UNIVERSITAT DE BARCELONA

Trabajo final de Grado

GRADO DE MATEMÁTICAS

Facultad de Matemáticas i Informática
Universitat de Barcelona

SPIN GLASSES

Autor: Manuel de la Rosa Fernández

Director: Dr. David Márquez-Carreras
Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística U.B.

Barcelona, 27 de junio de 2018

Abstract

At the beginning of the 70s, last century, physician scientists started to study, inside the studies about the state of matter, some mathematical structures called spin glasses. After that, and due to the need to go deeper in the knowledge of the study of the properties of these structures, mathematicians started to study them as well in order to understand their properties from a less physical point of view. In this paper we present an introduction to three of the easiest models of spin glasses.

In chapter one we will introduce spin glasses, and we will see an example which will help us to understand better this concept. We will also introduce the basic concepts which we will use along this paper, such as free energy and the Gibbs' measure.

We will use the next chapters to study several easy models of spin glasses. In chapter two we will study model REM, which is possibly one of the existing easiest models. Chapters three and four contain details about Sherrington and Kirkpatrick models, with and without external field respectively. In chapter four we will also see how the action of a magnetic field is modelled in this kind of structures, and we will obtain different results in both models.

2010 Mathematics Subject Classification. 82D30

Resumen

A principios de los años 70 del siglo pasado, los científicos físicos comenzaron a estudiar, dentro de los estudios sobre estados de la materia, unas estructuras matemáticas denominadas cristales de spin (spin glasses). Posteriormente, y debido a la necesidad de profundizar en el estudio de las propiedades de estas estructuras, los matemáticos comenzaron a estudiarlas también, para poder comprender sus propiedades desde un punto de vista menos físico. En este trabajo presentamos una introducción a tres de los modelos más sencillos de spin glasses.

En el capítulo 1 realizaremos una introducción a los spin glasses, y veremos un ejemplo que nos ayudará a comprender mejor este concepto. Introduciremos los conceptos básicos que utilizaremos durante todo el trabajo, como son la energía libre y la medida de Gibbs.

Dedicaremos los siguientes capítulos al estudio de diferentes modelos sencillos de spin glasses. En el capítulo 2 estudiaremos el modelo REM, que es posiblemente uno de los modelos más sencillos que existe. Los capítulos 3 y 4 están dedicados a los modelos de Sherrington y Kirkpatrick, sin y con campo externo respectivamente. En este capítulo 4 veremos también como, en este tipo de estructuras, se modeliza la acción de un campo magnético, y obtendremos diferentes resultados en ambos modelos.

Índice

1. Introducción

1.1. Motivación

Imaginemos una población formada por N individuos. Queremos clasificar a los individuos de la población en dos grupos según su afinidad. Con esta finalidad, podemos suponer que entre cada dos individuos existe un sentimiento de simpatía o de antipatía, que supondremos recíproco. Nuestro objetivo es colocar a todos los individuos en dos grupos, de manera que todos los integrantes de ambos grupos se llevaran bien entre ellos. A priori parece una tarea complicada.

Para intentar abordar este problema, podemos asignar a cada par de individuos i y j un número $J_{i,j}$, que será 1 si son amigos, y -1 si no lo son. A cada individuo i le asignaremos, además, una variable aleatoria s_i que valdrá 1 ó -1 en función del grupo en el que quede situado dicho individuo. En esta situación, dado el conjunto de relaciones

$$J = \{J_{i,j}, 1 \leq i < j \leq N\}$$

nos proponemos minimizar la cantidad de desencanto generada por la clasificación

$$s = \{s_i, 1 \leq i \leq N\}$$

en los grupos que hemos realizado. Queremos, por tanto, minimizar

$$H(J, s) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{i,j} s_i s_j.$$

A partir de esta definición podemos observar que, si el valor de $H(J, s)$ es elevado, tendremos más parejas de individuos con sentimiento de antipatía dentro del mismo grupo, y parejas que se llevan bien en grupos diferentes. Este hecho indica que habrá un mayor grado de frustración, la cual generará inestabilidad debido al deseo de los individuos a cambiar su agrupación. Vale la pena observar también que, con esta construcción, el conjunto de relaciones J que hemos definido anteriormente genera un desorden.

En este sencillo ejemplo se intuye la dificultad de determinar los valores de s_i que minimizan el desencanto del grupo. Parece entonces adecuado abordar el problema desde el punto de vista de la Probabilidad, y asignar a cada clasificación s una cierta probabilidad. De esta forma, estudiar la medida de probabilidad obtenida puede permitirnos resolver la mejor clasificación que buscamos.

Situaciones con planteamientos análogos a este ejemplo, aunque quizás más interesantes, se plantean de manera natural en diferentes campos de la física (como pueden ser problemas de magnetismo, mecánica estadística, estados de la materia,...), la inteligencia artificial, la computación, las redes neuronales,... Por este motivo es conveniente estudiar la energía y otras propiedades de sistemas físicos en los que podemos encontrar un número finito de configuraciones, como son los spin glasses.

1.2. El marco matemático

Los spin glasses son sistemas de N partículas en el que cada partícula puede tomar dos valores: -1 y + 1. El conjunto de todos los posibles valores de las N partículas se denomina el espacio de configuraciones, y lo designamos como $\Sigma_N = \{-1, +1\}^N$. Una configuración $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ es un elemento de Σ_N , y cada una de las componentes σ_i de esta configuración es un spin.

Cada configuración tiene asociada una energía $H_N(\sigma)$ a partir de una función

$$H_N : \Sigma_N \longrightarrow \mathbb{R}$$

que recibe el nombre de hamiltoniano del sistema. El tipo de función de energía que escojamos determinará el modelo. Debido al desorden que pretendemos modelizar, la energía será una variable aleatoria.

A cada configuración le asignaremos un peso proporcional llamado factor de Boltzmann, dado por la expresión

$$\exp(-\beta H_N(\sigma))$$

donde $\beta \geq 0$ es un parámetro.

A partir de estos pesos asignaremos a cada configuración σ una probabilidad mediante la medida de Gibbs, es decir,

$$G_N(\sigma) = \frac{1}{Z_N} exp(-\beta H_N(\sigma))$$

donde Z_N es el factor de normalización (o función partición)

$$Z_N = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(-\beta H_N(\sigma)).$$

La medida de Gibbs puede interpretarse, desde un punto de vista físico, como la probabilidad de encontrarnos en una configuración σ cuando se ha llegado al equilibrio tras un baño térmico suficientemente largo de temperatura $T = \dfrac{1}{\beta}$.

Debemos tener en cuenta que la medida de Gibbs que acabamos de definir es dos veces aleatoria. Lo es respecto al espacio Σ_N , y respecto a la aleatoriedad asociada a la función H_N escogida. Por este motivo hablamos de dos tipos de esperanza diferentes, de manera que para una función $f : \Sigma_N \longrightarrow \mathbb{R}$ designamos $\langle . \rangle$ a la esperanza respecto a la medida de Gibbs G_N, esto es,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} f(\sigma) \exp(-\beta H_N(\sigma)) = \int_{\Sigma_N} f dG_N, \tag{1.1}$$

para después escribir

$$\nu(f) = E\left\langle f \right\rangle ,$$

donde E denota la esperanza respecto a la aleatoriedad de la energía. Podemos generalizar (1.1) para funciones $f : \Sigma_N^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de manera que en este caso

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z_N^n} \sum_{(\sigma^1, \dots \sigma^n) \in \Sigma_N^n} f(\sigma^1, \dots \sigma^n) \exp\left(- \sum_{1 \leq l \leq n} \beta H_N(\sigma^l) \right). \tag{1.2}$$

1.3. Estructura de la Memoria

En este trabajo veremos tres de los modelos más sencillos de spin glasses conocidos.

En el capítulo 2 introduciremos el modelo de energía aleatoria (REM). En este modelo las energías $H_N(\sigma)$ serán variables aleatorias gaussianas centradas, independientes e idénticamente distribuidas, con

$$EH_N^2(\sigma) = \frac{N}{2}.$$

A partir de esta suposición, estudiaremos los valores que, en este modelo, puede tomar la energía libre del mismo, que viene dada por

$$p_N(\beta) = \frac{1}{N} E(\log Z_N(\beta)).$$

Es un modelo verdaderamente sencillo, aunque veremos varios resultados técnicos antes de poder obtener el resultado que buscamos.

En el capítulo 3 estudiaremos el modelo de Sherrington-Kirkpatrick. En este modelo, el Hamiltoniano es de la forma

$$H_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} g_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

donde $\{g_{ij}\}$ son variables aleatorias gaussianas independientes e idénticamente distribuidas, con ley $\mathcal{N}(0, 1)$. De nuevo, como veremos en el capítulo 2 con el modelo REM, estudiaremos los valores de la energía libre en este modelo.

Finalmente, en el capítulo 4 estudiaremos el el modelo de Sherrington-Kirkpatrick con campo externo, en el que el Hamiltoniano es de la forma

$$-H_{N,\beta}(\sigma) = \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} g_{ij} \sigma_i \sigma_j + h \sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i$$

donde g_{ij} son variables aleatorias gaussianas independientes con ley $\mathcal{N}(0, 1)$, y el último término de la expresión representa la acción de un campo magnético externo. Es fácil ver que éste es un modelo que generaliza al anterior (de hecho, si $h = 0$ recuperamos el modelo de Sherrington-Kirkpatrick), aunque su estudio es más complicado. Para poder estudiar resultados en este modelo veremos una introducción a dos métodos importantes que se utilizan en spin glasses: el método del camino bueno y el método de la cavidad. Para finalizar el trabajo nos introduciremos en este modelo, estudiando el comportamiento asintótico de la superposición, y citando el resultado que nos indica el valor de la energía libre. No obstante, no veremos en este caso la demostración del cálculo de dicha energía.

2. El modelo REM

2.1. Introducción al modelo

El modelo REM (Random Energy Model), o modelo de energía aleatoria, es un modelo de spin glasses útil por su sencillez. No tiene gran interés real, ya que no existe interacción entre las diferentes partículas que forman el sistema. No obstante, su simplicidad permite estudiar sus propiedades, entender su comportamiento, e introducir conceptos importantes.

Consideremos un sistema de N partículas donde cada una de ellas puede tomar dos valores, +1 y -1. El conjunto de todos los posibles valores $\Sigma_N = \{-1, +1\}^N$ se denomina el espacio de configuraciones, tal y como hemos visto en el capítulo anterior. Un elemento $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ de Σ_N se llama configuración.

A partir de un hamiltoniano aleatorio

$$H_N : \Sigma_N \longrightarrow \mathbb{R}$$

hemos visto como, considerando un parámetro β, podemos definir una medida de probabilidad (medida de Gibbs) en Σ_N como

$$G_N(\{\sigma\}) = \frac{\exp(-\beta H_N(\sigma))}{Z_N}, \tag{2.1}$$

donde, en esta expresión,

$$Z_N = Z_N(\beta) = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(-\beta H_N(\sigma)) \tag{2.2}$$

es la función de partición.

