UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

ABUNDÀNCIA DE COMPORTAMENT APERIÒDIC EN L'APLICACIÓ LOGÍSTICA

Autor: Juan García Fuentes

Director: Dr. Joan Carles Tatjer
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2018

Abstract

Atractting periodic orbits are a very important tool in the study of the dynamic of one dimensional maps, as orbits in maps that have them are more predictable and maps without them can exhibit a chaotic behaviour. We will prove that exist a positive Lebesgue measure set of parameters such that the logistic fuction $f_a(x) = ax(1-x)$ doesn't have atracting periodic orbits using the results of Benedicks and Carleson.

2010 Mathematics Subject Classification. 37D45, 37D05, 37A05

Agraïments

Vull agrair al Doctor Joan Carles Tatjer per acceptar portar el meu treball, orientar-me quan estava perdut sobre quin tema fer i ajudar-me en tots els dubtes que m'han sorgit al llarg del treball.

També agrair als que han sigut els meus pilars en aquests quatre anys de carrera: al Josep i al Guillem per fer-me millor matemàtic, i a la Clara i al Nil per fer-me millor persona. Sense ells no estaría on estic degut a la seva ajuda, tant en problemes matemàtics com personals.

Índex

1 Introducció

L'objectiu del treball és veure que en l'aplicació quadràtica $f_a(x) = 1 - ax^2$, que és conjugada amb l'aplicació logística, existeix un conjunt de paràmetres de mesura de Lebesgue positiva tal que per tot a que pertanyi a aquest conjunt, f_a no té òrbites periódiques atractores. Aquest fet serà un primer indici d'una dinàmica caòtica, degut a que si una aplicació té una òrbita periòdica atractora, com el nom indica, aquestà òrbita atraurà a tots els elements del seu entorn, i per tant, tots aquest elements acabaran tenint també un comportament periòdic. Per això, si només hi han òrbites periòdiques repulsores, és a dir, que allunyen a tots els elements del seu entorn, seràn les uniques òrbites amb un comportament periòdic, fent més difícil saber la dinàmica amb la que actúa l'aplicació.

Jakobson va demostrar a [7] que existia un conjunt de paràmetres de mesura de Lebesgue positiva tal que per tot paràmetre a d'aquest conjunt, f_a té una mesura ergòdica invariant absolutament continua. Anys més tard Benedicks i Carleson van fer una nova versió de l'article del Jakobson, [2]. Allò que van fer ells és demostrar que per un conjunt de paràmetres amb mesura de Lebesgue positiva la derivada de f_a^n en l'òrbita del punt crític creix exponencialment, on en el nostre cas el punt crític és 0. Primer van agafar la cota de $e^{\sqrt{n}}$ però més tard, a [3], quan estaven treballant amb l'aplicació d'Hénon, es van adonar que aquesta cota no era prou forta i van necesitar demostrar que:

$$|(f_a^n)'(f(0))| \geq e^{cn}$$

per tot $n \geq 1$ i per algun $c > 0$, fet que implica la no existència d'òrbites periódiques atractores, com veurem en la secció 2. Com que les demostracions dels dos articles del Benedicks-Carleson són massa directes i complicades hem agafat un treball que va fer S.Moreira([10]), on fa d'una forma més clara i detallada la demostració de la desigualtat anterior.

La demostració del teroema de Benedicks-Carleson mitjançant el plantejament que va fer Moreira la farem a la secció 3. La diferencia d'aquesta secció amb el treball de Moreira és principalment una restructuració de la demostració, canviant subseccions a on notava que encaixaven millor. També he complementat el treball afegint coses relacionades i corregint errades que va fer. En termes generals podem explicar que en 3.1 demostrarem que fora d'un entorn de 0 la derivada de l'òrbita té un comportament asimptòtic exponencial. Després constuïrem mitjançant inducció una successió de conjunts de paràmetres $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ tal que:

$$\Omega := \bigcap_{n\geq 1} \Omega_n$$

satisfà les imposicions de Benedicks-Carleson. A la secció 3.2 crearem el conjunt inicial per l'inducció i a la secció 3.4 veurem que si es compleixen una série d'hipòtesis per Ω_{n-1} llavors es compleixen per Ω_n. Acabarem la demostració veient que Ω té mesura positiva a la secció 3.6. Les seccions 3.3 i 3.5 seveixen per treballar amb dos conceptes que ens servirán per la demostració: el període acotat i la cota de distorsió, respectivament.

Al final del treball veurem per sobre com el creixement exponencial de la derivada en el punt crític ens dóna uns resultats més forts com són la creació de mesures invariants respecte f_a(i així també ho relacionem amb la demostració del Jakobson) i que f_a tingui coefincient de Lyapunov positiu en un conjunt de mesura positiva.

2 Conceptes preliminars

Definició 2.1. *Un sistema dinàmic discret és una terna* (X, Υ, φ) *tal que* X *es l'espai de fase,* $\Upsilon = \mathbb{N}$ *o* $\mathbb{Z}$ *i* φ *es l'aplicació:*

$$\begin{aligned} \varphi : \Upsilon \times X &\longrightarrow \quad X \\ (t, x) &\longmapsto \varphi(t, x) \end{aligned}$$

tal que compleix les següents propietats:

1. $\varphi(0, x) = x \quad \forall x \in X.$
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x) \quad \forall x \in X \quad \forall s, t \in \Upsilon.$

Nosaltres treballarem un cas especial de sistema dinàmic discret: l'aplicació quadràtica $f(x) = 1 - ax^2$, però veiem que si demostrem el resultat per aquesta aplicació ho demostrarem per qualsevol apicació quadràtica, en concret amb la famosa aplicació logística:

Proposició 2.2. *L'aplicació* $f(x) = 1 - ax^2$ *és conjugable amb l'aplicació logistica:* $g(x) = bx(1 - x)$

Demostració. Realitzem els canvi $x \mapsto -2\lambda x$ i $-2\lambda x \mapsto \lambda - 2\lambda x$, on $\lambda \in \mathbb{R}$. Llavors conjugant amb f:

$$f(\lambda - 2\lambda x) = 1 - a(\lambda - 2\lambda x)^2 = 1 - a\lambda^2(1 - 4x - +4x^2) = 4a\lambda x(1 - x) + 1 - a\lambda^2.$$

Agafant $\lambda = \sqrt{1/a}$ i $b = 4a\lambda$ ja ho tindríem. □

Si busquem els punts fixos de la nostra funció obtindrem els següents punts:

$$-q_a = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2a} \quad \text{i} \quad p_a = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2a}$$

Definició 2.3. $K_a := \{x | f_a^n(x) \in [-q_a, q_a] \ \forall n \geq 1\}$

Per a > 2 tenim que si x no pertany al conjunt K_a, llavors l'òrbita de x s'escapa cap a infinit. Com que nosaltres volem funcions on existeixi un interval tal que la seva imatge estigui continguda en ell mateix aquest cas no ens interessa, així que a partir considerarem que $a \in [0, 2]$, on veurem que hi ha un subconjunt sense òrbites periòdiques atractores. Realitzant el diagrama de bifurcació en aquest interval obtenim:

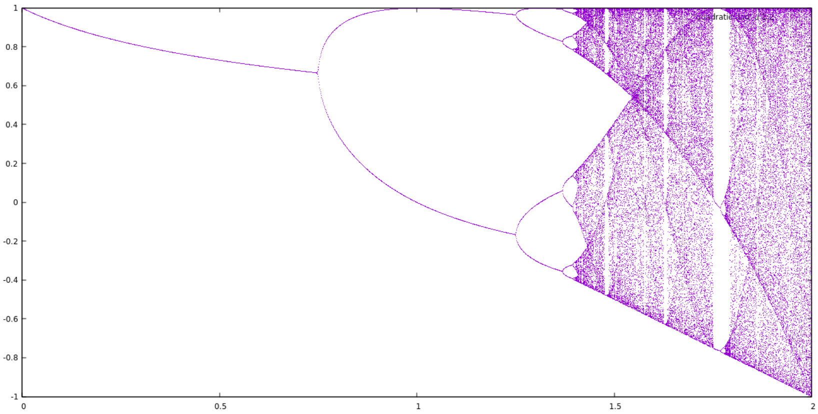

Figura 1: Diagrama de bifurcació de làplicació $f(x) = 1 - ax^2$

2.1 Òrbita del punt crític

Definició 2.4. *Definim l'òrbita del punt critic com* $\xi_n(a) := f_a^n(\xi_0)$, *on* $\xi_0 = 0$.

Definició 2.5. *Diem que* p *és un punt periódic de període* n *per* f_a *si* $f_a^n(p) = p$, *i té òrbita periòdica* $\{x_0 = p, x_1, ..., x_{n-1}\}$, *on* $x_i = f_a^i(p)$. *Diem que aquesta òrbita és atractora si* $|f_a'(x_i)| < 1$ *per tot* $i = 0, ..., n-1$.

Definició 2.6. *Definim la conca d'atracció d'un punt periòdic* p *atractor com:*

$$S_a := \{x \in [-q_a, q_a] : dist(f_a^n(p), \{p, f_a(p), ..., f_a^{k-1}(p)\}) \longrightarrow 0 \text{ quan } n \longrightarrow \infty\}$$

Swiatek va demostrar que H, el conjunt de valors $a \in (0, 2]$ tal que existeix una òrbita periódica atractora, és dens a $(0, 2]$, un resultat que no és incompatible amb el fet que existeixi un conjunt de valors de mesura de Lebesgue positiva tal que no existeixi òrbita periòdica atractora.

Un métode per detectar l'existencia d'alguna òrbita atractora el va descobrir Singer([12]), ja que va veure que en cas de tenir-ne, l'òrbita del punt crític tendirà cap aquesta. Primer definim dos conceptes que s'utilitzen molt en dinàmica 1-D i que seràn les hipòtesis pel Teorema de Singer:

Definició 2.7. *Diem que una aplicació* F *definida en l'interval* $[-1, 1]$ *cap a si mateix és unimodal si:*

1. *F és continua.*
2. *$F(0) = 1$.*
3. *F és estrictament decreixent a $[-1, 0]$ i estrictament creixent a $[0, 1]$*

Definició 2.8 (Derivada Schwarziana)**.** *Assumint que* $F \in \mathcal{C}^3$, *definim la derivada Schwarziana com:*

$$\{F, x\} := \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(x)}{F'(x)}\right)^2$$

Teorema 2.9 (Singer)**.** *Sigui* $F : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ *una aplicació unimodal,* $F \in \mathcal{C}^3$ *i amb derivada Schwarziana negativa, llavors si* F *té un punt periódic atractor, el punt crític pertany a la seva conca d'atracció.*

Demostració del Teorema de Singer

Sigui $F\colon [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ aplicació unimodal, i p és un punt períodic de període N. Definim la funció $G = F^N$. Sigui S(p)=$\{x \in [0,1] \mid \lim_{k\to\infty} G^k(x) = p\}$ i mitjançant 5 proposicions demostrarem el Teorema de Singer:

Proposició 2.10. *Siguin f,* $g \in \mathscr{C}^3 \Rightarrow \{f \circ g, x\} = \{f, g(x)\} * (g'(x))^2 + \{g, x\}\ \forall x$

Corol·lari 2.11. *Si tenim que* $\{F, x\} < 0\ \forall x \Rightarrow\ \forall N \geq 1,\ \{F^N, x\} < 0\ \forall x$

Proposició 2.12. *Si* $\{F, x\} < 0 \Rightarrow F'(x)$ *no té un mínim positiu o un màxim local negatiu.*

Demostració. $\{F, p\} < 0$ *i* $F''(p) = 0$ (ja que p es punt critic de G')$\Rightarrow \frac{F'''(x)}{F'(x)} < 0 \Rightarrow$ $F'(x)$ *i* $F'''(x)$ han de tenir signes diferents. □

Proposició 2.13. *Si F té un número finit de punts crítics i* $\{F, x\} < 0$ *per tot* x *llavors F només té un número finit de punts periòdics de període N.*

Demostració. Sigui $G = F^N$ i suposem que $G(x) = x$ per infinits x. Llavors pel Teorema del Valor Mitjà tenim que $G'(x) = 1$ per infinits x. Pel Corol·lari 2.11 i la Proposició 2.13 tenim que $|G'|$ no té un mínim local positiu, i per tant s'ha d'anular en infinits llocs. Això contradiu la hipòtesi de que F, i per tant G té infinits ounts crítics. □

Proposició 2.14. $a < b < c$ *punts fixos consecutius de* $G = F^N$ *i* $[a, c]$ *no conté un punt critic* $\Rightarrow G'(b) > 1$

Demostració. Pel teorema del valor mitjà tenim que $\exists u \in (a, b)$ *tal que* $\frac{G(b)-G(a)}{b-a} = G'(u)$ *i* $\exists v \in (b, c)$ *tal que* $\frac{G(c)-G(b)}{c-b} = G'(v)$.
Com que $[a, c]$ no té un punt crític, suposem que $G'(x) > 0\ \forall x \in [a, c] \Rightarrow G'(x)$ no pot tenir un mínim a (u, v) $\Rightarrow \forall x \in (u, v)\ G'(x) > 1 \Rightarrow G'(b) > 1$. □

Definició 2.15. *slm(p) és el conjunt semilocal estable que és la component conexa del conjunt estable S(p) que conté p.*

Proposició 2.16. *El conjunt slms ha de ser un interval obert de la forma (r, s)=slms(r).*

Clarament $G((r, s)) \subseteq (r, s)$, però $G(s) \notin (r, s)$ *i* $G(r) \notin (r, s)$ per qué no están en el conjunt d'atractors.

