

LLIÇÓ INAUGURAL  
DEL CURS ACADÈMIC  
2017-2018

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES  
I INFORMÀTICA

# Poncelet a la presó de Saràtov

Joan Carles Naranjo

PROFESSOR TITULAR DEL DEPARTAMENT  
DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA



Poncelet a la presó  
de Saràtov



LLIÇÓ INAUGURAL  
DEL CURS ACADÈMIC  
2017-2018  
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA

# Poncelet a la presó de Saràtov

Joan Carles Naranjo

PROFESSOR TITULAR DEL DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES  
I INFORMÀTICA

BARCELONA, 11 D'OCTUBRE 2017



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Edicions

---

© Edicions de la Universitat de Barcelona

Adolf Florensa, s/n, 08028 Barcelona, tel.: 934 035 430, fax: 934 035 531,  
comercial.edicions@ub.edu, www.publicacions.ub.edu

---

ISBN: 978-84-9168-110-6

---

Dipòsit digital: <http://hdl.handle.net/2445/122939>

## *Sumari*

1. Poncelet i la geometria projectiva . . . . .	9
2. El porisma de Poncelet . . . . .	12
3. La carta . . . . .	14
4. Idea d'una demostració del porisma . . . . .	15
5. Altres demostracions i altres porismes . . . . .	19
6. Comentaris bibliogràfics . . . . .	22
Referències . . . . .	23





[...] j'aurais pu intituler cet ouvrage, purement mathématique, *Mémoires d'outre-tombe*; c'est, en effet, le fruit des méditations d'un jeune lieutenant du génie, laissé pour mort sur le funeste champ de bataille de Krasnoï, non loin de Smolensk [...]

(del prefaci d'*Applications d'Analyse et de Géométrie*,  
de J.V. PONCELET)

## *1. Poncelet i la geometria projectiva*

Tothom crea a partir del que coneix. Per molt original que sigui la proposta i innovador el seu llenguatge, resulta impossible desfer-se de les paraules i els conceptes ja formats al cap i que són part del motllo de la nova obra. Encara més si parlem de matemàtiques. Com ja ens feia notar Newton, és difícil mirar més lluny sense enfilarse damunt les espatlles dels que ens precedeixen. Quan Jean Victor Poncelet, un jove tinent de l'exèrcit napoleònic format a l'École Polytechnique, és fet presoner després de la batalla de Krasnoï, dedica el seu temps a la presó de Saràtov a estudiar les propietats de les figures geomètriques. Escoltem les seves paraules:

[...] privé qu'il était de tout livre, de tout instrument de précision, difficiles à se procurer dans cette ville de Saratov, d'ailleurs dépourvue alors de bibliothèques scientifiques [...] ne doit pas s'attendre à rencontrer ici comme le reflet ou l'écho lointain des profonds travaux analytiques des Euler, des Bernoulli, des Huygens, des Newton, des d'Alembert, etc., ni même des travaux plus récents et non moins admirables des Lagrange, des Legendre, des Laplace, des Monge et de leurs disciplines, travaux que n'avaient laissé aucune trace dans sa mémoire au milieu des périls et des angoisses d'un aussi malheureux début dans la carrière des armes.

És a dir, que, tot i ser un home ben informat dels avenços antics i recents, el seu aïllament el desproveeix de les fonts bibliogràfiques sobre les quals ha de basar el seu estudi. En els seus treballs només trobarem, diu ell, «ecos llunyans» d'aquestes obres fonamentals. Les matemàtiques que recorda tenen les arrels en les inspiradores lliçons de Monge. Aquest serà el seu punt de partida a Saràtov. El seu motllo mental serà la geometria.



Jean Victor Poncelet (1788-1867)

Per comprendre què fa Poncelet a la presó de Saràtov i com va arribar fins allà, cal entendre el moment històric en què va viure i quina va ser l'evolució de la geometria en els segles precedents.

Poncelet neix un any abans de l'esclat de la Revolució Francesa, esdeveniment que marca la vida de tots els matemàtics de la seva generació i de la precedent. Una bona part dels millors matemàtics de l'època es troben a França el 1789 i molts d'ells es posicionen políticament, alguns de manera molt activa. Especialment significat és el cas de Gaspard Monge, que s'integra dins del moviment jacobí i ocupa càrrecs de diversa importància durant la dècada del 1890, en què arriba a ser ministre de Napoleó i un dels homes capdavanters de la seva expedició africana (va ser el primer president de l'Institut d'Egipte). Monge participa activament en la creació de l'École Polytechnique i n'esdevé el director. Està considerat l'inventor de la geometria descriptiva i fa aportacions importants al desenvolupament de la geometria diferencial i de la teoria d'equacions en derivades parcials.