Definimos el valor no aleatorio

$$p_N = p_N(\beta) = \frac{1}{N} E(\log Z_N(\beta)). \tag{2.3}$$

Este valor está estrechamente relacionado con un concepto importante en la física: la energía libre, que se define como

$$-\beta^{-1} p_N(\beta)$$

En nuestro estudio prescindiremos del término $-\beta^{-1}$.

En el modelo REM supondremos que las variables aleatorias $H_N(\sigma)$ son variables aleatorias gaussianas centradas, independientes, e idénticamente distribuidas, con $EH_N^2(\sigma) = \dfrac{N}{2}$. Por tanto, siguen una distribución normal $\mathcal{N}(0, \dfrac{N}{2})$.

En esta situación, vamos a intentar calcular límites para los valores que, en este modelo, puede tomar $p_N(\beta)$. Nuestro objetivo es probar que en el modelo REM se verifica

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\beta) = \frac{\beta^2}{4} + \log 2, \qquad \textit{si } \beta \leq 2\sqrt{\log 2}$$
$$\lim_{N\to\infty} p_N(\beta) = \beta\sqrt{\log 2}, \qquad \textit{si } \beta \geq 2\sqrt{\log 2}.$$

2.2. Resultados previos

Comencemos viendo tres resultados sobre variables aleatorias gaussianas que nos serán necesario.

Lema 2.1. *Sea g una variable aleatoria gaussiana con $E(g^2) = \tau^2$. Entonces*

$$E\exp(ag) = \exp\left(\frac{a^2\tau^2}{2}\right). \tag{2.4}$$

Demostración. Es suficiente ver que

$$E[\exp(ag)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ax - \frac{x^2}{2\tau^2}\right) dx$$

$$= \exp\left(\frac{a^2\tau^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-a\tau^2)^2}{2\tau^2}\right] dx.$$

Como

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-a\tau^2)^2}{2\tau^2}\right] dx = 1$$

por ser la integral de una densidad, tenemos que

$$E\exp(ag) = \exp\left(\frac{a^2\tau^2}{2}\right).$$

□

Proposición 2.2. *Sea g una variable aleatoria gaussiana centrada con $E(g^2) = \tau^2$. Sean $t > 0$ y L una constante. Entonces se verifica*

$$\frac{1}{L\left(1+\frac{t^2}{\tau^2}\right)}\exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \leq P\left(g \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right). \tag{2.5}$$

Demostración. Si X es una variable aleatoria cualquiera, se verifica

$$P\left(X \geq t\right)\exp(t) \leq E\left(\exp X\right).$$

Para verlo sólo hay que distinguir casos:

- Si X es una variable aleatoria discreta que toma los valores $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se verifica

$$\begin{aligned}E\left(\exp X\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\exp(a_k)P\left(X=a_k\right)\\&\geq \sum_{k=1}^{\infty}\exp(a_k)P\left(X=a_k\right)\mathbf{1}_{\{a_k\geq t\}}\\&\geq \exp(t)P\left(X\geq t\right).\end{aligned}$$

- Si, en cambio, X es una variable aleatoria absolutamente continua con densidad f_X, tenemos que

$$\begin{aligned}E\left(\exp X\right) &= \int_{\mathbb{R}}\exp(y)f_X(y)dy\\&\geq \int_t^{\infty}\exp(y)f_X(y)dy\\&\geq \exp(t)P\left(X\geq t\right).\end{aligned}$$

Por tanto, si g es una variable aleatoria gaussiana centrada, tenemos, gracias al resultado que acabamos de probar, y al lema anterior, que

$$\begin{aligned}P\left(g\geq t\right) &\leq \exp\left(-\lambda t\right)E\left(\exp(\lambda g)\right)\\&= \exp(-\lambda t)\exp\left(\frac{\lambda^2\tau^2}{2}\right)\\&\leq \exp\left(\lambda\tau-\frac{t}{\tau}\right)^2\exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right)\\&\leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right).\end{aligned}$$

Falta ver ahora la acotación inferior. La veremos para el caso $\tau=1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}P\left(g\geq t\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}\frac{1}{y}\left[y\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right]dy\end{aligned}$$

Utilizando entonces integración por partes,

$$\begin{aligned}P\left(g\geq t\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}\frac{1}{y}\left[y\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right]dy\\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}\frac{1}{y^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\\&\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1+t^2\right)}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty}\frac{1}{y^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy.\end{aligned}$$

Es suficiente ahora distinguir casos según el valor de t.

- En el caso $t > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} \frac{1}{y^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \leq P\left(g \geq t\right),$$

por lo que a partir del resultado anterior

$$P\left(g \geq t\right) \geq \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

- En el caso $0 < t < 1$,

$$P\left(g \geq t\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = L.$$

Por tanto, si $t > 0$, se verifica

$$P\left(g \geq t\right) \geq L \frac{1}{1+t^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

□

Hay que remarcar que, en el resultado anterior, el valor de la constante L no siempre es el mismo, ya que depende del valor de t.

Proposición 2.3. *Consideremos $g_1, ..., g_m$ variables aleatorias gaussianas centradas, no necesariamente independientes. Supongamos que $Eg_i^2 \leq \alpha^2$ para cada $i = 1, ...m$. Entonces, se verifica*

$$E \log\left(\sum_{i=1}^{m} \exp(\beta g_i)\right) \leq \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} + \log m \tag{2.6}$$

y

$$E\left(\max_{1 \leq i \leq m} g_i\right) \leq \alpha \sqrt{2 \log m}. \tag{2.7}$$

Además, si $\beta \geq \dfrac{\sqrt{2 \log m}}{\alpha}$,

$$E \log\left(\sum_{i=1}^{m} exp(\beta g_i)\right) \leq \beta \alpha \sqrt{2 \log m}. \tag{2.8}$$

Demostración. Las variables g_i son gaussianas, por lo que sabemos que

$$E \exp(\beta g_i) = \exp\left(\frac{1}{2} \beta^2 E g_i^2\right).$$

Aplicando el lema anterior, y la desigualdad de Jensen [2], obtenemos que

$$\begin{aligned} E\log\left(\sum_{i=1}^{m}\exp\left(\beta g_i\right)\right) &\leq \log\left(E\sum_{i=1}^{m}\exp(\beta g_i)\right) \\ &\leq \log\left(m\exp\left(\frac{1}{2}\beta^2\alpha^2\right)\right) \\ &= \frac{\beta^2\alpha^2}{2}+\log m. \end{aligned}$$

Esto prueba (2.6).

Por otra parte, como

$$\beta\max_{1\leq i\leq m} g_i \leq \log\left(\sum_{i=1}^{m}\exp\left(\beta g_i\right)\right),$$

a partir de (2.6) obtenemos que

$$\beta E\left(\max_{1\leq i\leq m} g_i\right) \leq E\log\left(\sum_{i=1}^{m}\exp\left(\beta g_i\right)\right) \leq \frac{\beta^2\alpha^2}{2}+\log m.$$

Tomando $\beta=\dfrac{\sqrt{2\log m}}{\alpha}$ obtenemos (2.7).

Finalmente, consideremos la función

$$\varphi(\beta)=E\left(\log\left(\sum_{i=1}^{m}\exp\left(\beta g_i\right)\right)\right).$$

Ésta es una función derivable, por ser las variables g_i gaussianas, y gracias a las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo. Derivando esta expresión obtenemos

$$\varphi'(\beta)=E\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} g_i\exp\left(\beta g_i\right)}{\sum_{i=1}^{m}\exp\left(\beta g_i\right)}\right]\leq E\left(\max_{1\leq i\leq m} g_i\right).$$

El teorema fundamental del cálculo, y esta última acotación que hemos encontrado de $\varphi'(\beta)$, nos permite asegurar que

$$\begin{aligned} \varphi(\beta)-\varphi(\beta_0) &= \int_{\beta_0}^{\beta}\varphi'(x)dx \\ &\leq \alpha\sqrt{2\log m}\left(\beta-\beta_0\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi(\beta) &\leq \alpha\sqrt{2\log m}\left(\beta-\beta_0\right)+\varphi(\beta_0) \\ &= \beta\alpha\sqrt{2\log m}+\varphi(\beta_0)-\beta_0\alpha\sqrt{2\log m}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

[2] Ver apéndice

Utilizando el resultado obtenido en (2.6), podemos asegurar que, para

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{2\log m}}{\alpha},$$

se verifica

$$\varphi(\beta_0) \leq \frac{\beta_0^2\alpha^2}{2} + \log m = 2\log m.$$

Recuperando ahora el cálculo realizado en (2.9), con este valor de β_0 tenemos que

$$\varphi(\beta) \leq \beta\alpha\sqrt{2\log m} + 2\log m - 2\log m = \beta\alpha\sqrt{2\log m}.$$

□

El siguiente resultado nos permite establecer una cota superior para los valores de $p_N(\beta)$.

Proposición 2.4. *Supongamos que las variables aleatorias $H_N(\sigma)$ son variables gaussianas, centradas, no necesariamente independientes, y que para todo σ ,*

$$EH_N^2(\sigma) \leq \frac{N}{2}.$$

Entonces se verifica

$$p_N(\beta) \leq \frac{\beta^2}{4} + \log 2. \tag{2.10}$$

Si, además, $\beta \geq 2\sqrt{\log 2}$, tenemos que

$$p_N(\beta) \leq \beta\sqrt{\log 2}. \tag{2.11}$$

Demostración. Es suficiente tomar $m = 2^N$ y $\alpha = \sqrt{\dfrac{N}{2}}$ en la proposición anterior para obtener

$$\begin{aligned} p_N(\beta) &= \frac{1}{N}E\log Z_N(\beta) \\ &= \frac{1}{N}E\log\sum_{\sigma\in\Sigma_N}\exp(-\beta H_N(\sigma)) \\ &\leq \frac{1}{N}\left[\frac{\beta^2 N}{4} + \log 2^N\right], \end{aligned}$$

probando así (2.10).

