ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD TEMPORAL DE LOS RENDIMIENTOS DE LOS FACTORES PRODUCTIVOS EN LA ECONOMÍA ESPAÑOLA

Raúl Ramos Lobo
Miquel Clar López
Jordi Suriñach Caralt

Grupo de investigación *Anàlisi Quantitativa Regional*
Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Barcelona
Avda. Diagonal, 690
08034 Barcelona
Tel.: 934021824; 934035828 y 934021980
Fax: 934021821
e-mail: rrlobo@eco.ub.es / mclar@eco.ub.es / surinach@eco.ub.es

Resumen: Una vía para contrastar la hipótesis de rendimientos constantes a escala en la función de producción consiste en estimarla directamente y comprobar si los coeficientes de los factores de producción suman uno. Esta metodología presenta la ventaja de ser mucho más directa que la basada en estimar la productividad total de los factores y su posterior introducción en ecuaciones de convergencia, pero presenta el inconveniente de que no permite hacerlo para cada momento del período considerado. En este artículo se propone la utilización de un modelo de coeficientes variables a lo largo del tiempo estimado a través del filtro de Kalman para contrastar la validez del supuesto de rendimientos constantes a escala en cada instante del período considerado. La utilización de estos modelos permite conocer con más exactitud los diferentes subperíodos respecto a otras especificaciones, así como la evolución temporal de los rendimientos individuales de los factores.

Palabras clave: Función de producción, rendimientos, modelos *state-space*, coeficientes variables, filtro de Kalman.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales objetivos del estudio del crecimiento económico es identificar qué parte del crecimiento de la producción se debe al de cada uno de los factores que se consideran en la función de producción, y qué parte se debe a la mejora en la tecnología. El punto de partida de los modelos de crecimiento es el modelo neoclásico (Solow, 1957). Solow propone estimar el progreso tecnológico como la parte del crecimiento de la producción que no puede ser explicada mediante el crecimiento de los factores, es decir, como el residuo de la estimación de la función de producción bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala. Dicho residuo se conoce como residuo de Solow o productividad total de los factores (TFP).

El modelo neoclásico de crecimiento de Solow se ha utilizado ampliamente durante los últimos años para contrastar la existencia de convergencia entre regiones tanto en renta *per cápita* como en productividad. La hipótesis de convergencia implica necesariamente la existencia de rendimientos decrecientes del factor capital y de rendimientos constantes en la función de producción. Por ese motivo, se suelen realizar contrastes sobre la validez del supuesto de rendimientos constantes en las propias ecuaciones de convergencia, pero normalmente los métodos de estimación utilizados sólo permiten realizarlos para el conjunto del período considerado o para subperíodos suficientemente grandes. De esta forma, no es posible contrastar dicho supuesto en subperíodos relativamente pequeños.

En este artículo, con el fin de superar la limitación señalada, se propone un modelo de coeficientes variables. Así, en primer lugar, se presenta la especificación de la función de producción neoclásica; a continuación, se expresa en términos de un modelo *state-space* en el que se permite que los coeficientes varíen en el tiempo y se estima a través del filtro de Kalman; seguidamente, se presentan los resultados obtenidos; y, por último, las principales conclusiones.

2. LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

El modelo de crecimiento neoclásico, propuesto por Solow (1957), parte de la especificación de una función de producción del tipo:

$$Y_t = A_t \cdot F\left(K_t, L_t\right), \qquad [1]$$

donde Y_t representa el nivel de producción en el instante t, K_t el *stock* de capital, L_t el número de trabajadores y A_t un índice del nivel de tecnología o grado de eficiencia productiva de la economía[1]. Tomando logaritmos en [1] y diferenciando respecto el tiempo se obtiene la siguiente expresión de la tasa de crecimiento de la producción:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \left(\frac{AF_L}{Y}\right) \cdot \dot{L} + \left(\frac{AF_K}{Y}\right) \cdot \dot{K}, \qquad [2]$$

donde las variables con punto denotan las derivadas respecto al tiempo, y F_K y F_L las derivadas parciales de F respecto K y L, es decir, las productividades marginales de los factores. Por último, $\frac{\dot{A}}{A}$ es una medida de cambio de la eficiencia productiva (progreso tecnológico).