D'altra banda, la geometria al final del segle XVIII és hereva dels desenvolupaments fonamentals de l'inici del segle XVII. A la dècada del 1630, després de la recuperació de la matemàtica grega durant el Renaixement, hi ha dos fets, gairebé paral·lels, que han de tenir una gran influència en el devenir de la geometria i en la seva explosió com a ciència connectada amb l'àlgebra, l'aritmètica, l'anàlisi i la física durant els segles XIX i XX. El primer és la publicació de *La Géométrie* de Descartes, on s'introdueix el nostre concepte modern de coordenades cartesianes. L'èxit d'aquesta novíssima tecnologia va ser immediat, com sabem bé. Amb poca diferència de temps, Desargues publica diversos treballs sobre les propietats projectives de les

figures, força ignorats en el seu moment. Només Pascal segueix la ruta de Desargues i sembla que durant un segle i mig es manté la consideració de la geometria projectiva com una branca «especialitzada» en problemes concrets (propietats que es mantenen per projecció). Fins a Poncelet.

Jean Victor Poncelet no va ser un matemàtic professional sinó un militar. Es va formar a l'École Polytechnique, on va rebre les lliçons de geometria de Monge que tant l'influïren. En acabar els estudis va tornar a Metz, la seva ciutat natal, per treballar en el disseny de les fortificacions de la ciutat. Cridat a files, va formar part de les tropes napoleòniques que anaven a la conquesta de Rússia. Va caure ferit a la tardor de 1812 a la batalla de Krasnoï, una de les desfetes més grans de l'exèrcit francès en aquella campanya. Tenia vint-i-quatre anys. Va ser empresonat a Saràtov i el seu captiveri va durar un any i mig; necessità gairebé sis mesos per refer-se de les ferides. Després de la capitulació de Napoleó, la primavera de 1814 tots els presoners de guerra van ser alliberats i Poncelet va tornar a França pel seu propi peu.

Durant la seva estada a Saràtov va dedicar el temps a ensenyar matemàtiques a altres presoners i a fer recerca en geometria. Com en altres casos al llarg de la història (Leray o Rudin, per exemple), sembla que l'ocupació intel·lectual, docent o de recerca, li permet d'evadir-se de l'empresonament físic. En el cas de Poncelet, l'aïllament el va portar a repensar i redescobrir els fonaments de la geometria que coneixia i recordava. La seva inventiva i originalitat convertiren un exercici d'evasió mental en un gir copernicà en la concepció de la geometria projectiva.

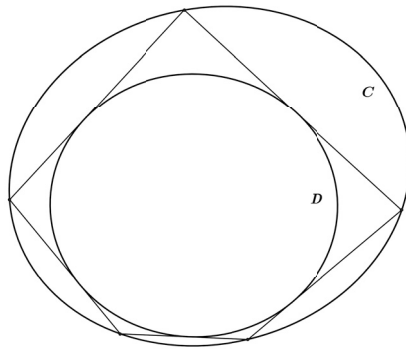
Les seves investigacions, plasmades anys més tard en el *Traité des propriétés projectives des figures* (el 1822, vegeu [9]), representen la fonamentació de la geometria projectiva moderna. El principi de dualitat, per exemple, apareix per primera vegada en aquest tractat. Les aportacions posteriors de Möbius, Von Staudt i Plücker connectaran la geometria projectiva amb les tècniques analítiques mitjançant la introducció de les coordenades homogènies, i tot plegat constitueix (amb les aportacions de la teoria de funcions algebraïques d'Abel i de Riemann) el fonament sobre el qual es desenvolupa i creix el que avui coneixem com a geometria algebraica.

