



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Trabajo final del  
**GRADO DE MATEMÁTICAS**  
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

---

**Contribuciones al problema  
grado/diámetro para grafos  
mezclados de Cayley abelianos**

---

**Jesús Miguel Ceresuela Torres**

**Tutor: Dr. Antoni Benseny**  
**Realizado en: Dept. de Matemàtiques i Informàtica**

**Tutor externo: Dr. Nacho López**  
**Realizado en: Dept. de Matemàtiques, UdL**

**Barcelona, 27 de junio de 2018**

## **Abstract**

This project has got two main objectives. The first one is to give a general idea of the degree/diameter problem, especially for mixed proper graphs, to be useful as a simple but complete introduction to whomever wants to work on it. The second goal is to solve, or at least make an improvement, on two particular cases for proper mixed Cayley abelian graphs.

## **Resumen**

El objetivo de este trabajo es doble. Por un lado, proporcionar una idea general del problema grado/diámetro, especialmente para grafos mezclados, que sirva de introducción sencilla pero completa a quien quiera trabajarlo. Por otro lado, aportar la resolución, o al menos algún avance, en dos casos muy particulares dentro de los grafos mezclados de Cayley abelianos.

## Agradecimientos

Primero, lo primero. Es preciso comenzar dándole las gracias al director de este trabajo, dr. Nacho López, tanto por su constante dedicación y atención a mis preguntas y peticiones como por haberme sabido transmitir su pasión por la matemática discreta. Ambas han sido imprescindibles para convertir el desarrollo de este trabajo en un ejercicio riguroso del que poder disfrutar. Gracias a la UdL, por facilitarme acceso a su computadora, Turing. Gracias también a mi tutor en la UB, dr. Antoni Benseny, por su tiempo dedicado a hacer que el convenio de colaboración del que nace este proyecto fuera posible, y por sus correcciones, consejos y ayuda.

Gracias también a todos quienes habéis propiciado que esté hoy redactando este trabajo. Empezando por mi familia. Gracias a mis padres y a mi hermano, por su paciencia, generosidad y comprensión. A mi tío, mis tías y primas, y especialmente a mis abuelos Asunción y Amado, a quienes quiero dedicar este trabajo, por ser caja de resonancia de alegrías y mitigadores de penas. Gracias a mis compañeros y amigos, gracias Alejandro, gracias Jaime, gracias Víctor, porque con vosotros cerca, la carrera ha tenido más de agradable paseo que de carrera. Y a ti, Cristina, gracias por creer siempre en mí, por apoyarme y por todo el cariño que hemos compartido a lo corto de estos años.

Y gracias a ti, lector. Espero que después de tan jabonosos halagos encuentres una obra cuya lectura te haga disfrutar tanto como a mi su desarrollo.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares sobre Teoría de Grafos</b>	<b>2</b>
2.1. Grafos no dirigidos . . . . .	2
2.2. Grafos dirigidos . . . . .	3
2.3. Grafos mezclados . . . . .	5
2.4. Isomorfismo de grafos . . . . .	6
2.5. Grafos de Cayley . . . . .	7
<b>3. El problema grado/diámetro</b>	<b>10</b>
3.1. Presentación . . . . .	10
3.2. Grafos no dirigidos . . . . .	11
3.2.1. Cota de Moore . . . . .	11
3.2.2. Grafos de Moore . . . . .	12
3.3. Grafos dirigidos . . . . .	13
3.3.1. Cota de Moore . . . . .	13
3.3.2. Grafos dirigidos de Moore . . . . .	13
3.4. Grafos mezclados . . . . .	13
3.4.1. Cota de Moore . . . . .	14
3.4.2. Grafos mezclados de Moore . . . . .	16
<b>4. Contribuciones</b>	<b>20</b>
4.1. Caso $r = 1, z = 1$ . . . . .	20
4.2. Caso $r = 1, z = 2$ . . . . .	25
<b>5. Conclusiones</b>	<b>32</b>

# 1. Introducción

## El proyecto

Todo este proyecto gira entorno al problema grado/diámetro, iniciado en 1960 por Hoffman y Singleton [1]. Este problema ha sido muy estudiado, especialmente para grafos y grafos dirigidos. El problema grado/diámetro para grafos mezclados, sin embargo, tardó casi 20 años más en abordarse y todavía hoy sigue entrañando muchos cabos sueltos que amarrar.

Este es uno de los típicos problemas de teoría de grafos que, pese a tener un enunciado sencillo de comprender y aparentemente inocente, resulta tremendamente complejo de resolver. Para acotar y facilitar el trabajo, estudiaremos el problema en grafos mezclados de tipo Cayley. Estos grafos se distinguen por estar asociados a grupos. Para facilitarlos un poco más, sólo consideraremos los grafos de Cayley asociados a grupos abelianos finitos. Puede parecer que con estas restricciones el problema debiera ser muy sencillo de resolver... pero no me quiero adelantar. Que cada uno saque sus propias conclusiones tras leer por completo este proyecto.

El hecho de trabajar con grafos mezclados de Cayley permitirá enriquecer matemáticamente este trabajo, puesto que no sólo haremos uso de la teoría de grafos, sino que la entrelazaremos con el álgebra y la teoría de grupos, que aportarán su belleza característica.

## Estructura de la Memoria

La memoria está estructurada en tres secciones. En la primera aportamos todas las definiciones necesarias en lo que a grafos, grafos dirigidos y grafos mezclados se refiere, especialmente las definiciones clave para este trabajo, que son las de grado y diámetro. También introducimos los grafos de Cayley.

La segunda está dedicada al problema grado/diámetro. Comenzamos mostrando los distintos enunciados del problema para cada tipo de grafo. En cada caso, introducimos el concepto de *cota de Moore* y *grafo de Moore*, calculamos la cota y recogemos los principales resultados referentes a los grafos de Moore. En el caso mezclado, nos extendemos un poco más, haciendo un repaso histórico de los resultados referentes a los grafos mezclados de Moore.

Por último, la sección que da título a nuestro trabajo. Aportamos nuestras contribuciones al problema en dos casos particulares. Es importante remarcar que esta parte no procede de ningún tipo de bibliografía. Es original y la mayoría de proposiciones y demostraciones han ido surgiendo según se ha ido trabajando en el tema.

## 2. Preliminares sobre Teoría de Grafos

### 2.1. Grafos no dirigidos

**Definición 1.** Un grafo no dirigido (o grafo)  $G = (V, A)$  está formado por un conjunto no vacío  $V$  y por un conjunto  $A$  de pares no ordenados de elementos diferentes de  $V$ .

Los elementos de  $V$  se denominan vértices y los elementos de  $A$  aristas. Si  $a = \{u, v\}$  es una arista, se dice que  $u$  y  $v$  son vértices adyacentes ( $u \sim v$ ), y también que la arista  $a$  es incidente en los vértices  $u$  y  $v$ . Normalmente, para aliviar la notación escribiremos  $a = uv$  en lugar de  $a = \{u, v\}$ .

Tomaremos por ejemplo el siguiente grafo  $G = (V, A)$ , formado por los conjuntos  $V = \{a, b, c, d\}$  y  $A = \{ac, bc, cd\}$ . Una buena forma de representarlo es la siguiente

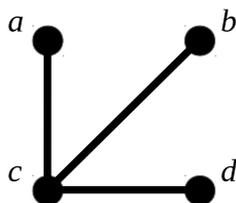


Figura 1: Grafo de ejemplo

**Definición 2.** El orden de un grafo  $G = (V, A)$  es el número de vértices de  $G$ , es decir, el cardinal de  $V$ , que denotaremos por  $|V|$ ; y la medida de  $G$  es el número de aristas de  $G$ , o sea,  $|A|$ .

**Definición 3.** El grado de un vértice  $v$  en un grafo  $G = (V, A)$ , que denotaremos por  $g(v)$ , es el número de aristas de  $G$  incidentes en  $v$ .

En nuestro ejemplo, el orden de  $G = (V, A)$  es 4, la medida es 3, y los grados de cada vértice  $g(a) = g(b) = g(d) = 1$  y  $g(c) = 3$ .

**Definición 4.** Un grafo  $G = (V, A)$  es  $d$ -regular si todos los vértices de  $G$  tienen grado  $d$ .

**Definición 5.** Un  $u - v$  recorrido ( $u - v$  walk) de longitud  $l$  del grafo  $G$  es una secuencia de vértices  $u_0 u_1 \dots u_{l-1} u_l$ , con  $u_0 = u$ ,  $u_l = v$  y  $u_{i-1} u_i \in A$  con  $i = 1, 2, \dots, l$ , es decir, cada par de vértices consecutivos son adyacentes. Si  $u = v$  diremos que es un recorrido cerrado y si  $u \neq v$  diremos que es un recorrido abierto.

**Definición 6.** Un sendero (trail) es un recorrido en que no se repiten las aristas. Un camino (path) es un recorrido en que no se repiten los vértices.

Un vértice  $v$  se considera un camino de longitud 0, que llamamos camino trivial. Se observa que todo camino es un sendero.

**Definición 7.** *Un circuito es un sendero cerrado no trivial. Un ciclo es un circuito  $v_1v_2 \dots v_l v_1$  que tiene los  $l$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_l$  diferentes.*

**Definición 8.** *Un grafo  $G = (V, A)$  es conexo si, para cada par de vértices  $u$  y  $v$  de  $G$ , existe un  $u - v$  camino.*

Siguiendo con el grafo de la figura 1,  $acd$  sería un  $a - d$  recorrido de longitud 2, y sería también sendero y camino. Sin embargo,  $acbcd$  sería un  $a - d$  recorrido de longitud 4, pero no sería sendero ni camino. Por último, observamos que se trata de un grafo conexo. A partir de ahora sea  $G = (V, A)$  un grafo conexo.

**Definición 9.** *La distancia entre dos vértices  $u$  y  $v$  de  $G$ , que escribiremos como  $d(u, v)$ , es la mínima de las longitudes de los  $u - v$  caminos de  $G$ .*

**Observación 1.** Esta distancia es una métrica en el conjunto de vértices  $V$  ya que satisface las propiedades siguientes. Para todos  $u, v, w \in V$ :

1.  $d(u, v) \geq 0$  y  $d(u, v) = 0$  si, y sólo si  $u = v$ .
2.  $d(u, v) = d(v, u)$
3.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$  (desigualdad triangular).

**Definición 10.** *El diámetro de un grafo  $G = (V, A)$ , que notamos como  $D(G)$ , es la máxima de las distancias entre vértices de  $G$ , es decir*

$$D(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

En el grafo de la figura 1, las distancias entre vértices las representamos en la siguiente tabla:

-	a	b	c	d
a	0	2	1	2
b	2	0	1	2
c	1	1	0	1
d	2	2	1	0

Tabla 1: Distancia entre vértices

Como el diámetro corresponde al máximo de todas ellas, tenemos  $D(G) = 2$ .

## 2.2. Grafos dirigidos

**Definición 11.** *Un grafo dirigido (o digrafo)  $G = (V, A)$  está formado por un conjunto finito y no vacío  $V$  y por un conjunto  $A$  de pares ordenados de elementos diferentes de  $V$ .*

Los elementos de  $V$  se llaman vértices y los de  $A$ , arcos. Si  $a = (u, v)$  es un arco, se dice que  $u$  es adyacente hacia  $v$  y que  $v$  es adyacente desde  $u$ . También se dice que el arco  $a = (u, v)$  es incidente desde  $u$  hacia  $v$ . Normalmente, para aliviar la notación, escribimos  $a = uv$  en vez de  $a = (u, v)$ .

Los conceptos de orden y medida de un grafo dirigido son análogos a los de un grafo, es decir, el orden del grafo dirigido  $G = (V, A)$  es el número de vértices de  $V$  y la medida de  $G$  es el número de arcos de  $G$ , o sea,  $|A|$ .

Tomaremos por ejemplo el siguiente grafo dirigido  $G = (V, A)$ , formado por los conjuntos  $V = \{a, b, c, d\}$  y  $A = \{ab, bc, bd, cd, da\}$ . Una buena forma de representarlo es la siguiente

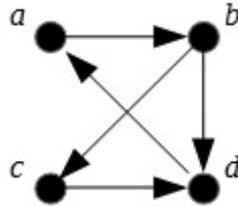


Figura 2: Digrafo de ejemplo

Se trata de un digrafo de orden 4 y medida 5.