Llavors tenim els següents casos.

1. $G(r) = r$ i $G(s) = s$.

2. $G(r) = s$ i $G(s) = r$.

3. $G(r) = G(s)$.

En el cas 1, per l'última Proposició i suposant que p es atractor tenim que $[r, s]$ conté un punt crític. Ídem pel cas 2 amb $G = G^2$. En el cas 3, pel Teorema de Rolle l'interval (r, s) conté un punt crític de G, llavors existeix $c \in (r, s)$ tal que $G'(c) = 0$. De la regla de la cadena obtenim:

$$G'(c) = (F^N)'(c) = F'(F^{N-1}(c)) \cdot F'(F^{N-2}(c)) \cdot ... \cdot F'(F(c)) \cdot F'(c) = 0$$

I per tant $F^i(c)$ és un punt crític de F per $i < N$. Això implica que hi ha un punt crític de F per $F^i(r, s) = slms(F^i(p))$ *per alguna* $i < N$.

Teorema 2.17. *Sigui p un punt fix atractor de F, llavors ha d'haver un punt crític c de F tal que la seva òrbita vagi cap al punt p.*

Demostració. A partir de les proposicions 2.10 2.12, 2.13, 2.14, 2.16 obtenim la demostració. □

3 Demostració del Teorema de Benedicks-Carleson

El Teorema troncal del nostre treball és el següent Teorema que va enunciar Moreira a partir dels articles de Benedicks-Carlerson:

Teorema 3.1. *Donat* $0 < c < log2$ *i* $0 < \rho < 1$ *existeix una* $a_0 = a_0(\rho, c) \in (1, 2)$ *i un subconjunt* $E(c, \rho)$ *de* $[a_0, 2]$*, tal que:*

(T1) $|E(c, \rho)| > (1 - \rho)(2 - a_0)$.
(T2) Per $a \in E(c, \rho)$ *tenim que* $|D_n(a)| = |(f_a^n)(f(0))| \geq e^{cn}\ \forall n \geq 1$.

Observem que propietat $(T2)$ és la que ens avisa de la no existencia d'òrbites periòdiques atractores, ja que com hem demostrat al teorema del Singer, si existís alguna implicaría que $|D_n(a)| \to 0\ si\ n \to +\infty$. La propietat $(T1)$ ens indica de que aquest conjunt de paràmetres té mesura positiva.

Començarem la demostració fixant: $\frac{2}{3} < c < \log 2$ i $0 < \rho < 1$. Agafem $c_0 = \frac{1}{2}(c + \log 2)$ i les constants α, ϵ, tal que:

$$0 < 80\epsilon < \alpha < \frac{1}{48}\left(1 - \frac{c}{c_0}\right)$$

Construirem inductivament una família de conjunts drecreixent $(\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que el segment inicial és $\Omega_1 = [a_0, 2]$ per una certa $a_o \in (0, 2)$ (el construirem a la secció 3.2), i per tot $a \in \Omega_n$ es compleixen les següents propietats:

$$\begin{array}{ll} (EG_n) & |D_j(a)| \geq e^{cj}. \\ (BA_n) & |\xi_j(a)| \geq e^{-\alpha j}. \end{array}$$

per $j = 1, ..., n$ i $\forall n \geq 1$. Llavors agafant el conjunt:

$$\Omega_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n,$$

tenim que Ω_∞ satisfà $(T2)$ del Teorema 3.1.

Observem que la imposició de (BA_n) serà útil per evitar que $\xi_n(a) = 0$ i per tant $|D_n(a)| \neq 0$, per un parametre a que satisfaci (EG_{n-1}).

La construcció dels conjunts Ω_k per $k < n$ es farà a la secció 3.3, a partir d'una partició $\mathcal{P}_k$ i uns intervals ω de paràmetres tal que:

$$\Omega_k = \cup\{\omega | \omega \in \mathcal{P}_k\}$$

on ω pertany a $\mathcal{P}_n$ si satsifà una serie de caracteristiques que veurem a la secció 3.3.

Per construir aquestes particions serà important dividir l'òrbita del punt crític per una certa a, $\{\xi_k(a), k \geq 1\}$, en les següents parts:

- Retorns: $\{\mu_i\}$, són els moments en el que l'òrbita retorna a prop de ξ_0.

- Períodes acotats: $\{\mu_i+1,...,\mu_i+p_i\}$, són els iterats després d'un retorn μ_i en el qual l'òrbita $\xi_{\mu+k}$ és manté a prop de l'òrbita ξ_k, per $k=1,...,p_i$.

- Òrbites lliures: $\{\mu_i+p_i+1,...,\mu_{i+1}-1\}$, són els iterats en els que l'òrbita es manté fora de un entorn de ξ_0 abans de un retorn μ_{i+1}.

Llavors a cada interval $\omega \in \mathcal{P}_k$ se li associarà una successió de retorns $\mu_0 < ... < \mu_s$, $s=s(k)$,és a dir, que per tot $a \in \omega$, $\xi_{\mu_i}(a)$ està en un entorn de 0. Per cada retorn μ_i se li associarà un període acotat de dimensió p_i.

Aquesta divisó de l'òrbita ve motivada per que, com veurem en la secció 3.1, l'òrbita fora d'un entorn de 0 té un comportament expansiu, i quan l'òrbita s'apropa a 0 mitjançant un retorn perdem informació i s'haurà de fer un estudi més exhaustiu. Fins i tot dividirem els retorns en dos tipus: essencials i inessencials, segons si $\xi_{\mu_i}(\omega)$ cobreix un interval d'una certa dimensió o no. També és interesant el període acotat pel fet de que quan l'òrbita s'apropa a 0 en el moment μ, hi ha un número finit d'iteracions en el qual les òrbites $\xi_{\mu+k}$ i ξ_k estàn a prop una de l'altra. Per tant, conegut el caràcter expansiu de la òrbita $\{\xi_k(a), k<\mu\}$, podem extedre aquesta comportament a $\{\xi_{\mu+k}(a), k \leq p\}$. El període acotat serà una eina molt important per la secció 3.7, secció on demostrarem l'afirmació $(T1)$ provant que els conjunts Ω_n satisfan la següent relació de recurencia:

$$|\Omega_n| \geq (1-e^{-\epsilon n})|\Omega_{n-1}| - e^{-\epsilon n}|\Omega_1|$$

ja que fixant un enter n_0 tal que:

$$\prod_{i=n_0}^{\infty}(1-e^{-\epsilon i}) \geq 1-\frac{\rho}{2}$$

i

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} e^{-\epsilon i} \leq \frac{\rho}{2}$$

Tenim que, $\forall n > n_0$:

$$|\Omega_n| \geq \left[\prod_{i=n_0}^{\infty}(1-e^{-\epsilon i}) - \sum_{i=n_0}^{\infty} e^{-\epsilon i}\right]|\Omega_1| \geq (1-\rho)|\Omega_1|.$$

Llavors:

$$|\Omega_\infty| \geq (1-\rho)|\Omega_1|$$

Per tenir un control quan diem que l'òrbita esta a prop o lluny de ξ_0 definirem els conjunts:

$$U_m = (-e^{-m}, e^{-m}) \text{ i } U_m^+ = (-e^{-(m-1)}, e^{-(m-1)})$$

i a més:

$$I_m = [e^{-(m+1)}, e^{-m}) \text{ i } I_m^+ = [e^{-(m+2)}, e^{-(m-1)})$$

per $m \geq \Delta - 1$, on Δ és un enter que agafarem suficientment gran per a que la demostració tingui validesa.Estendrem aquestes definicions per $m \leq -(\Delta-1)$ per $U_m = U_{-m}$ i $I_m = -I_{-m}$ (ídem amb U_m^+ i I_m^+). Observem que $U_\Delta \setminus \{0\} = \cup_{|m|\leq\Delta} I_m$ i que per $|m| \geq \Delta, I_m^+ = I_{m-1} \cup I_m \cup I_{m+1} \subset U_m^+$.

3.1 Comportament fora d'un entorn de 0

En aquesta secció veurem que f_a té un comportament espansiu fora d'un entorn del punt crític, fet important quan tinguem un moment d'òrbita lliure.

Prèviament creem una conjugació de f_a, per això definim l'homeomorfisme:

$$\begin{aligned} h\colon [-1,1] &\longrightarrow [-1,1] \\ \theta &\longmapsto \sin(\tfrac{\pi}{2}\theta) \end{aligned}$$

h^{-1} té una derivada per tot $|x| \neq 1$, i és de la forma: $(h^{-1})'(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

Per tant, conjugant $g_a = h^{-1} \circ f_a \circ h$, obtenim per $a = 2$:

$$g_2(\theta) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\cos(\pi\theta)) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \pi|\theta|\right) = 1 - 2|\theta|$$

Per començar farem un Lema tècnic que ens servirà per demostrar el següent Lema:

Lema 3.2. *Si $|x| \leq 1-\delta^2$ i $|f_a^i(x)| \geq \delta$ per $i = 0, ..., k-1$, llavors per $i = 0, ..., k$ tenim que $|f_a^i(x)| \leq 1-\delta^2$ per $a > 1$.*

Demostració. Ho demostrarem per inducció:
Cas inicial $k = 1$: $|x| \leq 1-\delta^2$ per hipòtesis i $|x| \geq \delta$, llavors $|f(x)| = |1-x^2| \leq 1-\delta^2$.
Ara suposem que funciona pel cas $k = p-1$, llavors:

$$|f_a^{p-1}(x)| \leq 1-\delta^2 \Rightarrow (f_a^{p-1}(x))^2 \leq \frac{2-\delta^2}{a} \Rightarrow f_a^p(x) = 1 - a(f_a^{p-1}(x))^2 \geq -1+\delta^2$$

i

$$|f_a^{p-1}(x)| \geq \delta \Rightarrow (f_a^{p-1}(x))^2 \geq \frac{\delta^2}{a} \Rightarrow f_a^p(x) = 1 - a(f_a^{p-1}(x))^2 \leq 1-\delta^2.$$

