



UNIVERSITAT<sup>DE</sup>  
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona

---

PRIMERES PASSES CAP A LA  
CONJECTURA DE POINCARÉ

---

Autor: Marta Bustins Molina

Director: Dr. Vicenç Navarro Aznar  
Realitzat a: Departament de  
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2018



## Abstract

The first Poincaré conjecture asserts that homology is sufficient to tell if a  $n$ -manifold is homeomorphic to a hypersphere. We describe a counterexample, named Poincaré homology sphere. Finally, we introduce new hypothesis to enunciate the last Poincaré conjecture.

## Resum

La primera conjectura de Poincaré afirma que tota varietat  $n$ -dimensional  $X$  amb l'homologia d'una esfera és homeomorfa a aquesta. En aquest treball construirem una varietat 3-dimensional, anomenada la falsa esfera de Poincaré, i veurem que és un contraexemple. Finalment introduïrem noves hipòtesis per enunciar la definitiva conjectura de Poincaré.

---

2010 Mathematics Subject Classification. 55U10, 55U15, 55U30, 14F45, 22E60, 22C05, 57M10, 11R52



## Agraïments

Agraeixo al Vicenç per totes les hores que m'ha dedicat amb molta paciència. Al Sergi pel seu esforç i recolzament durant aquests mesos i finalment, a totes aquelles persones que han estat donant-me suport, gràcies.



# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Jules Henri Poincaré</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Els quaternions i l'esfera <math>S^3</math></b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Grups i àlgebres de Lie</b>	<b>7</b>
4.1	La representació adjunta . . . . .	10
<b>5</b>	<b>El grup <math>SU(n)</math></b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>El grup <math>SO(n)</math></b>	<b>12</b>
6.1	Àlgebra de Lie del grup $SO(3)$ . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Espais recubridors</b>	<b>17</b>
7.1	El grup de les transformacions recubridores i accions de grups . . .	21
<b>8</b>	<b>El grup icosaedral</b>	<b>26</b>
<b>9</b>	<b>La falsa esfera de Poincaré</b>	<b>31</b>
9.1	Cohomologia simplicial . . . . .	31
9.2	Definició de la falsa esfera de Poincaré . . . . .	33
9.3	Triangulacions de la $S^3$ . . . . .	34
9.4	Homologia de $\mathcal{P}^3$ . . . . .	37
<b>10</b>	<b>Conclusions</b>	<b>39</b>





# 1 Introducció

## El projecte

Al 1900 H. Poincaré afirma que tota varietat topològica  $n$ -dimensional amb l'homologia de la  $n$ -esfera és homeomorfa a aquesta. Al 1904 ell mateix troba un contraexemple per a  $n = 3$ , que anomenarem *La falsa esfera de Poincaré* i reformula l'enunciat.

En aquest treball comentarem l'origen, exposarem la cronologia de l'evolució tant del problema inicial com de la demostració de la conjectura final, coneguda com la *Conjectura de Poincaré*.

Utilitzarem resultats vists durant el Grau de Matemàtiques, però també requerirem noves eines, i nous resultats que ens aniran sorgint al llarg de la memòria. Així, el projecte es divideix en dues parts. La primera part constitueix un estudi i desenvolupament de nous conceptes.

Per altra banda, la segona part tracta d'ajuntar totes aquestes eines, descriure el nostre contraexemple, i provar que realment és un contraexemple. Aquesta memòria conclourà construint definicions alternatives, enunciant la *Conjectura de Poincaré* i mencionant el transcurs de la demostració al llarg del segle XX, i inicis del segle XXI.

## Estructura de la Memòria

En el primer capítol fem una breu introducció històrica de Poincaré, explicant la progressió que té. Fem una idea general de qui va ser i enunciem algunes de les seves aportacions més importants. Fem menció també a algunes de les seves publicacions i hi adjuntem una còpia de la publicació original on enuncia el primer teorema, i una altre en la que es retracte i corregeix el seu error.

En el capítol *Els quaternions i l'esfera  $S^3$* , introduïm les esferes  $n$ -dimensionals, centrant-nos en la  $S^3$ . Acte seguit expliquem la noció de quaternions, propietats aritmètiques importants i útils, que ens serviran per poder introduir els exemples de Grups de Lie que més ens interessin.

Seguidament tenim el capítol *Grups de Lie*, on comencem introduint els conceptes de Grup de Lie i Àlgebres de Lie. En donem definicions rigoroses i veiem algunes propietats i exemples bàsics.

En els dos punts següents, *El grup  $SU(n)$*  i *El grup  $SO(n)$* , ens centrem en els grups  $SU(2)$  i  $SO(3)$ , introduint aquests grups en termes de quaternions. Veiem que efectivament estem tractant dos grups de Lie i veiem la relació que hi ha entre ells. Observarem que es tracten de dos espais topològics coneguts.

Tot seguit tenim el capítol d'*Espais recubridors*, on definim detalladament els espais recubridors. En donem propietats relacionades amb els grups fonamentals dels espais topològics i estudiem el concepte de *Transformació recubridora*. En conjunt, obtenim resultats que ens ajudaran a construir i analitzar el contraexemple.

En el capítol *El grup icosaedral*, explicitem el grup d'isometries d'un dodecaedre, veiem com estan classificades i quines propietats tenen. Així mateix, mitjançant una extensió d'aquest grup icosaedral  $\mathcal{I}$  pel grup cíclic  $\mathbb{Z}/2$ , obtenim un nou grup, anomenat grup icosaedral binari, i l'explicitem en termes de quaternions.

Per finalitzar, prenem tota la teoria feta prèviament i obtenim l'últim capítol, *La falsa esfera de Poincaré*. En aquest apartat definim la varietat topològica,  $\mathcal{P}^3$ , utilitzem tota la teoria feta i demostrem que realment és un contraexemple de la primera conjectura de Poincaré. Utilitzem eines que hem après a l'assignatura de *Topologia algebraica*, com per exemple l'homologia. Fem una breu introducció d'homologia i de cohomologia simplicials i concloem el treball veient que  $\mathcal{P}^3$  és triangulable i que, efectivament té l'homologia d'una 3-esfera, però no és homeomorfa a una 3-esfera.

## 2 Jules Henri Poincaré



Henri Poincaré

Jules Henri Poincaré fou un matemàtic, físic teòric, enginyer miner i filòsof de la ciència. Va néixer el 29 d'abril de 1854 a la localitat francesa de Nancy. Fill del neuròleg i professor de Medicina a la universitat de Nancy, *León Poincaré* i d'una família benestant.

Al 1862 comença els seus estudis al *Lycée* de Nancy on hi estudia 11 anys. Ja des dels primers cursos destaca respecte als seus companys, on els professors li donen el sobrenom *monstre de les matemàtiques*.

Poincaré comença els seus estudis superiors a l'*École Polytechnique* al 1873. Durant aquest període comença a llegir texts de ciència divulgativa i durant la seva estada a l'escola va progressant fins als més avançats.

Després de graduar-se al 1875 continua els seus estudis a l'*École des Mines*. Una vegada finalitzats, presenta el seu doctorat en matemàtiques sobre equacions diferencials, sota la tutela de *Charles Hermite*, a la Universitat de París el 1879.

Seguidament esdevé professor d'anàlisi a la Universitat de Caen, fins que se li ofereix una plaça a la Facultat de Ciència de París al 1886, on hi ensenyarà fins que, amb 58 anys, mor el 17 de juliol del 1912.

El seu mètode de treball era persistent i obstinat. Va fer grans contribucions a diferents branques de les matemàtiques, física i filosofia. Abans dels 30 anys va desenvolupar el concepte de funcions automorfes. En una correspondència entre *Felix Klein* i Poincaré, es van intercanviar idees que van beneficiar al desenvolupament de la teoria de funcions automorfes. Tot i així hi havia rivalitat.

Al 1883 publica un article sobre la teoria de funcions analítiques en diverses variables complexes i passa a ser considerat el pare d'aquestes.

Al 1895 Poincaré publica *Analysis Situs*, una influent obra en la qual tracta la topologia i fa grans avenços sobre la teoria d'homotopia, introduint per primer cop la noció de grup fonamental (pàgina 60). És considerat l'originador de la topologia algebraica. Entre el 1899 i el 1904 publica 5 extensions més.

*Oscar II*, rei de Suècia i Noruega, al 1886 convida a Poincaré a una competició matemàtica en commemoració del seu 60è aniversari, celebrada al 1889. Poincaré és candidat del premi per la seva memòria sobre el problema dels 3 cossos on hi dóna la primera descripció de punts homoclínics i la primera descripció matemàtica de la noció del caos. Hauria estat publicada el 1887 al *Acta Mathematica*, però van trobar un error i definitivament es va publicar al 1890.

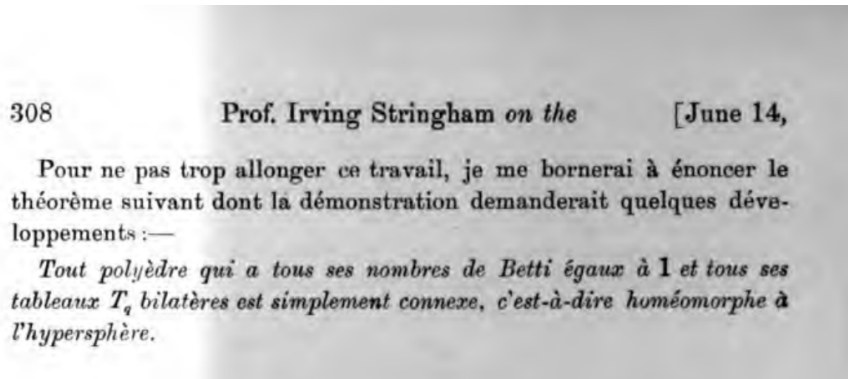
Al 1901 fa la seva primera aportació rellevant en el camp de teoria de nombres sobre el problema de funcions diofàntiques. Treballa també sobre la geometria algebraica, fent contribucions fonamentals entre els anys 1910 i 1911.

Altres obres conegudes publicades per Poincaré foren *La Science et l'Hypothèse* (1901), *La Valeur de la Science* (1905) i *Les fondements de la science* (1913).

En el *Second complément à l'Analysis Situs* (1900) Poincaré demostra que per a tota superfície topològica  $X$  amb l'homologia de l'esfera, és a dir

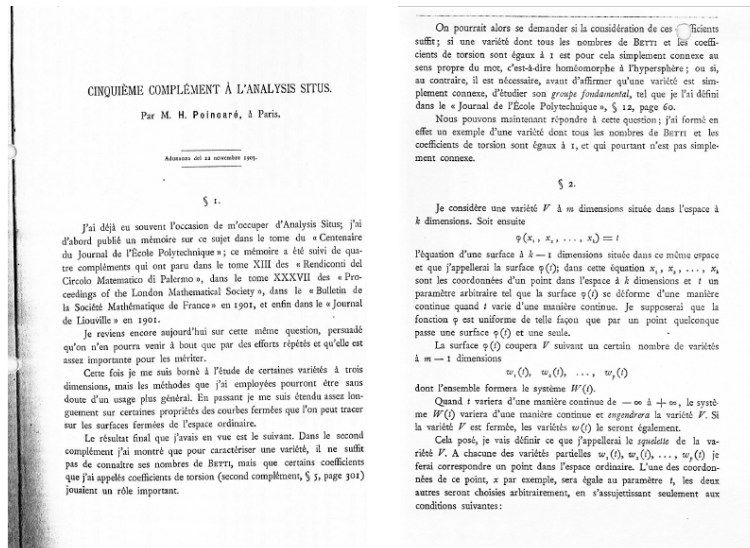
$$H_p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, 2 \\ 0 & \text{si } p \neq 0, 2 \end{cases}$$

és homeomorfa a la  $S^2$ . Finalment afirma que el mateix passa amb qualsevol dimensió



*Second complément à l'Analysis Situs, 1900*

Uns anys més tard, al 1904, Poincaré publica la *Cinquième complément à l'Analysis Situs* on troba un contraexemple i deixa com a pregunta oberta si afegint la hipòtesis de que el grup fonamental és trivial, aleshores el resultat seria correcte



*Cinquième complément à l'Analysis Situs, 1904*

### 3 Els quaternions i l'esfera $S^3$

En tota dimensió  $n$  es defineix l'esfera  $n$ -dimensional per

$$S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Totes les esferes són varietats diferenciables, però no totes tenen les mateixes propietats algebraiques. Per exemple, la  $S^1$  té una estructura de grup multiplicatiu, induïda per la multiplicació en el cos dels complexos.

Veurem ara que la esfera  $S^3$  té també una estructura de grup, induïda per la multiplicació en el cos no commutatiu dels quaternions.

Els quaternions, que denotarem per  $\mathbb{H}$ , són una extensió dels nombres reals a la qual hi afegim les unitats imaginàries  $i, j, k$  de manera que

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Els elements  $1, i, j, k$  formen una base dels quaternions, considerant-los com un  $\mathbb{R}$ -espai vectorial de dimensió 4. El conjunt dels quaternions el podem expressar com:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

o, equivalentment utilitzant les relacions enunciades prèviament, com:

$$\mathbb{H} = \{(a + bi) + (c + di)j; \quad a + bi, c + di \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Els quaternions els podem considerar també com a matrius complexes  $2 \times 2$ . Siguin ara  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{1}$  les següents matrius:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{i} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \mathbf{j} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{k} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i sigui  $\mathbb{H}$  el conjunt de totes les matrius de la forma

$$a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

on  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$ , tota matriu de  $\mathbb{H}$  serà

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix},$$

on  $x = a + bi, y = c + di$ .

Als quaternions  $q$  de la forma  $q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  els anomenarem quaternions purs, denotarem el conjunt que formen per  $\mathbb{H}_p$ . És clar que els quaternions formen un anell no commutatiu, amb element neutre en la multiplicació  $\mathbf{1}$ .

Donat un quaternió  $X = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ , definirem el seu conjugat,  $\bar{X}$ , per

$$\bar{X} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

Utilitzant les identitats que compleixen  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , es comprova que

$$X\bar{X} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1},$$

on  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  serà la norma de  $X$  i ho denotarem per  $N(X)$ .

