



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Deducción y estudio teórico y
computacional de las ecuaciones
que determinan la dinámica de un
fluido

Autor: Víctor José Martínez Lahuerta

Director: Dr. Albert Mas Blesa

Realitzat a: Departament
de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de enero de 2018

Abstract

This work revolves on Navier-Stokes equations. In a first part, we investigate the conservation laws of mass and momentum in order to deduce the partial differential equations that governs Newtonian fluids dynamics. The distinction between a compressible/incompressible fluid is treated and some elementary examples, such as the ideal fluids, are also considered. In a second part we apply numerical methods to solve some 2-dimensional problems on partial differential equations, starting from a simple one on the heat equation and finishing with one on Navier-Stokes equations

Resumen

Este trabajo gira entorno a las ecuaciones de Navier-Stokes. En una primera parte, investigamos las leyes de conservación de la masa y del momento con tal de deducir las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan la dinámica de los fluidos Newtonianos. También se trata la distinción entre compresible/incompresible, y algunos ejemplos sencillos, como los fluidos ideales, también son considerados. En una segunda parte aplicamos métodos numéricos para resolver problemas 2-dimensionales de ecuaciones diferenciales parciales, empezando por un ejercicio mas sencillo sobre la ecuación del calor y acabando con uno sobre las ecuaciones de Navier-Stokes.

Agradecimientos

Me gustaría agradecerle a mi tutor, Albert Mas Blesa, su ayuda continua durante la realización de la parte teórica de este trabajo y su atención y preocupación. También me gustaría agradecerle a Arnau Pont Vílchez toda su ayuda desde el primer momento, tanto con los códigos como con la elaboración de los informes sobre los distintos estudios numéricos. Por último, me gustaría agradecerle a mi familia todos estos años de apoyo y confianza depositada en mí.

En especial me gustaría agradecerle al grupo CTTC de la UPC por permitirme trabajar y colaborar con ellos en toda la parte numérica presentada en este trabajo.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Deducción de las ecuaciones	1
1.1.1. Modelización matemática	1
1.2. Cálculo numérico	3
1.2.1. Resolución de los problemas	3
2. La conservación de la masa	5
2.1. La ley de conservación	5
2.2. Incompresibilidad, homogeneidad y formulación euleriana	6
3. Conservación de la cantidad de movimiento	9
3.1. Ley de Newton	9
3.2. Versión diferencial	12
3.3. Conservación del momento angular	13
4. Los fluidos perfectos. El caso incompresible	14
4.1. Clasificación de los fluidos	14
4.2. Fluidos perfectos	14
4.3. Fluidos perfectos incompresibles	14
4.4. Fluidos ideales	15
5. Los fluidos viscosos incompresibles	16
5.1. Fluidos Newtonianos. Ecuación de Navier-Stokes	16
5.2. Idea de la demostración del Teorema 5.2	17
5.3. Fluidos viscosos incompresibles	17
5.4. Cálculo adimensional y número de Reynolds	18
6. Sobre la existencia y unicidad de la solución	20
6.1. Problema de Stokes estacionario	21
7. Cálculo numérico	23
7.1. Ejercicio de difusión	23
7.1.1. Introducción y deducción de las ecuaciones	23
7.1.2. Problema principal	26
7.1.3. Conclusiones	29

7.2. Ejercicio de difusión mas convección	29
7.2.1. Introducción y deducción de las ecuaciones	29
7.2.2. Problema principal	31
7.2.3. Conclusiones	36
7.3. Problema de <i>driven cavity</i>	37
7.3.1. Introducción y deducción de las ecuaciones	37
7.3.2. Problema principal	41
7.3.3. Conclusiones	48
8. Conclusiones	49

1. Introducción

1.1. Deducción de las ecuaciones

La finalidad de esta introducción es la de familiarizar al lector con los primeros conceptos y la modelización sobre el movimiento de un medio continuo.

Definición 1.1. *Un medio continuo es un agregado que se mueve de forma continua en el tiempo y forma un todo continuo en el espacio.*

Para tratarlo matemáticamente supondremos que está compuesto por partículas puntuales. Evidentemente un tratamiento de un fluido como un medio continuo tiene sus limitaciones, realmente el fluido está compuesto por átomos y partículas subatómicas, por lo tanto nos tendremos que limitar a escalas mayores a una cierta longitud. Es conocido que el modelo funciona perfectamente para longitudes superiores a 10^{-5} , siempre teniendo en cuenta el tipo de fluido que queremos estudiar, si quisiéramos estudiar un gas entonces el recorrido libre medio de las partículas (distancia que recorre una de las partículas antes de colisionar) podría llegar a ser mas grande que las longitudes experimentales (que hemos tomado como 10^{-5}) y entonces el modelo dejaría de ser válido.

Para cada punto x del espacio consideraremos un entorno de dicho punto al que denominaremos volumen elemental representativo (δV) tal que $\delta V \gg \lambda$ y δV mucho menor que las longitudes macroscópicas con las que deseamos trabajar, donde λ es el *recorrido libre medio entre colisiones*. Cada volumen elemental es considerado como un medio continuo y homogéneo, en el que se define una velocidad media del movimiento de ese elemento en un instante de tiempo determinado $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. **La finalidad de nuestro estudio** será la de encontrar dicho campo de velocidades.

Para ello traduciremos distintas leyes físicas a un lenguaje matemático y trabajaremos con ellas para obtener su versión diferencial, trabajaremos con la ley de la conservación de la masa en el Capítulo 2, en el Capítulo 3 estudiaremos la ley de la conservación de la cantidad de movimiento y en los Capítulos 4 y 5 nos dedicaremos a estudiar algunos casos de interés físico que simplifican las ecuaciones, así como una distinción de los distintos tipos de fluidos. Para acabar la sección teórica discutiremos resultados de existencia y unicidad de soluciones en la sección 6. Todo este desarrollo teórico será extraído principalmente del libro de Juan Luis Vázquez *Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos* [2].

1.1.1. Modelización matemática

Empezaremos con la modelización del movimiento del fluido. Sea Ω_0 un dominio en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 y $\Phi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ una familia de transformaciones, donde Ω_t es un dominio de $\mathbb{R}^3 \forall t \in I = [0, T]$.

Para continuar con la modelización necesitamos ciertas hipótesis de regularidad:

(H_1) $\Phi : \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable C^k , con $k=1,2$ ó 3 .

Escribimos $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_t(\mathbf{x})$.

(H₂) Φ_t es un difeomorfismo $\forall t \in I$.

(H₃) Φ_0 es la identidad.

Básicamente lo que hacemos es cambiar nuestro dominio con el paso del tiempo, denotaremos por $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ la posición de una partícula de fluido en el tiempo t y por $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$ la posición de la misma en el tiempo $t=0$.

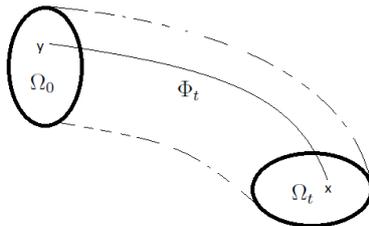


Figura 1: Transformación del dominio

Por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t). \quad (1.1)$$

Tal como avanzamos anteriormente la finalidad será encontrar el campo de velocidades, en la modelización que nosotros hemos realizado la velocidad de la partícula vendrá dada por

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_y. \quad (1.2)$$

Dentro de esta modelización es muy importante distinguir entre la formulación que vamos a usar, la lagrangiana o la euleriana. Como pretendemos calcular el campo de velocidades $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, el centro de nuestra formulación será la velocidad y esta es la llamada formulación euleriana.

La formulación Lagrangiana consiste en calcular la función transformación Φ y evidentemente queda resuelto el problema una vez calculada la transformación, es una versión más geométrica del problema.

Nuestro problema pasa a ser trivial si conocemos la expresión de \mathbf{u} en función de \mathbf{x} y t porque el problema se reduce a integrar el problema de valores iniciales siguiente

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}. \end{cases}$$

1.2. Cálculo numérico

Con la finalidad de estudiar las ecuaciones de Navier-Stokes, o cualquier sistema de ecuaciones diferenciales, de forma numérica, el primer paso a seguir es hacer una discretización del espacio. A continuación vamos a presentar los dos modelos mas usuales en cálculo numérico.

Elementos finitos: Modelo que consiste en subdividir el espacio en unos elementos muy pequeños pero de tamaño finito con formas geométricas simples. El conjunto de todos estos elementos constituye la llamada malla de elementos finitos.

Dentro de este modelo suponemos que en cada elemento finito la propiedad a estudiar evoluciona mediante una función simple conocida (que puede ser por ejemplo un polinomio) con un número finito de grados de libertad.

A continuación aplicamos el conjunto de ecuaciones diferenciales a cada elemento finito. Con este método lo que conseguimos es una continuidad en nuestro espacio de la propiedad a estudiar (ya que una de las condiciones de contorno es que la propiedad sea continua en los extremos del elemento de control).

Volúmenes finitos: De la misma manera que en elementos finitos en este modelo subdividimos el espacio en formas geométricas simples las cuales llamaremos nuestros volúmenes de control y estos volúmenes de control forman la malla de volúmenes.

Dentro de este modelo suponemos que cada volumen de control viene representado por un punto (su centro) y dicho punto tiene un valor de la propiedad a estudiar que supondremos que es el mismo para todo el volumen de control que representa.

A continuación aplicamos el conjunto de ecuaciones diferenciales a cada volumen de control. Con este método lo que conseguimos es una conservación en cada volumen de control (si estudiásemos la temperatura el incremento de esta en nuestro volumen de control vendría dado por la diferencia de calor que entra y sale por las caras del volumen).

Para el estudio de fluidos es más común el uso del modelo de volúmenes finitos que es el que vamos a usar en este trabajo.

1.2.1. Resolución de los problemas

En esta sección vamos a explicar el tratamiento que haremos a los distintos ejercicios que resolveremos en este trabajo: un problema de difusión que resolveremos en la Sección 7, añadiremos la parte convectiva al problema en la Sección 8 y por último resolveremos las ecuaciones de Navier-Stokes en un caso sencillo de *driven cavity* en el capítulo 8. Tal como hemos explicado anteriormente usaremos el método de volúmenes finitos, los volúmenes de control que usaremos serán como los de la figura 2.

Para resolver de forma numérica el conjunto de ecuaciones diferenciales lo que haremos será suponer que los valores de T_W y T_E son conocidos y resolveremos para una columna de la malla el sistema de ecuaciones, esto lo haremos de esta forma

porque así el sistema de ecuaciones que nos queda es una matriz tridiagonal que es muy fácil de resolver, iremos cambiando de columna (de izquierda a derecha y de derecha a izquierda) hasta que la diferencia máxima del valor a estudiar con los datos del step anterior (consideraremos un step como el hecho de resolver todas las columnas de izquierda a derecha y de derecha a izquierda) en todos los puntos sea inferior a una cierta tolerancia. Este método se llama TDMA (TriDiagonal-Matrix Algorithm) que encontraremos en [1].

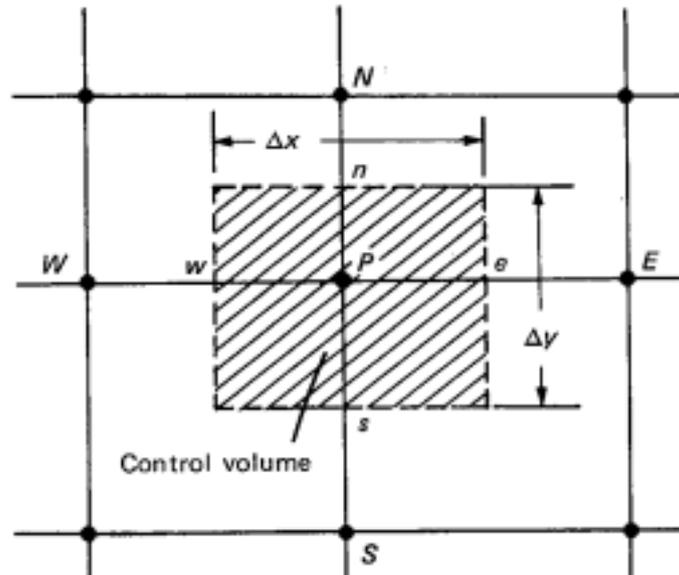


Figura 2: <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/ernesto/F2012/CFD/Readings/Patankar-NHTFF-1980.pdf>

Si a el lector le interesan los códigos que se han desarrollado para la realización de este trabajo los podrá encontrar en:

(<https://sites.google.com/view/programastfgvictormartinez>) .

2. La conservación de la masa

2.1. La ley de conservación

La ley de conservación de masa es: “*La materia no se crea ni se destruye*”. La dificultad que tenemos ahora es traducir dicha ley al lenguaje matemático.

La traducción de dicha ley sería la siguiente: existe una familia de unidades de masa $m_t \geq 0$, $t \geq 0$, definidas respectivamente en $\Omega_t = \Phi_t(\Omega_0)$ (que son medidas de Borel en sentido matemático) tales que para todo $D_0 \subset \Omega_0$ medible y $D_t = \Phi_t(D_0)$ se tiene que

$$\boxed{m_t(D_t) = m_0(D_0)}.$$

Con dicha forma lo que hacemos es decir que la transformación Φ no puede cambiar la medida masa. A esta versión de la ley de la conservación de la masa la denominaremos **CM1**.

Para poder seguir con el tratamiento matemático necesitamos definir la función densidad.

Definición 2.1. *La densidad ρ es una función que cumple la condición $dm_t(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, t)dx_1dx_2dx_3$.*

Se cumple también que $\rho(\cdot, t) \in L^1(\Omega_t)$ y es muy común en el campo de los fluidos suponer que dicha función es continua y diferenciable.

No tenemos que olvidar que nuestra finalidad es poder expresar nuestro problema mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, por lo tanto vamos a intentar expresar esta ley de conservación en forma diferencial.

Procederemos a ello integrando, en un entorno dado, nuestra función de densidad usando los conocimientos que tenemos de nuestro sistema, teniendo en cuenta que la transformación ϕ_t no altera la masa tal como afirma **CM1**. Obtenemos en lenguaje integral

$$\int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_0} \rho(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}. \quad (2.1)$$

Con la finalidad de tener el mismo dominio de integración hacemos un cambio de variable para obtener

$$\int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_0} \rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \det(J) d\mathbf{y}, \quad (2.2)$$

donde J es la matriz Jacobiana $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$. Hay que tener en cuenta que (H2) implica que la matriz Jacobiana es no singular para todo t y por lo tanto la ecuación (2.2) tiene sentido para cualquier transformación, si no se estaría destruyendo masa.

$$\int_{D_0} \rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \det(J(\mathbf{y}, t)) d\mathbf{y} = \int_{D_0} \rho(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}.$$

Teniendo en cuenta que el dominio D_0 es arbitrario, deducimos la ley de conservación en su segunda versión **CM2**

$$\boxed{\rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \det(J(\mathbf{y}, t)) = \rho(\mathbf{y}, 0)}, \quad (2.3)$$

y en su versión diferencial **CM2'**

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\rho |J|) = 0}, \quad (2.4)$$

donde hemos denotado $|J| = \det J$.

Teniendo en cuenta la fórmula del cambio de variable lo que estamos diciendo es que la Densidad \times Volumen es constante, y debido a que la función densidad la hemos definido como la cantidad de masa por unidad diferencial de volumen, vemos que esta expresión es equivalente a la ley. Esta ecuación es también conocida como **ecuación de continuidad**.

2.2. Incompresibilidad, homogeneidad y formulación euleriana

En este apartado vamos a estudiar dos propiedades del material, la incompresibilidad y la homogeneidad, tanto por la clasificación que comportan de los materiales como por la intuición que nos puede dar el estudio de esos casos mas sencillos.