## 2. El porisma de Poncelet

Entre els resultats que Poncelet demostra en el seu tractat, el més recordat és aquesta petita joia:

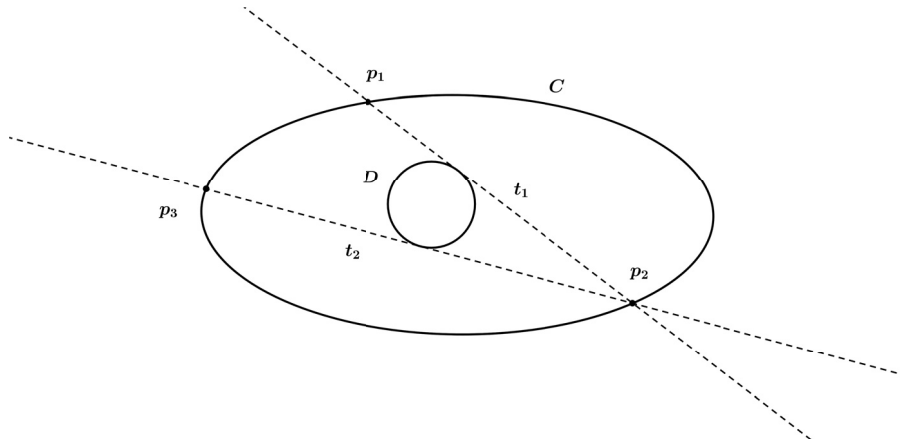
**Porisma de Poncelet.** *Siguin  $C$  i  $D$  dues còniques no degenerades del pla projectiu (complex) sense cap punt de tangència entre elles. Suposem que existeix un polígon de  $n$  costats amb vèrtexs a  $C$  i costats tangents a  $D$ . Aleshores per a tot punt  $P$  de  $C$  existeix un tal polígon que té  $P$  entre els seus vèrtexs.*

Direm que un polígon com el de l'enunciat és un  **$n$ -polígon de Poncelet per a  $(C, D)$** . Així, si un pentàgon com el del dibuix següent existeix, aleshores tindrem infinits pentàgons (5-polígons de Poncelet). És més, podrem posar un vèrtex en la posició que ens vingui més de gust.



Una manera de reformular l'enunciat és la següent: considerem un punt  $p_1$  de la cònica  $C$  i tracem des d'aquí una recta  $t_1$  tangent a  $D$ . Anomenem  $p_2$  a l'altre punt de tall de la recta  $t_1$  amb  $C$ . Ara dibuixem l'altra tangent a  $D$  que passa per  $p_2$  i anomenem  $p_3$  el nou punt de tall amb  $C$ , etc.

El porisma ens diu que si al cap de  $n$  passos tornem al punt inicial, aleshores passarà el mateix si comencem la iteració en qualsevol altre punt. Per tant, l'existència de  $n$ -polígons de Poncelet només depèn de la posició relativa de les dues còniques, i no pas del punt inicial. Observem que l'afirmació es fa per a un  $n$  concret; pot passar (i passa, com es deduirà de la demostració que farem més endavant) que existeixin  $n$ -polígons de



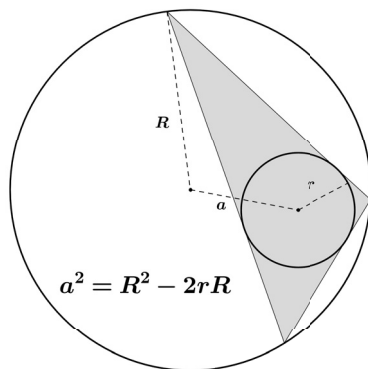
Poncelet i, en canvi, no n'hi hagi per a un altre valor  $m$ . També és plausible que no n'hi hagi per a cap valor de  $n$ . Cal fer notar que els dibuixos que apareixen més amunt són una mica enganyosos: com que estem treballant sobre els complexos i suposem que les còniques no tenen punts comuns amb la mateixa tangent, aleshores en realitat les còniques  $C$  i  $D$  es tallen transversalment en quatre punts diferents.

