Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica i
Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

LES APORTACIONS DE JOHN F. NASH A L'ECONOMIA: EQUILIBRI I NEGOCIACIÓ

Autor: Patricia Roca i Fonollosa

Directors: Dr. Xavier Jarque i
Dr. Javier Martínez de Albéniz

Realitzat a: Departament
de Matemàtiques i Informàtica
Departament
de Matemàtica Econòmica, Financera
i Actuarial

Barcelona, 19 de gener de 2018

Abstract

John F. Nash Jr. received the Nobel Prize in Economics in 1994, together with John C. Harsanyi and Reinhard Selten, “for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games”, and the Abel Prize in Mathematics in 2015, together with Louis Nirenberg, “for their striking and seminal contributions to the theory of nonlinear partial differential equations and its applications to geometric analysis”. On May 23, 2015, Nash and his wife died in a traffic accident in New Jersey on their way home from the airport, after receiving the Abel Prize.

On November 9, 2015, the Catalan Societies of Economics and Mathematics, jointly organized a conference to highlight the scientific contributions of Nash to economics and mathematics. Subsequent publications about these contributions were published.

The present project follows the paper published by Jordi Massó because of this conference and its main goal is to analyse the two most important contributions John F. Nash gave to economics, especially to Game Theory. These are Nash Equilibrium in a non-cooperative game (Part II) and Nash Solution to the Bargaining Problem (Part III).

We give the detailed proofs of these results and some insights of their importance.

Resum

John F. Nash va ser guardonat amb el Premi Nobel d’Economia l’any 1994 conjuntament amb John C. Harsanyi i Reinhard Selten “per la seva anàlisi pionera dels equilibris en la teoria de jocs no cooperatius” i amb el Premi Abel de Matemàtiques l’any 2015 conjuntament amb Louis Nirenberg, “per les contribucions notables i fonamentals a la teoria d’equacions en derivades parcials no lineals i les seves aplicacions a l’anàlisi geomètrica”. El 23 de maig d’aquell mateix any Nash i la seva dona van morir en un accident de trànsit a Nova Jersey en tornar a casa després de la cerimònia d’entrega dels premis Abel.

El 9 de novembre de 2015 la Societat Catalana d’Economia i la Societat Catalana de Matemàtiques van organitzar conjuntament una conferència per donar a conèixer les contribucions científiques de Nash a l’economia i a les matemàtiques, que alhora van ser publicades en articles escrits arran d’aquesta conferència.

El present treball pren com a model una d’aquestes publicacions, escrita per Jordi Massó, amb l’objectiu principal d’analitzar les dues contribucions més importants que Nash féu a l’economia i, en particular, a la Teoria de Jocs: l’equilibri de Nash en jocs no cooperatius (Part II) i la solució de Nash al problema de la negociació (Part III).

Al llarg del treball es donen les demostracions i resultats més importants d’aquestes contribucions.

Agraïments

Vull agrair als doctors Xavier Jarque i Javier Martínez de Albéniz per l'ajuda i el temps dedicat a la confecció d'aquest treball. Així mateix vull agrair també als que han recorregut aquest camí al meu costat. El seu suport m'ha permès d'arribar fins aquí.

"Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar."

Hipatia d'Alexandria

Índex

Part I

Introducció

Si busquem *joc* al diccionari de la *Real Academia Española* [26] trobem que es defineix com un exercici recreatiu o de competició sotmès a normes i en el qual o es guanya o es perd. Com a exemples trobem els jocs esportius com el futbol o el golf; jocs de cartes com el pòquer; o jocs de taula com els escacs. La majoria d'aquests jocs comparteixen un element interactiu i competitiu, és a dir, cadascun dels jugadors s'esforça per vèncer als altres jugadors i del seu èxit, de la seva efectivitat i, per descomptat, de les seves pròpies accions, dependran les accions d'aquests altres jugadors. Per exemple, en jugar a tennis no només és important tornar la pilota sinó que cal fer-ho de manera que l'altre jugador no la pugui tornar. D'aquesta manera el lloc on es llenci la pilota dependrà de la posició de l'altre jugador. De forma general, hi ha unes característiques que es donen a la majoria de jocs. En primer lloc, els jocs es regeixen per unes normes que determinen l'ordre de les accions, descriuen el conjunt d'accions permeses i defineixen com es relacionen aquestes accions amb el resultat del joc. En segon lloc, hi ha dos o més jugadors que lluiten conscientment per fer-ho el millor possible amb la finalitat d'obtenir el millor resultat possible per ell/ella. En tercer lloc, el resultat d'un jugador depèn de les accions dels altres. A causa de la coneixença d'aquesta tercera característica per part dels jugadors, els jugadors hauran de valorar intel·ligentment les accions dels altres per tal de triar les seves pròpies.

Aquestes característiques generals però, no només expliquen els *jocs* en el sentit d'esport que tenim tots al cap sinó que també tipifiquen moltes situacions de la vida diària com poden ser les negociacions entre una empresa i un sindicat o la tria del restaurant on sopar per part d'una parella que no es posa d'acord. Si bé és cert que en aquests casos les normes no són tan formals i precises com, per exemple, al joc dels escacs, és clar que sí existeixen unes normes. En tots dos casos es realitzen ofertes i contraofertes amb la finalitat d'arribar a un acord el més favorable possible i les ofertes de cada agent implicat depenen de com l'oferta prèvia és rebuda i resposta per part dels altres agents. És d'aquesta manera que els jocs formen part de la nostra vida diària i com, sense adonar-nos, utilitzem de manera informal tots els elements que defineixen formalment un joc.

L'home sempre s'ha interessat per intentar trobar una explicació racional al comportament de les persones i la societat i per intentar crear models que el defineixin. És així com els precursors de la teoria de jocs van començar els seus estudis sobre aquest camp. Tenien l'objectiu principal d'explicar problemes econòmics a través dels aspectes estratègics de les interaccions entre agents econòmics. Els autors més destacats d'aquest context són Cournot [4] i Bertrand [2], que van aconseguir explicar al segle XIX com havien de comportar-se les empreses en competir en quantitats o en preus.

Tot i aquest principi econòmic, l'evolució de la Teoria de Jocs ha estat lligada a diferents camps. És així com a principis del segle XX els treballs relacionats amb els jocs que avui en dia ens venen al cap al parlar d'un joc, com els esports o els jocs de taula, van aportar coneixement i formalitat a aquesta branca de les Matemàtiques. Fou en gran part gràcies a Borel [3], que l'any 1921 va intentar trobar una estratègia òptima per tal de guanyar al joc del pòquer, creant així les bases per explicar els jocs amb informació incompleta, que són aquells en els que no es disposa de tota la informació respecte el que disposen els altres jugadors; o Zermelo [33], que postulà el Teorema de Zermelo a partir de l'explicació dels escacs com un joc l'any 1913.

No fou fins als anys previs a la Guerra Freda i durant aquesta que es produí el gran avanç per la Teoria de Jocs i el que molts autors consideren com el naixement d'aquesta branca: la publicació del llibre "Theory of Games and Economic Behavior"de John von Neumann i Oskar Morgenstern l'any 1944 [32]. En aquest llibre aplicaven la Teoria de Jocs a l'estratègia militar establint les bases de la Teoria de Jocs amb dos agents i de suma zero (allò que un jugador guanya és allò que l'altre jugador perd).

No podem parlar de Teoria de Jocs sense parlar de John Forbes Nash Jr. (Bluefield, 1928 - Monroe, 2015), que fou qui amplià els horitzons d'aquesta disciplina i la proveí amb les eines més importants en el camp per tal de poder explicar problemes del món real des de la visió estratègica de joc. John Nash començà els estudis d'enginyeria química al Carnegie Institute of Technology de Pittsburgh, Pennsylvania i es graduà amb un BA i un MA en matemàtiques l'any 1948. Aquest mateix any començà el doctorat a la Princeton University, que finalitzà l'any 1950 amb la defensa de la tesi doctoral *Non-cooperative Games* [21]. Des de llavors, fou professor de matemàtiques al MIT de Cambridge (Massachussets), fins que per culpa de l'esquizofrènia, l'any 1959 haguè d'aturar la seva activitat docent i científica per sotmetre's a nombrosos tractaments psiquiàtrics. No fou fins 1980 que poguè reprendre parcialment la seva activitat científica. Tot i els impediments que no el van permetre dedicar gran part de la seva vida a la recerca, la seva aportació ha estat importantíssima per a la Teoria de Jocs en particular i per a les Matemàtiques en general i així ho demostren els premis que ha rebut: l'any 1994 rebé el premi Nobel d'Economia juntament amb John Harsanyi i Reinhard Selten "per la seva anàlisi pionera dels equilibris en la teoria de jocs no cooperatius", i el 2015 rebé, juntament amb Louis Nirenberg, el premi Abel de matemàtiques "per les seves contribucions notables i fonamentals a la teoria d'equacions en derivades parcials no lineals i les seves aplicacions a l'anàlisi geomètrica". Fou quan tornava de recollir el premi Abel a Oslo que Nash morí tràgicament en un accident de trànsit. Les contribucions més importants que Nash féu a la Teoria de Jocs són el Teorema de Nash i la solució del problema de la negociació, que apareixen a les publicacions revolucionàries pel moment "Equilibrium points in n-person games"(1950) [19] i "The Bargaining problem"(1950) [20]. És per la importància d'aquests dos conceptes que el present treball s'ha volgut centrar en aquestes dues aportacions responsables d'un abans i un després en la Teoria de Jocs i que permeten avui en dia exportar els raonaments i conclusions de la Teoria de Jocs a gairebé qualsevol camp.

Des de les aportacions de Nash, però, les contribucions a la Teoria de Jocs no s'han aturat, ans al contrari, com bé demostren les aportacions de Harsanyi als anys 60 [10] i i 70 [11], que introdueixen el concepte d'equilibri bayesià de Nash i intenten explicar situacions socials a través de la Teoria de Jocs; les aportacions durant aquella mateixa dècada de Selten [27] [28] que, analitzant els jocs dinàmics (aquells que es juguen per etapes com per exemple els escacs) va acabar aportant el concepte d'equilibri de Nash perfecte en subjocs; o les aportacions que es segueixen fent avui en dia gràcies a l'aplicació a la biologia, la política, la lògica, la filosofia i, per descomptat, l'economia.

No podem passar per alt el reconeixement que ha fet la ciència a aquest camp, concedint el màxim reconeixement científic que hi ha avui en dia: el premi Nobel. S'han atribuït quatre premis Nobel a la Teoria de Jocs:

- 1994: John F. Nash, John C. Harsanyi i Reinhard Selten, "for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games".
- 2005: Robert J. Aumann i Thomas C. Schelling, "for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis".
- 2007: Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin i Roger B. Myerson, "for having laid the foundations of mechanism design theory".
- 2012: Alvin E. Roth i Lloyd S. Shapley, "for the theory of stable allocations and the practice of market design".

Amb l'objectiu de d'il·lustrar les aportacions de John F. Nash a l'economia, el treball es distribueix en tres parts. En primer lloc, tenim la present part, on es mostren les metes del treball i on es pot trobar una introducció històrica del camí recorregut per la Teoria de Jocs fins al present. A continuació podem trobar dues parts, una per a cada aportació de Nash a l'economia: l'equilibri de Nash en jocs no cooperatius (Part II) i la solució de Nash al problema de la negociació (Part III).

Part II
Jocs no cooperatius

1 Preliminars

L'objectiu del present treball és veure, entendre i il·lustrar les aportacions de John Nash a la Teoria de Jocs. Per tal de poder assolir aquest objectiu de manera formal, es farà ús de nomenclatura i resultats propis de la Teoria de Jocs que es presenten en el present capítol de preliminars on s'exposa la terminologia i exemples corresponents.

1.1 Què és un joc?

El primer pas serà entendre què és un joc i quins són els elements que el formen. Així doncs, presentem aquests elements acompanyats d'exemples il·lustratius que permeten introduir el lector al món de la Teoria de Jocs.

D'acord amb Gardner [9], tots els jocs tenen uns elements comuns:

- Jugadors
- Normes / Regles
- Accions / Estratègies
- Resultat

Gràcies a aquests elements podem obtenir una definició de joc, que segons Gardner és: un *joc* és qualsevol situació governada per normes amb un resultat ben definit on un cert nombre d'agents interactuen estratègicament o cooperen entre ells. La interacció estratègica té lloc quan el benefici, pagament o utilitat d'un agent depèn tant de les seves pròpies accions o estratègies com de les accions preses pels altres agents. Aquests agents, reben el nom de *jugadors* i són els agents racionals que actuen d'acord a unes preferències sobre els resultats. Formen un conjunt finit que denotarem per $N = \{1, \ldots, n\}$.

La *teoria de jocs* és la branca del coneixement que vol estudiar aquestes situacions, des de la hipòtesi de la racionalitat, aportant els resultats i comportaments que cal esperar.

Estratègia i perfil d'estratègies. El conjunt d'accions que un jugador pot seguir en un joc s'anomena *estratègia*. Una estratègia ha de definir una acció per a cada situació possible del joc. Cadascun dels jugadors ha de triar una estratègia s_i en el seu conjunt d'estratègies S_i que definiran un *perfil d'estratègies* de la següent manera:

$$s = (s_1,\ \ldots,\ s_n) \in S = S_1 \times \ldots \times S_n.$$

Pagaments. L'element que relaciona les estratègies d'un jugador amb la utilitat que n'obté és la funció de pagaments, que per a cada perfil d'estratègies dona lloc a un resultat que ve definit per la valoració que en fa cada jugador a través d'una funció de pagaments. Més endavant veurem la definició formal d'aquesta funció que per a cada jugador ve definida per $h_i : S \to \mathbb{R}$.

Havent introduït els elements fonamentals que formen un joc, és fàcil entendre què és un joc i com moltes situacions que vivim dia a dia es poden expressar en forma de joc.

Exemples. (Jocs quotidians) Els jocs poden ser molt diferents depenent del número de jugadors, del moment temporal, de la quantitat d'estratègies possibles, etc. No obstant, aquesta varietat de jocs no implica que siguin situacions alienes al nostre dia a dia; de fet, sense adornar-nos, podem trobar molts jocs a la vida quotidiana dels quals en som jugadors i en els que decidim jugar unes estratègies concretes en busca o no d'un equilibri en el joc que, previ a una definició formal, entendrem com un punt on cap dels jugadors pot millorar la seva situació. Veiem alguns d'aquests jocs.

1. **Pedra-paper-tisores.** Prenem el joc de pedra-paper-tisores en el que participen dos jugadors. El joc consisteix en que, simultàniament, els dos jugadors han d'escollir si treuen pedra, paper o tisores. La pedra guanya a les tisores, el paper guanya a la pedra, i les tisores guanyen al paper. La interacció estratègica de cada jugador és la decisió que prenen sobre quina de les tres opcions treuen per tal d'intentar guanyar a l'altre, sempre sota la hipòtesi de racionalitat dels jugadors i tenint en compte que cap dels dos sap què jugarà l'altre. Hem vist quin és el joc i quin els jugadors, veiem ara quines són les estràtegies dels jugadors que definiran els respectius conjunts d'estratègies i el perfil d'estratègies del joc. Així doncs, per al jugador 1 i per al jugador 2 podem definir els seus conjunts d'estratègies que seran: $S_1 = S_2 = \{\text{pedra, paper, tisores}\}$. L'espai d'estratègies S serà el producte cartesià dels conjunts d'estratègies S_1 i S_2:

$$S = S_1 \times S_2 = \{\text{pedra, paper, tisores}\} \times \{\text{pedra, paper, tisores}\}$$

   Suposem que es juga el joc apostant un euro, el jugador que guanyi s'emporta l'euro i el que perd, ha de pagar un euro. Cal destacar que el joc de pedra-paper-tisores en aquest cas és un joc de suma zero, és a dir, el que guanya un jugador és exactament el que perd l'altre.