Definición 2.2. *Un movimiento en un medio continuo se llama **incompresible** si la transformación Φ_t conserva los volúmenes (es decir la medida de Lebesgue) para todo tiempo t .*

Dado un dominio arbitrario $D_0 \in \Omega_0$ definimos el volumen como

$$\text{Vol}(D_t) = \int_{D_t} d\mathbf{x}, \quad \text{Vol}(D_0) = \int_{D_0} d\mathbf{y}.$$

La incompresibilidad significa $\text{Vol}(D_t) = \text{Vol}(D_0)$ y mediante la fórmula del cambio de variables esto implica

$$\boxed{|J(\mathbf{y}, t)| = 1 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_0, \quad t \geq 0}.$$

Y junto a CM2' obtenemos

$$\boxed{d\rho/dt = 0}.$$

Por lo tanto, un fluido incompresible es aquel que tiene densidad constante en sus trayectorias.

Definición 2.3. *Se define un fluido **homogéneo** como aquel que cumple $\nabla_x \rho = 0$.*

Entonces, un fluido homogéneo es un fluido con densidad constante en el espacio.

Hay que destacar que tanto estos dos conceptos como la ecuación **CM2'** las tenemos en forma lagrangiana porque la densidad nos depende de $\Phi(\mathbf{y},t)$. Recordemos que queríamos expresarlo en versión euleriana por lo tanto lo necesitamos tener en función del campo de velocidades. A continuación expresaremos la definición de incompresible y la ecuación de continuidad en su versión euleriana. Con dicha finalidad vamos primero a demostrar el siguiente lema

Lema 2.4. $\boxed{\frac{d}{dt} \det(J) = \det(J)(\operatorname{div} \mathbf{u}).}$

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\det(J) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} A_{ij},$$

donde hemos utilizado la definición del determinante para una columna i , y A_{ij} es el adjunto de ij , entonces

$$\frac{d}{dt} \det(J) = \sum_i \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) A_{ij} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) A_{ij},$$

donde hemos usado que la derivación de un determinante se puede derivar por columnas, mediante esa propiedad observamos que nos aparece la velocidad de forma natural, por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} A_{ij} &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} A_{ij} \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \det(J) = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \det(J) = \det(J)(\operatorname{div} \mathbf{u}) \square \end{aligned} \tag{2.5}$$

Debido a este resultado tenemos el teorema siguiente que se deduce de forma instantánea

Teorema 2.5. *Un fluido es incompresible si y sólo si*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

Partiendo de la ecuación de continuidad **CM2'** y usando el Lema 2.4 deducimos que

$$\frac{d}{dt} \rho |J| = |J| \frac{d}{dt} \rho + \rho |J| (\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

Teniendo en cuenta que $|J| \neq 0$ tenemos para $\rho \neq 0$ la versión **CM3**

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0}, \quad (2.6)$$

y recordando

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla,$$

obtenemos la versión **CM3'**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0}. \quad (2.7)$$

3. Conservación de la cantidad de movimiento

3.1. Ley de Newton

La segunda ley que queremos imponer para nuestro modelo es la conocida ley de la conservación de la cantidad de movimiento. Como esta ley esta relacionada con la dinámica del sistema, empezaremos su estudio con la segunda ley de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}). \quad (3.1)$$

Esta es la segunda ley de Newton para una partícula, donde hemos asumido la conservación de la masa, para un medio continuo necesitamos introducir la noción de impulso.

Definición 3.1. Definimos $I(D_t)$ como el **impulso** contenido en un trozo de fluido que ocupa el volumen D_t en un tiempo t .

En términos del impulso la segunda ley de Newton se presenta como

$$\frac{d}{dt}I(D_t) = F_{total}(D_t) = F_{ext}(D_t) + F_{int}(D_t). \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta la definición de impulso obtenemos en el caso continuo

$$I(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{u}\rho \, d\mathbf{x}.$$

Respecto a las fuerzas tenemos

$$F_{ext}(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}.$$

Supondremos en todo caso que dichas fuerzas son conocidas. En los fluidos, unas de las fuerzas mas importantes son las superficiales o de contacto porque explican la influencia relativa de capas de fluido contiguas.

Nuestra modelización de la realidad física supone que existe una densidad superficial de fuerza que denominaremos Π de modo que si $\Gamma_t = \partial D_t$ es la frontera espacial de D_t entonces, si $dS \equiv dS_t$ es la medida de superficie obtenemos la expresión

$$F_{sup}(D_t) = \int_{\Gamma_t} \Pi(\mathbf{x}, t) dS,$$

lo que nos lleva a un expresión integral de la conservación de la cantidad de movimiento que denotaremos por **CI1**

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \iiint_{D_t} \mathbf{f} d\mathbf{x} + \iint_{\Gamma_t} \Pi dS. \quad (3.3)$$

Para poder tener una expresión con la que sea mas fácil trabajar (recordemos que nuestra finalidad es encontrar un conjunto de ecuaciones diferenciales que definan nuestro problema), vamos a introducir el denominado **tensor de esfuerzos** \mathbf{S} sobre Γ_t que es el tensor que se deduce del siguiente teorema.

Teorema 3.2. (Cauchy) *La densidad de fuerza superficial Π ha de ser una función lineal del vector normal \mathbf{n} . Es decir, existe un tensor $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ tal que*

$$\Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.4)$$

Demostración Vamos a demostrar que para todo vector unitario $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ se tiene que

$$\Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = n_1 \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) + n_2 \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2) + n_3 \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3). \quad (3.5)$$

Sera necesario suponer que

- (1) Las aceleraciones y las fuerzas externas son acotadas.
- (2) Π es continuo en \mathbf{x} . Esta hipótesis es solo necesaria para poder integrar Π .

Sea e_1, e_2, e_3 una base ortogonal, construimos un tetraedro de vértices A, B, C y D , tal que el vector AB lleva la dirección de \mathbf{e}_1 y tiene longitud a_1 , AC la dirección de \mathbf{e}_2 y longitud a_2 y AD la dirección de \mathbf{e}_3 y longitud a_3 . El tetraedro tiene cuatro caras que denominaremos $\Gamma_1=ACD$, $\Gamma_2=ABD$, $\Gamma_3=ABC$ y finalmente $\Gamma=BCD$ con normales respectivas $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$, donde las $n_i = \cos\gamma_i$ son los cosenos directores, proporcionales a $1/a_i$. Tenemos $n_i > 0$ para todo i . Las áreas están relacionadas por $|\Gamma_i| = |\Gamma| n_i = |\Gamma| \cos\gamma_i$ (teorema de la proyección de áreas). Si ahora aplicamos **CI1** definiendo $\mathbf{I} = \iiint_{D_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x}$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \Pi(\mathbf{n}) dS + \int_{\Gamma_1} \Pi(-\mathbf{e}_1) dS + \int_{\Gamma_2} \Pi(-\mathbf{e}_2) dS + \int_{\Gamma_3} \Pi(-\mathbf{e}_3) dS \\ &= -F_{ext} + \frac{d\mathbf{I}}{dt}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que el segundo miembro de nuestra fórmula se puede acotar debido a (1) por $V(|\mathbf{f}|_{\infty} + \|\rho \mathbf{a}\|_{\infty})$, donde V es el volumen del tetraedro. Si dividimos la fórmula por $|\Gamma|$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \Pi(\mathbf{n}) dS + n_1 \frac{1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} \Pi(-\mathbf{e}_1) dS + n_2 \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} \Pi(-\mathbf{e}_2) dS \right. \\ & \left. + n_3 \frac{1}{|\Gamma_3|} \int_{\Gamma_3} \Pi(-\mathbf{e}_3) dS \right| \leq \frac{V}{|\Gamma|} (|\mathbf{f}|_{\infty} + \|\rho \mathbf{a}\|_{\infty}). \end{aligned}$$

Consideremos un tetraedro homotético a escala $\varepsilon > 0$, de lados εa_i , volumen $V_{\varepsilon} = \varepsilon^3 V$ y áreas laterales $|\Gamma_i^{\varepsilon}| = \varepsilon^2 |\Gamma_i|$. En el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ el segundo término se anula y se cumple

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\Gamma^\varepsilon|} \int \int_{\Gamma^\varepsilon} \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS = \Pi(A, t, \mathbf{n}),$$

así como fórmulas similares en las otras caras. Entonces deducimos la siguiente relación

$$\Pi(A, t, \mathbf{n}) + n_1 \Pi(A, t, -\mathbf{e}_1) + n_2 \Pi(A, t, -\mathbf{e}_2) + n_3 \Pi(A, t, -\mathbf{e}_3) = 0. \quad (3.6)$$

Esta relación la hemos demostrado para $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$ con $n_i > 0$. En el caso de algún cambio de signo podríamos llegar a la misma conclusión con una reorientación de los ejes, y en el caso de que se anule algún n_i entonces llegaríamos a la misma expresión girando los ejes y por lo tanto (3.6) es cierto para todo vector unitario \mathbf{n} . Podríamos resumir el resultado anterior como: *existe equilibrio local de las fuerzas de contacto*, reflejado en (3.6).

Tenemos una expresión en términos de $-e_1, -e_2$ y $-e_3$ pero nos interesaría con signo positivo, así que vamos a ver como afecta este cambio de signo. Sea H una bola de radio ε centro \mathbf{x}_0 , si la dividimos mediante un plano de normal \mathbf{e}_1 en dos semiesferas H_1 y H_2 con superficies exteriores Γ_1 y Γ_2 y sea Γ la superficie común a las dos semiesferas, orientada con normal exterior \mathbf{e}_1 en B_1 y $-\mathbf{e}_1$ en B_2 , entonces, teniendo en cuenta los argumentos de la parte anterior deducimos

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma_1} \Pi dS + \iint_{\Gamma_2} \Pi dS &= O(\varepsilon^3), \\ \iint_{\Gamma_1} \Pi dS + \iint_{\Gamma} \Pi dS &= O(\varepsilon^3), \\ \iint_{\Gamma_2} \Pi dS + \iint_{\Gamma} \Pi dS &= O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

las tres expresiones anteriores corresponden a la ley de conservación aplicada respectivamente a H, H_1 y H_2 . Restando, dividiendo por ε^2 y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$\Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) + \Pi(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_1) = 0. \quad (3.7)$$

El mismo resultado obtendríamos para cualquier otra dirección. Este resultado se interpreta como la *igualdad de las fuerzas de acción y reacción*, que es la tercera ley de Newton.

A partir de (3.6) y (3.7) obtenemos la igualdad (3.5) para $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$.

Ahora simplemente nos queda observar que si definimos \mathbf{S} como

$$S_i = \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i),$$

donde S_i representa la columna i ésima de \mathbf{S} y así queda demostrado el teorema. \square

La forma del tensor \mathbf{S} nos da mucha información sobre nuestro fluido por lo tanto vamos a definir que información nos da cada componente.

Definición 3.3. *Los esfuerzos normales S^{ii} (colineales con \mathbf{n}) se denominan esfuerzos de tensión si $S^{ii} > 0$ o de compresión si $S^{ii} < 0$. Los esfuerzos no diagonales se denominan esfuerzos cortantes o de cizalladura.*

3.2. Versión diferencial

Tal como insistimos en el tema anterior necesitamos una versión diferencial de la ley **CI1** para llegar a nuestro objetivo. Para ello lo que haremos será cambiar la integral de superficie por una integral de volumen mediante el teorema de Gauss que recordaremos a continuación

Teorema 3.4. (Teorema de Gauss) Sean H y U dos subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^3 donde $U \subset H$ es simplemente conexo y $S = \partial U$ es una curva regular o regular a trozos y cerrada. Sea $F: H \rightarrow \mathbb{R}^3$, un campo vectorial de clase C^1 y sea $\vec{\mathbf{n}}$ el vector normal a la superficie apuntando hacia el exterior del volumen U . Entonces

$$\iint_S F \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \iiint_U \nabla \cdot F dx.$$

Recordando por último que suponemos que $\rho(\mathbf{x}(t), t) = cte$ con el tiempo obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{u} dx = \int_{D_t} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dx = \int_{D_t} (\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{S}) dx, \quad \forall D_t \subset \Omega.$$

Debido a la arbitrariedad de D llegamos a la versión diferencial **CI2**

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} + \text{div} \mathbf{S}}. \quad (3.8)$$

Esta ecuación representa el equilibrio de fuerzas a nivel puntual. El primer miembro es el *término de inercia*, masa por aceleración. El segundo se descompone en dos sumandos, uno de las *fuerzas externas*, que es común con la mecánica clásica, y el otro de las *fuerzas de contacto*, que caracteriza la dinámica del medio continuo, aquí es donde vemos el efecto de las particularidades de los fluidos, como por ejemplo el efecto del contacto de dos láminas que hemos comentado anteriormente.

Recordando que

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u},$$

y teniendo en cuenta también que $\rho \neq 0$ llegamos a una expresión mas conocida **CI2'**

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \text{div} \mathbf{S}}. \quad (3.9)$$

Veamos un caso de utilidad.

Definición 3.5. Definimos los fluidos perfectos como aquellos en que \mathbf{S} es una matriz isotropa, en notación usual

$$\mathbf{S} = -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{Id},$$

donde \mathbf{Id} es la matriz identidad y $p(\mathbf{x}, t)$ es una función que definimos como la presión del fluido.

3.3. Conservación del momento angular

Hasta ahora hemos impuesto la conservación de la cantidad de movimiento o momento lineal, esto es suficiente para describir la dinámica de una masa puntual, pero al tener un cuerpo extenso necesitamos también la conservación del momento angular.

Recordemos que el momento angular viene dado por $\mathbf{x} \times m\mathbf{u}$ por lo tanto llegamos a la ecuación

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D_t} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \iiint_{D_t} (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) d\mathbf{x} + \iint_{\Gamma_t} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\Pi}) dS. \quad (3.10)$$

reordenando términos obtenemos

$$\iiint_{D_t} \left(\rho \mathbf{x} \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \right) \right) d\mathbf{x} = \iint_{\Gamma_t} \mathbf{x} \times (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.11)$$

Recordando la definición del producto vectorial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i a_j b_k,$$

y aplicándola al segundo término

$$\iint_{\Gamma_t} (\mathbf{x} \times (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}))_i dS = \iint_{\Gamma_t} \varepsilon_{ijk} x_j S^{kl} n_l dS = \iiint_{D_t} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j S^{kl}) d\mathbf{x},$$

donde en la última igualdad hemos usado de nuevo el teorema de Gauss. Entonces

$$\begin{aligned} \iiint_{D_t} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j S^{kl}) d\mathbf{x} &= \int \int \int_{D_t} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (S^{kl}) d\mathbf{x} + \int \int \int_{D_t} \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} S^{kl} d\mathbf{x} \\ &= \int \int \int_{D_t} (\mathbf{x} \times \text{div} \mathbf{S})_i d\mathbf{x} + \int \int \int_{D_t} \varepsilon_{ilk} S^{kl} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Recordando **CI2**

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} + \text{div} \mathbf{S},$$

e introduciendo la expresión anterior en la ecuación (3.11) obtenemos

$$\sum_{ikl} \mathbf{e}_i \int \int \int_{D_t} \varepsilon_{ilk} S^{kl} d\mathbf{x} = 0.$$

Teniendo en cuenta la independencia lineal de los \mathbf{e}_i obtenemos que

$$S^{kl} - S^{lk} = 0 \quad \forall k, l.$$

Por lo tanto la imposición de la conservación del momento angular se reduce a que el tensor de esfuerzos tiene que ser simétrico.

Es interesante observar que el hecho de que el tensor esté representado por una matriz simétrica implica que existe una base del espacio respecto a la cual la matriz que representa al tensor es diagonal, a los componentes de esta base se los denomina las direcciones principales de esfuerzos.

4. Los fluidos perfectos. El caso incompresible

4.1. Clasificación de los fluidos

Hasta el momento hemos deducido las ecuaciones diferenciales que tienen que cumplir los fluidos basándonos sólo en la imposición de leyes físicas. A continuación vamos a estudiar distintos casos que aparecen en muchos problemas físicos.

Para empezar vamos a clasificar los distintos tipos de fluidos, esta clasificación afecta a la forma que toma el tensor de esfuerzos. Básicamente los fluidos se clasifican en 4 tipos: perfectos incompresibles, perfectos compresibles, viscosos incompresibles y viscosos compresibles.

