UNIVERSITAT DE BARCELONA

Trabajo final de grado

GRADO DE MATEMÁTICAS
GRADO DE ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

EQUILIBRIO DE NASH: TEORÍA Y APLICACIONES

Autor: Pedro Escoriza Lusilla

Director:	**Dr. Josep Vives**
Directora:	**Dra. Marina Núñez**
Realizado en:	**Departament de Matemàtiques i Informàtica**
	Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, 27 de junio de 2018

Abstract

John F. Nash work was a cornerstone in the development of Game Theory, especially with the famous concept of "Nash Equilibrium", defined in his Ph.D thesis in 1950. Its implications in such a different fields as economics, biology, or social sciences, led to a new insights and results.

In this project, the main objective is to analyse the Nash equilibrium from a mathematical perspective, from the basic definitions to the Nash Theorem. As the spirit is to give a didactic explanation, there are several examples in order to illustrate all the concepts and results shown. Besides this, and according to this interdisciplinar field which combines the rigorous mathematical language with the economic applications, some classical economic models will be studied, remarking the power of Nash Equilibria in these situations.

Finally, further solution concepts for normal-form games will be presented in the last chapter, in order to show there are some refinements of Nash Equilibrium that can be used taking into account different hypotesis.

Resumen

El trabajo de John F. Nash fue una piedra ángular en el desarrollo de la Teoría de Juegos, especialmente con el famoso concepto de "Equilibrio de Nash", definido en su tesis doctoral en el año 1950. Sus implicaciones en campos tan diferentes como la economía, la biología, o las ciencias sociales, llevaron a nuevas ideas y resultados.

En este proyecto, el objetivo principal es el de analizar el equilibrio de Nash desde un punto de vista matemático, desde las primeras definiciones hasta el teorema de existencia de Nash. Dado que el espíritu de este trabajo es el de proporcionar una explicación didáctica, hay varios ejemplos para poder ilustrar cada uno de los conceptos y resultados mostrados. Además, y de acuerdo con la interdisciplinariedad de este proyecto que combina la rigurosidad matemática con las aplicaciones económicas, algunos modelos económicos clásicos han sido estudiados, resaltando el potencial del equilibrio de Nash en estas situaciones.

Finalmente, otros conceptos de solución para los juegos en forma normal serán presentados en el último capítulo, para mostrar que hay algunos refinamientos del equilibrio de Nash que pueden usarse teniendo en cuenta las distintas hipótesis.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A05, 91A10, 91A80

Agradecimientos

"Lo imposible siempre ha sido necesario." -Khan, músico.

En primer lugar, quisiera agradecer tanto a la Dra. Marina Núnez como al Dr. Josep Vives, tutores de este trabajo de fin de grado, su dedicación y ayuda para conseguir realizarlo de la mejor manera y con la mayor rigurosidad posible. Gracias a ellos, mi pasión por la Teoría de Juegos no ha hecho más que crecer.

En segundo lugar, quisiera dar las gracias a Laura, Joan y Helma, cuya paciencia y apoyo durante esta etapa universitaria me ha ayudado a llegar hasta aquí.

Y por último, aunque no menos importante, agradecer a mis padres todo su esfuerzo y dedicación, cuyos valores me han llevado a ser quien soy, sin los cuales esto hubiese sido imposible.

Índice

1 Introducción

"No creo en la suerte, pero sí en asignar valor a las cosas." -John Nash

La noción de equilibrio de Nash se encuentra dentro del ámbito de la Teoría de Juegos. Esta rama de la matemática aplicada estudia lo que ocurre cuando distintos agentes interactúan entre ellos y las acciones de uno influyen, no sólo en su resultado, sino también en el resultado que obtienen los otros agentes. Este hecho se conoce como interdependencia estratégica, y es la base de la Teoría de Juegos: situaciones en las cuales un grupo de agentes queda afectado por las decisiones tomadas por cada individuo dentro de este colectivo. Preguntas interesantes pueden ser:

- ¿Qué puede conocer cada individuo sobre las elecciones de los demás?
- ¿Qué decisión tomará cada individuo?
- ¿Cuál es el resultado de estas acciones?¿Es óptimo para el grupo?
- ¿Hay diferencias si este grupo de personas interacciona más de una vez?

¿Por qué se denomina esta especialidad Teoría de Juegos? Si se busca la definición de "Juego" en el Diccionario de la Lengua Española, aparece como "Ejercicio recreativo o de competición sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde". Y como ejemplos da el juego de naipes, el de ajedrez, el de billar y el de pelota. En estos juegos, el éxito de un jugador dependerá fuertemente de las acciones de los demás jugadores, además de las suyas propias. Es decir, que las características principales de los juegos son:

- Existen reglas sobre las acciones que se pueden realizar, el orden en el que se realizan, y el resultado que se obtiene según las acciones realizadas.
- Hay dos o más jugadores, y cada uno hará lo que sea mejor para su propio interés y beneficio.
- El resultado final para cada jugador dependerá de las acciones que hayan realizado los demás jugadores.

No obstante, hay situaciones más allá de los juegos propiamente dichos donde estas características están presentes. Por ejemplo, cuando un grupo de estudiantes debe realizar un trabajo de clase, se produce una interacción entre ellos ya que hay una cierta cantidad de trabajo a hacer para entregar el proyecto. Si uno de ellos hace menos en su parte, otro deberá hacer más para completarlo. Por tanto, hay un conflicto entre los hechos de obtener una buena calificación en el proyecto, y el coste que supone hacer más horas que los demás.

Otro ejemplo se puede encontrar en la biología. Hay animales que compiten por la comida dado que no es ilimitada. El problema es que el hecho de buscar una presa para cazar puede suponer una dura lucha, lo que supone un coste. De nuevo, hay un conflicto entre buscar alimento o entrar en una pelea.

¿Cuándo no será un juego? Cuando haya un jugador o infinitos. Por ejemplo, en el primer caso, ir a correr, escoger una película para ver esta noche, o decidir donde comer mañana. Aquí las decisiones que se toman solo afectan a uno mismo, por lo que no hay interacción con otros individuos. La teoría de la utilidad estudia estos casos teniendo en cuenta las preferencias del individuo que toma la decisión. Por otra parte, cuando hay demasiados agentes no es factible, ni sensato, hacer un seguimiento de cómo las decisiones de uno afectan a los demás. Por ejemplo, si un agente compra acciones de Facebook, los demás inversores no van a advertirlo. O si dejo de comprar pan debido a su precio, ésto no afectará al precio de mercado[2].

La Teoría de Juegos es relativamente reciente[32]. El primer ejemplo de un análisis formal de un juego de forma teórica fue el estudio del duopolio realizado por Antoine Cournot[7], economista francés, en 1838. Desarrolló un modelo de competición imperfecta en el que dos empresas compiten con la misma función de coste y productos homogéneos en un escenario estático. En 1883, Joseph Bertrand[4] respondió al modelo de Cournot sosteniendo que era más lógico competir en términos de precio que no de las cantidades que se vendían. Posteriormente, en 1913, Ernst Zermelo[35] descubrió que el juego del ajedrez, que es un juego no cooperativo de suma cero, siempre tiene una solución, en el sentido que desde cualquier posición en el tablero uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, o que garantiza las tablas. Un juego de suma cero es aquel donde las ganancias acumuladas de todos los participantes es igual a la suma de las pérdidas. Uno de los aspectos más importantes fue que creó una técnica de inducción hacía atrás para resolver juegos con varias etapas. En 1921, el matemático Émile Borel[6] comenzó el desarrollo de una teoría formal de juegos, que fue impulsada por John von Neumann en el año 1928 tras demostrar que los juegos conocidos como de suma cero siempre tenían una solución (teorema minimax).

El punto de inicio de la Teoría de Juegos moderna es la publicación de la obra *Theory of Games and Economic Behavior* en 1944 por el matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern[34]. A parte de la formalización del concepto de juego, en este libro hicieron tres contribuciones importantes. Una de ellas fue la axiomatización de la teoría de la utilidad, que explica lo que los individuos obtienen cuando participan en un juego. La segunda contribución fue la caracterización por completo de las soluciones óptimas de los juegos de suma cero. Por último, introdujeron una nueva rama de la Teoría de Juegos llamada juegos cooperativos.

Un hecho clave en la Teoría de Juegos llega en 1950 de la mano de John Forbes Nash (1928-2015) cuando presentó su tesis doctoral titulada *Non-cooperative games*[25]. Fue supervisado por Albert Tucker, y se establecieron las bases de este tipo de juegos. En esta memoria se introdujó el concepto de punto de equilibrio y demostró bajo qué condiciones se puede garantizar la existencia de un equilibrio, que posteriormente se conocería como Equilibrio de Nash, y que es la noción principal de este trabajo final de grado.

[2]Existe una teoría de juegos con infinitos jugadores, *Non-atomic games*, desarrollada por R. Aumann y L.S Shapley (1974) [1]

Biografía [22]

John Forbes Nash nació el 13 de Junio de 1928 en Bluefield, Virginia. En el año 1945 ingresó en el Instituto Carnegie de Tecnología de Pittsburgh para estudiar ingeniería química, y fue allí donde comenzó su interés por las matemáticas. Con 21 años redactó su tesis llamada *Non-cooperative games* donde dió la solución para juegos estratégicos no cooperativos, que posteriormente se conocería como "Equilibrio de Nash", generalizando la solución dada por Von Neumann y Morgenstern que era exclusivamente para juegos de suma cero.
Fue profesor de matemáticas en el Massachusetts Institute of Technology entre 1951 y 1959, donde conoció a Alicia Larde, una alumna con la que se casó en 1957, y con la que tuvo un hijo. En 1959 se le diagnostica esquizofrenia paranoica, enfermedad mental que lo tuvo apartado dos décadas. A mediados de los ochenta retomó parcialmente su actividad científica.
En 1994 recibió el premio Nobel de economía junto a John C. Harsanyi y Reinhart Selten por sus análisis del equilibrio en la teoría de los juegos no cooperativos. En 2015, conjuntamente con Louis Nirenberg, fue galardonado con el Premio Abel de Matemáticas por sus contribuciones notables y fundamentales a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales no lineales y sus aplicaciones al análisis geométrico. El 23 de Mayo de 2015, John Nash y su esposa murieron en un accidente de tráfico volviendo del aeropuerto después de recoger el Premio Abel en Oslo.

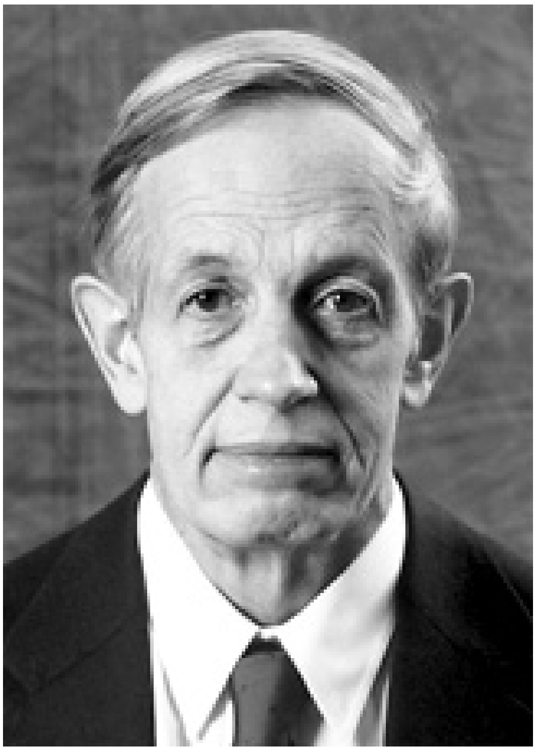


Figura 1: John F. Nash

Dado que este proyecto es interdisciplinar, por combinar ciencias económicas y matemáticas, la estructura de esta memoria será la siguiente:

- En primer lugar, se comenzará con las definiciones básicas sobre juegos, así como se darán algunos ejemplos para ilustrar todo aquello que se esté describiendo. Cabe remarcar que se analizarán juegos no cooperativos en forma estratégica, de información completa y simultáneos.
- A continuación se estudiarán los conceptos de "Mejor Respuesta" y "Equilibrio de Nash" con estrategias puras, y posteriormente se hará la extensión a los juegos en forma estratégica con estrategias mixtas.
- Llegados a este punto, se enunciarán y demostrarán los dos teoremas centrales de este proyecto final: el Teorema de existencia de Nash, y una generalización, conocido como Teorema de Nash-Cournot.
- Se estudiarán ciertas aplicaciones económicas que ha tenido la Teoría de Juegos en general, y el equilibrio de Nash en partícular, para observar las potentes implicaciones que ha tenido dentro del ámbito de la economía, como pueden ser los modelos de Cournot y Bertrand.
- Por último, se hará una breve introducción a otros conceptos de solución y refinamientos del equilibrio de Nash dado que, a pesar de las ventajas que tiene encontrar estos equilibrios, también hay ciertos inconvenientes que no deben ser pasados por alto.

Por último, la bibliografía en la cual se ha basado este proyecto ha sido la siguiente: Binmore [5], Dutta [9], Friedman [12], Gardner [13], Gibbons [14], González-Díaz [15], Harrington[16], Reny [17], Karlin [19], Leyton-Brown [20] y [21], Massó [22], Ricart[30] y Pérez [28]

2 ¿Qué es un juego?

En primer lugar, se van a definir los elementos que componen un juego en forma normal. Este tipo de juegos, también conocidos como juegos en forma estratégica, son la configuración más común de representación de las interacciones estratégicas en la Teoría de Juegos. Un juego escrito de esta manera representa la utilidad de cada jugador para cada posible estado de la naturaleza, teniendo en cuenta que habitualmente este estado dependerá únicamente de la combinación de las decisiones tomadas por cada jugador. En este sentido, cabe remarcar que se supondrá que los jugadores actúan de forma racional, es decir, que van a intentar maximizar su propio resultado.

Definición 2.1. ***(Juego en forma normal):*** *Un juego G en forma normal es una terna (N, A, u), donde:*

- *N es un conjunto finito de n jugadores.*
- *$A := A_1 \times ... \times A_n$, donde cada A_i es un conjunto de estrategias disponibles para el jugador i. Cada vector $a = (a_1, ..., a_n) \in A$, donde $a_i \in A_i$ se denomina un perfil estratégico.*
- *$u = (u_1, ..., u_n)$, donde $u_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de utilidad (o pago) para cada jugador i.*

Cuando $N = \{1, 2\}$ y el conjunto de estrategias de cada jugador, A_1 y A_2, es finito, una forma natural de representar este tipo de juegos es mediante una matriz de dimensión $p \cdot q$, donde p es la cardinalidad de A_1 y q la de A_2. Describamos, por ejemplo, el dilema del prisionero:

Ejemplo 2.2. (El dilema del prisionero): Hay dos sospechosos en la cárcel y la policía quiere que confiesen en relación al crimen que han cometido. Los cargos contra ellos son duros, pero no tienen suficientes pruebas para declararlos culpables ante el juez. Por tanto, y de forma individual, cada prisionero es llevado a una sala de interrogatorios donde se les ofrece la posibilidad de confesar el crimen delatando al otro sospechoso o permanecer en silencio. Si uno delata y el otro no, el delator queda libre de forma inmediata y dicta sentencia de prisión para el otro sospechoso de 4 años. Si ambos delatan, pasarán 3 años en la cárcel cada uno. En cambio, si ambos permanecen callados, la pena de prisión será de 1 año para cada uno por un delito menor que puede ser probado sin más evidencias.

		Prisionero Y	
		C	D
Prisionero X	C	$(-1, -1)$	$(-4, 0)$
	D	$(0, -4)$	$(-3, -3)$

Tabla 1: Forma normal del dilema del prisionero

En este caso, tanto X como Y tienen dos posibles acciones: Callar (C) o Delatar (D), y cada elemento de esta matriz se compone de la utilidad que corresponde a cada jugador, (u_1, u_2).

En resumen: los jugadores son los agentes que deben tomar las acciones. Éstas son las decisiones que cada agente debe elegir en un momento dado del juego. Una estrategia es un plan completo de acciones para un agente dado, mientras que un perfil estratégico es un conjunto de estrategias, una para cada jugador. Por último, los pagos son las valoraciones numéricas por parte de cada agente de los posibles resultados del juego.

En el caso del dilema del prisionero, se trata de un juego no cooperativo y simultáneo o estático. Es decir, no puede haber acuerdos vinculantes entre los agentes y las acciones deben tomarse de forma simultánea e independiente, por lo que un jugador no sabe lo que han escogido otros. Por otra parte, se trata de un juego con información completa, ya que los agentes conocen todas las consecuencias de sus acciones y las de los otros agentes. En este trabajo final de grado se hará énfasis en los juegos no cooperativos, simultáneos y con información completa.

Ejemplo 2.3. (Matching pennies): Dos jugadores han de escoger, de forma simultánea, una de las dos caras de la moneda. Si ambos jugadores eligen la misma cara de la moneda, el jugador 2 le da su moneda al jugador 1. Al contrario, si escogen caras opuestas, es el jugador 1 el que le da su moneda al jugador 2. La matriz que representa el juego en forma normal es la siguiente:

		Jugador 2	
		C	$+$
Jugador 1	C	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	$+$	$(-1,1)$	$(1,-1)$

Tabla 2: Matching pennies

En este caso, los elementos que componen el juego son los siguientes:

- Jugadores: $N = \{1, 2\}$
- Estrategias: $A_1 = A_2 = \{C, +\}$, donde C representa cara, y $+$ representa cruz.
- Perfiles estratégicos: $A = \{(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)\}$
- Pagos asociados: $u_1(C, C) = u_1(+, +) = u_2(C, +) = u_2(+, C) = 1$, $u_1(C, +) = u_1(+, C) = u_2(C, C) = u_2(+, +) = -1$

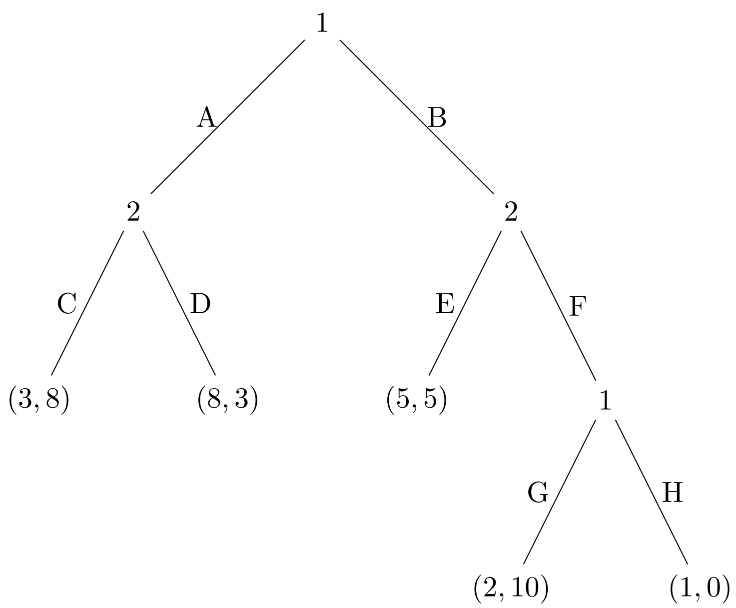
Las estrategias mostradas hasta ahora son lo que se conoce como estrategias puras. Más adelante, en el capítulo 4, se hará una extensión a estrategias mixtas en un juego en forma normal, donde se incorporarán distribuciones de probabilidad sobre la elección de estrategias puras.