El significat de la paraula *porisma* mereix una mica d'atenció. En la matemàtica moderna, almenys des de Steiner, s'entén que és una relació que se satisfà per a un rang infinit de valors, però només en presència d'una certa condició. És a dir, un porisma és un problema per al qual o bé hi ha infinites solucions o bé no n'hi ha cap, depenent de si certa condició se satisfà. No és la definició que apareix als diccionaris (quan hi apareix), on curiosament podem llegir accepcions del tipus «conjunt de corollaris que es dedueixen de la demostració d'un teorema» que semblen allunyades de l'ús real que se'n fa en la bibliografia matemàtica. La paraula ja es troba en les obres dels matemàtics grecs, fins al punt que Euclides va escriure tres llibres sobre porismes, que han desaparegut. Pappus (sis-cents anys posterior a Euclides) escriu:

Els porismes no són ni teoremes ni problemes, sinó que ocupen una posició intermèdia entre tots dos, de manera que els seus enunciats es poden entendre com a teoremes o com a problemes. [...] Però està clar a partir de les definicions que els antics geòmetres (sic) entenien perfectament la diferència

entre les tres classes: en un teorema calia **provar** el que es proposava, en un problema s'havia de **construir** el que es proposava i, finalment, en un porisma s'havia de **trobar** el que es proposava.

Un precedent del resultat de Poncelet és la **fórmula de Chapple**, erròniament atribuïda a Euler durant molt de temps. Respon a una pregunta molt natural: donats dos cercles, un de contingut dins l'altre (vegeu el dibuix), en quines condicions existeix un triangle inscrit en un cercle i circumscribit a l'altre? La resposta és la fórmula esmentada que involucra la distància  $a$  entre els dos centres, el radi  $r$  del cercle interior i el radi  $R$  del cercle exterior:  $a^2 = R^2 - 2rR$ . Observem que en la relació no intervé cap dada sobre el triangle; per exemple, la posició d'un dels vèrtexs. Això és així perquè, un cop satisfeta la relació, existeixen infinits triangles inscrits i circumscribits alhora. Enunciada d'aquesta forma, la fórmula és clarament un porisma, i el de Poncelet n'és una amplíssima generalització.



### 3. La carta

Abans de donar una demostració del porisma, fem una darrera al·lusió històrica a partir d'un article molt recent. En la introducció de [10] es diu:

During his last trip to Moscow, the second author of this article came into possession of a remarkable mathematical letter. The custodian of the letter, a Russian businessman who wished to remain anonymous, presented the letter

to Tabachnikov at the end of his lecture [...] and explained that the letter had been written by his great-great-great grandfather, Konstantin Shestakov, shortly after he had been discharged from the Russian Army during the Napoleonic War.

La primera part de l'article és el contingut d'aquesta carta que va arribar a les mans d'aquests matemàtics de forma tan inusual. El que hi explica Konstantin Shestakov és una part de les seves experiències com a militar d'alta graduació destinat a Saràtov durant el període en què Poncelet es troba presoner. Ens diu que allà la vida era dura per a tothom degut a l'intens fred i que, a més a més, no hi havia cap altre entreteniment que beure a les tres cantines que hi havia al poble. Reconeix que s'ha salvat de caure en aquesta rutina alcohòlica perquè ha tingut la sort que li han assignat com a assistent personal un jove tinent francès, Poncelet, enamorat de les matemàtiques i que el fa partícip de les seves recerques. En particular, li explica el seu porisma, que el deixa fascinat. Fins al punt que ell mateix, també aficionat a la geometria, inicia les seves pròpies investigacions.

La carta està adreçada al seu germà i suposadament no es va arribar a enviar mai. En realitat és una petició d'ajuda. Ell havia començat a estudiar, fent càlculs en exemples concrets, com es movien els baricentres (i altres centres de masses) dels  $n$ -polígons de Poncelet en moure'n els vèrtexs. Conjecturava que es mouen sobre una cònica, però no en va saber donar una demostració... i quan escriu la carta, Poncelet ja no hi és. La raó per la qual va pensar en el seu germà era que sabia que havia anat a l'institut amb un brillant estudiant que esdevingué professor universitari a Kazan: es tractava ni més ni menys que de Lobatxevski! El seu prec és que utilitzi aquest contacte per demanar ajuda per tal de trobar una demostració.