2. **El repartiment.** Dues persones (jugadors) tenen un sac amb 10 monedes d'un dòlar. El jugador 1 ha de decidir quantes monedes li dona a l'altre jugador (tenint en compte que la resta se les queda per ell) i el jugador 2 ha de dir si aquest repartiment li sembla bé o no i, per tant, si es reparteixen els diners d'aquesta manera o no. A diferència del joc anterior, els conjunts d'estratègies dels dos jugadors ara són diferents ja que un ha de decidir com

és el repartiment i l'altre si l'accepta o no:

$$S_1 = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 10\}$$
$$S_2 = \{(\text{sí}, \text{no}, \text{sí}, \ldots, \text{no}), \ldots\}$$

on (sí, no, sí,..., no) significa que si el primer jugador proposa 0, s'accepta, si proposa 1 es rebutja, si proposa 2, s'accepta, ... Noti's que una estratègia implica preveure què fa el jugador a cada situació. La cardinalitat de S_2 és 2^{11}.

3. **Els escacs.** Des de la perspectiva estratègica és molt més complicat que els jocs anteriors. Es tracta d'un joc successiu en el temps amb dos jugadors les estratègies del qual no es poden escriure degut a la complexitat que representen. Cal entendre, però, que l'estratègia de cada jugador ha de definir tots els moviments que farà a la partida. Dit d'una altra manera, definir una estratègia pel joc dels escacs seria equivalent a programar un ordinador per tal que jugués la partida ell sol.

$\boxtimes$

Exemples. (Exemples de caire econòmic i empresarial) Al punt anterior hem pogut veure jocs quotidians, però també en podem trobar al món empresarial o aplicats a l'economia.

1. **Preu i producció en competència.** Donada una situació de mercat[1] amb diferents empreses en situació de competència, aquestes han de decidir la quantitat a produir i/o el preu de venda dels productes. Aquesta situació també és un joc on els diferents agents són les empreses amb un conjunt d'estratègies format per les diferents quantitats i/o preus dels seus productes.

2. **Subhastes.** Una subhasta a sobre tancat i primer preu on dos agents volen aconseguir un quadre. Cada agent fa una oferta en un sobre tancat, és a dir, sense que l'altre sàpiga quant ofereix pel quadre i qui ofereixi més s'endú el quadre al preu que ha proposat. Estratègicament cada agent té una valoració assignada al quadre i les estratègies de cada agent seran el conjunt dels diferents preus que pot oferir pel quadre.

$\boxtimes$

Hi ha diverses maneres de classificar els jocs ja que podem distingir diferents tipologies de jocs en funció de diferents criteris. En general, podem fer diverses classificacions.

Segons la informació disponible:

1. Jocs amb informació completa: tots els jugadors, per un perfil d'estratègies donat, poden calcular exactament els pagaments que obtenen tots els jugadors.

[1] Sistema econòmic que es regeix per la llei de l'oferta i la demanda, la competència i la maximització del benefici.

2. Jocs amb informació incompleta: els jugadors no poden calcular els pagaments que obtindran els altres jugadors ja que no saben amb precisió el joc que es juga.

Segons la temporalitat:

1. Simultanis: les estratègies es trien de manera simultània i, per tant, un jugador desconeix l'elecció de l'estratègia de l'altre.

2. Seqüencials: els jugadors trien les seves accions durant el joc, transmetent aquesta informació als altres jugadors.

Cadascuna d'aquestes tipologies permet fer hipòtesis diferents que porten a unes solucions i conclusions diferents en l'estudi dels jocs. També cal destacar que els jocs es poden expressar en forma normal o en forma extensiva. En el primer cas, quan el joc és de dos jugadors, es representa en forma de bimatriu (matriu amb elements de dos components a cada entrada, que mostren els pagaments obtinguts per cada jugador per cada perfil d'estratègies), representant els pagaments obtinguts segons les estratègies jugades. En el segon cas, es representa en forma d'arbre mostrant les accions que es poden anar prenent al llarg del joc amb el pagament obtingut com a resultat final. En aquesta part del treball ens centrarem en els jocs no cooperatius en forma normal.

Definició. (Joc no cooperatiu en forma normal) Un *joc no cooperatiu en forma normal* és un triplet $G = (N,\ S,\ h)$ on $N = \{1,\ \ldots,\ n\}$ és el conjunt de n jugadors, $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ és el conjunt d'estratègies i $h = (h_i)_{i \in N}$ és la funció de pagaments.

1.2 Resultats, pagaments i utilitat

A la definició de joc no cooperatiu en forma normal hem vist que un dels elements que defineix un joc és la *funció de pagaments*. Aquesta funció és l'element que relaciona les estratègies d'un jugador amb la utilitat que n'obté, és a dir, amb el guany que el jugador assigna a un resultat del joc. Per poder definir formalment la funció de pagaments cal definir prèviament la funció resultat del joc i la funció d'utilitat, ja que la funció de pagaments serà la composició d'aquestes dues funcions.

Funció resultat del joc. Sigui Z el conjunt de resultats possibles del joc, la *funció resultat del joc* $g : S \longrightarrow Z$ defineix per a cada perfil d'estratègies $s \in S$ el resultat del joc $g(s) \in Z$.

Si ens situem al joc anterior de pedra-paper-tisores, la funció resultat del joc especifica per a cada perfil d'estratègies qui guanya aquest joc o si empaten.

Funció d'utilitat. Els jugadors, que són racionals, tenen preferències (enteses com una relació d'ordre) sobre els resultats. Amb hipòtesis raonables sobre les preferències aquestes es poden representar per una funció d'utilitat. La *funció d'utilitat* del jugador $i \in N$ és la funció $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\forall\, z, z' \in Z,\ u_i(z)\ > u_i(z') \iff \text{ el jugador } i \text{ prefereix } z \text{ a } z'.$$

Així doncs, seguint amb el mateix exemple, en el joc de pedra-paper-tisores, el conjunt de resultats del joc Z és {Guanya jugador 1, Guanya jugador 2, Empaten} i la funció d'utilitat de cada jugador assigna un número real a cadascun d'aquests resultats; tenint en compte que, com el jugador 1 preferirà guanyar que no pas perdre (Hipòtesi de racionalitat), la utilitat assignada al resultat que el fa guanyador serà més alta que no pas la utilitat del resultat que fa guanyador al jugador 2. Aquesta funció diu quant li agrada a cada jugador un resultat concret del joc.

Funció de pagaments. Podem definir ara la *funció de pagaments* $h_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ que assigna a cada perfil d'estratègies s la utilitat del resultat generat per a s, és a dir, $h_i(s) = u_i(g(s))$. Així doncs, la funció de pagaments és la composició de la funció resultat del joc i de la funció d'utilitat, assignant a cada perfil d'estratègies una utilitat que depèn del resultat del joc.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h_i"] & Z \arrow[r, "u_i"] & \mathbb{R} \\
s \arrow[r, mapsto] & g(s) \arrow[r, mapsto] & u_i(g(s)) = h_i(s)
\end{tikzcd}$$

1.3 Estratègies

Un dels conceptes fonamentals són les estratègies que els agents decideixen utilitzar i que defineixen el resultat final del joc. És important entendre que els jugadors trien les estratègies que jugaran, aquestes determinen un resultat i per tant la seva valoració en termes d'utilitat per a cada agent. És a posteriori quan s'estudia si l'estratègia d'un agent ha estat encertada o no, ateses les dels altres, i la situació que desencadena el resultat obtingut. Recordem que el conjunt de les estratègies del jugador $i \in N$ està donat per S_i, i que l'espai d'estratègies és $S = S_1 \times S_2 \times \ldots S_n$.

Anomenem S_{-i} al conjunt d'estratègies S que no inclou les estratègies del jugador i, és a dir: $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$. Els elements de S_{-i} són perfils d'estratègies $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ on s_j és l'estratègia triada pel jugador $j \in N \setminus \{i\}$.

Definició. (Estratègia dominant) Donat un joc $G = (N, S, h)$, una estratègia $s_i^* \in S_i$ és *dominant* pel jugador $i \in N$ si

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})\ \forall s_i' \in S_i.$$

Això és, una estratègia és dominant pel jugador $i \in \mathbb{N}$ si el jugador i sempre tria aquesta estratègia perquè li reporta uns pagaments més alts sigui quina sigui l'estratègia triada pels altres jugadors.

Per tal d'il·lustrar la dominància d'estratègies amb un exemple, cal introduir el concepte de bimatriu. En els jocs no cooperatius en forma normal de dos jugadors utilitzarem la bimatriu per a representar el joc. Cada entrada d'aquesta bimatriu tindrà un element de dues dimensions que representarà els pagaments que obtindran cadascun dels jugadors, sent cada entrada: $(h_1(s), h_2(s))$, on s serà el perfil d'estratègies corresponent.

Exemple. (Dominància d'estratègies) Prenem el següent joc bimatricial com a exemple per poder veure de manera pràctica la dominància d'estratègies.

$$\begin{array}{ll} \text{Jug I}\backslash\text{Jug II} & \begin{array}{cc} s_{II}^1 & \;\; s_{II}^2 \end{array} \\ \begin{array}{l} s_I^1 \\ s_I^2 \end{array} & \begin{pmatrix} (4,4) & (0,6) \\ (5,0) & (1,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ens fixem en les estratègies pel jugador I s_I^j: en el cas que el jugador II esculli la primera estratègia s_{II}^1, el jugador I triaria s_I^2 ja que $5 > 4$ i, si el segon jugador escollís la segona estratègia s_{II}^2, el jugador I tornaria a escollir s_I^2 ja que $1 > 0$, si ho mirem a la bimatriu:

$$\begin{array}{ll} \text{Jug I}\backslash\text{Jug II} & \begin{array}{cc} s_{II}^1 & \;\; s_{II}^2 \end{array} \\ \begin{array}{l} s_I^1 \\ s_I^2 \end{array} & \begin{pmatrix} (4,4) & (0,6) \\ (\underline{5},0) & (\underline{1},3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Així doncs, l'estratègia s_I^2 és una estratègia dominant pel jugador I, ja que sigui quina sigui l'estratègia escollida pel jugador II, el jugador I sempre triarà s_I^2 i ho escrivim com

$$s_I^2 \succ_{JugI} s_I^1$$

⊠

1.4 Noció d'equilibri (Equilibri de Nash)

La idea principal de Nash amb la seva definició d'equilibri és adonar-se que un resultat serà estable quan així es vegi de manera global. Nash no pensa en un sol jugador sinó que pensa en tots alhora. Aquest fet queda reflectit en la manera de definir l'equilibri, que és entès més com un punt d'estabilitat del joc que no pas com un punt de maximització dels beneficis dels jugadors.

Definició. (Equilibri de Nash) Donat un joc en forma normal $G = (N,\ S,\ h)$, diem que un perfil d'estratègies $s^* \in S$ és un *equilibri de Nash* del joc G si per a cada jugador i:

$$h_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq h_i(s_i, s_{-i}^*)\ \forall s_i \in S_i.$$

D'acord amb la definició, un equilibri de Nash es donarà quan cap dels jugadors tingui incentius per a canviar d'estratègia, és a dir, que per a tots els jugadors, canviar d'estratègia implica veure reduït, o en qualsevol cas no millorat, el seu pagament donades les estratègies dels altres.

Veiem ara un exemple d'equilibri de Nash en el joc conegut com el dilema dels presoners, joc desenvolupat per Merrill M. Flood i Melvin Dresher (1950) quan treballaven a l'empresa RAND i formalitzat per Albert W. Tucker (1950).

Exemple 1.1. (Dilema dels presoners [18]) La policia deté dos delinqüents per un delicte menor i sap que n'han comès un de més greu però no té proves suficients per condemnar-los per aquest delicte greu. És per això que la policia decideix separar-los i oferir-los el mateix tracte a tots dos: pel delicte menor seran condemnats a un any de presó però si un confessa el delicte major i el seu còmplice no, el primer serà alliberat i el còmplice serà condemnat a 20 anys de presó com a únic responsable del delicte major. Si tots dos confessen el delicte greu, la condemna serà de 8 anys per cadascun d'ells.
Veiem el joc expressat en forma matricial, noti's que els pagaments són expressats amb signe negatiu perquè són anys de condemna, el que suposa un pagament negatiu pels presos:

$$\begin{array}{l}\text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} \\ \text{Confessar} \\ \text{No confessar}\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\text{Confessar} & \text{No confessar}\end{array} \\ \begin{pmatrix} (-8,-8) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-1,-1) \end{pmatrix}\end{array}$$

L'equilibri d'aquest joc és el perfil d'estratègies (Confessar, Confessar) ja que cap dels presoners té incentius a canviar l'estratègia, és a dir, a no confessar, donada l'estratègia de l'altre jugador:

- Si el jugador 1 decideix no confessar, els anys que haurà de passar a la presó si el jugador 2 no canvia d'estratègia passaran de 8 a 20, per tant, no té incentius a canviar d'estratègia.

- De manera simètrica, si el jugador 2 decideix no confessar, els anys de presó per ell també augmentaran de 8 a 20, pel que tampoc té incentius a canviar d'estratègia.

Per a cada jugador, doncs, els pagaments de l'estratègia (Confessar, Confessar) són més alts que els pagaments resultants de canviar d'estratègia sense un canvi de situació de l'altre jugador. Per tant, l'estratègia (Confessar, Confessar) és un equilibri de Nash. Tot i això, val la pena comentar que tot i que és un equilibri de Nash, aquest no és el millor perfil d'estratègies en termes de pagaments ja que si tots dos jugadors decidissin cooperar i acordessin no confessar cap d'ells, llavors la condemna seria de només un any per cadascun d'ells en comptes dels 8 anys de presó que suposa escollir l'equilibri de Nash. Noti's però que hi hauria incentius a canviar d'estratègia.

⊠

Val la pena destacar que el dilema dels presoners no és un únic exemple particular sinó que tot joc que tingui unes certes característiques serà un dilema dels presoners.

Generalització del dilema dels presoners. Tot joc amb un equilibri de Nash i que compleix les següents propietats és un joc anomenat *dilema dels presoners*.

1. Hi ha un únic equilibri.
2. L'equilibri s'autoimposa per dominància estricta d'estratègies (la tria de les estratègies dominants de cada jugador dona lloc a un sol equilibri de Nash).
3. L'equilibri no és Pareto-eficient[2] (hi ha alguna entrada on tots els jugadors guanyen estrictament més).

Per trobar els equilibris de Nash d'un joc haurem d'utilitzar diferents raonaments i veurem més endavant que no necessàriament l'equilibri de Nash és únic. Veiem com trobar-los utilitzant la millor resposta, que és l'estratègia que decidirà triar un jugador si sap quines estratègies jugaran els altres. La forma de trobar els equilibris de Nash d'un joc és veure si existeix algun perfil d'estratègies $s \in S$ on per a tots els jugadors, l'estratègia triada s_i és una millor resposta a les altres. És clar que el perfil d'estratègies format per estratègies que siguin millors respostes serà un equilibri de Nash ja que cap jugador podrà canviar l'estratègia per millorar la seva situació donat que ja han triat la seva millor opció.

Exemple. (Cerca de l'equilibri de Nash a través de les millors respostes) Trobem l'equilibri de Nash de l'exemple anterior analitzant les millors respostes. Donat el joc del dilema del presoner en la forma bimatricial

$$\begin{array}{l} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} \\ \text{Confessar} \\ \text{No confessar} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Confessar} & \text{No confessar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-8,-8) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

trobem les millors respostes de cada jugador. Veiem primer les accions del jugador 1:

1. Si el jugador 2 confessa, la seva millor resposta serà confessar, ja que el pagament serà més alt ($-8 \succ_{Jug1} -20$).
2. Si el jugador 2 no confessa, la seva millor resposta serà confessar, utilitzant el mateix raonament que abans, ($0 \succ_{Jug1} -1$).