Multiplicando y dividiendo los sumandos entre paréntesis por L el segundo, y por K el tercero, [2] se puede reescribir como:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \left(\frac{AF_L L}{Y}\right) \cdot \left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + \left(\frac{AF_K K}{Y}\right) \cdot \left(\frac{\dot{K}}{K}\right). \qquad [3]$$

En mercados competitivos donde las productividades marginales de los factores son iguales a los precios, $\left(\frac{AF_L L}{Y}\right)$ y $\left(\frac{AF_K K}{Y}\right)$ equivalen a las participaciones de los factores en el total de la producción o, en otras palabras, a la participación de las rentas del trabajo y del capital en el total de los ingresos. Si se sustituye $\left(\frac{AF_L L}{Y}\right)$ por α y $\left(\frac{AF_K K}{Y}\right)$ por β, [3] queda como sigue:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha \cdot \left(\frac{\dot{L}}{L}\right) + \beta \cdot \left(\frac{\dot{K}}{K}\right). \qquad [4]$$

La expresión [4] permite descomponer la tasa de crecimiento de la producción en función del crecimiento de los factores y de la TFP. En consecuencia, es posible obtener la TFP como la diferencia entre el crecimiento de la producción y la parte explicada por el crecimiento de los factores. Ahora bien, dado que [4] es una ecuación continua, este procedimiento no se puede llevar a cabo de forma directa por lo que se acostumbra a utilizar la aproximación discreta de Tornqvist (1936), que suponiendo rendimientos constantes a escala, viene dada por:

$$log\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}}\right) = log\left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right) + \alpha \cdot log\left(\frac{L_t}{L_{t-1}}\right) + (1-\alpha) \cdot log\left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right). \qquad [5]$$

En esta ecuación se podría contrastar la hipótesis de rendimientos constantes a escala de manera directa a partir del coeficiente (1-α). Así, por ejemplo, a partir de esta aproximación, Mas *et al.* (1996) estiman la siguiente expresión derivada de [5] pero introduciendo un tercer factor productivo para analizar los efectos del capital público sobre la convergencia en términos de productividad en las regiones españolas:

$$ln\,TFP = ln\,A_0 + \lambda \cdot t + \gamma \cdot ln\,G + (\rho - 1) \cdot ln\,K, \qquad [6]$$

donde $ln\ A_0$ es el nivel inicial de eficiencia, λ una tasa de crecimiento exógena del progreso tecnológico y γ la contribución del capital público (G). En este caso, la hipótesis de rendimientos constantes a escala se contrasta a partir del coeficiente (ρ-1). Sin embargo, y a pesar de que este método es el más habitual para contrastar dicha hipótesis, se trata de un procedimiento indirecto que presenta el inconveniente de que sólo puede utilizarse en subperíodos suficientemente grandes. Para superar esta limitación, tal y como se ha comentado en la introducción, en este artículo se propone utilizar un modelo de coeficientes variables a lo largo del tiempo para modelizar la función de producción neoclásica.

3. ESPECIFICACIÓN DEL MODELO DE COEFICIENTES VARIABLES

Un modelo *state-space* está formado por dos ecuaciones (ecuación de medida [7], y ecuación de transición [8]) que recogen el comportamiento del sistema:

$$Y_t = Z_t \cdot X_t + \varepsilon_t \text{ ; y,} \qquad [7]$$

$$X_t = T_t \cdot X_{t-1} + \theta_t \, . \qquad [8]$$

La ecuación de medida relaciona una variable no observable (de estado), X_t, con una variable observable, Y_t, que capta la dinámica de X_t. La ecuación de transición recoge el comportamiento dinámico de X_t que, aunque desconocido, se supone que es de tipo Markov de primer orden. ε_t y θ_t son los términos de perturbación que se distribuyen según una normal de media cero y varianzas H y Q respectivamente y que se suponen independientes entre sí. Las matrices Z_t y T_t, así como las varianzas de los términos de perturbación, se conocen como hiperparámetros y son los que determinan las propiedades estocásticas del sistema.

La estimación de estos modelos se puede llevar a cabo mediante un algoritmo recursivo conocido como filtro de Kalman (Kalman, 1960 y Kalman y Bucy, 1961). La aplicación del filtro de Kalman a los modelos *state-space* permite obtener estimaciones óptimas (en el sentido de que minimizan el error cuadrático medio) de X_t. Sin embargo, para aplicar el filtro de Kalman es necesario conocer los hiperparámetros y los valores iniciales de la variable de estado (X_0) así como la matriz de varianzas y covarianzas del error de estimación asociado a los mismos (P_0)[2].