Si  $X, Y \in \mathbb{H}$ ,  $X = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ ,  $Y = a'\mathbf{1} + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$ , podem escriure  $X = [a, (b, c, d)] = [a, U]$ ,  $Y = [a', (b', c', d')] = [a', U']$ . El seu producte serà

$$\begin{aligned} XY &= (aa' - bb' - cc' - dd')\mathbf{1} + (ab' - ba' + cd' - dc')\mathbf{i} \\ &\quad + (ac' + ca' + db' - bd')\mathbf{j} + (ad' + da' + bc' - cb')\mathbf{k} \end{aligned}$$

o, equivalentment,

$$XY = [aa' - U \cdot U', aU' + a'U + U \times U'].$$

Això ens permet provar el següent resultat.

**Proposició 3.1.** *Sigui  $Z \in \mathbb{H}$ , si  $XZ = ZX$  per a tot  $X \in \mathbb{H}$ , aleshores la part pura de  $Z$  és 0,  $Z = a\mathbf{1}$ .*

*Demostració.* Suposem  $Z = [a, U]$ , on  $U \neq 0$ . Aleshores existirà almenys un  $X = [0, V] \in \mathbb{H}$ , amb  $U \times V \neq 0$ . Llavors

$$ZX = [-U \cdot V, aV + U \times V], \quad XZ = [-V \cdot U, aV + V \times U],$$

i, com  $V \times U = -(U \times V)$  i  $U \times V \neq 0$ , obtenim que  $XZ \neq ZX$ , on arribem a una contradicció i per tant  $Z = a\mathbf{1}$ . □

Els quaternions són un cos no commutatiu, així si  $Z \neq 0$ , el seu invers és

$$Z^{-1} = \frac{1}{N(Z)}\bar{Z},$$

on  $N(Z) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ,  $Z = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ .

**Teorema 3.2.** *L'esfera  $S^3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$ , és un grup no commutatiu. A més, el producte i la inversió són aplicacions diferenciables.*

## 4 Grups i àlgebres de Lie

Al 1870, *Sophus Lie* (1845-1899) introdueix un nou concepte, anomenat actualment, grups de Lie per a estudiar les simetries en equacions diferencials. Així, són importants en àmbits com l'anàlisi o en la geometria, per a estudiar simetria d'estructures analítiques.

**Definició 4.1.** *Un grup de Lie,  $G$  és un grup amb operació  $\cdot$ , que a més és una varietat diferenciable de manera que les aplicacions*

$$\begin{aligned} \cdot: G \times G &\longrightarrow G & \cdot^{-1}: G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b & a &\longmapsto a^{-1} \end{aligned}$$

*són diferenciables.*

Aquesta última condició és equivalent a que l'aplicació

$$\begin{aligned} \mu: G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

sigui una aplicació diferenciable.

La dimensió del grup serà la dimensió de la varietat diferenciable. Anomenarem *grup de Lie matricial* als grups de Lie tals que els seus elements siguin matrius.

**Definició 4.2.** *Si  $G$  un grup de Lie,  $g \in G$  un element fixat. Es defineix la translació per l'esquerra i la translació per la dreta de  $G$  per a l'element  $g$  com les funcions*

$$\begin{aligned} L_g: G &\longrightarrow G & R_g: G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto L_g(h) = gh & h &\longmapsto R_g(h) = hg \end{aligned}$$

*respectivament.*

Notem que tant  $L_g$  com  $R_g$  són difeomorfismes per a cada  $g \in G$ , essent

$$L_g^{-1} = L_{g^{-1}} \quad R_g^{-1} = R_{g^{-1}}.$$

Com  $G$  és una varietat diferenciable, podem considerar els camps vectorials de  $G$ . Denotarem per  $\mathfrak{X}(G)$  l'espai vectorial de camps vectorials diferenciables del grup  $G$ .

**Definició 4.3.** *Un camp vectorial  $X \in \mathfrak{X}(G)$  es diu que és invariant per l'esquerra si*

$$(d_h L_g)(X(h)) = X(gh) \quad \forall g, h \in G.$$

Aquesta definició la podem veure com que  $L_g^* X = X$ , on

$$(L_g^* X)(h) \stackrel{\text{def}}{=} (d_{gh} L_g^{-1})(X(L_g(h))) = (d_h L_g)^{-1}(X(gh)).$$

Observem que  $X(h) \in T_h G$ , de manera que  $d_h L_g: T_h G \rightarrow T_{gh} G$ .

Denotem per  $\mathfrak{X}_L(G)$  el conjunt de camps vectorials invariants per l'esquerra de  $G$ .

**Proposició 4.4.** *El conjunt  $\mathfrak{X}_L(G)$  és un espai vectorial real.*

*Demostració.* Volem veure que, si  $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$ , aleshores  $X + Y \in \mathfrak{X}_L(G)$  i, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X \in \mathfrak{X}_L(G)$ .

- Per la linealitat de camps vectorials, sabem que  $(X + Y)(h) = X(h) + Y(h)$ , on  $h \in G$ . Per tant:

$$\begin{aligned} (d_h L_g)((X + Y)(h)) &= (d_h L_g)(X(h) + Y(h)) \\ &= (d_h L_g)(X(h)) + (d_h L_g)(Y(h)) \\ &= X(gh) + Y(gh) \\ &= (X + Y)(gh) \end{aligned}$$

- De la mateixa manera, per la linealitat dels camps vectorials,  $(\lambda X)(h) = \lambda X(h)$ . Per tant,

$$(d_h L_g)(\lambda X(h)) = \lambda(d_h L_g)(X(h)) = \lambda X(gh).$$

□

Junt amb els grups de Lie, tenim associat el concepte d'àlgebra de Lie, una estructura algebraica definida sobre un espai vectorial.

**Definició 4.5.** *Una àlgebra de Lie,  $\mathfrak{g}$  és un espai vectorial sobre un cos  $\mathbb{K}$ , on  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , junt amb una operació binària, que anomenarem claudàtor de Lie*

$$[\cdot, \cdot]: \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (X, Y) & \longmapsto & [X, Y] \end{array}$$

que verifica les següents tres propietats:

1. *Linealitat*

$$[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z]$$

per a qualssevol  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

2. *Antisimetria*

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

3. *Identitat de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

És clar que al tenir linealitat i antisimetria, els claudàtors de Lie seran bilineals.

**Proposició 4.6.** *Si  $G$  és un grup de Lie, un camp  $X \in \mathfrak{X}(G)$  és invariant per translacions a l'esquerra si i només si  $X(a) = dL_a(X(e))$ , per a tot  $a \in G$ . Per altra banda, si  $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$ , aleshores  $[X, Y] \in \mathfrak{X}_L(G)$ .*



*Demostració.* La condició necessària és trivial. Anem a demostrar la condició suficient. Si  $X(a) = dL_a(X(e)) \forall a \in G$ , aleshores

$$X(ab) = dL_{ab}(X(e)) = (dL_a \circ dL_b)(X(e)) = dL_a(X(b))$$

i per tant,  $X$  és invariant per l'esquerra.

D'altra banda, si  $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$ , aleshores per a tota  $a \in G$ , es té

$$L_a^*[X, Y] = [L_a^*X, L_a^*Y] = [X, Y].$$

□

Per la Proposició 4.6, si  $G$  és un grup de Lie, aleshores  $(\mathfrak{X}_L(G), [,])$  té estructura d'àlgebra de Lie, on el claudàtor de Lie serà l'operació producte. De fet, com que  $(\mathfrak{X}(G), [,])$  és una àlgebra de Lie, tenim que  $(\mathfrak{X}_L(G), [,])$  és una subàlgebra i l'anomenarem *àlgebra de Lie del grup  $G$* .

Una altra manera de definir l'àlgebra de Lie,  $\mathfrak{g}$ , d'un grup de Lie  $G$ , on  $G$  és de dimensió finita, és l'espai tangent a  $G$  en l'element neutre,  $e \in G$ . Es té, llavors, que  $\mathfrak{g}$  és un espai vectorial real, en el qual hi tenim definit l'operació:

$$\begin{aligned} [,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (u, v) &\longmapsto [u, v] \stackrel{\text{def}}{=} [X_u, X_v](e) \end{aligned} \quad ,$$

que satisfà la linealitat, l'antisimetria i la Identitat de Jacobi.

**Exemple 4.7.** Si prenem el grup lineal

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\},$$

la seva àlgebra de Lie,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , serà el grup de matrius  $n \times n$  invertibles, amb el claudàtor de Lie definit per:

$$\begin{aligned} [,]: \mathfrak{gl} \times \mathfrak{gl} &\longrightarrow \mathfrak{gl} \\ (A, B) &\longmapsto [A, B] = AB - BA \end{aligned} \quad .$$

Provem que realment ens compleix les 3 propietats:

1. Linealitat:

$$\begin{aligned} [\lambda A + \mu B, C] &= (\lambda A + \mu B)C - C(\lambda A + \mu B) \\ &= \lambda AC + \mu BC - \lambda CA - \mu CB \\ &= \lambda[A, C] + \mu[B, C] \end{aligned}$$

2. Antisimetria:

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= -(BA - AB) \\ &= -[B, A] \end{aligned}$$

3. Identitat de Jacobi:  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, [AB - BA]] = ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = 0$

## 4.1 La representació adjunta

Observem que un automorfisme d'un grup de Lie  $G$  és simultàniament un isomorfisme de grups i un difeomorfisme de varietats. En particular, donat un element  $x \in G$ , l'aplicació

$$\begin{aligned} I_x: G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto xgx^{-1} \end{aligned}$$

és un automorfisme, ja que  $I_x = R_{x^{-1}} \circ L_x$ . Els automorfismes d'aquest tipus es diuen automorfismes interns.

**Definició 4.8.** *La representació adjunta d'un grup de Lie  $G$  és l'homeomorfisme  $Ad: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  donat per*

$$Ad(g) = dI_g|_e,$$

on  $\mathfrak{g}$  és l'àlgebra de Lie del grup  $G$ .

Per al cas dels grups de matrius, la representació adjunta adopta una forma més senzilla.

**Proposició 4.9.** *Si  $G$  és un grup de Lie matricial, aleshores es té*

$$Ad(g)X = gXg^{-1},$$

amb  $g \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ .

Els grups de Lie matricials més comuns són el  $SO(n)$ ,  $SU(n)$ .

**Demostració.** En efecte, si  $\exp(tX)$  és el subgrup uniparamètric de  $G$  amb derivada  $X$  en  $t = 0$ , es té

$$Ad(g)X = dI_g|_e(X) = \frac{d}{dt}I_g(\exp(tX))g^{-1} = gXg^{-1}.$$

□

## 5 El grup $SU(n)$

Un exemple de grup de Lie matricial és el grup  $SU(n)$ . Recordem que definim el grup especial unitari de dimensió  $n$  com

$$SU(n) = \left\{ A \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{C}) : A^{-1} = \overline{A^T}, \det(A) = 1 \right\}.$$

Per tant  $SU(n)$  és un grup amb el producte de matrius. Com és clar que és una varietat diferenciable i que les operacions producte i inversa són diferenciables, és un grup de Lie.

Si considerem el grup  $SU(2)$ , observem que si  $A$  és una matriu  $2 \times 2$ ,  $A \in SU(2)$  si i només si  $A$  és de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix},$$

on  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  i  $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$ . Per tant

$$SU(2) \cong \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \cong \{z \in \mathbb{C}^2, |z|^2 = 1\}.$$

Així, obtenim que  $SU(2) \cong S^3$ . Com  $SU(2)$  és un grup de Lie, podem considerar la seva àlgebra de Lie,  $\mathfrak{su}(2)$  que consisteix en les matrius  $2 \times 2$  antisimètriques amb la traça igual a 0. És a dir,

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & -\overline{z} \\ z & -ia \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Aleshores,  $\mathfrak{su}(2)$  està generada per les matrius

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

amb claudàtor de Lie

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \\ (A, B) \longmapsto [A, B] = AB - BA,$$

que satisfà les tres propietats. Observem que

$$\begin{aligned} \sigma_3\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_1, \\ \sigma_2\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_3 \\ \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2 \end{aligned}$$

així que el claudàtor de Lie ve donat sobre la base per

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2\sigma_3 \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2\sigma_2 \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2\sigma_1.$$

## 6 El grup $SO(n)$

Un altre exemple de grup de Lie matricial és el grup especial ortogonal,  $SO(n)$ , grup format per les matrius  $n \times n$  ortogonals de determinant 1:

$$SO(n) = \{M \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{R}), MM^T = M^T M = Id, \det(M) = 1\},$$

i amb l'operació producte de matrius. També és clar que és una varietat diferenciable i que les operacions producte i inversa són diferenciables, així és un grup de Lie.

El nostre objectiu és veure que  $SO(3)$  és un grup de Lie, i quines relacions tenim amb  $SU(2)$ .

Considerem les aplicacions

$$\begin{array}{l} \rho_{Z,1}: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ X \longmapsto \rho_{Z,1}(X) = ZX \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho_{1,Y}: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ X \longmapsto \rho_{1,Y}(X) = XY \end{array},$$

on  $Z, Y \in \mathbb{H}$  són quaternions no nuls. Aquestes aplicacions són lineals i, quan  $N(Y) = 1$ ,  $N(Z) = 1$ , defineixen rotacions de  $SO(4)$  amb les següents matrius respectivament

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{pmatrix},$$

on  $Z = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ ,  $Y = p\mathbf{1} + q\mathbf{i} + r\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ . Veiem que realment defineixen rotacions en  $SO(4)$ , és a dir, que  $AA^T = Id$ ,  $\det(A) = 1$ ,  $MM^T = Id$ ,  $\det(M) = 1$ . De fet, si veiem que  $AA^T = Id$  i que  $\det(A) > 0$ , ja ho tindrem.

Com  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A més,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} &= (a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)^2 + 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 1, \end{aligned}$$

doncs  $\det(A) = 1$ . Anàlogament ho veuríem amb  $M$ . Per tant, efectivament ens defineixen dues rotacions de  $SO(4)$ .

Si considerem ara la composició  $\rho_{Z,Y} = \rho_{Z,1} \circ \rho_{1,Y}$ , com ambdues són rotacions, si  $N(ZY) = N(Z)N(Y) = 1$ , la composició també ho serà i per tant, tindrem una isometria.