I per tant $|f_a^p(x)| \leq 1-\delta^2$. ☐

Lema 3.3. *Si $\delta < 1$ es compleixen les següents condicions:*
(a) Si $|f_a(x)| \leq 1-\delta^2 \Rightarrow 2 - \frac{3\pi}{\delta^3}(2-a) \leq |g_a'(h^{-1}(x)| \leq 2 + \frac{3\pi}{\delta^3}(2-a)$.
(b) Si $|x| \leq 1-\delta^2$ i $|f_a^i(x)| \geq \delta$ $\forall i = 0, ..., k-1 \Rightarrow$

$$[2 - \frac{3\pi}{\delta}(2-a)]^k \leq |g_a^k(h^{-1})(x))| \leq [2 + \frac{3\pi}{\delta^3}(2-a)]^k$$

Demostració. (a) Per definició tenim que:

$$\begin{aligned} |g_a'(\theta) - g_2'(\theta)| &= |(h^{-1})'(f_a(x))f_a'(x)h'(\theta) - h^{-1})'(f_2(x))f_2'(x)h'(\theta)| = \\ &= |(h^{-1})'(f_a(x))f_a'(x) - (h^{-1})'(f_2(x))f_a'(x) + \\ &+ h^{-1}(f_2(x))f_a'(x) - (h^{-1})'(f_2(x))f_2'(x)| \cdot |h'(\theta)| \leq \\ &\leq (|f_a'(x)||(h^{-1})'(f_a(x)) - (h^{-1})'(f_2(x))| + \\ &+ |(h^{-1})'(f_2(x))||f_a'(x) - f_2'(x)|)|h'(\theta)|. \end{aligned}$$

Com que $|f_a'(x)| \leq 4$, $|h'(\theta)| \leq \frac{\pi}{2}$ i $|f_a'(x) - f_2'(x)| \leq 2|a-2|$, tenim que:

$$|g_a'(\theta) - g_2'(\theta)| \leq 2\pi|(h^{-1})'(f_a(x)) - (h^{-1})'(f_2(x))| + \pi|(h^{-1})'(f_2(x))| \cdot |a-2|. \quad (3.1)$$

Com que per tot $y \in \mathbb{R}$ tal que $|y| \leq 1 - \delta^2$ tenim que:

$$|(h^{-1})'(y)| \leq \frac{2}{\pi\sqrt{1-(1-\delta^2)^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{2\delta^2 - \delta^4}} \leq \frac{1}{\delta}$$

De (3.1) i l'última desigualtat obtenim:

$$|g_2'(\theta) - g_a'(\theta)| \leq 2\pi |(h^{-1})'(f_a(x)) - (h^{-1})'(f_2(x))| + \frac{\pi}{\delta}|a-2|. \tag{3.2}$$

Pel teorema del valor mitjà, existeix y tal que $f_2(x) < y < f_a(x) \leq 1 - \delta^2$ i:

$$|(h^{-1})'(f_a(x)) - (h^{-1})'(f_2(x))| = |(h^{-1})''(y)| \cdot |f_a(x) - f_2(x)| \leq \frac{x^2|a-2|}{\delta^3},$$

ja que

$$|(h^{-1})''(y)| \leq \left|\frac{2x}{\pi(\sqrt{1-x^2})^3}\right| \leq \left|\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}\right| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Llavors, aplicant (3.2), obtenim:

$$|g_2'(\theta) - g_a'(\theta)| = |g_a'(\theta) - 2| \leq \frac{3\pi}{\delta^3}(2-a),$$

i per tant:

$$2 - \frac{3\pi}{\delta^3}(2-a) \leq |g_a'(\theta)| \leq 2 + \frac{3\pi}{\delta}(2-a)$$

(b)Com que $g_a^i = h^{-1} \circ f_a^i \circ h$ i:

$$(g_a^k)'(\theta) = \prod_{i=0}^{k-1} g_a'(g_a^i(\theta))$$

llavors a partit del apartat (a), com que per tot $i = 1, ..., k$, $f_a^i(x) \leq 1 - \delta^2$, i pel Lema 3.2 ja ho tindríem. □

Corol·lari 3.4. *Donada una $0 < c_1 < \log 2$ i $\delta < 1$ existeix una $a_1 = a_1(\delta, c_1)$ tal que per tot $a \geq a_1$ es compleix:*
 (a) Si $|f_a(x)| \leq 1 - \delta^2 \Rightarrow |g_a'(h^{-1}(x))| \geq e^{c_1}$.
 (b) Si $|x| \leq 1 - \delta^2$ i $|f_a^i(x)| \geq \delta$ $\forall i = 0, ..., k-1 \Rightarrow |(g_a^k)'(h^{-1}(x))| \geq e^{c_1 k}$.

Demostració. Agafant $a_1 = 2 - \frac{\delta^2}{3\pi}(2 - e^{c_1})$ i aplicant el Lema 3.3 □

La Proposició que ve ara ens donarà de manera precisa una cota inferior de la derivada k-éssima quan no està dins d'un entorn del punt crític, és a dir, ens dirà el comportament espansiu.

Proposició 3.5. *Per tot $0 < c_0 < \log 2$ i Δ suficientment gran existeix $\frac{3}{2} < a_1 < 2$ tal que per tot $x \in [-1, 1]$ i $a \in [a_1, 2]$ tenim:*
 (a) Si $x, f_a(x), f_a^2(x), ..., f_a^{k-1}(x) \notin U_{\Delta+1}$ llavors $|(f_a^k)'(x)| \geq \delta e^{c_0 k}$ on $\delta = e^{-\Delta+1}$.
 (b) Si $x, f_a(x), f_a^2(x), ..., f_a^{k-1}(x) \notin U_{\Delta+1}$ i $f_a^k(x) \in U_\Delta^+$ llavors $|(f_a^k)'(x)| \geq e^{c_0 k}$.
 (c) Si $x, f_a(x), f_a^2(x), ..., f_a^{k-1}(x) \notin U_{\Delta+1}$ i $f_a^k(x) \in U_1$ llavors $|(f_a^k)'(x)| \geq \frac{4}{5} e^{c_0 k}$.

Demostració. Agafant $a_1 = a_1(\delta, c_1)$ donades en el Corol·lari 3.4, on $c_0 < c_1 < \log 2$, i sigui p el primer enter $1 \leq p \leq k-1$ tal que $|f_a^p(x)| < 1-\delta^2$ (si aquest enter no existeix agafem $k = p$). Com que:

$$|(f_a^k)'(x)| = |(f_a^{k-p})'(f_a^p(x))| \cdot |(f_a^p)'(x)|,$$

si demostrem que per tot $a > a_1$ tenim:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & |(f_a^p)'(x)| \geq 2^p. \\ \text{(II)} & |(f_a^{k-p})'(f^p(x))| \geq Le^{c_0(k-p)}. \end{array}$$

sota les hipòtesis de (a) (respectivament sota les hipòtesis de (b) i (c) i agafant $L = \delta$ (respectivament $L = 1, L = \frac{4}{5}$), llavors ja ho tindríem:

1. Demostració de (I):
   Si $p = 0$ llavors la inecuació és obvia, així que asumirem que $p \geq 1$. Llavors:

   $$|(f_a^p)'(x)| = \prod_{i=0}^{p-1} |2a(f_a^i(x))| \geq 3^p(1-\delta^2)^p \geq 2^p.$$

   ja que $a \geq \frac{3}{2}$ i $\Delta \geq 1$.

2. Demostració de (II):

   (a) És suficient provar la inequació $p < k$. Agafant per conveniencia la notació $q = k - p$ i $y = f_a^p(x)$, tenim que:

   $$\begin{aligned} |(f_a^q)'(y)| &= |h'(g_a^p(h^{-1}(y))| \cdot |(g_a^q)'(h^{-1}(y))| \cdot |(h^{-1})'(y)| \\ &= \frac{|(h^{-1})'(y)|}{|(h^{-1})'(f_a^q(y))|} \cdot |(g_a^q)'(h^{-1}(y))|. \end{aligned}$$

   Per l'elecció de p tenim que:

   $$L = \frac{|(h^{-1})'(y)|}{|(h^{-1})'(f_a^q(y))|},$$

   i per Corol·lari 3.4 es compleix:

   $$|(f_a^q)'(y)| \geq Le^{c_1 q} \tag{3.3}$$

   Pel Lema 3.2 ens deia que $|f_a^q(y)| \leq 1-\delta^2$, i per tant, com que $y \notin U_{\Delta+1}$:

   $$L = \sqrt{\frac{1-(f_a^q(y))^2}{1-y^2}} \geq \sqrt{\frac{1-(1-\delta^2)^2}{1-\delta^2}} \geq \delta.$$

(b) Si $f_a^k(x) \in U_{\Delta-1}$, llavors $|f_a^q(y)| = |f_a^k(x)| \leq e^{-\Delta+1}$ i:

$$L \geq \sqrt{\frac{1-(e^{-\Delta+1})^2}{1-(e^{-\Delta-1})^2}} = L_1(\Delta).$$

Com que:

$$\lim_{\Delta\to\infty} L_1(\Delta) = 1$$

podem trobar una Δ_0 tal que per tot $\Delta \geq \Delta_0$ implica que $L_1(\Delta) \geq e^{c_0-c_1} \geq e^{(c_0-c_1)q}$. A més de 3.3 podem concloure que:

$$|(f_a^q)'(y)| \geq e^{c_0 q}.$$

(c) Si $f_a^k(x) \in U_1$, llavors:

$$L \geq \sqrt{1-\frac{1}{e^2}} \geq \sqrt{\frac{3}{4}} \geq \frac{4}{5}.$$

□

3.2 Contrucció del conjunt inicial Ω

En aquest apartat crearem el conjunt inicial Ω en el cual s'iniciarà el procés d'inducció amb el que es crearàn els altres conjunts Ω_n. Per fer-ho primer és necessari una Proposició prèvia que també utilitzarem en un futur.

Proposició 3.6. *Donat $\frac{2}{3} < c < \log 2$ existeix una N_0 tal que si $\forall n \geq N_0$ i $a \geq 1$:*

(a) $|D_j(a)| \geq 3^j$ *per* $1 \leq j \leq N_0$
(b) $|D_j(a)| \geq e^{cj}$ *per* $1 \leq j \leq n-1$

tenim que:

$$\frac{1}{A} \leq \frac{|\xi_n'(a)|}{|D_{n-1}(a)|} \leq A$$

on A=48.

Demostració. Per la regla de la cadena tenim que per $k \geq 1$, posant $f(a,x) = f_a(x)$:

$$D_k(a) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,\xi_k(a))} \cdot D_{k-1}(a) = 2a\xi_k(a)D_{k-1}(a)$$

$$\xi_{k+1}'(a) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,\xi_k(a))} \cdot \xi_k'(a) + \left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_{(a,\xi_k(a))} = 2a\xi_k(a)\xi_k'(a) - (\xi_k(a))^2.$$

Per tant, quan $D_k(a) > 0$:

$$\frac{\xi_k'(a)}{D_{k-1}(a)} - \frac{\xi_{k+1}'(a)}{D_k(a)} = \frac{\xi_k(a)}{2aD_{k-1}(a)} \tag{3.4}$$

Sumant pels dos costats de (3.4) sobre $k = 2, ..., n-1$ tenim que:

$$\frac{\xi_2'(a)}{D_1(a)} - \frac{\xi_n'(a)}{D_{n-1}(a)} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\xi_k(a)}{2aD_{k-1}(a)}$$

Com que:

$$\frac{|\xi_2'(a)|}{|D_1(a)|} = \frac{1}{2a}$$

agafant mòduls obtenim:

$$\left|\frac{\xi_n'(a)}{D_{n-1}(a)} - \frac{1}{2a}\right| \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\xi_k(a)|}{2a|D_{k-1}(a)|} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2a|D_{k-1}(a)|}$$

ja que $|\xi_k(a)| \le 1$ i per tant:

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{2a}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{|D_{k-1}(a)|} \le \left|\frac{\xi_n'(a)}{D_{n-1}(a)}\right| \le \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{|D_{k-1}(a)|} \tag{3.5}$$

Sigui N_0 un enter major o igual que 2 tal que $\sum_{k=N_0+1}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}k} \le \frac{1}{4}$. Llavors, si $|D_k(a)| \ge 3^k$ per tot $k = 1, ..., N_0$ i $|D_k(a)| \ge e^{\frac{2}{3}k}$ per tot $k = N_0 + 1, ..., n-1$, tenim que:

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{|D_{k-1}(a)|} \le \sum_{k=1}^{N_0} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=N_0+1}^{n-2} \frac{1}{e^{\frac{2}{3}k}} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{2}{3}k}} \le \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

Per una banda, utilitzant que $a \ge 1$, tenim que:

$$\left|\frac{\xi_n'(a)}{D_{n-1}(a)}\right| \le \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{11}{12}\right) \le 1$$

I per l'altra desilgualtat, com que $a \le 2$:

$$\left|\frac{\xi_n'(a)}{D_{n-1}(a)}\right| \ge \frac{1}{2a}\left(1 - \frac{11}{12}\right) \ge \frac{1}{48}$$

$\square$

Un aspecte important de la nostra demostració serà treballar amb intervals ω de paràmetres $a \in [1, 2)$. Ens fixem que si ω és un interval tal que per a tot $a \in \omega$, satisfà (a) i (b) de la Proposició prèvia tenim que $\xi_k' \neq 0$ en ω per $k = N_0, ..., n$ ja que $|\xi_k'(a)| \ge \frac{1}{A}|D_{k-1}(a)|$. Llavors tenim que ξ_k restringit en ω és un homeomorfisme. Aquest fet serà important a l'hora de construir els conjunts Ω degut a que quan parlem de retorns, períodes acotats o òrbites lliures, serà constant en cada interval ω, és a dir, si $a \in \omega$ i μ és un retorn de a, llavors μ és un retorn per tot $b \in \omega$.
La següent Proposició ja ens dóna el conjunt inicial per realitzar el procés inductiu:

Proposició 3.7. *Donada una certa a_1 tal que $e^{c_0} < a_1 < 2$ i $N_1 \ge N_0$, existeix una $N \ge N_1$ i un interval $\Omega \subset [a_1, 2]$ tal que:*

(a) $\xi_j(\Omega) \cap U_1 = \emptyset$ *per tot* $1 \leq j \leq N-1$
(b) $U_1 \subset \xi_N(\Omega)$
(c) $|D_j(a)| \geq 3^j$ $\forall a \in \Omega$ *i* $1 \leq j \leq N_0$
(d) $|D_j(a)| \geq e^{c_0 j}$ $\forall a \in \Omega$ *i* $1 \leq j \leq N-1$

Demostració. Per $1 \leq n \leq N_1$, definim l'aplicació:

$$\Phi_n : [1,2] \longrightarrow [-1,1] \times [0,+\infty)$$

$$a \longmapsto (\xi_{n+1}(a), |D_n(a)|)$$

Tenim que $\Phi_n(2) = (-1, 4^n)$, i per tant, atenent a la continuïtat de Φ_n, existeix un entorn V_n de 2 en [1,2] de la forma $[t_n, 2]$ tal que:

$$\Phi_n(V_n) \subset [-1, -\frac{1}{2}] \times [3^n, +\infty).$$

Podem agafar $V_{N_1} \subset V_{N_1-1} \subset ... \subset V_1 \subset [a_1, 2]$. Així que per tot $1 \leq n \leq N_1$ i $\forall a \in V_{N_1}$

$$\xi_{n+1}(a) \leq -\frac{1}{2}$$

$$|D_n(a)| \geq 3^n$$

Observem que V_{N_1} satisfà (c). Ara anem a encongir V_{N_1} per obtenir les altres propietats. Primer observem que mentres $\xi_j(a) \leq -\frac{1}{2}$ per tot $1 \leq j \leq k$, tenim que:

$$|D_k(a)| = \prod_{j=1}^{k} 2a|\xi_j(a)| \geq a^k \geq e^{c_0 k}$$

ja que $a \geq e^{c_0}$. Llavors, si $\xi_j(V_{N_1})$ està contingut $[-1, -\frac{1}{2}]$ per tot $j < n$ llavors qualsevol $a \in V_{N_1}$ satisfà les hipòtesis (a) i (b) de la Proposició 3.6 i per tant:

$$|\xi_n(V_{N_1})| = |\xi_n'(t)| \cdot |V_{N_1}| \geq \frac{1}{A} \cdot |D_{n-1}(t)| \cdot |V_{N_1}| \geq e^{c_0(n-1)} \cdot \frac{|V_{N_1}|}{A}$$

on $t \in V_{N_1}$.
Llavors mentre $\xi_j(V_{N_1})$ es manté dins de $[-1, -\frac{1}{2}]$ per $N_1 \leq j \leq n$ tenim un creixement exponencial sobre la longitud de $\xi_n(V_{N_1})$ i per tant ha d'existir un enter k tal que $\xi_k(V_{N_1})$ no està contingut en $[-1, -\frac{1}{2}]$. Sigui N_2 el primer enter que satisfà aquestes condicions. Com que $\xi_n(2) = -1$, per la continuïtat de $\xi_{N_2+1}(2) = -1$ i $\xi_{N_2+1}(t_*) = -\frac{1}{2}$.Sigui $\Omega = [t_*, 2]$. Ara, ja que $\xi_{N_2+1}(2) = -1$ i $\xi_{N_2+1}(t_*) = 1 - \frac{t_*}{4} \geq \frac{1}{2}$ obtenim, per la continuïtat de ξ_{N_2+1} que $\xi_{N_2+1}(\Omega) \supset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \supset U_1$. Així, agafant $N = N_2 + 1$ ja ho tindríem. □

3.3 Construcció dels conjunts Ω_n

Definirem la construcció dels conjunts $(\Omega_n)_n$ i per $a \in \Omega_n$ les successions $(\mu_i)_i, (p_i)_i$. Primer farem una partició de I_m. Per $m \geq \Delta$, on Δ és suficientment gran(en aquesta secció veurem com de gran), considerem el radi $r_m = \frac{|I_m|}{m^2}$ i per $1 \leq k \leq m^2$ agafem els intervals:

$$I_{m,k} = [e^{-m} - kr_m, e^{-m} - (k-1)r_m)$$

Per $m = \Delta - 1$ i $k \geq 1$ definim un interval,

$$I_{\Delta-1,k} = [e^{-\Delta}, e^{-\Delta} + r_{\Delta-1})\ ,\ r_{\Delta-1} = \frac{|I_{\Delta-1}|}{(\Delta-1)^2}.$$

Observem que $I_{\Delta-1}$ és igual per tot k. Estenem aquestes definicions per $m \leq -(\Delta-1)$ posant $I_{m,k} = I_{-m,k}$. Ens queda que per $|m| \geq \Delta$ tenim la partició de I_m en intervals de mateixa longitud:

$$I_m = I_{m,m^2} \cup ... \cup I_{m,1}$$

i $I_{m,k}$ té dos intervals adjacents:$I_{m,k-1}$ i $I_{m,k+1}$ per $I_{m,k}$ amb $1 < k < m^2$, $I_{m-1,(m-1)^2}$ i $I_{m,2}$ per $I_{m,1}$, $I_{m+1,1}$ i I_{m,m^2-1} per I_{m,m^2}. Definim:

$$I^+_{m,k} = I_{m_1,k_1} \cup I_{m,k} \cup I_{m_2,k_2},$$

on I_{m_1,k_1} i I_{m_2,k_2} són els intervals adjacents de $I_{m,k}$. Notem que $I_{m,k} \subset I_m$, $I^+_{m,k} \subset I^+_m$ i $|I^+_{m,k}| \leq \frac{3|I_m|}{m^2}$ si $k \neq 1$ i $|I^+_{m,k}| \leq \frac{5|I_m|}{m^2}$. Considerem també els conjunts $I^+_{\Delta-1,k} = (0,1]$ i $I^+_{1-\Delta,k} = [-1,0)$ Com que $U_\Delta \setminus \{0\} = \cup_{|m|\leq\Delta} I_m$ també tenim una partició de U_Δ:

$$U_\Delta = \cup_{|m|\leq\Delta}(I_{m,m^2} \cup ... \cup I_{m,1}) \cup \{0\}$$

Ara, amb aquesta partició de U_Δ, definirem inductivament particions $\mathcal{P}_n$ pels intervals de paràmetres, per així obtenir una fita de distorsió de $|\xi'_n|$ i $|D_{n-1}|$ en $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$, és a dir, que per dos paràmetres $a, b \in \omega$, $|D_{n-1}|$ i $|\xi'_n|$ tenen valors similars. Els conjunts Ω_n estàn definits com:

$$\Omega_n = \cup\{\omega | \omega \in \mathcal{P}_n\}$$

Les cotes de distorsió en les components de $\mathcal{P}_n$ tindràn una importancia per estimar els conjunts que exclosos $\Omega_{n-1} \setminus \Omega_n$.

A tot $\omega \in \mathcal{P}_n$ li associarem uns conceptes: retorn, període acotat o òrbita lliure, que definirem concretament que són, i per $a \in \Omega_n$ li associem la mateixa dinàmica que li correspongui a ω tal que $a \in \omega$. Per exemple, si μ és un retorn per ω llavors μ és un retorn per tot $a \in \omega$. Demostrarem per inducció respecte de n que per intervals $\omega \in \mathcal{P}_n$ satisfà unes condicions que ara veurem. Però per començar necesitem Δ i $N_1 = N_1(\Delta)$ suficientment gran tal que $\forall n \geq N \geq N_1$ i $|m| \geq \Delta$ funcioni la nostra estimació. Agafem un valor a_1 prop de 2 tal que sigui cert la Proposició 3.5 i:

$$\left[\frac{2 + \frac{3\pi}{\delta^3}(2-a)}{2 - \frac{3\pi}{\delta^3}(2-a)}\right]^{4\Delta} \leq 2 \tag{3.6}$$

$$2 - a \leq 8e^{-4\Delta} \tag{3.7}$$

$$N_1 \geq \frac{\Delta+1}{a} \tag{3.8}$$

sigui cert per $a \geq a_1$. Ara la Proposició 3.7 ens dóna un enter $N \geq N_1$ i un interval inicial $\Omega = [a_0, 2]$ per la nostra inducció.

Posarem per $i = 1, ..., N-1, \Omega_i = \Omega$ i $\mathcal{P}_i = \{\Omega\}$. Ara per inducció en $n \geq N$ assumim que $\mathcal{P}_{n-1}$ està construït de la forma que per tot $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$ té les següents propietats:

- Hi ha una successió d'intervals $\Omega = \omega_1 \supset ... \supset \omega_{n-1} = \omega$ tal que, per $k = 1, ..., n-1, \omega_k \in \mathcal{P}_k$.
- Definim retorn μ l'iterat tal que $\xi_\mu(\omega_\mu) \subset I^+_{m,k}$, on $I_{m,k}$ el definim com l'interval hoste de ω en el retorn μ. Llavors a ω li podem associar una successió de retorns $\mu_0 < ... < \mu_s, s = s(n-1)$ tal que $\mu_0 = 1$ i per tot $i \leq k$, μ_i també és un retorn de ω_k, per tot $k < n-1$.
- Definim període acotat associada al retorn μ_i als iterats $\{\mu_i + 1, ..., \mu_i + p_i\}$ on $p_i = p(\omega_{\mu_i}, m_i)$ tal que per $1 \leq j \leq p_i$, $\xi_{\mu_i + j}$ està a prop de ξ_j, en el próxim capítol expliquem a que ens referim a quan diem que estàn a prop i també mirarem que p_i és finit. Per convenencia d'anotació escriurem $p_0 = -1$.
- Definim l'òrbita lliure posterior al retorn μ_i als iterats $\{\mu_i + p_i + 1, ..., \mu_{i+1} - 1\}$ si $i < s$ o $\{\mu_s + p_s + 1, ...n-1\}$ si $n > p_s + \mu_s$ tal que per tot $\mu_i + p_i + 1 \leq j \leq \mu_{i+1} - 1(n-1$ si $n > \mu_s + p_s)$ tenim:
$$\xi_{\mu_i + p_i + j}(\omega) \cap U_{\Delta+1} = \emptyset$$
- Per tot $k = 1, ..., n-1, \omega_k$ satisfà (BA_k) i (EG_k).