Obtenim, a la forma matricial la següent sel·lecció d'estratègies:

$$\begin{array}{l} {\color{green}\text{Jug 1}}\backslash\text{Jug 2} \\ \text{Confessar} \\ \text{No confessar} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Confessar} & \text{No confessar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} ({\color{green}-8},-8) & ({\color{green}0},-20) \\ (-20,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Amb el mateix raonament, podem trobar les millors respostes del jugador 2:

[2] Es diu que una situació és òptim de Pareto quan no és possible que ningú obtingui un guany superior sense que algú altre perdi [24].

1. Si el jugador 1 decideix confessar, la millor resposta del jugador 2 serà confessar ($-8 \succ_{Jug2} -20$).
2. Si el jugador 1 decideix no confessar, la millor resposta del jugador 2 serà confessar ($0 \succ_{Jug2} -1$).

$$\begin{array}{l c c} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} & \text{Confessar} & \text{No confessar} \\ \begin{array}{l}\text{Confessar}\\ \text{No confessar}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc} (-8,-8) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-1,-1) \end{array}\right)} \end{array}$$

Com hi ha una un perfil d'estratègies que està format per les millors respostes de tots els jugadors, (Confessar, Confessar), aquest serà l'equilibri de Nash. ⊠

Comentaris sobre els equilibris de Nash. Veiem les propietats que tenen els equilibis de Nash d'un joc en forma normal.

1. Pot existir un únic equilibri de Nash[3].

   Exemple.

$$\begin{array}{l c c} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} & \text{Estratègia 1'} & \text{Estratègia 2'} \\ \begin{array}{l}\text{Estratègia 1}\\ \text{Estratègia 2}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc} (55,45) & \boxed{(55,50)} \\ (50,50) & (45,55) \end{array}\right)} \end{array}$$

⊠

2. Pot no existir cap equilibri de Nash.

   Exemple.

$$\begin{array}{l c c} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} & \text{Estratègia 1'} & \text{Estratègia 2'} \\ \begin{array}{l}\text{Estratègia 1}\\ \text{Estratègia 2}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc} (5,-5) & (-5,5) \\ (-5,5) & (5,-5) \end{array}\right)} \end{array}$$

⊠

3. Pot haver-hi més d'un equilibri de Nash.

   Exemple.

$$\begin{array}{l c c} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} & \text{Estratègia 1'} & \text{Estratègia 2'} \\ \begin{array}{l}\text{Estratègia 1}\\ \text{Estratègia 2}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc} (1,1) & \boxed{(3,2)} \\ \boxed{(2,5)} & (2,4) \end{array}\right)} \end{array}$$

⊠

[3] Tot i que a la bimatriu es marqui $(55,50)$, l'equilibri de Nash és el perfil d'estratègies (Estratègia 1, Estratègia 2'). No s'ha de confondre l'equilibri amb els pagaments associats.

4. Els pagaments no determinen l'equilibri de Nash.

   Exemple.

$$\begin{array}{cc} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} & \begin{array}{ccc}\text{Estratègia 1} & \text{Estratègia 2} & \text{Estratègia 3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Estratègia 1}\\ \text{Estratègia 2}\\ \text{Estratègia 3}\end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & \boxed{(6,1)} \\ (0,0) & \boxed{(3,3)} & (3,3) \\ (2,1) & (2,5) & (5,5) \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boxtimes$

5. Pot ser que els equilibris es dominin en pagaments.

   Exemple.

$$\begin{array}{cc} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} & \begin{array}{ccc}\text{Estratègia 1'} & \text{Estratègia 2'} & \text{Estratègia 3'}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Estratègia 1}\\ \text{Estratègia 2}\\ \text{Estratègia 3}\end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (2,4) & (3,5) \\ \boxed{(6,7)} & (8,2) & (3,1) \\ (4,1) & (8,2) & \boxed{(5,6)} \end{pmatrix} \end{array}$$

   Tenim, doncs, que hi ha dos equilibris de Nash $\sigma_1^* = (s_1^2, s_2^{1'})$ i $\sigma_2^* = (s_1^3, s_1^{3'})$ i els pagaments associats són:

$$\begin{array}{rcccccl} h(\sigma_1^*) & = & (& 6 & , & 7 &) \\ & & & \vee & & \vee & \\ h(\sigma_2^*) & = & (& 5 & , & 6 &) \end{array}$$

   Així doncs, σ_1^* domina en pagaments a σ_2^* ja que tant pel jugador 1 com pel jugador 2, els pagaments de σ_1^* són millors que els obtinguts amb σ_2^*. $\boxtimes$

6. Pot ser que els equilibris de Nash no siguin Pareto-eficients.

   Exemple.

$$\begin{array}{cc} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} & \begin{array}{cc}\text{Estratègia 1'} & \text{Estratègia 2'}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Estratègia 1}\\ \text{Estratègia 2}\end{array} & \begin{pmatrix} (4,4) & (0,6) \\ (5,0) & \boxed{(1,3)} \end{pmatrix} \end{array}$$

   Veiem que l'equilibri de Nash $\sigma^* = (s_1^2, s_2^{2'})$ té uns pagaments de $h(\sigma^*) = (1,3)$ però que hi ha una altra entrada on els jugadors guanyarien més que no és equilibri de Nash: $h(s_1^1, s_2^{1'}) = (4,4)$. $\boxtimes$

1.5 Extensió mixta d'un joc

Suposem que un joc té un nombre finit d'estratègies. Fins ara, les estratègies dels jugadors han estat estratègies pures, és a dir, el jugador i té un conjunt finit de m_i estratègies entre les que ha d'escollir quina juga. En general, aquest joc no ha de tenir un equilibri i aquest fet es dona en particular perquè els conjunts estratègics no són convexos. Aquesta absència de convexitat es pot observar al no disposar de combinacions convexes de, per exemple, l'estratègia 1 i l'estratègia 2. En altres paraules, una estratègia definida com un terç de l'estratègia 1 i dos terços de l'estratègia 2 no es troba a l'espai d'estratègies. Aquest problema es resol amb la definició d'estratègies mixtes, que aporta la convexitat de l'espai d'estratègies que faltava al joc en estratègies pures.

Per tal d'introduir el concepte d'extensió mixta d'un joc, primer cal introduir alguns conceptes previs.

Un *joc G finit* és aquell joc $G = (N, S, h)$ on el conjunt d'estratègies de cada jugador $S_i,\ i \in N$ és finit.

Per a cada jugador i definim Σ_i com el conjunt de totes les distribucions de probabilitat per a cada jugador i sobre S_i. En altres paraules, Σ_i és el conjunt de les distribucions de probabilitat que expliquen el comportament d'un jugador i en quant a la probabilitat de que aquest jugador triï l'estratègia s_i:

$$\Sigma_i = \Big\{\sigma_i : S_i \to [0,1] \mid \sum_{s_i^j \in S_i} \sigma_i(s_i^j) = 1\Big\}.$$

Una altra manera d'escriure el conjunt Σ_i és:

$$\Sigma_i = \Big\{x \in \mathbb{R}^{\#S_i} \mid x_j \geq 0 \text{ per a tot } j = 1, \ldots, \#S_i \ \text{ i } \ \sum_{j=1}^{\#S_i} x_j = 1\Big\}$$

on $\#S_i$ és el nombre d'elements del conjunt S_i, és a dir, el nombre d'estratègies del jugador i.

Ens situem a l'espai $\mathbb{R}^{\#S_i}$-dimensional i entenem cada dimensió com la probabilitat de jugar cadascuna de les estratègies de S_i. Com són probabilitats, cal que la suma de totes elles sigui 1 i que cadascuna d'elles estigui entre 0 i 1. Així doncs, entenem un punt de Σ_i com un punt del símplex euclidià, és a dir, de l'hiperplà $\displaystyle\sum_{j=1}^{\#S_i} x_j = 1$ restringit a l'octant positiu $\{x \in \mathbb{R}^{\#S_i} \mid x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, \#S_i\}$.

Definim Σ com l'espai definit per les distribucions de probabilitat de cada jugador: $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$.

Definició. (Extensió mixta) Sigui $G = (N,\ S,\ h)$ un joc finit en forma normal. L'*extensió mixta* de G és el joc donat pel triplet $G^* = (N,\ \Sigma,\ H)$ on $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$ i H és el pagament esperat per a cada distribució de probabilitat.

El següent exemple descriu l'extensió mixta d'un joc.

Exemple. (Extensió mixta del cara i creu) Hi ha dos jugadors que poden triar si prefereixen cara o creu de la moneda que es llençarà a continuació. Per veure'n l'extensió mixta cal definir quina serà la probabilitat de que cada jugador triï cara (C) o triï creu (X):

$$\sigma_1(C) = p, \quad \sigma_1(X) = 1 - p, \quad \sigma_2(C) = q \text{ i } \sigma_2(X) = 1 - q$$

Les estratègies per a cada jugador seran, doncs:

- Jugador 1: $(p,\ 1-p)$
- Jugador 2: $(q,\ 1-q)$. ⊠

Nota. L'expressió de les estratègies en forma pura es pot entendre com un cas particular de l'expressió en estratègies mixtes, on la probabilitat de que el jugador triï una estràtegia concreta és 1.

Definició. (Funció de pagaments esperats per al jugador $\boldsymbol{i}$) La *funció de pagaments esperats* per a cada jugador $i \in N$ és: $H_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ tal que

$$H_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left[\Big(\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \Big) \cdot h_i(s) \right], \quad \text{on } \sigma = (\sigma_j)_{j \in N}.$$

És a dir, la funció de pagaments esperats ens diu quina és l'esperança de pagament per a aquell jugador donat un perfil d'estratègies mixtes.

Nota. Es suposarà que els agens són neutrals al risc i que, per tant, valoren la utilitat de resultats probabilístics pel seu valor esperat.

1.6 Teorema de Kakutani

El teorema de Kakutani [13], publicat per Shizuo Kakutani l'any 1941 va ser indispensable per Nash per tal de demostrar l'existència d'equilibris de Nash en estratègies mixtes, tal com es detalla a la següent secció. Aquest teorema és una generalització del teorema del punt fix de Brouwer[4] [23] i descriu condicions suficients per les quals una correspondència definida en un subconjunt compacte i convex de l'espai euclidià té un punt fix.

Per demostrar aquest teorema, hem d'introduir determinades notacions i definicions.

Donat un conjunt X, el *conjunt de les parts* o *conjunt potència* del conjunt X s'escriu com a $P(X)$ i és el conjunt de tots els subconjunts de X:

$$P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Definició. (Correspondència) Una *correspondència* ϕ entre X i Y és una aplicació $\phi : X \to P(Y)$ que assigna a cada element de X un subconjunt de Y. També s'escriu com $\phi : X \twoheadrightarrow Y$.

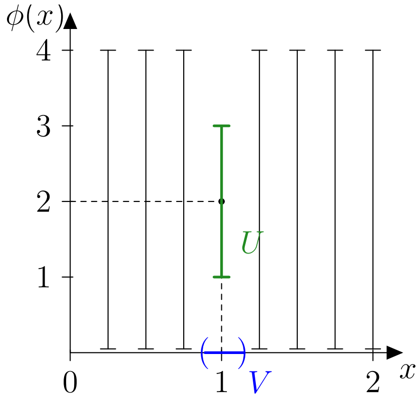
Definició. (Correspondència semicontínua superiorment) Siguin X, Y espais mètrics. Una correspondència $\phi : X \to P(Y)$ és *semicontínua superiorment en* $x \in X$ si per a cada entorn U de $\phi(x)$ existeix un entorn V de x tal que si $z \in V \cap X$, llavors $\phi(z) \subset U$. La correspondència ϕ és *semicontínua superiorment* en X si és semicontínua superiorment $\forall x \in X$.

[4] Tota funció contínua d'una bola de $\mathbb{R}^n$ en si mateixa té almenys un punt fix.

Exemple. Considerem la correspondència $\phi : [0,2] \to P([0,4])$ definida per

$$\phi(x) = \begin{cases} \{2\} \text{ si} & x = 1 \\ [0,4] \text{ si} & x \neq 1 \end{cases}$$

Aquesta correspondència no és semicontínua superiorment en $x = 1$. Prenem l'entorn $U = [1,3]$ de $\phi(1) = \{2\}$. Qualsevol entorn V de $x = 1$ conté un punt y la imatge del qual és $\phi(y) = [0,4] \not\subset U = [1,3]$. Per tant, en el punt $x = 1$, $\phi(x)$ no compleix la definició de semicontínua superiorment.



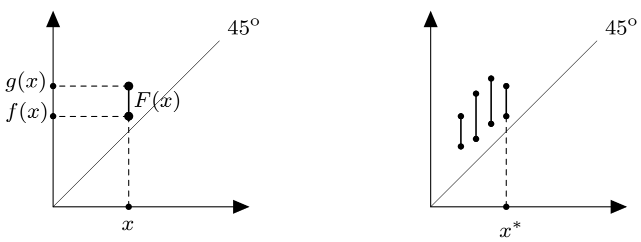
⊠

Teorema. ***(Kakutani, 1941)****, Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^m$ un subconjunt no buit, compacte i convex i sigui $F : K \twoheadrightarrow K$ una correspondència semicontínua superiorment tal que per a tot $x \in K$, el conjunt $F(x)$ és no buit i convex. Llavors, F té almenys un punt fix; és a dir, existeix $x^* \in K$ tal que $x^* \in F(x^*)$.*

Demostració. En el present treball veurem la demostració pel cas $m = 1$. La demostració per altres dimensions es pot trobar a [31]. En el cas d'una dimensió, qualsevol K, subconjunt de $\mathbb{R}$ no buit, compacte i convex és un interval $K = [a,b]$, on $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$.

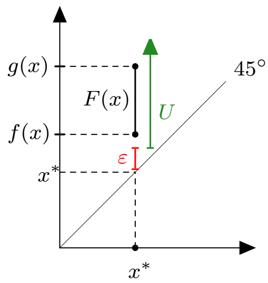
Per a cada punt $x \in [a,b]$, la imatge per F és un interval ja que és un conjunt no buit, convex i tancat: $F(x) = [f(x),\ g(x)]$.

Definim $x^* = \sup\{x \in [a,b] \mid f(x) \geq x\}$.



Anem a veure que $f(x^*) \leq x^* \leq g(x^*)$, ja que llavors $x^* \in F(x^*) = [f(x^*), g(x^*)]$ i, per tant, x^* és un punt fix.

- És trivial si $x^* = b$, assumim $x^* < b$. Si $f(x^*) > x^*$, llavors podem afirmar que $f(x^*) > x^* + \varepsilon$ per algun $\varepsilon > 0$. El conjunt $U = (x^* + \varepsilon,\ \infty)$ és un entorn que conté $F(x^*) = [f(x^*),\ g(x^*)]$. Existeix un entorn N de x^* tal que $\forall x \in N \cap [a,b]$, tenim $F(x) = [f(x),\ g(x)] \subset U$. Llavors, en particular, per $x \in N \cap [a,b]$, $f(x) > x^* + \varepsilon$. Si triem N prou petit com perquè tota $x \in N$ que satisfaci $x^* < x < x^* + \varepsilon$, llavors $f(x) > x^* + \varepsilon > x$. Per tant, x^* no seria el suprem i arribem a una contradicció. Per tant, $f(x^*) \leq x^*$.