En este tema estudiaremos los fluidos perfectos incompresibles y en el tema siguiente los viscosos incompresibles, también estudiaremos su repercusión en las fórmulas que hemos obtenido hasta ahora.

Una motivación para el estudio de estos fluidos también viene dada por la no determinación del sistema de ecuaciones obtenido

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (*)_1, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \mathbf{f} + \text{div} \mathbf{S} \quad (*)_2, \end{cases}$$

correspondientes a **CM** $(*)_1$ y a **CI** $(*)_2$, donde recordemos la segunda ecuación vectorial es el equilibrio de fuerzas puntual. Este sistema de ecuaciones no está bien determinado al tener más incógnitas que ecuaciones. Por lo tanto el estudio de algunos fluidos con ciertas propiedades adicionales debería motivar al lector para poder resolver el problema.

4.2. Fluidos perfectos

Este tipo de fluidos ya fueron presentados en la Sección 3.2 véase Definición 3.5. Vamos a destacar ahora su importancia, el tensor de esfuerzos queda definido por una función denominada presión interna que es una variable esencial de la mecánica de fluidos, al aplicar la definición de fluido perfecto a la ecuación de conservación del impulso obtenemos la famosa **ecuación de Euler**

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}}. \quad (4.1)$$

Esta aproximación equivale a despreciar la fricción, evidentemente no es real pero en orden de magnitud si que tiene un interés físico importante.

4.3. Fluidos perfectos incompresibles

Recordemos el Teorema 2.5 Un fluido es incompresible si y solo si $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Por lo tanto para un fluido incompresible su ley de conservación de masa queda de la forma siguiente

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

En este caso tendríamos 5 ecuaciones, la vectorial $(*)_2$ y las dos escalares $(*)_1$ $\text{div}(\mathbf{u})=0$ y $d\rho/dt = 0$ que permiten en principio calcular las 5 incógnitas, \mathbf{u} , ρ y p .

A parte en los fluidos incompresibles es habitual la hipótesis adicional de que la densidad sea homogénea (e incluso mediante un cambio de unidades se normaliza a $\rho = 1$) y por lo tanto tendríamos 4 incógnitas, evidentemente necesitaremos condiciones iniciales para resolver nuestro sistema de ecuaciones. Una de las condiciones de contorno mas habituales es la siguiente

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

que refleja la existencia de una pared impermeable.

4.4. Fluidos ideales

Definición 4.1. *Un fluido perfecto, incompresible y homogéneo se llama **fluido ideal**.*

Hemos definido fluido homogéneo en el Capítulo 2. La aproximación de fluido ideal es la mas común en el ámbito de la física.

5. Los fluidos viscosos incompresibles

5.1. Fluidos Newtonianos. Ecuación de Navier-Stokes

Este tipo de fluidos es mas parecido al real porque admiten la acción tangencial entre capas contiguas llamada **viscosidad**. Empezaremos el capítulo con los postulados que vamos a usar.

(H₄) Postulado de Stokes. *El tensor de esfuerzos \mathbf{S} es función de \mathbf{u} a través de la matriz derivada $\nabla\mathbf{u}$ en el mismo instante y punto.*

(H₅) Postulado de linealidad. *La dependencia de \mathbf{S} respecto $\nabla\mathbf{u}$ es lineal.*

Definición 5.1. *Definimos un **fluido Newtoniano** como aquel que cumple los dos postulados anteriores.*

El postulado de linealidad implica que el tensor de esfuerzos tendrá la forma

$$S^{ij} = -p\delta_{ij} + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = \sum_{kl} a_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}.$$

La parte $p(\mathbf{x}, t)$ es la conocida parte isótropa y se identifica con la variable presión usual. La parte τ^{ij} se conoce como la parte desviatoria o desviacional del tensor. Aun así hay muchos grados de libertad en este tensor y vemos que nos falta alguna condición para que nuestro caso sea mas sencillo, la mas usual es suponer que el medio es isótropo y homogéneo, es decir que no existe ninguna dirección privilegiada, este hecho se resume en la hipótesis siguiente

(H₆) *La dependencia $\tau = \tau(\nabla\mathbf{u})$ es independiente del punto (\mathbf{x}, t) e invariante ante las simetrías y transformaciones ortogonales del espacio, es decir*

$$\tau(\mathbf{Q} \cdot \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{Q} \cdot \tau(\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{Q}^{-1}$$

para toda matriz ortogonal y toda simetría \mathbf{Q} .

Mediante esta condición extra se puede demostrar que entonces sólo tenemos dos constantes distintas libres en la dependencia de τ respecto a $\nabla\mathbf{u}$.

A continuación enunciaremos un teorema fundamental en el estudio de los fluidos newtonianos.

Teorema 5.2. *Bajo las hipótesis (H₄), (H₅) y (H₆) existe una función $p(\mathbf{x}, t)$ y coeficientes λ y μ tales que*

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\dagger). \quad (5.1)$$

Los coeficientes μ y λ son conocidos como primer y segundo coeficiente de viscosidad o coeficientes de Lamé. Se suele suponer que son constantes, aunque pueden depender de la densidad, la presión y la temperatura en general. Recordando **CI2**

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} + \text{div}\mathbf{S},$$

obtenemos

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}}. \quad (5.2)$$

Que son las famosas **ecuaciones de Navier-Stokes**. De hecho saber si las ecuaciones de Navier-Stokes planteadas con unos datos iniciales regulares admiten siempre una solución clásica y única que se prolonga para todo tiempo positivo, es uno de los 7 problemas del milenio planteados por el instituto *Clay Mathematics Institute* y que conlleva el premio de un millón de dólares, para mas información se puede consultar la página web del instituto Clay. (<http://www.claymath.org/millennium-problems/navierstokes-equation>).

5.2. Idea de la demostración del Teorema 5.2

Describimos la demostración en varios pasos:

1. En un primer paso separamos la matriz $\nabla \mathbf{u}$ en su parte simétrica y su parte antisimétrica,

$$\nabla u = \mathbf{D} + \mathbf{A},$$

y se demuestra, que la parte antisimétrica representa (localmente) una rotación rígida alrededor de un cierto eje, por lo que \mathbf{A} no refleja ninguna deformación del volumen fluido.

2. La matriz \mathbf{D} es diagonalizable por ser simétrica. Debido a la invariancia por transformaciones ortogonales nuestro problema se reduce a estudiar la forma de \mathbf{S} en la base en la que \mathbf{D} es diagonal.

3. Sea $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$. La isotropía implica que entonces $\tau(\mathbf{D})$ también ha de ser diagonal, $\tau = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Las τ_i son funciones lineales de las d_i y la dependencia es simétrica en i . Deducimos entonces que la única posibilidad es

$$\tau_i = C d_i + B(d_1 + d_2 + d_3) \quad (5.3)$$

con C y B constantes.

4. Recordemos que la traza de una matriz es un invariante bajo el cambio de base y por lo tanto $d_1 + d_2 + d_3 = \text{Traza}(\mathbf{D})$ es un invariante de \mathbf{D} . Sustituyendo ahora C por 2μ y B por λ obtenemos el resultado (5.1).

5.3. Fluidos viscosos incompresibles

Para este caso recordemos que se cumple $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y por lo tanto el tensor de esfuerzos toma la forma

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}.$$

Teniendo en cuenta que en general μ es una constante conocida, las ecuaciones de Navier-Stokes toman la forma mas usual

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde hemos introducido el llamado coeficiente de viscosidad cinemático $\nu = \mu/\rho$. Evidentemente para resolver este sistema se necesitan condiciones de contorno, las mas habituales son:

-Condición de no deslizamiento:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

-Condición de velocidad conocida en la frontera:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

5.4. Cálculo adimensional y número de Reynolds

Haciendo un estudio cualitativo de las ecuaciones de Navier-Stokes observamos que tiene 4 términos:

(1) Términos de inercia: $\rho d\mathbf{u}/dt$, donde el segundo sumando de este término se suele llamar término convectivo o de transporte $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.

(2) El término de presión: $-\nabla p$.

(3) El término de fuerzas exteriores: \mathbf{f} .

(4) El término de efectos viscosos (también llamado término de difusión o disipación viscosa): $\mu \Delta \mathbf{u}$.

El hecho de estudiar todos estos términos a la vez y ver cual es mas importante resulta un trabajo muy pesado. Para facilitar ese trabajo lo que haremos será, teniendo en cuenta que todos los términos tienen dimensiones de fuerza por unidad de volumen, introducir las variables adimensionales

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad p' = \frac{p}{P}, \quad \mathbf{f}' = \frac{\mathbf{f}}{F}.$$

Donde L, T, U, ρ_0, P y F tienen las unidades características de nuestro problema a estudiar. Mediante este cambio obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}) \mathbf{u}' &= -\frac{1}{\rho'} \nabla_{\mathbf{x}'} p' + \frac{1}{C} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho'} \mathbf{f}', \\ \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \mathbf{u}' &= 0,\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde nos aparece una constante que depende del problema

$$\frac{1}{C} = \frac{\nu T}{L^2}.$$

Esta constante C la definiremos como **número de Reynolds**. Si nos fijamos, todos los problemas distintos que podamos tener, cuya dinámica este determinada por la ecuación de Navier-Stokes, una vez adimensionemos la ecuación, obtendremos siempre las mismas ecuaciones con la única diferencia de el número de Reynolds, por lo tanto vemos que el número de Reynolds caracteriza la dinámica del problema.

Este hecho es muy interesante, podemos estudiar problemas cuya reproducción en un laboratorio sería impensable, por ejemplo por el simple hecho de su gran tamaño, simplemente tenemos que forzar a que la relación entre las unidades del problema tenga el mismo número de Reynolds. Usando el número de Reynolds obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}) \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho'} \nabla_{\mathbf{x}'} p' + \frac{1}{Re} \Delta_{\mathbf{x}'} \mathbf{u}' + \frac{1}{\rho'} f', \quad (5.6)$$

$$Re = \frac{UL}{\nu}.$$

Una vez tenemos esta expresión, teniendo en cuenta lo grande o pequeño que sea el número de Reynolds observaremos que términos de la ecuación son despreciables y cuales no, que es de un gran interés físico.

6. Sobre la existencia y unicidad de la solución

Mostraremos las técnicas que se usan hoy en día para tratar los casos mas elementales de Navier-Stokes ademas de otras ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Para ello vamos a empezar con los conceptos necesarios, partiendo de la introducción a la derivada débil.

Definición 6.1. Sea $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ decimos que v es la **derivada débil parcial con respecto a x_i** de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ si y sólo si

$$\int_{\Omega} v\phi dx = - \int_{\Omega} u\partial_i\phi dx$$

para toda función test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Gracias a la noción de derivada débil podemos definir los espacios de Sóbolev.

Definición 6.2. Los **espacios de Sóbolev** se denotan por $W^{m,p}(\Omega)$ y se definen como $W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) | D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\}$.

Claramente $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Usaremos la notación $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Para mas información sobre los espacios de Sóbolev se recomienda al lector [5].

El problema que queremos resolver es el del caso de fluidos viscosos incompresibles con coeficientes de viscosidad y densidad constantes (supondremos que la densidad es igual a 1 adimensionandola para simplificar). Entonces obtenemos el sistema de la Sección 5.3

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, & (*_1) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Queremos demostrar que existe una única solución en un dominio del espacio-tiempo. Nuestro dominio en el espacio sera $\Omega = \mathbb{R}^n$, el caso de un conjunto abierto acotado fijo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se trataría de forma similar dando un sentido de traza en $\partial\Omega$ a las funciones de $H^1(\Omega)$, y el dominio del tiempo será el intervalo $0 \leq t \leq T$. Nuestra solución tiene que cumplir unas condiciones iniciales para la velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, donde $\nabla \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = 0$, y unas condiciones de contorno que por simplicidad cogeremos $\mathbf{u} = 0$ en $\partial\Omega$.

La densidad de energía del sistema viene dada por la fórmula física $E(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}u^2 + e$, donde e es la magnitud energía interna específica o por unidad de masa, por lo tanto si multiplicamos nuestra fórmula $(*_1)$ por \mathbf{u} e integramos por partes obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx, \quad (6.1)$$

donde hemos usado la divergencia nula de \mathbf{u} para eliminar $\mathbf{u} \cdot \nabla u$ y $(\nabla \mathbf{p})\mathbf{u}$. Esta fórmula nos indica la energía del sistema, vale la pena destacar que los dos términos que hemos eliminado, que se denominan término de transporte y de presión respectivamente, no aportan ningún valor al total de la energía, esto es un resultado físico

interesante que nos da una idea de la importancia de la divergencia nula. Llegados a este punto, observamos que las únicas soluciones con sentido físico deberán pertenecer a $(L^2(\Omega))^n$, funciones de cuadrado integrable de dimensión n , donde $n=1,2$ o 3 en función de el caso que estudiemos, pero también necesitamos que la divergencia de \mathbf{u} sea de cuadrado integrable, por lo tanto introducimos el espacio

$$E(\Omega) = \{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n; \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \},$$

que es un espacio de Hilbert con el siguiente producto escalar asociado

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_E = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \cdot (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx.$$

Tenemos $H^1(\Omega) \subset E(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

6.1. Problema de Stokes estacionario

El problema de Stokes es aquel que se obtiene una vez eliminamos la parte no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ de la ecuación, que correspondía al término de convección o transporte y es una aproximación física útil en el caso de fluidos que se mueven a baja velocidad. Además estudiaremos el caso estacionario y por lo tanto desaparece también la derivada temporal, con lo que el sistema es

$$\begin{cases} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Definición 6.3. $\mathcal{V} = \{ \mathbf{u} \in (C_c^\infty)^n; \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \}$.

Teorema 6.4. $V = \{ \mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^n; \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \}$, es el cierre de \mathcal{V} en $(H^1(\Omega))^n$, donde $H_0^1(\Omega)$ es $H^1(\Omega)$ con valor 0 en el borde.

Para una demostración de este teorema consultar [3].

Se puede demostrar que los campos de V son ortogonales (en el sentido integral) a los campos que se expresan como gradientes de un potencial, véase [2] Sección 16.1.1. En nuestro caso este resultado es útil para tener en cuenta que $\langle \mathbf{u}, \nabla p \rangle = 0$ para todo $\mathbf{u} \in V$ y todo $\mathbf{w} = \nabla p \in L^2(\Omega)$. A continuación multiplicamos por una función test $v \in V$ nuestra ecuación y obtenemos

$$\nu \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}) \cdot (\nabla \mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx, \quad (6.3)$$

supondremos en general que $f \in L^2(\Omega)$. Lo que buscaremos a continuación es la existencia de una solución débil $\mathbf{u} \in V$ tal que la ecuación (6.3) se cumpla para todo $v \in V$. Cambiando la notación podemos escribir la ecuación anterior como

$$\nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{L^2},$$

donde el miembro de la derecha es el producto escalar en L^2 habitual. Se puede demostrar que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es coercitiva y continua en V y que $\langle \mathbf{f}, \cdot \rangle_{L^2}$ es una forma lineal y continua en V , por lo tanto podemos aplicar el siguiente teorema.

Teorema 6.5. Teorema de Lax-Milgram Sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal en un espacio de Hilbert H , $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a sea:

-Continua, i.e., $\exists \Lambda > 0$ tal que $|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \Lambda |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$.

-Coercitiva, i.e., $\exists \lambda > 0$ tal que $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \lambda |\mathbf{u}|^2 \quad \forall \mathbf{u} \in H$.

Entonces, para cada elemento $\mathbf{f} \in H$ existe un único $\mathbf{u} \in H$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_H \quad \forall \mathbf{v} \in H.$$

Aplicando este teorema encontramos la única solución a nuestra ecuación en sentido débil usando V como espacio de funciones test. Es decir hemos demostrado que existe una solución multiplicando por todas las funciones en V , pero este es sólo un subespacio de todas las posibles funciones test usuales $C_c^\infty(\Omega)$. Esto nos puede llevar a un error en la igualdad $\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0$. Debemos localizar este error en el espacio de funciones ortogonales a V . Sea

$$\mathbf{w} = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f},$$

entonces \mathbf{w} es ortogonal a todas las funciones de V pero puede ser que no sea 0. Usando el teorema de descomposición de Hodge, véase Teorema 16.6.2 [2], deducimos que se trata de el gradiente de una cierto potencial que llamaremos presión, es decir,

$$\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = \nabla p, \quad p \in L^2(\Omega),$$

y obtenemos que existe una única solución de (6.2).