Una de las aplicaciones que ofrecen los modelos *state-space* y el filtro de Kalman es la especificación y estimación de modelos de coeficientes variables a lo largo del tiempo[3]. Una posible especificación de un modelo de este tipo para la función de producción neoclásica es:

$$Y_t = \begin{pmatrix} 1 & L_t & K_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_t \\ \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \varepsilon_t \text{ ; y,} \qquad [9]$$

$$\begin{pmatrix} A_t \\ \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{t-1} \\ \alpha_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_{1t} \\ \theta_{2t} \\ \theta_{3t} \end{pmatrix}, \qquad [10]$$

donde [9] es la ecuación de medida y [10] la de transición. La estimación de este modelo permite obtener estimaciones a lo largo del tiempo para A_t, α_t y β_t que pueden utilizarse para contrastar la validez del supuesto de rendimientos constantes en cada instante.

4. ESTIMACIÓN DEL MODELO. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para proceder a la estimación del modelo se han utilizado datos anuales correspondientes a las variables producción, trabajo y capital (en logaritmos) para el conjunto de la economía española para el período 1964-1991. En concreto, la producción se ha aproximado por el VAB a precios de mercado con base 1990, el trabajo por la serie del total de ocupados en miles de personas facilitada por la EPA, mientras que los datos correspondientes al capital provienen de la estimación del capital privado con base 1990 realizada por el IVIE y la Fundación BBV.

Tal y como se ha comentado en el apartado anterior, para poder aplicar el filtro de Kalman es necesario conocer los valores iniciales del vector de estado, $X_0 = \begin{pmatrix} A_0 & \alpha_0 & \beta_0 \end{pmatrix}'$, y el de la matriz de varianzas y covarianzas del error de estimación asociados a los mismos, P_0, así como los valores de los hiperparámetros Z_t, T_t, H y Q.

En cuanto a los valores iniciales, siguiendo la propuesta de Harvey (1981 y 1989), se han fijado X_0=(0 0 0)' y $P_0=\kappa\cdot I$, siendo κ es un escalar positivo que tiende a infinito (que en la práctica, y en este trabajo también, se suele aproximar por 10^6).

Respecto a los hiperparámetros, en este caso, Z_t y T_t vienen dados por la propia identificación del modelo. Así pues únicamente se han de estimar las varianzas de los términos de perturbación de las ecuaciones de estado y transición, que se han estimado por máxima verosimilitud aplicando el procedimiento de optimización numérica Broyden-Fletcher-Goldberg-Shanno (BFGS)[4] y la descomposición del error de predicción (Harvey, 1984)[5]. Las estimaciones obtenidas han sido:

$$\hat{H} = 2.01 \cdot 10^{-8}\text{; y,}$$

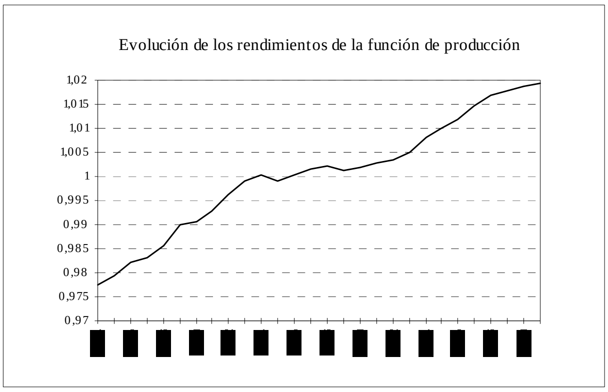
$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -0.077311 & -0.063204 \\ -0.077311 & 0.0000491 & 0.0111535 \\ -0.063204 & 0.0111535 & 0.0047813 \end{pmatrix}.$$

Los resultados obtenidos muestran que la variabilidad de los coeficientes es muy reducida por lo que puede aceptarse que el supuesto de rendimientos constantes a escala es válido a lo largo del período considerado. Sin embargo, cabe destacar que la varianza estimada del término de perturbación correspondiente al capital es superior a la del trabajo. Así pues, cabe esperar que la evolución de los rendimientos del trabajo muestren un comportamiento más estable de un período a otro (pero no necesariamente en términos globales) en la muestra analizada que la de los del capital.

A partir de estos valores es posible estimar los de la variable de estado para cada instante del período considerado. Los valores obtenidos se conocen como valores filtrados ya que cada estimación X_t se basa en la información disponible hasta t. De este modo, para mejorar la estimación de X_t se ha utilizado el algoritmo de alisado de intervalo fijo (Harvey, 1981), que permite obtener estimaciones de X_t incorporando toda la información disponible (de t=0 a T).