**Observació 6.1.** Notem que si considerem ara com a norma dels quaternions  $\sqrt{N(X)}$  amb el producte intern, com a espai euclidià tenim que  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ . A més, el subespai  $\mathbb{H}_p$  és ortogonal al subespai  $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ . Per tant,  $\mathbb{H}_p$  hereta l'estructura d'espai euclidià i  $\mathbb{H}_p \cong \mathbb{R}^3$ . Ara bé, com  $\mathbb{H}$  i  $\mathbb{R}^4$  són isomorfs, els seus grups de rotacions també seran isomorfs. El mateix passa amb  $\mathbb{H}_p$ , així que  $SO(\mathbb{H}_p) \cong SO(3)$ .

Si prenem  $Y = Z^{-1}$ ,  $N(ZZ^{-1}) = N(Z)N(Z^{-1}) = N(Z)N(Z)^{-1} = 1$ , per tant  $\rho_Z := \rho_{Z,Z^{-1}}$  tenim que  $\rho_Z$  serà una rotació de  $SO(4)$  amb

$$\rho_Z(X + Y) = Z(X + Y)Z^{-1} = ZXZ^{-1} + ZYZ^{-1} = \rho_Z(X) + \rho_Z(Y).$$

Anàlogament, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\rho_Z(\lambda X) = \lambda \rho_Z(X)$ . És a dir, l'aplicació  $\rho_Z$  és una aplicació lineal per a cada  $Z \in \mathbb{H}$ . A més, tenim que  $\rho_Z(\overline{X}) = \overline{\rho_Z(X)}$ , ja que

$$\begin{aligned} \overline{ZXZ^{-1}} &= \overline{Z^{-1}ZX} \\ &= \overline{Z^{-1}XZ} \\ &= ||z||^{-1}Z\overline{X}||z||Z^{-1} \\ &= +Z\overline{X}Z^{-1} \end{aligned}$$

i, , per tant, si  $X$  és un quaternió pur,

$$\rho_Z(X + \overline{X}) = \rho_Z(X) + \rho_Z(\overline{X}) = \rho_Z(X) + \overline{\rho_Z(X)} = 0.$$

És a dir,  $\rho_Z(X)$  també serà un quaternió pur. És a dir,  $\rho_Z(\mathbb{H}_p) \subseteq \mathbb{H}_p$ . Així doncs,  $\rho_Z \in SO(3)$ .

**Teorema 6.2.** Per a qualsevol quaternió  $Z$  no nul, l'aplicació

$$\begin{aligned} \rho_Z: \mathbb{H}_p &\longrightarrow \mathbb{H}_p \\ X &\longmapsto \rho_Z(X) = ZXZ^{-1} \end{aligned}$$

defineix una rotació en  $SO(3) \cong SO(\mathbb{H}_p)$ . Recíprocament, tota rotació de  $SO(3)$  és de la forma

$$\begin{aligned} \rho_Z: \mathbb{H}_p &\longrightarrow \mathbb{H}_p \\ X &\longmapsto \rho_Z(X) = ZXZ^{-1} \end{aligned}$$

per a algun  $Z \in \mathbb{H}$  no nul. A més a més, dos quaternions no nuls,  $Z$  i  $Z'$  defineixen la mateixa rotació de  $SO(3)$ , si i només si  $Z = \lambda Z'$  per a alguna  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ .

*Demostració:* Ja hem vist que per a qualsevol  $Z$  no nul l'aplicació  $\rho_Z$  defineix una rotació en  $SO(3)$ . Ara només ens queda veure que tota rotació de  $SO(3)$  la podem expressar com a  $ZXZ^{-1}$  per a algun  $Z \in \mathbb{H}$  no nul. Observem, primer, que  $\rho_{YZ} = \rho_Z \circ \rho_Y$

$$\begin{aligned} \rho_{YZ}(X) &= (YZ)X(YZ)^{-1} \\ &= YZXXZ^{-1}Y^{-1} \\ &= Y(ZXZ^{-1})Y^{-1} \\ &= \rho_Y(ZXZ^{-1}) \\ &= \rho_Y(\rho_Z(X)) = (\rho_Y \circ \rho_Z)(X). \end{aligned}$$

Recordem de Geometria Lineal, que tota rotació de  $SO(3)$  es pot expressar com a composició de dues simetries especulars i, per tant, si veiem que tota simetria  $\sigma$  respecte un pla, es pot expressar com  $\sigma(X) = -ZXZ^{-1}$ , per a algun  $Z$ , ja ho tindrem, ja que, donada una rotació  $R$  de  $SO(3)$  de manera que  $R = \sigma \circ \tau$  per a algunes simetries respecte dos plans amb  $\sigma(X) = -ZXZ^{-1}$ ,  $\tau(X) = -YZY^{-1}$  per a alguns  $Z, Y \in \mathbb{H}$ , tindrem que

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \tau)(X) &= \sigma(-YXY^{-1}) \\ &= -Z(-YXY^{-1})Z^{-1} \\ &= ZYX(Y^{-1}Z^{-1}) \\ &= ZYX(ZY)^{-1}.\end{aligned}$$

Ara, sigui  $\sigma$  una simetria respecte un pla  $H$ ,  $Z$  un quaternió pur ortogonal al pla  $H$ , sabem que

$$\sigma(X) = X - 2\frac{(X \cdot Z)}{(Z \cdot Z)}Z,$$

on  $\cdot$  denota el producte escalar de dos quaternions.

Per altra banda, si  $X, Z$  són dos quaternions purs,  $X = [0, U]$ ,  $Z = [0, U']$

$$\begin{aligned}-(ZX + XZ) &= -([-U' \cdot U, U' \times U] + [-U \cdot U', U \times U']) \\ &= 2U \cdot U' \\ &= 2(Z \cdot X).\end{aligned}$$

En particular,  $-Z^2 = Z \cdot Z$  i, per tant,

$$\sigma(X) = X + 2(X \cdot Z)Z^{-1} = X - (XZ + ZX)Z^{-1} = -ZXZ^{-1}.$$

Llavors, tota simetria  $\sigma$  es pot expressar com a  $\rho_Z$  per a alguna  $Z \in \mathbb{H}$ .

Suposem ara que  $Z_1$  i  $Z_2$  defineixen la mateixa rotació,  $\rho_{Z_1} = \rho_{Z_2}$ , és a dir

$$Z_1XZ_1^{-1} = Z_2XZ_2^{-1}$$

per a tot  $X \in \mathbb{H}_p$ , que és equivalent a que

$$Z_2^{-1}Z_1X = XZ_2^{-1}Z_1$$

per a tot  $X \in \mathbb{H}_p$ . Per la Proposició 3.1, això passa si i només si  $Z_2^{-1}Z_1 \in \mathbb{R}$ , per tant,  $Z_1 = aZ_2$ , on  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

□

Com a resultat directe, obtenim la següent relació entre els nostres grups  $SU(2)$  i  $SO(3)$ .

**Corol·lari 6.3.** *Existeix un morfisme  $\rho: SU(2) \rightarrow SO(3)$  continu i exhaustiu amb nucli  $\ker(\rho) = \{\pm 1\}$ .*

*Demostració.* Considerem la següent aplicació

$$\begin{aligned} \rho: SU(2) &\longrightarrow SO(3) \\ Z &\longmapsto \rho(Z) := \rho_Z \end{aligned} .$$

Com ja hem vist, per a cada  $Z$  no nul,  $\rho_Z$  és una rotació en  $SO(3)$ , per tant està ben definida. A més, per en la demostració del Teorema 6.2 ja hem vist que aquest és un morfisme. Per tant,

$$\rho(YZ) = \rho_{YZ} = \rho_Y \circ \rho_Z = \rho(Y)\rho(Z).$$

Novament, pel Teorema 6.2, és clar que és exhaustiu.

Per últim mirem el seu nucli. És evident que el neutre,  $\mathbf{1}$  pertany al nucli. Novament, pel Teorema 6.2, dos quaternions  $Z$  i  $Z'$  definiran la mateixa rotació si i només si existeix  $\lambda \in \mathbb{R}$  amb  $Z = \lambda Z'$ . Ara, com estem amb quaternions unitaris, només tenim el cas amb  $\lambda = -1$  Per tant,

$$\ker(\rho) = \{\pm 1\}.$$

□

Com  $SU(2)$  és difeomorf a  $S^3$ , obtenim que

$$SO(3) \cong SU(2)/\{\pm 1\} \cong S^3/\{\pm 1\}.$$

I considerant l'espai projectiu real com a la identificació dels punts antipodals de la  $S^3$

$$\mathbb{RP}^3 \cong S^3/\{\pm 1\},$$

obtenint, doncs,  $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3/\pm 1$ .

## 6.1 Àlgebra de Lie del grup $SO(3)$

Com hem vist,  $SO(3)$  és un grup de Lie. Així doncs, podem considerar la seva àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$ , que serà

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathfrak{M}(3 \times 3, \mathbb{R}) : A^T = -A\}$$

i el claudàtor de Lie ve donat pel commutador

$$\begin{aligned} [, ]: \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) &\longrightarrow \mathfrak{so}(3) \\ (A, B) &\longmapsto AB - BA \end{aligned} ,$$

que efectivament és lineal, antisimètric i compleix la identitat de Jacobi, com hem vist en l'exemple 4.7.

**Observació 6.4.** Per la Proposició 4.9, es té que pel grup  $SU(2)$ , la representació adjunta serà

$$Ad \begin{pmatrix} x + iy & u + vi \\ -u + vi & x - iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 - v^2 & 2(yu - xv) & 2(xu + vy) \\ 2(yu + xv) & x^2 - y^2 + u^2 - v^2 & 2(uv - xy) \\ 2(-xu + yv) & 2(uv + xy) & x^2 - y^2 - u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

És a dir,  $Ad: SU(2) \rightarrow Aut(\mathfrak{su}(2))$ , o, equivalentment,  $Ad: SU(2) \rightarrow SO(3)$ , ja que  $gXg^{-1}$ , amb  $g \in SU(2)$ , és a dir, no nul, ens defineix una rotació de  $SO(3)$ , on  $X \in \mathfrak{su}(2) \subset \mathbb{H}_p$ .



## 7 Espais recubridors

Al 1843 es publica per primera vegada la teoria de Galois. S'introdueix el nou concepte grups de Galois, grups associats a extensions de cossos. És a dir, si  $L$  és una extensió d'un cos  $K$ , podem considerar el grup

$$\text{Aut}_K L = \{h: L \rightarrow L \mid h(k) = k \quad \forall k \in K\}.$$

De manera anàloga s'introdueixen els espais recubridors. És a dir, si tenim un espai topològic inicial  $X$ , podem recórrer a un espai recubridor  $Y$ , més senzill, i usar la teoria d'espais recubridors per a obtenir informació de  $X$  a partir de  $Y$ , on en comptes de tenir automorfismes, tindrem aplicacions recubridores.

**Definició 7.1.** *Siguin  $X, Y$  dos espais topològics i  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació contínua. Direm que un obert  $U \subseteq X$  és distingit si  $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ , és una unió disjunta d'oberts connexos tals que*

$$p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$$

*és un homeomorfisme.*

**Definició 7.2.** *Si  $Y$  és connex,  $p: Y \rightarrow X$  és exhaustiva i per a tot  $x \in X$  existeix  $U$ , un entorn obert distingit de  $x$ , es diu que  $p$  és una aplicació recubridora i que  $Y$  és un espai recubridor de  $X$ .*

**Definició 7.3.** *Una aplicació contínua  $f: Y \rightarrow X$  es diu que és un homeomorfisme local si per a tot  $y \in Y$  existeix un entorn obert  $U$  tal que  $f|_U: U \rightarrow f(U)$  és un homeomorfisme.*

Resulta de la definició que tota aplicació recubridora és un homeomorfisme local i, que si a més  $p$  és injectiva, aleshores és un homeomorfisme.

**Lema 7.4.** *Un homeomorfisme local  $f: Y \rightarrow X$  verifica:*

- (i.)  *$f$  és una aplicació contínua i oberta.*
- (ii.) *per a cada  $x \in X$ , la fibra  $f^{-1}(x)$  és un espai discret.*

*Demostració.*

- (i.) Per la pròpia definició d'homeomorfisme local, és clar que és una aplicació contínua. Per a veure que és oberta, sigui  $U \subset Y$  obert, volem veure que  $f(U)$  és obert, és a dir, que és entorn de tots els seus punts. Siguí  $y \in U$ , existeix un entorn obert  $V$  de  $y$  tal que  $f|_V: V \rightarrow f(V)$  és un homeomorfisme i, per tant,  $f(V)$  és un obert. Aleshores

$$f(y) \in f(U \cap V) \subset f(U).$$

A més a més,  $f(U \cap V)$  és obert, ja que  $U \cap V \subset V$  és obert i la restricció de  $f$  a  $V$  és un homeomorfisme.

(ii.) Sigui ara  $y \in f^{-1}(x)$ . Per definició d'homeomorfisme local, existeix  $U$  entorn obert de  $y$  tal que  $f|_U: U \rightarrow f(U)$  és un homeomorfisme. En particular,  $f|_U$  és bijectiva, i per tant  $f^{-1}(x) \cap U = y$ . Així, doncs,  $f^{-1}(x)$  és discret. □

Un cop hem vist que les fibres són totes espais discrets, té sentit considerar el cardinal d'aquest.