Cabe destacar que existe una forma natural de representar los juegos que se desarrollan por etapas, conocido como forma extensiva de juegos secuenciales. Se representan como un árbol en el sentido de la teoría de grafos, donde cada nodo representa la elección de cada agente, cada arista una posible acción, y cada hoja indica los pagos que cada agente recibe según su función de utilidad.

Definición 2.4. ***(Juego en forma extensiva):*** *Un juego en forma extensiva y con información perfecta es una tupla $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$, donde:*

- *N es un conjunto finito de n jugadores.*
- *A es un conjunto de acciones.*
- *H es un conjunto de nodos de elección no terminales.*
- *Z es un conjunto de nodos finales, disjunto de H.*
- *$\chi : H \mapsto 2^A$ es la función de estrategia que asigna a cada nodo de elección un conjunto de posibles acciones.*
- *$\rho : H \mapsto N$ es la función de jugador que asigna a cada nodo no terminal un jugador $i \in \mathbb{N}$ que elige su estrategia en dicho nodo.*
- *$\sigma : H \times A \mapsto H \cup Z$ es la función de sucesión, que asigna a cada nodo y a cada acción un nuevo nodo no terminal o terminal de manera que para todo $h_1, h_2 \in H$ y $a_1, a_2 \in A$, si $\sigma(h_1, a_1) = \sigma(h_2, a_2)$, entonces $h_1 = h_2$ y $a_1 = a_2$*
- *$u = (u_1, ..., u_n)$, donde $u_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de utilidad (o pago) para cada jugador i en los nodos finales Z.*

Ejemplo 2.5. (Juego en forma extensiva)



Sin embargo, todo juego en forma extensiva se puede representar a través de un único juego de forma normal[3]. Una estrategia pura para un jugador en el juego en forma extensiva consiste en determinar una acción en cada uno de sus nodos de decisión. En el ejemplo 2.5, para el jugador 1 una posible estrategia es "elegir A en el primer nodo de decisión y H en el segundo nodo"($\{A, H\}$). Para el jugador 2, un ejemplo de estrategia es "jugar C en el primer nodo y E en el segundo". El conjunto de pagos del juego en forma

		Jugador 2			
		(C,E)	(C,F)	(D,E)	(D,F)
Jugador 1	(A,G)	$(3,8)$	$(3,8)$	$(8,3)$	$(8,3)$
	(A,H)	$(3,8)$	$(3,8)$	$(8,3)$	$(8,3)$
	(B,G)	$(5,5)$	$(2,10)$	$(5,5)$	$(2,10)$
	(B,H)	$(5,5)$	$(1,0)$	$(5,5)$	$(1,0)$

Tabla 3: Representación en forma normal del ejemplo 2.5

normal dependerá de cómo la combinación de estrategias puras determina la selección de los nodos terminales.

Por último, una vez definidos los juegos en forma normal y las estrategias que tienen los agentes que intervienen, una pregunta natural es: ¿Cómo se debe razonar en estos juegos?¿Qué se entiende por "solución"de un juego? Al estar en un caso donde varios individuos interaccionan, cada uno de ellos buscará maximizar su resultado final. Cuando este hecho se produce, se dice que los agentes son racionales. Esta hipótesis es fundamental para poder encontrar posibles soluciones de juegos, por lo que siempre se supone esta condición, salvo que se indique lo contrario. La noción de estrategia óptima para un jugador es compleja, dado que la mejor estrategia está supeditada a las elecciones de los demás agentes. Los conceptos asociados a "solución"más conocidos son dos: Eficiencia de Pareto y Equilibrio de Nash.

Antes de finalizar este capítulo, se va a definir el concepto de estrategias dominadas. Intuitivamente, una estrategia A domina a otra B para el jugador i si A proporciona un pago o resultado mejor que la estrategia B, sin importar que perfil estratégico han escogido los demás jugadores.

Definición 2.6. ***(Dominación):*** *Sean a_i y $a_i^{'}$ dos estrategias de A_i, y sea A_{-i} el conjunto de estrategias del resto de jugadores. Entonces:*

- *a_i domina estrictamente a $a_i^{'}$ si, $\forall a_{-i} \in A_i$, $u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i^{'}, a_{-i})$*
- *a_i domina débilmente, o en sentido débil, a $a_i^{'}$ si, $\forall a_{-i} \in A_i$, $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i^{'}, a_{-i})$ y, para al menos una $a_{-i} \in A_{-i}$, se cumple que $u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i^{'}, a_{-i})$*
- *a_i domina muy débilmente a $a_i^{'}$ si, $\forall a_{-i} \in A_i$, $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i^{'}, a_{-i})$*

Se dice que una estrategia a_i es estrictamente dominante para cada jugador si dicha estrategia domina estrictamente a cualquier otra estrategia para este jugador.[4]

Se dice que una estrategia a_i está estrictamente dominada para un jugador i si, como mínimo, existe una estrategia $a_i^{'}$ que domina estrictamente a a_i.

En la práctica, las estrategias dominadas son más comunes que las estrategias dominantes.

[3]Sin embargo, el recíproco no es cierto.
[4]La misma definición existe cambiando "estrictamente" por "débilmente" o "muy débilmente".

Si se observa el Ejemplo 2.3 de la página 6 (Matching Pennies), se puede ver que no existen estrategias dominadas en este juego, ya que

$$\begin{array}{rcl} u_1(C, C) = 1 & > & -1 = u_1(+, C) \\ u_1(C, +) = -1 & < & 1 = u_1(+, +) \end{array}$$

Es decir, si el jugador 2 elige "Cara", entonces 1 prefiere "Cara". En cambio, si 2 elige "Cruz", el primer jugador preferirá "Cruz". No hay ninguna estrategia que domine al resto, sin importar la elección del otro agente.

En cambio, en el dilema del prisionero (Ejemplo 2.2 de la página 5) sí que existe una estrategia dominante para cada jugador, que es la de "Delatar":

$$\begin{array}{rcl} u_1(C, C) = -1 & < & 0 = u_1(D, C) \\ u_1(C, D) = -4 & < & -3 = u_1(D, D) \end{array}$$

Es decir, no importa la estrategia que elija el otro jugador. Siempre se escogerá "Delatar" antes que "Callar" puesto que el resultado que se obtendrá siempre será mejor.

3 Equilibrio de Nash

En este apartado se tratará uno de los conceptos de "solución"de un juego, con el objetivo de describir cómo se espera que actúen los agentes racionales. El concepto de solución más importante para juegos en forma estratégica se denomina Equilibrio de Nash.

Supongamos que el jugador 1 tiene una estrategia B que está dominada por otra estrategia, A. En ese caso, claramente no será buena idea escoger B dado que no importa lo que el jugador 2 haga, ya que siempre se obtendrá un mejor resultado con A. Ahora supongamos que no hay estrategias dominadas, pero el jugador 1 tiene la información que el jugador 2 escogerá una determinada estrategia. Entonces, 1 escogerá aquella estrategia C que sea mejor para él dada la elección del otro. No es necesario que C sea mejor contra todas las posibles estrategias del segundo agente, sino que únicamente se debe conocer que el resultado es superior contra la estrategia específica de dicho jugador. Esto es lo que se conoce como "Mejor Respuesta" contra la estrategia conocida del otro jugador.

Se define $a_{-i} = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$ el perfil estratégico a sin la estrategia del agente i. Si todos los agentes que no son i (se denotará $-i$) se comprometen a jugar a_{-i}, el jugador i que quiere maximizar su utilidad se enfrentará al problema de determinar cuál es su mejor respuesta.

Definición 3.1. ***(Mejor respuesta):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego en forma estratégica. Se dice que una estrategia $a_i^* \in A_i$ es una mejor respuesta a un vector de estrategias a_{-i} de los otros jugadores si:*

$$u_i(a_i^*, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i}), \quad \forall a_i \in A_i$$

Al conjunto de mejores respuestas para el jugador i para cada $a_{-i} \in A_{-i}$ se denota como $MR_i(a_{-i}) \coloneqq \{a_i^* : u_i(a_i^*, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i}) \forall a_i \in A_i\}$

En otras palabras, a_i^* es una estrategia dominante en un sentido débil ya que es la mejor estrategia sabiendo que los demás agentes van a realizar la estrategia a_{-i}. Cabe destacar que la mejor respuesta no es única. De hecho, si consideramos las estrategias mixtas, a excepción del caso donde hay una única mejor respuesta que sea una estrategia pura, el número de mejores respuestas es siempre infinito.

Cuando la mejor respuesta sea única, hablaremos de funciones de mejor respuesta. Como notación se usará $b_i(a_{-i}) = a_i$, $\forall i \in N$. Es decir, la mejor respuesta del jugador i, b_i, a la estrategia empleada por el resto de jugadores, a_{-i}, es a_i.

Sin embargo, en general, un agente no va a conocer de antemano qué estrategias van a elegir los demás agentes. Por ello, la noción de mejor respuesta no es un concepto de solución, puesto que es necesario añadir alguna condición que asegure que el jugador i esté en lo cierto en su hipótesis de que el resto de jugadores seleccionarán el perfil estratégico a_{-i}.

Definición 3.2. ***(Equilibrio de Nash):*** *Un perfil estratégico $a^* = (a_1^*, ..., a_n^*)$ es un Equilibrio de Nash si:*

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*), \quad \forall a_i \in A_i \text{ y } \forall i \in N$$

La idea que hay detrás de esta definición es la siguiente: Un Equilibrio de Nash en un juego en forma estratégica es un perfil de estrategias en el cual ningún agente sale ganando si se desvía unilateralmente y cambia de estrategia.

En el ejemplo 2.2., correspondiente al dilema del prisionero, hay exactamente un Equilibrio de Nash: la mejor respuesta para el prisionero X si el prisionero Y delata es delatar (prefiere 3 años en la cárcel que 4). Lo denotamos como $b_1(D) = D$. Así mismo, $b_1(C) = D$. Para el prisionero Y, las mejores respuestas son $b_2(D) = D$, y $b_2(C) = D$. Por tanto, en el dilema del prisionero, el Equilibrio de Nash es el perfil estratégico (D, D) con un resultado asociado de $(-3, -3)$.

En el ejemplo 2.3, Matching Pennies, se puede comprobar que no hay Equilibrio de Nash, dado que $b_1(C) = C$, $b_1(+) = +$ son las mejores respuestas para el primer jugador, y $b_2(C) = +$, $b_2(+) = C$ para el segundo. Como no hay ninguna combinación estratégica donde cada jugador juegue una mejor respuesta al contrario, no existe Equilibrio de Nash con estrategias puras[5].

Ejemplo 3.3. (Batalla de los sexos): Un marido y una esposa desean pasar la tarde juntos realizando alguna actividad. El marido desea ir al teatro a ver una obra que le han recomendado, mientras que la esposa desea ir a ver un partido de fútbol de su equipo favorito. Ellos prefieren ir juntos antes que hacer alguna actividad por separado. La matriz que representa el juego en forma normal es la siguiente:

		Esposa	
		Teatro	Fútbol
Esposo	Teatro	$(2, 1)$	$(0, 0)$
	Fútbol	$(0, 0)$	$(1, 2)$

Tabla 4: Batalla de los sexos

En este caso, las mejores respuestas son, siendo el marido el agente 1 y la esposa la 2:

Marido	Mujer
$b_1(T) = T$	$b_2(T) = T$
$b_1(F) = F$	$b_2(F) = F$

Tabla 5: Mejores respuestas en la Batalla de los Sexos

Por tanto, hay dos equilibrios de Nash: (Teatro, Teatro) y (Fútbol, Fútbol) con pagos asociados $(2, 1)$ y $(1, 2)$, respectivamente.

Se han visto ejemplos donde hay cero, uno y más de un Equilibrio de Nash, por lo que dos preguntas naturales a realizar serían las siguientes:

- **Existencia:** ¿Todo juego tiene un Equilibrio de Nash?
- **Unicidad:** Dado un juego, ¿es posible saber si tiene exactamente un Equilibrio de Nash?

A estas preguntas se les dará respuesta en posteriores capítulos.

Antes de continuar, se hará un ejemplo de dos jugadores e infinitas estrategias. Para ello, se necesitan las siguientes definiciones:

[5] Más adelante se demostrará que con estrategias mixtas sí que lo hay.

Definición 3.4. ***(Correspondencia):*** *Sean S y T conjuntos. Una correspondencia $F : S \longrightarrow T$ asigna a cada elemento $s \in S$ a un subconjunto no vacío $Y \subset T$*

$$\begin{array}{rccl} F\colon & S & \longrightarrow & T \\ & s & \longmapsto & F(s) = Y \subset T \end{array}$$

Se verá que en ocasiones la mejor respuesta de un jugador no es una función de la estrategia del contrario, sino una correspondencia. Esto ocurre cuando la mejor respuesta no es única.

Definición 3.5. ***(Correspondencia de mejor respuesta):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego en forma estratégica tal que, para cada $i \in N$:*

- *Existe un $m_i \in \mathbb{N}$ tal que A_i es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{m_i}$.*
- *La función de utilidad u_i es contínua.*

Entonces, la correspondencia de mejor respuesta para cada $i \in N$, $MR_i : A_{-i} \longrightarrow A_i$, se define para cada $a_{-i} \in A_{-i}$ como se ha visto en la Definición 3.1 de la página 10

Para el siguiente ejemplo, se denotará por $x_1 \in A_1$ la estrategia escogida por el primer jugador, y con $x_2 \in A_2$ la del segundo. La función de utilidad del jugador 1, $u_1(x_1, x_2)$ depende de las dos estrategias, y también la del jugador 2, $u_2(x_1, x_2)$. Supongamos que $A_1 = A_2 = [-1, 1]$. Claramente este juego no se puede representar en forma matricial, ya que hay una cantidad no numerable de estrategias.

Ejemplo 3.6. (Juego con infinitas estrategias - Sin equilibrio): Sean $u_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} - x_1x_2$ y $u_2(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + x_1x_2$ las funciones de utilidad de dos jugadores. Si se calculan las derivadas de ambas funciones, se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene la solución $(0, 0)$, lo cual no es solución dado que $u_1(0, 0) = u_2(0, 0) = 0$. En particular, si se comprueba con la segunda derivada se observa que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ no son máximos de las correspondencias de mejor respuesta, y eso es porque las funciones no son cóncavas. Si se calcula la mejor respuesta para cada jugador:

$$x_1 = MR_1(x_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } x_2 > 0 \\ 1 & \text{si } x_2 < 0 \\ \{-1, 1\} & \text{si } x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = MR_2(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > 0 \\ -1 & \text{si } x_1 < 0 \\ \{-1, 1\} & \text{si } x_1 = 0 \end{cases}$$

Si se observa la Figura 2, donde el eje de abscisas corresponde a x_1 y el de ordenadas a x_2, no hay un perfil (x_1, x_2) que esté sobre las dos correspondencias de mejores respuestas.

Por último, aunque el siguiente ejemplo también es de dos jugadores e infinitas estrategias, esta vez existirá equilibrio de Nash.

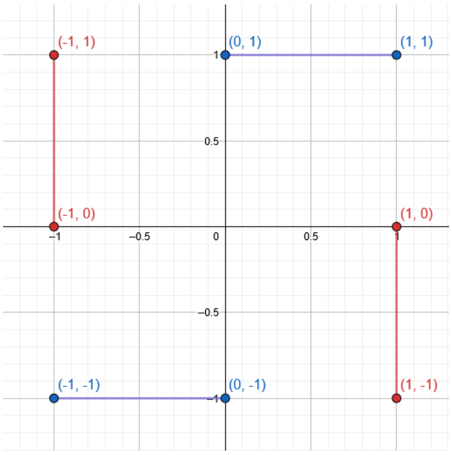


Figura 2: Gráfico del ejemplo 3.6.

Ejemplo 3.7. (Juego con infinitas estrategias - Con equilibrio)[6]: Sean $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$ los presupuestos para publicidad de las empresas 1 y 2. Cada empresa puede gastar cualquier cifra entre 0 y 1000 dólares, y vamos a suponer que es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Es decir, que vamos a suponer que los dólares no son una cantidad discreta. Los beneficios de la empresa 1, $u_1(x_1, x_2) = 1000x_1 - x_1^2 - x_2^2$ y los de la empresa 2, $u_2(x_1, x_2) = 1000x_2 - x_1x_2 - x_2^2$. Cada función de utilidad u_i es dos veces continuamente diferenciable, y es estrictamente cóncava respecto a la variable x_i. Se define la función de mejor respuesta para el jugador 1, $x_1 = MR_1(x_2)$ como el valor que maximiza $u_1(x_1, x_2)$ para cualquier x_2 dado. Por lo que $MR_1(x_2)$ es la solución de $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 1000 - 2x_1 = 0$. Análogamente, para el jugador 2, donde $MR_2(x_1)$ es la solución de $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 1000 - x_1 - 2x_2 = 0$

Las correspondencias de mejor respuesta son:

$$MR_1(x_2) = 500, \qquad MR_2(x_1) = \frac{1000 - x_1}{2}$$

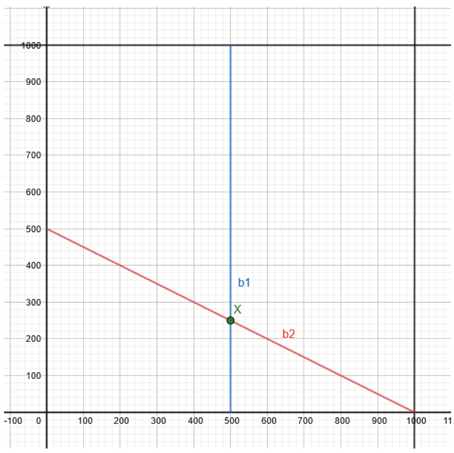


Figura 3: Gráfico del ejemplo 3.7.