- És trivial si $x^* = a$, assumim $x^* > a$. Veiem ara que $g(x^*) \geq x^*$. Suposem que $g(x^*) < x^*$. Llavors també es compleix $g(x^*) < x^* - \varepsilon$ per algun $\varepsilon > 0$. La semicontinuitat superior de F a x^* implica que $F(z) \subseteq (-\infty,\ x^* - \varepsilon)$ per a tot z prou proper a x^* amb $x^* - \varepsilon < z < x^*$. Però llavors,

$$\big[f(z),\ g(z)\big] \subseteq (-\infty,\ x^* - \varepsilon)$$

i $f(z) \leq g(z) < x^* - \varepsilon < z$ per a tot z prou proper a x^*. Això contradiu que x^* sigui el suprem.

Així doncs, hem vist

$$f(x^*) \leq x^* \leq g(x^*),$$

el que vol dir que $x^* \in F(x^*)$, és a dir, x^* és un punt fix. $\square$

2 Teorema de Nash d'existència d'equilibris

2.1 Existència d'equilibris en l'extensió mixta

En aquesta secció veurem i demostrarem el Teorema de Nash, que pretén trobar equilibris en jocs no cooperatius. En el plantejament d'aquest teorema, Nash abandona el raonament que utilitzaren von Neumann i Morgenstern per enunciar i demostrar el Teorema del minimax, que se centra en l'esforç d'un jugador per incrementar el seu propi pagament a costa de disminuir el pagament de l'altre jugador per jocs de suma zero. Així doncs, Nash presenta l'equilibri no com un punt de maximització dels pagaments propis sinó com un punt on, arribats a un desenllaç del joc, els jugadors se n'adonen que les seves estratègies han estat les millors que podrien haver escollit. La manera d'arribar a aquesta noció d'equilibri va ser a través de la idea que la teoria d'Adam Smith [29] era incompleta: Smith defensava que per obtenir el millor resultat cada agent havia d'especialitzar-se en allò que és millor per un mateix; Nash va afegir que havia d'especialitzar-se en allò que és millor per un mateix i pel grup. D'aquesta manera, Nash arribava a una idea d'equilibri on tots els agents sortien satisfets del resultat obtingut.

Abans d'anunciar i demostrar el teorema de Nash, cal definir el concepte de correspondència de la millor resposta. Suposem que el jugador i contempla una estratègia concreta pels altres jugadors i es pregunta quina seria la seva elecció estratègica que maximitzaria H_i. Això és el que defineix la millor resposta pel jugador i.

Definició. (Correspondència de millor resposta d'un jugador) La *correspondència de millor resposta d'i* és la correspondència $B_i : \Sigma_{-i} \twoheadrightarrow \Sigma_i$ que assigna a cada perfil d'estratègies $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ el conjunt d'estratègies mixtes del jugador i que maximitzen el seu pagament, donades les estratègies dels altres jugadors σ_{-i}, és a dir,

$$B_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i' \in \Sigma_i \mid H_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq H_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \text{ per a tot } \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i\}.$$

Definició. (Correspondència de millor resposta) La *correspondència de millor resposta* és la correspondència $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ que assigna a cada $\sigma \in \Sigma$,

$$B(\sigma) = B_1(\sigma_{-1}) \times \ldots \times B_n(\sigma_{-n}) \subset \Sigma.$$

Conjunt d'equilibris de Nash. Donat un joc $G = (N, S, h)$ i la seva extensió mixta $G^* = (N, \Sigma, H)$, denotem per S^* el conjunt d'equilibris de Nash de G (que pot ser buit) i per Σ^* el conjunt d'equilibris de Nash de l'extensió mixta de G.

És ben clar com es relaciona la correspondència de millor resposta amb el conjunt d'equilibris de Nash, ja que $\sigma^* \in \Sigma^*$ implica que cap dels jugadors té incentius per canviar d'estratègia, és a dir cada jugador està fent servir una de les seves millors respostes al que fan els altres i per tant és equivalent a $\sigma^* \in B(\sigma^*)$.

Teorema 2.1. ***(Nash, 1950-51)****. Sigui $G = (N, S, h)$ un joc finit en forma normal i $G^* = (N, \Sigma, H)$ la seva extensió mixta. Llavors, $\Sigma^* \neq \emptyset$.*

Demostració. Sigui $G = (N, S, h)$ un joc finit en forma normal. Veiem primer que com G és un joc finit, Σ és un subconjunt no buit, compacte i convex.

Clarament, per la seva definició, Σ és no buit.

És acotat ja que Σ_i està inclòs dins de

$$\{(y_1,\ \ldots,\ y_r) \in \mathbb{R}^r \mid 0 \leq y_j \leq 1,\ \ \forall j = 0, \ldots, r\},\ \text{on } r = \#s_i.$$

En conseqüència, Σ també és acotat per ser el producte cartesià de conjunts acotats.

Per definició, els conjunts Σ_i són tancats. En conseqüència, Σ és tancat per ser producte finit de tancats.

El conjunt Σ és convex ja que la combinació convexa de distribucions de probabilitat és una altra distribució de probabilitat.

Ara veurem que el conjunt $B(\sigma)$ és no buit i convex i que a més la correspondència B és semicontínua superiorment per tal de poder aplicar el teorema de Kakutani.

Per a tot $\sigma \in \Sigma$, $B(\sigma)$ és un conjunt no buit. Hem vist que Σ és un domini compacte. Com H_i és contínua en el compacte Σ, aplicant el Teorema de Weiestrass[5], H_i té un màxim en Σ. Per tant, $B_i(\sigma)$ és no buit i, en conseqüència, $B(\sigma)$ és no buit.

Per a cada $\sigma \in \Sigma$, $B(\sigma)$ és un conjunt convex. Cal veure que la combinació convexa de dues millors respostes és també una millor resposta. És suficient veure-ho per $B_i(\sigma_{-i})$.

$$B_i(\sigma_{-i}) \text{ convex} \Longleftrightarrow \forall \sigma_i^1, \sigma_i^2 \in B_i(\sigma_{-i}),\ \lambda\sigma_i^1 + (1-\lambda)\sigma_i^2 \in B_i(\sigma_{-i}).$$

Comprovem si es compleix la condició per tal que $\lambda\sigma_i^1 + (1-\lambda)\sigma_i^2 \in B_i(\sigma_{-i})$, és a dir, si per a qualsevol $\sigma \in \Sigma$,

$$H_i(\lambda\sigma_i^1 + (1-\lambda)\sigma_i^2,\ \sigma_{-i}) \overset{?}{\geq} H_i(\bar{\sigma}_i,\ \sigma_{-i})\ \forall \bar{\sigma}_i \in \Sigma_i.$$

Per demostrar-ho només cal tenir en compte que

$$\begin{gathered} H_i(\lambda\sigma_i^1 + (1-\lambda)\sigma_i^2,\ \sigma_{-i}) = \\ \lambda H_i(\sigma_i^1,\ \sigma_{-i}) + (1-\lambda) H_i(\sigma_i^2,\ \sigma_{-i}), \end{gathered}$$

i que

$$H_i(\sigma_i^1, \sigma_{-i}) = H_i(\sigma_i^2, \sigma_{-i}) \text{ per a qualsevol } \sigma \in \Sigma.$$

La correspondència $B : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma$ és semicontínua superiorment. Com el conjunt Σ és acotat, la definició de correspondència semicontínua superiorment és equivalent al fet que el seu graf sigui tancat. El graf de B és el conjunt

$$Graf(B) = \{(\sigma,\ \sigma') \in \Sigma \times \Sigma \mid \sigma' \in B(\sigma)\},$$

[5]**Teorema de Weiestrass:** Sigui X un espai topològic i $K \subseteq X$ un conjunt compacte. Si $f : K \to \mathbb{R}$ és una funció contínua llavors existeixen $x_1, x_2 \in K$ tals que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ per a qualsevol $x \in K$.

que és tancat perquè la funció H és còncava en cada variable i contínua i, per tant, per a cada σ, que és una distribució de probabilitat, σ és on es troba el màxim de la funció H.

Per tant, la correspondència B és semicontínua superiorment.

Ara podem aplicar el teorema de Kakutani i obtenim que la correspondència de millor resposta B de l'extensió mixta G^* de G té com a mínim un punt fix $\sigma^* \in B(\sigma^*)$, i això és equivalent a que $\sigma^* \in \Sigma^*$. Per tant, $\Sigma^* \neq \emptyset$. □

Nota. El teorema de Nash (Teorema 2.1) és un cas particular ja que l'existència d'equilibris es pot demostrar en condicions més generals. El teorema similar que acabem de veure pot aplicar-se al joc $G = (N, S, h)$ sota les següents hipòtesis:

- S_i és compacte i convex $\forall = 1, \dots, n$,
- $h_i(s)$ està definida, és contínua i acotada per a tot $s \in S$ i per a tot $i \in N$,
- $h_i(s_{-i})$ és còncava respecte $s_i \in S_i$ per a tot $s \in S$ i per a tot $i \in N$.

Òbviament el Teorema de Nash enunciat és un cas d'aquesta generalització ja que el conjunt Σ i la funció de pagaments esperats H compleixen les hipòtesis.

Observació 2.2. Sigui $G = (N, S, h)$ un joc finit en forma normal i $G^* = (N, \Sigma, H)$ la seva extensió mixta. Suposem que $\sigma^* \in \Sigma^*$. Llavors, tota estratègia pura que aparegui a σ^* amb probabilitat estrictament positiva dona lloc al mateix pagament esperat. És a dir, si per a un jugador $i \in N$ tenim que $\tilde{s}_i$, $\hat{s}_i \in S_i$ són tals que $\sigma_i^*(\tilde{s}_i)$, $\sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$, llavors

$$H_i(\tilde{s}_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*).$$

L'explicació a aquest fet és que, donades les estratègies mixtes dels altres jugadors, el jugador i només donarà probabilitat positiva a aquelles estratègies pures que maximitzen el seu pagament esperat, és a dir, només es plantejarà triar aquelles estratègies que suposin un pagament esperat més alt i, per tant, si es planteja triar més d'una és perquè els pagaments esperats són els mateixos. Així doncs, el jugador i és indiferent entre totes aquelles estratègies a les que ha assignat probabilitat positiva, ja que els pagaments esperats de totes elles són iguals.

Veiem com aquesta observació pot ajudar a calcular equilibris de Nash en estratègies mixtes d'un joc finit en forma normal. Prenem l'exemple de la batalla dels sexes i busquem-ne el seu conjunt d'equilibris de Nash en estratègies mixtes Σ^*.

Exemple. (La batalla dels sexes) Dos membres d'una parella, $N = \{h, d\}$, h l'home i d la dona, han acordat trobar-se al vespre però cap dels dos recorda on anaven i no tenen possibilitat de comunicar-se. Saben que ell havia proposat anar al futbol (F) i ella al ballet (B), és a dir, $S_h = S_d = \{F, B\}$. Cadascú prefereix anar al lloc que ha proposat però tots dos prefereixen anar junts al mateix lloc que anar per separat a llocs diferents, això es reflecteix a les funcions de pagaments dels jugadors que són: $h_h(F,F) = h_d(B,B) = 3$, $h_d(F,F) = h_h(B,B) = 1$ i $h_h(F,B) = h_d(F,B) = h_h(B,F) = h_d(B,F) = 0$. Així doncs, cadascú ha de decidir individualment on anar sense saber on decidirà anar l'altre. El joc representat en forma matricial pren la següent forma:

$$\begin{array}{cc} \text{h}\backslash\text{d} & \begin{array}{cc} \quad\text{F} & \quad\quad\text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{F} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (3,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Veiem aquest joc en la seva extensió mixta. Donat un perfil d'estratègies mixtes $\sigma = (\sigma_h, \sigma_d) \in \Sigma$, definim el parell $(p,q) \in [0,1]^2$ com $p = \sigma_h(F)$ i $q = \sigma_d(F)$. Trobem ara el conjunt de tots els equilibris de Nash del joc ajudant-nos de la Observació 2.2. Primer, observem que (F,F) i (B,B) són els dos equilibris de Nash en estratègies pures, per tant, $(1,1),(0,0) \in \Sigma^*$. Amb un cert abús de notació, quan l'estratègia mixta de l'home és $(1,0)$ posarem F, i per tant $\sigma_h(F) = 1 = p$. De forma similar ho farem per B quan l'estratègia mixta sigui $\sigma_h(B) = 1 - p$, és a dir, quan $p = 0$. Suposem que $(p,q) \in \Sigma^*$, els pagaments en aquests casos són:

$$\begin{aligned} H_h(F,q) &= 3 \cdot \sigma_h(F) \cdot \sigma_d(F) + 0 \cdot \sigma_h(F) \cdot \sigma_d(B) \\ &= 3 \cdot p \cdot q \\ &= 3q. \\ H_h(B,q) &= 0 \cdot \sigma_h(B) \cdot \sigma_d(F) + 1 \cdot \sigma_h(B) \cdot \sigma_d(B) \\ &= 1 \cdot (1-p) \cdot (1-q) \\ &= 1-q. \end{aligned}$$

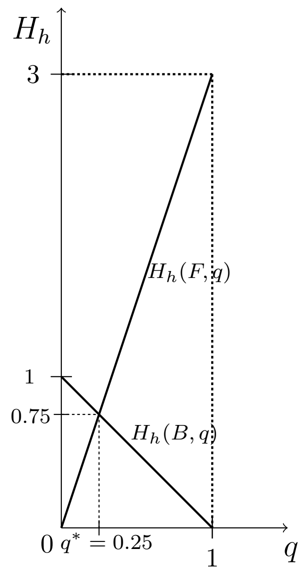
Per l'Observació 2.2, quan $p \in (0,1)$, llavors els pagaments esperats per l'home han de ser iguals i obtenim $3q = 1 - q$. Per tant, $q^* = 1/4$.

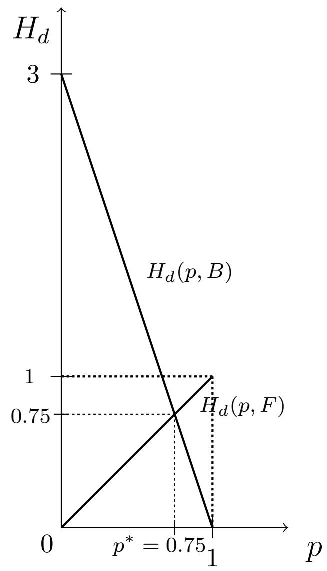
De manera simètrica obtenim els pagaments esperats per la dona:

$$\begin{aligned} H_d(p,F) &= p, \\ H_d(p,B) &= 3(1-p). \end{aligned}$$

Tornant a aplicar l'Observació 2.2 obtenim que els pagaments esperats per la dona sigui quina sigui la seva estratègia mixta seran iguals i, per tant, $p = 3(1-p)$ i $p^* = 3/4$.

Així doncs, cal destacar que la indiferència entre estratègies d'un jugador ha determinat l'estratègia mixta de l'altre jugador. Veiem com aquestes dues estratègies mixtes han quedat determinades per la indiferència de l'altre jugador.