Supongamos ahora que $\beta \geq 2\sqrt{\log 2}$. Es obvio que

$$Z_N \geq \exp\left(\beta \max_{\sigma\in\Sigma_N}(-H_N(\sigma))\right).$$

Por tanto se verifica

$$p_N(\beta) \geq \frac{1}{N} E \log \exp \left(\beta \max_{\sigma \in \Sigma_N} (-H_N(\sigma)) \right) = \frac{\beta}{N} E \max_{\sigma \in \Sigma_N} (-H_N(\sigma)) \, .$$

Tomando $\beta = 2\sqrt{\log 2}$, y utilizando (2.10), se obtiene

$$\frac{1}{N} E \max_{\sigma \in \Sigma_N} (-H_N(\sigma)) \leq \sqrt{\log 2}.$$

Observemos que, si $\langle . \rangle$ representa la esperanza respecto a la medida de Gibbs, tenemos que

$$\frac{d}{d\beta} \log Z_N(\beta) = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} -H_N(\sigma) \exp(-\beta H_N(\sigma)) = \langle -H_N(\sigma) \rangle \, .$$

Por tanto,

$$\frac{d}{d\beta} p_N(\beta) = \frac{1}{N} E \, \langle -H_N(\sigma) \rangle \leq \frac{1}{N} E \left[\max_{\sigma \in \Sigma_N} (-H_N(\sigma)) \right] \leq \sqrt{\log 2}.$$

Integrando esta expresión, para $\beta \geq 2\sqrt{\log 2}$ obtenemos

$$\int_{2\sqrt{\log 2}}^{\beta} \frac{d}{d\mu} p_N(\mu) \, d\mu \leq \int_{2\sqrt{\log 2}}^{\beta} \sqrt{\log 2} \, d\mu,$$

esto es,

$$p_N(\beta) - p_N(2\sqrt{\log 2}) \leq \beta\sqrt{\log 2} - 2\log 2.$$

Utilizando (2.10), con $\beta = 2\sqrt{\log 2}$, sabemos que $p_N(2\sqrt{\log 2}) \leq 2\log 2$. Entonces, a partir de la expresión anterior,

$$p_N(\beta) \leq \beta\sqrt{\log 2} - 2\log 2 + p_N(2\sqrt{\log 2}) \leq \beta\sqrt{\log 2}$$

De esta forma, si $\beta \geq 2\sqrt{\log 2}$, tenemos que

$$p_N(\beta) \leq \beta\sqrt{\log 2}.$$

□

2.3. Valores de la energía libre en el modelo REM

La siguiente proposición nos permite obtener el resultado que estábamos buscando. Este resultado nos permite conocer el valor de $p_N(\beta)$ cuando N tiende a ∞.

Proposición 2.5. *En el modelo REM se verifica*

$$\lim_{N \to \infty} p_N(\beta) = \frac{\beta^2}{4} + \log 2, \qquad si \ \beta \leq 2\sqrt{\log 2}$$

$$\lim_{N \to \infty} p_N(\beta) = \beta\sqrt{\log 2}, \qquad si \ \beta \geq 2\sqrt{\log 2}.$$

Demostración. Consideremos un parámetro s, que más adelante concretaremos, y

$$X = card\,\{\sigma \in \Sigma_N : -H_N(\sigma) \geq sN\}$$

Recordemos que, si T es una variable aleatoria que toma valores en los enteros positivos, podemos calcular su esperanza como

$$ET = \sum_{k\geq 0} P(T \geq k)$$

Entonces, si definimos los valores

$$a_N = P(-H_N(\sigma) \geq sN)$$

y los conjuntos

$$B_N = \{\sigma \in \Sigma_N : -H_N(\sigma) \geq sN\},$$

por ser las variables $H_N(\sigma)$ idénticamente distribuidas,

$$EX = \sum_{\sigma\in\Sigma_N} P\left(-H_N(\sigma) \geq sN\right) = 2^N P(-H_N(\sigma) \geq sN) = 2^N a_N.$$

Observamos que la función de distribución no depende de σ, por lo que a_N tampoco.

Consideremos

$$X^2 = card\left\{\left(\sigma^1, \sigma^2\right) \in \Sigma_N^2 : -H_N(\sigma^1) \geq sN, -H_N(\sigma^2) \geq sN\right\}$$

$$= \sum_{(\sigma^1,\sigma^2)\in\Sigma_N^2} \mathbf{1}_{\{-H_N(\sigma^1)\geq sN, -H_N(\sigma^2)\geq sN\}}.$$

Entonces

$$EX^2 = \sum_{(\sigma^1,\sigma^2)\in\Sigma_N^2} P\left(-H_N(\sigma^1) \geq sN, -H_N(\sigma^2) \geq sN\right)$$

Para realizar este cálculo tenemos que distinguir dos casos:

- Si $\sigma^1 = \sigma^2$, tenemos

$$P\left(-H_N(\sigma^1) \geq sN, -H_N(\sigma^2) \geq sN\right) = P(-H_N(\sigma^1) \geq sN) = a_N.$$

- Si $\sigma^1 \neq \sigma^2$, entonces gracias a la independencia

$$P\left(-H_N(\sigma^1) \geq sN, -H_N(\sigma^2) \geq sN\right) = P(-H_N(\sigma^1) \geq sN)^2 = a_N^2.$$

Por tanto, retomando el cálculo anterior,

$$\begin{aligned} EX^2 &= 2^N P(-H_N(\sigma^1)) + 2^N(2^N - 1)P(-H_N(\sigma^1) \geq sN)^2 \\ &= 2^N a_N + 2^N(2^N - 1)a_N^2 \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} E\left(X - EX^2\right) &= EX^2 - (EX)^2 = 2^N a_N + 2^N(2^N - 1)a_N^2 - 2^{2N}a_N^2 \\ &= 2^N a_N(1 - a_N) \leq 2^N a_N. \end{aligned}$$

Si definimos ahora los conjuntos $A = \left\{X \leq 2^{N-1}a_N\right\}$, tenemos que

$$X - EX \leq 2^{N-1}a_N - 2^N a_N \leq -2^{N-1}a_N \leq 0,$$

por lo que

$$(X - EX)^2 \geq 2^{2N-2}a_N^2$$

Aplicando la desigualdad de Txebitxev [3] obtenemos que

$$P(A) = P\left(X \leq 2^{N-1}a_N\right) \leq P\left((X - EX)^2 \geq 2^{2N-2}a_N^2\right)$$

$$\leq \frac{E(X - EX)^2}{2^{2N-2}a_N^2} \leq \frac{2^N a_N}{2^{2N-2}a_N^2} = \frac{4}{2^N a_N}.$$

Por otra parte, en $A^c = \left\{X > 2^{N-1}a_N\right\}$ tenemos, utilizando los conjuntos B_N definidos anteriormente

$$\begin{aligned} Z_N(\beta) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(-\beta H_N(\sigma)) \\ &= \sum_{\sigma \in B_N} \exp(-\beta H_N(\sigma)) + \sum_{\sigma \in B_N^c} \exp(-\beta H_N(\sigma)) \\ &\geq \sum_{\sigma \in B_N} \exp(-\beta H_N(\sigma)). \end{aligned}$$

Entonces, como en B_N se verifica $-H_N(\sigma) \geq sN$,

$$Z_N(\beta) \geq \sum_{\sigma \in B_N} \exp(-\beta H_N(\sigma)) \geq \sum_{\sigma \in B_N} \exp(\beta s N) = X \exp(\beta s N),$$

de donde

$$Z_N(\beta) \geq 2^{N-1}a_N \exp(\beta s N).$$

Aplicando logaritmos en A^c ,

$$\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) \geq \frac{N-1}{N}\log 2 + \frac{1}{N}\log a_N + \beta s. \tag{2.12}$$

Consideremos ahora un $\sigma_0 \in \Sigma_N$ arbitrario en A, y escribimos

$$Z_N(\beta) \geq \exp(-\beta H_N(\sigma_0)).$$

Entonces,

$$\log Z_N(\beta) \geq -\beta H_N(\sigma_0),$$

[3] Ver apéndice

por lo que

$$\frac{1}{N}E\left(\mathbf{1}_A \log Z_N(\beta)\right) \geq -\frac{\beta}{N}E\left(\mathbf{1}_A H_N(\sigma_0)\right). \tag{2.13}$$

Las variables aleatorias $H_N(\sigma)$ siguen una distribución normal $\mathcal{N}\left(0, \frac{N}{2}\right)$. Por tanto, tenemos

$$E\left(\mathbf{1}_A H_N(\sigma_0)\right) \leq \left|E\left(\mathbf{1}_A H_N(\sigma_0)\right)\right| \leq E\left|\mathbf{1}_A H_N(\sigma_0)\right| \leq E\left|H_N(\sigma_0)\right|,$$

y como

$$E\left|H_N(\sigma)\right| = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \exp\left(-\frac{y^2}{N}\right) dy = \sqrt{\frac{N}{\pi}},$$

entonces, a partir de (2.13) , tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}E\left(\mathbf{1}_A \log Z_N(\beta)\right) &\geq -\frac{\beta}{N}E\left(\mathbf{1}_A H_N(\sigma_0)\right) \\
&\geq -\frac{\beta}{N}E\left|H_N(\sigma_0)\right| \\
&= -\frac{\beta}{N}\sqrt{\frac{N}{\pi}} = -\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\beta}{\sqrt{N}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

De hecho,

$$\frac{1}{N}E\left(\mathbf{1}_A \log Z_N(\beta)\right) \geq -L\frac{\beta}{\sqrt{N}},$$

donde L es una constante universal.

De esta forma, a partir de (2.12) y (2.14), podemos asegurar que

$$\begin{aligned}
p_N(\beta) &= \frac{1}{N}E\left(\log Z_N(\beta)\right) \\
&= \frac{1}{N}E\left(\mathbf{1}_A \log Z_N(\beta)\right) + \frac{1}{N}E\left(\mathbf{1}_{A^c} \log Z_N(\beta)\right) \\
&\geq -\frac{L\beta}{\sqrt{N}} + P\left(A^c\right)\left(\frac{N-1}{N}\log 2 + \frac{1}{N}\log a_N + \beta s\right) \\
&\geq -\frac{L\beta}{\sqrt{N}} + \left(1 - \frac{4}{2^N a_N}\right)\left(\frac{N-1}{N}\log 2 + \frac{1}{N}\log a_N + \beta s\right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Recordemos que, a partir de (2.5), si g es una variable aleatoria gaussiana centrada con $E(g^2) = \tau^2$, entonces, para todo $t > \tau$,

$$\frac{\tau}{Lt}\exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \leq P\left(g \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right).$$

Tomando entonces $t = sN$, $\tau^2 = \frac{N}{2}$, y $g = -H_N(\sigma)$, obtenemos

$$\frac{1}{Ls\sqrt{N}}\exp\left(-Ns^2\right) \leq P\left(-H_N(\sigma) \geq sN\right) \leq \exp\left(-Ns^2\right),$$

esto es,

$$\frac{1}{Ls\sqrt{N}}\exp\left(-Ns^2\right) \le a_N \le \exp\left(-Ns^2\right).$$

Si fijamos $s < \sqrt{\log 2}$, tenemos que

$$2^N a_N \ge \frac{2^N}{Ls\sqrt{N}}\exp\left(-Ns^2\right) = \frac{\exp\left[N\left(\log 2 - s^2\right)\right]}{Ls\sqrt{N}}$$

y, tomando límites, no es difícil ver que

$$\lim_N 2^N a_N \ge \lim_N \frac{\exp\left[N\left(\log 2 - s^2\right)\right]}{Ls\sqrt{N}} = +\infty.$$