**Definición 12.** Si  $v$  es un vértice de un grafo dirigido  $G = (V, A)$ , el grado de salida de  $v$ , que indicaremos como  $g^+(v)$ , es el número de arcos incidentes desde  $v$ , es decir

$$g^+(v) = |\{u \in V \mid (v, u) \in A\}|.$$

Respectivamente, definimos el grado de entrada de  $v$ , que indicamos como  $g^-(v)$ , que representa el número de arcos incidentes hacia  $v$ , es decir

$$g^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in A\}|.$$

En nuestro ejemplo, los vértices tienen los siguientes grados de entrada y salida:

-	a	b	c	d
$g^+$	1	2	1	1
$g^-$	1	1	1	2

Tabla 2: Grados dirigidos de cada vértice

Los conceptos de recorrido y los diferentes tipos de recorridos estudiados para grafos se extienden de forma natural a los grafos dirigidos. Así pues, si  $u$  y  $v$  son dos vértices de un grafo dirigido  $G = (V, A)$ , entonces un  $u - v$  recorrido de longitud  $l$  de  $G$  es una secuencia de vértices  $u_0 u_1 \dots u_{l-1} u_l$  con  $u_0 = u$ ,  $u_l = v$  y tal que  $(u_{i-1}, u_i) \in A$  para  $i = 1, 2, \dots, l$ .

En cuanto a la conexión, distinguimos tres tipos de conexiones para grafos dirigidos. Para nuestros propósitos nos bastará el concepto de *conexión fuerte* que nos asegura poder ir de un vértice a otro cualquiera.

**Definición 13.** *Un grafo dirigido  $G = (V, A)$  es fuertemente conexo si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $G$  existe un  $u - v$  camino.*

La distancia entre dos vértices para grafos dirigidos fuertemente conexos se definirá de forma análoga a la de grafos no dirigidos, es decir, la mínima de las longitudes de los caminos que unen ambos vértices.

**Observación 2.** Esta distancia no es una métrica en el conjunto de vértices  $V$  ya que no satisface, en general, la propiedad simétrica.

El hecho de que la distancia para grafos dirigidos no constituya una métrica no impide definir el concepto de diámetro.

**Definición 14.** *El diámetro de un grafo dirigido  $G = (V, A)$ , que notamos como  $D(G)$ , es la máxima de las distancias entre vértices de  $G$ , es decir*

$$D(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}$$

Volviendo al digrafo de la figura 2, tenemos que  $abd$  y  $abcd$  son dos  $a-d$  recorridos que además son senderos y caminos. El digrafo es fuertemente conexo. Vamos a ver las distancias entre vértices. Obsérvese que en este caso no dará lugar a una matriz simétrica (recordemos que esta distancia no es métrica).

-	a	b	c	d
a	0	1	2	2
b	2	0	1	1
c	2	3	0	1
d	1	2	3	0

Tabla 3: Distancia entre vértices

En consecuencia, el diámetro del digrafo de la figura 2 es  $D(G) = 3$ .

### 2.3. Grafos mezclados

Hasta ahora hemos tratado grafos y grafos dirigidos, los primeros unen vértices mediante aristas y los segundos mediante arcos. En lo sucesivo consideraremos grafos que contengan aristas y arcos, y los llamaremos grafos mezclados. Veremos que los grafos mezclados se pueden ver como una reinterpretación de los grafos dirigidos.

**Definición 15.** *Un grafo dirigido  $G = (V, A)$  es un grafo mezclado cuando  $A$  está formado por la unión disjunta de dos conjuntos  $C$  y  $D$  tales que*

- $C$  contiene parejas de arcos de la forma  $(u \rightarrow v, v \rightarrow u)$  que equivalen a aristas entre vértices  $u, v \in V$ .

- $D$  contiene arcos  $u \rightarrow v$  tales que  $(v \rightarrow u) \notin A$ , con  $u, v \in V$ .

**Observación 3.** Si el conjunto  $C$  es vacío tenemos un grafo dirigido. Si el conjunto  $D$  es vacío, equivale a un grafo no dirigido. Cuando ninguno de los dos conjuntos es vacío, tenemos lo que se conoce como un grafo mezclado propio. De ahora en adelante, cuando hablemos de grafos mezclados nos referiremos a grafos mezclados propios, para saber con seguridad que tratamos con arcos y aristas.

Tomaremos por ejemplo el siguiente grafo mezclado  $G = (V, A)$ , formado por los conjuntos  $V = \{a, b, c, d\}$  y  $A = C \cup D$  con  $C = \{ad, bc\}$  y  $D = \{ab, bd, dc, ca\}$ . Una buena forma de representarlo es la siguiente:

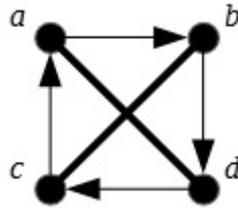


Figura 3: Grafo mezclado de ejemplo

El hecho de que un grafo mezclado sea un grafo dirigido hace que todas las definiciones para grafos dirigidos tales como longitudes, caminos, distancias, diámetros, etc... se mantengan para grafos mezclados. Para el grafo mezclado de la figura 3 el orden es 4, la medida es 6 (2 aristas y 4 arcos).

-	a	b	c	d
$g$	1	1	1	1
$g^+$	1	1	1	1
$g^-$	1	1	1	1

Tabla 4: Grados

-	a	b	c	d
a	0	1	2	1
b	2	0	1	1
c	1	1	0	2
d	1	2	1	0

Tabla 5: Distancias

Observamos que este grafo mezclado es 1-regular, tanto en grado como en grado dirigido de entrada y de salida. El diámetro del grafo es  $D(G) = 2$

## 2.4. Isomorfismo de grafos

**Definición 16.** Sean  $G = (V, A)$  y  $H = (W, B)$  dos grafos (resp. digrafos). Decimos que  $G$  y  $H$  son isomorfos cuando existe una aplicación biyectiva  $\phi : V \rightarrow W$  tal que  $(u, v) \in A$  si, y sólo si  $(\phi(u), \phi(v)) \in B$  con  $u, v \in V$ . Decimos que la biyección  $\phi$  es un isomorfismo de grafos (resp. digrafos).

Recordemos que en grafos mezclados consideramos las aristas como arcos que van y vuelven.

**Definición 17.** Si  $G = (V, A)$  y  $H = (W, B)$  son grafos mezclados decimos que son isomorfos cuando existe una aplicación biyectiva  $\phi : V \rightarrow W$  tal que dos vértices  $u, v \in V$  están unidos por una arista si, y sólo si  $\phi(u)\phi(v) \in B$  están unidos por una arista y dos vértices  $w, x \in V$  están unidos por un arco incidente hacia  $x$  si, y sólo si  $\phi(w)\phi(x) \in B$  están unidos por un arco incidente hacia  $\phi(x)$ .

**Ejemplo 1.** Los grafos mezclados de la figura 4 son isomorfos mediante la biyección  $\phi$  definida de tal forma que  $\phi(a) = z$ ,  $\phi(b) = x$ ,  $\phi(c) = t$ ,  $\phi(d) = y$ .

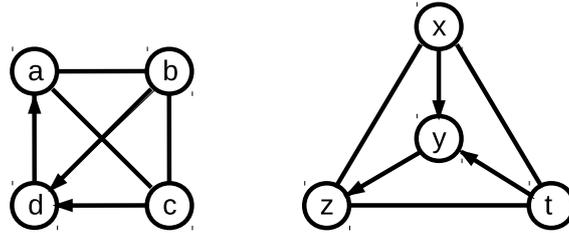


Figura 4: Grafos mezclados isomorfos

## 2.5. Grafos de Cayley

Vamos a presentar ahora el tipo de grafos que será objeto de estudio de este trabajo: los grafos de tipo Cayley.

**Definición 18.** Dado un grupo  $G$  y  $S$  un subconjunto de  $G$ , se define el grafo de Cayley por la derecha (resp. por la izquierda) y lo notamos por  $Cay_d(G, S)$  (resp.  $Cay_i(G, S)$ ) de la siguiente forma

- Los vértices del grafo  $Cay_d(G, S)$  (resp.  $Cay_i(G, S)$ ) son los elementos del grupo  $G$ .
- El par ordenado  $(g, h)$  es un arco de  $Cay(G, S)$  si existe  $s \in S$  tal que  $gs = h$  (resp.  $sg = h$ ).

Si  $G$  es abeliano entonces  $Cay_d(G, S) = Cay_i(G, S) = Cay(G, S)$  y hablamos simplemente de grafo de Cayley.

En definitiva,  $Cay(G, S)$  es un grafo con tantos vértices como elementos de  $G$  unidos entre sí por arcos y aristas que representan la acción de  $S$  sobre  $G$ . En general, dado  $G$  un grupo abeliano finito y  $S$  un subconjunto de  $G$ ,  $Cay(G, S)$  será un grafo dirigido, pero dependiendo del subconjunto  $S$  que escojamos, el grafo podrá ser también no dirigido o mezclados.

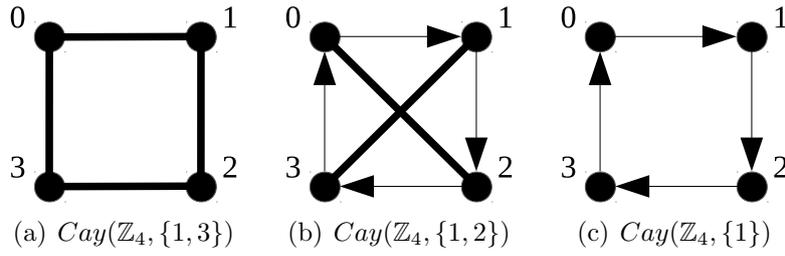


Figura 5: Ejemplos de grafos de Cayley

**Proposición 1.** Sea  $G$  grupo abeliano finito y  $S$  un subconjunto de  $G$ . Para que el grafo  $Cay(G, S)$  contenga aristas es necesario que  $S$  contenga un elemento y su inverso.

*Demostración.* Si  $g, g^{-1} \in S$  entonces, dado un elemento  $h \in G$  tendremos un arco que una  $h \rightarrow gh$  y otro que una  $gh \rightarrow g^{-1}gh = h$ , dando lugar a una arista.  $\square$

**Observación 4.** Este es el caso de la figura 5(a), puesto que el 1 y el 3 son inversos en  $\mathbb{Z}_4$ .

**Observación 5.** Si  $i \in S$  una involución ( $i^2 = Id$ ), entonces  $Cay(G, S)$  tendrá aristas, puesto que  $i$  es su propio inverso. En concreto,  $i$  unirá los pares  $(g, ig)$  mediante aristas para todo  $g \in G$ . Es el caso de la figura 5(b), puesto que el 2 es la única involución de  $\mathbb{Z}_4$ .

**Proposición 2.** Los grafos de Cayley son regulares.

*Demostración.* Sea  $G$  grupo no necesariamente abeliano de orden  $n$  y  $S$  un subconjunto con  $k$  elementos  $\{s_1, \dots, s_k\}$  distintos. Para esta demostración consideraremos  $Cay(G, S)$  como si fuera un digrafo, entendiendo que los arcos que van y vuelven entre dos vértices formarán arista. Así pues, es inmediato que el grado de salida será el mismo ( $k$ ) en todo vértice  $g \in G$ , pues al actuar  $S$  sobre  $g$  se tendrán los arcos  $g \rightarrow gs_1, \dots, g \rightarrow gs_k$ . Que los  $s_i$  sean distintos entre sí implica que los  $s_i^{-1}$  también lo sean. Así pues, el grado de entrada será  $k$ , puesto que los  $k$  vértices distintos  $\{gs_1^{-1}, \dots, gs_k^{-1}\}$  inciden en  $g$  cuando actúa  $s_i$  sobre  $gs_i^{-1}$ , y de hecho, éstos son los únicos que inciden en  $g$ .  $\square$

**Proposición 3.** Los grafos de Cayley son vértice-transitivos.

Encontramos la demostración en [2]. Esta propiedad nos permite construir grafos de Cayley de tal forma que se evidencie la relación entre éstos y los grupos y subconjuntos que los generan. La vértice-transitividad nos asegura que el grafo es el mismo visto desde cualquiera de los vértices, por lo tanto, una forma de generar el grafo de Cayley  $Cay(G, S)$  será partir de un vértice cualquiera, e ir realizando la acción de  $S$  sobre cada uno de los vértices de  $G$  tal como mostramos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.** Vamos a construir el grafo  $Cay(\mathbb{Z}_4, \{1, 2\})$  (figura 5(b)).

1. Partimos de la identidad (en nuestra notación el 0) y le aplicamos la acción del 1 y el 2, y trazamos un arco entre los pares  $(0, 1)$  y  $(0, 2)$
2. Aplicamos la acción del 1 y el 2 sobre el 1, obteniendo los arcos  $(1, 2)$  y  $(1, 3)$
3. Aplicamos la acción del 1 y el 2 sobre el 2, obteniendo los arcos  $(2, 3)$  y  $(2, 0)$ . Atención, al tener los arcos  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$  ponemos una arista entre ambos vértices.
4. Aplicamos la acción del 1 y el 2 sobre el 3, obteniendo los arcos  $(3, 0)$  y  $(3, 1)$ . Igualmente colocamos una arista entre los vértices 1 y 3.