7. Cálculo numérico

7.1. Ejercicio de difusión

7.1.1. Introducción y deducción de las ecuaciones

Con tal de lidiar con la dificultad de la ecuación de Navier-Stokes empezaremos resolviendo un caso simplificado, estudiando la parte lineal de estas ecuaciones mediante un caso donde un único escalar es transportado por fenómenos puramente difusivos (propiedades físicas constantes), que cumpliría la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \phi,$$

donde ϕ es la propiedad transportada y α la propiedad física constante. Concretamente, este planteamiento simplificado de las ecuaciones, define el transporte de la temperatura en un sólido con propiedades físicas constantes.

La finalidad del ejercicio es la de encontrar la evolución temporal de dicha temperatura en una placa sólida de 4 materiales distintos con unas condiciones de contorno determinadas. El tratamiento de los datos consistirá en igualar los flujos de calor mediante la ecuación bidimensional de conducción del calor

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S,$$

donde S hace referencia a las fuentes, ρ a la densidad del material y k es la conductividad del material.

Entonces para estudiar nuestra placa lo que hacemos es dividirla en una red de puntos y ver como se transmite el calor de unos a otros. Definiendo un volumen de control alrededor de los puntos donde supondremos que la temperatura en todo el volumen es la misma que la del punto que lo representa.

Si integramos nuestra ecuación en un volumen de control, teniendo en cuenta que siempre trabajaremos sin fuentes ($S=0$), obtenemos

$$\int_V \int_t^{\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\mathbf{x} = \int_V \int_t^{\Delta t} \text{div} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}, k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dt d\mathbf{x}, \quad (7.1)$$

utilizando el teorema de Gauss, que la temperatura en el volumen de control es la misma para un mismo tiempo y que el intervalo de tiempo es pequeño deducimos

$$\rho c \frac{T_P^1 - T_P^0}{\Delta t} V = \int_S \int_t^{\Delta t} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}, k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dt d\mathbf{S}, \quad (7.2)$$

donde el superíndice 0 y 1 en las temperaturas del volumen de control P indican el tiempo t o t+ Δt respectivamente. Nos interesa el gradiente en las caras, teniendo en cuenta esto obtenemos

$$\rho c \frac{T_P^1 - T_P^0}{\Delta t} V = \sum_{i=e,w,n,s} \int_t^{t+\Delta t} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}, k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_i \mathbf{n}_i \mathbf{S}_i dt, \quad (7.3)$$

donde la notación usada es la de la figura 3, entonces

$$\begin{aligned} \rho c \frac{T_P^1 - T_P^0}{\Delta t} V = & \int_t^{t+\Delta t} k_e \left(\frac{dT}{dx} \right)_e S_e - k_w \left(\frac{dT}{dx} \right)_w S_w \\ & + k_n \left(\frac{dT}{dy} \right)_n S_n - k_s \left(\frac{dT}{dy} \right)_s S_s dt, \end{aligned} \quad (7.4)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho c \frac{T_P^1 - T_P^0}{\Delta t} \Delta y \Delta x = & \int_t^{t+\Delta t} k_e \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_E} \Delta y - k_w \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_W} \Delta y \\ & + k_n \frac{T_N - T_P}{(\delta y)_N} \Delta x - k_s \frac{T_P - T_S}{(\delta y)_S} \Delta x dt. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Donde $(\delta y)_i$ y $(\delta x)_i$ indican la distancia con el centro del siguiente volumen de control en la dirección i . Ahora solo nos queda observar como evolucionan las temperaturas de los volúmenes vecinos con el tiempo. Haremos la aproximación que existe una función con peso f tal que

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} k_e \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_E} \Delta y - k_w \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_W} \Delta y + k_n \frac{T_N - T_P}{(\delta y)_N} \Delta x - k_s \frac{T_P - T_S}{(\delta y)_S} \Delta x dt = \\ & f \left[k_e \frac{T_E^1 - T_P^1}{(\delta x)_E} \Delta y - k_w \frac{T_P^1 - T_W^1}{(\delta x)_W} \Delta y + k_n \frac{T_N^1 - T_P^1}{(\delta y)_N} \Delta x - k_s \frac{T_P^1 - T_S^1}{(\delta y)_S} \Delta x \right] \\ & + (1 - f) \left[k_e \frac{T_E^0 - T_P^0}{(\delta x)_E} \Delta y - k_w \frac{T_P^0 - T_W^0}{(\delta x)_W} \Delta y + k_n \frac{T_N^0 - T_P^0}{(\delta y)_N} \Delta x - k_s \frac{T_P^0 - T_S^0}{(\delta y)_S} \Delta x \right]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Hay distintos modelos numéricos que dan distintos valores a f , por temas de convergencia, que no discutiremos en este trabajo, nosotros usaremos el método totalmente implícito que da un valor de $f=1$ (para mas información se puede consultar [1]), por lo tanto obtenemos

$$\rho c \frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} \Delta y \Delta x = k_e \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_E} \Delta y - k_w \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_W} \Delta y + k_n \frac{T_N - T_P}{(\delta y)_N} \Delta x - k_s \frac{T_P - T_S}{(\delta y)_S} \Delta x. \quad (7.7)$$

Donde si no hay superíndice es la temperatura en el instante $t + \Delta t$. Que traducimos de la siguiente manera

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b,$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_E &= \frac{k_e \Delta y}{(\delta x)_e}, & a_W &= \frac{k_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \\
 a_N &= \frac{k_n \Delta x}{(\delta y)_n}, & a_S &= \frac{k_s \Delta x}{(\delta y)_s}, \\
 a_P^0 &= \frac{\rho c \Delta x \Delta y}{\Delta t}, & b &= S c \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0, \\
 a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y.
 \end{aligned}$$

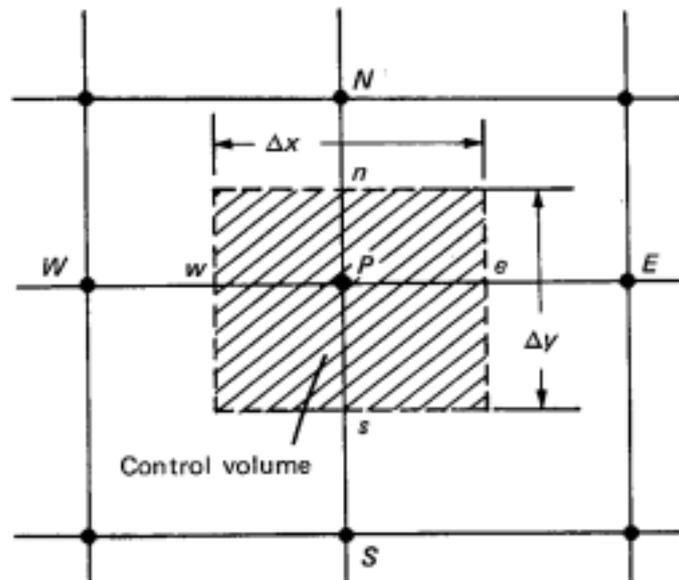


Figura 3: <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/ernesto/F2012/CFD/Readings/Patankar-NHTFF-1980.pdf>

Por último vale la pena destacar que como nuestra finalidad es que cada volumen de control cumpla la ecuación diferencial, si tenemos dos materiales distintos en el borde de uno de los lados del volumen de control entonces usamos

$$k_e = \frac{2k_P k_E}{k_P + k_E},$$

que es un ejemplo para la dirección este, que se puede deducir de las fórmulas siguientes

$$\begin{aligned}
 q_e &= \frac{k_e (T_P - T_E)}{(\delta x)_e} \\
 q_e &= \frac{T_P - T_E}{(\delta x)_{e-}/k_P + (\delta x)_{e+}/k_E}
 \end{aligned}$$

Para comprobar que el método iterativo funciona correctamente resolveremos primero un potencial que no dependa del tiempo, en este caso es el campo de temperaturas $T(x,y)=x^2 - y^2$. Al hacer iteraciones y comparar los valores del programa con los teóricos observamos un error del 0.0004 por ciento, tal como se ve en la figura 4.

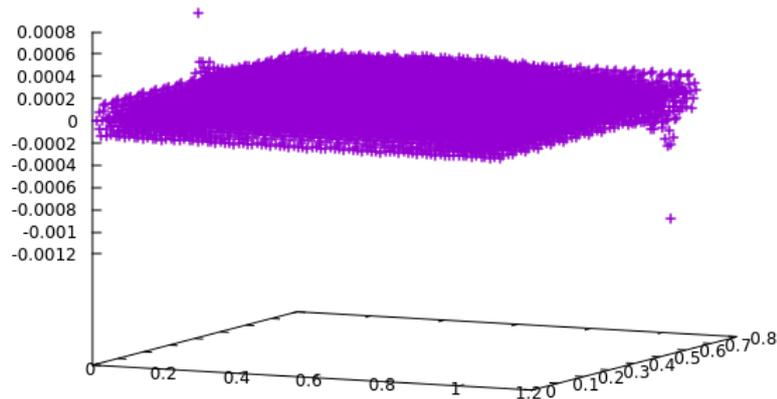


Figura 4: Error relativo en tanto por ciento para el campo $x^2 - y^2$.

7.1.2. Problema principal

En este caso queremos resolver el campo de temperaturas de una placa con las dimensiones mostradas en la figura 5.

Donde: $p1 = (0,5,0,4)$, $p2 = (0,5,0,7)$ y $p3 = (1,1,0,8)$. Con las características del material mostradas en la siguiente tabla.

Material	$\rho[kg/m^3]$	$c_p[J/kgK]$	k [W/mK]
M1	1500.00	750.00	170.00
M2	1600.00	770.00	140.00
M3	1900.00	810.00	200.00
M4	2500.00	930.00	140.00

Y con las siguientes condiciones de contorno

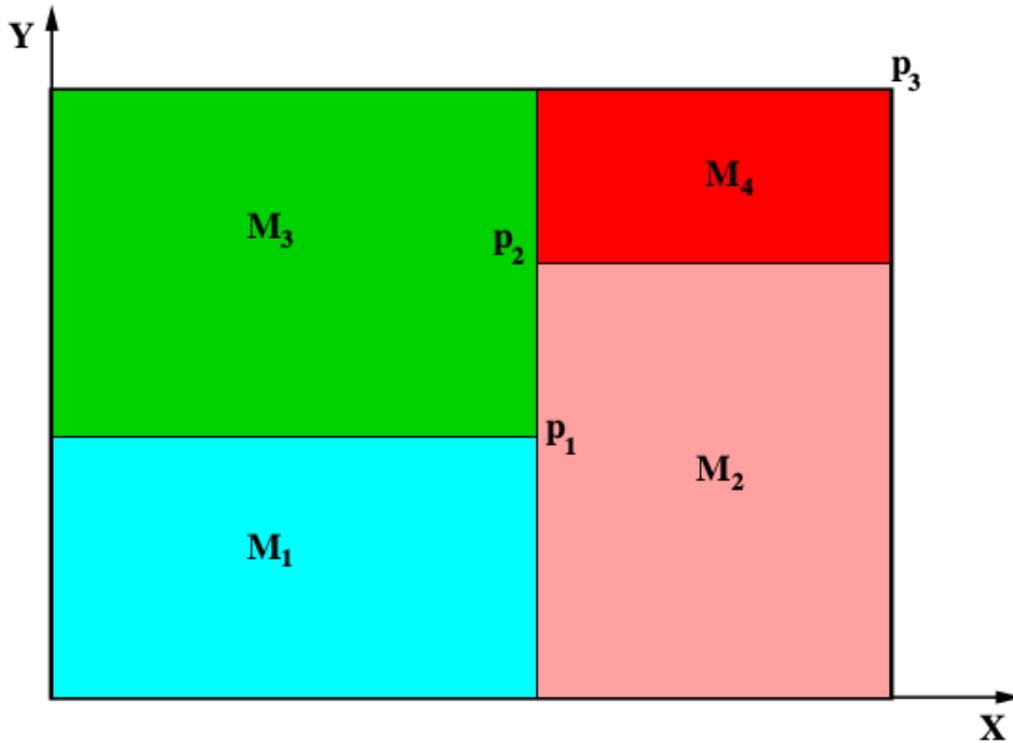


Figura 5: Dimensiones de la placa a estudiar.

Pared superior: flujo de calor entrante constante $Q_{flow} = 60,00W/m$ longitud.

Pared izquierda: en contacto con un fluido a $T_g = 33,00^\circ C$ y un coeficiente de transferencia de calor $9,00W/m^2K$.

Pared inferior: isoterma a $T = 23^\circ C$.

Pared derecha: $T = 8 + 0,005t^\circ C$ donde t es el tiempo en segundos.

En nuestro caso usaremos una red rectangular, la dificultad se basa en definir bien las condiciones de contorno en las paredes. Definimos los siguientes parámetros del problema: $Dx = 0,01$, $Dy = 0,01$ y $\Delta t = 1s$.

Una vez realizado con éxito el tratamiento de nuestro sistema, que consistía en el seguimiento de la evolución de la temperatura para dos sondas en la placa con posiciones: $(0.65,0.56)$ y $(0.74,0.72)$, y calcular el cuadro de temperaturas, enseñamos cual es el cuadro de temperaturas para $t=5000s$ en la figura 6.

Al usar distintos valores de dx y dy para aumentar la precisión de los resultados, usando siempre una malla cuadrada. Para los valores 0.02 , 0.01 y $0.005m$ al pasar de un valor al siguiente mas pequeño obtenemos un error relativo del 0.1 porciento en ambos casos, a continuación mostramos la diferencia de la temperatura de las sondas para el caso 0.01 y 0.05 en la figura 7.

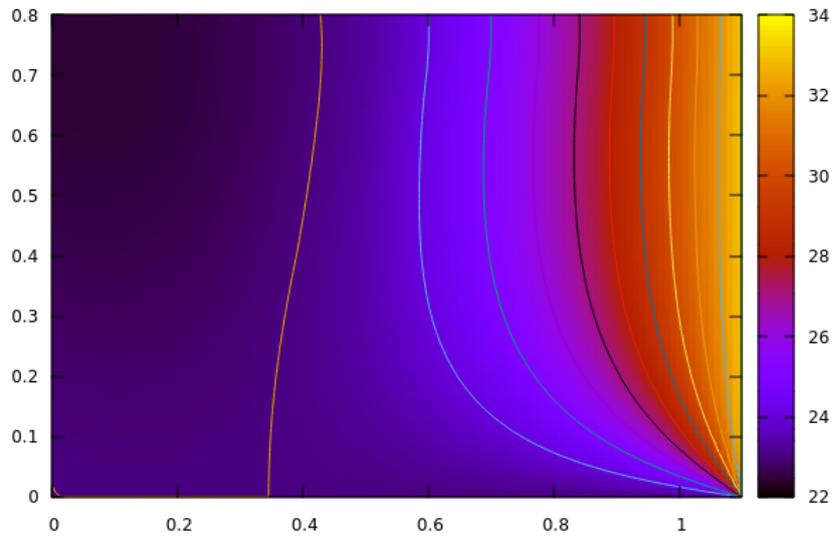


Figura 6: Campo de temperaturas en la placa para $t=5000s$.