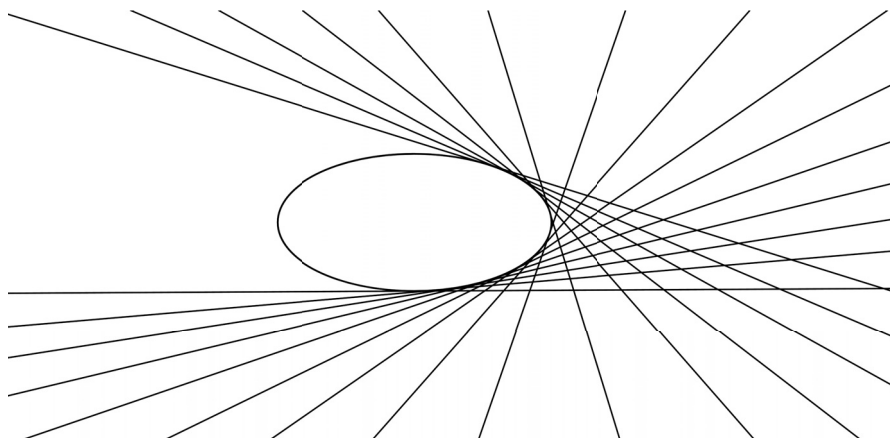
Amb notable instint comercial, Schwartz i Tabachnikov resolen les preguntes que proposa el militar rus i ho publiquen junt amb la història de la carta.

#### ***4. Idea d'una demostració del porisma***

El que presentem a continuació és una de les moltes demostracions del porisma, probablement una de les més directes, ja que involucra tan sols

alguns fets bàsics de variable complexa i de la teoria de superfícies de Riemann.

Recordem que tota cònica no degenerada té associada una altra cònica, anomenada **cònica dual**, que parametritza l'envolupant de la cònica, és a dir, el conjunt de totes les rectes tangents a la cònica. Dit d'una altra manera, fixada la cònica (vista com una equació de segon grau homogènia en les tres variables), els coeficients  $(A, B, C)$  de les rectes  $Ax + By + C = 0$  tangents a la cònica també satisfan una equació de segon grau homogènia.



Considerem la cònica dual  $D^*$  de la cònica  $D$  i definim el conjunt següent:

$$S = \{(p, l) \in C \times D^* \mid p \in l\}.$$

Notem que les projeccions en cada factor proporcionen sengles aplicacions definides en  $S$  i amb imatge  $C$  i  $D^*$ , respectivament. Les denotem per

$$\pi_1 : S \longrightarrow C, \quad \pi_2 : S \longrightarrow D^*.$$

És ben conegut que les còniques complexes projectives no degenerades són superfícies de Riemann de gènere 0, és a dir, esferes. Les fibres de les aplicacions  $\pi_i$  són fàcils d'entendre: fixat un punt  $p \in C$ , hi ha exactament dos elements en  $S$ ,  $(p, l), (p, l')$  tals que  $\pi_1(p, l) = \pi_1(p, l') = p$ , on  $l, l'$  són les dues rectes per  $p$  que són tangents a  $D$ . Diem que  $\pi_1$  és una aplicació de grau 2. Observem que hi ha exactament quatre punts de  $C$ , els que també

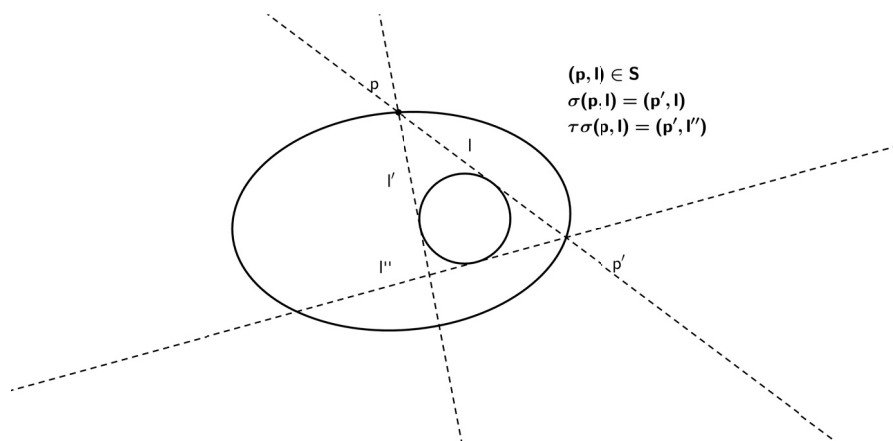


són a  $D$ , per als quals  $l = l'$ . Diem que són punts de ramificació de  $\pi_1$ . Podem fer una anàlisi semblant de l'aplicació  $\pi_2$ , també de grau 2 i amb quatre punts de ramificació. Fent servir les dues aplicacions, és fàcil deduir que  $S$  és una superfície de Riemann compacta i connexa i, en particular, una superfície topològica connexa, compacta i orientable. Per calcular-ne el gènere usem el resultat següent:

**Fórmula de Riemann-Hurwitz (en grau 2):** Sigui  $f : S_1 \rightarrow S_2$  una aplicació de grau 2 entre superfícies de Riemann de gèneres  $g(S_1)$  i  $g(S_2)$  amb  $r$  punts de ramificació. Aleshores  $2g(S_1) - 2 = 2(2g(S_2) - 2) + r$ .