Se observa que $x^* = (500, 250)$ es el Equilibrio de Nash.

[6]Ejemplo extraído del libro *Juegos para empresarios y economistas*, de Roy Gardner

4 Juegos en estrategias mixtas

En esta sección se introduce la extensión a estrategias mixtas de un juego en forma estratégica $G = (N, A, u)$, necesaria para el teorema de existencia de equilibrio de Nash que se enunciará y demostrará en la siguiente sección.

En una situación modelizada matemáticamente como un juego, una forma segura de escoger una acción de manera que los demás agentes no puedan predecirla es tomar la decisión sobre qué estrategia realizar de forma que ni siquiera uno mismo pueda predecirla. Es decir, introduciendo un componente de aleatoriedad en la elección de la estrategia. De esta manera, se puede extender la definición de juego finito en forma estratégica, permitiendo a los jugadores escoger no sólo las estrategias que inicialmente había (estrategias puras), sino también loterías sobre el conjunto finito de estas estrategias.

A partir de ahora, se va a suponer que se parte de un juego G finito para extenderlo a un juego con infinitas estrategias.

Definición 4.1. ***(Juego finito):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego en forma estratégica. Se dice que G es un juego finito si, para cada $i \in N$, $|A_i| < \infty$, donde $|A_i|$ representa la cardinalidad del conjunto A_i.*

Para tener una idea acerca de las estrategias mixtas, supongamos que estamos en la Batalla de los Sexos (Ejemplo 3.3 de la página 11). Aparentemente, solo hay dos opciones donde elegir: ir al teatro o ver el partido de fútbol. Sin embargo, hay otras alternativas, como puede ser la de lanzar una moneda cada uno y decidir que si sale cara eligen una acción, mientras que si sale cruz escogen la acción alternativa. De esta manera, se tienen tres opciones: Teatro, Fútbol, o lanzar una moneda, que es una estrategia con la misma probabilidad de ir al teatro como de ver el partido. Cabe destacar que, una vez lanzada la moneda, la acción será o bien teatro, o bien fútbol. Es decir, que no es que se amplíe el número de opciones disponibles, sino que se amplía el conjunto de elección. Evidentemente lanzar una moneda no coincide con ninguna de las otras dos acciones, ya que antes de que caiga la moneda no hay certeza por parte de ningún jugador sobre que acción se va a realizar. Así pues, elegir ir al teatro o ver el partido de fútbol son las estrategias puras, definidas en el capítulo anterior, mientras que la nueva estrategia de lanzar una moneda se conoce como una estrategia mixta. En particular hay infinitas, una para cada probabilidad de elección teatro contra fútbol.

Definición 4.2. ***(Extensión en estrategias mixtas de un juego finito):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego finito en forma estratégica. Se define la extensión mixta de G como $E(G) := (N, S, u)$, cuyos elementos son:*

- *El mismo conjunto de jugadores N.*
- *Conjunto de estrategias mixtas: Para cada $i \in N$, una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras $A = A_1 \times ... \times A_n$, que se denota como el vector $s_i = (s_{i,1}, ..., s_{i,n})$, donde $s_{i,j}$ denota la probabilidad del jugador i de escoger la estrategia pura j-ésima, y $s(a) := s_1(a_1) \times ... \times s_n(a_n), \forall s \in S$ y $\forall a \in A$.*
- *Funciones de pago o utilidad: Para cada $s \in S$,*

$$u_i(s) := \sum_{a \in A} u_i(a)s(a) = \sum_{a \in A} s_1(a_1)...s_n(a_n)u_i(a)$$

con $u := \prod_{i=1}^{n} u_i$ un vector de $\mathbb{R}^n$.

Nótese que $s(a)$ es la probabilidad con la que se produce el perfil estratégico $(a_1, .., a_n)$ cuando los jugadores juegan las estrategias mixtas $(s_1, ..., s_n)$. También cabe resaltar que $E(G)$ es una extensión del juego G en el sentido que, para cada agente $i \in N$, cada elemento de A_i esta unívocamente identificado con un elemento de S_i, por lo que $A_i \subset S_i$.

Definición 4.3. ***(Conceptos de juegos estratégicos en mixtas):*** *Sea G un juego finito y $E(G)$ su extensión mixta. Sea $s_i \in S_i$ una estrategia mixta para el agente i y $s \in S$ un perfil estratégico.*

- *El soporte de s_i es el conjunto $SOP(s_i) := \{a_i \in A_i : s_i(a_i) > 0\}$, y $SOP(s) := \prod_{i \in \mathbb{N}} SOP(s_i)$.*
- *Se dice que s_i es completamente mixta, o completa, si $SOP(s_i) = A_i$. Análogamente, $SOP(s) = A$.*
- *El conjunto de mejores respuestas puras del jugador i a s_{-i} viene dado por $MRP_i(s_{-i}) := \{a_i^* \in A_i : u_i(a_i^*, s_{-i}) \geq u_i(a_i, s_{-i}), \forall a_i \in A_i\}$*

Como observación, cuando la mejor respuesta es única, tenemos una función de mejor respuesta que se denota $b_i(a_{-i})$, y cuando el juego es un juego finito y estamos considerando únicamente estrategias puras, se escribirá $MRP_i(a_{-i})$ para diferenciarlo de cuando se esté en la extensión mixta del juego, y por tanta se aceptan mejores respuestas mixtas.

Como se está asociando una lotería S_i a cada perfil estratégico A_i del jugador $i \in \mathbb{N}$, S_i se puede identificar como el símplex[7] de $\mathbb{R}^{m_i}$, donde $m_i := |A_i|$:

$$\Delta A_i = \left\{ s_i \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum_{k=1}^{m_i} s_{i,k} = 1 \text{ con } s_{i,k} \geq 0, \forall k \in \{1, 2, ..., m_i\} \right\}$$

Por ello, el conjunto de estrategias mixtas se puede escribir como $S_i := \Delta A_i$ y $S := \prod_{i \in N} S_i$.

Por otra parte, el conjunto denominado soporte es un subconjunto de estrategias puras que tienen probabilidad estrictamente positiva, ya que pueden existir ciertas estrategias que tengan probabilidad nula. En otras palabras, una estrategia pura puede ser vista como una estrategia mixta que tiene soporte unitario. Con el siguiente ejemplo quedará clara esta observación:

Ejemplo 4.4. (Juego con estrategias mixtas): Supongamos el siguiente juego:

		Jugador 2	
		Izquierda	Derecha
Jugador 1	Arriba	$(3, 2)$	$(1, 4)$
	Centro	$(1, 3)$	$(2, 1)$
	Abajo	$(2, 2)$	$(2, 0)$

Tabla 6: Forma normal del juego

[7]Un símplex es la envoltura convexa de un conjunto de (n+1) puntos independientes en un espacio euclídeo de dimensión n o superior.

En este juego se observa que las estrategias puras que tiene el primer jugador son $\{Arriba, Centro, Abajo\}$, y el segundo jugador tiene las estrategias $\{Izquierda, Derecha\}$. Si se hace la extensión a estrategias mixtas, se debe asociar una distribución de probabilidad a las estrategias puras de cada jugador. Por ejemplo, al jugador 1 se le puede asociar $(p, q, 1-p-q)$, con $p, q \in [0,1]$ de tal manera que p representa la probabilidad de que este jugador elija *Arriba*, q la de elegir *Centro*, y $1-p-q$ la de elegir la acción *Abajo*. Análogamente para el segundo jugador, se le asocia $(t, 1-t)$, donde t es la probabilidad de elegir *Izquierda* y $1-t$ de elegir *Derecha*.

Si se verifica que $p > 0$, $q > 0$, y $1-p-q > 0$, la estrategia mixta del jugador 1 tendrá un conjunto soporte igual al conjunto de estrategias puras, por lo que será una estrategia mixta completa. Por ejemplo, la estrategia mixta completa $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ asigna la probabilidad $\frac{1}{2}$ a jugar *Arriba*, y $\frac{1}{4}$ a jugar tanto *Centro* como *Abajo*. Por tanto, $SOP\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = A_1$. Si no se verifican las relaciones anteriormente descritas, como puede ser el perfil estratégico mixto dado por la lotería $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ no es una estrategia mixta completa, dado que el conjunto soporte es un subconjunto de A_1: $SOP\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \{Centro, Abajo\}$

Una observación inmediata es que las estrategias puras *Arriba*, *Centro* y *Abajo* se pueden expresar como las estrategias mixtas $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, respectivamente.

Todo esto lleva a la definición de equilibrio de Nash en estrategias mixtas:

Definición 4.5. ***(Equilibrio de Nash en estrategias mixtas):*** *Sea G un juego finito en forma estratégica, y sea $E(G)$ su extensión en estrategias mixtas. Se dice que s es un equilibrio de Nash de $E(G)$ si, para cada jugador $i \in N$, $u_i(s) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$, $\forall s_i^{'} \in S_i$*

En un equilibrio de Nash cada jugador está escogiendo las estrategias de forma aleatoria (siguiendo una distribución de probabilidad). Sin embargo, es plenamente consciente de que el resto de jugadores también, y ningún jugador puede mejorar su utilidad esperada cambiando las probabilidades de jugar sus estrategias de forma unilateral.

Antes de realizar algunos ejemplos, la siguiente proposición permite encontrar los equilibrios de Nash en la extensión mixta de juegos finitos:

Teorema 4.6. ***(Equilibrio de Nash - Métodos simplificados):*** *Sea G un juego finito y $E(G)$ su extensión a estrategias mixtas. Entonces, para cada jugador $i \in N$, cada perfil estratégico mixto $s_i \in S_i$ para cada jugador, y $s \in S$ se tiene que:*

- *$s_i \in MR_i(s_{-i})$ si, y sólo si, $SOP(s_i) \subset MRP_i(s_{-i})$*
- *s es un equilibrio de Nash de $E(G)$ si, y sólo si, $SOP(s) \subset MRP(s)$*
- *s es un equilibrio de Nash de $E(G)$ si, y sólo si, $u_i(s) \geq u_i(a_i^{'}, s_{-i})$, $\forall a_i^{'} \in A_i$ y $\forall i \in N$*

Este teorema prueba que para comprobar que un perfil en mixtas forma un equilibrio de Nash es suficiente comprobar que ningún jugador tiene incentivos a desviarse unilateralmente a una de sus estrategias puras. No es necesario comprobar que no hay incentivos a desviarse a ninguna estrategia mixta.

Demostración: En la definición 4.2 de la página 14 se había definido la función de utilidad como $u_i(s) := \sum_{a \in A} u_i(a)s(a)$, por lo que $u_i(s) =$

$\sum_{a_i \in A_i} u_i(a_i, s_{-i}) s_i(a_i)$, $\forall i \in N$. Es decir, se fija un perfil estratégico mixto para todos los jugadores y se calcula la utilidad para el jugador i. Sustituyendo $u_i(s)$ en la definición dada en el capítulo 3 de "Mejor respuesta", se obtiene el primer punto de la proposición anterior.

En cuanto al segundo punto, vamos a demostrar la implicación $\Longleftarrow$ en primer lugar. Supongamos que $SOP(s) \subset MRP(s)$, con $s = (s_1, ..., s_n)$, por lo que para cada jugador i, las estrategias puras $a_i \in SOP(s_i)$ son la mejor respuesta a $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$. Para evitar confusiones, y dado que estamos con el jugador i, las estrategias del resto de agentes que se mantienen fijas se las denotará como s_j^*, $\forall i \neq j$ Denominemos como M_i a la máxima utilidad alcanzada por el jugador i cuando el resto de jugadores juega s_{-i}. Por tanto:

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, a_{i,j}, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) = \max_{a_i \in A_i} \left\{ u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, a_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) \right\} = M_i,$$
$$\forall a_{i,j} \in SOP(s_i)$$

y se obtiene que:

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) = \sum_{s_{i,j} > 0} s_{i,j} u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, a_{i,j}, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) =$$

$$= \sum_{s_{i,j} > 0} M_i = M_i \geq u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*), \ \forall s_i \in S_i$$

Por lo que s_i es la mejor respuesta a s_{-i} para todo jugador i, que es exactamente la definición de equilibrio de Nash.

Para la otra implicación $\Longrightarrow$, vamos a suponer que $s = (s_1, ..., s_n)$ es un equilibrio de Nash. Vamos a suponer que la estrategia pura $a_{i,j}$ del jugador i pertenece al soporte de s_i. Supongamos también que esta estrategia no es una mejor respuesta al perfil estratégico s_{-i}, por lo que existe una estrategia pura $a_{i,k}$ del mismo jugador tal que

$$u_i((s_1^*, ..., s_{i-1}^*, a_{i,k}, s_{i+1}^*, ..., s_n^*) > u_i((s_1^*, ..., s_{i-1}^*, a_{i,j}, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$$

Sea $s_i^{'}$ la estrategia mixta del jugador i idéntica a s_i, cambiando únicamente la componente $s_i^{'}(a_{i,j})$, que le asigna un valor 0, y la componente $s_i^{'}(a_{i,k})$ que tiene probabilidad $s_i(a_{i,j}) + s_i(a_{i,k})$. Claramente, la estrategia $s_i^{'}$ es mejor estrictamente que s_i. Por tanto, s_i no es mejor respuesta a s_{-i}, lo cual contradice la hipótesis de que s es un equilibrio de Nash.

Para ver el último punto de la proposición, vamos a suponer que $u_i(s) \geq u_i(a_i^{'}, s_{-i})$, $\forall a_i^{'} \in A_i$ y $\forall i \in N$. Fijando un jugador i y una $s_i \in S_i$, se obtiene que $u_i(s) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ debido a que $u_i(s_i, s_{-i})$ es una combinación convexa[8] de números de $\{u_i(a_i, s_{-i})\}_{a_i \in A_i}$. Como todos los jugadores están escogiendo estrategias según loterías, se tiene que s es un equilibrio de Nash.$\square$

Volviendo al Ejemplo 3.3 de la página 11, se observó que existían dos equilibrios de Nash: (Teatro, Teatro) y (Fútbol, Fútbol) con pagos asociados $(2, 1)$ y $(1, 2)$, respectivamente. Estos equilibrios de Nash eran con estrategias puras, por lo que el siguiente paso es analizar este mismo juego en su extensión a estrategias mixtas.

[8] Ver Definición 5.6.

Ejemplo 4.7. (Batalla de los Sexos - Extensión a estrategias mixtas): La bimatriz asociada a este juego es la tabla 4.

Los conjuntos de estrategias mixtas del esposo y de la esposa pertenecen al intervalo $I := [0,1]$. De esta manera, el esposo tiene la estrategia $(x, 1-x)$ y la esposa tiene $(y, 1-y)$, con $x, y \in I$, donde x representa la probabilidad del esposo para elegir ir al teatro, mientras que y representa la probabilidad de la esposa de ir al teatro. En virtud del Teorema 4.6 de la página 16, si existe equilibrio en estrategias mixtas, las estrategias de equilibrio tendrán como soporte las dos estrategias puras y por lo tanto a cada jugador le debe ser indiferente elegir entre sus distintas estrategias puras dada la estrategia mixta del otro jugador. Por tanto, para el jugador 1:

$$y(2) + (1-y)(0) = y(0) + (1-y)(1)$$

Mientras que para el segundo jugador:

$$x(1) + (1-x)(0) = x(0) + (1-x)(2)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, se obtiene que $x = \frac{2}{3}$ y $y = \frac{1}{3}$. Por tanto, el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es $\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$, con pagos esperados $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Se puede observar que los equilibrios de Nash en un juego con dos agentes y dos estrategias puras se pueden encontrar de forma sencilla. Si se consideran los conjuntos $B_1 = \{(x,y) \in A_1 \times A_2 : x \in MR_1(y)\}$ y $B_2 = \{(x,y) \in A_1 \times A_2 : y \in MR_2(x)\}$, los equilibrios de Nash son los elementos del conjunto $B_1 \cap B_2$. En el ejemplo anterior, se ha visto que el esposo se muestra indiferente a escoger entre ir al teatro o ver el partido cuando su mujer escoge ir al teatro con probabilidad $\frac{1}{3}$ y ver el partido con probabilidad $\frac{2}{3}$. Análogamente para la esposa, cuando el marido tiene asociada la lotería $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Por tanto, en este juego, los conjuntos B_1 y B_2 vienen dados por:

$$B_1 = \{(0,y) : y \in [0, 1/3]\} \cup \{(x, 1/3) : x \in [0,1]\} \cup \{(1,y) : y \in [1/3, 1]\}$$
$$B_2 = \{(x,0) : y \in [0, 2/3]\} \cup \{(2/3, y) : y \in [0,1]\} \cup \{(x,1) : y \in [2/3, 1]\}$$

Por tanto, el conjunto $B_1 \cap B_2$ contiene los elementos $\left\{(0,0), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), (1,1)\right\}$, que corresponden a los dos equilibrios de Nash en estrategias puras, y al equilibrio de Nash encontrado en estrategias mixtas.

Otro ejemplo que se analizó fue el del juego de "Matching Pennies", Ejemplo 2.3 de la página 6, donde se observó que no existía equilibrio de Nash en estrategias puras. Si se analiza bajo el punto de vista de las estrategias mixtas, se encontrará que existe un equilibrio de Nash.