Aplicando logaritmos en

$$a_N \ge \frac{1}{Ls\sqrt{N}}\exp\left(-Ns^2\right),$$

obtenemos que

$$\frac{1}{N}\log a_N \ge \frac{1}{N}\left[\log\left(\frac{1}{Ls\sqrt{N}}\right) - Ns^2\right] = \frac{1}{N}\log\left(\frac{1}{Ls\sqrt{N}}\right) - s^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} -s^2.$$

A partir de (2.15) obtenemos

$$\liminf_{N\longrightarrow\infty} p_N(\beta) \ge \log 2 - s^2 + \beta s. \tag{2.16}$$

De esta manera:

- si $\beta < 2\sqrt{\log 2}$, tomando $s = \frac{\beta}{2}$, a partir de este cálculo tenemos que

$$\liminf_{N\longrightarrow\infty} p_N(\beta) \ge \frac{\beta^2}{4} + \log 2.$$

  Por otra parte, vimos en (2.10) que

$$p_N(\beta) \le \frac{\beta^2}{4} + \log 2.$$

  Entonces, a fortiori,

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\beta) = \frac{\beta^2}{4} + \log 2.$$

- Si, en cambio, $\beta \ge 2\sqrt{\log 2}$, haciendo $s \longrightarrow \sqrt{\log 2}$ obtenemos, a partir de (2.16) , que

$$\liminf_{N\longrightarrow\infty} p_N(\beta) \ge \beta\sqrt{\log 2}.$$

  Como vimos en (2.11) , en esta situación,

$$p_N(\beta) \le \beta\sqrt{\log 2},$$

  por lo que entonces,

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\beta) = \beta\sqrt{\log 2}.$$

$\square$

3. El modelo Sherrington-Kirkpatrick

3.1. Introducción al modelo

En este modelo de spin glasses, el Hamiltoniano es de la forma

$$-H_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1\leq i<j\leq N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{3.1}$$

donde $\{g_{ij}\}$ son variables aleatorias gaussianas independientes e idénticamente distribuidas, con ley $\mathcal{N}(0,1)$.

Los Hamiltonianos son, por tanto, variables aleatorias gaussianas centradas. No obstante, en el caso de este modelo, si tomamos dos configuraciones diferentes σ^1, σ^2, sus energías no son independientes. Esto se debe a que

$$\begin{aligned} E\left(H_N(\sigma^1)H_N(\sigma^2)\right) &= \frac{1}{N}\sum_{1\leq i<j\leq N} \sigma_i^1\sigma_j^1\sigma_i^2\sigma_j^2 \\ &= \frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}\sum_{1\leq i\leq N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

En el cálculo de esta covarianza, observamos que aparece la cantidad

$$R_{1,2} = R_{1,2}(\sigma^1,\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{1\leq i\leq N}\sigma_i^1\sigma_i^2. \tag{3.3}$$

Llamamos a esta cantidad superposición (overlap) entre las configuraciones σ^1 y σ^2. Es fácil observar que, cuanto más parecidas son ambas configuraciones, más cercano a 1 será el valor de la superposición.
De esta forma, si

$$d\left(\sigma^1,\sigma^2\right) = card\left\{i\leq N : \sigma_i^1 \neq \sigma_i^2\right\}$$

es la distancia de Hamming, que mide el número de coordenadas diferentes entre ambas configuraciones, entonces[4]

$$d\left(\sigma^1,\sigma^2\right) = \frac{N}{2}\left(1-R_{1,2}\right),$$

esto es,

$$R_{1,2} = \frac{N-2d(\sigma^1,\sigma^2)}{N}.$$

Además, a partir de (3.2) es evidente que en este modelo

$$EH_N^2(\sigma) = \frac{N-1}{2}.$$

[4]Esta relación muestra que $R_{1,2}$, y por tanto la correlación de la familia $H_N(\sigma)$, está estrechamente relacionada con la estructura del espacio (Σ_N, d) .

Para establecer el Hamiltoniano de este modelo consideramos que dos elementos siempre interaccionan. Esto hace que éste no sea un modelo válido para la interacción desordenada entre átomos. Un modelo más realista localizaría los átomos en los vértices de una red, y supondría que la fuerza de interacción entre ambos disminuiría al aumentar su distancia. Estos modelos son muy difíciles de estudiar, incluso haciendo simplificaciones como, por ejemplo, la de suponer que un átomo interactúa únicamente con sus vecinos más cercanos. Por este motivo Sherrington y Kirkpatrick introdujeron el Hamiltoniano (3.1) , en el que la localización geométrica de los átomos se ignora, y todos los átomos interactúan entre ellos. Los modelos que presentan esta simplificación se denominan modelos en media (mean field models). Los más habituales en la naturaleza son los modelos comentados anteriormente, esto es, aquellos en los que se tiene en cuenta la localización geométrica de las partículas y en los que los átomos interactúan con sus vecinos más próximos. Estos modelos se denominan modelos reales.

El Hamiltoniano (3.1) presenta una simetría muy especial: la medida de Gibbs es invariante por la transformación $\sigma \longrightarrow -\sigma$. Para evitar pérdida de información por las propiedades especiales como ésta, podemos considerar la versión de (3.1) con campo externo, esto es, con Hamiltoniano

$$-H_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1\leq i<j\leq N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + h \sum_{1\leq i\leq N} \sigma_i \tag{3.4}$$

donde el último término representa la acción de un campo externo. Trataremos este modelo Sherrington-Kirkpatrick con campo externo en el siguiente capítulo.

Como hicimos con el modelo REM, vamos a intentar establecer valores para la energía libre en este modelo.

3.2. Resultados previos

Por una cuestión estrictamente de cálculo, podemos escribir, de manera totalmente equivalente a (3.1)

$$-H_{N,\beta}(\sigma) = \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1\leq i<j\leq N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j.$$

De esta manera, revisitando los cálculos realizados al principio del capítulo, obtenemos, a partir de (3.1) ,

$$E\left(H_{N,\beta}(\sigma^1)H_{N,\beta}(\sigma^2)\right) = \frac{\beta^2}{2}(NR_{1,2}^2 - 1), \tag{3.5}$$

y por tanto,

$$EH_{N,\beta}^2(\sigma) = \frac{\beta^2}{2}\left(N-1\right).$$

Entonces, utilizando la independencia de las variables $H_{N,\beta}$, y el resultado obtenido en (2.4),

$$\begin{aligned} EZ_N(\beta) &= E \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp\left(-H_{N,\beta}(\sigma)\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp\left(\frac{1}{2} E H^2_{N,\beta}(\sigma)\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp\left[\frac{1}{2}\beta^2 \frac{N-1}{2}\right] \\ &= 2^N \exp\left(\frac{\beta^2}{4}(N-1)\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Citamos ahora un resultado que nos será necesario para continuar nuestro estudio.

Lema 3.1. *Si* $\delta < 1$ *se verifica*

$$2^{-N} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp\left[\frac{\delta}{2N}\left(\sum_{i \le N} \sigma_i^2\right)^2\right] \le \frac{1}{\sqrt{1-\delta}}. \tag{3.7}$$

No realizaremos la demostración de este resultado, que puede encontrarse en [9], ya que no es de gran interés para este trabajo.

El siguiente lema nos permite demostrar que, en este modelo, se verifica

$$EZ_N^2(\beta) \le K(\beta)\left(EZ_N(\beta)\right)^2 \tag{3.8}$$

siendo $K(\beta)$ una constante que depende únicamente de β.

Lema 3.2. *Si* $\alpha + \beta^2 < 1$*, entonces se verifica*

$$E \sum_{\sigma^1, \sigma^2 \in \Sigma_N} \exp\left(-H_N(\sigma^1) - H_N(\sigma^2) + \frac{\alpha N}{2} R_{1,2}^2\right) \le \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2-\alpha}}\left(EZ_N(\beta)\right)^2.$$

Demostración. A partir de (3.5), tenemos que

$$\begin{aligned} E\left(\left(-H_N(\sigma^1) - H_N(\sigma^2)\right)^2\right) &= E\left[H_N^2(\sigma^1) + H_N^2(\sigma^2) + 2H_N(\sigma^1)H_N(\sigma^2)\right] \\ &= \frac{\beta^2}{2}(N-1) + \frac{\beta^2}{2}(N-1) + \beta^2\left(NR_{1,2}^2 - 1\right) \\ &= \beta^2(N-2) + \beta^2 N R_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, como, a partir de la definición de superposición se verifica

$$\frac{\alpha N}{2} R_{1,2}^2 = \frac{\alpha N}{2}\left(\frac{1}{N}\sum_{1 \le i \le N} \sigma_i^1 \sigma_i^2\right)^2 = \frac{\alpha}{2N}\left(\sum_{1 \le i \le N} \sigma_i^1 \sigma_i^2\right)^2,$$

entonces, podemos asegurar que

$$
\begin{aligned}
&E\left[\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(-H_N(\sigma^1)-H_N(\sigma^2)+\frac{\alpha N}{2}R_{1,2}^2\right)\right]\\
&=E\left[\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(-H_N(\sigma^1)-H_N(\sigma^2)\right)\exp\left(\frac{\alpha}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)\right]\\
&=\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\alpha}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)E\left[\exp\left(-H_N(\sigma^1)-H_N(\sigma^2)\right)\right]\\
&=\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\alpha}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)\exp\left[\frac{1}{2}E\left(-H_N(\sigma^1)-H_N(\sigma^2)\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Utilizando ahora los dos cálculos realizados al principio de esta demostración, sabemos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\alpha}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)\exp\left[\frac{1}{2}E\left(-H_N(\sigma^1)-H_N(\sigma^2)\right)^2\right]\\
&=\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\alpha}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)\exp\left(\frac{\beta^2}{2}(N-2)\right)\\
&\qquad\times\exp\left(\frac{\beta^2}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)\\
&=\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\delta}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)\exp\left(\frac{\beta^2}{2}(N-2)\right),
\end{aligned}
$$

donde $\delta=\alpha+\beta^2$.