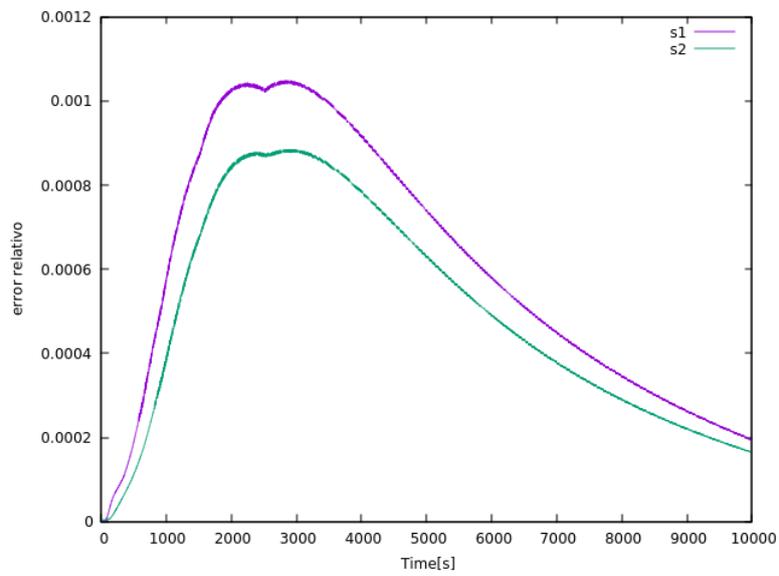


Figura 7: Error relativo $((\text{valor con } \Delta x = 0,01) - (\text{valor con } \Delta x = 0,005)) / (\text{valor con } \Delta x = 0,005)$ con el cambio de Δx .

Finalmente vamos a plotear como afecta el cambio en el *timestep* a el tiempo de ejecución del programa y a la precisión 8

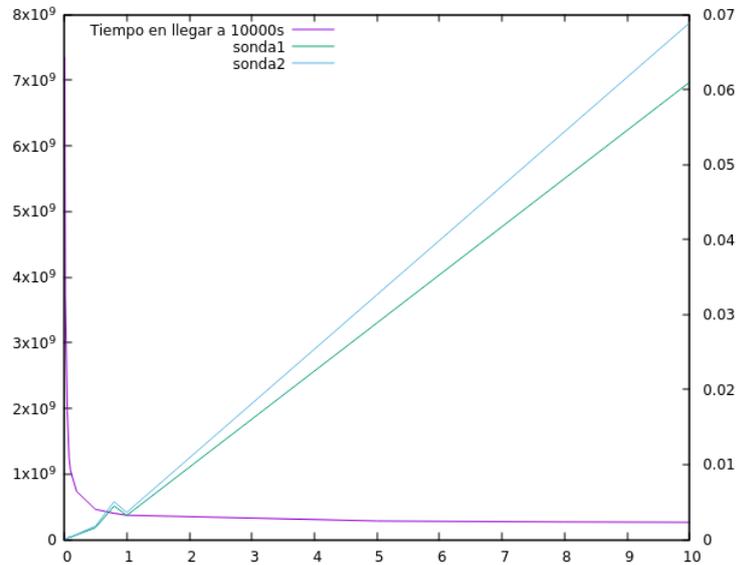


Figura 8: Efecto del cambio de *timestep* para alcanzar el tiempo de ejecución del programa eje y1 y para el error relativo en tanto por cien, eje y2.

7.1.3. Conclusiones

Vemos que si hacemos la malla mas pequeña entonces obtenemos mas precisión tal como cabía esperar, en nuestro caso ganábamos una precisión del 0,1 % cada vez que dividíamos por dos la distancia entre los puntos de la malla, evidentemente este aumento de los puntos de la malla viene acompañado de una necesidad de tiempo de procesación mayor por lo tanto tendríamos que elegir una malla adecuada para la precisión que nuestro experimento requiera. Al estudiar el tiempo de ejecución y la precisión respecto al *timestep* observamos como ere de esperar una disminución del tiempo de ejecución al aumentar el *timestep* (llegando a un valor practicamente constante a partir de un *timestep* de 5 aproximadamente), y un aumento de la precisión al disminuir el *timestep* aunque no es muy representativo el aumento.

7.2. Ejercicio de difusión mas convección

7.2.1. Introducción y deducción de las ecuaciones

En este segundo ejercicio, a parte del fenómeno de transporte por difusión, también se considerará el tranporte por convección (intercambio de masa). Ambos términos están presentes en las ecuaciones de Navier-Stokes.

La finalidad del ejercicio es la de encontrar la evolución de una determinada propiedad del material, pero en este caso teniendo ambos fenómenos de tranporte. Matemáticamente, este fenómeno de tranporte viene definido por la siguiente

ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S, \text{ siendo } J_i = \rho v_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial i},$$

donde S hace referencia a las fuentes, ρ a la densidad del material, v_i es la velocidad en la dirección i y Γ es la difusividad del material.

Al discretizar la ecuación y elegir la forma totalmente implícita obtenemos la siguiente ecuación de discretización

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b,$$

donde, recordemos, p=punto a estudiar, w=west, e= east.

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket, & a_W &= D_w A(|P_w|) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket, \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket, & a_S &= D_s A(|P_s|) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket, \\ a_P^0 &= \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}, & b &= S c \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0, \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}, & F_e &= (\rho v)_e \Delta y, & P_e &= \frac{F_e}{D_e}, \\ D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}, & F_w &= (\rho v)_w \Delta y, & P_w &= \frac{F_w}{D_w}, \\ D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}, & F_n &= (\rho v)_n \Delta x, & P_n &= \frac{F_n}{D_n}, \\ D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s}, & F_s &= (\rho v)_s \Delta x, & P_s &= \frac{F_s}{D_s}. \end{aligned}$$

La función $\llbracket a, b \rrbracket$ devuelve el máximo entre a y b, y por último la función $A(|P|)$ depende de la aproximación en la que estemos trabajando.

En el caso de *central difference*, tenemos $A(|P|) = 1 - 0,5|P|$, que corresponde a suponer que la temperatura de la cara del volumen de control es la temperatura media entre la del punto central y la del siguiente punto en la dirección de dicha cara.

Para el caso *upwind* en el que suponemos que, si el fluido viene de una dirección determinada entonces solo puede traer información de esa dirección y no depende de los otros puntos, tenemos $A(|P|) = 1$.

El caso anterior proviene basicamente de despreciar el termino difusivo (es decir un numero de pecllet muy grande). Para no despreciarlo un buen arreglo es el conocido método *power law* donde $A(|P|) = \llbracket 0, (1 - 0,1|P|)^5 \rrbracket$. En el cual solo se desprecia el término difusivo en el caso de que $|P| > 10$.

7.2.2. Problema principal

En nuestro problema tenemos una placa bidimensional con $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$.

El campo de velocidades de nuestra placa es

$$\begin{aligned}v_x(x, y) &= 2y(1 - x^2), \\v_y(x, y) &= -2x(1 - y^2),\end{aligned}$$

cuyas condiciones de contorno son

$$\begin{aligned}1 + \tanh[(2x + 1)\alpha] &\quad \text{en} \quad -1 < x < 0 \quad y = 0 \quad (\text{inlet}), \\1 - \tanh[\alpha] &\quad \text{en} \quad x = -1 \quad 0 < y < 1, \\1 - \tanh[\alpha] &\quad \text{en} \quad -1 < x < -1 \quad y = 1, \\1 - \tanh[\alpha] &\quad \text{en} \quad x = 1 \quad 0 < y < 1, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 &\quad \text{en} \quad 0 < x < 1 \quad y = 0 \quad (\text{outlet}).\end{aligned}$$

Y por lo tanto tendremos una situación como la descrita en la figura 9.

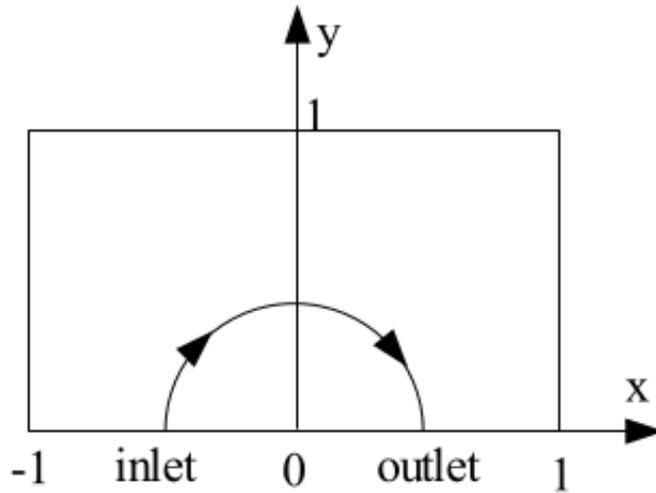


Figura 9: Problema a resolver.

Para empezar lo que hemos hecho es comparar los tres métodos introducidos para $Dx=Dy=0.005\text{cm}$ y $\Delta t = 1$, en el caso en el que $\frac{\rho}{\Gamma} = 1000$ que mostramos en la figura 10.

A continuación vamos a observar los distintos casos que hemos estudiado $\frac{\rho}{\Gamma}=10, 1000$ y 1000000 y en cada uno de ellos observaremos los resultados para valores $Dx=Dy=0.005, 0.01$ y 0.02 respectivamente en comparación con el valor real en la

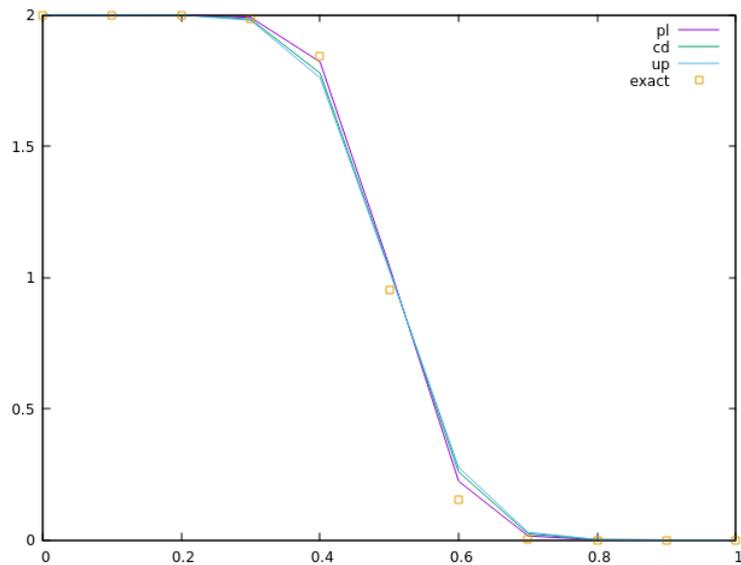


Figura 10: Comparación entre los metodos upwind, central differences y power law para $\frac{\rho}{\Gamma} = 1000$.

región del outlet, su error cuadrático y el campo de la propiedad en la placa al llegar al equilibrio.

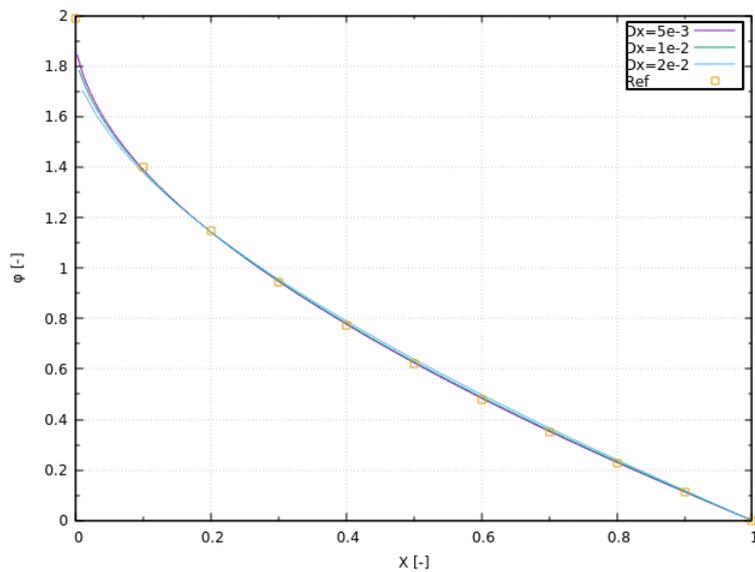


Figura 11: Resultados para distintos valores de $Dx=Dy$ en comparación con el valor real para el caso $\frac{\rho}{\Gamma} = 10$.

En la figura 12 podemos observar que si dx decrece entonces nos acercamos mas a los valores reales tal como esperábamos.

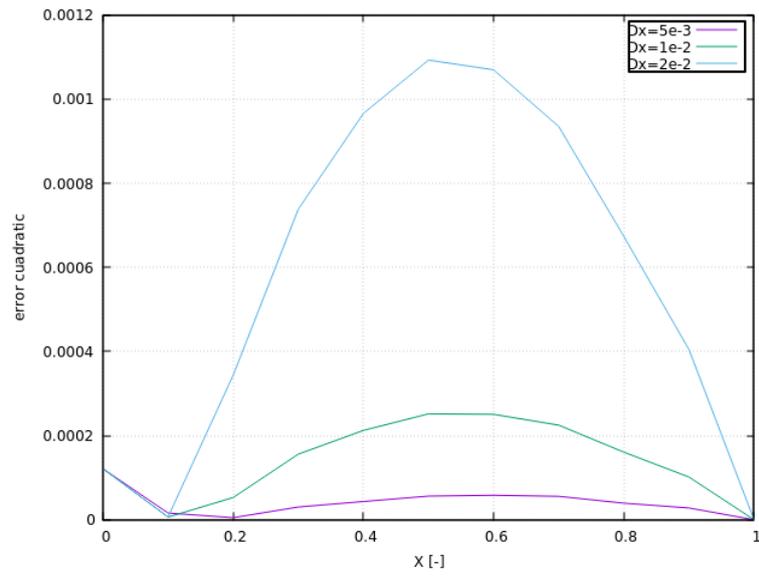


Figura 12: Error cuadrático (valor real - valor calculado)² en el caso $\frac{\rho}{\Gamma} = 10$ para distintos valores de $Dx=Dy$.

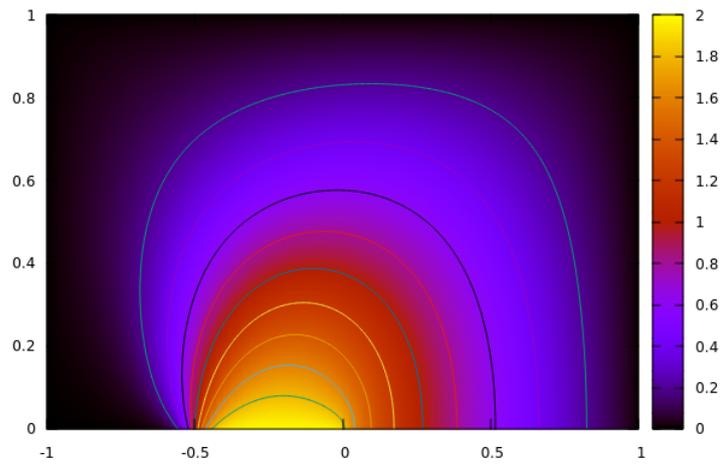


Figura 13: Campo propiedad para $\frac{\rho}{\Gamma} = 10$.

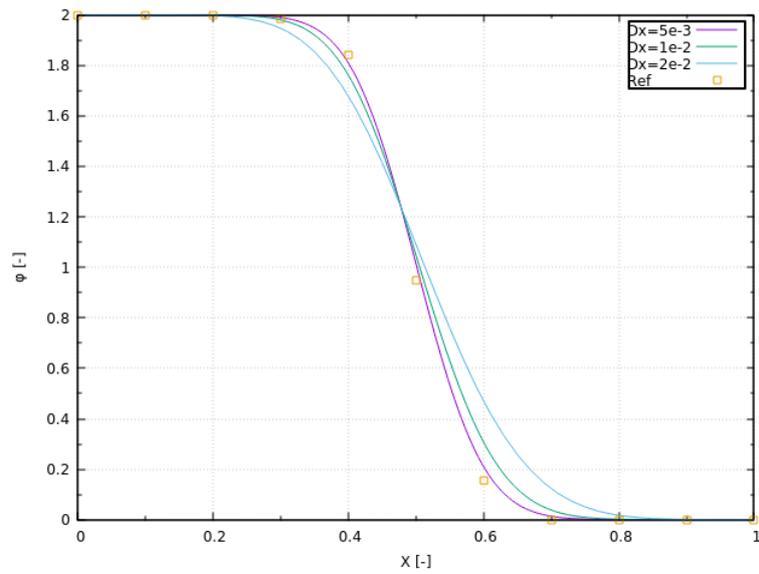


Figura 14: Resultados para distintos valores de $Dx=Dy$ en comparación con el valor real para el caso $\frac{\rho}{\Gamma} = 1000$.