Ara definirem una partició auxiliar $\mathcal{P}'_n$ que contindrà porcions de $\omega \in \mathcal{P}'_{n-1}$ que satisfan un dels següents casos:
Agafem $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$:

1. Si n pertany a un període acotat associat a un retorn previ $\Rightarrow \omega \in \mathcal{P}'_n$.
2. Si $\xi_n(\omega) \cap U_\Delta \subset I_{\Delta,1} \cup I_{-\Delta,1} \Rightarrow \ \omega \in \mathcal{P}'_n$. Observem que el fet que si $\xi_n(a) \in (-e^{-\Delta}, e^{\Delta})$ i $\xi_n(a) \in I_{\Delta,1} \cup I_{-\Delta,1} = [e^{-\Delta} - r_\Delta, e^{-\Delta}) \cup [-e^{-\Delta} + r_{-\Delta}, -e^{-\Delta})$ per una certa $a \in \omega$, llavors $\xi_n(a) \in U^c_{\Delta+1}$ i n forma part d'una òrbita lliure.
3. Si no es compleix cap de les dues condicions anteriors diem que n té una **situació de retorn** per ω. Hem de considerar dos casos:
   (a) $\xi_n(\omega)$ no cobreix totalment un interval $I_{m,k}$. La situació de retorn llavors diem que és **inessencial**. Com que $\xi_n(\omega) \cap U_\Delta \nsubseteq I_{\Delta,1} \cup I_{-\Delta,1}$, tenim que existeix una $x_1 \in \xi_n(\omega) \cap U_\Delta$ tal que $x_1 \notin I_{\Delta,1} \cap I_{-\Delta,1}$. Llavors existeixen unes m, k tal que $x_1 \in I_{m,k}$ amb $I^+_{m,k} \subset U_\Delta$. A més, $\xi_n(\omega) \subset I^+_{m,k}$, ja que si existís un punt de $\xi_n(\omega)$ fora de $I^+_{m,k}$, com que $x_1 \in \xi_n(\omega)$ tenim que $\xi_n(\omega)$ recobreix tot un interval $I_{m',k'}$ adjacent a $I_{m,k}$.
   En resum, posem $\omega \in \mathcal{P}'_n$, on n és un **retorn inessencial** i $I^+_{m,k}$ és el seu **interval hoste**.

(b) $\xi_n(\omega)$ conté almenys un interval $I_{m,k}$ amb $|m| \geq \Delta$. Direm que la situació de retorn es essencial i considerem els conjunts:

$$\begin{aligned} \omega'_{m,k} &= \xi_n^{-1}(I_{m,k}) \cap \omega \text{ per } |m| \geq \Delta \\ \omega'_{\Delta-1,1} &= \xi_n^{-1}([0,1] \setminus U_\Delta) \cap \omega \\ \omega'_{1-\Delta,1} &= \xi_n^{-1}([-1,0] \setminus U_\Delta) \cap \omega \end{aligned}$$

i sigui $\mathcal{A}$ el conjunt de indexos (m,k) tal que $\omega'_{m,k} \neq \emptyset$ tenim:

$$\omega \setminus \xi_n^{-1}(0) = \bigcup_{(m,k)\in\mathcal{A}} \omega'_{m,k} \tag{3.9}$$

Com que $n \geq N \geq N_0$ implica que ω satisfà condicions (a) i (b) de la Proposició 3.6 ja que compleix (EG_{n-1}), llavors $\xi_n|_\omega$ és un homeomorfisme, i per tant $\omega'_{m,k}$ és un interval. És més, $\xi_n(\omega'_{m,k})$ cobreix tot $I_{m,k}$ excepte, eventualment, dos intervals extrems. Quan $\xi_n(\omega'_{m,k})$ no cobreix tot l'interval $I_{m,k}$, unim $\omega'_{m,k}$ amb el seu veí de la composició de (3.9) i tenim una nova descomposició de $\omega \setminus \xi_n^{-1}(0)$ en intervals $\omega_{m,k}$ tal que $I_{m,k} \subset \xi_n(\omega_{m,k}) \subset I^+_{m,k}$. Ara posem $\omega_{m,k} \in \mathcal{P}'_n$ si i només si $|m| \leq [\alpha n]-1$, i $I^+_{m,k}$ és el seu interval hoste. Notem que la porció de ω que és exclosa és un inteval que definim com ω_{exc} contingut en $U_{[\alpha n]-1}$.

- Si $|m| \geq \Delta$ tenim que n és un **essencial** de $\omega_{m,k}$.
- Si $|m| = \Delta - 1$, llavors $\omega_{m,k}$ li diem **component d'escapada** i n una situació escapant per tot $a \in \omega_{m,k}$.

Definim ara una successiò $(q_i)_i$ de la forma:

$$q_i = \mu_{i+1} - (\mu_i + p_i + 1) \ per \ i = 0, ..., s-1$$

$$q_s = \begin{cases} 0 & n < \mu_s + p_s \\ \mu_{s+1} - (\mu_s + p_s + 1) & n \geq \mu_s + p_s + 1 \end{cases}$$

O sigui, que q_i és el número d'iterats que té l'òrbita lliure. També definim la funció $F_n(a) = q_0 + ... + q_s$ i a compleix la condició $(\mathbf{FA_n})$ si:

$$F_n(a) \geq (1-\alpha)n$$

Ara ja podem definir la partició $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n = \cup\{\omega \in \mathcal{P}'_n | F_n(\omega) \geq (1-\alpha)n\}$$

i recordem que $\Omega_n = \cup\{\omega|\omega \in \mathcal{P}_n\}$.

Per tot $a \in \Omega_n$, per tot $k = 1, ..., n, a$ pertany a un, i només un, $\omega_k \in \mathcal{P}_k$, ja que aquests intervals estàn generats de la següent manera:

$\omega_1 = ... = \omega_{N-1}$ en el moment N, ja que $U_1 \subset \xi_N(\Omega)$ per la Proposició 3.7 i per tant $\nu_1(a) = N$ és una situació essencial de retorn per ω_{N-1}. Així que subdividim

Ω en intervals $\Omega_{(m,k)}$. $\Omega_{(m,k)} \in \mathcal{P}_N$ per $\Delta - 1 \leq |m| \leq [\alpha N] - 1$. Com que $\omega_N \in \mathcal{P}_N$ tenim que existeix una parella (m_1, k_1) tal que $\omega_N = \Omega_{(m_1,k_1)}$. Ara ens queda que $\omega_k = \Omega_{(m_1,k_1)}$ per $k = \nu_1(a)+1, ..., \nu_2(a)-1$, on $\nu_2(a)$ és la següent situació de retorn essencial per $\Omega_{(m_1,k_1)}$. En el moment $\nu_2(a)$ dividim un altre cop $\Omega_{(m_1,k_1)}$ i obtenim un nou component $\Omega_{(m_1,k_1),(m_2,k_2)}$ de $\mathcal{P}_{\nu_2}(a)$ tal que $\omega_{\nu_2(a)} = \Omega_{(m_1,k_1),(m_2,k_2)}$. Continuant aquest procés tenim les successió $\nu_1, ..., \nu_s$ i $(m_1, k_1), ..., (m_s, k_s), (s = s(a, n))$ tal que:

- $\omega_{\nu_i} = \Omega_{(m_1,k_1),...,(m_i,k_i)}$
- $\omega_k = \omega_{\nu_i}$ per $k = \nu_i + 1, ..., \nu_{i+a} - 1$.
- $\omega_{\nu_i} \subsetneq \omega_{\nu_{i-1}}$

On:

$$I_{k_i,m_i} \subset \xi_{\nu_i}(\Omega_{(m_1,k_1),...,(m_i,k_i)}) \subset I^+_{m_i,k_i}$$

A més, $\xi_{\nu_i}|_{\omega_{\nu_{i-1}}}$ és un homeomorfisme, llavors $\omega \in \mathcal{P}_n$ és igual a un $\Omega_{(m_1,k_1),...,(m_s,k_s)}$ per una única successió $(m_1, k_1), ..., (m_s, k_s)$ amb $|m_i| \geq \Delta - 1$ i $k_i \leq m_i^2$.
Per tant, per demostrar el Teorema 3.1 només ens queda demostar les següents Proposicions:

Proposició 3.8. Ω_n *satisfà les condicions* (BA_n) *i* (EG_n).

Proposició 3.9. $|\Omega_\infty| \geq (1 - \rho)|\Omega|$.

On les demostrarem en les seccions 3.5 i 3.6 respectivament. Però previament veurem alguns resultats importants per aquestes demostracions d'un element del que ja hem parlat:

3.4 El període acotat

En aquesta secció parlarem d'una forma més precisa sobre el període acotat i direm quines característiques té, com explicar a que ens referim quan diem que les òrbites $\{\xi_k(a), 1 \leq k \leq p\}$ i $\{\xi_{\mu+k}, 1 \leq k \leq p\}$ estàn aprop una de l'altra. Podem suposar que es compleixen les hipòtesis d'inducció plantejades en la secció anterior, llavors els conjunts Ω_t i les particions $\mathcal{P}_t$ per $t \leq n - 1$ estàn ben definits i les condicions (BA_t) i (EG_t) es compleixen.

Fixem una constant β tal que:

$$\alpha < \beta < \frac{1}{48}\left(1 - \frac{c}{c_0}\right)$$

Ara tinguem per $N \leq t \leq n - 1$ un conjunt $\omega \in \mathcal{P}_t$ que té un retorn, essencial o inessencial, en la iteració t tal que $\xi_\mu(\omega) \subset I^+_m$.Per cada $a \in \omega$ definim:

$$p(a, m) := \max\{p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} || f^j_a(x) - \xi_j(a)| < e^{-\beta j} \; per \; 1 \leq j \leq p, \forall x \in U^+_m\}$$

D'aquí treiem la condició d'acotació: p satisfà (**CA**) si:

$$\forall x \in U_m^+ \quad |f_a^j(x) - \xi_j(a)| < e^{-\beta j} \quad \text{per } 1 \le j \le p$$

Sabem que existeix almenys una p que satisfà aquesta condició degut a que per tot $x \in U_m^+$ tenim que:

$$|f_a^j(x) - \xi_1(a)| = ax^2 \le ae^{-2(\Delta-1)} \le e^{-\beta} \text{ ja que } \Delta \le 2.$$

A partir de la condició d'acotació podem treure que:

$$\begin{cases} |f_a^j(U_m^+)| \le 2e^{-\beta j}, 1 \le j \le p(a,m) \\ |f_a^{p(a,m)+1}(U_m^+)| \ge e^{-\beta(p(a,m)+1)} \; si \; p(a,m) \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Per simplificar notació posem $D_k(a,x) = (f_a^k)'(f_a(x))$.

