial \rho}{\partial x^0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Igualant $d * J = 0$, obtenim l'equació de continuïtat.

Conclusions

En aquest treball s'ha vist, en primer lloc, una introducció a les nocions més bàsiques de la geometria diferencial. En concret, hem vist com traslladar cap a les varietats diferenciables conceptes coneguts del càlcul diferencial com, per exemple, derivades direccionals, corbes o integració. A continuació, s'ha definit el concepte de varietat riemanniana així com de varietats pseudo-riemanniana on s'ha vist també l'operador $*$ de Hodge, un concepte molt útil per poder definir, en varietats riemannianes i pseudo-riemannianes, operadors com el gradient, la divergència o el laplacià.

Finalment, hem aplicat tots els conceptes en la reformulació de les equacions de Maxwell en termes de formes diferencials. D'aquesta manera hem demostrat que aquestes equacions poden ser expressades amb només les dues equacions següents

$$dF = 0 \qquad\qquad *d*F = J$$

i a partir de les quals es pot observar com la primera no depèn de la mètrica escollida. Aquest fet és clau per entendre com, per exemple, les equacions homogènies de Maxwell poden ser invariants sota el grup de Galileu. També s'ha vist com l'equació de continuïtat apareix de forma natural d'aquestes equacions i, per tant, la conservació de càrrega és un concepte intrínsec dins les equacions.

A més, hem comprovat com es poden retrobar resultats coneguts de les equacions de Maxwell al buscar la seva forma integral. Aquesta forma integral permet fer una anàlisi més físic de les implicacions d'aquesta teoria de l'electromagnetisme.

En resum, aquest treball només mostra un cas molt particular de tot el potencial que el càlcul tensorial pot oferir en el marc de la física teòrica.

Bibliografia

[1] C. Curràs Bosch, *Geometria diferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann*, Barcelona : Edicions Universitat de Barcelona, (cop. 2003).

[2] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko and S.P. Novikov *Modern Geometry-Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields. Graduate Texts in Mathematics: 93* Springer-Verlag New York , (1984,1992).

[3] D.J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics.* Pearson Education, (2012).

[4] J.M. Lee *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag New York, Inc (2012).

[5] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics.* Wiley, (1999).

[6] J.Llosa, A. Molina, *Relativitat especial amb aplicacions a l'electrodinàmica clàssica.* Barcelona : Publicacions de la Universitat de Barcelona, (1995)

[7] M. Nakahara *Geometry, Topology and Physics. Graduate Student Series in Physics.* New York [etc.] : Taylor & Francis, (cop. 2003).

[8] F.W. Warner *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics: 94*, (Preprint 2014).