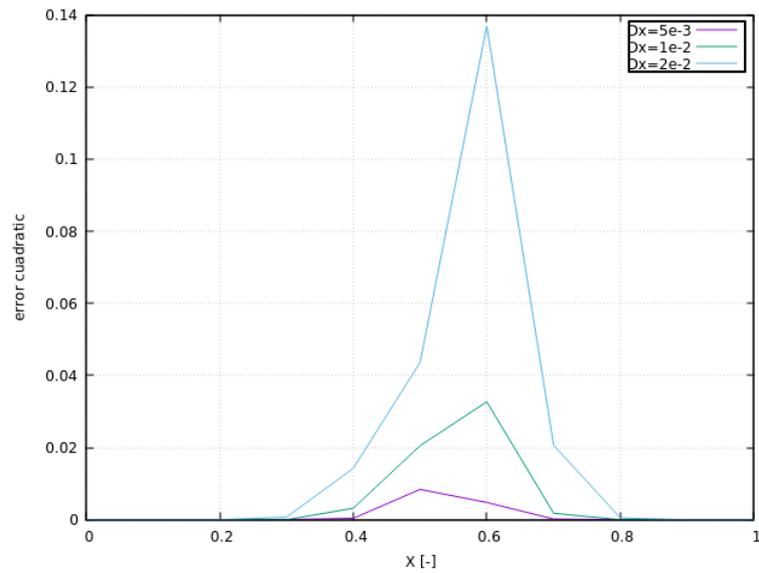


Figura 15: Error cuadrático (valor real - valor calculado)² en el caso $\frac{\rho}{\Gamma} = 1000$ para distintos valores de $Dx=Dy$.

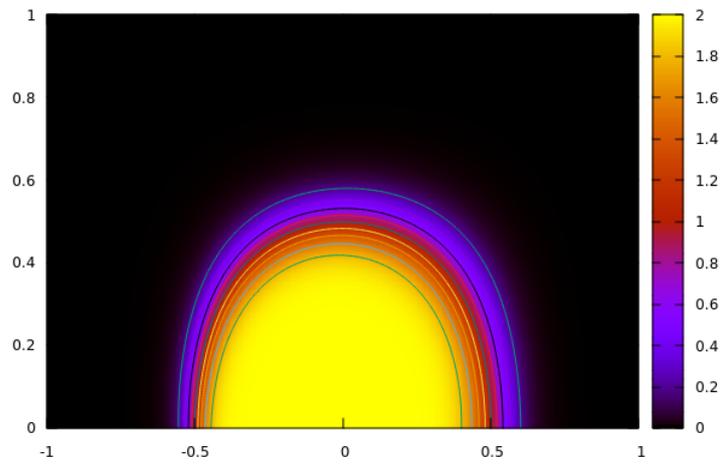


Figura 16: Campo propiedad para $\frac{l}{F} = 1000$.

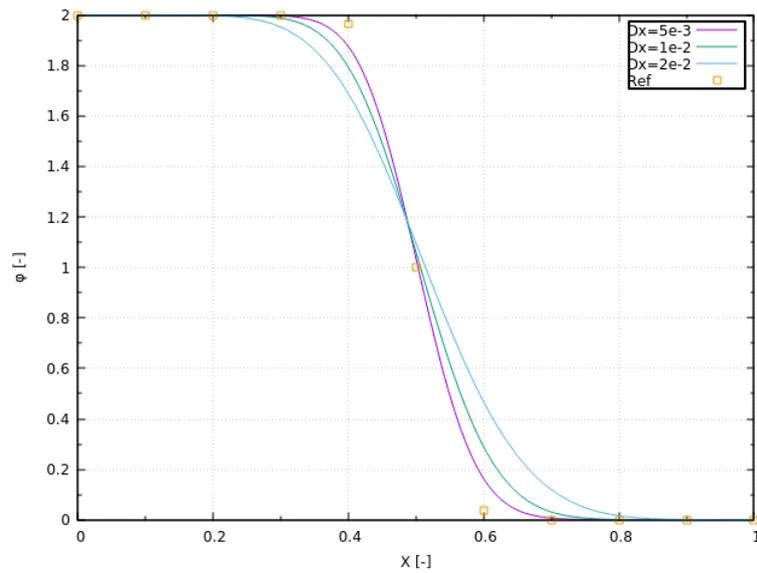


Figura 17: Resultados para distintos valores de $Dx=Dy$ en comparación con el valor real para el caso $\frac{l}{F} = 1000000$.

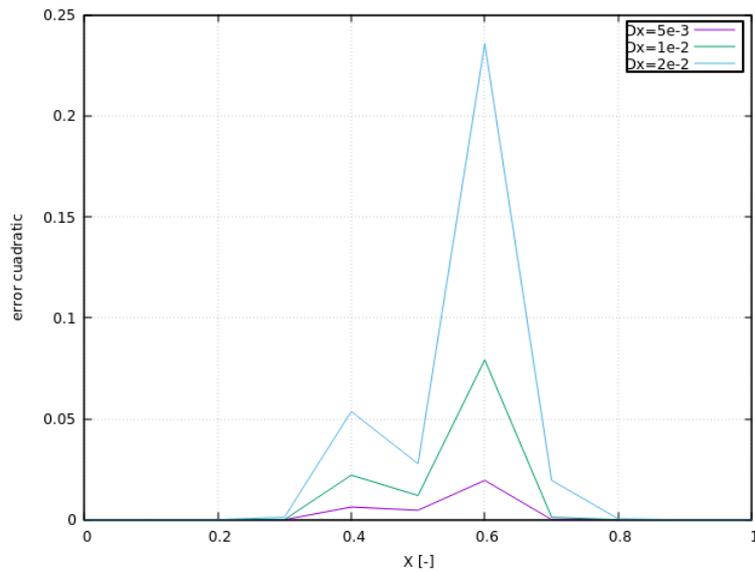


Figura 18: Error cuadrático para distintos valores de $Dx=Dy$ en el caso $\frac{\rho}{\Gamma} = 1000000$.

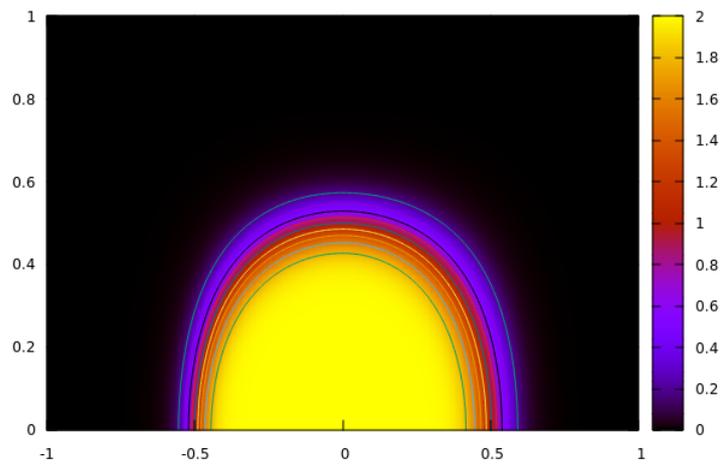


Figura 19: Campo propiedad para $\frac{\rho}{\Gamma} = 1000000$.

7.2.3. Conclusiones

Tal como era de esperar hemos deducido que cuantos mas puntos tenía nuestra malla mas se acercaba a la solución real, ademas hemos observado que cuanto mas crece el cociente entre la densidad y la difusividad del material menos información por difusión se puede transmitir y por lo tanto domina la convección tal como se observa en las figuras 8, 9 y 10, en la figura 8 vemos como domina la difusión, aun teniendo convección vemos que la información por difusión es capaz de llegar casi a las paredes, en cambio vemos en la figura 10 que no hay ningún tipo de transmisión por difusión al dominar la convección.

7.3. Problema de *driven cavity*

7.3.1. Introducción y deducción de las ecuaciones

En este último ejercicio resolveremos, ahora si, las ecuaciones de Navier-Stokes que hemos deducido para el caso de fluidos incompresibles

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Para resolver este tipo de ejercicios con un método iterativo necesitaremos algunos conceptos previos.

Definición 7.1. *H es un espacio de divergencia libre sii*

$$\forall \mathbf{a} \in H, \quad \nabla \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Definición 7.2. *Definimos el proyector $\Pi(\cdot)$, como aquel que proyecta en un espacio de divergencia libre i.e.*

$$\nabla \cdot \Pi(\mathbf{a}) = 0.$$

Si a continuación aplicamos el proyector a nuestra ecuación obtenemos

$$\Pi \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p \right) = \Pi \left(\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right). \quad (7.9)$$

Teniendo en cuenta que el campo de velocidades siempre tiene que ser incompresible observamos que

$$\Pi \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},$$

para proseguir necesitaremos el teorema siguiente.

Teorema 7.3. Teorema de Helmholtz-Hodge. *Dado un campo vectorial \mathbf{w} , definido en un dominio acotado Ω con contorno $\partial\Omega$, se descompone de forma única en un vector de divergencia nula y el gradiente de un campo*

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} + \nabla \varphi,$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \Omega, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \forall \mathbf{a} \in \partial\Omega \text{ con } \mathbf{n} \text{ dirección normal a } \partial\Omega. \end{aligned}$$

La demostración de este teorema la podemos encontrar en [4].

Usando el teorema de Helmholtz-Hodge también podemos expresar de forma única $\nabla p = \mathbf{w} - \mathbf{a}$ por lo tanto

$$\Pi(\nabla p) = \Pi(\mathbf{w} - \mathbf{a}) = \Pi(\mathbf{w}) - \Pi(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = 0.$$

Basándonos en esta descomposición vamos a separar la ecuación en dos partes de forma única

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Pi \left(\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right), \quad (7.10)$$

$$\nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Pi \left(\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right). \quad (7.11)$$

Finalmente aplicando el operador divergencia en la ecuación (7.11) obtenemos una ecuación de Poisson para la presión

$$\Delta p = \nabla \cdot \left(\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \equiv \nabla \cdot (\mathcal{R}(\mathbf{u})). \quad (7.12)$$

De hecho la función del gradiente de presión en fluidos incompresibles es la de proyectar el campo vectorial $\mathcal{R}(\mathbf{u})$ en un espacio de divergencia nula.

Basándonos en esta teoría vamos a explicar el método de integración del tiempo que vamos a usar. En este caso vamos a usar el método totalmente explícito, si reescribimos nuestra ecuación obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{R}(\mathbf{u}) - \nabla p.$$

Para la discretización temporal usaremos el método de *central difference*

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^{n+1/2} \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (7.13)$$

para el término $\mathcal{R}(\mathbf{u})$ usaremos el desarrollo totalmente explícito de segundo orden de Adams-Bashforth

$$\mathcal{R}^{n+1/2}(\mathbf{u}) \approx \frac{3}{2} \mathcal{R}(\mathbf{u}^n) - \frac{1}{2} \mathcal{R}(\mathbf{u}^{n-1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^m),$$

y por último un desarrollo *backward Euler scheme* de primer orden para el término del gradiente de presión. La restricción de incompresibilidad la trataremos de forma implícita, teniendo en cuenta esto obtenemos las ecuaciones semi discretizadas de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} \mathcal{R}(\mathbf{u}^n) - \frac{1}{2} \mathcal{R}(\mathbf{u}^{n-1}) - \nabla p^{n+1}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

Para resolver el acoplamiento entre la presión y la velocidad usaremos un método proyectivo, el método consiste en avanzar el valor que va a tener el campo de velocidades (a este avance o proyección lo denotaremos por \mathbf{u}^p), seguidamente el gradiente de presiones proyectará el campo de velocidades a un espacio de divergencia nula, esta proyección viene del Teorema 7.3 donde la velocidad predicha la podremos descomponer de forma única como

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{u}^{n+1} + \nabla \tilde{p}, \quad (7.15)$$

que viene dada por la fórmula siguiente

$$\mathbf{u}^p = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(\frac{3}{2} \mathcal{R}(\mathbf{u}^n) - \frac{1}{2} \mathcal{R}(\mathbf{u}^{n-1}) \right), \quad (7.16)$$

y la pseudopresión es $\tilde{p} = \Delta t p^{n+1}$. Tomando la divergencia de la ecuación (7.15) obtenemos la ecuación de Poisson

$$\Delta \tilde{p} = \nabla \cdot \mathbf{u}^p, \quad (7.17)$$

una vez hemos solucionado esta ecuación obtendremos el campo de velocidades deseado aplicando la corrección

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^p - \nabla \tilde{p}. \quad (7.18)$$

Por lo tanto el algoritmo de resolución para cada incremento de tiempo será el siguiente

1. Calcular $\mathcal{R}(\mathbf{u}^n)$ de (7.12).
2. Calcular \mathbf{u}^p de (7.16).
3. Resolver la ecuación de Poisson (7.17).
4. Calcular el nuevo campo de velocidades con (7.18).

Ahora solo nos falta decidir que incremento de tiempo vamos a usar, en este trabajo no entraremos en su deducción, por motivos de convergencia, que vienen impuestos por la aproximación (7.13), el incremento de tiempo Δt tiene que ser aquel que cumpla las siguientes desigualdades

$$\Delta t \left(\frac{|u_i|}{\Delta x_i} \right)_{max} \leq C_{conv},$$

$$\Delta t \left(\frac{\nu}{\Delta x_i^2} \right)_{max} \leq C_{visc},$$

donde C_{conv} y C_{visc} son constantes que dependen del fluido.