Lema 3.10. *Suposem que $a \in \Omega_t$ i $\xi_t(a) \in I_m^+$ amb $\Delta \le |m| \le [\alpha t] - 1$ i posem $p = p(a,m)$, llavors:*

1. *Hi ha una constant $B_1 = B_1(\alpha - \beta)$ tal que $\forall x \in U_m^+$ i $k = 1, ..., p$.*

$$\frac{1}{B_1} \le \frac{|D_k(a,x)|}{|D_k(a)|} \le B_1$$

2. *$p < 3|m|$*
3. *$|(f_a^{p+1})'(x)| \ge e^{(1-4\beta)|m|} \; \forall x \in I_m^+$*

Demostració. 1. Per $k = 1, ..., \min\{p,t\}$:

$$\frac{|D_k(a,x)|}{|D_k(a)|} = \prod_{j=1}^{k} \frac{2a|f_a^j(x)|}{2a|\xi_j(a)|} = \prod_{j=1}^{k}\left[1 + \frac{|f_a^j(x)| - |\xi_j(a)|}{|\xi_j(a)|}\right] \le \prod_{j=1}^{k}\left[1 + \frac{|f_a^j(x) - \xi_j(a)|}{|\xi_j(a)|}\right]$$

$$\le \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \frac{|f_a^j(x) - \xi_j(a)|}{|\xi_j(a)|}\right\}$$

on hem utilitzat que si $x \ge 0$ llavors $1 + x \le e^x$. Tenim que a satisfà (BA_t) i (CA), i per tant , per $j \le t$ i $j \le p$ tenim que:

$$\frac{|f_a^j(x) - \xi_j(a)|}{|\xi_j(a)|} \le \frac{e^{-\beta j}}{e^{-\alpha j}} \Rightarrow \frac{|D_k(a,x)|}{|D_k(a)|} \le \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)j}\right\} = B_1'$$

Com que $\frac{|f_a^j(x) - \xi_j(a)|}{|\xi_j(a)|} \le e^{(\alpha-\beta)j} \le 1$ per tot $j \le k$.

$$\frac{|D_k(a,x)|}{|D_k(a)|} \ge \prod_{j=1}^{k}\left[1 - \frac{|f_a^i(x) - \xi_j(a)|}{|\xi_j(a)|}\right] \ge \prod_{j=1}^{k}(1 - e^{(\alpha-\beta)j}) \ge \prod_{j=1}^{\infty}(1 - e^{(\alpha-\beta)j}) = B_1''$$

Posant $B_1 = \max\{B_1', \frac{1}{B_1''}\}$ ja ho tindríem.

2. Agafant $x = e^{-|m|} \in U_m^+$ i $j = \min\{p, t\} - 1$.

$$|f_a^{j+1}(x) - \xi_{j+1}(a)| = |f_a^j(f_a(x)) - f_a^j(f_a(0))| = |(f_a^j)'(y)| \cdot |f_a(x) - f_a(0)|$$

$$\geq B_1''|D_j(a)|ax^2 \quad y \in f_t(U_m)$$

Per (CA) sabem que $|f_a^{j+1}(x) - \xi_{j+1}(a)| < e^{-\beta(j+1)}$ i per tant:

$$B_1''|D_j(a)|ae^{-2|m|} < e^{-\beta(j+1)}$$

Com que $a \geq 1$ pertany a Ω_t, i per hipòtesi es compleix (EG_t), tenim que:

$$B_1''e^{cj-2|m|} \leq e^{-\beta(j+1)}$$

i ens queda:

$$j \leq \frac{2|m|}{c+\beta} - \frac{\log B_1''}{c+\beta} \leq 3|m| - 1$$

ja que Δ és suficientment gran i $c > \frac{2}{3}$. Així, $j < 3[\alpha t] - 1 < t$. Llavors $j = p - 1$ i ja tindríem que $p < 3|m|$.

3. Per la condició d'acotació tenim que $|f_a^{p+1}(U_m^+)| \geq e^{-\beta(p+1)}$, i pel teorema del valor mitjà, per alguna $y \in U_m^+$ tenim $|f_a^{p+1}(U_m^+)| \leq |(f_a^{p+1})'(y)| \cdot |U_m^+|$, llavors:

$$|(f_a^p)'(f_a(y))| \cdot |f_a'(y)| > \frac{e^{-\beta(p+1)}}{|U_m^+|}$$

Així, per tot $x \in I_m^+$,

$$|(f_a^{p+1})'(x)| = |(f_a^p)'(f_a(x))| \cdot |f_a'(x)| \geq \frac{1}{B_1^2}|(f_a^p)'(f_a(y))| \cdot |(f_a'(x))| \geq \frac{1}{B_1^2} \cdot \frac{e^{-\beta(p+1)}}{|U_m^+|} \cdot \frac{|x|}{|y|}$$

On l'última desigualtat l'hem fet per l'apartar 1. Com que $|x| \geq e^{-(|m|+1)}$, $|y| < e^{|m|-1}$, $p < 3|m|$ i $|U_m^+| < 2e^{|m|-1}$, tenim:

$$|(f_a^{p+1})'(x)| \geq e^{(1-4\beta)|m|}$$

ja que Δ és suficientment gran així que $|m| \geq \Delta \Rightarrow e^{\beta|m|} \geq \frac{1}{2e^3 B_1^2}$.

□

El resultat més important que ens diu aquest Lema és que p és finit, llavors l'òrbita ξ_μ es manté un número finit d'iteracions a prop de la òrbita ξ_0, i es torna a allunyar. També obtenim per (1):

$$|(f_a^k)'(\xi_{t+1}(a))| \geq \frac{1}{B_1}|D_k(a)| \geq \frac{1}{e^{ck}}$$

ja que a satisfà (BA_k), i per 3:

$$|(f_a^{p+1})'(\xi_t(a))| \geq e^{(1-4\beta)|m|} \geq 1$$

No obstant el nostre objectiu és tenir la p constant en el conjunt ω definint:

$$p(\omega, m) = \min_{a\in\omega} p(a, m)$$

i estendre els resultats de l'últim Lema a $p(\omega, a)$. Com que $p(\omega, m) \leq p(a, m)$ per tot $a \in \omega$ els apartats (1) i (2) del Lema 3.10 surten inmediatament. Per demostrar l'apartat 3 és més complicat així que necesitarem tres Lemes tècnics:

Lema 3.11. *Si $\omega \in \mathcal{P}_{t-1}$ per $t \leq n$ llavors per tot $a, b \in \omega$:*

$$\begin{aligned} &(a) \quad |a-b| \leq 4ae^{-\frac{2}{3}t}. \\ &(b) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^k \leq e^{2A}\forall k = 1, ..., t. \end{aligned}$$

Demostració. Pel teorema del valor mitjà, existeix una $\lambda \in \omega$ tal que:

$$2 \geq |\xi_t(\omega)| = |\xi_t'(\lambda)| \cdot |\omega| \geq |\xi_t'(\lambda)| \cdot |a-b| \geq \frac{1}{A}|D_{t-1}(\lambda)| \cdot |a-b| \geq \frac{1}{A}e^{-\frac{2}{3}(t-1)}|a-b|$$

ja que $t \in \Omega_{t-1}$ i per tant compleix (BA_{t-1}), així:

$$|a-b| \leq 2Ae^{-\frac{2}{3}(t-1)} \leq 4Ae^{-\frac{2}{3}n}.$$

Per demostrar (b):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k \leq \left(1 + \frac{|a-b|}{b}\right)^k \leq \left(1 + \frac{4Ae^{-\frac{2}{3}n}}{b}\right)^k \leq \exp\{2kAe^{-\frac{2}{3}n}\} \leq e^{2A},$$

on hem utilitzat que si $x \geq 0$, llavors $1 + x \leq e^x$. □

Lema 3.12. *Si $\omega \in \mathcal{P}_{t-1}$ i $\xi_t(\omega) \subset I_m^+$ amb $\Delta \leq |m| \leq [\alpha t] - 1$, on $N + 1 \leq t \leq n$, llavors per tot $a, b \in \omega$:*

$$|\xi_j(a) - \xi_j(b)| \leq e^{-\beta j}, \ j = 1, ..., p(\omega, m)$$

Demostració. De la equació (3.5) obtenim que:

$$\left|\frac{\xi_{j+1}'(a)}{D_j(a)}\right| \leq 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{|D_{i-1}(a)|}$$

Com que $\omega \in \mathcal{P}_{t-1}$ i $j \leq t-1$ tenim:

$$\left|\frac{\xi_{j+1}'(a)}{D_j(a)}\right| \leq 1 + \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{2}{3}i}} = T_1$$

Llavors, per una $\lambda \in (a, b)$:

$$|\xi_t(a) - \xi_j(b)| = |\xi_j'(\lambda)||a-b| \leq T_1|D_{j-1}(\lambda)||a-b| \tag{3.10}$$

Pel teorema del valor mitjà existeix una $y \in U_m^+$ tal que:

$$|f_t^j(U_m^+)| \geq |D_{j-1}(t,y)| \cdot |f_\lambda(U_m^+)| \geq \frac{1}{B_1^2}|D_{j-1}(\lambda)| \cdot |f_\lambda(U_m^+)|.$$

De (3.10) tenim que:

$$|f_\lambda(U_m^+)| \geq |f_\lambda(e^{-|m|}) - f_t(0)| \geq \lambda e^{-2m} \geq e^{-2\alpha n}$$

obtenint finalment:

$$|\xi_j(a) - \xi_j(b)| \leq T_2 |f_\lambda^j(U_m^+)| e^{(2\alpha - \frac{2}{3})n} \tag{3.11}$$

on $T_2 = 4AT_1B_1^2$. Aplicant (BC), o sigui la condició d'acotació, teníem que $|f_\lambda^j(U_m^+)| \leq 2e^{\beta j}$, i per tant, per n suficientment gran tenim que:

$$2T_2 e^{(2\alpha - \frac{2}{3})n} \leq 1,$$

i obtenim la desigualtat desitjada aplicant (3.11). □

Lema 3.13. *Si $\omega \in \mathcal{P}_{t-1}$ i $\xi_t(\omega) \subset I_m^+$ on $N+1 \leq t \leq n$ amb $\Delta \leq |m| \leq [\alpha t] - 1$, llavors agafant $p = p(\omega, m)$, tenim que per tot $a, b \in \omega$ i $x, y \in U_m^+$:*

$$\frac{|D_j(a,x)|}{|D_j(b,y)|} \leq B_2 = B_2(\alpha - \beta) \ \forall j = 1, ..., p.$$

Demostració. Tenim que:

$$\frac{|D_j(a,x)|}{|D_j(b,y)|} = \frac{|D_j(a,x)|}{|D_j(a)|} \cdot \frac{|D_j(a)|}{|D_j(b)|} \cdot \frac{|D_j(b)|}{|D_j(b,y)|} \leq B_1^2 \frac{|D_j(a)|}{|Dj_(b)|}$$

pel Lema 3.10. Llavor és suficient agafar una cota superior per

$$\frac{|D_j(a)|}{|D_j(b)|} = \left(\frac{a}{b}\right)^j \cdot \prod_{i=1}^{j} \frac{|\xi_i(a)|}{|\xi_i(b)|}$$

Com que

$$\frac{|\xi_i(a)|}{|\xi_i(b)|} \leq 1 + \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|}$$

tenim que:

$$\frac{|D_j(a)|}{|D_j(b)|} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^j \prod_{i=1}^{j} \left[1 + \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|}\right] \leq \left(\frac{a}{b}\right)^j \exp\left\{\sum_{i=1}^{j} \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|} \leq \right.$$
$$\left. \leq e^{2A} \exp\left\{\sum_{i=1}^{j} \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|}\right\}\right. \tag{3.12}$$

pel Lema 3.11. Ara pel Lema **??**, per $i = 1, ..., p$:

$$|\xi_i(a) - \xi_i(b)| \leq e^{-\beta i}$$

i per tant:

$$|\xi_i(b)| \geq |\xi_i(a)| - e^{-\beta i} \geq e^{-\alpha i} - e^{-\beta i} \geq e^{-\alpha i}(1 - e^{(\alpha-\beta)j}) \geq C_1$$

on $C_1 = (1 - e^{\alpha-\beta})^{-1}$. Llavors:

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|} \leq C_1 \sum_{i=1}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)i} < \infty.$$

Així, aplicant aquesta última desigualtat a (3.12) obtindrem el resultat. □

I ara ja podem estendre el Lema 3.10 per $p(\omega, m)$.

Proposició 3.14. *Suposem que* $\omega \in \mathcal{P}_{t-1}$ *i* $\xi_t(\omega) \subset I_m^+$ *per* $N + 1 \leq t \leq n$ *i amb* $\Delta \leq m \leq [\alpha t]$. *Si posem* $p = p(\omega, m)$, *llavors:*

1. *Existeix una constant* $B = B(\alpha - \beta)$ *tal que per tot* $a \in \omega$ *i* $x \in U_m^+$:

$$\frac{1}{B} \leq \frac{|D_k(a, x)|}{|D_k(a)|} \leq B \ \forall k = 1, ..., p.$$

2. $p < 3|m|$.
3. $|(f_a^{p+1})'(x)| \geq e^{(1-5\beta)|m|}$ *per tot* $a \in \omega$ *i* $x \in U_m^+$.