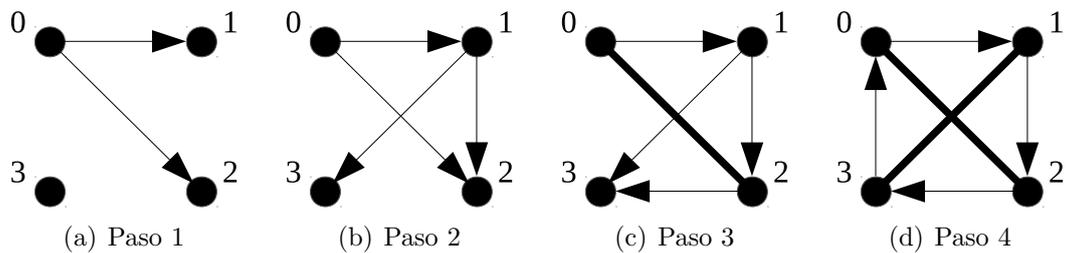


Figura 6: Proceso de construcción de  $Cay(\mathbb{Z}_4, \{1, 2\})$

Conviene observar que al considerar la acción del 2 sobre cualquier vértice, se podría haber trazado la arista directamente, sin esperar a obtener el arco en dirección contraria, puesto que el 2 es la involución de  $\mathbb{Z}_4$ .

## 3. El problema grado/diámetro

### 3.1. Presentación

Comenzamos presentando el problema del grado/diámetro en sus distintas versiones dependiendo del tipo de grafo al que se aplica:

- Grafos no dirigidos: fijados  $r$  y  $k$  números naturales, hallar el grafo con mayor número de vértices que tiene grado máximo  $r$  y diámetro menor o igual que  $k$ .
- Grafos dirigidos: fijados  $z$  y  $k$  números naturales, hallar el digrafo con mayor número de vértices que tiene grado máximo de salida  $z$  y diámetro menor o igual que  $k$ .
- Grafos mezclados: fijados  $r$ ,  $z$  y  $k$  números naturales, hallar el grafo mezclado con mayor número de vértices que tiene grado no dirigido máximo  $r$ , grado de salida máximo  $z$  y diámetro menor o igual que  $k$ .

Parece natural plantearse si este problema se puede trasladar a la vida real, o si se trata únicamente de una fuente de placer reservada a los matemáticos amantes de la teoría. El hecho es que si pensamos en una red, por ejemplo, de telecomunicaciones, ésta puede describirse mediante un grafo. Será un grafo, un digrafo o un grafo mezclado dependiendo de si la comunicación se establece de forma unidireccional, bidireccional o ambas al mismo tiempo. Los vértices representan los nodos de la red, y los arcos y las aristas representan las conexiones entre nodos. Pongamos que se trata de una red de ordenadores. Supongamos fijados un número máximo de conexiones por ordenador (grado), y el número máximo de conexiones que puede atravesar una señal para comunicar dos ordenadores (diámetro). Pues bien, el problema grado/diámetro pretende encontrar respuesta a la pregunta: ¿Cuántos ordenadores puedo conectar como máximo a esta red, de tal forma que estén todos comunicados?

**Definición 19.** *Un grafo (no dirigido, dirigido o mezclado) que resuelve el problema del grado/diámetro se dice que es un grafo óptimo.*

Dado que nuestro propósito es hallar grafos con el mayor número de vértices posible, una buena forma de empezar es dar una cota superior que nos permita tener una referencia en nuestra búsqueda. Esta cota se conoce como cota de Moore. Las cotas que obtenemos son distintas para grafos, digrafos y grafos mezclados, pero la forma de obtenerlas es similar.

Para calcular la cota de Moore, la idea es construir un grafo de tal forma que cada vértice tenga el grado máximo permitido, y que cada una de sus conexiones vaya a parar a un vértice distinto. La mejor forma de construir este grafo es la siguiente: Partimos de un vértice al que llamaremos origen, e imponemos que salgan de él el mayor número de aristas/arcos (o ambos, según el caso) y que cada una/o incida sobre un nuevo vértice. Todos éstos estarán a distancia 1 del origen. Con cada

uno de estos nuevos vértices repetimos el procedimiento aplicado anteriormente, y obtenemos un conjunto de vértices a distancia 2 del origen unidos a los de distancia 1 por una sola arista/arco. Repetimos el procedimiento hasta hallar los vértices situados a distancia  $k$ . A este grafo (no dirigido, dirigido o mezclado) lo llamamos *árbol generador*. La cota de Moore será el orden de este árbol.

**Definición 20.** *Los grafos en las condiciones del problema grado/diámetro que tengan orden la cota de Moore se conocen como grafos de Moore.*

Es evidente que los grafos de Moore solucionan el problema del grado diámetro, es decir, son óptimos. Sin embargo, el recíproco no es cierto, puesto que no para todos los valores de  $r$ ,  $z$ , y  $k$  existen grafos de Moore. Es por eso que, pese a que los grafos de Moore ocupan un papel principal en el problema, éste va más allá. Cuando no exista un grafo, habiendo fijado el grado y el diámetro, que cumpla la cota de Moore, se deberá seguir buscando un grafo óptimo con un número de vértices inferior.

Para grafos no dirigidos y digrafos, calcularemos la cota de Moore y presentaremos la caracterización de grafos/digrafos de Moore, puesto que es un problema (casi) cerrado. En cuanto a los grafos mezclados, por ser el objeto de nuestro trabajo, calcularemos la cota de Moore, daremos un repaso histórico de los resultados más importantes en grafos mezclados de Moore y hablaremos de la restricción al caso Cayley Abeliano, la verdadera esencia de este trabajo.

## 3.2. Grafos no dirigidos

Conviene recordar que los valores aquí fijados son el grado  $r$  y el diámetro  $k$ .

### 3.2.1. Cota de Moore

Partimos de un vértice cualquiera, al que llamaremos vértice origen, y trazamos  $r$  aristas que nos llevan a  $r$  vértices a distancia 1. De cada uno de los vértices a distancia 1 trazamos  $r - 1$  aristas que nos conducen a un total de  $r(r - 1)$  vértices a distancia 2. Iteramos hasta obtener los vértices correspondientes a distancia  $k$  (en lo sucesivo  $\Gamma(k)$ ) del origen. Es fácil de ver que  $\Gamma(d) = r(r - 1)^{d-1}$  si  $d \geq 2$ , y que  $\Gamma(0) = 1$  y  $\Gamma(1) = r$ . El número total de vértices del grafo se obtiene a partir de la suma siguiente:

$$\sum_{i=0}^k \Gamma(i) = 1 + r + r(r - 1) + \cdots + r(r - 1)^{k-1}. \quad (3.1)$$

Apreciamos que se puede expresar de forma que contenga una serie geométrica de razón  $k - 1$ . Por tanto, si  $r > 2$

$$M_{r,k} = 1 + r(1 + (r - 1) + \cdots + (r - 1)^{k-1}) = 1 + r \frac{(r - 1)^k - 1}{k - 2}, \quad (3.2)$$

mientras que, si  $r = 2$ , se obtiene de (3.1) que  $M_{2,k} = 2k + 1$ . Escribimos  $M_{r,k}$  para designar la cota de Moore fijados  $r$  y  $k$ . En resumen:

$$M_{r,k} = \begin{cases} 1 + r \frac{(r-1)^{k-1}}{k-2} & \text{if } r > 2 \\ 2k + 1 & \text{if } r = 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Es conveniente observar que el árbol generador solamente nos ofrece una cota superior de vértices para el problema grado/diámetro, pero no lo resuelve, puesto que tiene diámetro  $2k$ .

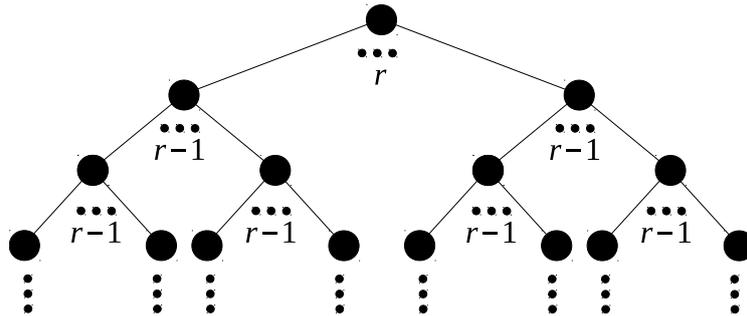


Figura 7: Árbol generador

### 3.2.2. Grafos de Moore

En la siguiente tabla recogemos los valores de  $r$  y  $k$  para los que existen grafos de Moore.

r	k	Grafo de Moore
$\geq 2$	1	Completo $K_{k+1}$
2	$\geq 2$	Ciclo $C_{2k+1}$
3	2	Petersen
7	2	Hoffman-Singleton
57	2	?

Tabla 6: Clasificación de los grafos de Moore

Los grafos completos, ciclos, etc... se pueden consultar en [3]. Todavía no se ha encontrado un grafo de Moore con  $k = 2$  y  $r = 57$ , pero se sabe que es aritméticamente posible que exista.

De todos modos, lo relevante de esta sección no son los grafos de Moore, puesto que sólo cierran una pequeña parte del problema grado/diámetro. La importancia recae sobre el hallazgo de una cota que nos da un valor máximo y finito del número de vértices que podemos esperar dados  $r$  y  $k$ .

### 3.3. Grafos dirigidos

Conviene recordar que los valores aquí fijados son el grado de salida  $z$  y el diámetro  $k$ .

#### 3.3.1. Cota de Moore

Partimos del vértice origen y trazamos  $z$  arcos que llevan a  $z$  vértices diferentes. De cada uno de estos vértices podemos trazar  $z$  arcos que nos lleven a otros  $z$  vértices distintos, que se encontrarán a distancia 2 del vértice origen... Iteraremos  $k-2$  veces más hasta obtener el árbol generador para digrafos. El número de vértices a distancia  $d$  es  $z^d$  y, por lo tanto, la cota de Moore para grafos dirigidos es de

$$\sum_{i=0}^k \Gamma(i) = 1 + z + z^2 + \dots + z^k = \frac{z^{k+1} - 1}{z - 1}$$

siempre y cuando  $z > 1$ . Si  $z = 1$  entonces se obtiene la suma

$$\sum_{i=0}^k \Gamma(i) = 1 + 1 + \dots + 1 = k + 1.$$

En resumen:

$$M_{z,k} = \begin{cases} \frac{z^{k+1}-1}{z-1} & \text{if } z > 1 \\ k + 1 & \text{if } z = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

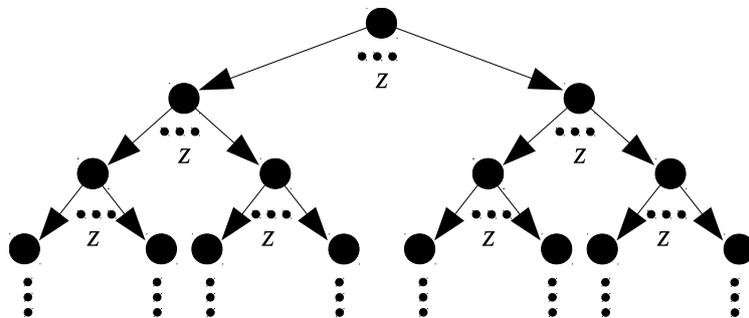


Figura 8: Árbol generador para digrafos

#### 3.3.2. Grafos dirigidos de Moore

En cuanto a la existencia de digrafos de Moore, solamente existen en los dos casos triviales:  $d = 1$  con cualquier  $k \geq 1$  (ciclos dirigidos  $C_{k+1}$ ) y  $k = 1$  con cualquier  $d \geq 1$  (grafos dirigidos completos  $K_{k+1}$ ).

### 3.4. Grafos mezclados

Conviene recordar que los valores aquí fijados son el grado no dirigido  $r$ , el grado de salida  $z$  y el diámetro  $k$ .

### 3.4.1. Cota de Moore

Trazamos nuestro grafo generador de forma análoga a los casos anteriores: Partimos de un vértice de origen y en este caso trazamos  $r$  aristas incidentes sobre  $r$  vértices distintos y  $z$  arcos incidentes sobre  $z$  vértices distintos. Aquí viene la peculiaridad: al volver a repetir el procedimiento debemos tener en cuenta que, si sobre el vértice ya incide una arista, podremos trazar  $r - 1$  aristas y  $z$  arcos de salida nuevos, mientras que si sobre él incide un arco podremos trazar  $r$  aristas y  $z$  arcos de salida (figura 9).