A partir de la figura es poden construir les correspondències de la millor resposta B_h i B_d per a l'home i per a la dona: per a tot $(p,q) \in \Sigma$,

$$B_h(q) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 0 \leq q < 0.25 \\ [0,1] & \text{si } q = 0.25 \\ \{1\} & \text{si } 0.25 < q \leq 1 \end{cases}$$

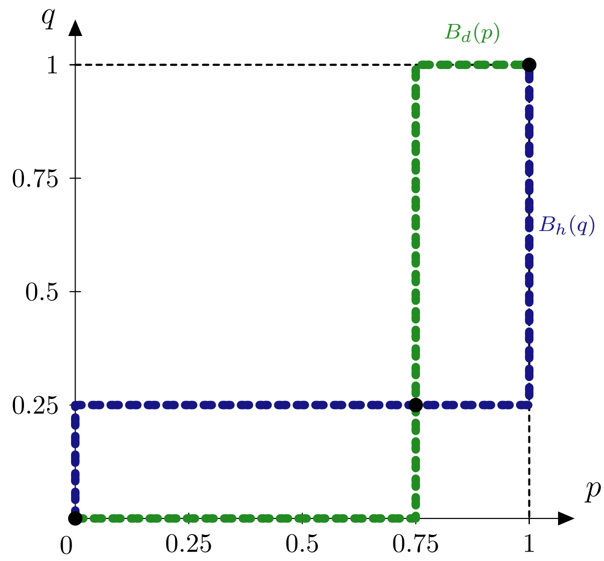
$$B_d(p) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 0 \leq p < 0.75 \\ [0,1] & \text{si } p = 0.75 \\ \{1\} & \text{si } 0.75 < p \leq 1 \end{cases}$$

Veiem primer les correspondències de la millor resposta de l'home: $B_h(q)$. Si ens fixem en la primera figura de les dues situades sobre aquestes línies podem veure que podem diferenciar tres casos depenent de la corba que es trobi per sobre per a cada valor de q.

- Si $0 \leq q < 0.25$, l'home obtindrà un pagament més alt si tria anar al ballet que si tria anar al futbol, ja que la corba $H_h(B,q)$ es troba per sobre de la corba $H_h(F,q)$. Això comportarà que la probabilitat assignada a anar al ballet $(1-p)$ sigui 1 i la probabilitat assignada a anar al futbol (p) sigui 0. Així doncs, $B_h(q) = 0$ en aquest cas.
- Si $q = 0.25$, les corbes $H_h(F,q)$ i $H_h(F,q)$ es tallen i, per tant, els pagaments esperats per a qualsevol de les dues estratègies seran els mateixos. Així doncs, l'home no té preferència entre les dues estratègies i, en conseqüència, la probabilitat $p = \sigma_h(F)$ pot prendre qualsevol valor entre 0 i 1.
- De manera equivalent a la primera situació, quan $0.25 < q \leq 1$, el pagament esperat d'escollir anar al futbol és més alt que el d'escollir anar al ballet per trobar-se la corba $H_h(F,q)$ per sobre de $H_h(F,q)$. És per això que l'home té preferència per l'estratègia F, i en conseqüència, $B_h(q) = 1$.

El raonament de la correspondència de la millor resposta per a la dona s'obté de manera equivalent a partir de la segona figura immediatament a sobre d'aquestes línies.

Una vegada obtingudes les correspondències de la millor resposta per als dos jugadors es poden representar, a través dels punts fixos de la correspondència de la millor resposta, el conjunt d'equilibris de Nash $\Sigma^* = \{(0,0),(1,1),(0.75,0.25)\}$ del joc.



$\boxtimes$

2.2 Teorema del Minimax

Joc bipersonal de suma zero. Suposem que tenim un joc amb dos jugadors. El jugador 1 té un conjunt finit de m estratègies entre les que ha de triar i el jugador 2 té un conjunt finit de n estratègies. Les funcions de pagament del joc poden ser descrites mitjançant una bimatriu A amb m files i n columnes. L'entrada a_{ij} és el pagament pel jugador 1 quan ell escull l'estratègia i i el jugador 2 l'estratègia j. En un *joc bipersonal de suma zero*, el pagament pel jugador 2 sota aquest mateix perfil d'estratègies serà $-a_{ij}$. És a dir, el guany d'un jugador és sempre la pèrdua de l'altre. Aquest fet condueix a que els interessos dels agents siguin completament contraris.

Notem que sigui $G = (\{1,2\}, S, h)$ un joc finit en forma normal amb dos jugadors i suma zero, la seva extensió mixta $G^* = (\{1,2\}, \Sigma, H)$ també és de suma zero: per a tot $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$, tenim

$$\begin{aligned} H_1(\sigma_1, \sigma_2) &= \sum_{s \in S} \sigma_1(s_1) \cdot \sigma_2(s_2) \cdot h_1(s) \\ &= \sum_{s \in S} \sigma_1(s_1) \cdot \sigma_2(s_2) \cdot (-h_2(s)) \\ &= -\sum_{s \in S} \sigma_1(s_1) \cdot \sigma_2(s_2) \cdot h_2(s) \\ &= -H_2(\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned}$$

A la Teoria de Jocs un dels problemes que es va intentar resoldre durant molts anys i que encara està pendent de resposta és la determinació d'una manera de triar estratègies de manera òptima, és a dir, com jugar assegurant-se una pèrdua màxima. Von Neumann i Morgenstern van donar resposta a aquest problema sota unes certes condicions. D'aquesta manera, el minimax és un mètode de decisió que permet minimitzar la pèrdua màxima esperada en jocs bipersonals d'informació completa i de suma zero.

Teorema. ***(Teorema del minimax, Von Neumann i Morgenstern, 1944).*** *Sigui $G = (N, S, h)$ un joc finit en forma normal amb dos jugadors i suma zero i $G^* = (N, \Sigma, H)$ la seva extensió mixta. Llavors, existeixen $v \in \mathbb{R}$ (el valor de G), $\sigma_1^* \in \Sigma_1$ i $\sigma_2^* \in \Sigma_2$ (estratègies òptimes) tals que per a tot $\sigma_1 \in \Sigma_1$ i $\sigma_2 \in \Sigma_2$:*

(i) $H_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \geq v$

(ii) $H_2(\sigma_1, \sigma_2^*) \geq -v$ $(\Leftrightarrow H_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \leq v)$

(iii) $\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2) = v$

Abans de la demostració d'aquest teorema veiem què volen dir aquestes tres condicions.

- La condició (i) diu que si el jugador 1 decideix triar l'estratègia òptima σ_1^*, llavors s'assegura un pagament esperat de com a mínim v, sigui quina sigui l'estratègia triada pel jugador 2.
- La condició (ii) diu que si el jugador 2 decideix triar l'estratègia òptima σ_2^*, llavors s'assegura una pèrdua màxima de v sigui quina sigui l'estratègia triada pel jugador 1.
- La condició (iii) diu tres coses:
  - Primer, que el punt de vista optimista del jugador 1 al pensar que pot predir correctament l'estratègia de l'altre jugador dona un pagament esperat $(\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2))$ més gran o igual que el punt de vista pessimista, que és quan el jugador 1 pensa que el jugador 2 pot predir correctament la seva estratègia $(\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2))$. Aquesta desigualtat i la simètrica pel jugador 2 és certa per qualsevol joc en forma normal amb dos jugadors.

– Segon, aquesta condició també diu que si el joc és de suma zero, llavors el punt de vista pessimista dona un pagament esperat més gran o igual que el punt de vista optimista i que, per tant, els pagaments esperats dels dos punts de vista són iguals.

– Tercer, aquests pagaments esperats són v pel jugador 1, $-v$ pel jugador 2 i $H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v = -H_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$.

Demostració. Aquesta es basa en un resultat anterior de von Neumann (1928) fent servir el resultat d'existència de Nash (Teorema 2.1 de Nash).

Pel Teorema d'existència d'equilibris de Nash, el conjunt d'equilibris de Nash és no buit, $\Sigma^* \neq \emptyset$, ja que tot joc finit en forma normal té algun equilibri de Nash. Sigui $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \in \Sigma^*$ un equilibri arbitrari. Definim $v = H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$. Com que (σ_1^*, σ_2^*) és un equilibri de Nash de G^*, llavors el jugador 1 no té incentius a canviar-se d'estratègia, és a dir, si canvia d'estratègia els pagaments esperats que rebrà seran menors:

$$v = H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq H_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \ \ \forall \sigma_1 \in \Sigma_1.$$

Aquesta és l'afirmació (ii) del Teorema del minimax. Veiem ara l'afirmació (i) del Teorema.

Com que $v = H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ és equivalent a $-v = -H_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = H_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ per ser el joc de suma 0, llavors, amb el mateix raonament que abans com (σ_1^*, σ_2^*) és un equilibri de Nash, el jugador 2 no té incentius a canviar d'estratègia perquè suposaria una reducció del seu pagament esperat:

$$-v = H_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq H_2(\sigma_1^*, \sigma_2) \ \ \forall \sigma_2 \in \Sigma_2.$$

Per tant,

$$v \leq -H_2(\sigma_1^*, \sigma_2) = H_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \ \ \forall \sigma_2 \in \Sigma_2.$$

D'aquesta manera obtenim l'afirmació (i).

Finalment, veiem ara l'afirmació (iii) del Teorema:

$$\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2) = v$$

demostrant que

$$\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2) \geq \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2) \tag{2.1}$$

i que

$$\min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2) \leq v \leq \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2). \tag{2.2}$$

A continuació demostrem la primera desigualtat (2.1). Sigui $\bar{\sigma_2} \in \Sigma_2$ arbitrària, per a tot $\sigma_1 \in \Sigma$,

$$H_1(\sigma_1, \bar{\sigma_2}) \geq \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

Per tant, si maximitzem respecte $\sigma_1 \in \Sigma_1$ la desigualtat anterior, obtenim

$$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} H_1(\sigma_1, \bar{\sigma_2}) \geq \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} H_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

Aquesta desigualtat és certa per a tot $\bar{\sigma_2} \in \Sigma_2$. Per tant, en particular també ho serà per aquella $\sigma_2 \in \Sigma_2$ que fa mínima la primera expressió, així doncs obtenim:

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \geq \max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2). \tag{2.1}$$

Demostrem ara la desigualtat contrària (2.2) per tal de demostrar que la igualtat és certa. Veiem doncs, que

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \leq \max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2). \tag{2.2}$$

Per l'afirmació (i) del teorema del minimax, hem vist que $H_1(\sigma_1^*,\sigma_2) \geq v$. Partim de $\max\limits_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min\limits_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2)$:

$$\max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \geq \min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1^*,\sigma_2) \geq v$$

La primera desigualtat és certa perquè el màxim d'una funció en qualssevol dels seus punts del conjunt de sortida és sempre més gran o igual que aquesta funció avaluada en algun d'aquests punts, i la segona desigualtat és certa per l'afirmació (i) del teorema havent pres en particular $\sigma_1 = \sigma_1^*$.

Per l'afirmació (ii) del teorema, hem vist que $v \geq H_1(\sigma_1,\sigma_2^*)$. Per tant,

$$\min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \leq \max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2^*) \leq v$$

La primera desigualtat és certa perquè el mínim d'una funció en qualssevol dels seus punts del conjunt de sortida és sempre més petit o igual que aquesta funció avaluada en algun d'aquests punts, i la segona desigualtat és certa per l'afirmació (ii) del teorema havent pres en particular $\sigma_2 = \sigma_2^*$.

Així doncs, acabem de veure que

$$\max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \geq v \geq \min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) \tag{2.2}$$

i conjuntament amb la desigualtat (2.1), obtenim

$$\max_{\sigma_1\in\Sigma_1}\min_{\sigma_2\in\Sigma_2} H_1(\sigma_1,\sigma_2) = \min_{\sigma_2\in\Sigma_2}\max_{\sigma_1\in\Sigma_1} H_1(\sigma_1,\sigma_2) = v,$$

l'afirmació (iii) del teorema del minimax. □

3 Exemples i models econòmics

La Teoria de Jocs pot ser aplicada a molts àmbits. En aquesta secció veurem com la Teoria de Jocs pot explicar de manera racional la presa de decisions dels individus a través d'exemples clàssics d'aquesta branca de les matemàtiques. A continuació també veurem com Cournot [4] i Bertrand [2] van fer ús de la Teoria de Jocs per explicar el comportament dels productors en situacions de mercat oligopolístiques. És important destacar el treball d'aquests dos autors ja que van ser l'inici formal de l'estudi de la Teoria de Jocs.

3.1 Alguns jocs clàssics

3.1.1 El joc del Pirata

Problema: Un vaixell amb 10 pirates troba un botí amb 100 monedes d'or. El pirata més vell repartirà el botí d'una certa manera i aquest repartiment anirà a votació entre tots els pirates. Si la meitat o més accepten el repartiment proposat llavors es fa com s'ha dit. En cas contrari, el pirata més vell és llençat per la borda i el segon més vell fa un nou repartiment. Es segueix successivament fins que el repartiment proposat és acceptat. Què farà el pirata més vell?

Solució: Per resoldre aquest joc utilitzarem el mètode de la inducció cap enrere, és a dir, començarem analitzant el repartiment que tindria lloc en l'últim dels casos: quan només quedi un sol pirata. A continuació, tenint en compte aquest resultat veurem quin repartiment tindria lloc quan quedin dos pirates i així successivament. El repartiment que tindrà lloc en cada moment serà un equilibri de Nash ja que serà el repartiment que farà que cap pirata vulgui canviar el seu vot perquè canviar-lo només voldria dir empitjorar la seva situació. Veiem quantes monedes repartirà cada pirata a cadascun dels seus companys a la seguent taula, on el Pirata 1 és el més vell i els següents per ordre de naixement.

	Pirata 1	Pirata 2	Pirata 3	Pirata 4	Pirata 5	Pirata 6	Pirata 7	Pirata 8	Pirata 9	Pirata 10	
Pirata 1	96	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
Pirata 2		96	0	1	0	1	0	1	0	1	
Pirata 3			97	0	1	0	1	0	1	0	
Pirata 4				97	0	1	0	1	0	1	
Pirata 5					98	0	1	0	1	0	
Pirata 6						98	0	1	0	1	
Pirata 7							99	0	1	0	(4)
Pirata 8								99	0	1	(3)
Pirata 9									100	0	(2)
Pirata 10										100	(1)

(1) Quan el Pirata 10 és l'únic que hi ha per repartir el botí, decidirà quedar-se'l tot per ell, ja que és l'única opció i alhora la millor per ell.

(2) Si la meitat o més accepten el repartiment, llavors es fa. Com el Pirata 9 votarà a favor perquè és el seu propi repartiment, es farà el que ell digui ja que no necessita més vots a favor. És per això que decidirà quedar-se tot el botí per ell.

(3) Si llencen el Pirata 8 per la borda, el Pirata 9 decidirà quedar-s'ho tot i, per tant, el Pirata 10 no tindrà res. Per una banda, el Pirata 9 sempre votarà en contra del repartiment perquè si no es fa, ell es queda tot el botí i, per l'altra, si el Pirata 8 dona una moneda al Pirata 10 aquest ja votarà a favor i el repartiment es durà a terme. És per això que el Pirata 8 donarà una moneda al Pirata 10 i es quedarà totes les altres.

(4) Si el Pirata 7 li dona una moneda al Pirata 9 aquest ja votarà que sí perquè sinó al següent repartiment es queda sense cap moneda. Com ell mateix també votarà que sí, ja té la meitat dels vots i no cal que doni res als pirates 8 i 10 ja que no necessita els seus vots.

Amb aquest mateix argument de (3) i (4) es pot justificar que cada pirata donarà una moneda a aquells pirates que a la següent ronda no en tindrien cap i quedar-se ell la resta. D'aquesta manera arribem al repartiment òptim que hauria de fer el pirata més vell, el Pirata 1: donar una moneda als pirates 3, 5, 7 i 9 i quedar-se ell amb les 96 monedes restants.

Aquest és un exemple de joc descrit en forma extensiva o d'arbre. Les estratègies són prou complexes, i el que s'ha descrit és el que es coneix com la solució per inducció cap enrere.