Ejemplo 4.8. (Matching Pennies - Extensión a estrategias mixtas): Supongamos que el jugador 1 elige C con probabilidad p, por lo que elegirá $+$ con probabilidad $1-p$, por lo que su estrategia será $(p, 1-p)$. Si el jugador 2 juega la estrategia pura C, su resultado esperado será $p(-1) + (1-p)1 = 1-2p$, mientras que si juega $+$ será $p(1) + (1-p)(-1) = 2p-1$. Se obtiene que jugar cara es más beneficioso para el jugador cuando $p < \frac{1}{2}$. Cuando $p = \frac{1}{2}$, ambos pagos son iguales, por lo que por el teorema 4.6 será una mejor respuesta a cualquier estrategia mixta[9]. Razonando de forma análoga para el jugador contrario, se

[9] Es decir, que no importa la lotería que tenga asociada el jugador 2.

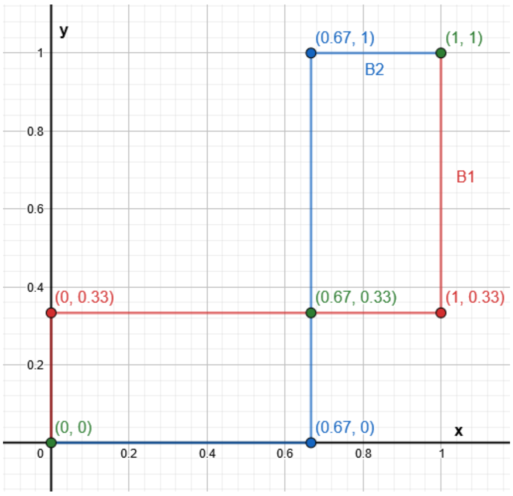


Figura 4: Correspondencias de mejor respuesta del ejemplo 4.7.

obtiene que existe un equilibrio de Nash, que corresponde a $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ con pagos esperados $(0, 0)$.

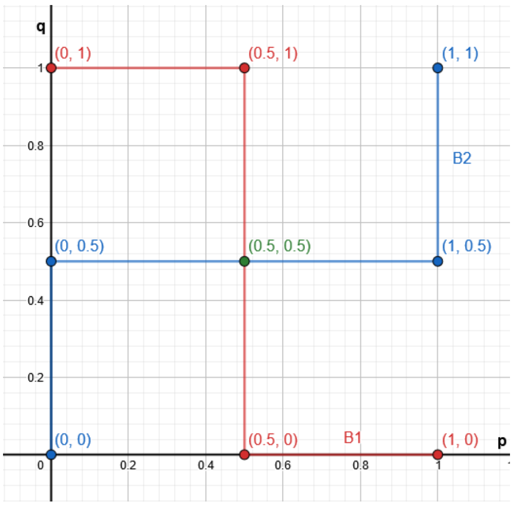


Figura 5: Correspondencias de mejores respuestas del ejemplo 4.8.

Por tanto, se han visto dos ejemplos donde, usando estrategias puras, habían 2 y ningún equilibrio de Nash, respectivamente, pero que extendiendo estos juegos a estrategias mixtas aparecía un nuevo equilibrio de Nash. De hecho, en la batalla de los sexos, el equilibrio de Nash encontrado es ineficiente, ya que el resultado para cada jugador es inferior a jugar cualquiera de los otros equilibrios encontrados en estrategias puras. Una pregunta natural puede ser: ¿Existe siempre, cualquiera que sea el juego, un equilibrio de Nash, aunque sea en estrategias mixtas?

5 Teorema de existencia de Nash

Para esta sección, además de las referencias citadas en el primer capítulo, también se han utilizado las de Carmona [8], Forgo [11] y Torres [33]

5.1 Versión original

En mayo del año 1950, John F. Nash presentó su tesis doctoral llamada *Non-cooperative games*, en la cual demostró el resultado conocido como "Teorema de existencia de Nash":

Teorema 5.1. ***(Teorema de existencia de Nash):*** *Para todo juego finito en forma estratégica siempre existe, como mínimo, un equilibrio de Nash.*

Evidentemente se está suponiendo la extensión a estrategias mixtas del juego original, dado que se han visto varios ejemplos donde hay juegos que no poseen equilibrio de Nash jugando estrategias puras.

Para demostrar este resultado es necesario usar algunas definiciones previas, así como el teorema del punto fijo de Brouwer.

Definición 5.2. ***(Definiciones previas):*** *Sea C un conjunto de $\mathbb{R}^m$:*

- *Se dice que C es convexo si, para cada $x, y \in C$ y $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Para vectores $x_1, ..., x_n$ y escalares no negativos $\lambda_1, ..., \lambda_n$, con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, el vector $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ se llama combinación convexa de $x_1, ..., x_n$*
- *Se dice que C es compacto si es cerrado y acotado.*

Teorema 5.3. ***(Teorema del punto fijo de Brouwer):*** *Sea $C \in \mathbb{R}^m$ un conjunto convexo y compacto. Si una función $f : C \longrightarrow C$ es contínua, entonces existe $x \in C$ tal que $f(x) = x$*

Para realizar la demostración del teorema de Nash se va a suponer sin pérdida de generalidad el caso $N = 2$ para no complicar la notación. Por eso, a la matriz de pagos de un juego en forma normal se va a denotar como $A_{m\times n}$ para los resultados del jugador 1, y $B_{m\times n}$ para el segundo. El hecho de "descomponer" la bimatriz de pagos en dos va a permitir escribir de forma vectorial el pago esperado con la extensión a estrategias mixtas, ya que si se denota como x a la estrategia del primer jugador, e y a la del segundo, el resultado es $u_i(s) = x^T Ay = \sum_i \sum_j x_i a_{i,j} y_j$ [10]

> *Demostración (Teorema 5.1):* Se considera el caso de dos jugadores. Sea $G = (N, A, u)$ un juego finito en forma estratégica, y $E(G)$ su extensión con estrategias mixtas. Supongamos que las matrices de pago asociadas al juego son $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$. Sea $C = \Delta S_1 \times \Delta S_2$. Se define una aplicación contínua $f : C \longrightarrow C$ tal que a cada pareja de estrategias (x, y) se le asocia una nueva pareja, (x', y'), con las siguientes propiedades:
>
> - x' es una mejor respuesta a y que x, si existe. En caso contrario, $x' = x$.
> - y' es una mejor respuesta a x que y, si existe. En caso contrario, $y' = y$.

[10] Para simplificar la notación, en este capítulo x hace referencia al s_1 del anterior, y cada x_i corresponde con los $s_{1,i}$. Análogamente con y.

Por consiguiente, un punto fijo de la función es un equilibrio de Nash, por definición.

Vamos a suponer fijada la estrategia y del segundo jugador. Ahora, se puede definir c_i como el máximo valor entre 0 y la ganancia que el jugador 1 obtiene por cambiar de la estrategia x a la estrategia pura i. Es decir,

$$c_i := c_i(x,y) := \max_{x \in S_1} \left\{ A_i y - x^T A y, 0 \right\}$$

donde A_i denota a la fila í-ésima de la matriz A. Con ello, se puede definir $x' \in \Delta S_1$ como

$$x_i^{'} := \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k}$$

que representa el incremento de probabilidad obtenido por el primer jugador respecto al resultado contra la estrategia mixta y fijada del segundo jugador. Dicho de otra manera, lo que se hace es aumentar su probabilidad con c_k y normalizar los valores resultantes de manera que se obtiene una nueva probabilidad. De forma trivial se comprueba que $\sum_{i=1}^{m} x_i^{'} = 1$.

De forma análoga, se define

$$d_j := d_j(x,y) := \max_{y \in S_2} \left\{ x^T B_j - x^T B y, 0 \right\}$$

donde B_j denota a la columna j-ésima de la matriz B. Con ello, se puede definir $y' \in \Delta S_2$ como

$$y_j^{'} := \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_{k=1}^{n} d_k}$$

Finalmente, $f(x,y) = (x', y')$, dado que las propiedades que se pedían las cumple esta aplicación.

- *Primera propiedad:* Si $c_i = 0 \ \forall i$, entonces $x' = x$ es una mejor respuesta a y. Alternativamente, $Z := \sum_{i=1}^{m} c_i > 0$. Se debe probar que $\sum_{i=1}^{m} x_i^{'} A_i y > x^T A y$. Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $(1+Z)$, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^{'} + c_i) A_i y > (1+Z) x^T A y$$

  y se cumple la desigualdad, puesto que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i A_i y > Z x^T A y = \sum_{i=1}^{m} c_i x^T A y$$

- *Segunda propiedad:* Si $d_j = 0 \ \forall j$, entonces $y' = y$ es una mejor respuesta a x. Alternativamente, $R := \sum_{j=1}^{n} d_j > 0$. Se debe probar que $\sum_{j=1}^{n} x A_i y_j^{'} > x^T A y$. Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $(1+R)$, se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{n} x A_i (y_j^{'} + d_j) > (1+R) x^T A y$$

y se cumple la desigualdad, puesto que

$$\sum_{j=1}^{n} xA_i d_j > Rx^T Ay = \sum_{j=1}^{n} d_j x^T Ay$$

Por último, remarcar que C es un conjunto convexo y acotado, y que f es contínua ya que c_i y d_j lo son. Por tanto, en virtud del teorema del punto fijo de Brouwer, existe un par $(x, y) \in C$ tal que $f(x, y) = (x, y)$. Por tanto, (x, y) es un equilibrio de Nash. $\square$

Para la demostración con más de 2 jugadores, basta con definir para cada jugador j y cada estrategia pura l del mismo jugador cual es la ganancia que éste obtiene por cambiar de su actual estrategia $x^{j)}$ a la estrategia pura l, si es positiva, dadas las demás estrategias del resto de jugadores. El resto del razonamiento es idéntico al de la demostración.

5.2 Resultado general

A pesar de que Nash probó el teorema demostrado en la sección anterior, dicho resultado queda restringido por la hipótesis de la finitud de estrategias ($|A_i| < \infty, i \in N$). No obstante, existen juegos con infinitas estrategias (Ejemplo 3.6 de la página 12 y Ejemplo 3.7 de la página 13), donde la mejor respuesta es una correspondencia (Definición 3.5 de la página 12), por lo que es necesario un resultado que generalice el Teorema de existencia de Nash.

Para ello, se usarán las correspondencias (Definición 3.4 de la página 12) y las siguientes definiciones:

Definición 5.4. ***(Definiciones previas):*** *Sea C un conjunto de $\mathbb{R}^m$:*

- *Se dice que una función real f definida en un subconjunto de X de $\mathbb{R}^n$ es <u>cuasi-cóncava</u> si, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es convexo.*
- *Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ y $T \subset \mathbb{R}^m$. Una correspondencia F es <u>hemicontínua superior</u> si, para cada sucesión $(s_k)_k \subset S$ tal que converge a $s_0 \in S$ y cada abierto $Y \subset T$ tal que $F(s_0) \subset Y$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_0$, $F(s_k) \subset Y$. Asímismo, una correspondencia F es <u>hemicontínua inferior</u> si, para cada sucesión $(s_k)_k \subset S$ tal que converge a $s_0 \in S$ y cada abierto $Y \subset T$ tal que $F(s_0) \cap Y \neq \emptyset$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_0$, $F(s_k) \cap Y \neq \emptyset$*

Las imágenes de las figuras 6 y 7 han sido extraídas del libro de González-Diaz et al., *An introductory course on mathematical game theory.*

Teorema 5.5. ***(Teorema del punto fijo de Kakutani)[18]:*** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y compacto. Sea $F : X \longrightarrow X$ una correspondencia hemicontínua superiormente, de tal forma que $F(X)$ sea cerrado y convexo. Entonces, existe un elemento $x' \in X$ tal que $x' \in F(x')$. Es decir, F tiene un punto fijo.*

Teorema 5.6. ***(Teorema del Máximo):*** *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos compactos y no vacíos. Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función contínua, y $F : X \longrightarrow Y$ una correspondencia contínua. Entonces, se cumple:*

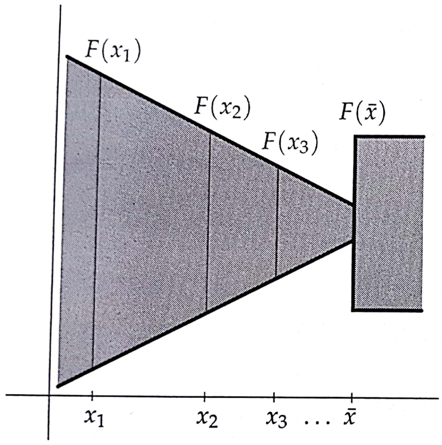


Figura 6: Ejemplo de una correspondencia hemicontínua superior

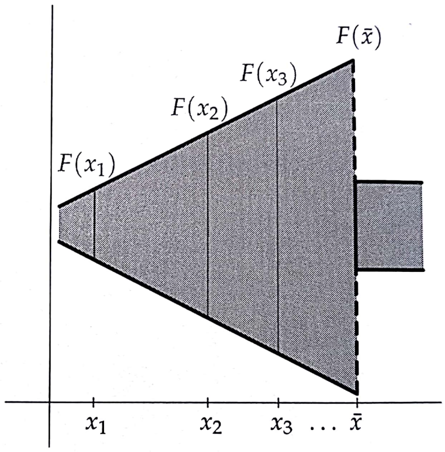


Figura 7: Ejemplo de una correspondencia hemicontínua inferior

- *La función de valor máximo es contínua:*

$$\begin{array}{rcll} m: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & m(x) \quad = \text{máx}\{f(x,y) : y \in F(x)\} \end{array}$$

- *La correspondencia maximizadora es hemícontínua superior:*

$$\begin{array}{rcll} G: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \mapsto & G(x) \quad = \{y \in F(x) : f(x,y) = m(x)\} \end{array}$$

Demostración (Teorema 5.6): Como F toma valores en un compacto no vacío, la continuidad de f implica que $G(x) \neq 0$, $\forall x \in X$. Dado $x \in X$, se toma una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(x)$ convergente a algún punto $y \in Y$. Como $y_n \in G(x)$, $f(x, y_n) \geq f(x, y^{'})$, $\forall y^{'} \in G(x)$. Si se hace el límite de la sucesión al infinito, se obtiene que $f(x, y) \geq f(x, y^{'})$, $\forall y^{'} \in G(x)$. Es decir, que $y \in G(x)$. Por tanto, $G(x)$ es un conjunto compacto y no vacío para todo $y \in Y$.

Para probar que $G(x)$ es hemicontínua superior se usará su definición. Fijado $x \in X$, se toma la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente para $x \in X$. Dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_n \in G(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se conoce que $y_n \in F(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, como F es contínua, F también es hemicontínua superiormente, y existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$, $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a algún $y \in F(x)$. Queda ver que $y \in G(x)$. Como F es contínua, F también es hemicontínua inferiormente, y para cada $y^{'} \in F(x)$ existe una sucesión $\{y^{'}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ convergente para $y^{'}$ tal que, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $y^{'}_n \in F(x_n)$. Luego, como para cada $k \in \mathbb{N}$, $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq f(x_{n_k}, y^{'}_{n_k})$ y, haciendo límites hacía el infinito, se obtiene $f(x, y) \geq f(x, y^{'})$. Es decir, que $y \in G(x)$, lo que prueba la hemicontinuidad superior.

En cuanto a la continuidad de la función $m(x)$, se considera la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergiendo a $x \in X$. Se conoce que existe $y_n \in F(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $m(x_n) = f(x_n, y_n)$. Esto es, que existe $y_n \in G(x_n)$. Como $F(x)$ es hemicontínua superior, existe una subsucesión de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $y \in F(x)$. Como $F(x)$ es hemicontínua inferior, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y^{'}_n \in F(x_n)$ tal que la sucesión $\{y^{'}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $y \in F(x)$ converge a y. Por tanto, $m(x_n) = f(x_n, y^{'}_n)$ converge a $m(x) = f(x, y)$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Es decir, que la función m es contínua. $\square$

En partícular, nos va a interesar el siguiente corolario:

Corolario 5.7. ***(Corolario del Teorema del Máximo):*** *Bajo las hipótesis del Teorema del Máximo, y suponiendo que F tiene valores convexos (es decir, $F(x)$ es un conjunto convexo), se tiene que si f es una función cuasi-cóncava en la variable y, entonces $G(x)$ tiene valores convexos.*

Demostración (Corolario 5.7): Dado $x \in X$, se fijan dos puntos $y_1, y_2 \in G(x)$. Como F tiene valores convexos, para cada $\lambda \in (0, 1)$, $z_\lambda := \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in F(x)$. Además, si f es cuasi-cóncava en la variable y, $f(x, z_\lambda) \geq \min\{f(x, y_1), f(x, y_2)\} = m(x)$. Es decir, que $z_\lambda \in G(x)$, $\forall\lambda(0, 1)$ $\square$

Con todo esto, se está en condiciones para enunciar y demostrar el teorema de Nash:

Teorema 5.8. ***(Teorema de Nash - Generalización):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego en forma estratégica tal que, para cada $i \in N$, si se cumple que:*

- *A_i es un subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$ no vacío, compacto y convexo.*
- *La función u_i es contínua.*
- *Para cada $a_{-i} \in A_{-i}$, $u_i(\,\cdot\,, a_{-i})$ es cuasi-cóncava en A_i.*

Entonces, el juego G tiene un equilibrio de Nash, como mínimo.

Demostración (Teorema 5.8): Tomando la definición de correspondencia de mejor respuesta (Definición 3.5 de la página 12), y en virtud del teorema del máximo anteriormente enunciado, resulta que MRP_i es hemicontínua superiormente, y la cuasi-concavidad de u_i implica que MRP_i toma valores convexos. Por tanto, $MRP(a) = MRP_1(a_1, a_{-1}) \times ... \times MRP_n(a_n, a_{-n})$,

$\forall a \in A$ es una correspondencia hemicontínua superior y con valores convexos. Además, $A = A_1 \times A_n$ es compacto y convexo, por lo que $MRP : A \longrightarrow A$ es una correspondencia hemicontínua superior tal que $MRP(A)$ es cerrado y convexo. Es decir, que MRP satisface las hipótesis del teorema del punto fijo de Kakutani, por lo que $\exists a^* \in A$ tal que $a^* \in MRP(A)$ $\square$

Esta generalización del Teorema de Nash fue demostrada por J.B. Rosen[36] en el año 1965. También dio algunas condiciones para determinar la unicidad del equilibrio de Nash, usando las características de concavidad para las funciones de utilidad, relajando esta hipótesis. Además, se basa en si la correspondencia de mejor respuesta es contractiva. Es común que a esta generalización se la denomine como “Teorema de Nash-Cournot”.