Demostració. Només ens falta demostrar 3:

Sigui $a_* \in \omega$ tal que $p(\omega, m) = p(a_*, m)$.De 3 del Lema 3.10,

$$|(f_{a_*}^{p+1})'(x)| \geq e^{(1-4\beta)|m|}$$

i pel Lema 3.13:

$$\frac{|D_p(a_*, x)|}{|D_p(a, x)|} \leq B_2$$

Per tant, pel Lema 3.11:

$$\frac{|(f_{a_*}^{p+1})'(x)|}{|(f_a^{p+1})'(x)|} = \frac{a_*}{a} \frac{|D_p(a_*, x)|}{|D_p(a, x)|} \leq e^{2A} B_2 \leq e^{\beta|m|}$$

per Δ prou gran. Així:

$$|(f_a^{p+1})'(x)| \geq \frac{1}{e^{2A} B_2} |(f_{a_*}^{p+1})'(x)| \geq \frac{1}{e^{2A} B_2} e^{(1-4\beta)|m|} \geq \frac{e^{(1-4\beta)|m|}}{e^{\beta|m|}} = e^{(1-5\beta)|m|}$$

amb Δ suficientment gran. □

Comentari: La distorsió de la D_k es pot generalitzar a difeomorfismes $\mathcal{C}^1$ mitjançant un dels resultats més importants de la dinàmica undimensional:el principi de Koebe.

Teorema 3.15 (Principi de Koebe)**.** *Sigui $C_0 \in (0,1], J \subset T$ intervals i $g : T \to g(T)$ difeomorfisme $\mathbb{C}^1$. Asumim que per qualsevols intervals J^* i T^* amb $J^* \subset T* \subset T$ tenim que:*

$$\frac{|g(T)| \cdot |g(J)| \cdot |L'| \cdot |J'|}{|L| \cdot |R| \cdot |T| \cdot |J|} \geq C_0 > 0$$

on $L \cup R = g(T) \setminus g(J)$ i $L' \cup R' = T \setminus J$. Si $|L| = |R| = \tau |g(J)|$, llavors:

$$\frac{1}{K(C_0, \tau)} \leq \frac{Dg(x)}{Dg(y)} \leq K(C_0, \tau), \ \forall x, y \in J$$

on $K(C_0, \tau) = \frac{(1+\tau)^2}{C_0^6 \tau^2}$. A més si la derivada scharziana és negativa podem agafar $C_0 = 1$.

La demostració i una informació més detallada sobre el principi de Koebe es pot trobar a [9].

3.5 Demostració que Ω_n satisfà (BA_n) i (EG_n)

En aquesta secció demostrarem que el conjunt:

$$\Omega_n = \cup \{\omega | \omega \in \mathcal{P}_n\}$$

on:

$$\mathcal{P}_n = \cup \{\omega \in \mathcal{P}_n' | F_n(\omega) \geq (1 - \alpha n)\}$$

satisfà (BA_n) i (EG_n) a partir de la hipòtesis d'inducció construïda en la secció 2.3. Agafem un conjunt $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$.

Primer de tot sabem que tot retorn μ de ω , tal que $\xi_\mu(\omega) \subset I_m^+$, satisfà (BA_μ) i (EG_μ) i per tant per la Proposició 3.14 sabem que $p < 3|m|$, o sigui, el període acotat és finit. És evident que $\omega \subset \omega_\mu$,llavors $\forall a \in \omega$:

$$|(f_a^{p+1})'(\xi_\mu(a))| \geq e^{(1-5\beta)|m|} \geq 1 \tag{3.13}$$

i per la mateixa Proposició tenim que, per $j = 1, ..., p$:

$$|(f_a^j)'(\xi_{\mu+1}(a))| \geq \frac{1}{B} |D_j(a)| \tag{3.14}$$

on $B = B(\alpha - \beta)$. Per tant, com que $j \leq 3|m| < 3\alpha\mu < \mu$ i a satisfà $(EG_{\mu-1})$:

$$|(f_a^j)'(\xi_{\mu+1}(a))| \geq \frac{1}{B} e^{cj} \tag{3.15}$$

Ara suposem que $\omega \in \mathcal{P}_n'$ i demostrarem que en tots els casos que hem vist a la secció 2.3 ω satisfà (BA_n):

1. En el cas de que n pertany a un període acotat tenim que és de la forma $n = \mu + j, j \geq 1$ on μ és un retorn.Per (CA), tenim que per tot $a \in \omega$.

$$|\xi_{\mu+j}(a) - \xi_j(a)| < e^{-\beta j} \Rightarrow |\xi_{\mu+j}(a)| \geq |\xi_j(a)| - e^{-\beta j}$$

i com que a satisfà (BA_j) ja que satisfà (BA_{n-1}) per hipòtesi d'inducció i que $j \leq p \leq 3|m| \leq \mu - 1 \leq n - 1$. Llavors tenim:

$$|\xi_n(a)| = |\xi_{\mu+j}(a)| \geq e^{-\alpha j} - e^{\beta j} \geq e^{-\alpha j}(1 - e^{(\alpha-\beta)j}) \geq e^{-\alpha n}$$

2. En el cas de que n sigui una òrbita lliure, per tot $a \in \omega, |\xi_n(a)| \geq e^{-(\Delta+1)}$ i com que $N = N(\Delta)$ era suficientment gran, com per a que $N \geq \frac{\Delta+1}{\alpha}$ llavors $|\xi_n(a)| \geq e^{-\alpha n}$.

3. Si n és un retorn teníem dos casos:

   (a) Si n és un retorn inessencial de ω teníem que $\xi_n(a)$ no cobria un interval $I_{m,k}$. Suposem que ω no satisfà (BA_n), llavors tenim una $a \in \omega, \xi_n(a) \neq 0$, tal que $|\xi_n(\omega)| < e^{-\alpha n}$. L'interval hoste $I^+_{m,k}$ de ω en el temps n ha de ser tal que $|m| \leq [\alpha n] - 1$. Com que $|\xi_n(\omega)| \leq |I^+_{m,k}| \leq \frac{5|I_m|}{m^2} \leq e^{-\alpha n}$, per N prou gran, però com demostrarem próximament tenim $|\xi_n(\omega)| \geq e^{-\frac{\alpha}{2}}$, i per tant contradicció i ω compleix (BA_n).

   (b) Si n satisfà una situació de retorn essencial(retorn essencial o situació d'escapada),sigui $\omega_{m,k} \in \mathcal{P}'_n$ tal que $\omega_{m,k} \subset \omega$. Com que $\xi_n(\omega_{m,k}) \subset I^+_{m,k}$ amb $|m| \leq [\alpha n] - 1$ i llavors $\xi_n(\omega) \cap U_{[\alpha n]} = \emptyset$ i per tant $\omega_{m,k}$ satisfà (BA_n).

Per construcció ja hem vist que Ω_n satisfà $(BA_n), (EG_{n-1})$ i (FA_n). Ens falta veure que a partir d'aquestes condicions Ω_n satisfà (EG_n):

Per tota $a \in \omega$ tenim per la regla de la cadena que per $n > \mu_s + p_s$:

$$|D_n(a)| = \prod_{i=0}^{s} |(f_a^{q_i})'(\xi_{\mu_i+p_i+1}(a)))| \cdot |(f_a^{p_i+1})'(\xi_{\mu_i}(a))|$$

i per $n \leq \mu_s + p_s$,

$$|D_n(a)| = |(f'_a)(\xi_{\mu_s}(a))| \cdot |(f_a^{n-\mu_s})'(\xi_{\mu_s+1}(a))| \cdot \prod_{i=0}^{s-1} |(f_a^{q_i})'(\xi_{\mu_i+p_i+1}(a))| \cdot |(f_a^{p_i+1})'(\xi_{\mu_i}(a))|;$$

Per la Proposició 3.5 podem treure les següents propietats:

$$|(f_a^{q_i})'(\xi_{\mu_i+p_i+1}(a))| \geq e^{c_0 q_i}, \quad i = 0, ..., s-1$$

$$|(f_a^{q_s})'(\xi_{\mu_s+p_s+1}(a))| \geq \delta e^{c_0 q_s}$$

I per tant substituïm per $F_n(a)$ i per (3.13),(3.14) i (3.15), obtenim per $n \geq \mu_s + p_s + 1$:

$$|D_n(a)| \geq \delta e^{c_0 F_n(a)}$$

i per $n \leq \mu_s + p_s$:

$$|D_n(a)| \geq \frac{2}{B}|\xi_{\mu_s}(a)|e^{c(n-\mu_s-p_s}e^{c_0 F_n(a)}.$$

Ara, suposant que a compleix (BA_n) i (FA_n), i per l'escolliment de les constants tal que $(c-3\alpha)c_0 \geq c$, tenim que:

$$\begin{cases} |D_n(a)| \geq \delta e^{\alpha n} \cdot e^{cn} & n > \mu_s + p_s \\ |D_n(a)| \geq \frac{2}{B} e^{\alpha n} \cdot e^{cn} & n \leq \mu_s + p_s \end{cases}$$

Llavors, escollint N suficientment gran tenim que:

$$\delta e^{\alpha n} \geq 1 \quad \text{i} \quad \frac{2}{B} e^{\alpha n} \geq 1$$

aleshores pels dos casos: $|D_n(a)| \geq e^{cn}$, i per tant satisfà (EG_n).

3.6 Cota de distorsió

Anteriorment hem mencionat que ens interesava treballar amb conjunts de paràmetres ω per tenir uns mateixos conceptes per a tot $a \in \omega$ i també per tenir una fita de la distorsió de D_n o ξ_n', és a dir, que si tenim dos parametres $a, b \in \omega$, veure com difereixen aquests valors respecte a i b. Això ho veurem en questa secció, però abans necessitem tres Lemes que ens parlen sobre la dimensió de l'interval $|\xi_k(\omega)|$, on k pot ser un retorn o una situació d'escapada:

Lema 3.16. *Suposem que $\omega \subset [1,2]$ és un interval que satisfà (a) i (b) de la Proposició 3.6.Llavors, per tot enter i,j tal que $N_0 \leq i \leq j \leq n$ tenim que:*

1. *Per tot $a, b \in \omega$* $\dfrac{1}{A^2} \cdot |(f_t^{j-i})'(\xi_i(t))| \leq \dfrac{|\xi_j(a) - \xi_j(b)|}{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|} \leq A^2 |(f_t^{j-i})'(\xi_i(t))|, t \in \omega.$

2. $\dfrac{1}{A^2} \cdot |(f_t^{j-i})'(\xi_i(t))| \leq \dfrac{|\xi_j(\omega)|}{|\xi_i(\omega)|} \leq A^2 |(f_t^{j-i})'(\xi_i(t))|, t \in \omega.$

Demostració. 1. A partir de la Proposició 3.6, tenim que $|\xi_k'(a)| \neq 0$ per tot $a \in \omega$ i per $k = N_0, .., n$, i per tant ξ_k és un homeomorfisme restingit a ω. Per i, j que estiguin entre N_0 i n podem definir la funció:

$$\begin{aligned} \phi : \xi_i(\omega) &\longrightarrow \quad \xi_j(\omega) \\ x \quad &\longmapsto \xi_j \circ \xi_i^{-1}(x) \end{aligned}$$

i pel teorema del valor mmitjà tenim que per una t entre a i b:

$$|\xi_j(a) - \xi_j(b)| = |\phi'(\xi_i(t))| \cdot |\xi_i(a) - \xi_i(b)|.$$

Com que:

$$\phi'(\xi_i(t)) = \frac{\xi_j'(t)}{\xi_i'(t)}$$

i per la Proposició 3.7 obtenim:

$$\frac{1}{A^2} \cdot \frac{|D_{j-1}(t)|}{|D_{i-1}(t)|} \leq |\phi'(\xi_i(t))| \leq A^2 \cdot \frac{|D_{j-1}(t)|}{|D_{i-1}(t)|}$$