3.1.2 Dilema del presoner repetit infinites vegades

Recuperem el dilema del presoner presentat a l'Exemple 1.1. Aquesta vegada, per facilitar la comprensió i expressar els pagaments en forma de guany, l'expressem de la següent manera:

Els dos criminals han estat arrestats i parteixen d'una situació en que hauran de complir 20 anys de condemna màxima. La policia els ofereix les següents opcions, que seran les estratègies de cada jugador:

s^1: Confessar (C)

s^2: No confessar (NC)

Si tots dos confessen, hauran de complir 8 anys de condemna cadascun, el que vol dir que s'estalviaran 12 anys de presó. Per altra banda, si un confessa i l'altre no, el que hagi decidit no confessar s'estalviarà els 20 anys de la condemna total. Finalment, si tots dos delinqüents decideixen no confessar, només hauran de complir un any de presó, el que suposa un estalvi de 19 anys de presó. La matriu de pagaments serà la següent, expressant els pagaments com els anys d'estalvi:

$$\begin{array}{l} \text{Jug 1}\backslash\text{Jug 2} \\ \text{Confessar} \\ \text{No confessar} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Confessar} & \text{No confessar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (12,12) & (20,0) \\ (0,20) & (19,19) \end{pmatrix} \end{array}$$

Quan el joc es repeteix les estratègies de cada jugador han d'especificar quina serà l'acció a prendre, i dependrà de la història precedent. També els pagaments seran la suma dels pagaments rebuts a cada etapa. En general cal pensar que els pagaments en diferents etapes s'han de valorar avui mitjançant una taxa de descompte.

Un joc d'etapa que només té un equilibri de Nash, com és el nostre cas, presenta, pel joc repetit un nombre finit de vegades només un equilibri de Nash, que és jugar l'equilibri a cada etapa. És fàcil veure-ho si es pensa en el darrer joc d'etapa. Si és equilibri del joc repetit es farà l'equilibri de l'etapa, però llavors en l'etapa anterior, estem igual, i ningú es pot desviar, etc.

Suposem que el joc es juga infinites vegades. Suposem també que els jugadors descompten els pagaments futurs a una taxa de 0'9 ja que cada vegada que es repeteix el joc el guany obtingut representa un 90% del guany que haguessin obtingut si el joc s'hagués jugat en el moment inicial[6].

Com ja hem vist anteriorment, com a joc que es juga una sola vegada té un equilibri de Nash únic que és (Confessar, Confessar), de manera que cada jugador obté 12 anys de pagament. Si es juga aquest joc de forma infinita amb la taxa de descompte de 0'9, el pagament obtingut per a cada jugador és:

$$12 + 12 \cdot 0'9 + 12 \cdot 0'9^2 + \ldots = 12 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 0'9^i = 12 \cdot \frac{1}{1 - 0'9} = 120$$

Quan el dilema del presoner es juga un nombre infinit de vegades, a més de l'equilibri de Nash que consisteix en jugar l'equilibri a cada etapa, apareixen més equilibris, el que veurem seguidament.

3.1.3 Dilema del presoner repetit, altres estratègies

Tornem a prendre el dilema del presoner plantejat a 1.1 amb la particularitat d'un canvi en les estratègies dels jugadors, que seran:

$s_1 = s_2 = \{$Jo col·laboro sempre que tu també però no col·laboraré mai més si tu no col·labores un cop$\}$.

[6] Aquesta taxa de descompte s'explica pel fet que és preferible jugar el joc en el moment present i començar a complir la condemna ara que no pas haver de perdre temps jugant una altra vegada i posposar la condemna en el temps.

Així doncs, les estratègies dels dos jugadors seran no confessar fins que un dels dos decideixi confessar traint així al seu company i llavors tots dos confessaran sempre. Si cap dels dos deixa mai de col·laborar, els pagaments esperats que obtindrà cadascun sota la mateixa taxa de descompte seran:

$$19 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 0'9^i = 190$$

Veiem ara quins seran els pagaments segons el moment t en que deixin de col·laborar:

$$t = 1: \; 19 + 12 \cdot (0'9 + 0'9^2 + \ldots) = 19 + 12 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 0'9^i = 19 + 12 \cdot \frac{0'9}{1 - 0'9} = 127$$

$$t = 2: \; 19 \cdot (1 + 0'9) + 12 \cdot (0'9^2 + 0'9^3 + \ldots) = 36'1 + 12 \cdot \frac{0'81}{1 - 0'9} = 133'3$$

$$\vdots$$

$$t \to \infty: \; 190$$

El pagament esperat augmenta conforme més tard es deixi de col·laborar i, per tant, no interessa prendre aquesta estratègia.

Cal destacar que la capacitat de condicionar l'elecció del període t en el que deixar de col·laborar segons les accions observades en els períodes anteriors fa que els presoners aconsegueixin dins un equilibri no cooperatiu un resultat normalment associat a la cooperació (és a dir, a uns acords vinculants prèviament establerts). Es destaca l'observació que va fer David Hume [12] sobre aquest tipus d'equilibris i la descripció de per què es pot confiar en que els demés mantinguin les seves promeses:

> Podem satisfer els notres apetits d'una forma solapada i artificial, en lloc de fer-ho de manera impetuosa i precipitada. Així, he après a prestar un servei a algú altre sense que per això li professi un afecte real; perquè jo prevec que em tornarà el servei, en espera d'un altre del mateix tipus i amb la finalitat de mantenir la mateixa relació de bon tracte amb mi o amb altres. I d'acord amb això, un cop l'hagi servit, i que ell es trobi en una posició d'avantatge a causa de la meva acció, es veurà induït a dur a terme la seva part, com si preveiés les conseqüències de la seva negativa. [...] Una vegada que aquests fets han estat instituïts (per exemple, les promeses, qui els utilitzi es veurà immediatament obligat, en el seu interès, a complir els seus compromisos i mai més serà digne de confiança si es nega a dur a terme allò que havia promès.

3.2 Models econòmics

En matèria d'organització econòmica, qualsevol societat ha d'afrontar i resoldre tres problemes econòmics fonamentals: quins béns es produeixen i en quina quantitat, com es produeixen aquests béns i com es repartiran. Al llarg de la història autors com John Maynard Keynes [14], Karl Marx [17], Adam Smith [29] o Paul Krugman [15] han intentat donar resposta a aquests problemes, creant així diverses teories i models econòmics que encara són vigents avui en dia. Els models econòmics poden intentar explicar l'economia a nivell macroeconòmic, estudiant els nivells econòmics globals a través de variables agregades com el total de béns produits, els ingressos o el tipus de canvi o bé a nivell microeconòmic, estudiant el comportament econòmic dels agents individuals (productors i consumidors).

En aquesta secció ens centrarem en com la Teoria de Jocs i, particularment, els equilibris de Nash incideixen en la visió de a nivell microeconòmic, trobant situacions d'equilibri en la quantitat de producció i preu dels béns en certes estructures de mercat. Des de la perspectiva del productor hi ha tres visions del mercat:

- Màxima dispersió de les empreses: *competència perfecta*. En aquesta situació de mercat les empreses han d'assumir que no poden modificar el preu ja que són molt petites i no tenen poder de mercat.
- Màxima concentració de les empreses: *monopoli*. És una estructura de mercat en la que existeix un únic oferent que intenta obtenir el màxim profit del fet de produir poc ja que els compradors han d'acceptar les seves condicions a causa de la inexistència de productes substitutius.
- Situació intermitja: *oligopoli*. És un mercat dominat per un nombre reduït d'oferents que es veuen influenciats per les accions dels seus competidors i que lluiten per aconseguir la major part del mercat oferint un producte poc o gens diferenciat.

En competència perfecta i en monopoli hi ha absència de comportament estratègic: les empreses prenen decisions sobre producció (q_i) sense tenir en compte la competència ja que en situació monopolística no hi ha més empreses i en competència perfecta no es té poder de mercat per decidir. És per això que en present apartat ens centrarem en els models oligopolístics, ja que la Teoria de Jocs és l'estudi formal de les relacions estratègiques entre agents i en aquestes dues situacions de mercat no hi ha relacions estratègiques entre les empreses.

3.2.1 Models oligopolístics

Un oligopoli es troba en una situació intermitja entre un monopoli (on tota la demanda ha de recòrrer a un sol oferent) i la competència perfecta (existeix un nombre suficientment gran d'empreses venedores d'un producte homogeni i de compradors).

Entenem per *poder de mercat* la capacitat que té un agent econòmic d'influir en el preu amb total o parcial independència dels seus competidors.

Cal destacar que en un oligopoli el poder de mercat és exercit per un nombre reduït d'empreses que ofereixen un producte homogeni entre elles i pot existir una empresa líder a la que les altres segueixen en preus, així com també barreres naturals o legals que impedeixen l'entrada de noves empreses. L'existència de diferents models oligopolístics implica diferents tipus de jocs:

- Jocs simultanis en quantitats donen lloc al Model de Cournot.
- Jocs simultanis en preus donen lloc al Model de Bertrand.

Model de Cournot

Suposem un mercat únic on hi ha n empreses que ofereixen un bé homogeni a un gran nombre de consumidors que tenen una predisposició a comprar donada per la funció inversa de demanda

$$p = f(Q)$$

on p és el preu de mercat i Q és la producció total de la indústria.
Sigui $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunt de les empreses i q_i la producció de l'empresa $i \in N$, tenim

$$Q = \sum_{i \in N} q_i.$$

Cada empresa té uns costos de producció $C_i(q_i)$ i, per tant, el benefici de l'empresa i vindrà determinat per

$$\pi_i(q) = q_i \cdot f(Q) - C_i(q_i)$$

on $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Sota aquestes condicions, l'equilibri que s'assolirà al mercat serà un equilibri de Nash, veiem per què.

Les hipòtesis d'aquest model són les següents:

Condició 3.1. *La funció inversa de demanda $f(Q)$ pren valors finits, és no negativa, està definida per a tot $Q \in [0, \infty]$, és doble i contínuament diferenciable de manera que $f(Q) > 0$ i es compleix que $f(0) > 0$ i $F(Q) > 0 \Rightarrow f'(q) < 0$.*

Condició 3.2. *La funció de costos $C_i(q_i)$ està definida per a tot $q_i \in [0, \infty]$, és no negativa, convexa i doble i contínuament diferenciable: $C_i'(q_i) \geq \varepsilon > 0$.*

Condició 3.3. *La funció ingrés total de la indústria $Q \cdot f(Q)$ està acotada i és estrictament còncava per a tot q tal que $f(Q) > 0$.*

Aquestes hipòtesis venen explicades per la interpretació econòmica d'aquestes funcions. Així doncs, la condició 3.1 estableix que la funció de demanda té pendent negatiu, que s'explica pel fet que els consumidors estaran disposats a pagar un preu més baix com més quantitat de producte disponible hi hagi al mercat. La condició 3.2 especifica que el cost fix és no negatiu ($C_i(0) \geq 0$) i el cost marginal (cost que es desprèn de fabricar una unitat més) és no decreixent ($C_i'(q_i) > 0$) a causa que C_i és no negatiu, creixent i convex. Per últim, la condició 3.3 explica que l'ingrés de la indústria és còncau i, per tant, el benefici de l'empresa i, $\pi_i(q)$, és còncau en q_i

per a tot q tal que$f(Q) > 0$ ja que s'obté per diferència de dues funcions còncaves: $q_i f(Q) - C_i(q_i)$.

Sota aquestes condicions i característiques, veiem com explicar aquest model econòmic en forma de joc simultani. De fet, l'any 1838, Augustin Cournot [4] havia anticipat el concepte que més tard es coneixeria com equilibri de Nash en un treball sobre el duopoli amb la finalitat d'analitzar mercats de competència imperfecta amb dues empreses oferents.

Cada empresa és un jugador i la seva estratègia és la quantitat q_i que ha de produir. En principi, el conjunt estratègic de cada jugador és $[0, \infty)$, tot i que a la pràctica es pot establir un límit finit superior. Les n empreses escullen de manera simultània els nivells de producció $(q_1, \ldots, q_n)$, que determinen els beneficis de totes les empreses. L'*equilibri de Cournot* en aquest mercat és un vector de producció q^C tal que cap empresa podria tenir més beneficis si hagués escollit un altre nivell de producció diferent a q_i^C, donats els nivells de producció de les altres empreses. És clar, doncs, que aquest és l'equilibri de Nash on els jugadors són cadascuna de les n empreses, on π_i són les funcions de pagament, q_i l'estratègia del jugador i i un subconjunt de $[0, \infty)$ és el conjunt d'estratègies de cada empresa. Aquest equilibri de Nash existeix a conseqüència de la generalització del Teorema 2.1 de Nash. Així doncs, com les condicions del Teorema 2.1 de Nash es compleixen, podem afirmar que hi haurà un equilibri de Nash en aquest joc que serà el vector q^C.

Model de Bertrand

El Model de Bertrand es regeix per les mateixes condicions i característiques que el Model de Cournot amb una diferència: les estratègies dels jugadors deixen de ser el nivell de producció q_i per passar a ser el preu p_i. D'aquesta manera les empreses fixen de manera simultània el preu dels seus productes i la quantitat ve determinada per la decisió de compra dels consumidors. Aquest fet es tradueix en que la funció de demanda pren la forma

$$Q = f(p).$$

El producte que ofereixen les empreses és homogeni, és a dir, el consumidor no té cap altra preferència diferent al preu a l'hora d'escollir el producte que comprarà. Aquest fet duu a la situació en que l'empresa que més barat ofereixi el producte es quedarà amb tot el mercat ja que cap comprador racional decidirà pagar més per un producte idèntic que pot obtenir de manera més econòmica. Partint, doncs, del mateix joc que havíem definit en el Model de Cournot, l'equilibri vindrà definit per un vector de preus $p^B = (p_1^B, \ldots, p_n^B)$ tal que cada empresa maximitza el seu benefici donat el preu de l'altra empresa:

$$\pi_i(p_1^B, \ldots, p_i^B, \ldots, p_n^B) \geq \pi_i(p_1^B, \ldots, p_i, \ldots, p_n^B) \quad \forall i \in N.$$

També es pot trobar l'equilibri de Bertrand $(p_1^B, \ldots, p_n^B)$, que és també un equilibri de Nash. En aquest cas, però, no es pot aplicar el Teorema de Nash perquè la funció de pagaments no és contínua[7].

[7] La funció de demanda en el model de Bertrand estableix que l'empresa que ofereixi un preu menor absorbirà la totalitat de la demanda i si els preus que ofereixen les dues empreses són iguals, es repartiran el mercat a parts iguals.

Part III

Negociació i cooperació

4 El problema de la negociació i la seva solució

A l'article *The Bargaining Problem* [20] Nash presenta el problema de la negociació i la seva solució. Nash vol presentar aquest problema econòmic clàssic amb un nou tractament, en el qual cal fer unes assumpcions generals respecte el comportament individual i grupal de dos agents en certs contextos econòmics. És a partir d'aquestes suposicions que l'autor obté la solució al problema de la negociació.

L'equilibri de Nash s'entén com la predicció sobre el comportament racional dels agents participants en un joc no cooperatiu. El problema de la negociació, per contra, és una situació on un conjunt d'individus tenen l'oportunitat de cooperar per aconseguir un benefici mutu. Per tal d'arribar a aquesta situació de benefici per tots els agents és necesssari arribar a un acord *unànime* ja que si no ho aconsegueixen es mantindrà l'*status quo* (o situació inicial en la que es trobaven i en la que hi ha un punt de desacord). A l'article *The Bargaining Problem* Nash pren en consideració el problema de la negociació en el cas de dos agents i té en compte que cap acció presa per un agent sense el consentiment de l'altre pot afectar el benestar d'aquest segon agent.

Hi ha molts exemples de situacions de negociació: un venedor i un comprador d'un objecte han de posar-se d'acord en el preu de l'objecte, un treballador i una empresa han d'acordar el salari i les condicions de treball, una organització supranacional i diferents països han de pactar les condicions de comerç internacional, etc. L'objectiu de l'article, segons Nash, és donar una discussió teòrica a aquest problema i obtenir una solució. Cal entendre solució com la determinació de la quantitat de satisfacció que cada individu hauria d'esperar obtenir de la situació o bé una determinació de quant els hi val la pena negociar als agents.