**Lema 7.5.** *Siguin  $X$  un espai arc-connex i  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora, aleshores el cardinal de les fibres és constant.*

*Demostració.* Siguin  $x_0, x_1 \in X$ . Com  $X$  és arc-connex, existeix un camí  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x_0$  i  $\alpha(1) = x_1$ . Pel lema d'aixecament de camins, que tot seguit recordarem, existeix un únic aixecament de  $\alpha$ ,  $\tilde{\alpha}_y$  que comença en  $y$ , per a cada  $y \in Y$ ,  $y \in p^{-1}(x_0)$  i, per tant, que acaba en un punt de la fibra  $p^{-1}(x_1)$ . Definim doncs,

$$\begin{aligned} \phi: p^{-1}(x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_1) \\ y &\longmapsto \tilde{\alpha}_y(1) \end{aligned} .$$

Veiem que  $\phi$  és una bijecció i, per tant,  $p^{-1}(x_0)$  i  $p^{-1}(x_1)$  tindran el mateix cardinal:

- $\phi$  és injectiva: siguin  $a_1, a_2 \in p^{-1}(x_0)$ , on  $a_1 \neq a_2$ . Aleshores,  $\phi(a_1) = \tilde{\alpha}_{a_1}(1)$  i  $\phi(a_2) = \tilde{\alpha}_{a_2}(1)$ . Suposem  $\phi(a_1) = \phi(a_2) = a$ , aleshores el camí  $\bar{\alpha}$  tindria dues elevacions diferents, començant en  $a$ , cosa que contradia el lema d'aixecament de camins.
- $\phi$  és exhaustiva: siguin  $a \in p^{-1}(x_1)$ ,  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  un camí tal que  $\alpha(0) = x_1$  i  $\alpha(1) = x_0$ , existeix una única elevació,  $\tilde{\alpha}$  de  $\alpha$  que comenci en  $a$  i que acabarà en una certa  $a' \in p^{-1}(x_0)$ . Per tant  $\phi(a') = a$ .

□

**Definició 7.6.** *Si  $p: Y \rightarrow X$  és una aplicació recubridora, el cardinal de cada fibra s'anomena número de fulles de l'espai recubridor.*

Un cop ja sabem què són els espais i les aplicacions recubridores, seria interessant, tenint  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora on  $X$  i  $Y$  són espais topològics arc-connexos, saber quina és la relació, si és que n'hi ha, entre els grups fonamentals de  $X$  i  $Y$ ,  $\pi(X)$  i  $\pi(Y)$  respectivament. Per això ens convé recordar el lema d'aixecament de camins.

**Lema 7.7.** *Sigui  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora i siguin  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  tals que  $p(y_0) = x_0$ . Si  $\alpha$  és un camí en  $X$ ,  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x_0$ ,  $\alpha(1) = x_1$  per a algun  $x_1 \in X$ , aleshores existeix un únic camí en  $Y$ ,  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow Y$ , amb  $\tilde{\alpha}(0) = y_0$  tal que  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ .*

Un resultat directe d'aquest lema és el següent.

**Lema 7.8.** *Sigui  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora,  $\alpha, \beta$  dos camins homòtops en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$  i  $H$  la homotopia entre  $\alpha$  i  $\beta$ , aleshores existeix una única homotopia  $\tilde{H}$  dels aixecaments  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  de  $\alpha$  i  $\beta$  respectivament, a  $Y$ , on  $\alpha(0) = \beta(0) = y$ , amb  $p(y) = x_0$ .*

*Demostració.* Aixequem  $\alpha_s$  per a cada  $s \in [0, 1]$  cap a  $\tilde{\alpha}_s$  en  $Y$  que, pel lema d'aixecament de camins, és única. □

Amb aquests lemes obtenim un teorema prou interessant, el qual ens dóna la relació entre els grups fonamentals dels espais topològics.

**Teorema 7.9.** *Sigui  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora, on  $X$  i  $Y$  són espais topològics arc-connexos. Aleshores el morfisme induït  $p_*: \pi(Y) \rightarrow \pi(X)$  és injectiu.*

*Demostració.* Recordem que si tenim una aplicació contínua,  $p: Y \rightarrow X$  i prenem dos punts  $x \in X, y \in Y$  tals que  $y \in p^{-1}(x)$ , aleshores aquesta aplicació ens indueix un morfisme

$$\begin{aligned} p_*: \pi(Y, y) &\longrightarrow \pi(X, x) \\ [\alpha] &\longmapsto p_*[\alpha] := [p \circ \alpha] \end{aligned}$$

Per tant, com que és un morfisme, per veure que  $p_*$  és injectiva, és suficient veure que  $\ker(p_*) = \{0\}$ . És clar que  $\{0\} \subseteq \ker(p_*)$ , així només ens queda veure l'altre inclusió. Suposem que tenim un llaç  $\alpha \in \pi(Y, y)$  tal que  $p_*([\alpha]) = [0]$  en  $\pi(X, x)$ . Llavors,  $p(\alpha)$  és homòtop a constant en  $X$ . Sigui  $H$  aquesta homotopia, l'aixequem i prenem la homotopia  $\tilde{H}$  entre  $\alpha$  (ja que volem l'aixecament de  $p_*(\alpha)$  i, havent fixat els punts base, aquest és únic pel lema d'aixecament de camins i per tant ha de ser el mateix  $\alpha$ ) i l'aplicació constant en  $y$ . Per tant, hem trobat una homotopia  $\tilde{H}$  de  $\alpha$  a l'aplicació constant en  $y$ , doncs  $\alpha \simeq \varepsilon_y$ , on  $\varepsilon_y$  és l'aplicació constant en  $y$ , ergo  $[\alpha] = [0]$  en  $\pi(Y, y)$ . □

De fet, el que acabem de veure demostrant que el morfisme induït per una aplicació recubridora  $p: Y \rightarrow X$  és injectiu, és que el grup  $\pi(Y, y)$  és isomorf a un subgrup de  $\pi(X, x)$ , doncs  $\pi(Y, y) \cong p_*(\pi(Y, y))$ , que és un subgrup de  $\pi(X, x)$ . En altres paraules, tenim una correspondència entre els espais recubridors de  $X$  i els subgrups (classes de subgrups) de  $\pi(X)$ .

**Exemples 7.10.** Anem a veure dos exemples diferents d'espais recubridors de la  $S^1$  i com ens donen dos subgrups diferents de  $\pi(S^1)$ :

1. Si prenem els espais topològics  $X$  i  $Y$  com en la Figura 4a, observem que  $X \cong S^1$  i  $Y = S^1$ . La antiimatge de qualsevol punt  $x \in X$  serà  $p^{-1}(x) = \{y_0, y_1, y_2\}$ , per tant és un recobriment de 3 fulles. Ara, si prenem  $\alpha$  com el llaç que ens recorre  $X$  en sentit antihorari tenim que  $\pi(X) = \langle \alpha \rangle$  i, per tant,  $\pi(X) \cong \mathbb{Z}$ . Prenent  $\beta$  com el llaç amb punt base  $y_0$  en sentit antihorari, tenim que  $\pi(Y) = \langle \beta \rangle$  i, novament,  $\pi(Y) \cong \mathbb{Z}$ . La nostra aplicació recubridora serà  $p: Y \rightarrow X$ , la projecció de  $Y$  en  $X$ . Anem a veure el morfisme que ens indueix. Tenim que

$$p_*([\beta]) = [p \circ \beta] = [\alpha^3].$$

Anàlogament, si prenem  $\beta^2$ ,  $p_*([\beta^2]) = [\alpha^6]$ . Per tant aquest morfisme ens envia el generador  $\beta$  a tres vegades  $\alpha$ , doncs  $p_*(\pi(Y)) \cong 3\mathbb{Z}$ , que és un subgrup de  $\mathbb{Z}$ .

2. Agafem el mateix espai  $X$ , però prenem  $Y$  com en la Figura 4b. Cada punt  $x \in X$  té com a antiimatge  $p^{-1}(x) = \{y_0, y_1\}$ , tenim un recobriment de 2 fulles. Prenent  $\alpha$  com abans i  $\gamma$  com el llaç amb punt base  $y_0$  i sentit antihorari, tornem a tenir que  $\pi(X) = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}$  i  $\pi(Y) = \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$ . Tot i així, la nova aplicació recubridora  $p: Y \rightarrow X$ , que torna a ser la projecció de  $Y$  en  $X$ , ens indueix un nou morfisme. Tenim que

$$p_*([\gamma]) = [p \circ \gamma] = [\alpha^2].$$

El mateix passa amb  $\gamma^2$ , tindrem  $p_*([\gamma^2]) = [\alpha^4]$ . Per tant, aquesta aplicació ens envia el generador  $\gamma$  a dues vegades  $\alpha$ , doncs  $p_*(\pi(Y)) \cong 2\mathbb{Z}$ , que és un nou subgrup de  $\mathbb{Z}$ .

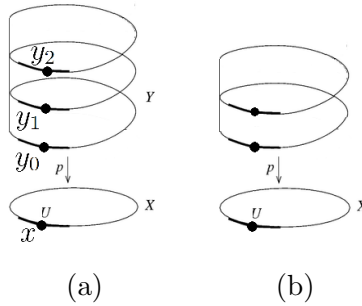


Figura 4

Com ja hem vist, els subgrups de  $\pi(X)$  tenen una correspondència amb els espais recubridors de  $X$ . Anem a estudiar el cas més simple de subgrup de  $\pi(X)$ , que serà el grup trivial  $\{0\}$  i aquí entra el nou tipus d'espais recubridors.

**Definició 7.11.** *Sigui  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora on  $Y$  és simplement connex i localment arc-connex. Direm que  $Y$  és un espai recubridor universal.*

Resulta de la definició que  $p_*(\pi(Y)) \cong \{0\}$ , ja que  $Y$  és simplement connex i  $p_*$  és un morfisme.

## 7.1 El grup de les transformacions recubridores i accions de grups

**Definició 7.12.** *Sigui  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora. Un homeomorfisme  $\varphi: Y \rightarrow Y$  direm que és una transformació recubridora si  $p \circ \varphi = p$ , i denotarem per  $G_p(Y)$  al conjunt de les transformacions recubridores de  $Y$  respecte  $p$ .*

**Lema 7.13.** *Donada una aplicació recubridora  $p: Y \rightarrow X$  es verifica:*

- (i.) *si  $\varphi_1, \varphi_2 \in G_p(Y)$ , aleshores  $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in G_p(Y)$ .*
- (ii.) *si  $\varphi \in G_p(Y)$ , aleshores  $\varphi^{-1} \in G_p(Y)$ .*
- (iii.)  *$id \in G_p(Y)$ .*

*Demostració.*

- (i.) Siguin  $\varphi_1, \varphi_2 \in G_p(Y)$ ,  $p \circ \varphi_1 = p$  i  $p \circ \varphi_2 = p$ . Per tant,

$$p \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = (p \circ \varphi_1) \circ \varphi_2 = p \circ \varphi_2 = p.$$

Llavors,  $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in G_p(Y)$ .

- (ii.) Si  $\varphi \in G_p(Y)$ , en particular  $\varphi$  és un homeomorfisme i per tant té una inversa,  $\varphi^{-1}$ . Tenim, doncs  $p \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p = p \circ \varphi^{-1}$ . Per tant,  $\varphi^{-1}$  també és una transformació recubridora.

- (iii.) És clar que  $id: Y \rightarrow Y$  és un homeomorfisme, i  $p \circ id = p$ , ergo  $id \in G_p(Y)$ .

□

Acabem de demostrar que  $G_p(Y)$  és un grup respecte la composició d'homeomorfismes, anomenat grup de les transformacions recubridores.

**Proposició 7.14.** *Siguin  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora, on  $Y$  és arc-connex. Donats dos punts  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$  per a alguna  $x \in X$ , aleshores existeix una única transformació recubridora  $\varphi \in G_p(Y)$  tal que  $\varphi(y_1) = y_2$ .*

*Demostració.* Sigui  $z \in Y$  qualsevol, com  $Y$  és arc-connex, existeix  $\alpha: [0, 1] \rightarrow Y$  un camí amb  $\alpha(0) = y_1$ ,  $\alpha(1) = z$ . Aleshores  $p(\alpha) = \gamma$ , on  $\gamma$  serà un camí,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  amb  $\gamma(0) = p(\alpha(0)) = p(y_1) = x$ ,  $\gamma(1) = p(\alpha(1)) = p(z)$ . Pel lema d'aixecament de camins, com  $y_2 \in p^{-1}(x)$  i  $Y$  és arc-connex, existeix un camí  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow Y$  on  $p \circ \tilde{\alpha} = \gamma$ ,  $\tilde{\alpha}(0) = y_2$  i  $\tilde{\alpha}(1) = y'$ . Definim, doncs,  $\varphi(z) := \tilde{\alpha}(1)$ . Observem que, si prenem un altre camí  $\beta: [0, 1] \rightarrow Y$ ,  $\beta \simeq \alpha$  amb  $\beta(0) = y_1$ ,  $\beta(1) = z$ , i el projectem a  $X$  i agafem el nou camí  $\tilde{\beta}$  de manera anàloga que amb  $\alpha$ , amb  $\tilde{\beta}(0) = y_2$ ; la corba  $\tilde{\beta}$  acabarà en el mateix punt,  $y'$ , és a dir  $\varphi(z) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1)$ . Així,  $\varphi$  està ben definida.

Ara, si prenem  $x = y_1$ , veiem que  $\varphi(y_1) = y_2$ . És clar, per la pròpia definició de  $\varphi$  i pel Lema 7.13, que és única, ja que  $\varphi(z)$  està unívocament determinada. Veiem que  $p \circ \varphi = p$ . Sigui  $z \in Y$  qualsevol, prenem  $\alpha$  i  $\tilde{\alpha}$  com abans. Aleshores

$$p(\varphi(z)) = p(\tilde{\alpha}(1)) = \gamma(1) = p(\alpha(1)) = p(z).$$

Només falta veure que  $\varphi$  és bijectiva i que  $\varphi$  i  $\varphi^{-1}$  són contínues. Notem que, si en comptes de  $y_1$  prenem  $y_2$  i viceversa, tindrem  $\tilde{\varphi}$  única, amb  $\tilde{\varphi}(y_2) = y_1$ . Aleshores,  $(\varphi \circ \tilde{\varphi})(y_2) = y_2$  i, com  $id(y_2) = y_2$  i només existeix una única que envii  $y_2$  a  $y_2$ , això fa que  $\varphi \circ \tilde{\varphi} = id$ , per tant  $\varphi^{-1} = \tilde{\varphi}$ . Això és, hem obtingut una inversa de  $\varphi$  unívocament determinada, i per tant  $\varphi$  és bijectiva.