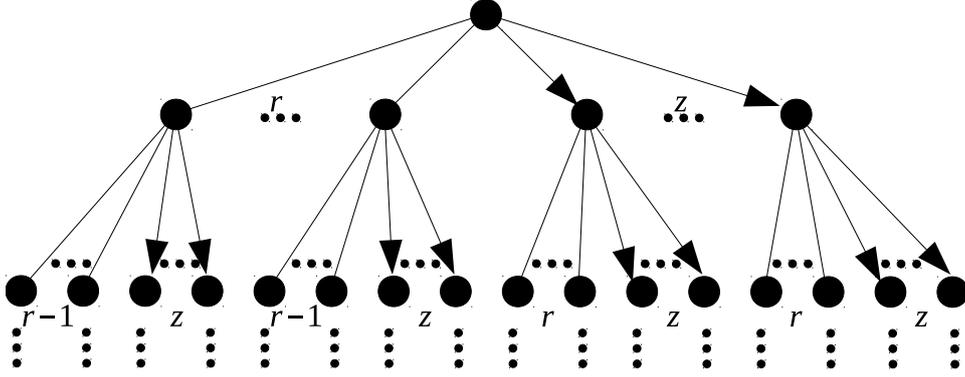


Figura 9: Árbol generador para grafos mezclados

Deducir la cota de Moore en este caso no nos va a resultar tan sencillo como en los casos anteriores. Llamaremos  $R_i$  al número de vértices a distancia  $i$  que ‘cuelgan’ de una arista, y  $Z_i$  al número de vértices que ‘cuelgan’ de un arco. Recordemos que llamábamos  $\Gamma(i)$  al conjunto de vértices a distancia  $i$ , así pues  $\Gamma(i) = R_i + Z_i$ .  $R_i$  y  $Z_i$  cumplen las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$R_i = R_{i-1}(r - 1) + Z_{i-1}r \quad (3.5)$$

$$Z_i = R_{i-1}z + Z_{i-1}z. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) indica que hay que contar  $r - 1$  aristas por cada vértice que cuelga de arista a distancia  $i - 1$  y  $r$  aristas por cada una que cuelga de arco a distancia  $i - 1$ . Si sumamos (3.5) y (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(i) = R_i + Z_i &= (R_{i-1} + Z_{i-1})r - R_{i-1} + (R_{i-1} + Z_{i-1})z \\ &= \Gamma(i - 1)(r + z) - R_{i-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vemos que la ecuación (3.6) se puede expresar como  $Z_i = \Gamma(i - 1)z$ . Esto nos permite expresar  $R_{i-1} = \Gamma(i - 1) - Z_{i-1} = \Gamma(i - 1) - z\Gamma(i - 2)$ . Ahora, sustituyendo en (3.7) obtenemos la ecuación de recurrencia que cumple  $\Gamma(i)$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(i) &= \Gamma(i - 1)(r + z - 1) + \Gamma(i - 2)z \quad i > 1, \\ \Gamma(0) &= 1, \\ \Gamma(1) &= r + z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

La ecuación característica del sistema es  $u^2 + (1 - z - r)u - z = 0$  y sus raíces son

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{z + r - 1 - \sqrt{v}}{2}, \\ u_2 &= \frac{z + r - 1 + \sqrt{v}}{2}, \\ v &:= (z + r)^2 + 2(z - r) + 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vemos que la  $v$  definida en (3.9) se puede escribir como  $v = (z + r - 1)^2 + 4z$  por lo que si trabajamos con grafos mezclados propios ( $r \neq 0$  y  $z \neq 0$ ) tendremos siempre  $v > 0$ . Esto nos permite afirmar que la ecuación característica posee dos soluciones distintas con multiplicidad 1. La solución a la ecuación (3.8), por la teoría general de recurrencias de segundo orden, viene dada por

$$\Gamma(i) = Au_1^i + Bu_2^i. \quad (3.10)$$

Hallaremos los valores de  $A$  y  $B$  al aplicar las condiciones iniciales, esto es, resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= A + B, \\ r + z &= A \left( \frac{z + r - 1 - \sqrt{v}}{2} \right) + B \left( \frac{z + r - 1 + \sqrt{v}}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

El sistema es sencillo de resolver y tiene como solución

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{v} - (z + r + 1)}{2\sqrt{v}}, \\ B &= \frac{\sqrt{v} + (z + r + 1)}{2\sqrt{v}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ahora que conocemos con precisión el número de vértices que se encuentran a distancia  $i$ , ya estamos listos para calcular la cota de Moore.

$$\begin{aligned} M_{z,r,k} &= \sum_{i=0}^k \Gamma(i) = \sum_{i=0}^k Au_1^i + \sum_{i=0}^k Bu_2^i \\ &= A \left( \frac{u_1^{k-1} - 1}{u_1 - 1} \right) + B \left( \frac{u_2^{k-1} - 1}{u_2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vamos a ver ahora que esta expresión no sólo nos determina la cota de Moore para grafos mezclados, sino que generaliza las cotas de Moore obtenidas para grafos y digrafos. Es decir, queremos ver que cuando  $z = 0$  obtenemos (3.3) y cuando  $r = 0$  obtenemos (3.4).

Supongamos  $z = 0$ , entonces los valores de  $v$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $A$  y  $B$  son los siguientes:

$$v = (r - 1)^2 \quad u_1 = 0 \quad u_2 = r - 1 \quad A = \frac{-1}{r - 1} \quad B = \frac{r}{r - 1}.$$

Introduciendo estos valores en (3.13) y haciendo un poco de álgebra

$$\begin{aligned}
M_{0,r,k} &= \frac{-1}{r-1} + \frac{r}{r-1} \left[ \frac{(r-1)^{k+1} - 1}{r-2} \right] \\
&= \frac{-(r-2) + r(r-1)(r-1)^k - r}{(r-1)(r-2)} = \frac{r(r-1)(r-1)^k - 2(r-1)}{(r-1)(r-2)} \\
&= \frac{r(r-1)^k - 2 + [r-r]}{(r-2)} = \frac{r(r-1)^k + (r-2) - r}{(r-2)} \\
&= 1 + r \frac{(r-1)^k - 1}{r-2}
\end{aligned}$$

llegamos efectivamente a la cota de Moore para grafos.

Supongamos ahora  $r = 0$ , los valores de  $v$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $A$  y  $B$  son los siguientes:

$$v = (z+1)^2 \quad u_1 = -1 \quad u_2 = z \quad A = 0 \quad B = 1.$$

En este caso basta con introducir los valores en (3.13) y obtener directamente la cota de Moore para grafos dirigidos:

$$M_{z,0,k} = \frac{z^{k+1} - 1}{z - 1}.$$

Dado que los grafos mezclados son el objeto de nuestro trabajo, los resultados referentes a los hallazgos de grafos mezclados de Moore se verán con mayor detalle que en los casos anteriores en la siguiente sección.

### 3.4.2. Grafos mezclados de Moore

Presentamos un repaso histórico de los principales resultados en lo referente a grafos mezclados de Moore.

El primero en definir y trabajar con los grafos mezclados de Moore fue Bosák [4] en 1979, quien definía un grafo mezclado de Moore como un grafo mezclado simple, finito y homogéneo que satisface la siguiente condición: Dados  $u$  y  $v$  dos vértices cualesquiera, existe un único camino entre ellos de longitud menor o igual que el diámetro. Las condiciones de simple, finito y homogéneo vienen a decir que no tenga lazos, que el orden sea un número finito y que sobre cualquier vértice incidan el mismo número  $r$  de aristas y  $z$  de arcos. Bosák también dio una condición necesaria para que un grafo mezclado de diámetro dos fuera de Moore:

**Teorema 3.1.** *Sea  $G$  un grafo mezclado de Moore de diámetro 2. Entonces  $G$  es completamente regular con grado dirigido  $z \geq 1$  y grado no dirigido  $r \geq 1$ . Además, existe un entero impar positivo  $c$  tal que*

$$r = \frac{1}{4}(c^2 + 3) \quad y \quad c|(4z - 3)(4z + 5). \quad (3.14)$$

Esta condición permitía restringir la búsqueda de grafos mezclados de Moore. Bosák se enfrascó esta búsqueda, pero de todos los grafos mezclados construidos

por él, solamente aquel con orden  $n = 18$  recibe el nombre de *grafo mezclado de Bosák*, puesto que el resto son isomorfos a una familia ya conocida, los grafos de Kautz. El grafo  $Ka(1 + z, 2)$  con  $z \geq 2$  y  $r = 1$  es un grafo mezclado de Moore. De hecho, esta es la única familia infinita de grafos mezclados de Moore conocida hasta la fecha. Bosák va más allá y conjetura que no existen grafos mezclados de Moore para valores  $k \geq 3$ .

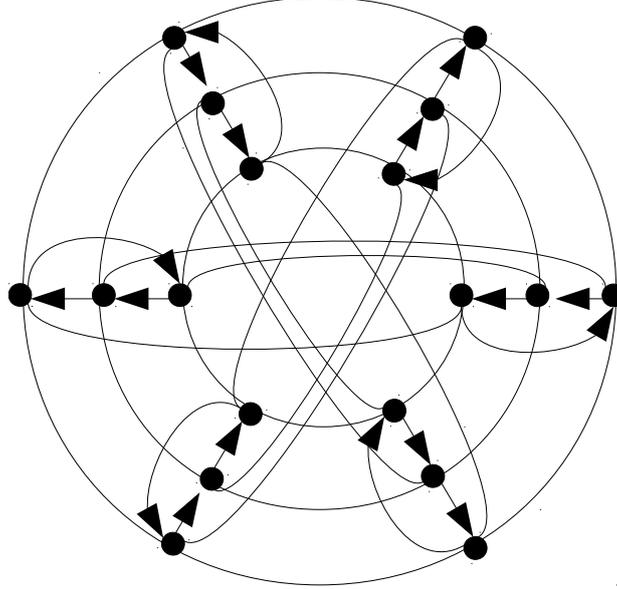


Figura 10: Grafo mezclado de Bosák

En 2001 Gimbert [5] demuestra que los grafos de Kautz son los únicos grafos mezclados de Moore con sus parámetros, cerrando así la unicidad de una familia infinita de grafos mezclados de Moore. En 2007 Gimbert, junto a Nguyen y Miller [6] demuestran la conjetura enunciada por Bosák . En 2008 proponen una cota de Moore para grafos mezclados que curiosamente no coincide con la que hemos proporcionado en la sección anterior. En [7] establecen como cota de Moore la siguiente:

$$1 + (r + z) + [z(r + z) + r(r + z - 1)] + \dots + [z(r + z)^{k-1} + r(r + z - 1)^{k-1}]. \quad (3.15)$$

La tabla 7 nos muestra la comparación entre los valores que determinaba esta primera cota y los aportados por la actual cota (3.13). Podemos ver que para valores bajos de  $r$  y  $z$  ambas coinciden hasta  $k = 3$ , pero de ahí en adelante vemos que la primera cota sobrevalora el número de vértices.

Conviene observar que la definición de Bosák de grafos mezclados de Moore no tiene en cuenta la cota de Moore, sin embargo se puede demostrar que dado  $G$  un grafo mezclado simple finito y homogéneo,  $G$  tiene orden la cota de Moore (3.13) si, y sólo si existe un único recorrido de distancia menor o igual al diámetro.

En 2014 López, Perez-Rosés y Pujolás [8] demuestran que el grafo de Bosák es un grafo de tipo Cayley formado a partir de  $\{S_3 \times \mathbb{Z}_3\}$  y también que los grafos mezclados de Moore de ordenes 40 y 54, si existen, no pueden ser de tipo Cayley. Un

(r,z)	(1,1)		(1,2)		(2,1)	
k	V	N	V	N	V	N
1	3	3	4	4	4	4
2	6	6	12	12	11	11
3	11	11	34	34	28	28
4	20	19	96	94	71	69
5	37	32	274	258	184	168
6	70	53	792	706	491	407

Tabla 7: Comparación entre la cota de Moore vieja “V” y la nueva “N”

año más tarde, en 2015, Jørgensen [9] demuestra que el grafo mezclado de Moore de orden 40, de existir, no sería vértice transitivo. Jørgensen encuentra también dos grafos mezclados de Moore no isomorfos de orden 108. El mismo año López, Miret y Fernández [10] demuestran que no existen grafos mezclados de Moore de orden 40, 54 ni 84.

Vemos que la búsqueda de grafos mezclados de Moore sigue siendo un problema con multitud de frentes abiertos, cosa que no pasa ni en grafos dirigidos ni en no dirigidos (aunque en este último falta cerrar el caso de orden 57). En la tabla 8 presentamos los grafos mezclados de Moore de orden menor que 200, anotando únicamente los valores de  $r$  y  $z$  compatibles con la condición que apuntó Bosák (3.14).