Observemos que, a partir de (3.6), tenemos que

$$EZ_N(\beta)=2^N\exp\left(\frac{\beta^2}{4}(N-1)\right)>2^N\exp\left(\frac{\beta^2}{4}(N-2)\right),$$

por lo que

$$\left(EZ_N(\beta)\right)^2>2^{2N}\exp\left(\frac{\beta^2}{2}(N-2)\right),$$

esto es,

$$\exp\left(\frac{\beta^2}{2}(N-2)\right)<2^{-2N}\left(EZ_N(\beta)\right)^2.$$

De esta forma, retomando el cálculo anterior, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&E\left[\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(-H_N(\sigma^1)-H_N(\sigma^2)+\frac{\alpha N}{2}R_{1,2}^2\right)\right]\\
&=\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\delta}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)\exp\left(\frac{\beta^2}{2}(N-2)\right)\\
&\le 2^{-2N}\left(EZ_N(\beta)\right)^2\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\delta}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Tomando entonces $\tau_i=\sigma_i^1\sigma_i^2$, y utilizando el resultado enunciado en (3.7), obtenemos el resultado que queríamos demostrar:

$$
\begin{aligned}
&E\left[\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(-H_N(\sigma^1)-H_N(\sigma^2)+\frac{\alpha N}{2}R_{1,2}^2\right)\right]\\
&\le 2^{-2N}\left(EZ_N(\beta)\right)^2\sum_{\sigma^1,\sigma^2\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\delta}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)^2\right)\\
&=2^{-N}\left(EZ_N(\beta)\right)^2\sum_{\sigma^2\in\Sigma_N}\left[2^{-N}\sum_{\sigma^1\in\Sigma_N}\exp\left(\frac{\delta}{2N}\left(\sum_{1\le i\le N}\tau_i\right)^2\right)\right]\\
&\le\left(EZ_N(\beta)\right)^2 2^{-N}\sum_{\sigma^2\in\Sigma_N}\frac{1}{\sqrt{1-\delta}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{1-\delta}}\left(EZ_N(\beta)\right)^2.
\end{aligned}
$$

□

Tomando $\alpha=0$ en el resultado obtenido en el lema anterior, tenemos que

$$EZ_N^2(\beta)\le\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(EZ_N(\beta)\right)^2, \tag{3.9}$$

concretando así la acotación anunciada en (3.8).

Proposición 3.3. *Consideremos una variable aleatoria positiva, $X\ge 0$. Entonces se verifica*

$$P\left(X\ge\frac{1}{2}EX\right)\ge\frac{1}{4}\frac{\left(EX\right)^2}{EX^2}.$$

Demostración. Es suficiente tomar el conjunto $A=\left\{X\ge\frac{1}{2}EX\right\}$, y entonces

$$EX=E(X\mathbf{1}_A)+E(X\mathbf{1}_{A^c})\le E(X\mathbf{1}_A)+\frac{1}{2}EX.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\frac{1}{2}EX \leq E(X\mathbf{1}_A) \leq \left(EX^2\right)^{\frac{1}{2}} (P(A))^{\frac{1}{2}},$$

de donde

$$\frac{1}{4}(EX)^2 \leq EX^2 P(A)$$

que era el resultado que queríamos demostrar.

$\square$

A partir del resultado visto en esta proposición, y de (3.9), podemos asegurar que

$$P\left(Z_N(\beta) \geq \frac{1}{2}EZ_N(\beta)\right) \geq \frac{1}{4}\frac{(EZ_N(\beta))^2}{EZ_N^2(\beta)} \geq \frac{1}{4}\sqrt{1-\beta^2}. \tag{3.10}$$

De esta forma, a partir de (3.6),

$$P\left(Z_N(\beta) \geq 2^{N-1}\exp\left(\frac{\beta^2}{4}(N-1)\right)\right) \geq \frac{1}{4}\sqrt{1-\beta^2},$$

y, aplicando logaritmos, obtenemos

$$P\left(\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) \geq \frac{N-1}{N}\left(\frac{\beta^2}{4}+\log 2\right)\right) \geq \frac{1}{4}\sqrt{1-\beta^2}. \tag{3.11}$$

El siguiente es un resultado técnico que necesitaremos para probar el resultado central de este capítulo. No incluiremos la demostración porque requiere técnicas que no hemos incluido en este trabajo. No obstante puede encontrarse una demostración completa en [1, pág. 251-252], o en [9, pág. 75-76] .

Proposición 3.4. *Consideremos una función Lipschitz F en $\mathbb{R}^M$, con constante de Lipschitz* [5] *L. Si $g_1, ..., g_M$ son variables aleatorias gaussianas estándar, e independientes, y $g = (g_1, ..., g_M)$, entonces para todo $t > 0$ se verifica*

$$P\left(|F(g) - EF(g)| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{4L}\right). \tag{3.12}$$

Observemos que, en la proposición anterior, la desigualdad obtenida no depende de M.

Proposición 3.5. *Se verifica, para todo β, y para todo $t > 0$,*

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) - p_N(\beta)\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nt^2}{2\beta^2}\right). \tag{3.13}$$

[5] Decimos que una función F es Lipschitz, con constante de Lipschitz $L \geq 0$, si dados x,y cualesquiera de $\mathbb{R}^M$ se verifica $|F(x) - F(y)| \leq Ld(x,y)$, donde d es la distancia euclídea en $\mathbb{R}^M$.

Demostración. Consideremos $M = \dfrac{N(N-1)}{2}$.
Entonces, para cada σ de Σ_N tomamos el punto de $\mathbb{R}^M$

$$a(\sigma) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{N}}\sigma_i\sigma_j\right)_{1\leq i<j\leq N}.$$

Si $g = (g_1, ..., g_M)$ verifica las condiciones de la proposición 3.4, esto es, las componentes son variables aleatorias gaussianas estándar independientes, entonces

$$-H_N(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1\leq i<j\leq N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j = g \cdot a(\sigma)$$

donde el último término indica el producto escalar en $\mathbb{R}^M$.

Consideremos ahora la función

$$F(x) = \frac{1}{N} \log\left[\sum_{\sigma\in\Sigma_N} \exp\left(a(\sigma)\cdot x\right)\right].$$

A partir de esta definición, se cumple

$$\begin{aligned} F(g) &= \frac{1}{N} \log\left[\sum_{\sigma\in\Sigma_N} \exp\left(a(\sigma)\cdot g\right)\right] \\ &= \frac{1}{N} \log\left[\sum_{\sigma\in\Sigma_N} \exp\left(-H_N(\sigma)\right)\right] \\ &= \frac{1}{N} \log Z_N. \end{aligned}$$

Por otra parte, como la norma euclídea de $a(\sigma)$ verifica que

$$\|a(\sigma)\| = \left[\sum_{1\leq i<j\leq N} \left(\frac{\beta}{\sqrt{N}}\sigma_i\sigma_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \beta\sqrt{\frac{N-1}{2}} \leq \beta\sqrt{\frac{N}{2}},$$

entonces, dados dos puntos x e y de $\mathbb{R}^M$, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\|a(\sigma)\cdot x - a(\sigma)\cdot y\| = \|a(\sigma)(x-y)\| \leq \|a(\sigma)\|\|x-y\| \leq \beta\sqrt{\frac{N}{2}}d(x,y),$$

de donde

$$a(\sigma)\cdot x \leq a(\sigma)\cdot y + \beta\sqrt{\frac{N}{2}}d(x,y).$$

Por tanto, se cumplirá

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\in\Sigma_N} \exp\left(a(\sigma)\cdot x\right) &\leq \sum_{\sigma\in\Sigma_N} \exp\left[a(\sigma)\cdot y + \beta\sqrt{\frac{N}{2}}d(x,y)\right] \\ &= \exp\left(\beta\sqrt{\frac{N}{2}}d(x,y)\right) \sum_{\sigma\in\Sigma_N} \exp\left(a(\sigma)\cdot y\right) \end{aligned}$$

y aplicando logaritmos, obtenemos

$$\frac{1}{N}\log\left[\sum_{\sigma\in\Sigma_N}\exp\left(a(\sigma)\cdot x\right)\right]\leq\frac{\beta}{N}\sqrt{\frac{N}{2}}d(x,y)+\frac{1}{N}\log\left[\sum_{\sigma\in\Sigma_N}\exp\left(a(\sigma)\cdot y\right)\right],$$

esto es,

$$F(x)\leq F(y)+\frac{\beta}{\sqrt{2N}}d(x,y),$$

o, equivalentemente,

$$F(x)-F(y)\leq\frac{\beta}{\sqrt{2N}}d(x,y).$$

Utilizando un argumento completamente análogo, se demuestra que

$$F(y)-F(x)\leq\frac{\beta}{\sqrt{2N}}d(x,y),$$

por lo que podemos asegurar que

$$|F(x)-F(y)|\leq\frac{\beta}{\sqrt{2N}}d(x,y).$$

De esta manera hemos visto que la función F es Lipschitz, con constante de Lipschitz $L=\frac{\beta}{\sqrt{2N}}$, de manera que podemos aplicar la proposición 3.4, y obtenemos

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\log Z_N(\beta)-p_N(\beta)\right|\geq t\right)\leq 2\exp\left(-\frac{Nt^2}{2\beta^2}\right).$$

□

3.3. Valores de la energía libre en el modelo Sherrington-Kirkpatrick

Los resultados que hemos visto en el apartado anterior nos permiten ya, como hicimos en el capítulo anterior con el modelo REM, encontrar valores para los límites de la energía libre en el modelo que ahora nos ocupa.

No obstante, el resultado que obtuvimos en el modelo REM es más general, ya que en el modelo de Sherrington y Kirkpatrick el resultado únicamente es válido para valores de $\beta<1$.

Proposición 3.6. *En el modelo Sherrington-Kirkpatrick, si $\beta<1$ se verifica*

$$\lim_{N\to\infty}p_N(\beta)=\frac{\beta^2}{4}+\log 2.$$

Demostración. A partir de la proposición 3.5 sabemos que para todo β, y para todo $t > 0$ se verifica

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) - p_N(\beta)\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{Nt^2}{2\beta^2}\right).$$

Tomando entonces $t = \frac{s\beta}{\sqrt{N}}$, obtenemos que

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) - p_N(\beta)\right| \geq \frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right).$$

Esta expresión nos permite afirmar, gracias a la evidente inclusión de conjuntos

$$\left\{\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) - p_N(\beta) \geq \frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right\} \subseteq \left\{\left|\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) - p_N(\beta)\right| \geq \frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right\},$$

y a la monotonía de la probabilidad, que

$$P\left(\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) - p_N(\beta) \geq \frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right).$$

Pasando al complementario, obtenemos la expresión

$$1 - P\left(\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) \leq p_N(\beta) + \frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right),$$

esto es,

$$P\left(\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) \leq p_N(\beta) + \frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right) \geq 1 - 2\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right). \tag{3.14}$$

Vimos en (3.11) que se verifica

$$P\left(\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) \geq \frac{N-1}{N}\left(\frac{\beta^2}{4} + \log 2\right)\right) \geq \frac{1}{4}\sqrt{1-\beta^2}.$$

Entonces, si suponemos que

$$\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) < \frac{1}{8}\sqrt{1-\beta^2},$$

a partir de (3.14) sabemos que

$$P\left(\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) \leq p_N(\beta) + \frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right) > 1 - \frac{1}{4}\sqrt{1-\beta^2}.$$

De esta forma los sucesos

$$\left\{\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) \leq p_N(\beta) + \frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{N}\log Z_N(\beta) \geq \frac{N-1}{N}\left(\frac{\beta^2}{4} + \log 2\right)\right\}$$

verifican que

$$P\left(\frac{N-1}{N}\left(\frac{\beta^2}{4}+\log 2\right)\leq \frac{1}{N}\log Z_N(\beta)\leq p_N(\beta)+\frac{s\beta}{\sqrt{N}}\right)>0.$$

Por tanto, existe algún $\omega\in\Omega$ tal que

$$\frac{N-1}{N}\left(\frac{\beta^2}{4}+\log 2\right)\leq \frac{1}{N}\log Z_N(\beta)(\omega)\leq p_N(\beta)+\frac{s\beta}{\sqrt{N}}.$$

De esta última expresión obtenemos fácilmente que

$$p_N(\beta)\geq \frac{N-1}{N}\left(\frac{\beta^2}{4}+\log 2\right)-\frac{s\beta}{\sqrt{N}}.$$

Si en esta última expresión hacemos límite respecto a N, obtenemos que

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\beta)\geq \frac{\beta^2}{4}+\log 2.$$

Ahora bien, vimos en (2.10) que podemos asegurar, en el caso de que las variables aleatorias $H_N(\sigma)$ sean gaussianas centradas, no necesariamente independientes que verifiquen que para todo σ, $EH_N^2(\sigma)\leq \frac{N}{2}$, que se cumple que

$$p_N(\beta)\leq \frac{\beta^2}{4}+\log 2.$$

Pero es inmediato ver, a partir de (3.5), y del hecho de ser $\beta<1$, que en este modelo

$$EH_N^2(\sigma)\leq \frac{N-1}{2}\beta\leq \frac{N}{2}\beta$$

para estos valores de β, cosa que termina la demostración.