Per últim veiem que  $\varphi$  és contínua (aleshores, és directe que  $\varphi^{-1}$ ) també ho serà per analogia). Prenem la base d'oberts de  $Y$  com

$$\{U_z \mid z \in Y, U_z \subset V, V \text{ entorn distingit de } z\}.$$

Si veiem que  $\varphi^{-1}(U_z)$  és obert, ja ho tindrem. Com  $U_z \subset V$ , on  $V$  és un entorn distingit, tenim que  $p|_V: V \rightarrow p(V)$  és un homeomorfisme. Per tant,

$$p|_{U_z}: U_z \rightarrow p(U_z)$$

serà un homeomorfisme, i  $p(U_z)$  serà obert. A més, com  $(p \circ \varphi^{-1})(y) = p(y)$  per a cada  $y \in Y$ , ja que  $G_p(Y)$  és un grup respecte la composició i, per tant  $\varphi^{-1}$  també és una transformació recubridora, tenim que  $(p \circ \varphi^{-1})(U_z) = p(U_z)$ . Per tant, tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} U_z & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & \varphi^{-1}(U_z) \\ \cong \downarrow p & & \downarrow p \\ p(U_z) & \xrightarrow{id} & p(\varphi^{-1}(U_z)) \end{array}$$

i, com  $\varphi^{-1}: U_z \rightarrow \varphi^{-1}(U_z)$  és exhaustiva, obtenim

$$\begin{array}{ccc} U_z & \xrightarrow[\cong]{\varphi^{-1}} & \varphi^{-1}(U_z) \\ \cong \downarrow p & & \cong \downarrow p \\ p(U_z) & \xrightarrow[id]{\cong} & p(\varphi^{-1}(U_z)) \end{array} .$$

Això és,  $U_z \cong \varphi^{-1}(U_z)$  i, per tant,  $\varphi^{-1}(U_z)$  és obert.

□

Observem que si  $X$  és un espai topològic simplement connex, aleshores ell és el seu propi espai recubridor universal, i l'aplicació recubridora és

$$id: X \rightarrow X.$$

**Exemple 7.15.** Si prenem  $S^2$ , com és un espai simplement connex, el seu espai recubridor universal és ell mateix.

De fet, un espai topològic  $X$  admet un espai recubridor universal si i només si  $X$  és arc-connex, localment arc-connex i semilocalment simplement connex (i.e. si admet una base de conjunts oberts  $U$  tals que tot llaç en  $U$  és homòtop a constant en  $X$ ). A més a més, aquest, quan existeix, és únic.

**Definició 7.16.** Una aplicació recubridora  $p: Y \rightarrow X$  es diu que és normal si per a cada  $x \in X$  i per a cada parell  $x_0, x_1 \in p^{-1}(x)$  existeix una transformació recubridora  $\varphi$  tal que  $\varphi(x_0) = x_1$ .

**Teorema 7.17.** Sigui  $p: Y \rightarrow X$  una aplicació recubridora on  $X$  i  $Y$  són arc-connexos i  $X$  és localment arc-connex. Sigui  $H$  el subgrup  $p_*(\pi(Y, y_0)) \subset \pi(X, x_0)$ . Aleshores:

1. Aquest espai recubridor serà normal si i només si  $H$  és un subgrup normal de  $\pi(X, x_0)$ .
2.  $G_p(Y)$  és isomorf al quocient  $N(H)/H$ , on  $N(H)$  és el normalitzador de  $H$  en  $\pi(X, x_0)$ .

*Demostració.* Observem primer que si canviem el punt base  $y_0$  per  $y_1$ , amb  $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ , correspon a canviar  $p_*(\pi(Y, y_0))$  per un subgrup conjugat d'aquest en  $\pi(X, x_0)$ . Sigui  $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ ,  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow Y$ , un camí tal que  $\tilde{\alpha}(0) = y_0$ ,  $\tilde{\alpha}(1) = y_1$ . Aleshores,  $p \circ \tilde{\alpha}$  serà un llaç en  $X$  i, per tant, representarà un element de  $\pi(X, x_0)$ . Anomenem  $H_i = p_*(\pi(Y, y_i))$ , on  $i = 0, 1$ . Aleshores, si  $g \in \pi(X, x_0)$ ,  $g^{-1}H_0g \subset H_1$ , on  $g$  denota la classe de  $\tilde{\alpha}$  en  $H_1$ , ja que per a  $\tilde{\gamma} \in H_0$ ,  $\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}$  serà un llaç sobre  $(Y, y_1)$ . De manera anàloga, obtenim que  $gH_1g^{-1} \subset H_0$ . Per tant,  $g^{-1}gH_1g^{-1}h \subset g^{-1}H_0g$ ,  $g^{-1}H_0g = H_1$ ,  $H_0$  i  $H_1$  són dos subgrups conjugats de  $\pi(X, x_0)$ . Recíprocament, donat  $H_0$ , si volem obtenir un subgrup conjugat escollim un llaç  $\gamma$ , representat per  $g$ , i l'aixequem a un camí  $\tilde{\gamma}$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ ,  $\tilde{\gamma}(1) = y$  per algun  $y \in Y$ . Aleshores,  $H = p_*(\pi(Y, y))$ ,  $H = g^{-1}H_0g$ .

1. Prenem ara  $[\gamma] \in \pi(X, x_0)$  tal que  $\gamma$  s'aixequi a un camí  $\tilde{\gamma}$  de  $y_0$  a  $y_1$ . Aleshores,  $[\gamma] \in N(H)$ , on  $N(H) = \{\alpha \in \pi(X, x_0), \alpha H \alpha^{-1} = H\}$  denota el normalitzador de  $H$ , si i només si  $p_*(\pi(Y, y_0)) = p_*(\pi(Y, y_1))$  que, el lema d'aixecament de camins és equivalent a que existeixi una transformació recubridora  $\varphi$  amb  $\varphi(y_0) = y_1$ . Llavors serà una aplicació recubridora normal si i només si  $N(H) = \pi(X, x_0)$ , és a dir, si i només si  $H$  és un subgrup normal.
2. Definim  $\phi: N(H) \rightarrow G_p(Y)$  tal que  $\phi([\gamma]) = \varphi$ , on  $\varphi(y_0) = y_1$  usant la notació prèvia. Aleshores  $\phi$  és un morfisme ja que si prenem un altre llaç  $\gamma'$  que correspongui a una transformació recubridora  $\varphi'$  amb  $\varphi'(y_0) = y'_1$ , aleshores  $\gamma\gamma'$  s'aixeca a  $\tilde{\gamma} \cdot (\varphi(\tilde{\gamma}'))$ , un camí de  $y_0$  a  $\varphi(y'_1) = \varphi\varphi'(y_0)$ , així  $\phi([\gamma\gamma']) = \varphi\varphi'$ . A més, per l'apartat anterior  $\phi$  és exhaustiva,

$$\ker(\phi) = \{[\gamma] \in N(H) : \phi([\gamma]) = id\} = p_*(\pi(Y, y_0))$$

i pel teorema d'isomorfia es té que

$$N(H)/H \cong G_p(Y).$$

□

En particular, hem vist que si  $p: Y \rightarrow X$  és un espai recubridor universal, aleshores  $p_*(\pi(Y, y_0)) \cong \{0\}$ , per tant  $N(H) \cong \pi(X, x)$ , doncs

$$\pi(X) \cong G_p(Y).$$

**Exemple 7.18.** Com hem vist abans  $SU(2) \cong S^3$  i  $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$ , per tant, si prenem  $p: S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$  definida per

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2, x_3, x_4]$$

tenim que  $p$  és una aplicació recubridora de 2 fulles. A més, com  $SU(2)$  és simplement connex i localment arc-connex,  $SU(2)$  és un espai recubridor universal i, per tant,  $\pi(\mathbb{RP}^3) \cong G_p(S^3) \cong \mathbb{Z}/2$ .

El grup de les transformacions recubridores és un cas especial d'acció de grups sobre espais topològics. Donat un grup  $G$  i un espai  $Y$ , l'acció de  $G$  en  $Y$  és un morfisme  $\rho: G \rightarrow \text{Homeo}(Y)$ . Així, a cada  $g \in G$  se li associa un homeomorfisme en  $Y$ ,  $\rho(g): Y \rightarrow Y$  que, per pura notació, anomenarem directament  $g$ . Com  $\rho$  és un morfisme, tenim que per a  $g_1, g_2 \in G$ ,  $y \in Y$ ,  $g_1(g_2(y)) = (g_1g_2)(y)$ . Així, els elements de  $G$  actuen com a transformacions recubridores.

**Proposició 7.19.** *Sigui  $Y$  un espai topològic,  $G$  un grup d'accions sobre l'espai  $Y$  tal que per a tota  $y \in Y$  existeix un entorn  $U$  de  $y$  tal que per a tots  $g_1, g_2 \in G$ ,  $g_1 \neq g_2$ ,  $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ , aleshores*

1.  $p: Y \rightarrow Y/G$ , on  $p(y) = Gy = \{g(y) : g \in G\}$  és un espai recubridor normal.
2. Si  $Y$  és arc-connex, aleshores  $G$  és el grup de transformacions recubridores.
3. Si  $Y$  és Hausdorff i localment compacte, aleshores  $Y/G$  és Hausdorff.

*Demostració.* Sigui  $U \subset Y$  un subconjunt obert tal que ens compleix que per a tot  $g_1, g_2 \in G$ ,  $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ , aleshores l'aplicació quocient  $p$  simplement identifica tots els conjunts homeomorfs disjunts  $\{g(U), g \in G\}$  amb el conjunt  $p(U) \subset Y/G$ . Per la pròpia definició de la topologia quocient,  $p$  defineix un homeomorfisme  $p|_{g(U)}: g(U) \rightarrow p(U)$  per a cada  $g \in G$ . Així, tenim que  $p$  és una aplicació recubridora. Cada element de  $G$  actua com una transformació recubridora i, com  $g_2g_1^{-1}: g_1(U) \rightarrow g_2(U)$  és exhaustiva, aquesta és una aplicació recubridora normal.

És clar que  $G \subseteq G_p(Y)$  i, si  $Y$  és arc-connex, si  $f \in G_p(Y)$ , aleshores per a qualsevol  $y \in Y$ ,  $y$  i  $f(y)$  estan en la mateixa fibra i existeix  $g \in G$  amb  $g(y) = f(y)$ . Doncs, com els elements  $g \in G$  es comporten com a transformacions recubridores, ja hem vist que aquestes queden determinades per a la imatge d'un sol punt i, per tant,  $f = g$ . Obtenim  $G_p(Y) \subseteq G$ , és a dir,  $G_p(Y) = G$ .

Per a veure que  $Y/G$  és Hausdorff, hem de veure que, donats dos punts qualssevol  $[x], [y] \in Y/G$ , amb  $[x] \neq [y]$ , aleshores existeixen dos oberts  $U_x, U_y$  disjunts amb  $[x] \in U_x$  i  $[y] \in U_y$ . Això és equivalent a, donats  $x \in [x]$ ,  $y \in [y]$ , trobar dos entorns oberts  $V, W$  de  $x$  i de  $y$  respectivament,  $G$ -invariants (i.e. tals que  $g(V) = V$ ,  $g(W) = W$  per a tot  $g \in G$ ) amb  $V \cap W = \emptyset$ . Per a això ens aniran bé els següents lemes.



**Lema 7.20.** *Suposem que tenim  $V$  entorn obert de  $x$  i  $W$  entorn obert de  $y$   $G$ -invariant. Aleshores  $[x]$  i  $[y]$  estan separats per dos oberts en  $X/G$ .*

*Demostració.* La demostració d'aquest lema és bastant directe. Com  $V \cap W = \emptyset$  i per a cada  $g \in G$ ,  $g$  és un homeomorfisme amb  $g(W) = W$ , aleshores  $g(V) \cap W = \emptyset$  per a cada  $g \in G$ , doncs prenem  $V' = G(V)$ ,  $V' \cap W = \emptyset$ , ambdós  $G$ -invariants i amb  $x \in V'$ ,  $y \in W$ .

Ara, com  $X$  és localment compacte, podem prendre  $x \in U_x \in K_x$ ,  $y \in U_y \in K_y$ , amb  $U_x, U_y$  entorns oberts,  $K_x, K_y$  compactes. A més, ja que  $G$  actua pròpia i discontinuament, tenim  $g_1, \dots, g_n \in G$  amb  $K_x \cap g_i(K_y) \neq \emptyset$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Ara prenem un  $i$  qualsevol. Com  $X$  és Hausdorff, podem prendre entorns oberts  $V'_j, W'_j$ , de  $x$  i de  $g_j(y)$  respectivament, amb  $V'_j \cap W'_j = \emptyset$ . Prenem  $V_j = V'_j \cap U_x$ ,  $W_j = g_j^{-1}(W'_j) \cap U_y$ . És a dir, per a cada  $0 \leq j \leq n$  tindrem  $V_j$  i  $W_j$  entorns oberts de  $x$  i de  $y$  respectivament amb  $V_j \cap g_j(W_j) = \emptyset$ . Finalment, definim

$$V = \bigcap_{j=1}^n V_j, \quad W = \bigcap_{j=1}^n W_j.$$

Així,  $x \in V$ ,  $y \in W$

$$V \cap g(W) \subset K_x \cap g(K_y) = \emptyset.$$

A més,  $V$  és disjunt del conjunt obert  $G$ -invariant  $G(W)$ . □

**Corol·lari 7.21.** *Si  $X$  és una varietat topològica i  $G$  un grup d'accions sobre l'espai  $X$  tal que per a tota  $x \in X$  existeix un entorn  $U$  de  $x$  tal que per a tots  $g_1, g_2 \in G$ ,  $g_1 \neq g_2$ ,  $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ , aleshores  $X/G$  és una varietat topològica.*

*Demostració.* En la Proposició 7.19 ja hem vist que si  $X$  és Hausdorff i localment compacte, aleshores  $X/G$  és Hausdorff. Per veure que compleix el Segon Axioma de Numerabilitat, és directe ja que, si  $X$  admet una base d'entorns numerables oberts, prenem entorns  $U_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , tals que  $\bigcup_{i \leq n} U_i = X$  i  $p|_{U_i}: U_i \rightarrow p(U_i)$  sigui un homeomorfisme per a cada  $i$ , aleshores  $\{p(U_1), \dots, p(U_n)\}$  serà una base d'entorns numerables de  $X/G$ . Pel mateix raonament, és clar que si per a tot  $x \in X$  existeix un entorn  $U_x$  amb  $U_x \cong U \subset \mathbb{R}^m$ , com  $p$  és un homeomorfisme local, també ho tindrem per  $X/G$ . □

De forma anàloga es prova.