$M_{r,z,2}$	$r$	$z$	Existencia	Unicidad
6	1	1	$Ka(2, 2)$	✓
12	1	2	$Ka(3, 2)$	✓
18	3	1	Bosák	✓
20	1	3	$Ka(4, 2)$	✓
30	1	4	$Ka(5, 2)$	✓
40	3	3	NO	-
42	1	5	$Ka(6, 2)$	✓
54	3	4	NO	-
56	1	6	$Ka(7, 2)$	✓
72	1	7	$Ka(8, 2)$	✓
84	7	2	NO	-
88	3	6	?	?
90	1	8	$Ka(9, 2)$	✓
108	3	7	Jorgensen	✗
110	1	9	$Ka(10, 2)$	✓
132	1	10	$Ka(11, 2)$	✓
150	7	5	?	?
154	3	9	?	?
156	1	11	$Ka(12, 2)$	✓
180	3	10	?	?
182	1	12	$Ka(13, 2)$	✓

Tabla 8: Pares  $(r,z)$  que cumplen (3.14) y  $M_{z,r,2} \leq 200$

## 4. Contribuciones

### 4.1. Caso $r = 1, z = 1$

Nuestra intención en esta sección será la de caracterizar y enumerar los grafos mixtos óptimos de tipo Cayley-abeliano fijado el grado no dirigido  $r = 1$  y el grado dirigido  $z = 1$  para cualquier valor del diámetro  $k$ .

La forma de proceder será la siguiente: buscaremos la cota de Moore, que nos indicará un máximo teórico de vértices  $M = M(k)$ , y trataremos de construir un grafo Cayley abeliano con  $r = z = 1$  y diámetro  $k$  -en lo sucesivo  $C.A.(r = 1, z = 1, k)$ - a partir de un grupo abeliano de  $M$  elementos. Si no es posible, repetiremos el procedimiento buscando grafos con las condiciones especificadas a partir de grupos abelianos de  $M - 1, M - 2, \dots$  descendiendo de uno en uno hasta encontrar el grafo  $C.A.(1, 1, k)$  con un número máximo de vértices. Para cada valor de  $k$  veremos la existencia de estos grafos y caracterizaremos los distintos tipos que hay en función de las propiedades de los grupos que los generan.

**Observación 6.** A fin de que nuestro grafo de Cayley abeliano tenga grado no dirigido  $r = 1$ , el subconjunto generador debe contener una única involución. De hecho, el subconjunto generador será de la forma  $\{i, g\}$  donde  $i$  es una involución y  $g$  otro elemento que no sea involución. Más adelante daremos condiciones más restrictivas sobre  $g$ .

**Proposición 4.** *La cota de Moore para grafos mixtos tipo  $C.A.(1, 1, k)$  es  $2k + 1$ .*

*Demostración.* Partimos del vértice identidad y hacemos actuar sucesivamente el conjunto  $\{i, g\}$ . Obtenemos así el árbol de la figura 11. Vemos que para cualquier distancia  $d$  distinta de 0 tenemos  $\Gamma(d) = 2$ , y  $\Gamma(0) = 1$ . Así pues la cota de Moore en este caso vendrá dada por

$$\sum_{i=0}^k \Gamma(i) = 1 + \sum_{i=1}^k \Gamma(i) = 1 + 2k. \quad (4.1)$$

□

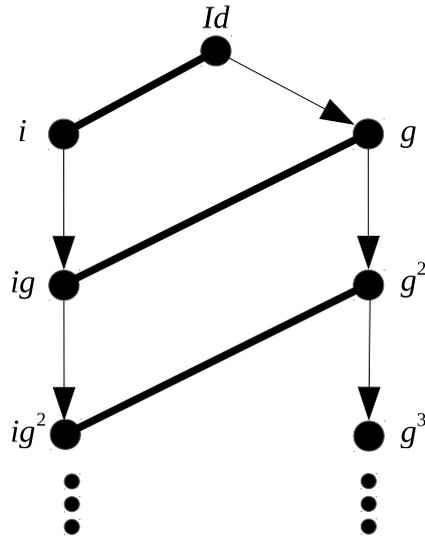


Figura 11: Árbol para el cálculo de la cota de Moore de  $C.A.(1, 1, k)$

**Proposición 5.** *La cota de Moore para grafos  $C.A.(1, 1, k)$  no se alcanza para ningún  $k$ .*

*Demostración.* Puesto que la cota de Moore es  $2k + 1$ , siempre impar, debemos acudir a grupos abelianos de orden  $2k + 1$ , pero éstos carecen de involuciones y por lo tanto será imposible generar con ellos un grafo de Cayley con  $r = 1$ .  $\square$

Así pues, visto que no podemos construir grafos  $C.A.(1, 1, k)$  con  $2k + 1$  vértices, miraremos si es posible construirlos con  $2k$  vértices. La respuesta es que sí.

**Proposición 6.** *El grafo  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$  con  $k \in \mathbb{N}$  es un grafo  $C.A.(1, 1, k)$  con  $2k$  vértices.*

*Demostración.* Con abuso de lenguaje y de ahora en adelante hablaremos indistintamente de los vértices de  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$  y de los elementos de  $\mathbb{Z}_{2k} = \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ . De tal forma que el grafo considerado tiene los vértices  $i, i + 1$  mediante un arco y los vértices  $i, i + k$  mediante una arista (figura 12). Por construcción, y por ser grafo de Cayley-abeliano, la condición  $r = z = 1$  se cumple, al igual que el hecho de tener  $2k$  elementos. Bastará pues ver que el diámetro es  $k$ . Para demostrarlo partimos del vértice asociado a la identidad, en lo sucesivo vértice 0. Debido a la propiedad de vértice-transitividad, será suficiente ver que otro vértice cualquiera del grafo se encuentra a distancia menor o igual que  $k$ .

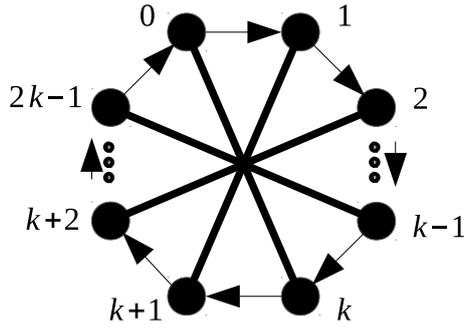


Figura 12:  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$

- Desde 0 podemos acudir a  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  atravesando  $i (< k)$  arcos.
- Desde 0 podemos acudir a  $k$  atravesando la arista que los une. Y desde  $k$  accedemos a  $k+j$  con  $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  atravesando  $j$  arcos, lo que resulta un total de  $j+1 (\leq k)$  pasos para acceder de 0 a  $k+j$ .

Visto esto, tenemos que desde 0 accedemos a cualquier otro vértice en menos de  $k$  pasos, excepto para ir de 0 a  $2k-1$ , camino que recorreremos exactamente en  $k$  pasos. Vamos a ver que no hay forma de recorrer este camino en menos pasos. Entendemos que un camino con vértices  $\{1, 2, \dots, 2k-1\}$  no retrocede si recorremos los vértices de forma creciente. Cualquier camino que una 0 con  $2k-1$  y que no retroceda tendrá la siguiente estructura:

- Irá de 0 a  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  atravesando  $i - 0 = i$  arcos. ( $i$  pasos)
- Irá de  $i$  a  $i+k$  a través de una arista. ( $i+1$  pasos)
- Irá de  $i+k$  a  $2k-1$  atravesando  $(2k-1) - (i+k) = k-i-1$  arcos. ( $i+1 + (k-i-1) = k$  pasos)

Es fácil de ver que, en este caso, un camino que une dos vértices y no retrocede tiene longitud menor o igual a otro que una los mismos vértices pero retroceda. Con esto concluye la demostración.  $\square$

**Observación 7.** Es evidente que para construir  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$  se precisa la presencia del elemento  $k$  en el subconjunto generador puesto que es la única involución de  $\mathbb{Z}_{2k}$ , sin embargo, sustituir el 1 por cualquier otro generador de  $\mathbb{Z}_{2k}$  (cualquier entero coprimo con  $2k$ ) proporciona un grafo isomorfo ( $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\}) \cong Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{g, k\})$  con  $g$  generador cualquiera de  $\mathbb{Z}_{2k}$ ). Para demostrarlo, basta ver que el isomorfismo  $\varphi_g(x) = x + (g-1)$  lleva de  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$  a  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{g, k\})$ .

Llegados a este punto, y sabiendo que siempre podemos llegar a alcanzar la cota de Moore menos uno, parece natural preguntarse si se consigue de forma única, esto es, si hubiera algún otro grafo  $C.A.(r=1, z=1, k)$  no isomorfo a  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$  con  $2k$  vértices. Como veremos, existe otro grafo con las propiedades requeridas. Llegaremos a él mediante la siguiente proposición.

**Proposición 7.** Sea  $G$  grupo abeliano finito de orden  $2k$ , sea  $i \in G$  involución y  $g \in G$ . Consideramos  $Cay(G, \{i, g\})$  el grafo de Cayley con generadores  $\{i, g\}$ . Si el diámetro de  $Cay(G, \{i, g\})$  es finito (i.e.  $Cay(G, \{i, g\})$  es conexo) entonces  $ord(g) \geq k$ .

*Demostración.* Procederemos por contrarrecíproco. Vamos a ver que si  $ord(g) < k$  entonces  $Cay(G, \{i, g\})$  es no conexo. Sea  $\alpha = ord(g)$ ,  $\alpha < k$ . Haciendo uso de la vértice-transitividad podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que partimos de la identidad. Así pues, la mayor componente conexa que se podrá crear tomando la acción de  $\{i, g\}$  contendrá, a lo sumo, los elementos (en notación multiplicativa)  $\{Id, g, g^2, \dots, g^{\alpha-1}\}$  unidos en orden por arcos y los elementos  $\{i, ig, ig^2, \dots, ig^{\alpha-1}\}$  unidos entre sí de la misma forma. Las aristas acabarían de unir el grafo uniendo cada elemento  $g^\nu$  con  $ig^\nu$  ( $\nu \in [0, \alpha - 1]$ ) como se muestra en la figura.

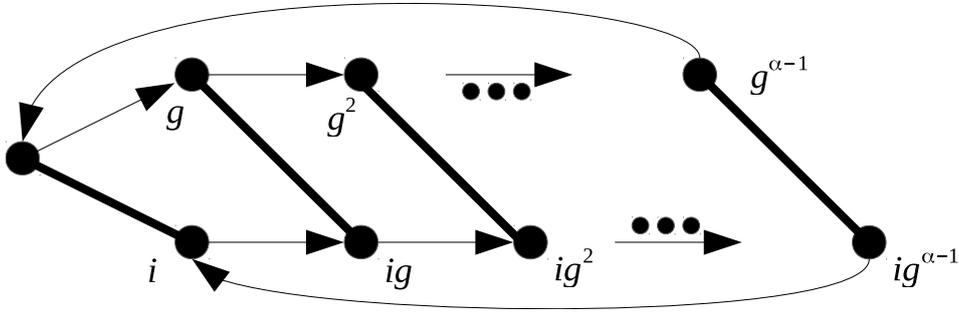


Figura 13: Mayor componente conexa generada por  $\{i, g\}$

Este procedimiento construye una componente conexa de a lo sumo  $2\alpha$  vértices. Como  $2\alpha < 2k$  nunca llegaremos a conseguir una componente conexa que incluya todos los elementos de  $G$ .  $\square$

**Observación 8.** Por el teorema de Lagrange sabemos que el orden de un elemento debe dividir al orden del grupo. Eso nos deja con dos opciones: Si  $Cay(G, \{i, g\})$  es conexo  $ord(g) \geq k$  y, por lo tanto,  $ord(g) = k$  o bien  $ord(g) = 2k$ .

**Observación 9.** Vemos que no siempre la componente conexa que describimos en la demostración tendrá  $2\alpha$  vértices, puesto que en el caso posible de que  $\alpha$  fuera un número par y  $i = g^{\frac{\alpha}{2}}$  tan sólo contendría  $\alpha$  elementos distintos. De todos modos, esto no afecta en la demostración, ya que si con  $2\alpha$  no se llega, claramente tampoco se llegará con  $\alpha$ .

**Observación 10.** Una condición necesaria para saber si a partir de cierto grupo abeliano finito  $G$  de orden  $2k$  podemos generar un grafo  $Cay(G, \{i, g\})$  conexo será la existencia de algún elemento  $g \in G$  tal que  $ord(g) = k$  o bien  $ord(g) = 2k$ .

**Ejemplo 3.** Si estamos buscando grafos óptimos de tipo  $C.A.(1, 1, 4)$ , buscaremos grupos de 8 elementos que nos puedan generar el grafo buscado. Descartaremos directamente, por ejemplo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  por no tener elementos de orden 8 ni de orden 4.