En el nostre cas ( $f = \pi_1, S_1 = S$  i  $S_2 = C$ ) tenim que  $r$  és 4 i, com hem dit, el gènere de  $C$  és 0. Per tant,  $g(S) = 1$ , és a dir,  $S$  és un tor, o dit d'una altra forma, el producte de dues circumferències. L'estructura de grup de la circumferència  $S^1 \subset \mathbb{C}$  induïda pel producte de nombres complexos dota també  $S$  d'estructura de grup.

Un fet fonamental per a la demostració és que  $S$  és dotada amb dues involucions  $\sigma$  i  $\tau$ , és a dir, dues aplicacions holomorfes  $\sigma, \tau : S \rightarrow S$ , que no són la identitat però satisfan que  $\sigma^2 = \tau^2 = Id_S$ . Les definicions són molt simples:  $\sigma$  aplica un element  $(p, l) \in S$  a l'element  $(p', l)$ , on  $p'$  és l'altre tall de  $l$  i  $C$ ;  $\tau$  aplica  $(p, l) \in S$  a l'element  $(p, l')$ , on  $l'$  és l'altra tangents a  $D$  passant per  $p$ .



La composició de les dues involucions realitza l'acció que hem explicat quan hem dit que el porisma es pot entendre com un procés iteratiu. En particular, la iteració començada en el punt  $p \in C$  torna al mateix punt després de  $n$  passos (o sigui, existeix un  $n$ -polígon de Poncelet per a  $(C, D)$  de manera que  $p$  en sigui un dels vèrtexs) si i només si es té que:

$$(\tau \circ \sigma)^n(p) = p.$$

Necessitem ara el següent lema, que és força conegut i que admetrem sense demostració.

**Lema 4.1.** *Una involució en una superfície de Riemann de gènere 1 és la composició de (més o menys) la identitat amb una translació.*

Notem que les translacions no tenen punts fixos, mentre que les nostres involucions sí que en tenen. Per exemple, si  $p \in C \cap D$  i prenem com a  $l$  la tangent a  $D$  en  $p$ , el punt  $(p, l)$  de  $S$  és fix per  $\sigma$ . És a dir que els punts de ramificació de  $\pi_1$  són punts fixos de la involució  $\sigma$ . Deixem al lector el petit exercici de trobar punts fixos per  $\tau$ . En definitiva,  $\sigma$  i  $\tau$  són de la forma  $-Id_S$  seguides d'una translació i, per tant,  $\tau \circ \sigma$  és una translació en  $S$ , o sigui  $\tau \circ \sigma = t_\alpha$ , on:

$$t_\alpha : S \longrightarrow S, \quad p \mapsto t_\alpha(p) = p + \alpha.$$

Així, la condició  $(\tau \circ \sigma)^n(p) = p$  es reescriu de la manera següent:  $n\alpha = 0$ , que és independent del punt  $p$ . Això acaba la demostració del porisma.

Aquesta demostració està desenvolupada amb tot detall, incloses les bases de la teoria de superfícies de Riemann, en el llibre [5]. La idea de la demostració és deguda a P. Griffiths i J. Harris (vegeu [7] i [8]).

### Observacions:

- a) El 1913 Gerbaldi (vegeu [3]) va calcular el nombre de còniques  $C'$  del feix generat per  $C$  i  $D$  per a les quals hi ha  $n$ -polígons de Poncelet per a  $(C', D)$ . Aquest nombre és la meitat del nombre de punts de  $n$ -torsió primitius d'una corba el·líptica. Això es dedueix fàcilment de la demostració que hem donat.