Una vez explicada la deducción teórica de las ecuaciones, necesitamos, tal como hemos hecho en los otros casos, deducir las ecuaciones discretizadas que nuestro programa va a tener que resolver. Empezaremos por el cálculo de $\mathcal{R}(\mathbf{u}^n)$, tal como hemos hecho en los ejercicios anteriores discretizamos nuestra placa en volúmenes de control para la velocidad, por lo tanto para cada uno de ellos tenemos que calcular $\mathcal{R}(u_x)$ y $\mathcal{R}(u_y)$, mostraremos el desarrollo para la dirección x debido a que el otro es totalmente equivalente. Integramos en un volumen de control V la ecuación (7.12)

$$\mathcal{R}(u_x)V = \int (-\mathbf{u} \cdot \nabla) u_x dV + \frac{1}{Re} \int \nabla \cdot \nabla u_x dV,$$

usando a continuación la igualdad

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_x = \mathbf{u} \cdot (\nabla u_x) = \nabla \cdot (\mathbf{u} u_x) - u_x (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} u_x),$$

donde en la última igualdad hemos usado la incompresibilidad del fluido, por lo tanto obtenemos

$$\mathcal{R}(u_x)V = - \int \nabla \cdot (\mathbf{u} u_x) dV + \frac{1}{Re} \int \nabla \cdot (\nabla u_x) dV,$$

y de nuevo aplicando el Teorema de Gauss obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u_x)\Delta x \Delta y &= - \oint \mathbf{u} u_x dS + \frac{1}{Re} \oint (\nabla u_x) dS \\ &= - \sum_{f=N,S,E,W} \mathbf{u}_f u_x \cdot \mathbf{n}_f S_f + \frac{1}{Re} \sum_{f=N,S,E,W} \nabla_f u_x \mathbf{n}_f S_f. \end{aligned}$$

Y con unos cálculos sencillos llegamos a la solución final

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u_{xp}) &= \frac{u_{xW}^2}{\Delta x} - \frac{u_{xE}^2}{\Delta x} - \frac{u_{yN} u_{xN}}{\Delta y} + \frac{u_{yS} u_{xS}}{\Delta y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{u_{xN}}{(\delta y)_N \Delta y} + \frac{u_{xS}}{(\delta y)_S \Delta y} + \right. \\ &\quad \left. \frac{u_{xE}}{(\delta x)_E \Delta x} + \frac{u_{xW}}{(\delta x)_W \Delta x} - u_{xp} \left[\frac{1}{(\delta y)_N \Delta y} + \frac{1}{(\delta y)_S \Delta y} + \frac{1}{(\delta x)_E \Delta x} + \frac{1}{(\delta x)_W \Delta x} \right] \right], \end{aligned} \quad (7.19)$$

donde hemos cambiado u_x por u_{xp} para mantener la notación del resto de ejercicios. Con esta fórmula tendríamos el primer paso de nuestro método iterativo, el segundo paso es aplicar la fórmula (7.16), vamos ahora a resolver la ecuación de Poisson en un volumen de control

$$\int \Delta \tilde{p} dV = \int \nabla \cdot \mathbf{u}^p dV,$$

de nuevo aplicando el teorema de Gauss obtenemos

$$\oint \nabla \tilde{p} \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{u}^p dS \Rightarrow \sum_{f=N,S,E,W} \nabla \tilde{p} \mathbf{n}_f dS_f = \sum_{f=N,S,E,W} \mathbf{u}^p \mathbf{n}_f dS_f.$$

Teniendo en cuenta que para la presión necesitamos la divergencia en las caras y para la velocidad el valor en las caras y siguiendo los razonamientos de los primeros ejercicios llegamos a la forma

$$a_p \tilde{p}_p = a_E \tilde{p}_E + a_W \tilde{p}_W + a_N \tilde{p}_N + a_S \tilde{p}_S + b,$$

con

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{(\Delta y)_e}{(\partial x)_E}, & a_W &= \frac{(\Delta y)_w}{(\partial x)_W}, \\ a_N &= \frac{(\Delta x)_n}{(\partial y)_N}, & a_S &= \frac{(\Delta x)_s}{(\partial y)_S}, \end{aligned}$$

$$b = (u_x^p)_w (\Delta y)_w - (u_x^p)_e (\Delta y)_e + (u_y^p)_s (\Delta x)_s - (u_y^p)_n (\Delta x)_n,$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S.$$

Por lo tanto teniendo en cuenta que necesitamos el valor de la presión en los centros de los volúmenes de control y el valor de la velocidad en las caras, lo que haremos será lo que se conoce como una malla *staggered* que tiene como necesitamos las velocidades desplazadas respecto a las presiones, es como si tuviéramos tres mallas desplazadas respectivamente, una para u_x , otra para u_y y otra para \tilde{p} . Teniendo un volumen de control para \tilde{p} como en la figura 20.

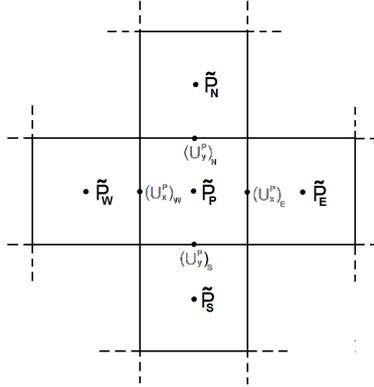


Figura 20: Malla staggered.

Con esto queda acabado el paso 3. El paso 4 es de nuevo aplicar una fórmula, por lo tanto hemos acabado de deducir las ecuaciones necesarias.

7.3.2. Problema principal

En este problema tenemos una cavidad cuadrada de dimensiones 1×1 en unidades arbitrarias, y con velocidades en las paredes

$$u = 1, v = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, y = 1,$$

$$u = 0, v = 0 \quad \text{en el resto de paredes},$$

donde u hace referencia a la velocidad en el eje x y v a la velocidad en el eje y . Además en las paredes el gradiente de presión es 0.

Se conoce como refinamiento hiperbólico de una malla hacer que la distancia entre los puntos tengan una relación de tangente hiperbólica, esta refinamiento se usa porque así los puntos cerca de las paredes (que suele ser donde mas gradiente de presión hay), están más cerca los unos de los otros y por lo tanto ganamos precisión en este aspecto. En nuestro problema al tener 129 por 129 nodos el refinamiento hiperbólico nos da el mismo resultado.

Empezaremos por graficar el error cuadrático de nuestros resultados respecto a los valores de referencia para los números de Reynolds 100, 400 y 1000. En este

caso los valores de referencia son la velocidad en la dirección x en una recta vertical que atraviesa el centro del cuadrado y la velocidad en la dirección y en una recta horizontal que atraviesa el centro del cuadrado.

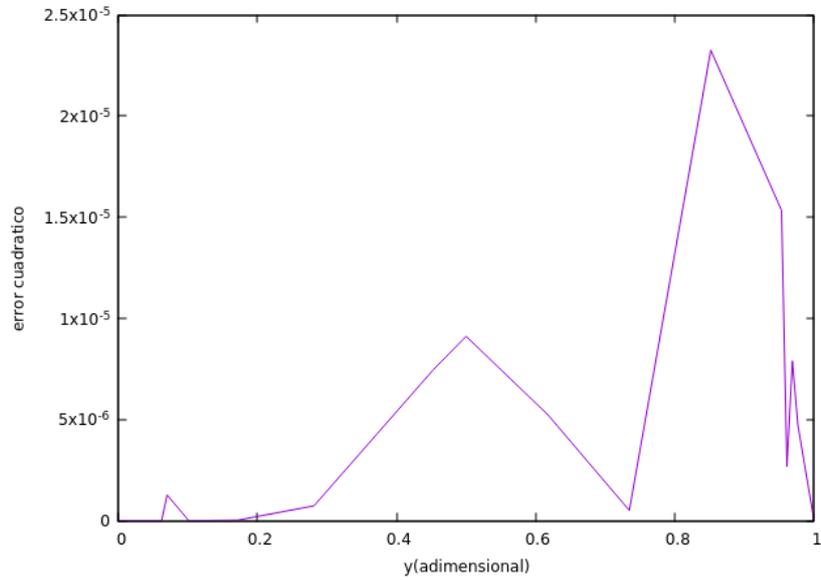


Figura 21: Error cuadrático de la velocidad en la dirección x para una recta vertical que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 100$.

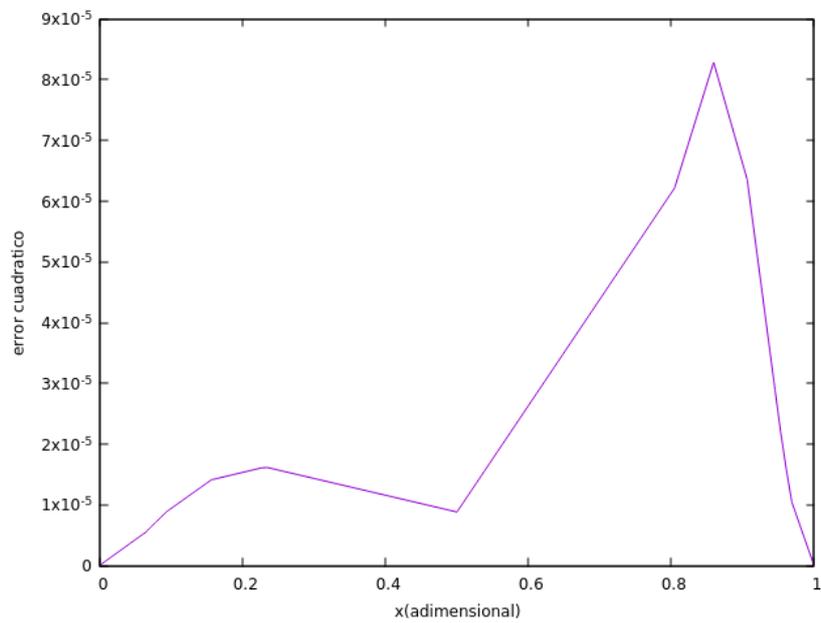


Figura 22: Error cuadrático de la velocidad de la velocidad en la dirección y para una recta horizontal que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 100$.

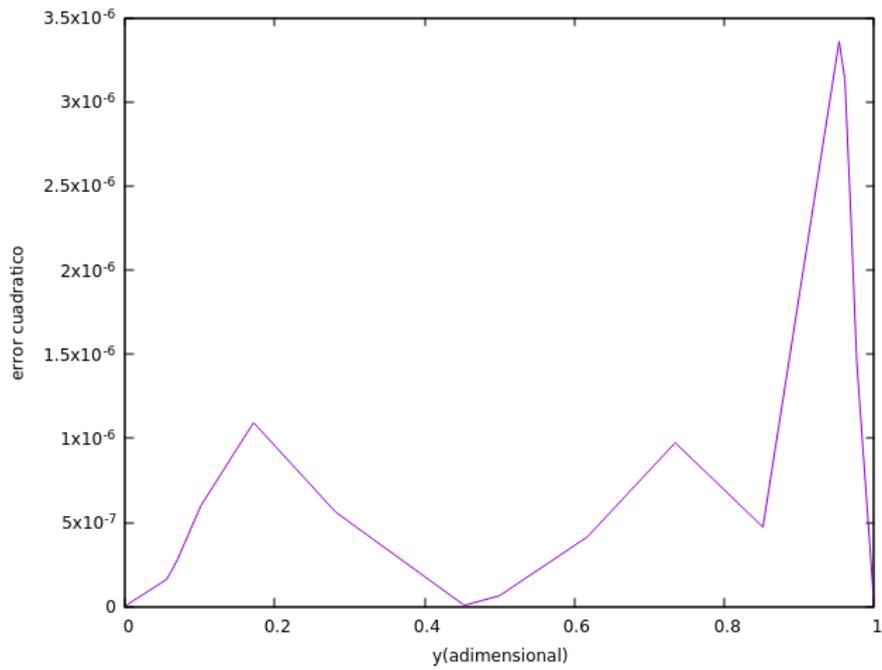


Figura 23: Error cuadrático de la velocidad en la dirección x para una recta vertical que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 400$.

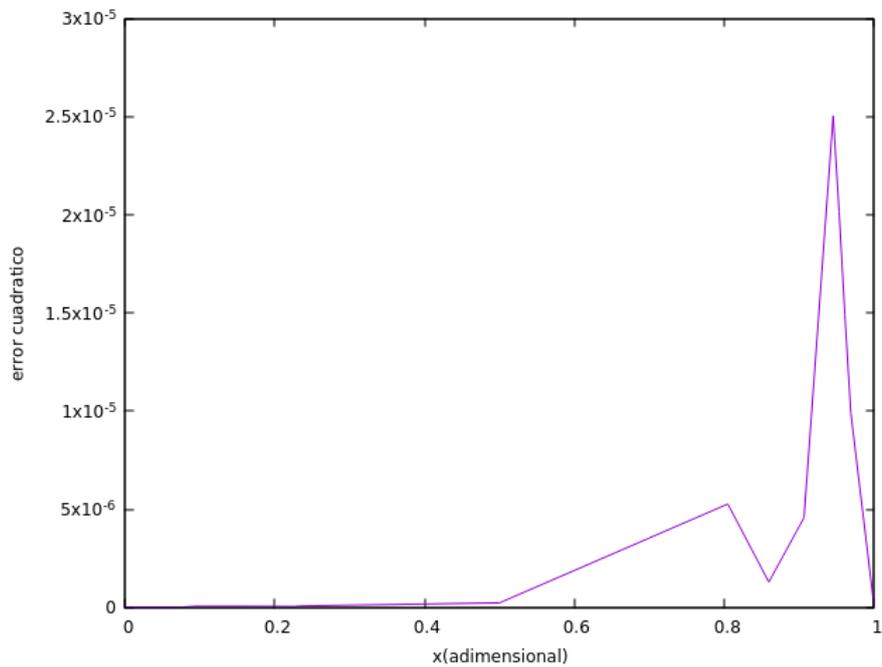


Figura 24: Error cuadrático de la velocidad en la dirección y para una recta horizontal que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 400$.

Observamos que el error es mayor, en general, cerca de las paredes, donde existen los gradientes de presión más elevados.

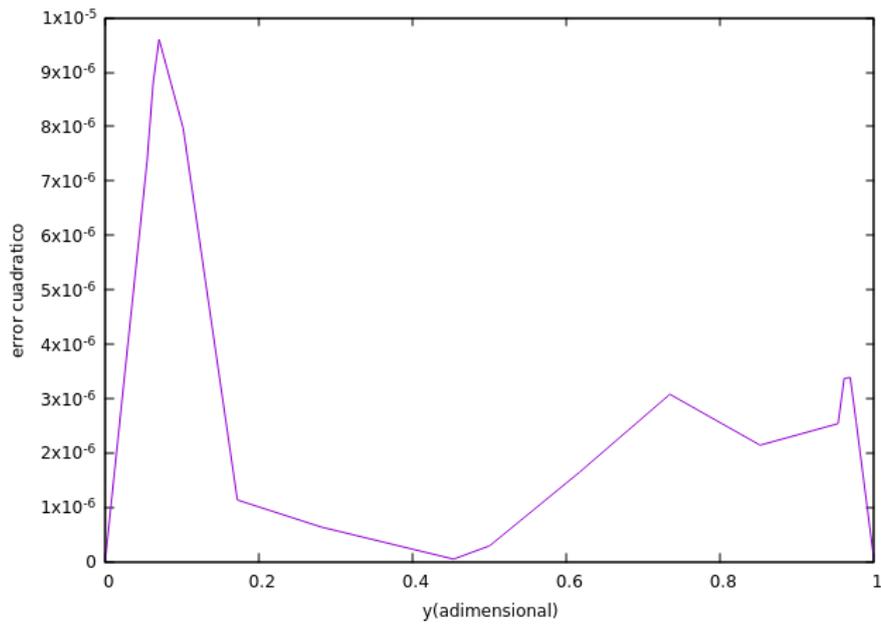


Figura 25: Error cuadrático de la velocidad en la dirección x para una recta vertical que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 1000$.

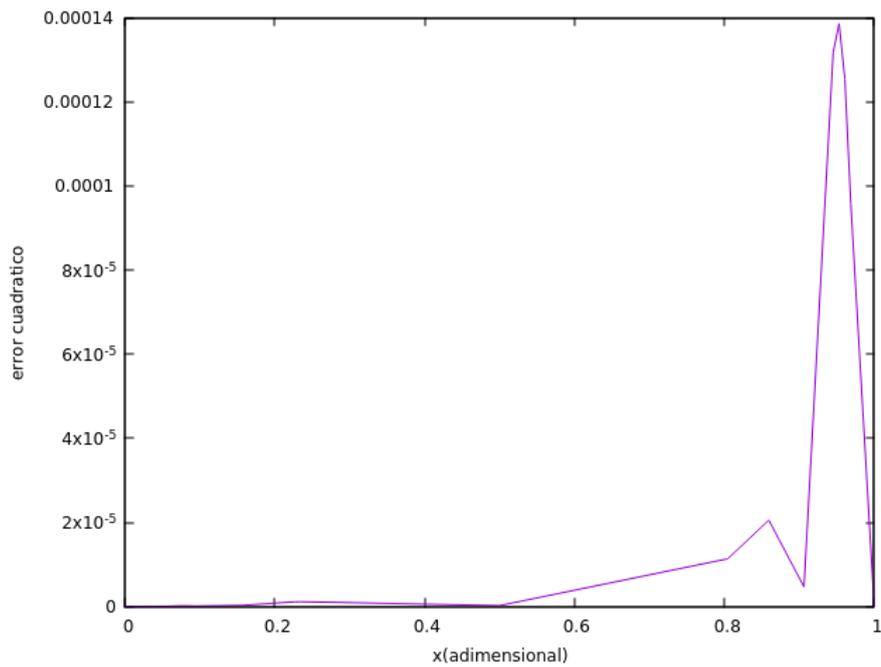


Figura 26: Error cuadrático de la velocidad en la dirección y para una recta horizontal que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 1000$.

Hemos observado que el tiempo en llegar al equilibrio y el tiempo de ejecución (por el hecho de que disminuye el *timestep*) aumentan con el número de Reynolds de forma considerable.

Para terminar observaremos la evolución hacia el equilibrio para los 3 casos que

hemos estudiado graficando el estado de las velocidades en las dos rectas de estudio para distintos valores de tiempo.