**Proposición 8.** *Existen únicamente dos grafos C.A.(1, 1, k) salvo isomorfismo, y son  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$  y  $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k, \{(1, 0), (0, 1)\})$ .*

*Demostración.* Por lo antes visto, dado un grupo abeliano finito  $G$  de orden  $2k$  necesitamos un elemento  $g$  cuyo orden sea  $2k$  o bien  $k$  y una involución  $i$  para que  $Cay(G, \{i, g\})$  pueda ser conexo.

Si  $ord(g) = 2k$ , o sea, si  $G$  es cíclico y  $g$  un generador, tendremos que  $i = g^k$  y por tanto obtenemos los siguientes elementos partiendo de la identidad (figura 14):

$$\{Id, g, g^2, \dots, g^k, g^{k+1}, \dots, g^{2k-1}\} = \{Id, g, g^2, \dots, i, ig, \dots, ig^{k-1}\}$$

Un total de  $2k$  elementos. Este caso corresponde al ya mencionado  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$  isomorfo al de la figura 14.

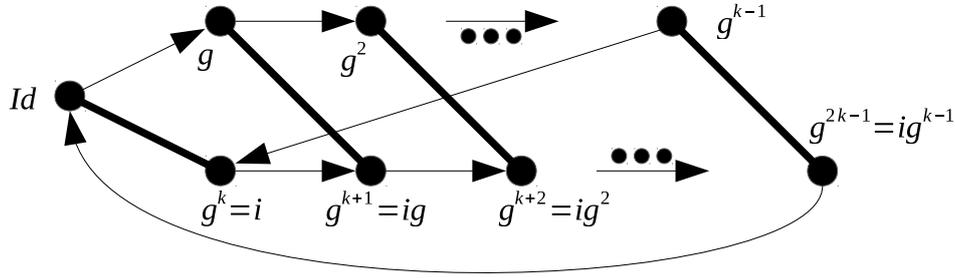


Figura 14: Grafo isomorfo a  $Cay(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$

Si  $ord(g) = k$  se deberá tener  $i \neq g^{\frac{k}{2}}$  (de no ser así obtenemos un grafo con  $k$  vértices) que generan dos componentes conexas dirigidas  $\{Id, g, g^2, \dots, g^{k-1}\}$  y  $\{i, ig, ig^2, \dots, ig^{k-1}\}$  relacionadas entre sí mediante aristas que unen  $g^\nu$  con  $ig^\nu$  ( $\nu \in [0, k - 1]$ )(Figura 15).

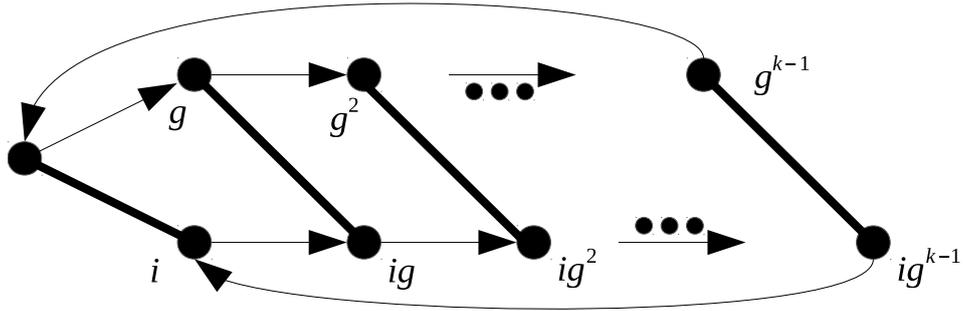


Figura 15: Grafo isomorfo a  $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k, \{(1, 0), (0, 1)\})$

Este es el caso de  $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k, \{(1, 0), (0, 1)\})$ , puesto que  $(1, 0)$  es involución y  $(0, 1)$  un elemento de orden  $k$  y  $(1, 0)$  no es ninguna potencia de  $(0, 1)$ . Por construcción, es evidente que no hay un tercer grafo distinto a estos dos últimos que cumpla las condiciones requeridas.  $\square$

En resumen: Sea  $G$  grupo abeliano finito de orden  $2k$ , sea  $i \in G$  involución y  $g \in G$ .

- Si  $G$  es cíclico y  $g$  es un generador, i.e.  $\text{ord}(g) = 2k$ , entonces

$$\text{Cay}(G, \{i, g\}) \cong \text{Cay}(\mathbb{Z}_{2k}, \{1, k\})$$

- Si  $\text{ord}(g) = k$  y  $k$  es un entero impar, entonces

$$\text{Cay}(G, \{i, g\}) \cong \text{Cay}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k, \{(1, 0), (0, 1)\})$$

- Si  $\text{ord}(g) = k$  y  $k$  es un entero par y  $i \neq g^{\frac{k}{2}}$ , entonces

$$\text{Cay}(G, \{i, g\}) \cong \text{Cay}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_k, \{(1, 0), (0, 1)\})$$

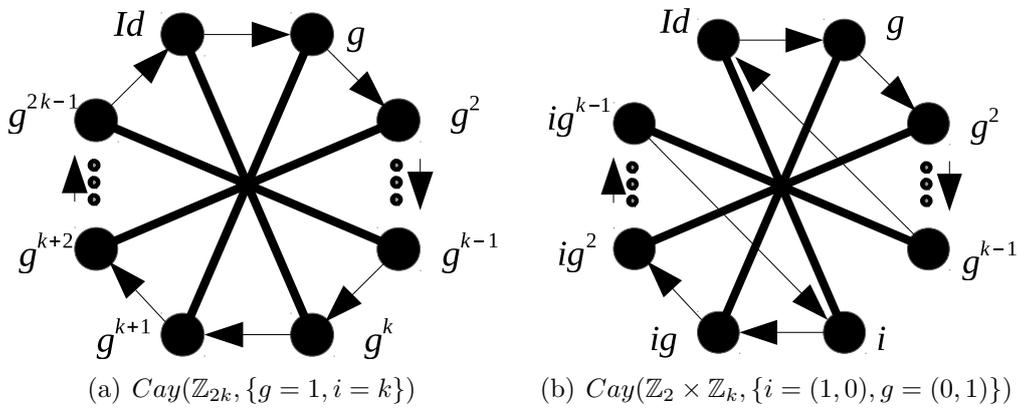


Figura 16: Grafos óptimos  $C.A.(1, 1, k)$

## 4.2. Caso $r = 1, z = 2$

Nuestra intención en esta sección será buscar, mediante exploración computacional, grafos mixtos óptimos de tipo Cayley-abeliano fijado el grado no dirigido  $r = 1$  y el grado dirigido  $z = 2$  para cualquier valor del diámetro  $k$ .

Comenzaremos la sección dando la cota de Moore adaptada a este caso, después buscaremos una cota inferior que de algún modo encuadre los resultados que esperamos, y finalmente compararemos con los resultados obtenidos mediante exploración computacional en SAGE.

Comenzamos calculando la cota de Moore para el caso Cayley abeliano con grado  $r = 1$ , grado no dirigido  $z = 2$  y diámetro  $k$ . Para ello, procedemos a trazar el árbol generador tal como hemos hecho para calcular las cotas de Moore de la sección anterior. Puesto que los grafos de Cayley son vértice-transitivos comenzaremos con la identidad como vértice origen y de ahí haremos actuar el conjunto generador  $\{i, g, h\}$ , donde  $i$  es la involución que dará lugar a las aristas, y  $g$  y  $h$  serán elementos de orden mayor que 2. La condición de abeliano es la que reducirá la cota respecto de (3.13).

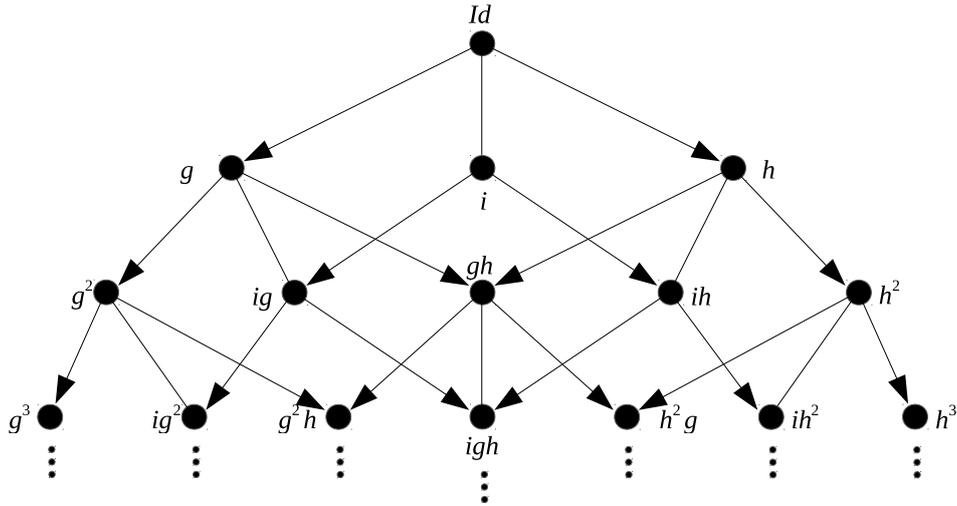


Figura 17: Árbol generador

Al igual que en los casos anteriores, se trata de conocer el valor de  $\Gamma(d)$  para  $d = 0, \dots, k$  y después sumarlos. Vemos del árbol que  $\Gamma(1) = 3$  y que  $\Gamma(2) = 5$ . Para conocer el término  $d$ -ésimo aplicamos el siguiente razonamiento: A distancia  $d$  encontraremos los productos de  $d$  elementos escogidos con reposición del conjunto  $\{i, g, h\}$ , excepto el factor  $i$ , que no puede aparecer más de una vez. Esto nos lleva a los siguientes conjuntos de vértices a distancia  $d$ :

$$\{h^d, h^{d-1}g, h^{d-2}g^2, \dots, hg^{d-1}, g^d\}, \{ih^{d-1}, ih^{d-2}g, ih^{d-3}g^2, \dots, ihg^{d-2}, ig^{d-1}\} \quad (4.2)$$

El primero de ellos tiene  $d + 1$  elementos, y el segundo  $d$ . Esto hace un total de  $2d + 1$  vértices a distancia  $d$ . La cota de Moore en este caso será

$$\sum_{d=0}^k \Gamma(d) = \sum_{d=0}^k (2d + 1) = (k + 1)^2 \quad (4.3)$$

Por lo tanto, para cada valor  $k$  del diámetro, encontraremos grafos de, a lo sumo,  $(k + 1)^2$  vértices. Vamos a buscar una cota inferior del problema, para así tratar de encuadrar el número de vértices esperado.

Partiremos de la construcción del grafo  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2t}, \{1, 2, t\})$ , que evidentemente se trata de un grafo  $C.A.(1, 2, k(t))$ . Nuestro objetivo es determinar el valor de  $k(t)$ .

**Proposición 9.** Dado  $t \in \mathbb{N}$ , el diámetro de  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2t}, \{1, 2, t\})$  es  $\lceil \frac{t+2}{2} \rceil$ , la parte entera de  $\frac{t+2}{2}$

*Demostración.* Por la propiedad de vértice-transitividad bastará con calcular la mayor de las distancias del vértice 0 (la identidad) al resto de vértices. Comenzamos buscando la distancia del 0 a los vértices  $1, 2, \dots, t-1$ . Para este conjunto de vértices, la forma más “rápida” de llegar desde el 0 será mediante los arcos generados por el 1 y el 2. La distancia del 0 al vértice  $i \in [1, t-1]$  será  $\frac{i+1}{2}$  si el valor de  $i$  es impar y  $\frac{i}{2}$  si es par. La forma de verlo es que para ir del 0 a un vértice impar  $i$  empezamos

yendo del 0 al 1 mediante un arco y del 1 al  $i$  mediante arcos generados por el 2, es decir hacen falta un total de  $1 + \frac{i-1}{2} = \frac{i+1}{2}$  pasos. El caso  $i$  par es más sencillo, pues se va del 0 al  $i$  mediante arcos generados por 2, en  $\frac{i}{2}$  pasos.

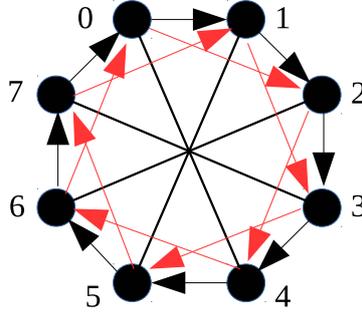


Figura 18:  $Cay(\mathbb{Z}_{2t}, \{1, 2, t\})$  con  $t=4$

Para el conjunto de vértices  $t, t+1, \dots, 2t-1$  el número de pasos para llegar del vértice  $t$  al  $t+i$  con  $i \in [1, n-1]$  es, por un razonamiento simétrico  $\frac{i+1}{2}$  si el valor de  $i$  es impar y  $\frac{i}{2}$  si es par. A estos valores hay que sumarles el paso de ir de 0 a  $t$  mediante la arista generada por  $t$ . Así pues el número de pasos para llegar del vértice 0 al  $t+i$  es  $1 + \frac{i+1}{2}$  si el valor de  $i$  es impar y  $1 + \frac{i}{2}$  si es par.