En termes generals, el problema de la negociació s'idealitza assumint que els dos individus són racionals, que cadascun dels dos pot comparar els seus desitjos per diferents coses, que tenen la mateixa capacitat negociadora i que tots dos tenen informació completa dels gustos i preferències de l'altre.

Elements d'un problema de negociació: Un problema de negociació consta de dos elements bàsics:

1. El conjunt $N = \{1, \ldots, n\}$ d'agents (jugadors o negociadors) on $n \geq 2$.
2. El conjunt Z de possibles acords (Z pot ser un conjunt tant finit com infinit).

Aquests dos elements bàsics es relacionen a través de les **preferències**: Cada agent $i \in N$ té unes preferències $\succsim_i$ sobre el conjunt Z. Per $z, z' \in Z$ escrivim $z \succsim_i z'$ per indicar que l'acord z és tan preferit o més que l'acord z' pel jugador i. Per altra banda, escrivim $z \succ z'$ si z és estrictament preferit a l'acord z' pel jugador i.

Diem que una **funció d'utilitat** $u_i : Z \to \mathbb{R}$ representa[8] les preferències $\succsim_i$ si per a tot $z, z' \in Z$,

$$z \succsim_i z' \Leftrightarrow u_i(z) \geq u_i(z').$$

Permetrem que com a solució del problema de la negociació els agents acordin triar una distribució de probabilitat[9] sobre Z. Per això, suposarem que cada $i \in N$ té preferències $\widehat{\succsim_i}$ sobre el conjunt de probabilitats sobre Z, representades per la funció $h_i : \mathfrak{L}(Z) \to \mathbb{R}$, on $\mathfrak{L}(Z)$ és el conjunt de distribucions de probabilitat sobre Z i que h_i satisfà les propietats de la utilitat esperada:

Propietats. (de la utilitat esperada) Per a tot parell $p, p' \in \mathfrak{L}(Z)$:

(i) $p \widehat{\succsim_i} p'$ si i només si $h_i(p) \geq h_i(p')$,

(ii) $h_i(p) = \displaystyle\int_{z \in Z} p(z) u_i(z) dz$ [10]

El conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ és el conjunt de resultats possibles de la negociació en termes d'utilitats esperades,

$$x \in S \Longleftrightarrow \text{existeix } p \in \mathfrak{L}(Z) \text{ tal que per a tot } i \in N,\ h_i(p) = x_i.$$

El model de Nash té un supòsit implícit i quatre explícits (formulats directament sobre el conjunt S):

- L'implícit és que per a determinar la solució al problema de la negociació només són rellevants les utilitats dels agents, i no els acords que les generen. És a dir, en la funció $h_i : \mathfrak{L}(Z) \to \mathbb{R}$ ens fixarem en la imatge en $\mathbb{R}$, no en el conjunt de sortida $\mathfrak{L}(Z)$. Aquest fet s'explica perquè la manera d'arribar a un acord pot ser diferent per a cada jugador (uns cediran més que els altres) però això no interessa per l'estudi d'aquest problema de la negociació; només interessa el fet que hi hagi acord, no la manera com s'hi arriba.

- Els explícits són:

  1. S és un conjunt convex (conseqüència d'admetre acords probabilístics).
  2. S és un conjunt compacte (considerant Z finit).
  3. Existeix un punt de desacord (o de *status quo*) $d \in S$.

[8]Sota condicions molt generals (Debreu [6]) les preferències poden ser representades per una funció d'utilitat integrable que és única excepte per transformacions monòtones positives.

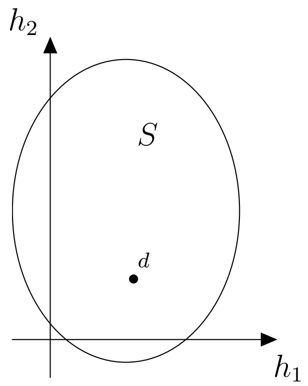
[9]Una distribució de probabilitat sobre les alternatives s'anomena en el llenguatge de la teoria de decisió loteria sobre Z.

[10]En aquest cas, la funció h_i és única excepte per a transformacions afins positives; és a dir, si h_i representa les preferències sobre $\widehat{\succsim_i}$, llavors per a tot $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a > 0$, la funció $b + a \cdot h_i$ també representa $\widehat{\succsim_i}$.

4. Existeix un acord tal que tots els agents el prefereixen estrictament al punt de desacord, és a dir, existeix $x \in S$ tal que $x_i > d_i$ per a tot $i \in N$ (és important entendre que aquest supòsit té sentit perquè ha d'haver una motivació per part dels agents per negociar, si tots els possibles acords són pitjors per algú que la situació actual, llavors no es negociarà).

Conjunt dels problemes de negociació. El conjunt de tots els problemes de negociació $\mathfrak{B}$ és el conjunt de parells (S, d) amb els supòsits $1 - -4$ anteriors.

Figura 1: Problema de la negociació quan $n = 2$



Una *solució* al problema de la negociació és una funció $f : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ tal que per a tot $(S, d) \in \mathfrak{B},\ f(S, d) \in S$.

Així doncs, una solució al problema de la negociació és una regla que assigna a cada problema de negociació un vector factible d'utilitats. Pot ser interpretada com un arbitratge que respon a un conjunt determinat de principis (o axiomes) sobre com resoldre el problema de la negociació. Nash considera que una solució al problema de la negociació és una funció que envia cada problema (S, d) a un punt de $\mathbb{R}^n$ que ha de satisfer certes condicions o axiomes.

AXIOMA 1: INVARIÀNCIA D'ESCALA

Entenem aquest axioma com la invariància del problema de la negociació per canvis d'escala i lloc, és a dir, invariància per translacions i homotècies ja que el que determina aquest problema i la seva solució és com estan ordenades les preferències dels agents i no el seu valor.
Per a tot $(S, d) \in \mathfrak{B}$, tot $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ i $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ amb $a_i > 0$ per a tot $i \in N$, definim un nou problema de negociació $(S', d') \in \mathfrak{B}$ que s'anomena *transformació afí positiva* $(b.a)$, on, per a tot $i \in N$, $d'_i = b_i + a_i d_i$ i

$$S' = \{y = (y_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n \mid \text{existeix } x \in S \text{ tal que per a tot } i \in N,\ y_i = b_i + a_i x_i\}.$$

Invariància d'escala. Una solució $f : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà *invariància d'escala* si per a tot $(S, d) \in \mathfrak{B}$, tota $(S'd') \in \mathfrak{B}$ transformació afí positiva (b, a) de (S, d) i tot $i \in N$,

$$f_i(S', d') = b_i + a_i f_i(S, d).$$

Invariància d'escala requereix que la solució no depengui de la representació numèrica de les preferències dels agents sobre les distribucions de probabilitat sobre els possibles resultats de la negociació. Els problemes (S, d) i (S', d') són equivalents en termes de les preferències dels agents sobre les distribucions de probabilitat sobre els possibles acords, per tant la solució proposa utilitats equivalents.

AXIOMA 2: SIMETRIA

Aquest axioma ens diu que si un problema de negociació és simètric, llavors la solució serà simètrica. Així reflecteix el fet que l'acord ha de ser anònim, és a dir, que si els jugadors s'intercanvien, la solució no varia.

Simetria de problemes de negociació. Un problema de negociació $(S, d) \in \mathfrak{B}$ és *simètric* si $d_1 = \ldots = d_n$ i, per a tota permutació $\pi : N \to N$, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$ llavors $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$ on $y_i = x_{\pi(i)}$ per a tot $i \in N$.

És a dir, un problema de negociació és simètric si els papers dels jugadors en la descripció del problema (S, d) són intercanviables.

Simetria de solucions. Una solució $f : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà *simetria* si per a tot problema de negociació simètric $(S, d) \in \mathfrak{B}$,

$$f_1(S, d) = \ldots = f_n(S, d).$$

Si (S, d) és simètric no hi ha cap diferència entre els agents. Per tant, la solució no hauria de distingir-los.

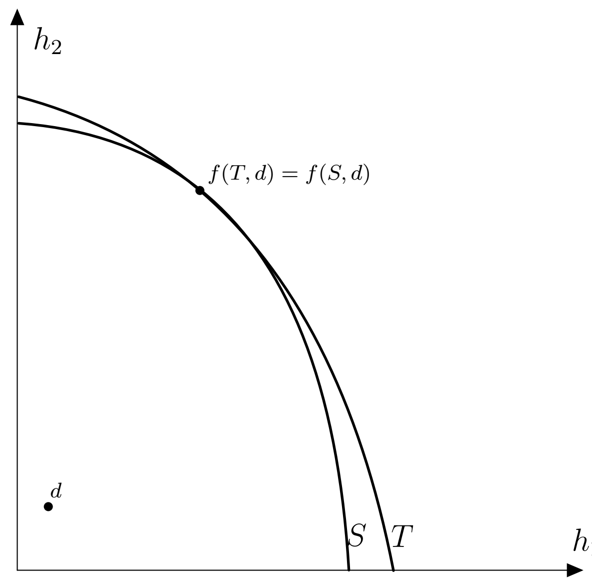
AXIOMA 3: INDEPENDÈNCIA D'ALTERNATIVES IRRELLEVANTS

Independència d'alternatives irrellevants. Una solució $f : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà *independència d'alternatives irrellevants* si per a tot parell $(S, d), (T, d) \in \mathfrak{B}$ tals que $S \subset T$ i $f(T, d) \in S$, llavors $f(S, d) = f(T, d)$.

Si la solució al problema (T, d) és $f(T, d)$, i $f(T, d)$ és també un acord possible en el problema reduït (S, d), la independència d'alternatives irrellevants exigeix que la solució en el problema reduït $f(S, d)$ ha de coincidir amb $f(T, d)$. És a dir, les alternatives en el conjunt $T \setminus S$ que no foren escollides quan eren factibles, són irrellevants per determinar la solució en (S, d). D'aquesta manera, ens assegurem que els acords que no tenen sentit pels jugadors, no afecten a la solució del problema.

La següent figura representa aquest axioma gràficament quan $n = 2$.

Figura 2: Independència d'alternatives irrellevants per $n = 2$.



AXIOMA 4: EFICIÈNCIA

Eficiència. Una solució $f : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà *eficiència* si per a tot $(S, d) \in \mathfrak{B}$ i tot parell $x, y \in S$ tals que $x_i > y_i \; \forall i \in N$, es compleix $f(S, d) \neq y$.

És a dir, una solució serà eficient quan exhaureixi tots els possibles guanys de la solució. Aquesta és la propietat d'eficiència en el sentit de Pareto. Per exemple, dos departaments d'una mateixa empresa s'han de repartir un pressupost de 100.000 euros. Un possible repartiment seria 40.000 euros per cadascun però aquesta solució no seria eficient, ja que no s'esgotarien tots els possibles guanys de la negociació al quedar 20.000 euros sense ser repartits.

A la publicació on planteja el problema de la negociació, Nash proposa i caracteritza axiomàticament una única solució al problema de la negociació que anomenem la solució de Nash.

Definició. (Solució de Nash) La *solució de Nash al problema de la negociació* $F : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ és la que per a tot $(S, d) \in \mathfrak{B}$, $F(S, d) = x$ és la solució al problema de maximització

$$\arg\max \quad \prod_{i=1}^{n} (x_i - d_i) \tag{4.1}$$

sobre el conjunt $S \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq d_i, \; i = 1, \ldots, n\}$.

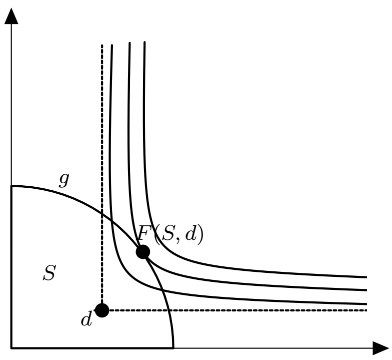
Cal fer dos comentaris respecte aquesta definició. El primer és que la solució al problema de la maximització del productori (4.1) és única[11] .

Com a conseqüència i en segon lloc, la solució de Nash al problema de la negociació serà aquella $x \in S$ que $x_i \geq d_i$, $i = 1, \ldots, n$ i que per a tot $y \in S \setminus \{x\}$ tal que $y \geq d$,

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i - d_i) > \prod_{i=1}^{n}(y_i - d_i).$$

L'expressió $\prod_{i=1}^{n}(x_i - d_i)$ es coneix com el producte de Nash. A la següent figura s'il·lustra geomètricament la solució de Nash al problema de la negociació quan $n = 2$.

Figura 3: Solució de Nash per $n = 2$



La corba g mostra el conjunt de solucions eficients, que són les que esgoten tots els possibles guanys de la negociació. Sabem que la solució de Nash es trobarà sobre aquesta corba, cal veure ara quin dels punts que la formen és la solució buscada.

Proposició 4.1. *La solució de Nash* $F : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ *al problema de la negociació* (S, d) *satisfà invariància d'escala, simetria, independència d'alternatives irrellevants i eficiència.*

Demostració. Cal veure que la solució de Nash satisfà invariància d'escala, és a dir, que $\forall(S, d) \in \mathfrak{B}$, tota $(S', d') \in \mathfrak{B}$ resultant d'una transformació afí positiva (b, a) de (S, d), la solució $F(S', d') = b + aF(S, d)$ és efectivament la solució de Nash per al problema de negociació (S', d').

Cal veure doncs, que donada $x = F(S, d)$, llavors $ax + b = F(S', d')$. Això és

[11] És fàcil veure-ho ja que si transformem el problema prenent logaritmes, el punt(s) on s'assoleix aquest màxim no varia i la nova funció és suma de funcions estrictament còncaves. Si hi ha 2 punts diferents on s'assoleix el màxim, la funció pren, als punts del segment que els uneix, un valor més gran. Hem fet servir que S és convex i el supòsit 4.

evident si ens fixem en la següent desigualtat:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\big(a_ix_i+b_i-(a_id_i+b_i)\big) &= \prod_{i=1}^{n}a_i\prod_{i=1}^{n}(x_i-d_i)\\ &> \prod_{i=1}^{n}a_i\prod_{i=1}^{n}(y_i-d_i)=\prod_{i=1}^{n}\big(a_iy_i+b_i-(a_id_i+b_i)\big),\end{aligned}$$

per a qualsevol $y \in S \cap \{x \in R^n \mid x_i \geq d_i,\ i=1,\ldots,n\}$.

Comprovem ara que la solució de Nash $F(S,d)$ satisfà l'axioma de simetria. Sigui (S,d) un problema de negociació és simètric, per tant,

- $d_1 = \ldots = d_n = d$.
- Per a tota permutació π, si $(x_1,\ldots x_n) \in S$, $(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}) \in S$.

Donat que el problema de negociació és simètric, tenim:

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-d_i)=\prod_{i=1}^{n}(x_i-d)=\prod_{i=1}^{n}(x_{\pi(i)}-d).$$

I, per tant, la solució de Nash satisfà $F_1(S,d) = \ldots F_n(S,d)$.

Per comprovar l'axioma d'independència d'alternatives irrellevants, recordem que aquest axioma caracteritza la propietat que donats dos problemes de negociació (S,d) i (T,d) tals que $S \subset T$, les alternatives del conjunt $T \setminus S$ que no s'escullen com a solució del problema (T,d), són irrellevants per determinar la solució en (S,d) i, per tant, la solució als dos problemes serà la mateixa.

Si la solució de Nash $F(T,d) = x \in S$, llavors $\prod_{i=1}^{n}(x_i-d_i)$ és per definició el producte maximitzador a T. Però S s'obté a partir de T amb l'eliminació de certes zones de T. És per això que el producte de Nash restringit a punts de S ha de ser igual o menor al producte de Nash calculat sobre punts de T. Així doncs, la condició de solució de Nash es segueix complint i, en conseqüència, la solució pels problemes (S,d) i (T,d) és la mateixa.