Antes de finalizar, aclarar que las demostraciones de los teoremas de punto fijo tanto de Brouwer como de Kakutani no han sido incluidas en esta memoria dado que quedan fuera de los objetivos fijados. Se puede encontrar la demostración de ambos resultados en las referencias.

6 Aplicaciones económicas

En esta sección se analizarán distintos casos en los que el equilibrio de Nash tiene una aplicación real en el ámbito de la economía.

6.1 El modelo de Cournot

Históricamente, los economistas centraron sus esfuerzos en analizar y comprender el funcionamiento de dos tipos de mercados opuestos: el monopolio y el mercado de competencia perfecta. Sin embargo, éstos no tienen relevancia en cuanto a interacción estratégica, ya que el primero solo tiene un agente (única empresa del mercado) y el segundo hace que para una empresa sea completamente inviable conocer todas las acciones que sus competidores realizan. Por ello, una situación más verosímil es la de un mercado concreto con unas pocas empresas compitiendo. Por ejemplo, la industria de fabricación de aviones tiene dos únicas empresas, Airbus y Boeing. O más localmente, dos panaderías en un pequeño municipio.

Cuando hay pocas empresas en un mismo mercado compitiendo por un mismo público objetivo, una de ellas puede plantearse qué efecto surge al realizar una acción propia contra el resto de competidores, y también anticiparse a posibles estrategias del resto de empresas que afectarán a su resultado. Por ejemplo: ¿Es viable subir precios, sin perder clientes?¿La otra empresa ofrecerá descuentos por sus productos? En caso afirmativo, ¿qué podemos hacer?

Uno de los modelos de duopolio más conocidos es el propuesto por el economista francés Antoine Augustin Cournot en 1838, uno de los precursores de la Teoría de Juegos. Situémonos en un escenario de mercado donde haya dos empresas compitiendo, también conocido como duopolio, en el cual producen un bien homogéneo[11] y es conocida la curva de demanda del mercado. Cada empresa decide qué cantidad de dicho bien va a producir, y ambas empresas toman esta decisión de forma simultánea. Evidentemente, cuando una empresa decide la cantidad de producto, está teniendo en cuenta a su competidora y viceversa, dado que el precio de mercado vendrá determinado por la producción total de ambas empresas.

Supongamos que la curva de demanda de este mercado es $Q = \alpha - \beta P$, donde P es el precio de mercado, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $Q = Q_1 + Q_2$ la cantidad agregada producida por la empresa 1 y la empresa 2. Como lo que se va a determinar es la cantidad que una empresa va a producir, es la variable precio la que va a estar en función de Q. Por tanto, si aislamos P, se obtiene

$$P = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{Q}{\beta}$$

Para simplificar la expresión, se define $a = \frac{\alpha}{\beta}$ y $b = \frac{1}{\beta}$, por lo que la función de demanda inversa queda como $P = a - bQ$.

Vamos a suponer que la función de coste es la misma para ambas empresas, y que el coste por unidad no varía según la producción. Es decir, que el coste marginal es constante ($c > 0$), con lo que el coste de producir una cantidad Q_i es cQ_i para $i = 1, 2$.

Por tanto: ¿Cuánto debe producir cada empresa? Para ello, se debe hacer una conjetura sobre la producción de la competencia para hacerse una idea del posible precio de mercado,

[11] Los productos de ambas empresas son indistinguibles desde el punto de vista del consumidor.

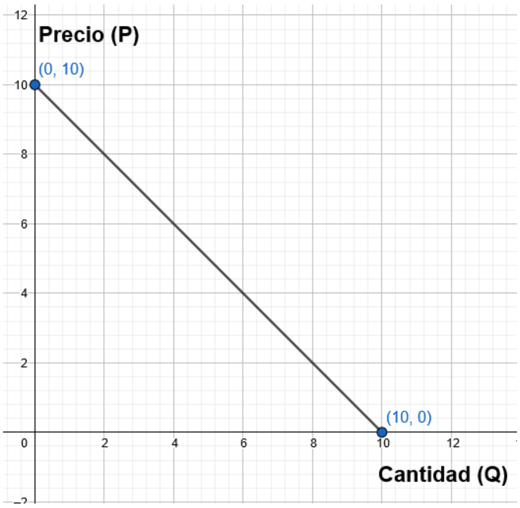


Figura 8: Ejemplo de curva de demanda inversa con a=10 y b=1

así como sopesar y ponderar los beneficios que se obtienen de incrementar la producción con los del coste de este hecho, ya que las unidades extra se venderán a un precio menor.

En primer lugar, vamos a analizar esta situación de interacción estratégica desde el punto de vista de la empresa 1. ¿Qué ocurriría si la empresa fuera la única del mercado? Al no haber competidores, la producción de la empresa 1 determinaría el precio del mercado. En este caso se podría determinar la cantidad que maximizase el beneficio en función de la Q. Sin embargo, en este caso P depende de $Q_1 + Q_2$, por lo que vamos a considerar una producción fija para la empresa 2, que se va a representar como $\overline{Q}_2$, la cual desconocemos. Así pues, la pregunta que debe hacerse la empresa 1 es: ¿Qué cantidad debo producir, dada una cierta cantidad producida por la competencia para maximizar el beneficio?

La función de precio viene dada por $P = a - b(Q_1 + \overline{Q}_2)$. Como los beneficios son el producto de los ingresos menos los costes, se tiene que

$$B_1(Q_1) = [a - b(Q_1 + \overline{Q}_2)]Q_1 - cQ_1$$

Donde B_1 es el beneficio de la empresa 1, el coste total para esta empresa es cQ_1 y $[a - b(Q_1 + \overline{Q}_2)]Q_1$ es el ingreso total, dado por el producto de precio por cantidad.

Es decir, que lo que se busca maximizar es B_1. Si se deriva y se iguala a 0, se obtiene

$$\frac{\partial B_1}{\partial Q_1} = a + b\overline{Q}_2 - c - 2bQ_1 = 0$$

Con lo cual la cantidad de equilibrio es:

$$Q_1^* = \frac{a - c - b\overline{Q}_2}{2b}$$

Cabe destacar que si $\overline{Q}_2 > \frac{a-c}{b}$, entonces $Q_1^* < 0$, por lo que en este caso se diría que la cantidad que maximiza los beneficios para la empresa 1 es 0. Es por ello que la mejor respuesta de la empresa 1 dada la producción de la empresa 2 viene dada por:

$$b_1(Q_2) = \begin{cases} \frac{a-c-bQ_2}{2b}, & \text{si } Q_2 \leq \frac{a-c}{b} \\ 0, & \text{si } Q_2 > \frac{a-c}{b} \end{cases}$$

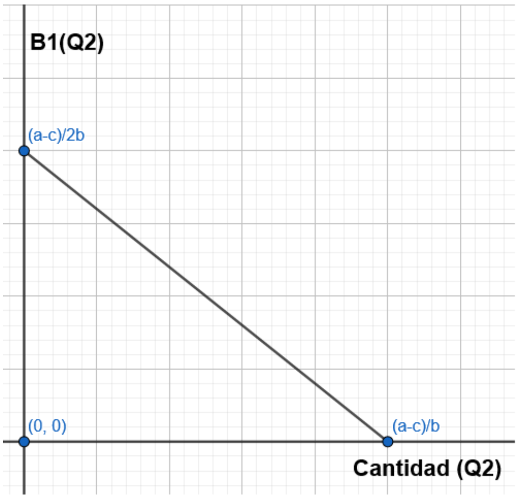


Figura 9: Función de mejor respuesta para la empresa 1

Dada la simetría de la situación, la función de mejor respuesta para la empresa 2 es:

$$b_2(Q_1) = \begin{cases} \frac{a-c-bQ_1}{2b}, & \text{si } Q_1 \leq \frac{a-c}{b} \\ 0, & \text{si } Q_1 > \frac{a-c}{b} \end{cases}$$

Si se hace la representación gráfica de ambas funciones, también llamadas funciones de reacción en el modelo de Cournot, se obtiene que hay un único punto (Q_1^*, Q_2^*) donde las funciones de mejor respuesta coinciden, y cuyas soluciones quedan recogidas en la Tabla 7.

$$b_1(Q_2^*) = Q_1^*$$
$$b_2(Q_1^*) = Q_2^*$$

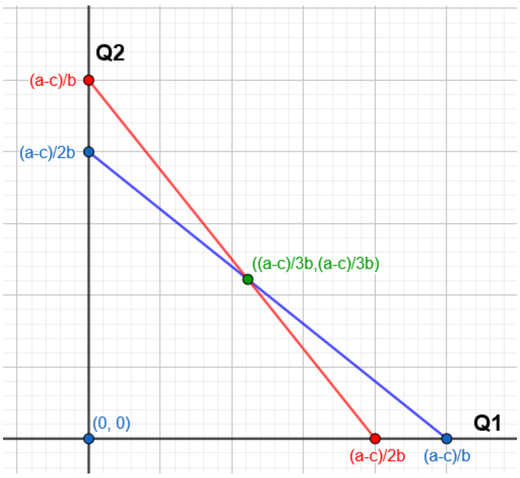


Figura 10: Curvas de reacción y equilibrio del modelo de Cournot

Este equilibrio encontrado en el modelo de Cournot es un equilibrio de Nash, ya que cada empresa obtiene el mejor resultado posible dada la producción de la competidora, por lo que ninguna tiene incentivos a desviarse unilateralmente de dicho nivel de producción.

Cantidad	Precio	Beneficio
$\frac{a-c}{3b}$	$\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c$	$\frac{(a-c)^2}{9b}$

Tabla 7: Cuadro resumen de los resultados de Cournot

Destacar que se está en una situación estática. Es decir, ambas empresas eligen su nivel de producción una vez y no puede variar, y por ello tiene sentido asumir la hipótesis de que la cantidad a producir de la competencia es fija. Hay otros modelos dinámicos, o por etapas como el modelo de Stackelberg, en las cuales las cantidades van cambiando y, por ende, los equilibrios.

6.2 El modelo de Bertrand

En el modelo de Cournot se ha supuesto que la competencia entre empresas se realiza en torno a las cantidades, y el precio se ajusta para equilibrar la oferta y la demanda. Sin embargo, hay muchos casos reales donde en un oligopolio la competencia se basa en los precios, ya que es más natural fijar precios y dejar que los consumidores decidan cuanto quieren comprar a esos precios. Por ejemplo, la industria automovilística, en la que el precio es una variable estratégica importante: cada empresa fija el suyo propio teniendo en cuenta la competencia. Este es el modelo propuesto por Joseph Louis François Bertrand en 1883.

Las hipótesis son las mismas que el modelo de Cournot (dos empresas, producto homogéneo, y coste marginal constante), pero en este caso la variable independiente es la correspondiente al precio. En este caso, la función de demanda a la que se enfrenta la empresa i es:

$$Q_i(P_i, P_j) = \begin{cases} Q(P_i) & \text{, si } P_i < P_j \\ \frac{1}{2}Q(P_i) & \text{, si } P_i = P_j \\ 0 & \text{, si } P_i > P_j \end{cases}$$

En el primer caso, se capta toda la demanda del mercado, dado que el precio es menor a la competencia y los consumidores quieren pagar menos por un mismo producto. El caso extremo es el último, donde se pierde toda la cuota de mercado. En el caso de que los precios coincidan, ambas empresas se reparten el mercado.

En este modelo se buscan funciones de reacción en precios de manera que cada empresa maximice su beneficio, y se demostrará que el único equilibrio de Nash para el modelo de Bertrand es que $P_1 = P_2 = c$, donde c es el coste marginal constante, y el beneficio para ambas empresas es 0.

- Supongamos que $P_i^* > P_j^* > c$ es un equilibrio. En este caso, la empresa i no tendría demanda, por lo que $Q_i = 0$ y ello implica que $B_i = 0$. La empresa j se lleva toda la cuota de mercado, con lo que $Q_j = Q(P_j^*)$ y $B_j = (P_j^* - c)Q(P_j^*)$. Esto no es un equilibrio ya la empresa i tiene incentivos a desviarse unilateralmente de P_i^* a $P_i^{'} = P_j^* - \epsilon$ respecto de P_j^*, ya que para $\epsilon > 0$ pequeño, de manera que $B_i > 0$.
- Supongamos que $P_i^* = P_j^* > c$ es un equilibrio. En este caso, ambas empresas se

reparten el mercado, con lo que

$$B_i = B_j = (P_i^* - c)\left(\frac{1}{2}Q(P_i^*)\right) > 0$$

De nuevo, esto no constituye un equilibrio, ya que la empresa i tiene incentivos a desviarse unilateralmente dada la estrategia P_j^* de la empresa j de P_i^* a $P_i^{'} = P_j^* - \epsilon$, con $\epsilon > 0$ pequeño. Así,

$$B_i(P_i^{'}) = \left(P_i^{'} - c\right) Q(P_i^{'}) > (P_i^* - c)\left(\frac{1}{2}Q(P_i^*)\right) = B_i(P_i^*)$$

ya $Q(P_i^{'}) \approx Q(P_i^*)$

- Supongamos que $P_i^* > P_j^* = c$ es un equilibrio. En este caso, la empresa i no tiene demanda ($Q_i = 0$) y $Q_j = Q(P_i, P_j)$. Es decir, que el beneficio para la primera es nulo, y para la segunda es $B_j(P_j^*) = \left(P_j^* - c\right) Q(P_j^*)$. De nuevo no es un equilibrio, ya que la empresa j tiene incentivos a cambiar su estrategia de P_j^* a $P_j^{'} = P_i^* - \epsilon$, con $\epsilon > 0$ pequeño, de manera que la empresa j continúa manteniendo toda la cuota de mercado y aumenta el beneficio:

$$B_j(P_j^{'}) = \left(P_j^{'} - c\right) Q(P_j^{'}) > \left(P_j^* - c\right) Q(P_j^*) = B_j(P_j^*)$$

Por consiguiente, el único equilibrio posible en el modelo de Bertrand es cuando $P_i^* = P_j^* = c$, con lo cual $B_i = B_j = 0$ y se reparten la cuota de mercado. Si alguna de ellas aumenta el precio, perderá la cuota de mercado y seguirá sin obtener beneficio. Por el contrario, si reduce el precio, se llevará toda la cuota de mercado, pero estará produciendo por debajo coste, con lo cual tendrá pérdidas. Es decir, que llegados a esta situación, ninguna empresa tiene incentivos a desviarse unilateralmente y cambiar de estrategia de selección de precios, por lo que es un equilibrio de Nash.

Este resultado también se conoce como la paradoja de Bertrand, ya que estando en un mercado oligopolístico con dos empresas se alcanza el mismo equilibrio que en un mercado de competencia perfecta, dado que el beneficio final es nulo y el precio final es igual que el coste marginal.

Cabe remarcar que existen posibles soluciones a la paradoja de Bertrand si se alteran ciertos supuestos del modelo original.

La solución de Edgeworth: En 1897, Francis Ysidro Edgeworth[10] solucionó la paradoja de Bertrand introduciendo restricciones en la capacidad, por las cuales las empresas no pueden vender más que lo que son capaces de producir.[12].La idea es que al precio de equilibrio, $(P_i^*, P_j^*) = (c, c)$, cada empresa no puede satisfacer por si sola la demanda de mercado, por lo que dicho punto dejaría de ser equilibrio. Supongamos que lo sea. Se tiene que $B_i = B_j = 0$. Supongamos que la empresa i decide subir el precio, por lo que la empresa j debe atender a toda la demanda del mercado. Entonces, $B_j(c) = (c - c) - K$, con $K < Q(c)$ y $B_i(P_i) = (P_i - c)Q_1(P_1) > 0$, donde $Q_1(P_1) = Q(P_1) - K$, por lo que la empresa i tiene incentivos a desviarse de P_i^*

[12]Según Vela Meléndez

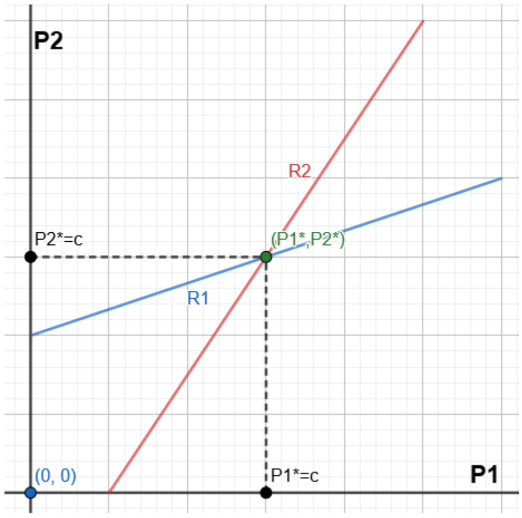


Figura 11: Curvas de reacción y equilibrio del modelo de Cournot

La dimensión temporal: Bajo este supuesto, la situación modelizada como un juego pasa de estático a dinámico, pues ambas empresas compiten más de una vez en este mismo mercado. Al encontrarse en más de una ocasión, éstas observaran que, para mantener una relación sostenible en el tiempo, tener una guerra de precios solo las conducirá a un beneficio nulo.

Diferenciación de producto: Una de las hipótesis más restrictivas del modelo hace hincapié en el hecho de que ambas empresas ofrecen productos totalmente homogéneos, lo cual los hace indistinguibles para el consumidor y perfectamente sustituibles. Es por ello que, dado un producto de este tipo, los consumidores siempre comprarán a aquel que lo venda más barato, pues no hay ningún tipo de diferenciación entre productos de estas empresas. Permitiendo que exista cierto grado de diferenciación, como puede ser una localización distinta, una característica particular, una marca concreta... hace posible que una reducción de precios de un competidor no absorba la totalidad de la cuota de mercado de la empresa. Este hecho hará que el punto de equilibrio encontrado $P = c$ dejé de ser solución del modelo de Bertrand.