Observamos que la máxima distancia desde el 0 la hallaremos al vértice  $2t-1$  y valdrá  $\frac{t+2}{2}$  cuando  $t$  es par y  $\frac{t+1}{2}$  cuando  $t$  es impar. Esta expresión se puede abreviar en  $\lceil \frac{t+2}{2} \rceil$  para no tener que considerar la paridad.  $\square$

La relación entre el número de vértices y el diámetro de la familia de grafos  $Cay(\mathbb{Z}_{2t}, \{1, 2, t\})$  para los primeros valores de  $t$  la recogemos en la tabla 9.

$t$	$n = 2t$	$k$
2	4	2
3	6	2
4	8	3
5	10	3
6	12	4
7	14	4
8	16	5

Tabla 9: Relación  $\text{orden}(n = 2t)/\text{diámetro}(k)$  en  $Cay(\mathbb{Z}_{2t}, \{1, 2, t\})$

**Observación 11.** Dado un valor de  $k$ , siempre hay dos valores de  $t$ , uno par y otro impar, tales que  $Cay(\mathbb{Z}_{2t}, \{1, 2, t\})$  tiene orden  $n = 2t$  y diámetro  $k$ . Para nuestro propósito será más conveniente el valor de  $t$  impar, puesto que dado el mismo diámetro, posee dos vértices más. Es, por así decirlo “más óptimo”.

**Proposición 10.** Una cota inferior para el orden de un grafo  $C.A.(1, 2, k)$  es  $n(k) = 4k - 2$ .

*Demostración.* Si cogemos un valor de  $t \in \mathbb{N}$  impar, de tal forma que el grafo  $Cay(\mathbb{Z}_{2t}, \{1, 2, t\})$  tiene diámetro  $k = \frac{t+1}{2}$ , se tiene entonces que  $t = 2k - 1$ . Como  $n = 2t$  llegamos a  $n = 4k - 2$ .  $\square$

**Observación 12.** La cota de Moore establece una cota superior que crece de forma cuadrática con  $k$ , mientras que la cota inferior que hemos hallado crece de forma lineal con  $k$ . A priori, puede parecer que esta cota inferior no da mucha información, pues para valores altos de  $k$  la diferencia entre cotas se vuelve enorme. De todas formas aún es pronto para sacar conclusiones, pues faltará ver qué ordenes tendrán los grafos mezclados óptimos que encontremos mediante exploración computacional.

Ahora que ya tenemos una cota superior y otra inferior, procedemos a la búsqueda de grafos óptimos mediante exploración computacional. Comenzamos comentando brevemente el funcionamiento del programa que hemos usado para hallar y caracterizar los grafos mezclados  $C.A.(1, 2, k)$  óptimos, y que adjuntamos en el Anexo I.

Para cada valor del diámetro  $k$  entre dos límites fijados, el programa calcula la cota de Moore. Si la cota de Moore resulta ser un número impar, el programa le resta 1, puesto que sabemos que los grafos que buscamos tienen necesariamente orden par, y ese número lo guarda en la variable  $m$ . Ahora, buscará si existen grafos mezclados con  $r = 1$ ,  $z = 2$ , orden  $m$  y diámetro  $k$ . Si los encuentra, sacará los resultados por pantalla, y si no, hará  $m = m - 2$  y repetirá el proceso hasta encontrarlos.

Este es el funcionamiento global del programa, sin embargo, vamos a detallar el método de la búsqueda. Para saber si existen grafos mezclados con  $r = 1$ ,  $z = 2$ , orden  $m$  y diámetro  $k$ , comienza listando todos los grupos de orden  $m$ . De éstos filtrará únicamente los abelianos. Para cada uno de los grupos abelianos encontrados con orden  $m$ , separa los elementos entre aquellos que tienen orden 2 y aquellos que tienen orden mayor que 2, ya que el primer conjunto dará los elementos que generarán aristas y el segundo los generadores de arcos. Ahora, el programa considera todas las combinaciones sin repetición que contengan un elemento de orden 2 y dos elementos de orden mayor que 2, puesto que cada una de estas combinaciones corresponde a un conjunto generador de un grafo de Cayley  $r = 1$ ,  $z = 2$  y orden  $m$ . Faltará saber cuáles de éstos generan un grafo con diámetro  $k$ , y ésta es la última parte del programa. Para cada conjunto generador, crea su grafo de Cayley y comprueba si su diámetro es  $k$ . Los grafos que dan positivo al test anterior se reúnen en una lista (`llistadigrafsdemoore`), y cada vez que entra uno nuevo, se comprueba que no sea isomorfo a los ya presentes. Si el grafo es nuevo, se añade a la lista. Finalmente `llistadigrafsdemoore` contiene (si los hay) los grafos óptimos hallados.

Con el fin de ahorrar el mayor número de cálculos a la computadora, se introdujo una modificación que fue clave para reducir también el tiempo empleado. Este cambio no es otro que, en vez de comprobar que el diámetro de los grafos es  $k$ , aprovechar la vértice transitividad, y pedirle al programa que únicamente compruebe que la máxima distancia entre un vértice dado y otro cualquiera es  $k$ , reduciendo así en un factor  $n$  el número de cálculos en la comprobación.

Pese a reducir el número de cálculos, no ha sido factible la búsqueda para valores

del diámetro mayor o igual a 10, puesto que el programa excedía el tiempo máximo de conexión remota y dejaba de ejecutarse. Las tareas que más tiempo ocupaban al programa eran las de construir cada uno de los grafos de Cayley (para  $k = 10$  en cada grupo a buscar había entre  $10^3$  y  $10^4$  conjuntos generadores) y comprobar la isomorfía. Así pues, en la tabla 10 recogemos el orden de los grafos óptimos para valores del diámetro entre 2 y 10, así como el número de grafos mezclados no isomorfos con el mismo orden óptimo y la cota de Moore. En el Anexo II presentamos una lista explicitando los grafos óptimos hallados.

Diámetro	Cota de Moore	Orden del (de los) grafo(s) óptimo(s)	No isomorfos
2	9	8	1
3	16	12	2
4	25	18	2
5	36	24	9
6	49	32	11
7	64	42	7
8	81	54	3
9	100	66	7
10	121	80	7

Tabla 10: Ordenes y multiplicidad de grafos óptimos hallados mediante exploración computacional en SAGE.

En la figura 19 se muestran los valores de la cota de Moore, la cota inferior (proposición 10) y los valores obtenidos en la búsqueda con un ajuste polinómico de segundo grado. Con un coeficiente  $R^2 = 0,9997$ , el ajuste proporciona un comportamiento de los valores hallados de la forma

$$\frac{72}{99}k^2 + \frac{171}{99}k + \frac{51}{9}. \quad (4.4)$$

Tal como sospechábamos, y al igual que la cota de Moore, parece que el orden de los grafos óptimos sigue un comportamiento cuadrático, y por lo tanto, deberemos esforzarnos en hallar una cota inferior que también tenga ese comportamiento.

Vamos en busca de una cota inferior para el orden de los grafos mezclados óptimos que crezca de forma cuadrática con  $k$ . Al igual que antes, intentaremos encontrar una familia de grafos mezclados que nos proporcionen la cota.

**Conjetura 1.** *Sea  $t \in \mathbb{N}$  par, entonces  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2t^2}, \{1, 2t - 1, t^2\})$  tiene diámetro menor o igual que  $2t - 1$ .*

Debemos dejarlo en conjetura, puesto que no hemos conseguido dar con una demostración. De todos modos, todo apunta a que es cierta, puesto que ha sido comprobada para los 200 primeros valores de  $t$ , y en todos ellos el valor del diámetro resultó  $2t - 2$ . No nos queda más remedio que avanzar con la suposición de que la conjetura es cierta.

**Proposición 11.** *Sea  $k \cong 3 \pmod{4}$ . Entonces, una cota inferior para el orden de un grafo óptimo  $C.A.(1, 2, k)$  es  $n(k) = \frac{(k+1)^2}{2}$ .*

*Demostración.* Por la proposición anterior, tenemos una familia con diámetro  $k \leq 2t - 1$  y con orden  $n = 2t^2$ . Esto implica  $\frac{k+1}{2} \leq t$  y por lo tanto el orden

$$n = 2t^2 \geq 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \frac{(k+1)^2}{2}$$

Vemos, por otro lado, que si  $t$  es un número par, entonces  $2t - 1$  corresponde a los valores congruentes con 3 mod 4.  $\square$

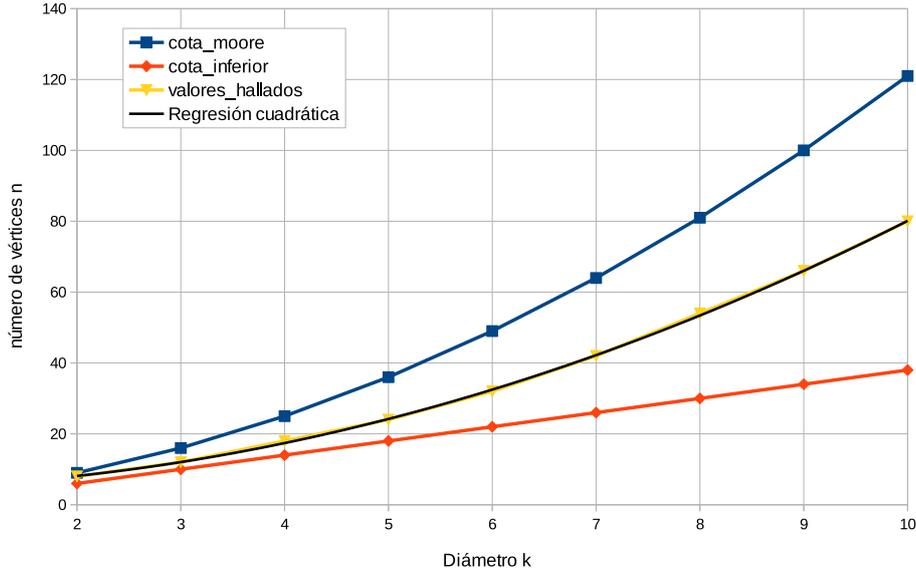


Figura 19: Ordenes de los grafos mezclados óptimos hallados con SAGE, la cota de Moore y la cota inferior lineal

**Observación 13.** Esta nueva cota inferior tiene la ventaja de ser exactamente la mitad de la cota de Moore, lo que nos asegura que crecen de forma similar asintóticamente. Por otro lado, esta cota no nos sirve para cualquier valor del diámetro, sino sólo para aquellos valores de  $k$  congruentes con 3 mod 4.

Llegados a este punto podemos proceder de dos formas distintas. La primera de ellas consistiría en hallar familias de grafos que cubran los casos distintos a  $k \cong 3 \pmod{4}$ . Por ejemplo, podríamos demostrar que la familia  $Cay(\mathbb{Z}_{3t^2}, \{1, 3t - 1, \frac{3t^2}{2}\})$  con  $t$  par tiene diámetro menor o igual que  $3t - 1$ , y por lo tanto nos proporciona una cota inferior igual a un tercio de la cota de Moore para los valores de  $k$  congruentes con 5 mod 6... y seguir hasta cubrir todos los casos.

La otra forma es aprovechar la cota obtenida en la proposición 11 y escalonarla, puesto que si  $n(k)$  es una cota inferior para  $k$  ( $k \cong 3 \pmod{4}$ ), también lo será para  $k + 1$ ,  $k + 2$  y  $k + 3$ . Esto da lugar a la cota inferior presentada en la figura 20. Esta segunda opción resulta ser claramente más estética y útil que la primera.

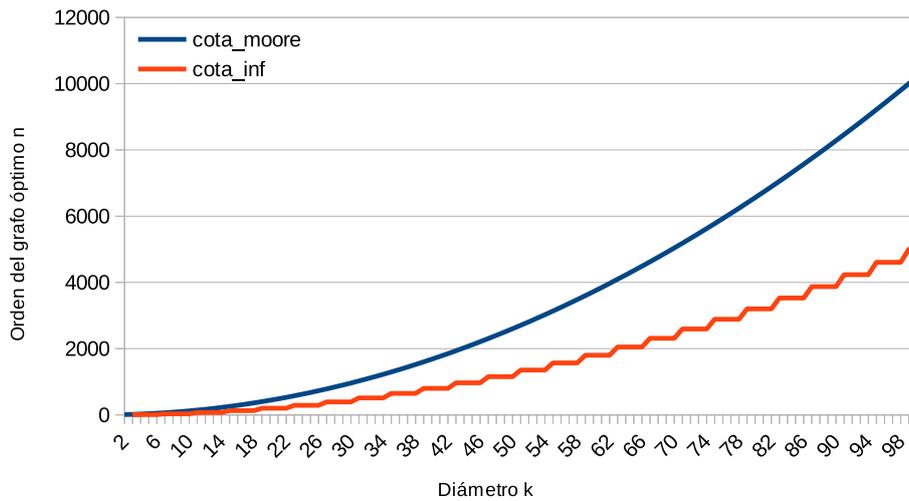


Figura 20: Comportamiento de las cotas superior e inferior para valores del diámetro entre 2 y 100

En resumen, la cota inferior queda como  $n(k) = \frac{(k+1)^2}{2} = n(k+1) = n(k+2) = n(k+3)$  para los valores de k congruentes con 3 mod 4. Con este resultado ponemos punto y final a este trabajo.