Finalment, veiem que la solució F de Nash satisfà l'axioma d'eficiència. Sigui $(S,d) \in \mathfrak{B}$ un problema qualsevol i $x, y \in S$ tal que $x_i > y_i$ per $i = 1\ldots,n$, llavors $F(S,d) \neq y$.

En aquest cas,

$$x_i - d_i > y_i - d_i \geq 0$$

i també

$$\prod_{i=1}^{n}x_i-d_i > \prod_{i=1}^{n}y_i-d_i \geq 0.$$

□

Teorema. ***(Nash, 1950)****. Una solució $f : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ satisfà invariància d'escala, simetria, independència d'alternatives irrellevants i eficiència si i només si és la solució de Nash al problema de la negociació; és a dir, $f = F$.*

Aquest teorema és la caracterització que dona Nash per a la solució única del problema de la negociació, que serà aquella que compleix els axiomes imposats prèviament.

Demostració. Veiem primer la unicitat de la solució de Nash. Prenem logaritmes sobre el producte de Nash:

$$g(x) = \ln\Big(\prod_{i=1}^{n}(x_i - d_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\big(\ln(x_i - d_i)\big).$$

La funció $g(x)$ és la suma de funcions còncaves, per tant, és estrictament còncava i té un únic màxim en el conjunt compacte S. Així doncs, el producte de Nash té un únic màxim en S, el que equival a que la solució de Nash és única.

Per la Proposició 4.1 ja hem vist que que si F és una solució de Nash, llavors compleix els quatre axiomes. Cal veure, doncs, la implicació contrària.

Cal demostrar que qualsevol solució al problema de la negociació $f : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^n$ que satisfà els quatre axiomes és la solució de Nash. Per fer-ho, seguirem tres passos:

1. La invariància d'escala permet tractar qualsevol problema de negociació com a simètric.
2. Per simetria i eficiència, f i F han de coincidir en qualsevol problema de negociació simètric ja que només hi ha un acord eficient amb totes les coordenades iguals (que ve imposat per la condició de simetria).
3. Per independència d'alternatives irrellevants, f i F coincideixen en el problema original.

Sigui f una solució que satisfà els quatre axiomes i sigui un problema de negociació $(S, d) \in \mathfrak{B}$ arbitrari. Denotem $F(S, d) = x$ el vector d'utilitats esperades seleccionat per a la solució de Nash F en el problema de negociació (S, d). Per hipòtesi, com F és eficient, obtenim $x_i > d_i$ $i = 1, \ldots, n$.

Comencem definint un nou problema de negociació $(S', d') \in \mathfrak{B}$ a partir d'una transformació afí positiva (b, a) de (S, d), que definim a continuació.

La transformació afí ve donada per la funció:

$$\lambda_i(y_i) = \underbrace{\frac{-d_i}{x_i - d_i}}_{b_i} + \underbrace{\frac{1}{x_i - d_i}}_{a_i} \cdot y_i,$$

és a dir,

$$b = \left(\frac{-d_1}{x_1 - d_1}, \ldots, \frac{-d_n}{x_n - d_n}\right) \quad \text{i} \quad a = \left(\frac{1}{x_1 - d_1}, \ldots, \frac{1}{x_n - d_n}\right).$$

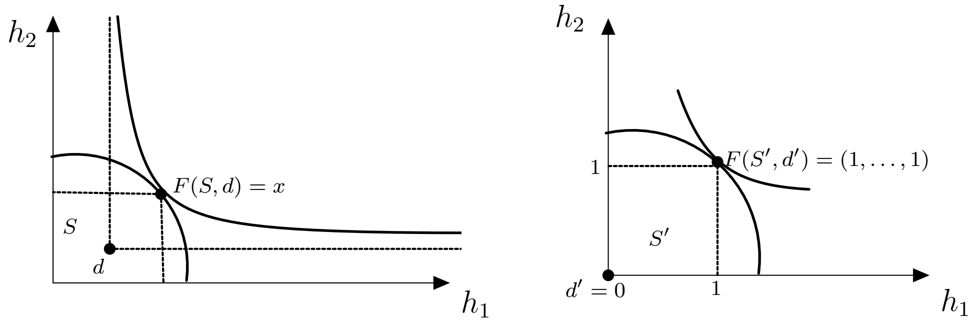
Observem que $\lambda_i(x_i) = 1$ i $\lambda_i(d_i) = 0$:

$$\lambda_i(x_i) = \frac{-d_i}{x_i - d_i} + \frac{1}{x_i - d_i} \cdot x_i = \frac{-d_i + x_i}{x_i - d_i} = 1$$

$$\lambda_i(d_i) = \frac{-d_i}{x_i - d_i} + \frac{1}{x_i - d_i} \cdot d_i = \frac{-d_i + d_i}{x_i - d_i} = 0$$

Com que F compleix l'axioma d'invariància d'escala, $F(S', d') = (1, \ldots, 1)$. És fàcil veure aquest fet de manera geomètrica quan $n = 2$, on la transformació afí anterior composa una traslació per situar el punt d de *status quo* al 0 i una homotècia que situa la solució sobre la coordenada 1 de cada eix:

Figura 4: Transformació del problema (S, d) al problema (S', d').



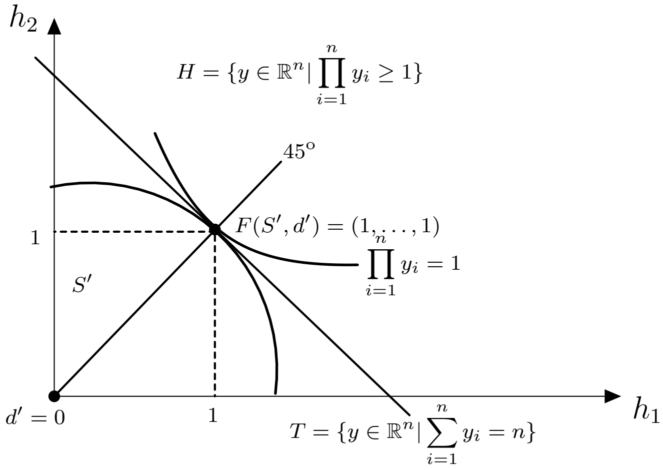
El vector $(1, \ldots, 1)$ és el maximitzador del producte de Nash en el conjunt S'. A més, $(1, \ldots, 1)$ és l'únic vector en la intersecció de S' i el conjunt convex

$$H = \left\{ y \in \mathbb{R}^n | \prod_{i=1}^{n} y_i \geq 1 \right\}.$$

Notem que la frontera del conjunt H: $Fr(H) = \{y \in \mathbb{R}^n | \prod_{i=1}^{n} y_i = 1\}$, que és la corba de nivell de nivell 1 del producte de Nash, és diferenciable. Podem trobar doncs l'hiperplà tangent a H que passa per $x' = (1, \ldots, 1)$:

$$T = \{y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} y_i = n\}.$$

Figura 5: Situació gràfica per $n = 2$



Els conjunts H i S' compleixen les condicions del teorema de l'hiperplà separador[12] ja que són convexos i la seva intersecció és el punt $(1, \ldots, 1)$ que pertany a les fronteres de tots dos conjunts. És per això que el podem aplicar per obtenir que

$$S' \subseteq \{y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} y_i \leq n\}.$$

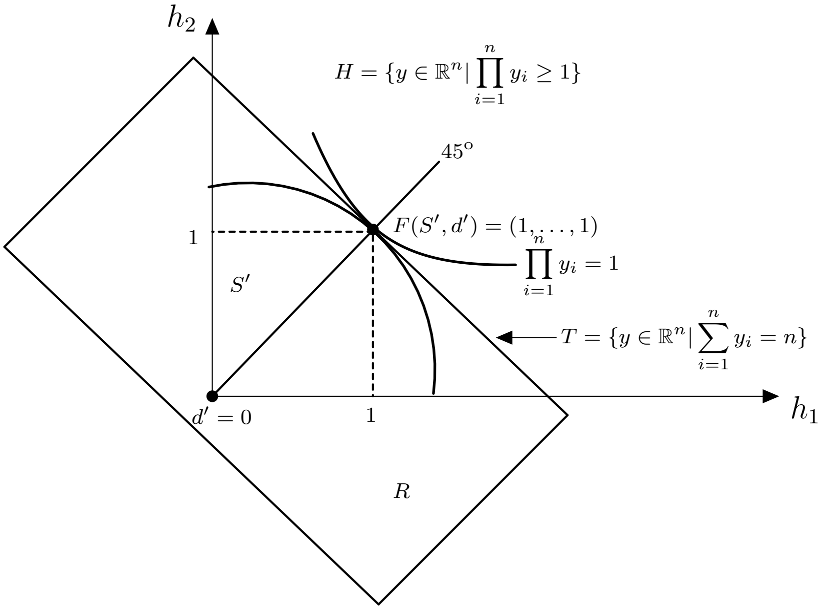
Com que S' és compacte, existeix un conjunt simètric, convex i compacte R tal que $S' \subseteq R$ i $Ef(R) \subseteq T$, on $Ef(R)$ és el conjunt d'acords eficients o la frontera dels punts que són Pareto-eficients d'R; és a dir:

$$Ef(R) = \{y \in R \mid \nexists x \in R \text{ tal que } x_i > y_i \text{ per a tot } i \in N\}.$$

[12]**Teorema de l'Hiperplà separador.** Siguin S i T dos conjunts convexos de $\mathbb{R}^n$ sense punts interiors en comú. Llavors S i T es poden separar per un hiperplà, i.e. existeix un vector $a \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ i un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tals que

$$a \cdot x \leq \alpha \leq a \cdot y \text{ per a tot } x \in S \text{ i } y \in T.$$

Figura 6: Situació del problema $(R, 0)$ per $n = 2$.



El problema $(R, 0)$ és un problema simètric i com que f satisfà les propietats de simetria i eficiència, llavors

$$f(R, 0) = F(R, 0) = (1, \dots, 1).$$

Com que $(S', 0)$ és un problema amb $S \subset \mathbb{R}^n$ i $(1, \dots, 1) \in S$, llavors

$$f(s', 0) = (1, \dots, 1) = F(S', 0)$$

per independència d'alternatives irrellevants. Per acabar, i degut a la invariància d'escala,

$$f(S, d) = x = F(S, d).$$

$\square$

Part IV
Conclusions

El fet d'haver estudiat simultàniament dos graus diferents sempre m'ha portat a intentar buscar els punts de connexió entre ells. És així com vaig començar a descobrir els punts en comú entre les matemàtiques i l'economia i l'empresa. La relació més directa pot ser l'ús del càlcul i l'àlgebra en l'economia, per tal d'explicar punts d'equilibri del mercat o el comportament de diferents funcions econòmiques com la funció de demanda o la de despesa pública.

No va ser fins gairebé l'últim any d'estudis universitaris que vaig descobrir que hi havia tota una branca del coneixement que no utilitzava les matemàtiques per explicar l'economia, sinó que era una pròpia branca de les matemàtiques que s'havia fet lloc no només en el camp econòmic sinó també en el pensament, la presa de decisions i, en particular, a l'economia. Vaig introduir-me a la Teoria de Jocs des d'una vessant menys formal, veient-ne casos pràctics i la manera com és utilitzada en l'economia però ha estat gràcies a aquest treball que he pogut veure i entendre la part més formal i com realment la Teoria de Jocs és una branca de les Matemàtiques.

Ha estat gràcies als coneixements adquirits durant tots dos graus que he pogut assolir l'objectiu del present treball: entendre la importància de les aportacions de John F. Nash a l'economia i entendre per una banda les aportacions i per l'altra les demostracions que fan que aquestes aportacions siguin sòlides i sustentades.

Aquest treball, però, és només una mostra de la capacitat de la Teoria de Jocs de ser exportada a camps més enllà de les Matemàtiques per poder explicar el món que ens envolta. Gràcies a la quantitat de bibliografia disponible és un primer pas per seguir descobrint com la societat i el pensament estan més a prop de les matemàtiques del que podria semblar.

Referències

[1] Belleflamme, Paul: Industrial organization: markets and strategies, *Cambridge University Press*, 2010.

[2] Bertrand, Joseph: Théorie mathématique de la richesse sociale, *Journal des Savants 67*, 499–508, 1883.

[3] Borel, Émile: La théorie des jeux et les équations à noyau symétrique gauche, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 173*, 111–124, 1921.

[4] Cournot, Augustin: Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses, *Hachette*, 1838.

[5] Debreu, Gérard: Definite and semidefinite quadratic forms, *Econometrica 20*, 295–300, 1952.

[6] Debreu, Gérard: The Theory of Value, *Cowles Foundation*, 1959.

[7] Fernández Rodríguez, Fernando: Teoría de juegos: análisis matemático de conflictos, *Revista Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas, Universidad de las Palmas de Gran Canaria*, 2005.

[8] Friedman, James W.: Teoría de juegos con aplicaciones a la economía, *Alianza Universidad*, 1986.

[9] Gardner, Roy: Juegos para empresarios y economistas, *Antoni Bosch*, 1996.

[10] Harsanyi, John C.: Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, *Management Science 14*, 1967.

[11] Harsanyi, John C.: Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations, *Cambridge University Press*, 1977.

[12] Hume, David: A Treatise of Human Nature, *L.A. Selby-Bigge, Oxford: Clarendon Press*, 1888.

[13] Kakutani, Shizuo: A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem, *Duke Mathematical Journal 8*, 457–459, 1941.

[14] Keynes, John M.: The General Theory of Employment, Interest and Money, *Palgrave Macmillan*, 1936.

[15] Krugman, Paul: End This Depression Now, *W. W. Norton & Company*, 2012.

[16] Martinez-Giralt, Xavier: Microeconomía avanzada, *Edicions UAB*, 2008.

[17] Marx, Karl: Das Kapital, *Verlag von Otto Meisner*, 1867.

[18] Massó, Jordi: Les aportacions de John F. Nash a l'economia: equilibri i negociació, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 32, número 1*, 2017.

[19] Nash, John F.: Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences 36*, 48–49, 1950.

[20] Nash, John F.: The bargaining problem, *Econometrica 18*, 155–162, 1950.

[21] Nash, John F.: Non-cooperative games, *Annals of Mathematics 54*, 286–295, 1951.

[22] Nash, John F.: Two-person cooperative games, *Econometrica 21*, 128–140, 1953.

[23] Navarro, Vicenç i Pere Pascual: Topologia algebraica, *Edicions de la Universitat de Barcelona*, 1999.

[24] Pareto, Vilfredo: Manual of Political Economy, *Oxford University Press*, 1906.

[25] Pérez Urquidi, José Miguel: Teoremas de Punto Fijo y la Existencia de Equilibrios de Nash para Juegos no Cooperativos, 2009.

[26] Real Academia Española: Diccionario de la lengua española, *Espasa Libros*, 2014.

[27] Selten, Reinhard: Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit, *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 121*, 301–24 and 667–689, 1965.

[28] Selten, Reinhard: Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games, *International Journal of Game Theory 4*, 25–55, 1975.

[29] Smith, Adam: An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations, *Everyman's Library - Alfred A. Knopf, Inc.*, 1991 (primera edició 1776).

[30] Sydsaeter, Knut, Peter Hammond, Atle Seierstad i Arne Strom: Further Mathematics for Economic Analysis, *Prentice Hall, Financial Times*, 2008.

[31] Vohra, Rakesh V.: Advanced mathematical economics, *Routledge*, 2005.

[32] Von Neumann, John i Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, *Princeton University Press*, 1944.

[33] Zermelo, Ernst: Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, *Proceedings of the International Fifth Congress of Mathematicians. Cambridge University Press*, 1913.