6.3 La Tragedia de los Comunes

"...lo que es común para la mayoría es de hecho objeto del menor cuidado. Todo el mundo piensa principalmente en sí mismo, raras veces en el interés común". -Aristóteles

"La Tragedia de los Comunes" es un dilema escrito por Garret Hardín en 1968 para la revista Science. Representó un hito para el estudio y la búsqueda de soluciones de la degradación y destrucción de la naturaleza en nuestro planeta. Hardín se centró en dar respuesta al dilema del uso óptimo de los bienes públicos (en este caso de los recursos naturales) bajo condiciones como la indefinición de derechos de propiedad, la gratuidad y libre explotación de los bienes: "Si algo es de todos, nadie lo cuida y se termina acabando."

La Tragedia de los Comunes parte de la premisa de que si los individuos buscan maximizar su beneficio de forma individual usarán constantemente ciertos bienes o recursos naturales (huertos, ríos, bosques...) hasta que estos se agoten. Este comportamiento no considera el bienestar colectivo, y menos la conservación del medio ambiente en el largo plazo.

Uno de los supuestos es que la comunidad como tal es incapaz de lograr acuerdos racionales sobre el uso de recursos comunes, aún en el caso de lograrlos, es incapaz de obligar a su cumplimiento. Partiendo de esto, se sugiere que la única solución posible es introducir un agente externo a la comunidad que actúe tanto como regulador como de garantía de tales regulaciones. Eso, en la práctica, se concreta por el Estado, o por actores privados motivados por sus propios intereses o, quizás más a menudo, en una mezcla de ambos: la propiedad de los bienes comunes es transferida a individuos cuyos derechos son protegidos por el Estado.

La terminología y contexto histórico de este dilema puede situarse en el siglo XVI en Inglaterra, donde los poblados se construían de manera que en el centro hubiera zona verde que todos los habitantes pudiesen usar. Además de utilizarse en grandes eventos, esta zona común (*commons*) también era usada por los pastores para alimentar a sus rebaños. Evidentemente había prados privados donde sus propietarios podían disponer para sus animales, pero esa zona comun era empleada por todos.

En la actualidad existen casos de "zonas comunes", como puede ser la pesca en aguas internacionales, pero el más importante es el medio ambiente. Todos somos "propietarios"del medio ambiente, pero el uso ilimitado del mismo puede suponer su destrucción, incluyendo la polución y el cambio climático.

Hay dos características fundamentales en estas zonas comunes:

- **Acceso sin restricciones:** Es inviable (ejemplo de medio ambiente) o indeseable (parques naturales) restringir su acceso.
- **Agotamiento de recursos:** A mayor cantidad de agentes usando este recurso común, menor será su disponibilidad en el futuro.

Para analizar este dilema, se van a analizar dos ejemplos:

6.3.1 Un modelo simple

Supongamos que existe un recurso natural de propiedad común de capacidad $y > 0$. Consideremos también que hay dos agentes que pueden usar una cantidad positiva de este recurso, c_1, c_2, para consumirlo, con la restricción $c_1 + c_2 \leq y$. En el caso que ambos quisieran usar todo lo que haya disponible, la cantidad total será repartida entre ellos dos, con lo que cada jugador acaba consumiendo $\frac{y}{2}$. En cambio, si no utilizan todo, el recurso restante $y - (c_1 + c_2)$ será lo que podrá regenerar en un futuro, para poder volver a ser consumido posteriormente. Para simplificar este ejemplo, vamos a suponer que el futuro es un período extra de consumo de este recurso, por lo que en este modelo hay dos periodos: el momento actual y el siguiente.

En el segundo periodo, cada agente debe volver a decir qué cantidad de recurso consumir, teniendo en cuenta que el monto restante del periodo anterior es $y - (c_1 + c_2)$. Dado que no habrá más periodos a partir de aquí, no hay incentivo para no agotar el recurso usado. Es decir, ambos usarán todo lo que quede, y se repartirá entre ellos, con lo que cada uno obtiene $\frac{y-(c_1+c_2)}{2}$

De vuelta al primer periodo, se puede suponer que la utilidad que le proporciona consumir una cantidad c_i al jugador i, $i = \{1,2\}$ es: $\log(c_i)$, y tiene sentido ya que a mayor cantidad consumida, menor utilidad marginal supone. Por ejemplo, si tienes sed, un vaso de agua te reporta una utilidad de 10. El segundo vaso una utilidad de 5, por lo que dos vasos de agua tienen una utilidad de 15. El tercer vaso de agua ya no es tan necesario, por lo que su utilidad marginal es de 2, y la utilidad total es de 17.

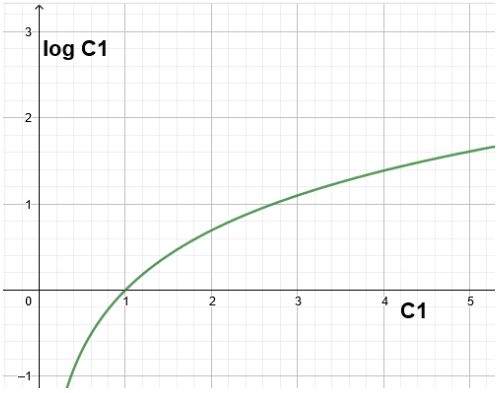


Figura 12: Utilidad de consumo en "La Tragedia de los Comunes"

Cada jugador debe determinar qué cantidad debería usar en el primer periodo, según disponibilidad. Su utilidad depende de la cantidad que el segundo jugador elija consumir ya que determinará la cantidad de recurso sobrante para el siguiente periodo. Como en otros casos, el primer jugador debe hacerse una idea sobre cuánto recurso natural va a usar el segundo, y así determinar su propio consumo. Es decir, la función que se desea maximizar es:

$$B_1(c_1) = \log(c_1) + \log\left(\frac{y - (c_1 + \overline{c}_2)}{2}\right)$$

donde $\overline{c}_2$ es la conjetura que hace el jugador 1 sobre el consumo que realizará del recurso el segundo jugador en el primer periodo.

Si se deriva la expresión anterior e iguala a cero, se obtiene que la mejor respuesta del jugador 1 es:

$$0 = \frac{1}{c_1} + \frac{2}{y - (c_1 + \overline{c}_2)} \cdot \frac{-1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{1}{y - (c_1 + \overline{c}_2)}$$

Es decir, $c_1 = y - (c_1 + \overline{c}_2) \Longrightarrow b_1(c_2) = \frac{y - c_2}{2}$, donde $b_1(c_2)$ es la función de mejor respuesta del jugador 1 al consumo realizado en el primer momento por el jugador 2.

Por la simetría del dilema, la función de mejor respuesta del segundo jugador es $b_2(c_1) = \frac{y - c_1}{2}$

El equilibrio de Nash se encuentra en los puntos donde

$$b_1(c_2^*) = c_1^*$$
$$b_2(c_1^*) = c_2^*$$

Lo que indica que $c_1^* = c_2^* = \frac{y}{3}$, con lo cual cada jugador consume $\frac{y}{3}$ en el primer periodo, dejando $\frac{y}{3}$ para el segundo periodo, de tal forma que luego lo reparten y obtienen $\frac{y}{6}$ cada uno. La utilidad que les proporciona es de $\log\frac{y}{3} + \log\frac{y}{6}$

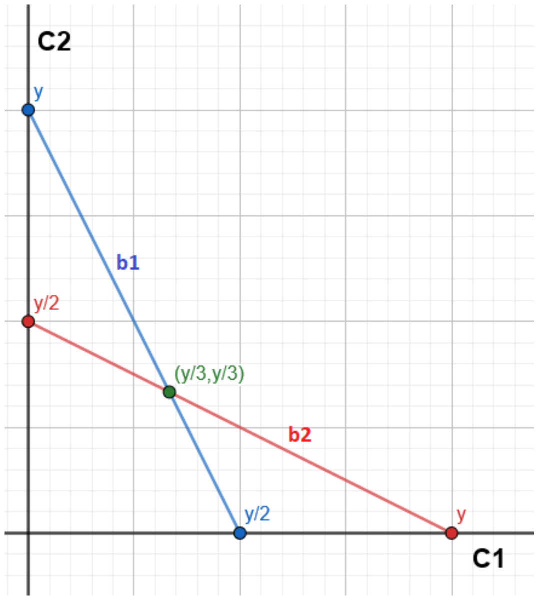


Figura 13: Gráfico de mejor respuesta en la tragedia de los comunes

Para valorar si este equilibrio es una “tragedia”, se va a analizar brevemente cual sería el uso de dicho recurso socialmente óptimo. Para ello, vamos a suponer que ambos jugadores constituyen una sociedad y ambos deciden cuanto deben consumir para el bien común. Es decir, que se debe maximizar la utilidad agregada de ambos jugadores. El consumo óptimo, $c_1^{'}$ y $c_2^{'}$, es la suma de las utilidades de los dos agentes:

$$B(c_1, c_2) = \log(c_1) + \log(c_2) + 2\log\left(\frac{y - (c_1 + c_2)}{2}\right)$$

De nuevo, derivando esta expresión e igualando a 0:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial B}{\partial c_1} &= \tfrac{1}{c_1} - \tfrac{2}{y-(c_1+c_2)} = 0 \\ \tfrac{\partial B}{\partial c_2} &= \tfrac{1}{c_2} - \tfrac{2}{y-(c_1+c_2)} = 0 \end{aligned}$$

Se obtiene que $c_1^{'} = c_2^{'} = \frac{y}{4}$, ya que $c_1 + \frac{y-2c_1}{2} = 0 \Longrightarrow 4c_1 - y = 0 \Longrightarrow c_1 = \frac{y}{4}$

Es decir, en este caso se consume la mitad de los recursos en el primer periodo por parte de ambos jugadores, mientras que en el caso anterior se habían consumido dos tercios del total. La razón por la que se produce esta sobreexplotación es que si uno de los jugadores deja de consumir una unidad de recurso en el primer periodo, luego hace que en el segundo periodo esta unidad deba repartirse entre los dos, con lo cual únicamente obtendría media unidad, ya que la otra mitad iría al segundo jugador. Este hecho no se produce en la solución socialmente óptima, puesto que todos los agentes tienen en cuenta las utilidades del resto. Una unidad que no se consume hoy por cada agente continúa siendo una unidad de consumo para toda la sociedad en el segundo periodo.

Cabe remarcar que cuantos más agentes haya implicados, peor es la solución alcanzada, ya que la función de mejor respuesta para el jugador 1 en el caso de N jugadores, suponiendo que cada uno de ellos consuma $\overline{c}$ es:

$$B_1(c_1) = \log(c_1) + \log\left(\frac{y - [c_1 + (N-1)\overline{c}]}{N}\right)$$

Con lo que se obtiene que $c_1 = \overline{c} = \frac{y}{N+1}$. Por tanto, en el primer periodo se consume $\frac{N}{N+1}y$ del total de recursos, dejando un total de $\frac{y}{N+1}$ para el segundo. Cuando N es suficientemente grande, la cantidad de recursos disponibles para el segundo periodo es minúscula, con lo cual "La Tragedia de los Comunes" es superlativa para poblaciones muy grandes.

El óptimo social en este caso es de $c_1 = c_2 = ... = \frac{y}{2N}$, lo que indica que la sociedad en su conjunto quiere dejar la mitad de los recursos para el siguiente periodo, y así sucesivamente, sin importar la cantidad de agentes que intervengan en una sociedad concreta. De esta manera, una unidad de recurso natural no consumido hoy por parte de cada agente se convierte en una unidad de consumo para mañana, con independencia de N.

Para lidiar con un problema como "La Tragedia de los Comunes", existen ciertas soluciones parciales a esto. Una de ellas es la privatización de las "zonas comunes". Por ejemplo, eliminando la existencia de estas zonas en los municipios y otorgándoles la propiedad a una entidad, ya sea pública o privada. El inconveniente es que se limita el acceso para todos a estos recursos, y ello podría no ser deseable. Aún así, a veces no es viable, como el medio ambiente. Otra posible solución es la de aplicar una tasa o impuesto por el uso de estas zonas comunes. Se emplea en temas como la contaminación o el acceso a los parques nacionales. Sin embargo, un inconveniente es que se produce una ineficiencia en el mercado cuando el coste marginal de producción es cercano a cero, como puede ser el coste de permitir a una persona más acceder al parque natural. Una última posibilidad es la de limitar el número de usuarios que acceden a estos recursos, permitiendo su sostenibilidad y regeneración, pero de nuevo se produce una ineficiencia en el mercado.

6.3.2 Juego de la contaminación

Para analizar un caso donde la situación se pueda modelizar como un juego finito, se puede considerar el siguiente caso.

Supongamos que existen tres empresas, A, B, y C, que pueden elegir si contaminar un lago durante el siguiente año, o por el contrario purificarlo. Si deciden purificarlo, deben pagar 1000 euros; en cambio, contaminar el lago no tiene coste alguno. Si dos o más empresas deciden contaminar, el agua del lago se convierte en inservible, y cada empresa que quiera agua deberá pagar 3000 euros para obtener agua para sus procesos productivos de otro sitio. Si cómo máximo una empresa decide contaminar, el agua será útil y todas las empresas podrán usarla sin problemas.

Si la empresa C decide purificar, la matriz de coste en miles de euros es:

		Empresa B	
		Purificar	Contaminar
Empresa A	Purificar	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$
	Contaminar	$(0,1,1)$	$(3,3,4)$

Tabla 8: Matriz de resultados si C purifica

Por el contrario, si la empresa C decide contaminar, la matriz de coste (en miles de euros) queda de la siguiente forma:

		Empresa B	
		Purificar	Contaminar
Empresa A	Purificar	$(1,1,0)$	$(4,3,3)$
	Contaminar	$(3,4,3)$	$(3,3,3)$

Tabla 9: Matriz de resultados si C contamina

Si se analizan los equilibrio de Nash con estrategias puras, se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{array}{lll} b_A(C,C)=C & b_B(C,C)=C & b_C(C,C)=C \\ b_A(P,P)=C & b_B(C,P)=P & b_C(C,P)=P \\ b_A(C,P)=P & b_B(P,P)=C & b_C(P,C)=P \\ b_A(P,C)=P & b_B(P,C)=P & b_C(P,P)=C \end{array}$$

donde $b_A(a_B,a_C)$ es la función de mejor respuesta para la empresa A dadas las estrategias puras de B y C, y análogamente para $b_B(a_A,a_C)$ y $b_C(a_A,a_B)$. Es decir, que los equilibrios de Nash con estrategias puras son:

- (C,C,C) con pago asociado $(3,3,3)$
- (C,P,P) con pago asociado $(0,1,1)$
- (P,C,P) con pago asociado $(1,0,1)$
- (P,P,C) con pago asociado $(1,1,0)$

En este caso, el equilibrio de Nash simétrico es considerado una "Tragedia de los Comunes", dado que cualquiera de las tres empresas desearía estar en otro de los equilibrios existentes asimétricos, pero ninguna puede alcanzarlo cambiando su estrategia de forma unilateral.

Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad, que la empresa C decide invertir en purificar el agua. Realizando la extensión del juego con estrategias mixtas, y considerando la estrategia $(x,1-x)$ para A, y $(y,1-y)$ para B, se obtiene que:

$$\begin{array}{c} y(1)+(1-y)(1)=y(0)+(1-y)(3) \\ x(1)+(1-x)(1)=x(0)+(1-x)(3) \end{array}$$

Con lo que el equilibrio de Nash en estrategias mixtas en este caso es $\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$. En cuanto a la empresa C, su mejor respuesta a esta estrategia mixta realizada por las empresas A y B es la de purificar, ya que su coste, en miles de euros, es de:

$$1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Mientras que si decidiese contaminar:

$$0\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

Por tanto, y teniendo en cuenta la simetría del juego, existen tres equilibrios de Nash en los cuales una empresa escoge una estrategia pura y las otras dos deciden mediante una lotería que asigna probabilidad 2/3 a purificar el agua, y 1/3 a contaminar.

- $\left(P, \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}\right)$ con pagos asociados $\left(\frac{4}{3}, 1, 1\right)$
- $\left(\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}, P, \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}\right)$ con pagos asociados $\left(1, \frac{4}{3}, 1\right)$
- $\left(\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}, P\right)$ con pagos asociados $\left(1, 1, \frac{4}{3}\right)$

Observemos que no tendría sentido haber comenzado suponiendo que la empresa C decidiese contaminar, para luego analizar las estrategias mixtas de A y de B, ya que ambas siempre tienen un mejor resultado si purifican, dada la elección de C. Este equilibrio ya ha sido visto en el análisis del juego con estrategias puras.

Por último, supongamos que todas las empresas deciden asignar una distribución de probabilidad al conjunto de sus estrategias puras. Definimos como $x_i = (p_i, 1 - p_i)$ la estrategia del jugador i, con $i = \{A, B, C\}$, donde p_i es la probabilidad de que la empresa i decida purificar $0 \leq p_i \leq 1$). Para que estas estrategias sean un equilibrio de Nash, se debe verificar que:

$$u_i(\text{Purificar}, x_{-i}) = u_i(\text{Contaminar}, x_{-i})$$

Por tanto, para la empresa A:

$$\begin{aligned} p_B p_C + p_B(1 - p_C) + p_C(1 - p_B) + 4(1 - p_B)(1 - p_C) = \\ = 3p_B(1 - p_C) + 3p_C(1 - p_B) + 3(1 - p_B)(1 - p_C) \Longrightarrow 1 = 3(p_B + p_C - 2p_B p_C) \end{aligned} \qquad (1)$$

De la misma manera, por simetría, se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 &= 3(p_A + p_C - 2p_A p_C) \qquad (2) \\ 1 &= 3(p_A + p_B - 2p_A p_B) \qquad (3) \end{aligned}$$

Restando (2) a (3), se obtiene que $0 = 3(p_B - p_c)(1 - 2p_A)$, lo cual indica que o bien $p_B = p_C$, o bien $p_A = 1/2$. En el primer caso, la ecuación (1) se transforma en una cuadrática

$$1 = 3(2p_B - 2p_B^2) \Longrightarrow 6p_B^2 - 6p_B + 1 = 0$$

cuyas soluciones son $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ y $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, ambas en $(0, 1)$. Sustituyendo estas soluciones en (2) y (3), se obtiene que $p_A = p_B = p_C$.