## 5. Conclusiones

Del desarrollo del trabajo podemos concluir, en primer lugar, que como ya anunciábamos en la introducción, pese a tener un enunciado sencillo, el problema del grado/diámetro puede ser realmente complejo de resolver. Hemos abordado los dos casos más sencillos dadas nuestras restricciones.

Hemos conseguido resolver completamente el caso  $r = z = 1$ , esto es, hallar todos los grafos mezclados óptimos de tipo Cayley abeliano con  $r = 1$ ,  $z = 1$  y para cualquier valor de  $k$ . Hemos llegado a que sólo hay dos grafos óptimos no isomorfos entre sí. Uno existirá para todos los valores de  $k$  y hemos dado las condiciones que deben cumplir los elementos de un grupo para que se pueda dar el otro. En este caso sorprende el hecho de que la distancia entre la cota de Moore y el orden del grafo óptimo se mantenga constante al variar  $k$ . Esto no es ni por mucho general, como se ve en el caso siguiente.

En cuanto al caso  $r = 1$ ,  $z = 2$ , no hemos conseguido resolver el problema, pero sí hemos conseguido acotar los resultados esperados entre dos cotas que crecen asintóticamente de forma similar. También hemos hallado los grafos óptimos para los valores de  $k$  comprendidos entre 2 y 10 mediante exploración computacional en SAGE, y hemos efectuado un ajuste polinómico de segundo grado que nos permite intuir el comportamiento cuadrático de los grafos óptimos en este caso. Al contrario que en el caso anterior, de entre los grafos obtenidos con SAGE, no encontramos una familia de grafos que sea óptima para todo  $k$ .

# Anexo I

Presentamos el programa ejecutado por SAGE para la búsqueda de grafos óptimos  $C.A.(1, 2, k)$ :

```
1 import networkx as nx
3 def grafmatrix(G): # dado un grafo , devuelve su matriz de adyacencia
5     matrix=[]
6     for v in G.nodes():
7         fila=[]
8         for w in G.nodes():
9             if (v,w) in G.edges():
10                fila.append(1)
11            else:
12                fila.append(0)
13        matrix.append(fila)
15    return matrix
16 # Buscamos digrafos de Cayley de orden n, grado dirigido z, grado no
17   dirigido r y diametro k.
18 z=2
19 r=1
20 for k in range(6,7):
21     m=(k+1)*(k+1)
22     if m%2==1:
23         m=m-1
24     entra=1
25     m=34
26     for jesus in range(0,m//2):
27         if entra==1:
28             n=m-2*jesus
29             print "Grau no dirigit: ",r
30             print "Grau dirigit: ",z
31             print "Ordre: ",n
32             print "Diametre: ",k
33
34             llistagrups=libgap.eval('AllSmallGroups('+str(n)+')')
35             #en llistagrups metemos todos los grupos de orden n
36
37             print "Informacio de tots els grups d'ordre ",n
38             print gap.eval('SmallGroupsInformation('+str(n)+')')
39
40             llistagrupsabelians=[]
41             for g in llistagrups:
42                 if g.IsAbelian():
43
44                     llistagrupsabelians.append(g)
45             print "Hi han ",len(llistagrupsabelians)," grups abelians"
46             grupscandidats=[]
47             conta=0
48             print "Busquem cayley de grups abelians"
```

```

51 llistadigrafsdemoore=[]
for grup in llistagrupsabelians:
53     conta=conta+1
    print "_____”
55     print "Grup numero ",conta
    print "_____”

57     print "Elements: ",grup.Elements()
59     #para cada elemento sacamos por pantalla la info
    elementsgrup=[]
61     for a in grup.Elements():
        elementsgrup.append(a)
63     print "Element: ",a," ordre: ",a.Order()

65     elorden2=[]
    #aqui metemos involuciones
67     for a in grup.Elements():
        if a.Order().sage()==2:
69         elorden2.append(a)

71     elordenmaj2=[]
    #aqui elementos de orden mayor a 2
73     for a in grup.Elements():
        if a.Order().sage()>2:
75         elordenmaj2.append(a)

77     ##### Crea una lista de listaS con r+z elementos del grupo que
    no conmutan entre ellos.
    listaS=[]
79     listadef=[]
    varcsz=Subsets(elordenmaj2,z)
81     #varcsz tiene los conjuntos de z elementos de orden >2
    varcsr=Subsets(elorden2,r)
83     #varcsr tiene conjuntos de r involuciones
    print "hay ",varcsr.cardinality()," subconjuntos para los
    generadores de aristas (involuciones)”
85     print "hay ",varcsz.cardinality()," subconjuntos para los
    generadores de arcos”
    for v in varcsz:
87         for w in varcsr:
            gen=list(set().union(v,w))
89             listadef.append(gen)
    #####
91     print "Hi han ",len(listadef)," listas totales”
    if listadef!=[]:
93         print ", por ejemplo: ",listadef[0]
    #####
95     ### GENERACION DEL DIGRAFO DE CAYLEY
    #####
97     print "_____”
    print "Hacemos digrafos de cayley”
99     comptador=0
    comptadordolent=0
101    comptadorfc=0

```

```

103     for conjuntcayley in listadef:
104         #en listadef estan las mezclas posibles entre elementos de
105         varcsz y varcsr
106         vertices=[]
107         for a in grup.Elements():
108             vertices.append(a)
109         arcs=[]
110         for v in vertices:
111             for g in conjuntcayley:
112                 arcs.append((v,v*g))
113
114         G=nx.DiGraph()
115         G.add_nodes_from(vertices)
116         G.add_edges_from(arcs)
117         if G.out_degree(G.nodes()[0])!=r+z:
118             comptadordolent=comptadordolent+1
119
120         elif nx.is_strongly_connected(G):
121             comptadorfc=comptadorfc+1
122             #if nx.diameter(G)==k:
123             ###evalua que no haya errores y tenga diam k
124             if max(nx.shortest_path_length(G,source=vertices[0]).
125                 values())==k:
126                 comptador=comptador+1
127                 print "Trobat digraf cayley amb conjunt de Cayley: ",
128                 conjuntcayley
129                 if llistadigrafsdemoore==[]:
130                     #si es el primero adelante
131                     print "el digraf es nou"
132                     llistadigrafsdemoore.append(G)
133                 else:
134                     esisomorf=False
135                     #si no es el primero lo comparo con los otros que ha
136                     hallado
137                     for G2 in llistadigrafsdemoore:
138                         if esisomorf==False and nx.is_isomorphic(G,G2):
139                             print "el digraf no es nou"
140
141                             esisomorf=True
142                     if esisomorf==False:
143                         print "el digraf es nou"
144                         llistadigrafsdemoore.append(G)
145
146         print "Total digrafs fortament connexs: ",comptadorfc," de
147         Moore: ",comptador," dolents: ",comptadordolent, " no isomorfs: ",
148         len(llistadigrafsdemoore)
149         print "_____ "
150         for G in llistadigrafsdemoore:
151             H=DiGraph(G.edges())
152             print "es circulant? ",H.is_circulant(certificate=True)
153             H.show3d()
154         if len(llistadigrafsdemoore)>0:
155             entra=0

```

## Anexo II

Presentamos la tabla con los grafos óptimos  $C.A.(1, 2, k)$  hallados en exploración computacional en SAGE para valores de  $k$  entre 2 y 10.

Diámetro	Orden	Grafos óptimos
2	8	$Cay(\mathbb{Z}_8, \{1, 3, 4\})$
3	12	$Cay(\mathbb{Z}_{12}, \{1, 4, 6\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{12}, \{1, 6, 10\})$
4	18	$Cay(\mathbb{Z}_{18}, \{1, 4, 9\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{18}, \{1, 9, 16\})$
5	24	$Cay(\mathbb{Z}_{24}, \{1, 12, 21\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{24}, \{1, 10, 12\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{24}, \{1, 12, 22\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{24}, \{1, 5, 12\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0, 3), (1, 6), (1, 1)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0, 6), (1, 2), (1, 1)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0, 11), (1, 6), (1, 1)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0, 11), (0, 6), (1, 1)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \{(1, 0, 0), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\})$
6	32	$Cay(\mathbb{Z}_{32}, \{1, 16, 23\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{32}, \{1, 16, 26\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{32}, \{1, 16, 29\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{32}, \{1, 13, 16\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{32}, \{1, 10, 16\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}, \{(1, 11), (0, 1), (0, 8)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}, \{(1, 11), (1, 0), (1, 8)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}, \{(1, 11), (0, 5), (1, 8)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}, \{(1, 11), (0, 5), (0, 8)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}, \{(1, 11), (1, 13), (1, 8)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}, \{(1, 11), (0, 14), (1, 8)\})$
7	42	$Cay(\mathbb{Z}_{42}, \{1, 21, 30\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{42}, \{2, 18, 21\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{42}, \{2, 21, 26\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{42}, \{1, 21, 34\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{42}, \{2, 21, 39\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{42}, \{1, 9, 21\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{42}, \{1, 13, 21\})$
8	54	$Cay(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{18}, \{(0, 9), (0, 2), (2, 10)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{18}, \{(0, 9), (0, 4), (1, 17)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{18}, \{(0, 9), (1, 7), (1, 17)\})$

Diámetro	Orden	Grafos óptimos
9	66	$Cay(\mathbb{Z}_{66}, \{2, 33, 48\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{66}, \{2, 15, 33\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{66}, \{1, 10, 33\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{66}, \{2, 20, 33\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{66}, \{1, 24, 33\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{66}, \{1, 33, 57\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{66}, \{1, 33, 43\})$
10	80	$Cay(\mathbb{Z}_{80}, \{1, 12, 40\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{80}, \{1, 40, 52\})$ $Cay(\mathbb{Z}_{80}, \{1, 29, 40\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{40}, \{(1, 20), (0, 3), (1, 16)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{40}, \{(0, 20), (0, 3), (1, 7)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{40}, \{(1, 20), (0, 3), (0, 36)\})$ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{40}, \{(1, 20), (0, 3), (1, 27)\})$

## Bibliografia

- [1] Hoffman A.J., Singleton R.R.: *On Moore graphs with diameter 2 and 3*, IBM J.Res. Develop. 4(1960)pp.497-504.
- [2] Biggs, N.: *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press(1974)p.123.
- [3] Gimbert J., Moreno R., Ribó J.M., Valls M.: *Apropament a la teoria de grafs i als seus algorismes*, Col·lecció Eines (UdL) 1998.
- [4] Bosák J.: Partially directed Moore graphs, Math. Slovaca 29(2)(1979)pp. 181-196.
- [5] Gimbert J.: *Enumeration of almost Moore digraphs of diameter two*, Discrete Math. 231(2001)pp.177-190.
- [6] Nguyen M.H., Miller M., Gimbert J.; *On mixed Moore graphs*, Discrete Math. 307(2007)pp.964-970.
- [7] Nguyen M.H., Miller M.: *Moore bound for mixed networks*. Discrete Mathematics 308(23)(2008)pp.5499-5503.
- [8] López N., Pérez-Rosés H., Pujolàs J.: *Mixed Moore Cayley graphs*. Electronic Notes in Discrete Mathematics 46(2014)pp.193-200.
- [9] Jørgensen L.K.: *New mixed Moore graphs and directed strongly regular graphs*. Discrete Math. 338(6)(2015)pp.1011-1016.
- [10] López N.; Miret J.; Fernández C.: *Non existence of some mixed Moore graphs of diameter 2 using SAT*. Discrete Math.339(2016)pp.589-596.
- [11] López N., Pérez-Rosés H., Pujolàs J.: *A Moore-like bound for mixed abelian Cayley graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics 54(2016)pp.145-150.
- [12] Buset D., El Amiri M., Erskine G., Miller M., Pérez-Rosés H.: *A revised Moore bound for partially directed graphs*, Discrete Math.339(8)(2015)pp.2066-2069.
- [13] López N., Pérez-Rosés H.: *Degree/diameter problem for mixed graphs*, Procedia Computer Science 74(2015)pp.2-9.
- [14] Miller M., Siran J.: *Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem*, The Electronic Journal of Combinatorics 11(2012)pp.1-89.