$\square$

Se puede demostrar que el resultado que acabamos de ver no es cierto en este modelo, si $\beta\geq 1$. No obstante debemos avanzar más en el estudio de los spin glasses para poder comprobar este hecho. Una demostración de este fenómeno puede encontrarse en [9]. Allí podemos ver que se verifica el siguiente resultado.

Teorema 3.7. *En el modelo Sherrington-Kirkpatrick, para cada valor de β y h, se verifica*

$$p_N(\beta,h)\leq \frac{\beta^2}{4}\left(1-q^2\right)+\log 2+E\log\cosh\left(\beta z\sqrt{q}+h\right), \qquad (3.15)$$

donde q verifica

$$q=E\tanh^2\left(\beta z\sqrt{q}+h\right).$$

4. El modelo Sherrington-Kirkpatrick con campo externo

4.1. Introducción al modelo

Tal y como introdujimos en (3.4), el Hamiltoniano en este modelo de spin glasses es de la forma

$$-H_{N,\beta}(\sigma) = \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1\leq i<j\leq N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + h \sum_{1\leq i\leq N} \sigma_i \tag{4.1}$$

donde g_{ij} son variables aleatorias gaussianas independientes con ley $\mathcal{N}(0,1)$, y el último término de la expresión representa la acción de un campo magnético externo. De esta forma, tenemos que $h \geq 0$. El caso $h = 0$ fue el que tratamos en el capítulo anterior, y da lugar al modelo de Sherrington-Kirkpatrick. Nos ocuparemos, en este capítulo, del caso $h > 0$. Por ser h estrictamente positivo, la acción del campo magnético externo favorece a los spin positivos por encima de los negativos.

Al introducir los motivos que llevaron a desarrollar este modelo de spin glasses, vimos que su intención era modelizar situaciones en las que las interacciones entre átomos eran más complicadas que las que permite cubrir el modelo Sherrington-Kirkpatrick. Siguiendo esa misma idea, podemos considerar un modelo en el que no sólo interaccionan dos spins, sino que lo hacen p spins, también con la actuación de un campo externo. En este caso, el Hamiltoniano del modelo es

$$-H_N(\sigma) = u_N \sum_{(i_1,\ldots,i_p)\in A_N^p} g_{i_1,\ldots i_p}\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_p} + h \sum_{1\leq i\leq N} \sigma_i \tag{4.2}$$

donde $h > 0$,

$$u_N = \left(\frac{p!}{2N^{p-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$A_N^p = \{(i_1,\ldots,i_p) \in \mathbb{N}^p : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq N\}$$

y $g_{i_1,\ldots i_p}$ es una familia de variables aleatorias gaussianas independientes con ley $\mathcal{N}(0,1)$. Es fácil observar que, si en este modelo tomamos $p = 2$, obtenemos el modelo objeto de este capítulo. Por tanto, este modelo con Hamiltoniano (4.2) generaliza el modelo Sherrington-Kirkpatrick con campo externo. Este nuevo modelo se denomina modelo de p-spins con campo externo. En [3] puede encontrarse un estudio más detallado de este modelo de spin glasses.

4.2. El método de la cavidad y el método del camino bueno

Este modelo nos permite introducir dos métodos fundamentales en el estudio de los spin glasses, como son los métodos de la cavidad (cavity method) y el del camino bueno (smart path method).

El método de la cavidad utiliza un argumento de inducción sobre N, reduciendo el sistema inicial de N spins a un nuevo sistema con un spin menos. De esta forma intentamos describir la magnetización del último spin en función de los otros estudiados anteriormente. La idea es reagrupar el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
-H_{N,\beta}(\sigma) =& \frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1\leq i<j\leq N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + h \sum_{1\leq i\leq N} \sigma_i \\
=& \left[\frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1\leq i<j\leq N-1} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + h \sum_{1\leq i\leq N-1} \sigma_i \right] \\
&+ \sigma_n \left[\frac{\beta}{\sqrt{N}} \sum_{1\leq i\leq N-1} g_{iN}\sigma_i + h \right].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Entonces podemos designar como $\rho = (\sigma_1, ..., \sigma_{N-1})$ al correspondiente elemento de Σ_{N-1}, y a

$$\beta^- = \beta\sqrt{\frac{N-1}{N}}$$

de forma que podemos escribir

$$-H_{N-1,\beta^-}(\rho) = \frac{\beta^-}{\sqrt{N-1}} \sum_{1\leq i<j\leq N-1} g_{ij}\sigma_i\sigma_j + h\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i.$$

Finalmente, si escribimos

$$g(\rho) = \frac{\beta}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N-1} g_{iN}\sigma_i$$

podemos reescribir (4.3) como

$$-H_{N,\beta}(\sigma) = -H_{N-1,\beta^-}(\rho) + \sigma_N\left(g(\rho) + h\right).$$

Si $\langle . \rangle_*$ es la medida de Gibbs sobre Σ_{N-1} con Hamiltoniano H_{N-1,β^-}, entonces para una función $f : \Sigma_{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquiera tenemos

$$\begin{aligned}
\langle f \rangle &= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma\in\Sigma_N} f(\sigma)\exp[-H_{N,\beta}(\sigma)] \\
&= \frac{1}{Z_N} \sum_{\sigma\in\Sigma_N} f(\rho,\sigma_N)\exp\left[-H_{N-1,\beta^-}(\rho)\right]\exp\left[\sigma_N(g(\rho)+h)\right] \\
&= \frac{1}{Z_N} \sum_{\rho\in\Sigma_{N-1}} \sum_{\sigma_N\in\{-1,+1\}} f(\rho,\sigma_N)\exp\left[\sigma_N(g(\rho)+h)\right]\exp\left[-H_{N-1,\beta^-}(\rho)\right] \\
&= \frac{\langle Avf\exp\left[\sigma_N(g(\rho)+h)\right]\rangle_*}{Z},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde Av significa la media respecto al spin $\sigma_N = \pm 1$. Por otra parte, a partir de la definición de Z_N,

$$Z_N = \sum_{\sigma\in\Sigma_N} \exp(-\beta H_N(\sigma)),$$

es fácil observar que podemos calcular este factor de normalización a partir de la expresión vista en (4.4) con $f = 1$. Por tanto, utilizando que

$$\cosh z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}$$

podemos asegurar que

$$Z = \langle Av \exp\left[\sigma_N(g(\rho) + h)\right]\rangle_* = \langle \cosh(g(\rho) + h)\rangle_* .$$

La expresión (4.4) se puede generalizar para funciones de la forma $f : \Sigma_N^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $n \geq 1$, obteniendo

$$\langle f \rangle = \frac{\left\langle Avf \exp\left[\sum_{l\leq n} \sigma_N^l (g(\rho^l) + h)\right]\right\rangle_*}{Z^n},$$

donde Av denota ahora la media respecto a $\sigma_N^1 = \pm 1, ...\sigma_N^n = \pm 1$.

Otra herramienta muy utilizado es el denominado método del camino bueno. Consideremos la ecuación

$$q = E \tanh^2(\beta z \sqrt{q} + h), \tag{4.5}$$

donde $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ es independiente del resto de variables. Vamos a ver, para comenzar, que esta ecuación tiene una única solución en [0,1]. Para ello empezaremos viendo un lema técnico, para después ver el resultado deseado.

Lema 4.1. *Sea $\psi(x)$ una función creciente y acotada, y que para $y > 0$ verifica $\psi(-y) = -\psi(y)$, y $\psi''(y) < 0$. Entonces la función*

$$\varphi(x) = E \frac{\psi(z\sqrt{x} + h)^2}{x}$$

es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$ y tiende a 0 cuando x tiende a ∞ .

Demostración. Para probar que la función φ es estrictamente decreciente podemos suponer, trabajando condicionalmente en h, que h es un número.
Consideremos $Y = z\sqrt{x} + h$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2\varphi'(x) &= E\left[z\sqrt{x}\psi'(Y)\psi(Y) - \psi(Y)^2\right] \\ &= E\left[\psi(Y)\left(Y\psi'(Y) - \psi(Y)\right)\right] - hE\psi'(Y)\psi(Y) \end{aligned}$$

Observemos en este punto que, como ψ es una función par, $\psi(0) = 0$. Además, como es una función creciente, tenemos entonces que $\psi(y) > 0$ si $y > 0$, y que $\psi(y) < 0$ si $y < 0$. La función $\phi(y) = y\psi'(y) - \psi(y)$ verifica por tanto $\phi(0) = 0$, y $\phi'(y) = y\psi''(y)$. De esta forma, para $y \neq 0$, $\phi'(y) < 0$. Podemos entonces asegurar que $\phi(y) < 0$ para $y > 0$, y que $\phi(y) > 0$ para $y < 0$.
Entonces tenemos que $\psi(y)\left[y\psi'(y) - \psi(y)\right] = \psi(y)\phi(y) < 0$ para $y \neq 0$, por lo que

$$E\left[\psi(Y)\left(Y\psi'(Y) - \psi(Y)\right)\right] < 0.$$

Es suficiente ver entonces que $hE\psi(Y)\psi'(Y) \geq 0$ para demostrar que φ es estrictamente decreciente. A partir de

$$E\psi(Y)\psi'(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi\left(z\sqrt{x}+h\right)\psi'\left(z\sqrt{x}+h\right)e^{-z^2/2}dz,$$

realizando el cambio de variable

$$z = \frac{y-h}{\sqrt{x}},$$

esto es, $y = z\sqrt{x}+h$, obtenemos

$$\begin{aligned} E\psi(Y)\psi'(Y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi\left(z\sqrt{x}+h\right)\psi'\left(z\sqrt{x}+h\right)e^{-z^2/2}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int \psi(y)\psi'(y)\exp\left[-\frac{y^2}{2x}+\frac{hy}{x}-\frac{h^2}{2x}\right]dy. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por otra parte, si el cambio que realizamos es $y' = -y$, obtenemos

$$\begin{aligned} E\psi(Y)\psi'(Y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi\left(z\sqrt{x}+h\right)\psi'\left(z\sqrt{x}+h\right)e^{-z^2/2}dz \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int \psi(y)\psi'(y)\exp\left[-\frac{y^2}{2x}-\frac{hy}{x}-\frac{h^2}{2x}\right]dy. \end{aligned} \tag{4.7}$$

A partir de estos dos resultados, y utilizando la definición de $\sinh t$, tenemos que

$$hE\psi(Y)\psi'(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int \psi(y)\psi'(y)h\sinh\left(\frac{hy}{x}\right) exp\left[-\frac{y^2}{2x}-\frac{h^2}{2x}\right]dy \geq 0, \tag{4.8}$$

ya que $\psi'(y) \geq 0$, y $h\psi(y)\sinh\left(\frac{hy}{x}\right) \geq 0$. Por tanto, la función $\varphi(x)$ es estrictamente decreciente. $\square$

Utilizando el resultado visto en este lema podemos probar que la ecuación (4.5) tiene una única solución en [0,1].