Si, en cambio, seleccionamos la solución $p_A = 1/2$, sustituyendo en (2) se obtiene

$$1 = 3\left(\frac{1}{2} + p_C - 2\frac{1}{2}p_C\right) \Longrightarrow 1 = \frac{3}{2}$$

lo cual es imposible. Es decir, que cuando todas las empresas deciden usar estrategias mixtas en este juego, no hay ningún equilibrio de Nash asimétrico.

En resumen, el conjunto de equilibrios de Nash de esta "Tragedia de los Comunes" está formado por un equilibrio simétrico y tres asimétricos con estrategias puras, tres equilibrios donde uno de los agentes escoge una estrategia pura y los otros dos aplican loterías iguales a sus estrategias puras, y dos equilibrios simétricos con estrategias mixtas para todas las empresas.

7 Más allá del equilibrio de Nash

Como se ha visto a lo largo de esta memoria, el trabajo que realizó Nash con su equilibrio para juegos no cooperativos ha tenido una repercusión muy importante en la Teoría de Juegos y en distintos ámbitos científicos, como la economía y la biología. No obstante, su utilidad práctica ha sido cuestionada algunas veces por diversos motivos. En primer lugar, para que un jugador pueda jugar una estrategia que sea equilibrio de Nash, debe conocer los pagos del juego para cada estrategia propia y del resto de jugadores. En segundo lugar, el equilibrio de Nash se considera "egoísta": un jugador escogería cambiar de estrategia para obtener un resultado mejor, aún teniendo en cuenta que este cambio puede suponer un perjuicio mayor a los resultados del resto de jugadores. Y en tercer lugar, en los juegos donde hay más de un equilibrio de Nash, resulta incierto determinar a cual de ellos se llegará.

También cabe remarcar el hecho que, en juegos "grandes", encontrar un equilibrio de Nash puede ser un problema inabarcable, incluso a nivel computacional. Citando a Kamal Jain: *Si tu ordenador no puede encontrar un equilibrio, tampoco el mercado.*

Respecto al equilibrio de Nash con estrategias mixtas, también hay voces críticas en cuanto a la aleatoriedad. En algunos contextos, la aleatoriedad tiene que ver con la incertidumbre sobre el proceso de selección de estrategias del resto de jugadores. En otros, puede representar un porcentaje de población que seleccionaría una estrategia concreta. Y también habría que valorar el caso en el que la aleatoriedad sea completamente explícita, cómo decidir donde poner un control de alcoholemia, o qué días se venderán billetes de vuelo con descuento.[13]

A pesar de esto, existen ciertos refinamientos del equilibrio de Nash y otras propuestas de solución para juegos no cooperativos, las cuales serán descritas brevemente en este capítulo.

7.1 Estabilidad evolutiva

Las estrategias evolutivamente estables vinieron motivadas de la mano de la biología, cuando en el año 1973 George R. Price, especialista en genética, y John Maynard Smith, genetista e investigador en biología evolutiva, propusieron una nueva perspectiva a la biología introduciendo la Teoría de Juegos[23]. Ellos propusieron que cada jugador podía ser un organismo cuyas estrategias puras estuviesen predeterminadas en sus genes, con lo que un jugador podría no ser consciente de su propia estrategia. La estrategia que proporcione un mayor resultado hará que tenga mayor éxito a la hora de reproducirse, concepto también conocido como "selección natural". Por ello, la codificación genética que posea la estrategia más potente en cuanto a resultados será mayor en proporción en la siguiente generación.

Las interacciones en la población se producen de la siguiente manera: Supongamos que hay un grupo de jugadores en un juego usando una cierta estrategia mixta. Ahora, imaginemos que se introduce en este grupo inicial un segundo grupo, que denominaremos "invasores", con una estrategia mixta distinta. En este caso, se dice que la estrategia mixta original es una estrategia evolutivamente estable (ESS) si obtiene un resultado mayor que el resultante de mezclar las estrategias mixtas de ambos grupos, ahuyentando de esta forma a los invasores.

[13]Según Karlin y Peres[19]

En resumen, una ESS es una estrategia resistente a la inclusión de estrategias alternativas de agentes externos.

Formalmente, se define:

Definición 7.1. ***(Estrategia evolutivamente estable):*** *Sea $G = (\{1,2\}, A, u)$ un juego en forma estratégica simétrico*[14]*. Sea $E(G)$ su extensión con estrategias mixtas, y sea $s \in S$ una estrategia mixta. Se dice que s es una ESS si, y sólo si, para algún $\epsilon > 0$, $\forall s^{'} \in S$ se tiene*

$$u(s, (1-\epsilon)s + \epsilon s^{'}) > u(s^{'}, (1-\epsilon)s + \epsilon s^{'})$$

o, equivalentemente, por la linealidad de la esperanza matemática:

$$(1-\epsilon)u(s,s) + \epsilon u(s,s^{'}) > (1-\epsilon)u(s^{'},s) + \epsilon u(s^{'},s^{'})$$

Observemos que, para un ϵ suficientemente pequeño, el criterio para que s sea ESS es que el pago esperado de s sea mayor que el de $s^{'}$, esto es:

$$u(s,s) > u(s^{'},s), \text{ o bien}$$
$$u(s,s) = u(s^{'},s),\ u(s,s^{'}) > u(s^{'},s^{'})$$

Si permitimos que en lugar de mayor estricto sea mayor o igual, se obtiene la definición de estrategias evolutivamente estables en sentido débil:

Definición 7.2. ***(Estrategia evolutivamente estable en sentido débil):*** *Bajo las hipótesis de la definición anterior, se dice que s es una ESS en sentido débil si, y sólo si, para algún $\epsilon > 0$, $\forall s^{'} \in S$ se tiene*

$$u(s,s) > u(s^{'},s), \textit{ o bien}$$
$$u(s,s) = u(s^{'},s),\ u(s,s^{'}) \geq u(s^{'},s^{'})$$

En este caso, se dice que el invasor lo hace igual de bien contra la población original como ésta contra ellos. Por ello, la población invasora no crece, pero tampoco se reduce.

Vamos a ilustrar las ESS con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.3. (Halcones y palomas): Dos especies de animales están peleando por un territorio, el valor del cual es V, y cada una de ellas puede elegir su comportamiento: el agresivo halcón, o la pacífica paloma. Si ambas especies deciden pelear, tendrán un coste, que determinaremos como C. Si ambas son pacíficas, se repartirán el territorio. Si una de ellas decide pelear y la otra ser pacífica, éste último grupo abandonará el territorio sin sufrir ninguna consecuencia.

La matriz de pagos asociada a este juego es la siguiente (Tabla 8):

Si se analiza este juego, se obtienen lo siguientes resultados:

- Si $C < \frac{V}{2}$, el juego se convierte en una versión del dilema del prisionero (Ejemplo 2.2 de la página 5), con lo cual el único equilibrio de Nash es (H,H).
- Si $C > \frac{V}{2}$, entonces existen dos equilibrios de Nash, (H,P) y (P,H).

[14]Un juego es simétrico cuando todos los jugadores tienen el mismo conjunto de estrategias y las funciones de pagos son simétricas. Es decir, si dos jugadores intercambian sus estrategias, entonces intercambian sus pagos.

		Especie 2	
		Halcón	Paloma
Especie 1	Halcón	$(\frac{V}{2} - C, \frac{V}{2} - C)$	$(V, 0)$
	Paloma	$(0, V)$	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$

Tabla 10: Juego de Halcones y Palomas

Además, como estamos ante un juego simétrico, habrá un equilibrio de Nash con estrategias mixtas. Suponiendo que cada especie se comporta como un halcón con probabilidad $p \in (0, 1)$, será un equilibrio de Nash para la primera especie si los pagos para la segunda especie de ser halcón o paloma son los mismos:

$$p\left(\frac{V}{2} - C\right) + (1 - p)V = (1 - p)\frac{V}{2}$$

Lo cual se verifica cuando $p = \frac{V}{2C}$, y debe ser menor que 1. Es decir, que $c > \frac{v}{2}$. Por simetría, la segunda especie tendrá la misma estrategia mixta. Si $p < \frac{V}{2C}$, entonces el resultado esperado para un halcón es mayor que para una paloma, con lo cual en la próxima generación la cantidad de halcones crecerá. Por el contrario, si $p > \frac{V}{2C}$, el pago esperado para una paloma es mayor que la de un halcón, y por ello la población de éstos se verá reducida en futuro.

Vamos a verificar que el equilibrio de Nash encontrado $s = \left(\left\{\frac{V}{2C}, 1 - \frac{V}{2C}\right\}, \left\{\frac{V}{2C}, 1 - \frac{V}{2C}\right\}\right)$ es una ESS, con $C > \frac{V}{2}$. Hay que comprobar que, para cualquier $s^{'} \neq s$, $u(s, s) = u(s^{'}, s)$ y $u(s, s^{'}) > u(s^{'}, s^{'})$. La condición 1, de la igualdad, siempre se cumple para cualquier estrategia mixta con soporte completo (es decir, todas las estrategias puras pertenecen al conjunto soporte). Para la condición 2 es suficiente comprobar:

- Supongamos que $s^{'} = (1, 0)$, es decir, que se escoge la estrategia pura "Halcón". En este caso:

  * $u(s, s^{'}) = \frac{V}{2C}\left(\frac{V}{2} - C\right)$
  * $u(s^{'}, s^{'}) = \frac{V}{2} - C$

  En este caso, se cumple que $u(s, s^{'}) > u(s, s^{'})$ ya que $\frac{V}{2C}\left(\frac{V}{2} - C\right) > \frac{V}{2} - C$ implica que $1 > \frac{V}{2C}$, puesto que $\frac{V}{2} - C < 0$ (recordemos que $C > \frac{V}{2}$).

- Por otro lado, supongamos que $s^{'} = (0, 1)$, es decir, que se escoge la estrategia pura "Paloma". En este caso:

  * $u(s, s^{'}) = \frac{V^2}{2C} + \left(1 - \frac{V}{2C}\right)\frac{V}{2}$
  * $u(s^{'}, s^{'}) = \frac{V}{2}$

  Con lo cual, se cumple que $u(s, s^{'}) > u(s, s^{'})$ ya que $\frac{V^2}{2C} + \left(1 - \frac{V}{2C}\right)\frac{V}{2}) > \frac{V}{2}$ implica que $\frac{V^2}{4C} > 0$, y esto siempre es cierto ya que tanto numerador como denominador son positivos.

Como se cumple la desigualdad para las estrategias puras, claramente lo será para cualquier $s' \in \Delta A$, ya que ninguna combinación convexa puede dar un pago esperado superior.

Por tanto, el equilibrio de Nash con estrategias mixtas del juego de "Halcones y Palomas"tambien es una ESS.

La relación entre el equilibrio de Nash y las ESS no son casualidad, sino que los siguientes dos resultados los conectan:

Teorema 7.4. ***(ESS-Equilibrio de Nash):*** *Dado un juego $G = (\{1,2\}, A, u)$ finito en forma estratégica y simétrico, con $E(G)$ su extensión con estrategias mixtas, con $s \in S$ una estrategia mixta, se tiene que si s es una ESS, entonces (s,s) es un equilibrio de Nash.*

Demostración: En la definición de ESS, una estrategia s es ESS si verifica $u(s,s) \geq u(s^{'}, s)$, $\forall s^{'} \in S$. Es decir, que s debe ser una mejor respuesta a ella misma, y por tanto (s,s) es un equilibrio de Nash. $\square$

Sin embargo, el recíproco no es cierto, y solo se cumple si la desigualdad es estricta:

Teorema 7.5. ***(Equilibrio de Nash-ESS):*** *Dado un juego $G = (\{1,2\}, A, u)$ finito en forma estratégica y simétrico, con $E(G)$ su extensión con estrategias mixtas, con $s \in S$ una estrategia mixta, se tiene que si (s,s) es un equilibrio de Nash simétrico y en sentido estricto, entonces s es una ESS.*

Demostración: Si (s,s) es un equilibrio de Nash en sentido estricto, se verifica que $u(s,s) > u(s^{'}, s)$, $\forall s^{'} \in S$. Y esto satisface el primer criterio de ESS. $\square$

7.2 Equilibrio correlacionado

El equilibrio correlacionado es un concepto de solución que generaliza el equilibrio de Nash, el cual fue introducido por Robert Aumann en 1974[2]. De hecho, citando a Roger Myerson: *Si hay vida inteligente en otros planetas, en la mayoría de ellos, se hubiese descubierto el equilibrio correlacionado antes que el equilibrio de Nash.*[15]

Si recordamos el juego de "La Batalla de Sexos" (Ejemplo 3.3 de la página 11), había dos equilibrios de Nash con estrategias puras, que era ir los dos al teatro, o bien ver los dos juntos el partido de fútbol. Además, había un equilibrio de Nash con estrategias mixtas: $\left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$. Sin embargo, este último equilibrio parece poco racional, puesto que el marido o la mujer obtienen un resultado mejor cediendo y aceptando la preferencia de su pareja. La cuestión es: ¿cómo elegir entre ambos equilibrios de Nash? Para ello, se puede suponer que tanto el esposo como la esposa aceptan lanzar una única moneda para decidir si ir al teatro (en el caso que el resultado de la moneda sea "Cara") o bien ver el partido (si el resultado de la moneda es "Cruz"). El hecho es que, dado el resultado del lanzamiento

[15] Solan y Vohra(2002)

de la moneda, ninguno de los dos miembros de la pareja tiene incentivo a desviarse del pacto previamiente realizado. Además, el pago esperado para cada jugador es superior en este "Equilibrio Correlacionado", puesto que $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$, contra el pago esperado en el equilibrio de Nash con estrategias mixtas, que era de $\frac{2}{3}$. Incluso el resultado esperado es más justo que cualquier equilibrio en puras en el sentido que el jugador que tenga el peor resultado obtiene un pago mejor, puesto que $1 < \frac{3}{2}$.

Definición 7.6. ***(Equilibrio correlacionado):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego con n jugadores. Un equilibrio correlacionado es una terna (v, π, σ), donde v es un vector de variables aleatorias, $v = (v_1, ...v_n)$ con dominios $D = (D_1, ..., D_n)$, π es una distribución de probabilidad multivariante sobre v, y $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ [16] es un vector de aplicaciones $\sigma_i : D_i \mapsto A_i$, $i \in N$, y para cada jugador i y cada aplicación $\sigma_i' : D_i \mapsto A_i$ se tiene que*

$$\sum_{d \in D} \pi(d) u_i(\sigma_1(d_1), ..., \sigma_i(d_i), ..., \sigma_n(d_n)) \geq \sum_{d \in D} \pi(d) u_i(\sigma_1(d_1), ..., \sigma_i'(d_i), ..., \sigma_n(d_n))$$

Para cada equilibrio de Nash es posible construir un equilibrio correlacionado equivalente, de modo que se induce la misma distribución de probabilidad sobre los resultados.

Teorema 7.7. ***(Equilibrio de Nash - Equilibrio correlacionado):*** *Para cada equilibrio de Nash σ^* existe un equilibrio correlacionado σ.*

Demostración: Es posible construir un equilibrio correlacionado dado un equilibrio de Nash si $D_i = A_i$, y tomando como distribución multivariante $\pi(d) = \prod_{i \in N} \sigma_i^*(d_i)$. Entonces, tomando σ_i como aplicación de d_i a a_i, cuando los jugadores usan el perfil estratégico σ, el resultado obtenido es el mismo que con σ^*. Como las v_i no tienen correlación y ningún jugador tiene incentivo a desviarse unilateralmente de σ^*, se tiene que σ es un equilibrio correlacionado. $\square$

Sin embargo, no todo equilibrio correlacionado es equilibrio de Nash, visto en el ejemplo de la Batalla de Sexos. En particular, el equilibrio correlacionado es una generalización, por lo que es un concepto más débil que el equilibrio de Nash.

7.3 Estrategias racionalizables

La eliminación iterativa de estrategias dominadas, muy relacionada con la racionalizabilidad, tuvo como punto de referencia los estudios realizados de forma independiente en el año 1984 de Pearce[27] y Bernheim[3].

Una de las hipótesis fundamentales con las que se ha trabajado a lo largo de toda esta memoria es que todos los jugadores son racionales, lo cual indica que ningún jugador escogerá una estrategia estrictamente dominada. Por tanto, estas estrategias no tendrán asignadas ninguna probabilidad positiva de ser escogidas, con lo cual no están en el soporte. Consideremos Λ_i^1 el conjunto de estrategias puras que no son estrictamente dominadas en el juego G, y $\Lambda^1 = \prod_{i \in N} \Lambda_i^1$. Por tanto, el juego inicial G se ha reducido a $G^1 := (N, \Lambda^1, u)$. De forma iterativa, se puede aplicar el mismo razonamiento a G^1, y

[16] Aquí, σ hace el mismo papel que s hacía en la definición de estrategias mixtas.

así sucesivamente. Así, se define como Λ_i^∞ al conjunto de estrategias puras del jugador i que han sobrevivido tras infinitas eliminaciones de estrategias estrictamente dominadas. Puesto que se está analizando bajo la hipótesis de juegos finitos, este proceso tiene un número finito de pasos, lo que lleva a la definición de racionalizabilidad.

Definición 7.8. ***(Estrategias racionalizables):*** *Para cada jugador $i \in N$ y cada estrategia $a_i \in A_i$, se dice que a_i es una estrategia racionalizable si, y sólo si, $a_i \in \Lambda_i^\infty$. Se denota como $\Lambda^\infty := \prod_{i\in N} \Lambda_i^\infty$ al conjunto de perfiles estratégicos que son racionalizables.*

En resumen, una estrategia es racionalizable si un jugador racional es capaz de justificar su utilización ante uno o más jugadores racionales, de manera que dicha estrategia es una mejor respuesta ante las creencias que este jugador tiene sobre las estrategias que poseen el resto de jugadores implicados.