- b) De la demostració també es desprèn que no és compatible l'existència de  $n$  i de  $m$ -polígons de Poncelet per a  $(C, D)$  si  $n$  i  $m$  són primers entre si. També s'obté que si la translació  $\tau \circ \sigma$  no és de torsió, no hi haurà  $n$ -polígons de Poncelet per a cap  $n$ .
- c) Cayley va respondre uns trenta anys després del tractat de Poncelet a una pregunta natural que es deriva del porisma: es pot donar una condició explícita per a l'existència d'un  $n$ -polígon? La seva resposta va ser la següent: anomenem  $M_C$  i  $M_D$  les matrius simètriques associades a les còniques i considerem el polinomi de tercer grau:

$$p(x) := \det(xM_C + M_D).$$

Considerem el desenvolupament de Taylor de la funció  $\sqrt{p(x)}$  en  $x = 0$ :

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots$$

Cayley demostra que existeix un  $n$ -polígon de Poncelet per a  $(C, D)$  si i només si:

$$\begin{vmatrix} A_2 & \dots & A_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & \dots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } n = 2m + 1, m \geq 1,$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & \dots & A_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & \dots & A_{2m-1} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } n = 2m, m \geq 2.$$

La cúbica plana  $y^2 = p(x)$  s'anomena **cúbica de Cayley**. Amb una mica de feina es pot provar que la superfície de Riemann  $S$  de la demostració és isomorfa a la (compleció projectiva de la) cúbica de Cayley.

## 5. Altres demostracions i altres porismes

La demostració original de Poncelet té dues parts: la primera és la comprovació amb coordenades en el cas de cercles i la segona és la generalització a còniques qualssevol mitjançant determinades transformacions projectives

(projeccions centrals). Pel camí utilitza el controvertit **principi de continuïtat**, que té molt protagonisme en el seu tractat. Probablement perquè aquest principi no va ser admès per molts matemàtics de l'època, es van fer intents de demostració alternatius de molts tipus. Un dels més coneguts és el de Jacobi: construeix una funció el·líptica associada al problema per al cas de dos cercles. La demostració del porisma se segueix de propietats formals d'aquestes funcions. Nombrosos treballs de l'època intenten estendre les idees de Jacobi al cas general. Altres demostracions i generalitzacions van ser donades per Lebesgue, Halphen, Hurwitz, etc. (vegeu [3]).

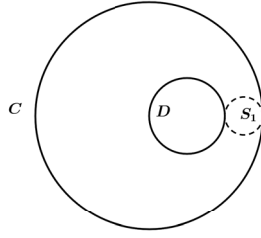
Durant el segle xx l'interès pel porisma no decau, com demostren, per exemple, les fórmules de Gerbaldi. Als anys 1970, dos treballs de Griffiths i Harris atreuen de nou l'atenció sobre el tema. No només donen dues demostracions purament algebraiques (una de les quals hem donat aquí), sinó que generalitzen el porisma al cas de plans tangents a quàdriques de l'espai. Als anys 1990 Barth i Michel (vegeu [2]) relacionen l'existència de polígons de Poncelet amb propietats de models plans de certes corbes modulars.

A banda del porisma de Griffiths i Harris, en trobem molts altres en la literatura, alguns de molt clàssics. Un dels més interessants és el de Weyr, referent a sistemes de generatrius de dues quàdriques. En l'article [1] es demostra aquest porisma i s'obté el de Poncelet com a corollari. Molts porismes clàssics tenen a veure amb les anomenades sèries circulars (teorema del zig-zag, porisma d'Emch, etc.). Un dels més estètics és el de Steiner, que passem a enunciar detalladament.

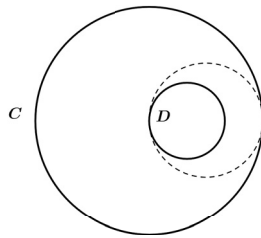
Anomenem **cercle** qualsevol equació de la forma

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

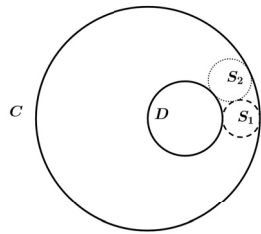
Les coordenades homogènies  $(a : b : c : d)$  defineixen l'espai que parametritza aquests cercles, que és un espai projectiu  $\mathbb{P}^3$ . Fixat un cercle  $C$ , el conjunt dels cercles tangents a  $C$  és un con  $Q_C \subset \mathbb{P}^3$ . Donat un altre cercle  $D$ , els cons  $Q_C, Q_D$  es tallen en dues còniques  $C_1, C_2$ . En poques paraules, el conjunt dels cercles tangents a dos cercles donats s'agupen en dues famílies, cadascuna parametritzada per una cònica. Per exemple, en el dibuix següent prenem un cercle d'una de les famílies (diguem-ne  $C_1$ ) i l'anomenem  $S_1$ :