**Corol·lari 7.22.** *Si  $X$  és una varietat diferenciable i l'acció de  $G$  és diferenciable, aleshores  $X/G$  és una varietat diferenciable i, a més, si  $X$  és orientable i l'acció de  $G$  preserva l'orientació,  $X/G$  és orientable.*

## 8 El grup icosaedral

Un dodecaedre regular és un polítop regular format per 20 vèrtexs, 30 arestes i 12 cares, on totes les seves cares són pentàgons regulars (*Figura 5*). Podem explicitar el dodecaedre regular centrat a l'origen i escalat adequadament amb els següents vèrtexs:

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \quad (0, \pm \phi, \pm \phi^{-1}) \quad (\pm \phi^{-1}, 0, \pm \phi) \quad (\pm \phi, \pm \phi^{-1} 0),$$

on  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  és la raó àuria. Les equacions de les seves cares seran:

$$\phi x \pm y = \pm \phi^2 \quad \phi y \pm z = \pm \phi^2 \quad \phi z \pm x = \pm \phi^2.$$

Considerem el grup icosaedral,

$$\mathcal{I} = \{h \in SO(3) : h(I) = I\} \subseteq SO(3)$$

on  $I$  és un icosaedre. És a dir, el grup d'isometries de l'icosaedre que, al ser el dual del dodecaedre és el mateix que el grup d'isometries del dodecaedre.

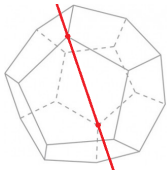


Figura 6

Així doncs, per treballar el grup icosaedral  $\mathcal{I}$ , podem fer-ho mitjançant el dodecaedre o l'icosaedre. D'ara endavant, estudiarem  $\mathcal{I}$  com el grup d'isometries del dodecaedre.

Tenim tres classes de rotacions del dodecaedre. La primera classe són les rotacions respecte un eix que va d'un vèrtex al seu oposat com es mostra en la figura (*Figura 6*). Respecte aquest eix tindrem una rotació de  $2\pi/3$ , una de  $4\pi/3$  i la identitat. Com tenim 10 parelles de vèrtexs, tenim  $10 \times 2 = 20$  isometries.

El segon tipus de rotacions són aquelles respecte un eix que uneix el punt mig d'una aresta amb el punt mig de l'aresta oposada (*Figura 7*). D'aquest tipus en tindrem una rotació de  $\pi$  i la identitat. Com que tenim 15 parells d'arestes, aquest tipus de rotacions em defineix  $15 \times 1 = 15$  isometries.

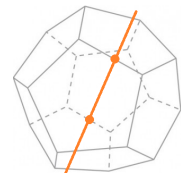


Figura 7

Per últim tenim les rotacions respecte un eix que va des del centre d'una cara fins el centre de la cara oposada (*Figura 8*). D'aquestes en tindrem una de  $2\pi/5$ , una de  $4\pi/5$ , de  $6\pi/5$ , de  $8\pi/5$  i la identitat. Com tenim 6 parelles de cares, tenim  $6 \times 4 = 24$  isometries del darrer tipus.

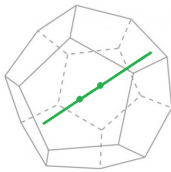


Figura 8

És clar que cada una d'aquestes isometries és diferent, ja que cada una deixa fixos dos punts diferents, i que a més ja no n'hi han més. Així doncs, en total tenim  $20 + 15 + 24 + 1 = 60$  isometries i, per tant  $\text{card}(\mathcal{I}) = 60$ .

Classifiquem aquestes isometries en classes de conjugació. Recordem, si denotem per  $[g]$  la classe de conjugació de l'element  $g \in \mathcal{I}$ ,

$$[g] = \{g^{-1} \circ a \circ g \mid a \in \mathcal{I}\}.$$

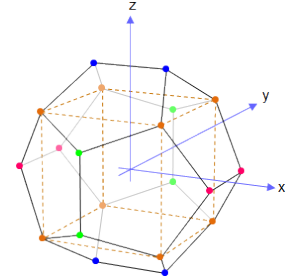


Figura 5

Per tant, com treballem amb matrius, dues matrius conjugades poden pensar-se com a dues descripcions de la mateixa rotació però amb diferents bases. Recordem també que dues rotacions de  $\mathbb{R}^3$  són conjugades si i només si tenen la mateixa traça.

A més, si parlem de rotacions en  $\mathbb{R}^3$  respecte un eix (que prendrem l'eix de rotació com l'eix de les  $z$  per facilitat), sigui  $\theta$  l'angle de rotació, la matriu ens ve definida per

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Busquem, doncs, les classes de conjugació. Del primer tipus, mirem si la rotació de  $4\pi/3$  és de la classe de conjugació de  $2\pi/3$ , que anomenarem  $[2\pi/3]$ . Tenim que les matrius són

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivament i, per tant són conjugades. Així,  $[2\pi/3]$  conté totes les rotacions de primer tipus.

Com que rotacions de segon tipus només en tenim d'un angle, aquestes formaran part de la mateixa classe, que anomenarem  $[\pi]$ . Veiem que, a més, no pertany a la classe  $[2\pi/3]$ . La matriu de la del segon tipus serà

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com les traces són diferents, és clar que no són matrius conjugades. Per tant tenim ja dues classes diferents.

Anem a veure les rotacions del tercer tipus. Prenem les rotacions  $2\pi/5$  i  $8\pi/5$  i veiem que són conjugades. Les seves matrius seran

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/5) & -\sin(2\pi/5) & 0 \\ \sin(2\pi/5) & \cos(2\pi/5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(8\pi/5) & -\sin(8\pi/5) & 0 \\ \sin(8\pi/5) & \cos(8\pi/5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivament. Com  $\cos(2\pi/5) = \cos(8\pi/5)$ , tenim que les matrius són conjugades. De manera anàloga ho podem veure per a les rotacions de  $4\pi/5$  i  $6\pi/5$ . A més, com que  $\cos(2\pi/5) \neq \cos(4\pi/5)$ , les traces són diferents i per tant són dues classes de conjugació diferent. Si mirem les traces, tampoc són de la mateixa classe que les d'abans.

Hem obtingut, per tant, 4 classes de conjugació d'ordres 20, 15, 12 i 12 respectivament.

**Teorema 8.1.** *El grup icosaedral  $\mathcal{I}$  és simple.*

*Demostració.* Sigui  $H \triangleleft G$  un subgrup normal,  $\{e\} \subsetneq H$ . Observem que si  $g \in H$ , per la pròpia definició de subgrup normal i de classe de conjugació,  $[g] \subset H$ . Així,  $H = \bigcap [g]$  i, per tant  $\text{card}(H) = \sum_{[g] \neq \{e\}} \text{card}[g] + 1$ . A més, com que  $G$  és un grup finit  $\text{card}(H) \mid \text{card}(G)$ . Així, si fem totes les combinacions possibles veiem que no hi ha cap subgrup normal  $H$  tal que  $\text{card}(H) \mid \text{card}(G)$ , excepte els trivials. Per tant,  $\mathcal{I}$  és simple. □

Per a veure que  $\mathcal{I} \cong A_5$ , veurem que dins del dodecaedre hi podem inscriure 5 cubs diferents i que cada isometria  $h \in \mathcal{I}$  ens defineix una permutació parella dels 5 cubs, és a dir, una permutació del grup alternat  $A_5$ .

Un dodecaedre té 12 cares i un cub té 12 arestes, per tant és natural pensar que cada aresta del cub estarà dins d'una de les cares del dodecaedre. A més, cada una d'aquestes arestes serà una diagonal del pentàgon. Per tant, tenim 5 cubs ja que un pentàgon té 5 diagonals. Com que el dodecaedre amb el que treballem és centrat a l'origen i els cubs estan formats per vèrtexs d'aquest dodecaedre, els cubs també seran centrats a l'origen, és a dir, si un punt és vèrtex del cub, l'antipodal d'aquest també ho serà. Explicitem els 5 cubs diferents:

1. **Cub 1** (*Figura 5*):  $(+1, +1, +1), (+1, +1, -1), (+1, -1, +1), (+1, -1, -1), (-1, +1, +1), (-1, +1, -1), (-1, -1, +1), (-1, -1, -1)$ .
2. **Cub 2** (*Figura 9a*):  $(0, \phi, \phi^{-1}), (\phi, \phi^{-1}, 0), (1, -1, 1), (-\phi^{-1}, 0, \phi), (-\phi, -\phi^{-1}, 0), (0, -\phi, -\phi^{-1}), (\phi^{-1}, 0, -\phi), (-1, 1, -1)$ .
3. **Cub 3** (*Figura 9b*):  $(0, -\phi, \phi^{-1}), (\phi^{-1}, 0, \phi), (-1, 1, 1), (-\phi, -\phi^{-1}, 0), (-\phi^{-1}, 0, \phi), (0, \phi, -\phi^{-1}), (\phi, \phi^{-1}, 0), (1, -1, -1)$ .
4. **Cub 4** (*Figura 9c*):  $(-1, -1, 1), (\phi^{-1}, 0, \phi), (0, \phi, \phi^{-1}), (-\phi, \phi^{-1}, 0), (-\phi^{-1}, 0, -\phi), (1, 1, -1), (\phi, -\phi^{-1}, 0), (0, -\phi, \phi^{-1})$ .
5. **Cub 5** (*Figura 9d*):  $(0, -\phi, \phi^{-1}), (-\phi^{-1}, 0, \phi), (1, 1, 1), (\phi, -\phi^{-1}, 0), (\phi^{-1}, 0, -\phi), (0, \phi, -\phi^{-1}), (-\phi, \phi^{-1}, 0), (-1, -1, -1)$ .

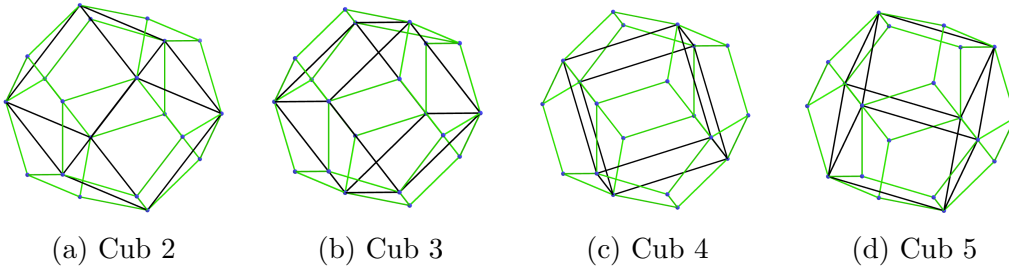


Figura 9

Cada cub queda unívocament determinat per dos punts. Ara ja podem demostrar el següent teorema.

**Teorema 8.2.** *El grup icosaedral,  $\mathcal{I}$  és isomorfe al grup alternat  $A_5$ .*

*Demostració.* Volem determinar un isomorfisme  $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow A_5$ . El grup icosaedral  $\mathcal{I}$  opera sobre els cubs recent descrits, ja que tots els elements de  $\mathcal{I}$  són isometries, i per tant, tenim un morfisme  $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow S_5$  que ens definirà les permutacions d'aquests cubs definides per cada isometria  $h$ . Per veure que  $\varphi(\mathcal{I}) \cong A_5$ . Com  $\ker(\varphi)$  és un subgrup normal de  $\mathcal{I}$  i  $\mathcal{I}$  és un grup simple (Teorema 8.1), tenim que  $\ker(\varphi) = \{1\}$  o  $\ker(\varphi) = \mathcal{I}$ . Ara, si fos  $\ker(\varphi) = \mathcal{I}$ , tindriem que tota isometria  $h \in \mathcal{I}$  seria trivial sobre els cubs, cosa que no és certa ja que si prenem per exemple el cub 2 i la isometria definida per

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i la apliquem als punts  $(1, -1, 1)$  i  $(-\phi^{-1}, 0, \phi)$  obtenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{-1} \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{-1} \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

i, aquests dos punts ens defineix el cub 3. Per tant,  $\ker(\varphi) \neq \mathcal{I}$ , doncs  $\ker(\varphi) = \{1\}$ . Com  $\varphi$  és un morfisme i el seu nucli és el grup trivial,  $\varphi$  és injectiu. Prenem ara el morfisme signe  $\xi: S_5 \rightarrow \{\pm 1\}$ , i considerem la composició  $\xi \circ \varphi: \mathcal{I} \rightarrow \{\pm 1\}$ . Si  $\xi \circ \varphi$  fos exhaustiu, tindriem, pel teorema d'isomorfia, que el seu nucli seria un subgrup normal d'ordre 30, però com  $\mathcal{I}$  és un grup simple, això és contradictori. Així, com  $A_5 = \ker(\xi)$ ,  $\varphi(\mathcal{I}) \subseteq A_5$  i, com  $A_5$  i  $\mathcal{I}$  són tots dos d'ordre 60, obtenim  $A_5 \cong \mathcal{I}$  com volíem veure.  $\square$

Un cop vist què és el grup icosaedral, podem introduir el grup icosaedral binari,  $2\mathcal{I}$ . El grup icosaedral binari és un grup no abelià d'ordre 120. És una extensió del grup icosaedral  $\mathcal{I}$  per el grup cíclic  $\mathbb{Z}_2$ , és a dir, es té la successió exacta

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow 2\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 1.$$

A més,  $2\mathcal{I}$  és també la preimatge de  $\mathcal{I}$  respecte l'aplicació recubridora de 2 fulles  $p: SU(2) \rightarrow SO(3)$ . Llavors, tenim que  $2\mathcal{I}$  és un subgrup discret de  $SU(2)$  d'ordre 120.

Els seus elements expressats com a quaternions seran els anomenats icòsians unitaris, formats per

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, 1/2(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\}$$

i els 96 quaternions obtinguts de

$$1/2(0 \pm i \pm \phi^{-1}j \pm \phi k)$$

fent permutacions parelles de les coordenades 0, 1,  $\phi^{-1}$  i  $\phi$ , on  $\phi$  denota novament la raó àuria. Tots aquests quaternions tenen mòdul 1, així que són elements de la  $S^3$ .