Si se analiza el juego de "Matching Pennies", se puede hacer el siguiente razonamiento. La estrategia "Cara" es racionalizable para el primer jugador. En primer lugar, "Cara" es una mejor respuesta a la estrategia "Cara" del segundo jugador. En segundo lugar, la creencia de que el jugador 2 juegue "Cara" es consistente con su racionalidad, puesto que este jugador puede creer que el jugador 1 desea jugar "Cruz", su mejor respuesta es jugar "Cara". En este punto, el jugador 2 puede pensar que el jugador 1 jugaría "Cruz" dado que el jugador 2 puede creer que el jugador 1 cree que el jugador 2 piensa jugar "Cruz", con lo cual "Cruz" es una mejor respuesta. Siguiendo este razonamiento, se puede apreciar que se llega a un bucle en la cadena de creencias.

Sin embargo, en el "Dilema del Prisionero", "Callar" no es una estrategia racionalizable para el prisionero X dado que no es la mejor respuesta a ninguna estrategia del prisionero Y. Por simetría, tampoco lo es para el prisionero Y. Por tanto, la única estrategia racionalizable para cada jugador es "Delatar", que es precisamente el equilibrio de Nash del juego.

De hecho, todo perfil estratégico que sea equilibrio de Nash es siempre racionalizable, por lo que el conjunto de estrategias racionalizables es siempre no vacío. Además, en un juego de 2 jugadores, las estrategias racionalizables vienen caracterizadas por ser las únicas supervivientes en el proceso iterativo de eliminación de estrategias estrictamente dominadas.[17] En el caso general, las estrategias racionalizables son aquellas que sobreviven a este proceso de eliminación de las que nunca son mejor respuesta para cualquier perfil estratégico A_{-i}.

7.4 Equilibrio perfecto de mano temblorosa

Este concepto de solución, al contrario que las estrategias racionalizables, es más fuerte que el de equilibrio de Nash. Introducido por Reinhard Selten[31] en el año 1975, la idea era la de seleccionar los equilibrios de Nash que se mantuviesen como equilibrio en el caso de que los jugadores pudieran cometer errores pequeños en la elección de sus estrategias. Por este motivo, se define el equilibrio perfecto de mano temblorosa, o simplemente equilibrio perfecto, de la siguiente manera:

Definición 7.9. ***(Temblor):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego finito en forma estratégica con n jugadores. Un temblor en G es un vector $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ tal que, para cada $i \in N$, $\eta_i : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:*

[17] En el caso de n jugadores, no es cierto en general.

- *Para cada $a_i \in A_i$, $\eta_i(a_i) > 0$*
- $\sum_{a_i \in A_i} \eta_i(a_i) < 1$

Se denota por $T(G)$ al conjunto de temblores de G.

Definición 7.10. ***(Perturbación):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego finito en forma estratégica con n jugadores, con $E(G)$ su extensión con estrategias mixtas, y sea $\eta \in T(G)$ un temblor en G. Una η-perturbación de G es un juego en forma estratégica $(G, \eta) := (N, S(\eta), u)$ cuyos elementos son:*

- *Conjunto de estrategias: Para cada $i \in N$, $S_i(\eta_i) := \{s_i \in S_i : \text{ para cada } a_i \in A_i, s_i(a_i) \geq \eta_i(a_i)\}$ y $E(G) \ni S(\eta) := \prod_{i \in N} S_i(\eta_i)$.*
- *Las funciones de pago: Se definen igual que en la extensión de G con estrategias mixtas.*

Realmente, una η-perturbación es una versión alternativa a $E(G)$, con la diferencia que toda estrategia pura, para cada jugador $i \in N$, tiene asignada un temblor positivo, que es una cota inferior para la distribución de probabilidad. Al cumplir las mismas hipótesis que $E(G)$[18] se puede aplicar el teorema de existencia de Nash, lo que permite asegurar la existencia de, al menos, un equilibrio de Nash en (G, η).

Definición 7.11. ***(Equilibrio perfecto):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego finito en forma estratégica con n jugadores, con $E(G)$ su extensión con estrategias mixtas. Un perfil estratégico $s \in S$ es un equilibrio perfecto (de mano temblorosa) de $E(G)$ si existen dos sucesiones $\{\eta^k\} \subset T(G)$ tal que $\{\eta^k\} \longrightarrow 0$, y $\{s^k\} \subset S$ tal que $\{s^k\} \longrightarrow s$ de manera que, para cada $k \in \mathbb{N}$, s^k es un equilibrio de Nash de (G, η^k).*

Los siguientes resultados relacionan los equilibrios perfectos y los equilibrios de Nash:

Teorema 7.12. ***(Equilibrio perfecto-Equilibrio de Nash):*** *Si $s \in S$ es un equilibrio perfecto de $E(G)$, entonces es un equilibrio de Nash en $E(G)$.*

Demostración: Sea $s \in S$ un equilibrio perfecto de $E(G)$. Se toman las sucesiones $\{\eta^k\}$ y $\{s^k\}$ con las hipótesis enunciadas en la definición de equilibrio perfecto. Como la función de pagos está definida de la misma forma que en $E(G)$, se tiene que

$$u_i(s^k) = \sum_{a_i \in A_i} u_i(a_i, s^k_{-i}) s^k_i(a_i)$$

Para que s^k sea un equilibrio de Nash, debe verificarse para todo $i \in N$ y todo $a_i \in A_i$, $a_i \notin MRP_i(s^k_{-i}) \Longrightarrow s^k_{-i}(a_i) = \eta^k_i(a_i)$.

Supongamos que s no es un equilibrio de Nash de $E(G)$. Entonces, en virtud del Teorema 4.6 de la página 16, existe un $i \in N$ y $a_i \in A_i$ tal que $a_i \notin MRP_i(s_{-i})$ con $s_i(a_i) > 0$ (es decir, a_i pertenece al soporte de s_i). En este caso, como $\{\eta^k\} \longrightarrow 0$ y $\{s^k\} \longrightarrow s$, con k suficientemente grande, se tiene que $a_i \notin MRP_i(s^k_{-i})$ y $s^k_{-i}(a_i) > \eta^k_i(a_i)$, lo cual contradice el hecho de que s^k es equilibrio de Nash de (G, η^k) $\square$

[18]De hecho, un poco más restrictivo

Teorema 7.13. ***(Existencia de equilibrio perfecto):*** *La extensión con estrategias mixtas de un juego G, $E(G)$, tiene un equilibrio de Nash, como mínimo.*

Demostración: Se toman las sucesiones $\{\eta^k\}$ y $\{s^k\}$ con las hipótesis enunciadas en la definición de equilibrio perfecto. Como s^k es un equilibrio de Nash en (G, η^k), y $\{s^k\}$ es un subconjunto del compacto S, se tiene que existe una sucesión parcial de $\{s^k\}$ convergente a $s \in S$, el cual es un equilibrio perfecto de $E(G)$. $\square$

7.5 ϵ-Equilibrio de Nash

El último concepto de solución es el de ϵ-Equilibrio de Nash. La idea que subyace es que los jugadores pueden no preocuparse en cambiar sus estrategias a una mejor respuesta cuando la ganancia de utilidad que pueden conseguir al realizar dicho cambio es relativamente pequeña. Fue introducido por Myerson[24] en 1978, y es un concepto más fuerte que el de equilibrio perfecto.

Definición 7.14. ***(ϵ-Equilibrio de Nash):*** *Sea $G = (N, A, u)$ un juego finito en forma estratégica, y $E(G)$ su extensión con estrategias mixtas. Fijado $\epsilon > 0$, se dice que un perfil estratégico $s \in S$ es un ϵ-Equilibrio de Nash si, para todo $i \in N$ y para toda estrategia $s_i^{'} \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i}) - \epsilon$ Equivalentemente, para cada $a_i, a_i{'} \in A_i$, $u_i(a_i, s_{-i}) < u_i(a_i^{'}, s_{-i}) \Longrightarrow s_i(a_i) \leq \epsilon$*

Este nuevo concepto tiene varias características interesantes. Por ejemplo, cada equilibrio de Nash tiene un entorno de ϵ-equilibrios de Nash para cada $\epsilon > 0$, por el motivo inicialmente expuesto de que minúsculas ganancias dejan indiferente a los agentes. Por otra parte, a nivel computacional es una gran ventaja, puesto que permite considerar un conjunto discreto de perfiles estratégicos mixtos y no necesita considerar el espacio contínuo. De hecho, este ϵ puede representar la precisión de la computadora, ya que se usan aproximaciones de punto flotante en el cálculo numérico.

Como inconvenientes, cabe remarcar que todo equilibrio de Nash tiene un entorno de ϵ-equilibrios de Nash, pero el recíproco no es cierto. En partícular, dado un ϵ-equilibrio de Nash, éste no tiene porque estar cerca de un equilibrio de Nash. Para ejemplificarlo, veamos el siguiente juego:

Ejemplo 7.15. (Juego con ϵ-equilibrio de Nash): Se considera un juego con una matriz de pagos asociada:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	A	$(1, 1)$	$(0, 0)$
	B	$(1 + \frac{\epsilon}{2}, 1)$	$(500, 500)$

Tabla 11: Juego con un ϵ-equilibrio de Nash

Este juego tiene un único equilibrio de Nash con estrategias puras, (B, D), el cual se puede obtener mediante la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Este equilibrio de Nash también es un ϵ-equilibrio de Nash. Sin embargo, (A, I) también es ϵ-equilibrio de Nash.

En primer lugar, el resultado de cualquier jugador en un ϵ-equilibrio de Nash está dentro un ϵ del pago esperado en un equilibrio de Nash. En general, los pagos de ambos jugadores en un ϵ-equilibrio de Nash pueden ser arbitrariamente inferiores a cualquier resultado en un equilibrio de Nash. El punto clave en este juego está en que el primer jugador no puede ganar más que ϵ (ya que el beneficio de cambiar de A a B es de $\frac{\epsilon}{2}$) para desviarse del ϵ-equilibrio de Nash (A, I), pero ello no implica que el jugador 2 no sea capaz de ganar más que ϵ haciendo una mejor respuesta a la desviación unilateral del primer jugador (es decir, si el jugador 1 aceptase desviarse, la ganancia para el segundo sería enormemente mayor que ϵ).

Por otra parte, algunos ϵ-equilibrios de Nash son muy improbables de ser alcanzados. En este juego, aunque al primer jugador le sea indiferente cambiar de A a B porque la ganancia de $\frac{\epsilon}{2}$ es inferior a ϵ, éste puede razonar que el hecho de que B domine estrictamente a A hará al segundo jugador a jugar como mejor respuesta a B la estrategia D. Esto llevaría al primer jugador a una ganancia mucho mayor que la que obtendría si se "encabezonara" en que esa ganancia de $\frac{\epsilon}{2}$ no es lo suficientemente suculenta como para tener incentivos a cambiar de estrategia.

Para finalizar, se va a enunciar y demostrar un resultado que relaciona los equilibrios perfectos con los ϵ-equilibrios de Nash.

Teorema 7.16. ***(Equilibrios perfectos y ϵ-equilibrio de Nash):*** *Sea $E(G) = (N, S, u)$ la extensión del juego G con estrategias mixtas. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) $s \in S$ es un equilibrio perfecto de $E(G)$.

ii) Existen dos sucesiones $\{\epsilon^k\} \subset (0, \infty)$, con $\{\epsilon^k\} \longrightarrow 0$, y $\{s^k\} \subset S$ con $\{s^k\} \longrightarrow s$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, s^k es un ϵ^k-equilibrio perfecto de $E(G)$.

iii) Existe una sucesión de perfiles estratégicos completamente mixtos $\{s^k\} \subset S$ con $\{s^k\} \longrightarrow s$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N$, $s_i \in MR_i(s_i^k)$

Demostración:

i)$\Longrightarrow$ ii) Como $s \in S$ es un equilibrio perfecto, por definición existen dos sucesiones $\{\eta^k\}$ y $\{s^k\}$ que verifican las condiciones de la Definición 7.11 de la página 44. Cabe recordar que si s^k es un equilibrio de Nash de (G, η^k), entonces las mejores respuestas son escogidas con una probabilidad superior a $\eta_i^k(a_i)$ en s^k, por el Teorema 4.6. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, basta con tomar $\epsilon^k := \max_{i \in N} \eta_i^k(a_i)$, $\forall a_i \in A_i$. Ahora, se tiene que $\{\epsilon^k\} \longrightarrow 0$ y s^k es un ϵ^k-equilibrio perfecto, para cada $k \in \mathbb{N}$.

ii)$\Longrightarrow$ iii) Tomando las sucesiones $\{\eta^k\}$ y $\{s^k\}$ de la misma forma que se han definido en *ii*) y la definición de ϵ-equilibrio perfecto, se tiene que si $a_i \in SOP(s_i)$, entonces existe un $k' \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k'$, $a_i \in MRP_i(s_{-i}^k)$. Aplicando de nuevo el resultado del Teorema 4.6, se obtiene *iii*).

iii)$\Longrightarrow$ i) Sea $\{s^k\}$ una sucesión definida como en *iii*). Para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $a_i \in A_i$, se define:

$$n_i^k(a_i) := \begin{cases} s_i^k & , \text{si } a_i \notin SOP(s_i) \\ \frac{1}{k} & , \text{si } a_i \in SOP(s_i) \end{cases}$$

Por como se ha definido, está claro que $\{\eta^k\} \longrightarrow 0$ y además, existe un $k^{'} \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k^{'}$, (G, η^k) está bien definido, con $\eta^k \in T(G)$, y $s^k \in S(\eta^k)$. Ahora, usando la hipótesis de que $s_i \in MR_i(s_i^k)$, se tiene que

$$a_i \notin MRP_i(s_{-i}^k) \Longrightarrow s_i(a_i) = 0 \Longrightarrow s_i^k(a_i) = \eta_i^k$$

Por tanto, para cada $k \geq k^{'}$, se tiene que s^k es un equilibrio de Nash de (G, η^k) $\square$

Referencias

[1] Aumann, R.; Shapley, L.S.: *Values of Non-Atomic Games*, Princeton University Press, 1974.

[2] Aumann, R.: *Subjectivity and correlation in randomized strategies*, Journal of Mathematical Economics 1, 67–96, 1974.

[3] Bernheim, B. D.: *Rationalizable strategic behavior*, Econometrica 52, 1007–1028, 1984.

[4] Bertrand, J.: *Theorie mathematique de la richesse sociale, Journal des Savants 67*, 499-508, 1883.

[5] Binmore, K.: *Teoría de Juegos*, McGraw-Hill, 1993.

[6] Borel, E.: *La theorie des jeux et les equations a noyau symetrique gauche, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 173*, 111-124, 1921.

[7] Cournot, A.: *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses*, Hachette, 1838.

[8] Carmona,G.: *Existence and Stability of Nash Equilibrium*, World Scientific Publishing, 2013.

[9] Dutta, P.K.: *Strategies and Games: Theory and Practice*, The MIT Press, 1999.

[10] Edgeworth, F.Y.: *La teoría pura del monopolio*, Giornale Degli Economisti 40, 13-31, 1897.

[11] Forgó,F.; Szép,J.; Szidarovszky, F.: *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[12] Friedman, J.W.: *Game Theory with Applications to Economics*, Oxford University Press, 1986.

[13] Gardner, R.: *Juegos para empresarios y economistas*, Antoni Bosch, 1996.

[14] Gibbons, R.: *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, 1992.

[15] González-Díaz, J.; García-Jurado, I; Fiestras-Janeiro, M.G.: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, Graduate Studies in Mathematics (Volume 115), 2010.

[16] Harrington Jr,J.E.: *Games, Strategies, and Decision Making*, Worth Publishers, 2009.

[17] Jehle, G.A.; Reny,P.J.: *Advanced Microeconomic Theory (Second Edition)*, Addison-Wesley series in economics, 2001.

[18] Kakutani, S.: *A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem*, Duke Mathematical Journal (Volum 8), 457-459, 1941.

[19] Karlin, A.; Peres,Y.: *Game Theory, Alive*, American Mathematical Society, 2017.

[20] Leyton-Brown, K.; Shoham, Y.: *Essentials of Game Theory: A Concise, Multidisciplinary Introduction*, Morgan & Claypool Publishers, 2008.

[21] Leyton-Brown, K.; Shoham, Y.: *Multiagent systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*, Cambridge University Press, 2008.

[22] Massó, J.: *Les aportacions de John F. Nash a l'economia: equilibri i negociació*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques (Volum 32), número 1, 2017.

[23] Maynard Smith, J.; and Price, G. R.: *The logic of animal conflict*, Nature 246, 15–18, 1973.

[24] Myerson, R.: *Refinements of the Nash equilibrium concept*, International Journal of Game Theory 7, 73–80, 1978.

[25] Nash, J.F.: *Non-cooperative games*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Princeton University, 1950.

[26] Nash, J.F.: *Equilibrium points in n-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences 36, 48-49, 1950.

[27] Pearce, D.: *Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection*, Econometrica 52, 1029–1050, 1984.

[28] Pérez Navarro, J.; Jimeno Pastor, J.L.; Cerdá Tena,E.: *Teoría de Juegos*, Apuntes propios, 2008.

[29] Pérez Urquidi, J.M.: *Teoremas de Punto Fijo y la Existencia de Equilibrios de Nash para Juegos no Cooperativos*, Apuntes propios, 2008.

[30] Ricart, J.E.: *Una introducción a la Teoría de Juegos*, Documento de Investigación (IESE), 1988.

[31] Selten, R.: *Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games*, International Journal of Game Theory 4, 25–55, 1975.

[32] Tenorio Villalón, A.F; Martín Caraballo, A.M.: *Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos*, Boletín de Matemáticas 22(1), 77-95, 2015.

[33] Torres-Martínez,J.P.: *Elementos de Economía Matemática*, Apuntes propios, 2012.

[34] Von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*, Pearson Educación, 2004.

[35] Zermelo, E.: *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* Proceedings of the International Fifth Congress of Mathematicians. Cambridge University Press, 1913.

[36] Rosen, J. B.: *Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave n-Person Games*, Econometrica 33: 520-534, 1965.