Proposición 4.2. (**Latala – Guerra**) *La función*

$$\varphi(x) = E\frac{\tanh^2(z\sqrt{x}+h)}{x}$$

es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$ *y tiende a 0 cuando* x *tiende a* ∞ *. Por tanto, si* $Eh^2 > 0$*, la ecuación* (4.5) *tiene una única solución.*

Demostración. El lema anterior nos asegura que la función $\varphi(x)$ es estrictamente decreciente. En este caso, como

$$\lim_{x\to 0^+} x\varphi(x) = E\tanh^2 h > 0$$

entonces
$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \infty.$$
Además,
$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0,$$
por lo que la ecuación $\varphi(x) = \dfrac{1}{\beta^2}$ tiene una única solución (y por tanto, (4.5) también). □

Después de ver que la ecuación (4.5) tiene una única solución en $[0,1]$, en el método del camino bueno consideramos

$$g_t(\rho) = \sqrt{t}g(\rho) + \beta z\sqrt{1-t}\sqrt{q}$$

donde $z \sim \mathcal{N}(0,1)$ es independiente de todas las $g_{i,j}$, y q es esta única solución de (4.5) en [0,1]. Para una función $f : \Sigma_N^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $n \geq 1$, definimos

$$\langle f\rangle_t = \frac{\langle Avf\varepsilon_{n,t}\rangle_*}{Z_t^n}, \tag{4.9}$$

donde
$$\varepsilon_{n,t} = \varepsilon_{n,t}(\rho^1, ..., \rho^n) = \exp\left[\sum_{l\leq n} \sigma_N^l \left(g_t(\rho^l) + h\right)\right],$$
$$Z_t = \langle Av\varepsilon_{1,t}\rangle = \langle Av \exp\left[\sigma_N(g_t(\rho) + h)\right]\rangle_* = \langle \cosh(g_t(\rho) + h)\rangle_*,$$
y
$$\nu_t(f) = E\langle f\rangle_t,$$
por lo que
$$\nu'(f) = \frac{d}{dt}\nu_t(f).$$
En particular, tenemos que
$$\nu_1(f) = E\langle f\rangle,$$
y que
$$\nu_0(f) = E\langle Avf\rangle_*.$$
Por tanto,
$$\nu(f) = \nu_0(f) + \int_0^1 \nu_t'(f)dt.$$
De esta manera simplificamos los cálculos, aunque aparentemente la notación parezca complicarlos, ya que por un lado $\nu_0(f)$ tiene una estructura más sencilla, pues podemos separar la última coordenada de las demás, y por otra parte podemos acotar la derivada $\nu_t'(f)$.

4.3. Comportamiento de la superposición en el modelo Sherrington-Kirkpatrick con campo externo

Vimos en (3.3) como se definía la superposición (overlap) entre dos configuraciones. Concretamente, vimos que dadas dos configuraciones σ^1 y σ^2 de Σ_N, la superposición entre ellas es la cantidad

$$R_{1,2} = R_{1,2}(\sigma^1, \sigma^2) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i^1 \sigma_i^2.$$

El siguiente objetivo es demostrar que, en el modelo que nos ocupa, existe β_0 tal que para todo $\beta \leq \beta_0$ se verifica

$$\nu((R_{1,2} - q)^2) = E \left\langle (R_{1,2} - q)^2 \right\rangle \leq \frac{K}{N}, \tag{4.10}$$

siendo q la única solución de la ecuación (4.5).
Para verlo necesitaremos cuatro resultados previos, en los que utilizaremos las ideas vistas en los métodos anteriores.

Proposición 4.3. *Para toda función f^* definida en Σ_{N-1}^n, y todo subconjunto I de $\{1, ..., n\}$ se verifica*

$$\nu_0 \left(f^* \prod_{i \in I} \sigma_N^i \right) = E \left(\tanh Y \right)^{card\, I} \nu_0(f^*) = \nu_0 \left(\prod_{i \in I} \sigma_N^i \right) \nu_0(f^*).$$

Demostración. Observemos que

$$Y = \beta z \sqrt{q} + h = g_0(\rho) + h,$$

y que

$$f = f^* \prod_{i \in I} \sigma_N^i.$$

Por tanto, a partir de (4.9), podemos asegurar que

$$\langle f \rangle_0 = \frac{\left\langle Av f^* \prod_{i \in I} \sigma_N^i \exp \left[\sum_{l \leq n} \sigma_N^l Y \right] \right\rangle_*}{Z_0^n}, \tag{4.11}$$

con

$$Z_0 = \left\langle \cosh \left(g_0(\rho) + h \right) \right\rangle_* = \left\langle \cosh Y \right\rangle_* = \cosh Y,$$

debido a que Y no depende de ρ.
Consideremos ahora los conjuntos

$$I = \{a_1, ..., a_{card\, I}\}$$

e

$$I' = \{b_1, ..., b_{n - card\, I}\},$$

de manera que $I \cap I' = \emptyset$ y $I \cup I' = \{1, ..., n\}$.
Como f^* no depende de σ_N, podemos operar el numerador de $\langle f \rangle_0$ para obtener

$$\begin{aligned} & Av f^* \prod_{i \in I} \sigma_N^i \exp\left[\sum_{l \leq n} \sigma_N^l Y\right] \\ =& f^* Av \prod_{i \in I} \sigma_N^i \exp\left[\sum_{l \leq n} \sigma_N^l Y\right] \\ =& f^* Av \sigma_N^{a_1} \cdots \sigma_N^{a_{card\, I}} \exp\left(\sigma_N^1 Y\right) \cdots \exp\left(\sigma_N^n Y\right) \\ =& f^* Av \sigma_N^{a_1} \exp\left(\sigma_N^{a_1} Y\right) \cdots \sigma_N^{a_{card\, I}} \exp\left(\sigma_N^{a_{card\, I}} Y\right) \\ & \times \exp\left(\sigma_N^{b_1} Y\right) \cdots \exp\left(\sigma_N^{b_{n-card\, I}} Y\right) \\ =& f^* \left(\sinh Y\right)^{card\, I} \left(\cosh Y\right)^{n-card\, I}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que

$$\sinh Y = \frac{1}{2} \exp Y - \frac{1}{2} \exp(-Y),$$

y que

$$\cosh Y = \frac{1}{2} \exp Y + \frac{1}{2} \exp(-Y).$$

De esta manera, a partir de (4.11) y (4.12), obtenemos que

$$\begin{aligned} \nu_0(f^* \prod_{i \in I} \sigma_N^i) &= E\left(\frac{\left\langle f^* \left(\sinh Y\right)^{card\, I} \left(\cosh Y\right)^{n-card\, I}\right\rangle_*}{\left(\cosh Y\right)^n}\right) \\ &= E\left(\langle f^* \rangle_* \left(\tanh Y\right)^{card\, I}\right) \\ &= E \langle f^* \rangle_* E \left(\tanh Y\right)^{card\, I}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Tomando ahora este resultado con $I = \emptyset$, de forma que $\langle f^* \rangle_* = \langle f^* \rangle_0$, obtenemos ya que

$$\nu_0(f^* \prod_{i \in I} \sigma_N^i) = \nu_0(f^*) E \left(\tanh Y\right)^{card\, I},$$

que era el resultado que queríamos probar.

□

Corolario 4.4. *Para toda función f^* definida en Σ_{N-1}^n, se verifica*

$$\nu_0(f^* \sigma_N^1 \sigma_N^2) = E(tanh^2 Y) \nu_0(f^*), \tag{4.14}$$

donde $Y = \beta z \sqrt{q} + h$, y z es una variable aleatoria gaussiana estándar.

Demostración. Es suficiente tomar $n = 2$ en el resultado anterior. □

El siguiente resultado nos permite calcular la derivada $\nu_t'(f)$. No realizaremos la demostración del resultado, pero una demostración del mismo puede encontrarse en [9, pág. 77-78].

Proposición 4.5. *Para todo $t \in (0,1)$, y toda función f definida en Σ_N^n se verifica*

$$
\begin{aligned}
\nu_t'(f) = \beta^2 & \sum_{1\le l<k\le n} \nu_t\left(f\sigma_N^l\sigma_N^k\left(R_{l,k}-q\right)\right) \\
& - \beta^2 n \sum_{1\le l\le n} \nu_t\left(f\sigma_N^l\sigma_N^{n+1}\left(R_{l,n+1}-q\right)\right) \\
& + \beta^2\frac{n(n+1)}{2}\nu_t\left(f\sigma_N^{n+1}\sigma_N^{n+2}\left(R_{n+1,n+2}-q\right)\right).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Proposición 4.6. *Sea f una función no negativa definida en Σ_N^n. Entonces, se verifica*

$$\nu_t(f) \le \exp(4n^2\beta^2)\nu(f). \tag{4.16}$$

Demostración. Es evidente que

$$-N \le \sum_{i\le N}\sigma_i^l\sigma_i^k \le N,$$

de forma que, si

$$R_{l,k} = \frac{1}{N}\sum_{i\le N}\sigma_i^l\sigma_i^k,$$

es obvio que

$$-1 \le R_{l,k} \le 1.$$

Por tanto, como $|q| < 1$, tenemos que

$$|R_{l,k}-q| \le |R_{l,k}| + |q| \le 2.$$

Este hecho implica, por ser f no negativa, que

$$|\nu_t\left(f\sigma_N^l\sigma_N^k\left(R_{l,k}-q\right)\right)| \le \nu_t\left(|f||R_{l,k}-q|\right) \le 2\nu_t(f).$$