**Teorema 8.3.** *El grup icosaedral binari  $2\mathcal{I}$  és perfecte.*

*Demostració.* Observem que una de les presentacions de  $2\mathcal{I}$  és

$$2\mathcal{I} = \langle s, t | (st)^2 = s^3 = t^5 = -1 \rangle$$

on  $s = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$ ,  $t = \frac{1}{2}(\phi + \phi^{-1}i + j)$ . Recordem ara que un grup  $G$  és perfecte si i només si

$$G = [G, G] = \langle ghg^{-1}h^{-1} | g, h \in G \rangle$$

i, com

$$G/[G, G] = G_{ab},$$

un grup  $G$  serà perfecte si i només si  $G_{ab} \cong \{e\}$ . Veiem doncs que  $2\mathcal{I}$  és perfecte:

$$\begin{aligned} \langle s, t | (st)^2 = s^3 = t^5 \rangle_{ab} &= \langle s, t | (st)^2 = s^3 = t^5, st = ts \rangle \\ &= \langle s, t | s^2 t^2 = s^3 = t^5, st = ts \rangle \\ &= \langle s, t | t^2 = s, s^2 = t^3, st = ts \rangle \\ &= \langle s, t | t^2 = s, s^2 = ts, st = ts \rangle \\ &= \langle s, t | t^2 = s, s = t \rangle \\ &= \langle s | s^2 = s \rangle \\ &= \{e\} \end{aligned}$$

Així,  $2\mathcal{L}_{ab} \cong Id$  i, per tant  $2\mathcal{I}$  és perfecte.

□

## 9 La falsa esfera de Poincaré

Abans de definir el contraexemple, necessitem nocions bàsiques de cohomologia i homologia. És per això que començarem fent una breu introducció sobre cohomologia simplicial, que ens farà recordar, de manera natural, l'homologia simplicial.

### 9.1 Cohomologia simplicial

Recordem que donat un complex simplicial ordenat  $K$ , per a tot  $p \geq 0$  anomenem grup de cadenes  $p$ -dimensionals de  $K$ ,  $C_p(K)$  al grup abelià lliure engendrat pel conjunt de les cares  $p$ -dimensionals ordenades, és a dir

$$C_p(K) := \bigoplus \mathbb{Z}[\sigma]$$

on  $\sigma = \Delta[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}] \subseteq K$ . Per tant, tenim que  $C_p(K)$ , per a cada  $p$ , és un grup lliure abelià finitament generat, ja que tot complex simplicial és finit. Així tenim l'operador vora  $\partial_p: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  definit per

$$\partial_p[v_{i_0}, \dots, v_{i_p}] := \sum_{k=0}^p (-1)^k [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_k}}, \dots, v_{i_p}],$$

on  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ . De manera anàloga tenim aquests conceptes en cohomologia.

**Definició 9.1.** *Sigui  $K$  un complex simplicial ordenat, per a tot  $p \geq 0$ , anomenarem grup de co-cadenes  $p$ -dimensionals de  $K$  a  $C_p^*(K)$ , on*

$$C_p^*(K) = \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{Z}) = \{h: C_p(K) \rightarrow \mathbb{Z} \mid h, \text{ morfisme}\}.$$

Per tant, com  $C_p(K)$  és un grup abelià lliure finitament generat, el seu dual, respecte  $\mathbb{Z}$  també ho serà. Així, tenim que  $C_p^*(K)$  és un grup abelià lliure finitament generat.

**Definició 9.2.** *Donat  $C_*^*(K)$  un complex de co-cadenes simplicials, definim l'operador co-vora,  $\delta_p$  per*

$$\begin{aligned} \delta_p = \partial_p^*: \quad \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{Z}) &\longrightarrow \text{Hom}(C_{p+1}(K), \mathbb{Z}) \\ \varphi &\longmapsto \partial_p^*(\varphi) = \varphi \partial_p \end{aligned}$$

En general es té que

$$\delta \varphi([v_0, \dots, v_{i+1}]) = \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \varphi([v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{i+1}]),$$

on  $\varphi([v_0, \dots, v_{i+1}]) = \varphi(\partial[v_0, \dots, v_{i+1}])$ . És a dir, es té que  $\delta \varphi = \varphi \partial$ .

És clar que, com  $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$ , i  $0^* = 0$ , tenim que

$$(\partial_p \circ \partial_{p-1})^* = \partial_{p-1}^* \circ \partial_p^* = \delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$$

. Així, tenim la successió de cadenes i de co-cadenes

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(K) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longleftarrow C_{p+1}^*(K) \xleftarrow{\delta_{p+1}} C_p^*(K) \xleftarrow{\delta_p} C_{p-1}^*(K) \xleftarrow{\delta_{p-1}} C_{p-2}^*(K) \longleftarrow \dots \end{aligned}$$

respectivament i, així com definim els grups d'homologia simplicial per

$$H_p(K) := \ker \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1},$$

definim els grups de cohomologia simplicial per

$$H^p(K) := \ker \delta_p / \text{Im } \delta_{p-1}.$$

Obtenim, doncs que tant que tant  $H_p(K)$  com  $H^p(K)$  són grups abelians lliures finitament generats. A més a més, l'homologia i la cohomologia seran invariants mòdul homeomorfisme. Recordem el següent lema d'Estructures Algebraiques.

**Teorema 9.3.** *Sigui  $E$  un grup abelià finitament generat de rang  $r$ . Existeixen un nombre natural  $s$  i enters positius  $d_1, \dots, d_s$ , amb  $d_j | d_{j+1}$  per a cada  $1 \leq j < s$  de manera que  $E$  és suma directa de subgrups cíclics  $F_j$  d'ordre  $d_j$ , i de  $r$  subgrups cíclics finits.*

Amb aquest teorema, podem expressar els grups d'homologia simplicial i els de cohomologia simplicial per

$$H_p(K) \cong \mathbb{Z}^{b_p} \oplus TH_p(K), \quad H^p(K) \cong \mathbb{Z}^r \oplus TH^p(K),$$

on  $b_p$  denota el  $p$ -èsim nombre de Betti, i  $TH_p(K)$ ,  $TH^p(K)$  són la torsió.

Al 1895, en l'*Analysis Situs*, Poincaré enuncia el següent teorema.

**Teorema 9.4.** *(Poincaré Duality) Sigui  $X$  una varietat topològica  $n$ -dimensional, tancada, compacte i orientable, per a tot nombre enter  $k$ , amb  $k \leq n$ , el  $k$ -èsim i el  $(n - k)$ -èsim nombre de Betti són iguals*

$$b_k = b_{n-k}.$$

Més endavant, es demostren els següents teoremes.

**Teorema 9.5.** *(Poincaré Duality) Sigui  $K$  una varietat topològica  $n$ -dimensional orientable i tancada, aleshores, per a tot  $k \leq n$ , es té*

$$H_k(K, \mathbb{Z}) \cong H^{n-k}(K, \mathbb{Z}).$$



**Teorema 9.6.** (*Algebraic duality*) Sigui  $K$  una varietat topològica  $n$ -dimensional, tancada, compacte i orientable, per a cada  $k \leq n$  es compleix que

$$TH^{i+1}(K, \mathbb{Z}) \cong TH_i(K, \mathbb{Z}),$$

on  $TH^{i+1}(K, \mathbb{Z})$  denota la torsió del  $(i+1)$ -èsim grup de cohomologia, i  $TH_i(K, \mathbb{Z})$  denota la torsió del  $i$ -èsim grup d'homologia.

Combinant aquests dos teoremes obtenim que  $H^{i+1} \cong H^{n-(n-(i+1))} \cong H_{n-(i+1)}$ . Per tant,  $TH^{i+1} \cong TH_{n-(i+1)}$ , doncs

$$TH_i(K, \mathbb{Z}) \cong TH_{n-i-1}(K, \mathbb{Z}).$$

Per últim, recordem propietats bàsiques de l'homologia. Sigui  $X$  una varietat topològica  $n$ -dimensional, tenim que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^r$ , on  $r$  denota el nombre de components arc-connexes de  $X$ . A més,  $H_1(X) \cong \pi(X)_{ab}$ . Finalment, si  $X$  és orientable, tancada, compacte i arc-connexa, aleshores  $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$ . Així, procedim a definir la falsa esfera de Poincaré.

## 9.2 Definició de la falsa esfera de Poincaré

Definim la falsa esfera de Poincaré,  $\mathcal{P}^3$ , per

$$\mathcal{P}^3 := S^3 / \mathcal{I} \cong SU(2) / \mathcal{I} \cong SO(3) / \mathcal{I} \cong \mathbb{RP}^3 / \mathcal{I}.$$

Veiem doncs que és  $SO(3) / \mathcal{I}$ , l'espai de configuracions de l'icosaedre. Pel Corol·lari 7.22, és clar que  $\mathcal{P}^3$  és una varietat diferenciable.

Volem veure que la seva homologia és com la de l'esfera, és a dir

$$H_p(\mathcal{P}^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, 3 \\ 0 & \text{si } p \neq 0, 3 \end{cases}$$

però que tot i així no és homeomorfa a  $S^3$ .

Per a utilitzar tota la teoria d'homologia i de cohomologia que hem enunciat, necessitem veure que  $\mathcal{P}^3$  és una varietat triangulable. Per a veure-ho, estudiarem dues triangulacions de la  $S^3$ , duals entre elles, que són el *600-cell* i el *120-cell* triangulat adequadament.

### 9.3 Triangulacions de la $S^3$

Per a triangular la  $S^3$ , tenim diferents polítops com, el *5-cell*, el *16-cell* o el *600-cell*. Com hem dit abans en aquest apartat ens centrarem en el polítop anomenat *600-cell* (Figura 10).

El *600-cell* és un polítop format per 600 tetraedres, 1200 cares triangulars, 720 arestes i 120 vèrtexs, on cada vèrtex pertany a 20 tetraedres diferents. Observem que, si prenem  $X$  com la *600-cell*,

$$\chi(X) = 120 - 720 + 1200 - 600 = 0,$$

així com  $\chi(S^3) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i \text{rang}(H_i(S^3)) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$ .

Si escalem adequadament el polítop, podem expressar els vèrtexs que formen aquest polítop com els 24 obtinguts de

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, 1/2(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\}$$

i els 96 vèrtexs assolits a partir de les permutacions parelles de les coordenades  $\phi, 1, \phi^{-1}$  i 0 sobre

$$1/2(\pm i \pm \phi^{-1}j \pm \phi k),$$

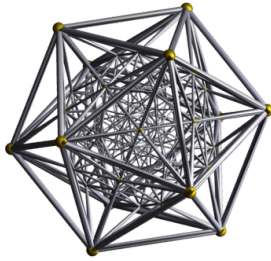


Figura 10: *600-cell* on  $\phi$  denota novament la raó àuria.

Notem que aquests 120 vèrtexs són els icòsians unitaris, mencionats prèviament. Per tant, els vèrtexs de la *600-cell* són els mateixos que la representació del grup  $2\mathcal{I}$  en termes de quaternions. És directe, doncs, que el polítop *600-cell* serà invariant per les rotacions  $2\mathcal{I}$ .

Introduïm ara el polítop *120-cell*. El *120-cell* (Figura 11) és un polítop format per 120 dodecaedres, 720 pentàgons, 1200 arestes i 600 vèrtexs. És a dir, el *120-cell* és el polítop dual del *600-cell*. Els seus vèrtexs venen donats per totes les permutacions de

$$\begin{aligned} &(0, 0, \pm 2, \pm 2) \\ &(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm \sqrt{5}) \\ &(\pm \phi^{-2}, \pm \phi, \pm \phi, \pm \phi) \\ &(\pm \phi^{-1}, \pm \phi^{-1}, \pm \phi^{-1}, \pm \phi) \end{aligned}$$

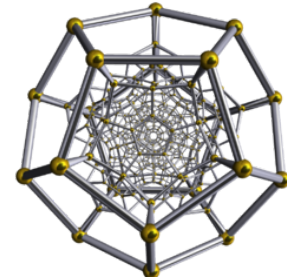


Figura 11: *120-cell*

i totes les permutacions parelles de

$$\begin{aligned} &(0, \pm \phi^{-2}, \pm 1, \pm \phi^2) \\ &(0, \pm \phi, \pm \phi^{-1}, \pm \sqrt{5}) \\ &(\pm \phi^{-1}, \pm 1, \pm \phi, \pm 2). \end{aligned}$$

Triangulem el *120-cell*. És suficient donar una triangulació de cada dodecaedre, de manera que quan dues cares pentagonals s'identifiquin, les triangulacions siguin compatibles. Per a cada dodecaedre, prenem el seu baricentre i fem un segment d'aquest a cada vèrtex del dodecaedre. Així, obtenim  $1 \times 12 = 12$  piràmides pentagonals. Ara, per a cada cara pentagonal del dodecaedre, prenem novament el baricentre i fem el segment d'aquest a cada vèrtex del pentàgon. Obtenim, així,  $12 \times 5 = 60$  tetraedres, que ens triangulen el dodecaedre que, a més, és compatible quan identifiquem els dodecaedres. Si considerem ara l'homeomorfisme

$$h: 120\text{-cell} \longrightarrow S^3 \\ x \longmapsto x/||x|| ,$$

obtenim  $120\text{-cell} \cong S^3$  i, sigui  $X$  la triangulació de *120-cell* recent feta, com, per  $h$ ,  $X \cong 120\text{-cell}$ ,  $X \cong S^3$  i, per tant  $X$  serà una triangulació de  $S^3$ .

Atès que el *120-cell* és el dual del *600-cell* i prenent els vèrtexs que hem pres, els baricentres de cada dodecaedre seran els icòsians unitaris; i el grup d'isometries del *600-cell* serà el mateix que el del *120-cell*. De manera que, com  $2\mathcal{I}$  és un subgrup del grup d'isometries del *600-cell*, també ho és del *120-cell*, doncs ens permutarà els dodecaedres. En particular,  $X$  (i per tant *120-cell*) són invariants per  $2\mathcal{I}$ .