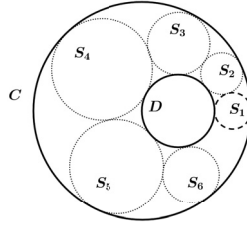
És fàcil visualitzar com són els cercles de l'altra família, la parametritzada per  $C_2$ : són cercles tangents a  $C$  i a  $D$  però que «contenen»  $D$  a l'interior.



Per seguir endavant, suposem fixada la família  $C_1$  en tota la construcció. A continuació triem un altre cercle  $S_2$  en  $C_1$  (automàticament, tangent a  $C$  i a  $D$ ) que també sigui tangent a  $S_1$ ; n'hi ha dos de possibles, dels quals en triem un:



Ara prenem  $S_3 \in C_1$  tangent a  $S_2$ . Ara l'elecció ja és única si demanem no tornar enrere, és a dir, que  $S_3 \neq S_1$ . Seguint aquest mètode, construïm una successió de cercles  $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots \in C_1$ :



Es té el resultat següent:

**Porisma de Steiner.** *Si la successió de cercles descrita anteriorment tanca després de  $n$  passos, és a dir,  $S_1 = S_n$ , aleshores ho fa sempre independentment del cercle inicial  $S_1$  escollit.*

Es pot donar una demostració d'aquest porisma molt semblant a la que hem donat del de Poncelet (vegeu [1]).

## 6. Comentaris bibliogràfics

Per aprofundir en el context històric i matemàtic de la vida de Poncelet probablement la referència més completa sigui [6]; l'abast del llibre és molt més ampli que aquest període, ja que descriu l'evolució de la geometria al llarg de tot el segle XIX. L'article [3], publicat en dues parts, conté una aproximació matemàtica molt exhaustiva al porisma, atès que recull precedents, proves de diversos tipus, generalitzacions i influències en resultats recents i la bibliografia és completíssima. Els articles [7] i [8] donen una demostració purament algebraicogeomètrica, sense utilitzar mètodes transcendents. També hi apareix una generalització a l'espai del porisma. Recollint el mateix punt de vista, gairebé vint anys després trobem [1], on es recullen diverses generalitzacions històriques i resultats relacionats. Es presenten i es demostren sota un marc unificat.

La iteració que apareix en el porisma de Poncelet està emparentada amb alguns problemes clàssics dels sistemes dinàmics, especialment el conegut com a «problema dels billars el·líptics». Un tractament introductor a aquest problema es pot trobar al final del llibre [5]. Per a un estudi més profund, el lector es pot adreçar a [4].

## Referències

- [1] BARTH, W. i BAUER, Th. *Poncelet theorems*, Expositiones Mathematicae 14 (1996), 125-144.
- [2] BARTH, W. i MICHEL, J. *Modular curves and Poncelet polygons*, Math. Ann. 295 (1993), 25-49.
- [3] DEL CENTINA, A. *Poncelet's porism: a long story of renewed discoveries, I, II*, Arch. Hist. Exact Sci., 70 (2016), 1-122, 123-173.
- [4] DRAGOVIĆ, V. i RADNOVIĆ, M. *Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics*, Frontiers in Mathematics, Springer, Berlín, 2011.
- [5] FLATTO, L. *Poncelet's theorem*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [6] GRAY, J. *Worlds out of nothing*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2011.
- [7] HARRIS, J. i GRIFFITHS, P. *A Poncelet theorem in space*, Commentarii Mathematici Helvetici 52 (1977), 145-160
- [8] GRIFFITHS, P i HARRIS, J. *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, Enseign. Math. (2), 24 (1978), 31-40.
- [9] PONCELET, J. V. *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, Gauthier-Villars, París. Reeditat en la col·lecció «Les Grands Classiques Gauthier-Villars».
- [10] SCHWARTZ, R. i TABACHNIKOV, S. *Centers of mass of Poncelet polygons, 200 years after*, Math. Intelligencer 38 (2016), 29-34.



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

---

Edicions