En el gráfico 1 se muestra, para 1964 a 1991, la evolución de la suma de las estimaciones alisadas de α_t y β_t (la evolución de los rendimientos estimados de la función de producción). La primera conclusión que se deriva del análisis de dicho gráfico es que el valor de los rendimientos totales se ha mantenido en torno a uno para todo el período considerado, variando únicamente en el tercer decimal, por lo que no parece razonable dudar de la validez del supuesto de rendimientos constantes a escala. Sin embargo, se puede observar la existencia de tres subperíodos en la evolución de los rendimientos totales de la función de producción: desde 1964 hasta 1974 se sitúan en una zona próxima a la unidad pero por debajo de la misma; a partir de 1974, y hasta 1984, la suma de α_t y β_t se aproxima mucho más a uno; y entre 1984 y 1991 se sitúan en valores superiores (aunque muy próximos) a la unidad.

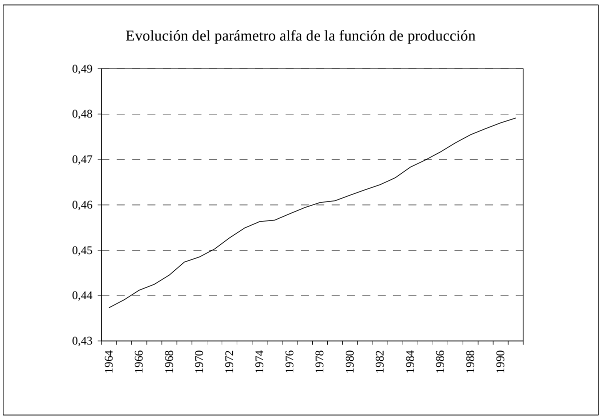
Gráfico 1



En cuanto a los valores individuales de α_t y β_t, están por debajo de la unidad, de manera que son decrecientes en todo el período. Los rendimientos del factor trabajo muestran un comportamiento uniforme, pasando de 0.438 a 0.479 (gráfico 2). Este ligero incremento podría explicarse por los cambios experimentados en la composición de la estructura productiva española en el período considerado: disminución de la mano de obra agraria, terciarización de la economía, etc., que han influido positivamente en dicha variable.

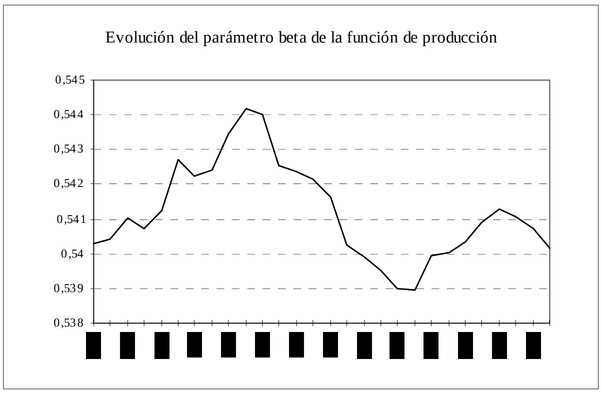
En cambio, la variabilidad global de la evolución temporal de los rendimientos del capital (gráfico 3), es más reducida, aunque sin embargo es posible identificar cuatro subperíodos en función de los cambios de sentido en su evolución. Hasta 1973 su evolución es creciente como consecuencia del intenso proceso de acumulación de capital que tuvo lugar en aquellos años. A partir de ese año la crisis internacional que desembocaría en las sucesivas crisis del petróleo provocaron un cambio de tendencia en los rendimientos del capital. Desde 1974 hasta 1983 la productividad del capital disminuyó de forma continua debido a la escasa reconversión industrial hacia sectores más competitivos. A partir de 1984 vuelve a aumentar para disminuir de nuevo a partir de 1988. Ahora bien, es necesario destacar que dado que, en todos los casos, la variación en términos absolutos es reducida, sería necesario avanzar en la elaboración de un contraste estadístico adecuado para poder afirmar que se trata de subperíodos diferentes[6].

Gráfico 2



Cabe destacar que las estimaciones obtenidas para los rendimientos del capital y del trabajo no se corresponden con sus respectivas participaciones en la renta nacional que, para el período analizado son 1/3 y 2/3 aproximadamente. Sin embargo, dicha identidad implica la existencia de competencia perfecta, supuesto que no se cumple en el período considerado. En cualquier caso, posiblemente, las estimaciones obtenidas estén sesgadas como consecuencia de la omisión de variables relevantes, tales como el capital público o humano, siendo ésta una de las posibles vías de mejora del modelo.