Prenem ara el quocient

$$120\text{-cell}/_{2\mathcal{I}},$$

on  $[x] = [y]$ ,  $x, y \in 120\text{-cell}$  si i només si existeix  $h \in 2\mathcal{I}$  isometria amb  $h(x) = y$ . Ja que  $2\mathcal{I}$  és un grup amb la composició, és clar que tenim una relació d'equivalència.

En particular tots els baricentres dels dodecaedres s'identifiquen (ja que són exactament els elements de  $2\mathcal{I}$ ) i, per tant, el domini fonamental serà un dodecaedre. És a dir, si fixem un dodecaedre  $D$  del *120-cell*, aleshores per a tot  $x \in 120\text{-cell}$  existeix  $y \in D$  amb  $[x] = [y]$ . Així,

$$120\text{-cell}/_{2\mathcal{I}} \cong D/\sim$$

on  $\sim$  serà una certa relació de la vora de  $D$ . Per veure com és  $\sim$  fixem un dodecaedre del *120-cell*. Observem que, si fixem l'hiperplà  $x_4 = \sqrt{5}$ , com a vèrtexs del *120-cell* tenim

$$\left( \pm 1, \pm 1, \pm 1, \sqrt{5} \right)$$

i les permutacions parelles de

$$\left( 0, \pm \phi, \pm \phi^{-1}, \sqrt{5} \right)$$

que si ens fixem en les tres primeres coordenades són els vèrtexs del dodecaedre descrits en el Capítol 8. Així, si veiem com s'identifica una de les cares, ja ho tindrem. Prenem dos vèrtexs que ens ho compleixin, per exemple els vèrtexs  $(-1, -1, 1, \sqrt{5})$  i  $(-1, -1, -1, \sqrt{5})$ .

En el Capítol 6 hem vist que les rotacions de  $SO(4)$  venen donades per

$$\rho_{Z,1}: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \quad \rho_{1,Z}: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ Y \longmapsto ZY \quad Y \longmapsto YZ$$

per a alguna  $Z \in \mathbb{H}$ . Prenem una cara del dodecaedre, i veiem amb quina cara s'identifica i com. Considerem la cara formada per  $(-1, -1, 1, \sqrt{5})$ ,  $(0, -\phi, \phi^{-1}, \sqrt{5})$ ,  $(0, -\phi, -\phi^{-1}, \sqrt{5})$ ,  $(-1, -1, -1, \sqrt{5})$  i  $(-\phi, -\phi^{-1}, 0, \sqrt{5})$ . És suficient veure com amb quins vèrtexs dos que formin part d'aquesta cara, però no comparteixin aresta, i ja obtindrem amb quina cara s'identifica. Prenem l'icosian  $(1/2, 0, \phi/2, \phi^{-1}/2)$ , i el vèrtex  $(-1, -1, -1, \sqrt{5})$  i veiem com actua l'icosian sobre aquest vèrtex per l'esquerra, utilitzant les matrius del Capítol 6

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\phi & \phi^{-1} \\ 0 & 1 & \phi^{-1} & \phi \\ \phi & -\phi^{-1} & 1 & 0 \\ -\phi^{-1} & -\phi & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Així,  $[-1, -1, -1, \sqrt{5}] = [1, 1, -1, \sqrt{5}]$ . Prenem ara el vèrtex  $(-1, -1, 1, \sqrt{5})$ , i l'icosian  $(1/2, -\phi^{-1}/2, -\phi/2, 0)$  i veiem com actua per la dreta sobre el vèrtex

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \phi^{-1} & \phi & 0 \\ -\phi^{-1} & 1 & 0 & \phi \\ -\phi & 0 & 1 & -\phi^{-1} \\ 0 & -\phi & \phi^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \\ \phi^{-1} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

és a dir,  $[-1, -1, 1, \sqrt{5}] = [0, \phi, \phi^{-1}, \sqrt{5}]$ . Per tant, els demés vèrtexs de la cara queden

$$\begin{aligned} [0, -\phi, \phi^{-1}, \sqrt{5}] &= [1, 1, 1, \sqrt{5}] \\ [0, -\phi, -\phi^{-1}, \sqrt{5}] &= [\phi, \phi^{-1}, 0, \sqrt{5}] \\ [-\phi, -\phi^{-1}, 0, \sqrt{5}] &= [\phi, -\phi^{-1}, 0, \sqrt{5}] \end{aligned}$$

És a dir, tenim que  $\sim$  equival a identificar cares oposades amb una rotació de  $2\pi/10$ . Per tant,

$$120 - \text{cell}/_{2\mathcal{I}} \cong D/\sim.$$

Per últim, veiem que  $\mathcal{P}^3$  és triangulable.

**Teorema 9.7.** *Sigui  $K$  un complex simplicial,  $|K|$  la seva realització. Sigui  $G$  un grup d'aplicacions simplicials  $\varphi: |K| \rightarrow |K|$ , on  $\varphi$  és un homeomorfisme, aleshores  $|K|/G$  és un espai triangulable.*

*Demostració.* Sigui  $K/G$  el complex simplicial corresponent al poliedre abstracte tal que els seus vèrtexs són les òrbites de  $K$ , és a dir

$$\mathcal{V}_{K/G} = \{\varphi(v) \mid v \in \mathcal{V}_K, \varphi \in G\}.$$

Donat  $\{v'_0, \dots, v'_m\} \subseteq \mathcal{V}_{K/G}$ , aquest és un símplex de  $K/G$  si i només si existeixen  $v_0, \dots, v_m \in \mathcal{V}_K$  tals que  $\pi(v_i) = v'_i$ , per a cada  $0 \leq i \leq m$  i  $\Delta(v_0, \dots, v_m)$  és una cara de  $K$ .

Per definició, es té el següent diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} |K| & & \\ \downarrow \pi & \searrow \varphi & \\ |K|/G & \xrightarrow{\varphi'} & |K/G| \end{array}$$

on  $\varphi$  és una aplicació simplicial. Així, és suficient provar que  $\varphi'$  és un homeomorfisme, ja que aleshores ja haurem obtingut una triangulació.

Recordem que, si denotem per  $|sd(K)|$  a la subdivisió baricèntrica de  $K$ , tenim que  $|sd(K)| \cong |K|$ . Així, inductivament tindrem  $|sd^m(K)| \cong |K|$  i, per tant, és suficient provar que  $|sd^m(K)|$  és triangulable. Així, el diagrama anterior és equivalent a

$$\begin{array}{ccc} |sd^m K| & & \\ \downarrow \pi_m & \searrow \varphi_m & \\ |sd^m K|/G & \xrightarrow{\varphi'_m} & |sd^m K/G| \end{array}$$

per a tot  $m \geq 0$ . Per tant, si provem que  $\varphi'_2$  és un homeomorfisme ja ho tindrem. És clar que l'aplicació  $\varphi'_2$  és exhaustiva i, com és una aplicació entre espais compactes i Hausdorff, si veiem que és injectiva, podrem concloure que és un homeomorfisme. Observem que, dos vèrtexs d'un 1-símplex mai són equivalents i, que si  $\Delta(v_0, \dots, v_m, w)$ ,  $\Delta(v_0, \dots, v_m, w')$  són dos símplexs de  $sd^2 K$ , aleshores, si els vèrtexs  $w$  i  $w'$  són equivalents, existeix  $\psi \in G$  de manera que  $\psi(v_i) = v_i$ , per a tot  $0 \leq i \leq m$  i  $\psi(w) = w'$ . Per tant, és clar que  $\pi_2$  identifica els mateixos triangles que  $\varphi_2$ . És a dir,  $\varphi'_2$  és injectiva.  $\square$

Així, com  $120\text{-cell}$  és un complex simplicial i  $2\mathcal{I}$  és un grup d'homeomorfismes  $\psi: |120\text{-cell}| \rightarrow |120\text{-cell}|$ , aplicacions simplicials, obtenim que  $\mathcal{P}^3$  és triangulable.

## 9.4 Homologia de $\mathcal{P}^3$

Finalment, ara que ja tenim tota la teoria prèvia i ja que  $\mathcal{P}^3$  és triangulable, podem calcular la seva homologia. Com  $2\mathcal{I} \subseteq SO(4)$ , els determinants de les matrius de les rotacions de  $2\mathcal{I}$  són positius i, per tant la varietat diferenciable  $\mathcal{P}^3$  és orientable. A més, per la Proposició 7.19 tenim  $p: S^3 \rightarrow \mathcal{P}^3$  aplicació recubridora normal i, en particular, contínua. Llavors,  $\mathcal{P}^3$  és compacte i arc-connex, ja que  $S^3$  ho és. Per tant

$$H_0(\mathcal{P}^3) \cong 0, \quad H_3(\mathcal{P}^3) \cong \mathbb{Z}.$$

A més, novament per la Proposició 7.19,  $2\mathcal{I}$  serà el grup de transformacions recubridores de  $S^3$  respecte l'aplicació recubridora  $p$ . Així mateix, com  $S^3$  és simplement connex, aquest és un recubridor universal i, pel Teorema 7.17 tindrem que

$$\pi(\mathcal{P}^3) \cong \pi\left(S^3/2\mathcal{I}\right) \cong G_p(S^3) \cong 2\mathcal{I}.$$

Així, com  $2\mathcal{I}$  és un grup perfecte (Teorema 8.3),  $\pi(\mathcal{P}^3)_{ab} \cong 2\mathcal{I}_{ab} \cong Id$ . Aleshores,

$$H_1(\mathcal{P}^3) \cong 0.$$

Per últim, pel Teorema 9.4, el 2-èsim nombre de Betti serà 0, ja que  $b_2 = b_1$ , i  $H_1(\mathcal{P}^3) \cong 0$ . A més, combinant els teoremes 9.5 i 9.6 com ho hem fet prèviament,  $t_2 = t_{3-2-1} = t_0$  i, com  $H_0(\mathcal{P}^3)$  no té torsió,  $t_2 = 0$  i, per tant

$$H_2(\mathcal{P}^3) \cong 0.$$

En conclusió es té

$$H_p(\mathcal{P}^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, 3 \\ 0 & \text{si } p \neq 0, 3 \end{cases}$$

com volíem veure. A més, per la pròpia definició de la falsa esfera de Poincaré,

$$\pi(\mathcal{P}^3) \cong \pi\left(S^3/2\mathcal{I}\right) \cong 2\mathcal{I} \not\cong 0$$

i, per tant,  $\mathcal{P}^3 \not\cong S^3$ , doncs  $\mathcal{P}^3 \not\cong S^3$ .

## 10 Conclusions

Fent servir eines de topologia i àlgebra, en aquesta memòria hem descrit una varietat topològica 3-dimensional, anomenada *Falsa esfera de Poincaré*, la qual ens demostra que la primera conjectura és falsa.

Una gran part dels coneixements bàsics usats han estat treballats en les assignatures de Topologia Algebraica, Estructures algebraiques i Topologia i Geometria de Corbes i Superfícies. Altres els hem anat aprenent i introduint al llarg del projecte. S'ha realitzat una recerca bibliogràfica prou àmplia, des de Poincaré fins llibres bastant moderns.

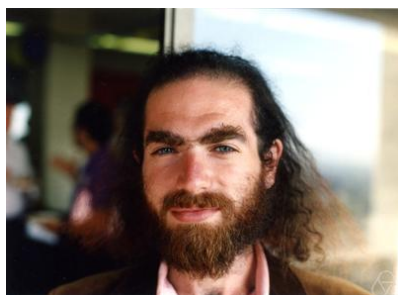
En tant que al desenvolupament històric de la conjectura, al 1904, a la *Cinquième complément à l'Analysis Situs* Poincaré construeix aquesta varietat. En la introducció d'aquesta publicació proposa si és suficient afegir la hipòtesis de tenir també el mateix grup fonamental que la  $S^n$  per a que sigui cert.

No és fins a la dècada del 1930 que *J.H.C Whitehead* reprèn el problema, tot i que no en troba cap demostració. Entre el 1950 i 1970 diversos matemàtics rellevants, com *Bing, Haken, Moise* i d'altres van intentar provar-la. Al 1958 *Bing* demostra una versió més feble de la conjectura de Poincaré: si tota corba simple i tancada d'una 3-varietat topològica compacte està inscrita en  $B^3$ , aleshores aquesta varietat és homeomorfa a l'esfera  $S^3$ .

Al 1961 *Stephen Smale*, matemàtic americà, demostra la conjectura per a  $n \geq 5$  i al 1983 *Michael Freedman* prova que és cert per a  $n = 4$ .

Al 2000, el *Clay Mathematics Institute* proposa 7 problemes, anomenats *Problemes del Mil·lenni*, i entre ells es troba la Conjectura de Poincaré, posteriorment anomenada *Teorema de Perelman*.

**Teorema.** *Sigui  $X$  una varietat topològica 3-dimensional simplement connexa, aleshores  $X \cong S^3$ .*



Grigori Perelman

Al 2002, *Grigori Perelman* (nascut a Rússia, 1966) demostra el cas  $n = 3$  i, al 2006 es considera vàlida aquesta demostració.

Perelman va demostrar la Conjectura de Poincaré demostrant un resultat encara més fort, la conjectura de geometrització de *Thurston*. La rellevància de la conjectura no només és les aplicacions d'aquesta (classificació de 3-varietats topològiques), sinó les eines que desenvolupa al llarg de la demostració, desenvolupament del *Ricci flows*.

## Referències

- [1] Adem, A., Milgram, R.J.: *Cohomology of finite groups*, Springer-Verlag, 1991.
- [2] Conway, J.H.: *On quaternions and octonions*, CRC Press, 2003.
- [3] Coxeter, H.S.M., *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer Verlag, 1957.
- [4] Coxeter, H.S.M., *Regular Polytopes*, Courier Corporation, 1973.
- [5] Hall, B.C.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction*, Board, 2003.
- [6] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 13a edició, 2001.
- [7] Kirby, R.C., Scharlemann M.G., *Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere*, <http://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/kirbysch.pdf>, 1979.
- [8] Lee, J.M.: *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, 2a edició, 2011.
- [9] Navarro, V.: *Topologia Algebraica*, Col·lecció UB, No 34, Barcelona, 1999.
- [10] O'Shea, D., *The Poincaré Conjecture, in search of the shape of the Universe*, Walker and Company New York, 2007.