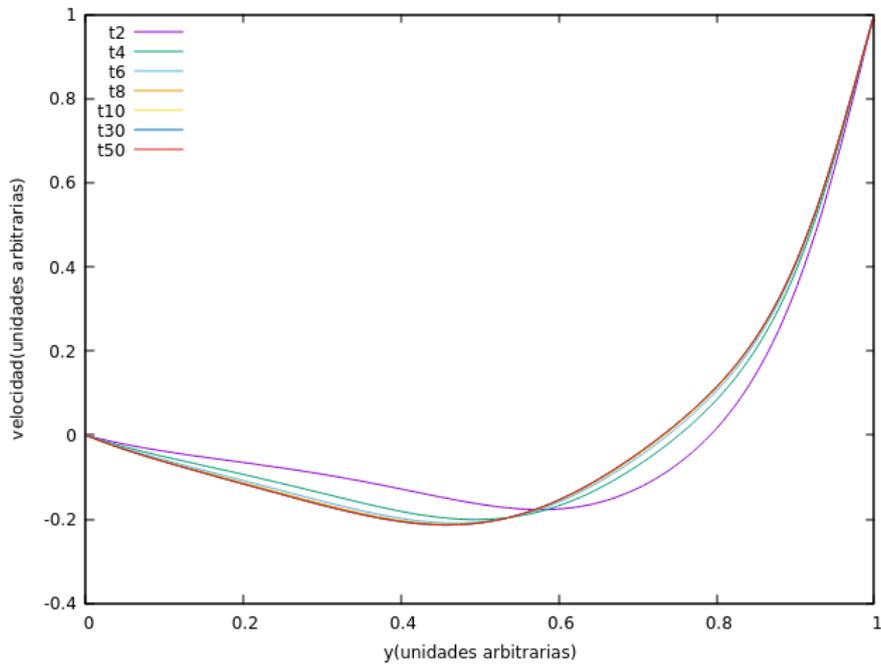


Figura 27: Evolución con el tiempo de la velocidad en la dirección x para una recta vertical que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 100$.

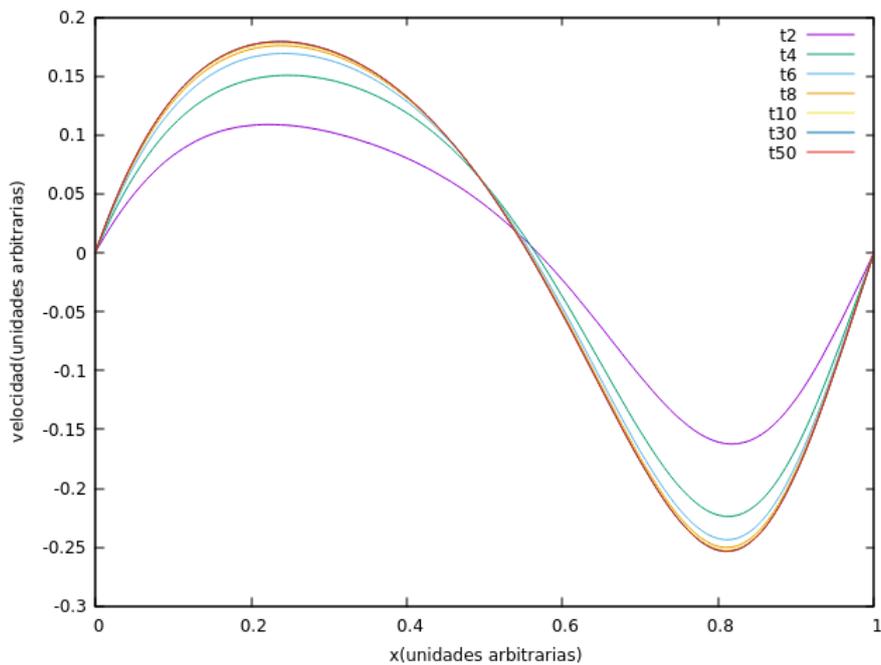


Figura 28: Evolución con el tiempo de la velocidad en la dirección y para una recta horizontal que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 100$.

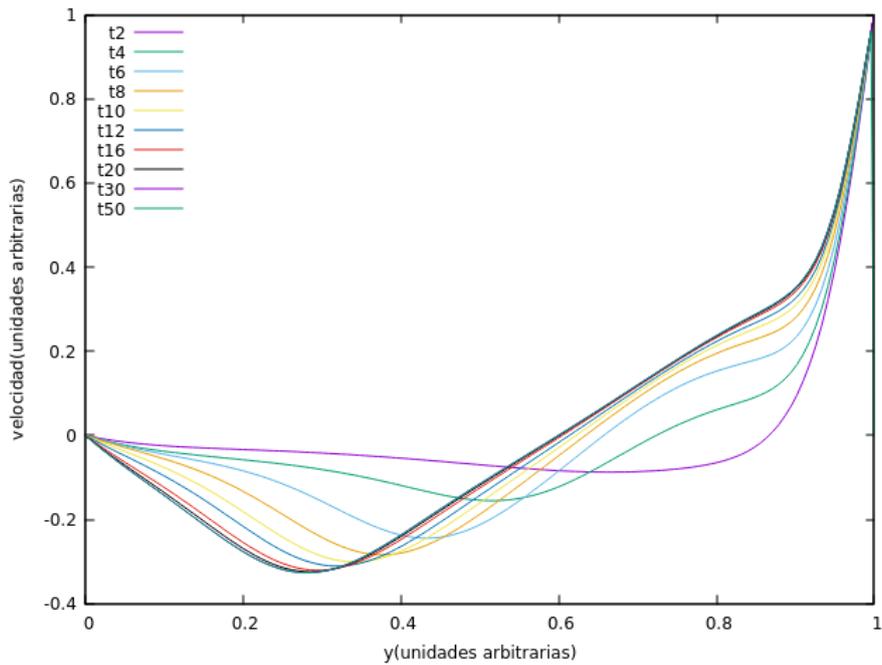


Figura 29: Evolución con el tiempo de la velocidad en la dirección x para una recta vertical que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 400$.

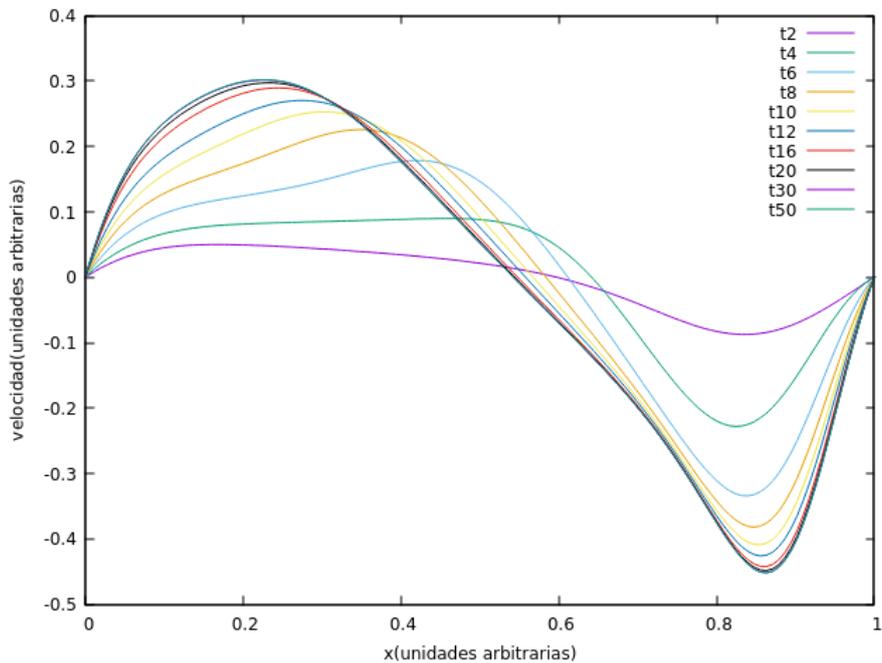


Figura 30: Evolución con el tiempo de la velocidad en la dirección y para una recta horizontal que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 400$.

Observamos que cuanto mas crece el número de Reynolds mas grande es el tiempo que tarda en llegar al equilibrio, esto es debido a que el número de Reynolds también lo podemos pensar como el cociente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas

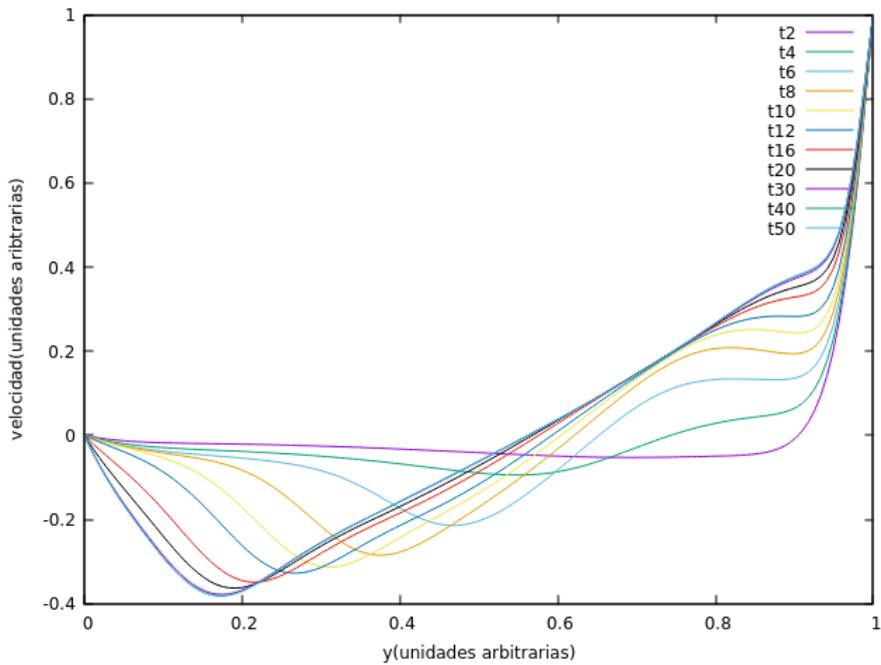


Figura 31: Evolución con el tiempo de la velocidad en la dirección x para una recta vertical que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 1000$.

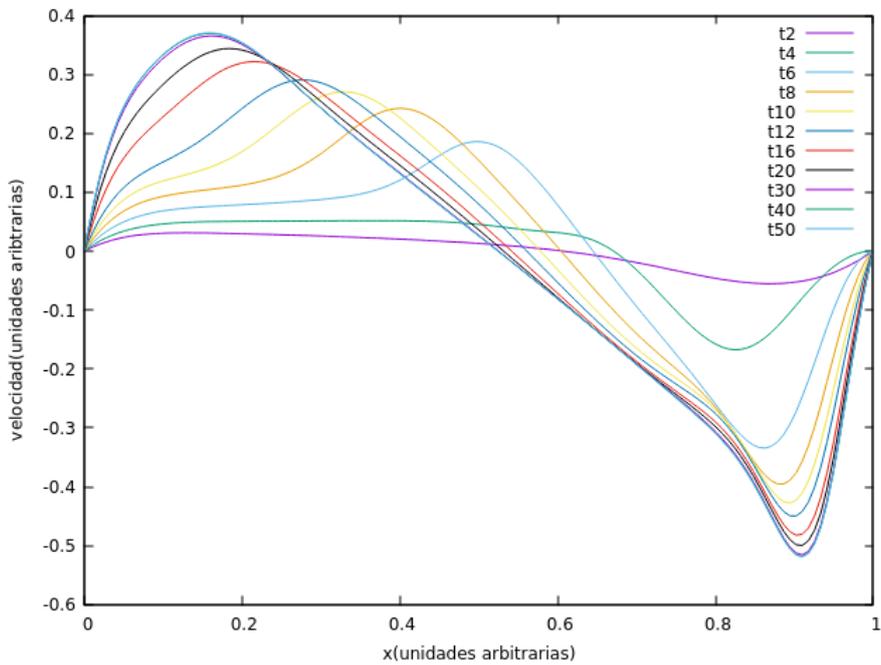


Figura 32: Evolución con el tiempo de la velocidad en la dirección y para una recta horizontal que pasa por el centro del cuadrado para $Re = 1000$.

de viscosidad y por lo tanto cuanto mas grande es menos viscosidad tiene el fluido o equivalentemente menos fricción.

7.3.3. Conclusiones

Hemos conseguido resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en un caso particular de forma numérica y hemos observado que para nuestra malla hacer un refinamiento hiperbólico no mejora la precisión de nuestros datos.

También hemos observado un aumento en la precisión al disminuir Δx , tal como en los otros casos, y, como cabía esperar, hemos observado que el tiempo en llegar al equilibrio aumenta con el número de Reynolds de forma considerable.

8. Conclusiones

Partiendo de las leyes de conservación de la masa y de la conservación de la cantidad de movimiento, junto con la hipótesis de fluido Newtoniano hemos deducido las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}. \quad (8.1)$$

Hemos estudiado la clasificación de los fluidos en perfectos incompresibles, perfectos compresibles, viscosos incompresibles y viscosos compresibles. También hemos observado que si suponemos que nuestro fluido es incompresible obtenemos las ecuaciones mas conocidas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Resolver las ecuaciones de Navier-Stokes de forma teórica es extremadamente difícil, de hecho resolverlo conllevaría la obtención del premio Clay que consiste en un millón de dolares.

Para el estudio de forma práctica de estos casos nos basamos en el número de Reynolds que nos indica, en función de su valor, el problema que estamos tratando, dos problemas de escalas muy distintas pueden tener una evolución equivalente de forma adimensional si tienen el mismo número de Reynolds.

Seguidamente hemos estudiado el tratamiento matemático que se le da a las ecuaciones diferenciales hoy en día, estudiando los espacios de Sóbolev y el concepto de derivada débil que son de gran utilidad para demostrar la existencia de soluciones (aunque sea en sentido débil), básicamente hemos deducido que es una manera de encontrar una solución con cierto sentido físico.

En la parte numérica hemos podido realizar el estudio de tres ejercicios, todos ellos relacionados con el estudio de los fluidos, el primero de ellos era el caso mas simple en el que el fluido no tenía velocidad y por lo tanto solo teníamos un término difusivo. Dentro de este ejercicio hemos estudiado el efecto al cambiar las dimensiones de la malla y el *timestep*, y evidentemente cuanto mas pequeña es la malla y mas pequeño es el *timestep* mas precisión obtenemos en nuestros resultados, aunque ello viene relacionado con un aumento en el tiempo de ejecución y por lo tanto hay que encontrar la precisión adecuada para el problema que tratamos.

En el segundo ejercicio añadimos también un término convectivo y por lo tanto ya tenemos velocidad en el fluido pero sin gradiente de presión, que es el paso previo a las ecuaciones de Navier-Stokes, en el cual de nuevo hemos deducido que cuanto mas pequeña sea la malla mas precisión tenemos y cuanto mas crece el cociente entre la densidad y la difusividad del material menos información por difusión se puede transmitir y por lo tanto domina el termino convectivo.

En el tercer y último ejercicio tenemos un gradiente de presión y en consecuencia las ecuaciones de Navier-Stokes, que solucionamos mediante un método de

proyección en un espacio de divergencia nula, que es interesante observar que puede relacionarse con las demostraciones de la teoría de resolución de ecuaciones diferenciales. De nuevo en este caso observamos una mejora en los resultados al refinar la malla y también observamos un gran aumento del tiempo de ejecución con el aumento del número de Reynolds.

Referencias

- [1] Suhas V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw Hill Book Company, New York 1980.
- [2] Juan Luis Vázquez *Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos*, Universidad Autónoma de Madrid, 2003-2016, (http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/coursejlv.html).
- [3] R. Temam, *Navier-Stokes equations and Nonlinear functional analysis*, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [4] *Introduction to the Fractional Step Method*, documento interno no publicado, CTTC(UPC).
- [5] Michel Chipot, *Elliptic Equations: An Introductory Course*, Birkhäuser Verlag AG, Basel-Boston-Berlin 2009.