Utilizando el resultado obtenido en la proposición anterior, tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
\nu_t'(f) &\ge -2\beta^2\sum_{1\le l<k\le N}\nu_t(f) - 2n\beta^2\sum_{l\le N}\nu_t(f) - \beta^2 n(n+1)\nu_t(f) \\
&= -\beta^2\left[n(n-1)+2n^2+n(n+1)\right]\nu_t(f) \\
&= -4\beta^2n^2\nu_t(f).
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Entonces, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\log\left(\nu_t(f)\right) = \frac{\nu_t'(f)}{\nu_t(f)} \ge -4\beta^2n^2.$$

Integrando entre t y 1 esta expresión obtenemos que

$$\log\left(\nu(f)\right) - \log\left(\nu_t(f)\right) \ge -4\beta^2n^2(1-t),$$

de donde deducimos, gracias a que $t > 0$ que

$$\nu_t(f) \le \exp\left[4\beta^2n^2(1-t)\right]\nu(f) \le \exp\left(4n^2\beta^2\right)\nu(f).$$

□

Con estos resultados podemos ya demostrar el objetivo que avanzamos en (4.10). En la demostración de este resultado utilizaremos que

$$R^*_{l.k} = \frac{1}{N} \sum_{i \le N-1} \sigma_i^l \sigma_i^k,$$

de manera que

$$\sigma_N^l \sigma_N^k R_{l,k} = \frac{1}{N} + \sigma_N^l \sigma_N^k R^*_{l,k}.$$

Teorema 4.7. *Existe β_0 tal que, para todo $\beta \le \beta_0$ tenemos*

$$\nu((R_{1,2} - q)^2) = E \left\langle (R_{1,2} - q)^2 \right\rangle \le \frac{K}{N},$$

donde q es la única solución de la ecuación (4.5).

Demostración. Consideremos

$$\begin{aligned} f &= \left(\sigma_N^1 \sigma_N^2 - q\right) (R_{1,2} - q) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sigma_N^1 \sigma_N^2 - q\right)^2 + \left(\sigma_N^1 \sigma_N^2 - q\right) (R^*_{1,2} - \frac{N-1}{N} q) \end{aligned}$$

A partir de la proposición 4.3 podemos asegurar que se verifica, por simetría,

$$\nu\left((R_{1,2} - q)^2\right) = \nu\left(\left(\sigma_N^1 \sigma_N^2 - q\right)(R_{1,2} - q)\right) = \nu(f).$$

Acotando los valores de $\nu_0(f)$ y $\nu_t'(f)$, y utilizando el método del camino bueno terminaremos la demostración.
En primer lugar, a partir de (4.5), observamos que

$$q = E\left(\tanh^2(\beta z \sqrt{q} + h)\right) = E\left(\tanh^2 Y\right).$$

Aplicando nuevamente la proposición 4.3, obtenemos

$$\begin{aligned} &\nu_0 \left(\left(\sigma_N^1 \sigma_N^2 - q\right) \left(R^*_{1,2} - \frac{N-1}{N} q \right) \right) \\ &\quad = \left[E\left(\tanh^2 Y\right) - q \right] \nu_0 \left(R^*_{1,2} - \frac{N-1}{N} q \right) = 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \nu_0 \left(\left(\sigma_N^1 \sigma_N^2 - q\right)^2 \right) &= \nu_0 \left(1 - 2\sigma_N^1 \sigma_N^2 q - q^2\right) \\ &= 1 - 2qE\left(\tanh^2 Y\right) + q^2 \\ &= 1 - q^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\nu_0(f) = \frac{1}{N}\left(1 - q^2\right).$$

Por otra parte, como $|\sigma_N^1 \sigma_N^2| \leq 1$, a partir de (4.15) tenemos que

$$\begin{aligned}\nu_t'(f) \leq & \beta^2 \nu_t \left(|f||R_{1,2} - q|\right) \\ & + 2\beta^2 \left[\nu_t \left(|f||R_{1,3} - q|\right) + \nu_t \left(|f||R_{2,3} - q|\right)\right] \\ & + 3\beta^2 \nu_t \left(|f||R_{3,4} - q|\right).\end{aligned}$$

Utilizando la definición de f, la desigualdad de Hölder, y la cota $|\sigma_N^1 \sigma_N^2 - q| \leq 2$ obtenemos que

$$\nu_t'(f) \leq 16\beta^2 \nu_t \left((R_{1,2} - q)^2\right).$$

Utilizando ahora (4.16), tenemos que

$$\nu_t'(f) \leq 16\beta^2 \exp(16\beta^2) \nu((R_{1,2} - q)^2).$$

Finalmente, gracias a las ideas vistas en el método del camino bueno, tenemos, utilizando los valores obtenidos aquí para $\nu_0(f)$ y $\nu_y'(f)$, que

$$\nu \left((R_{1,2} - q)^2\right) \leq \frac{1}{N} + 16\beta^2 \exp(16\beta^2) \nu((R_{1,2} - q)^2),$$

por lo que escogiendo β_0 suficientemente pequeño tal que

$$16\beta_0^2 \exp(16\beta_0^2) \leq \frac{1}{2}$$

tenemos que

$$\nu \left((R_{1,2} - q)^2\right) \leq \frac{2}{N}.$$

□

El resultado que acabamos de demostrar nos indica que, en este modelo de spin glasses, hay convergencia cuadrática de la superposición hacia la única solución de la ecuación (4.5).

4.4. Valores de la energía libre en el modelo Sherrington-Kirkpatrick con campo externo

Un análisis más profundo del modelo que nos ocupa permite demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.8. *Existe β_0 tal que, para todo $\beta \leq \beta_0$, y para todo $h \geq 0$, se tiene que*

$$\lim_{N \to \infty} p_N(\beta, h) = \frac{\beta^2}{4}(1-q)^2 + \log 2 + E \log \cosh \left(\beta z \sqrt{q} + h\right), \tag{4.18}$$

donde q es la única solución de la ecuación (4.5).

El estudio necesario para demostrar este resultado es largo. No lo realizaremos en este trabajo, aunque puede encontrarse en [9, pág. 191-195] .

Conclusiones

Después de unos meses de estudio de los spin glasses debo destacar que no pensaba, al principio, que estos objetos matemáticos tuvieran tantas aplicaciones como he podido encontrar buscando material para este trabajo. Desde redes neuronales, hasta problemas de inteligencia artificial, pasando por numerosos problemas de índole física, como pueden ser estudios sobre estados de la materia, de la mecánica estadística,... los spin glasses aparecen con cierta facilidad en artículos científicos y referencias bibliográficas.

También cabe destacar que, a pesar de que es fácil encontrar textos que traten sobre ellos, la gran mayoría están escritos desde un punto de vista físico. Este punto hace más difícil su tratamiento matemático, aunque las referencias utilizadas en este trabajo son, casi todas, fácilmente comprensibles. Hemos visto en estas páginas tres modelos de spin glasses (posiblemente los más sencillos), pero hay muchos más modelos que pueden ser estudiados y que no he recogido aquí. Los que hemos podido ver lo he hecho de forma superficial, y viendo resultados básicos, aunque no elementales. No obstante, en las referencias indicadas se tratan de forma mucho más profunda.

Finalmente, me gustaría destacar que todos los resultados alcanzados en este trabajo se basan en conocimientos básicos de teoría de la Probabilidad, y de las variables aleatorias en general, y de las gaussianas en particular. No hay más teoría detrás de estos resultados vistos, aunque pueden complicarse por los cálculos en algún momento.

A. Apéndice A. Resultados básicos de Probabilidad

Durante el desarrollo de este trabajo hemos utilizado dos resultados básicos en Probabilidad, como son las desigualdades de Txebitxev y de Jensen. Recordaremos ahora brevemente estas dos desigualdades, así como sus demostraciones.

A.1. Desigualdades básicas

Consideremos un espacio de Probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Proposición A.1. ***(Desigualdad de Txebitxev)*** *Sea X una variable aleatoria no negativa, y $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función creciente tal que $E(f(X)) < \infty$. Entonces para todo número real $a > 0$ se verifica*

$$f(a)P\left(X \geq a\right) \leq E\left(f(X)\right).$$

Demostración. A partir de la desigualdad

$$f(a)\mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq f(X)$$

es suficiente tomar esperanzas para obtener la desigualdad buscada

$$f(a)P\left(X \geq a\right) \leq E\left(f(X)\right).$$

□

Finalmente, vamos a ver la otra desigualdad básica utilizada en este trabajo.

Proposición A.2. ***(Desigualdad de Jensen)*** *Sea g una función real convexa, y X una variable con esperanza finita tal que $g(X)$ tiene también esperanza finita. Entonces se cumple*

$$g\left(E(X)\right) \leq E\left(g(X)\right).$$

Demostración. Que la función $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sea convexa significa, por definición, que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in D$ se cumple

$$g(x) \geq f(y) + b(x - y).$$

Por tanto, podemos asegurar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geq g\left(E(X)\right) + a\left(x - E(X)\right).$$

Substituyendo x por $X(\omega)$ tenemos, para todo $\omega \in \Omega$, que

$$g(X) \geq g\left(E(X)\right) + a\left(X - E(X)\right).$$

Aplicando ahora esperanzas a ambos lados de la igualdad, la linealidad y monotonía de la esperanza nos permiten obtener el resultado deseado:

$$
\begin{aligned}
E\left(g(X)\right) &\geq E\left[g\left(E(X)\right)\right] + E\left[a\left(X - E(X)\right)\right) \\
&= g\left(E(X)\right) + a\left[E(X) - E(X)\right] \\
&= g\left(E(X)\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Referencias

[1] Albeverio, S.; Schachermayer, W.; y Talagrand, M. *Lectures on Probability Theory and Statistics*, Springer ,2000.

[2] Austin, T. *Mean field models for spin glasses*, Notes for IAS workshop, Springer, 2012.

[3] Bardina, X.; Márquez-Carreras, D.; Rovira, C.; y Tindel, S. *The p-spin interaction model with external field*, Potential Analysis 21, pág. 311-362, 2004.

[4] Bolthausen, E.; y Bovier, A. *Spin glasses*, Lectures Notes in Mathematics, Springer, 2007.

[5] Bovier, A.; y Picco, P. *Mathematical Aspects of Spin Glasses and Neural Networks*, Progress in Probability, Birkhäuser, 1998.

[6] Guerra, F. *Spin glasses* , arXiv:cond-mat/0507581v1 [cond-mat.dis.nn], julio de 2005.

[7] Márquez-Carreras, D. *The magnetization at high temperature for a p-spin interaction model with external field*, Applicationes Mathematicae, 34, pág. 97-111, 2007.

[8] Márquez-Carreras, D.; y Rovira, C. *Cristalls de spin*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, Vol. 20, num. 1, pág. 37-51, 2005.

[9] Talagrand, M. *Spin glasses: A Challenge for Mathematicians. Cavity and Mean field Models*, Springer-Verlag, Vol. 46, 2003.

[10] Talagrand, M. *Mean field models for Spin glasses*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer, 2011.