Gráfico 3



5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo de coeficientes variables a lo largo del tiempo para una función de producción para la economía española con la intención de contrastar la validez del supuesto de rendimientos constantes en el período 1964-1991. Los resultados obtenidos parecen apoyar la validez de dicho supuesto para todo el período considerado. En este sentido, sería necesario avanzar en la especificación y aplicación de algún contraste que permitiese contrastar formalmente la validez de dicha hipótesis (véase nota 6).

En lo que se refiere al comportamiento individual de los factores productivos, muestran rendimientos decrecientes en todo el período aunque sus evoluciones son diferentes. Mientras que los rendimientos del trabajo crecen de manera más o menos uniforme a lo largo de todo el período, los rendimientos del capital presentan una variación menor. Las estimaciones obtenidas para cada uno de ellos parecen estar sesgadas como consecuencia de la excesiva simplicidad de la función de producción elegida, existiendo la posibilidad de mejorarlas ampliando el modelo neoclásico con otros factores como el capital público o el humano.

Por último, señalar la potencialidad del enfoque adoptado, ya que los avances producidos (teóricos y computacionales) en los últimos años, lo hacen especialmente atractivo para modelizar las relaciones existentes entre variables económicas en entornos cambiantes.

NOTAS

1 Por simplicidad se supone que [1] es neutra en el sentido de Hicks.
2 Para un mayor detalle sobre las ecuaciones que forman el filtro de Kalman, la estimación máximo verosímil de los hiperparámetros y el problema de los valores iniciales véase, por ejemplo, Harvey (1989) o Hamilton (1994).
3 Los *surveys* de Nichols y Pagan (1985) y Chow (1984) ofrecen una amplia visión sobre el tema.
4 Para una amplia descripción de dicho procedimiento de optimización numérica, véase Doornik y Hendry (1994).
5 Para un detalle sobre dicho procedimiento véase, por ejemplo, Cuthberson *et al.* (1992).
6 La principal dificultad para poder llevar a cabo dicho contraste estriba en obtener una estimación insesgada y consistente de la varianza de la estimación del vector de estado (el coeficiente beta o, en el caso anterior la suma del coeficiente alfa y el beta) ya que dicha varianza depende tanto de la varianza del término de perturbación de la ecuación de medida (que se podría estimar) como de la incertidumbre asociada a la utilización de

estimaciones de los hiperparámetros y no sus valores reales (véase Hamilton, 1986).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CUTHBERSON,K.; S. HALL; M. TAYLOR (1992): *Applied econometric techniques*, Phillip Allan, Nueva York.

CHOW, G.C. (1984): "Random and changing coefficient models", en *Handbook of econometrics*, Vol. V, GRILICHES, Z.; M.D INTRILIGATOR (eds.), Elsevier Science Publisher, Amsterdam, 1213-1245.

DOORNIK, J. Y HENDRY, D. (1994): *PcFiml 8.0*, International Thompson Publishing, Londres.

HAMILTON, J.D. (1994): *Time series analysis*, Princeton University Press. Princeton.

HAMILTON, J:D. (1986): 'A Standard Error for the Estimated State Vector of a State-Space Model', *Journal of Econometrics*, 33, 387-397.

HARVEY, A.C. (1981): *Time series models,* Phillip Allan, Oxford.

HARVEY, A.C. (1984): "Dynamic models, the prediction error descomposition and state-space models", en *Econometrics and quantitative economics*, HENDRY, D.F.; K.F. WALLIS (eds.), Basil Blackwell, Oxford, 37-59.

HARVEY, A.C. (1989): *Forecasting structural time series models and the Kalman filter,* Cambridge University Press, Cambridge.

KALMAN, R.E. (1960): "A new approach to linear filtering and prediction problems", *Transactions ASME Journal of Basic Engineering,* 82, 35-45.

KALMAN, R.E.; R. BUCY (1961): "New Results in linear filtering and prediction theory", *Transactions ASME Journal of Basic Engineering*, 83, 95-108.

MAS, M.; F. PÉREZ; E. URIEL; J. MAUDOS (1996): "Public capital and productivity efficiency in the Spanish regions (1964-1991)", Comunicación presentada en el 36th Congress of the European Regional Science Association, Zurich.

NICHOLS, D.F.; A.R. PAGAN (1983): "Varying coefficient regression", en *Handbook of statistics*, Vol. II, HANNAN, E. J.; P.R. KRISHNAIAH; M.M. RAO (eds.), Nort-Holland, Amsterdam, 413-449.

SOLOW, R.M. (1957): "Technical change and the aggregate production function", *The Review of Economics and Statistics,* 39, 312-320.

TORNQVIST, L. (1936): "The bank of Finland's consumption price index", *Bank of Finland Monthly Bulletin*, 10, 1-8.