I així obtenim el resultat, ja que

$$|(f_t^{j-i})'(\xi_i(t))| = \frac{|D_{j-1}(t)|}{|D_{i-1}(t)|}.$$

$\square$

Lema 3.17. *Suposem que μ és un retorn per $\omega \in \mathcal{P}_n$, amb interval hoste $I_{m,k}^+$. Sigui p la longitud del seu període acotat.*

1. *Si $\mu' \leq n$ és el següent retorn després de μ, posant $q = \mu' - p - 1$, tenim:*
   (a) $|\xi_{\mu'}(\omega)| \geq e^{cq} \cdot e^{(1-6\beta)|m|} \cdot |\xi_\mu(\omega)| \geq 2|\xi_\mu(\omega)|$.
   (b) $|\xi_{\mu'}(\omega)| \geq e^{cq} \cdot e^{-6\beta|m|}$ *si μ és un retorn essencial.*
2. *Si μ és l'últim retorn que hi ha abans de n i n és un temps lliure, llavors posant $q = n - p$ tenim:*
   (a) $|\xi_n(\omega)| \geq e^{cq-\Delta} \cdot e^{(1-6\beta)|m|} \cdot |\xi_\mu(\omega)| \geq 2|\xi_\mu(\omega)|$.
   (b) $|\xi_n(\omega)| \geq e^{cq-\Delta} \cdot e^{-6\beta|m|}$ *si μ és un retorn essencial.*

Demostració. Escrivint:

$$\frac{|\xi_{\mu'}(\omega)|}{|\xi_\mu(\omega)|} = \frac{|\xi_{\mu'}(\omega)|}{|\xi_{\mu+p+1}(\omega)|} \cdot \frac{|\xi_{\mu+p+1}(\omega)|}{|\xi_\mu(\omega)|}$$

pel Lema previ sabem que existeixen $t, t' \in \omega$ tal que:

$$\frac{|\xi_{\mu'}(\omega)|}{|\xi_{\mu+p+1}(\omega)|} \geq \frac{1}{A^2} \cdot |(f_t^q)'(\xi_{\mu+p+1}(t))| \quad (q = \mu' - (p+1+\mu))$$

$$\frac{|\xi_{\mu+p+1}(\omega)|}{|\xi_\mu(\omega)|} \geq \frac{1}{A^2} \cdot |(f_{t'}^{p+1})'(\xi_\mu(t'))|$$

Per simplificar notació a partir d'ara posarem $x = \xi_{\mu+p+1}(t)$ i $x' = \xi_\mu(t')$. Per tant ens queda que:

$$\frac{|\xi_{\mu'}(\omega)|}{|\xi_\mu(\omega)|} \geq \frac{1}{A^4} \cdot |(f_t^q)'(x)| \cdot |(f_{t'}^{p+1})'(x')|$$

Com que p és la longitud del període acotat del retorn μ tenim per (3) de la Proposició 3.14 que:

$$\frac{|\xi_{\mu'}(\omega)|}{|\xi_\mu(\omega)|} \geq \frac{1}{A^4}||(f_t^q)'(x)|e^{(1-5\beta)|m|}$$

Ara demostrem els diferents casos:

1. $f_t^q(x) = f_t^q(\xi_{\mu+p+1}(t)) = \xi_{\mu'}(t) \in I_{m,k}^+$ tal que $|m| \geq \Delta$, llavors per (b) de la Proposició 3.5 tenim que $|(f_t^q)'(x)| \geq e^{c_0 q}$. Recordem que de $\mu+p+1$ fins a μ' són òrbites lliures, i per tant la imatge està fora de U_Δ^+.Per tant, per la desigüaltat vista previament ens queda:

$$\frac{|\xi_{\mu'}(\omega)|}{|\xi_\mu(\omega)|} \geq \frac{1}{A^4} \cdot e^{c_0 q} \cdot e^{(1-5\beta)|m|}.$$

La afirmació (a) s'obté agafant Δ suficientment gran per a que $|m| \geq \Delta$ tinguem $e^{\beta|m|} \geq A^4$. L'afirmació (b) també agafant Δ suficientment gran, i tenint en compte que com que μ és un retorn essencial llavors $I_{m,k} \subset \xi_\mu(\omega)$, i per tant $|\xi_\mu(\omega)| \geq \frac{e^{-|m|}}{m^2}$.

2. La demostració és idèntica al apartat 1, pero aquí, com que n no és un retorn, només podem asegurar la part (a) de la Proposició 3.5, i per tant $|(f_t^q)'(x)| \geq e^{-(\Delta+1)+c_0 q}$.

$\square$

Lema 3.18. *Si n és una situació de retorn per $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$, llavors:*

$$|\xi_n(\omega)| \geq e^{-\frac{\alpha n}{2}}$$

Demostració. Com que n és una situació de retorn, llavors no està en un període acotat del retorn previ de ω. En la secció 3.3 hem vist que per construcció dels intervals ω_k, el primer $\nu \leq n-1$ que sigui una situació de retorn essencial abans de n, amb $I_{m,k}^+$ de interval hoste, tenim que $\omega_\nu = \omega$, i per tant $I_{m,k} \subset \xi_\nu(\omega)$. Tenim dos casos:

- Suposem que ν és un component d'escapada, llavors $|m| = \Delta - 1$, i per tant existeix $a_* \in \omega$ tal que $|\xi_\nu(a_*)| = e^{-\Delta}$ ja que $I_{\Delta-1,k} \subset \xi_\nu(\omega)$.Llavors, $\xi_{\nu+1}(a_*) = f(\xi_\nu(a_*)) \geq 1 - 2e^{-2\Delta}$. Per tant si $n = \nu+1$, tenim que $|\xi_n(\omega)| \geq |\xi_n(a_*)| \geq 1 - 2e^{-2\Delta} \geq e^{-\frac{\Delta}{2}}$. Ara suposem que $n \geq \nu+2$:

  $$\xi_{\nu+2}(a_*) = f_{a_*}(\xi_{\nu+1}(a_*)) + f_2(\xi_{\nu+1}(a_*)) - f_2(\xi_{\nu+1}(a_*)).$$

  Com que $f_2(x)$ és decreixent per $x > 0$, $f_2(\xi_{\nu+1}(a_*)) \leq f_2(1-2e^{-2\Delta})$, a més per tot $y \in [-1,1]$, $f_{a_*}(y) - f_2(y) = (2-a_*)y^2 \leq 2 - a_*$. Per (3.7) tenim que $2 - a_* \leq 8e^{-4\Delta}$. Llavors ens queda:

  $$\xi_{\nu+2}(a_*) \leq f_2(1-2e^{-2\Delta}) + 8e^{-4\Delta} = 1 - 2(1-2e^{-2\Delta})^2 + 8e^{-2\Delta} = -1 + 4 \cdot 2e^{-2\Delta}$$

  Per inducció usant el mateix argument podem asegurar que per tot $k \geq 2$, com que -1+4 $\cdot\, 2e^{-2\Delta} \leq 1$, tenim que:

  $$\xi_{\nu+k}(a_*) \leq -1 + 4^{k-1} 2e^{-2\Delta}$$

  Llavors, si $-1 + 4^{n-\nu-1}2e^{-2\Delta} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \xi_n(a_*) \leq -\frac{1}{2}$ i per tant $|\xi_n(\omega)| \geq e^{-\frac{\Delta}{2}}$.Ens falta el cas en que $-1 + 4^{n-\nu-1}2e^{-2\Delta} > -\frac{1}{2}$. D'aquesta condició treiem que $2^{n-\nu} > e^{\Delta}$.

Pel Lema 3.16 tenim:

$$|\xi_n(\omega)| \geq \frac{1}{A^2}\cdot|(f_t^{n-\nu})'(x)|\cdot|\xi_\nu(\omega)| \geq \frac{1}{A^2}\cdot\frac{|(h^{-1})'(x)|}{|(h^{-1})'(y)|}\cdot|(g_t^{n-\nu})'(h^{-1}(x))|\cdot\frac{e^{-\Delta}}{(\Delta-1)^2}$$

per tot $t \in \omega$, on $x = \xi_n(t), y = f_t^{n-\nu}(x) = \xi_\nu(t)$. Pel Lema 3.3 obtenim:

$$|\xi_n(\omega)| \geq L \cdot \left[2 - \frac{3\pi}{\delta^3}(2-t)\right]^{n-\nu} \cdot \frac{e^{-\Delta}}{(\Delta-1)^2}$$

on:

$$L = \frac{1}{A^2}\sqrt{\frac{1-(\xi_n(t))^2}{1-(\xi_{n-\nu}(t))^2}}.$$

Podem asumir que $\xi_n(\omega) \subset U_1$, si no la conclusió és inmediata ja que $\xi_n(\omega)$ és un interval, per tant:

$$\begin{aligned}|\xi_n(\omega)| &\geq \frac{1}{A^2}\sqrt{1-\frac{1}{e^2}} \cdot \left[2 - \frac{3\pi}{\delta^3}(2-t)\right]^{n-\nu} \cdot \frac{e^{-\Delta}}{(\Delta-1)^2} \geq \\ &\geq \frac{4}{5A^2} \cdot \left[2 - \frac{3\pi}{\delta^3}(2-t)\right]^{n-\nu} \cdot \frac{e^{-\Delta}}{(\Delta-1)^2}.\end{aligned}$$

Com que $[2 - \frac{3\pi}{\delta^3}(2-t)] \geq e^{c_0}$ pel Lema 3.3, i $|\xi_n(\omega)| \leq 2$ obtenim: $e^{c_0(n-\nu)} \leq \frac{5A^2}{2}e^{\Delta}(\Delta-1)^2$,que implica que per Δ gran, tenim que $n-\nu \leq 2\Delta$. Llavors per l'última desigualtat que hem vist tenim finalment:

$$|\xi_n(\omega)| \geq \frac{2}{5A^2} \cdot 2^{n-\nu} \cdot \frac{e^{-\Delta}}{(\Delta-1)^2}.$$

Recordem que $2^{n-\nu} > e^{\Delta}$, per tant:

$$|\xi_n(\omega)| \geq \frac{2}{5A^2(\Delta-1)^2} \geq e^{-\frac{\Delta}{2}} \tag{3.16}$$

per Δ gran. Llavors per una N suficientment gran tal que $\forall n \geq N$ tinguem $e^{-\frac{\Delta}{2}} \geq e^{-\frac{-\alpha n}{2}}$

- ω_ν és un component de retorn. Pel Lema 3.17 agafant $\mu_0 = \nu, \mu_{s+1} = n$ i $(\mu_i)_{i=0,\ldots,s}$ com els retorns de ω després de ν, llavors si $s = 0$:

$$|\xi_n(\omega)| \geq e^{-6\beta|m|-\Delta}$$

i si $s > 0$:

$$|\xi_n(\omega)| = |\sigma_1| \cdot \prod_{i=1}^{s-1}\frac{|\sigma_{i+1}|}{|\sigma_i|} \cdot \frac{|\sigma_{s+1}|}{|\sigma_s|} \geq e^{-6\beta|m|} \cdot 1 \cdot e^{-\Delta}.$$

on $\sigma_i = |\xi_{\mu_i}(\omega)|$. Llavors per ambdós casos tenim:

$$|\xi_n(\omega)| \geq e^{-\frac{1}{4}|m|-\Delta} \geq e^{-\frac{1}{4}\alpha\nu-\Delta} \geq e^{-\frac{1}{4}\alpha n-\Delta} \geq e^{-\frac{\alpha n}{2}}$$

amb $N = N(\Delta)$ suficientment gran.

$\square$

Corol·lari 3.19. *Sigui n una situació de retorn per $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$ tal que ν, la situació de retorn anterior a n, és una situació d'escapada, llavors n és una situació de retorn essencial.*

Demostració. En l'anterior Lema, amb les condicions exposades, hem vist que $|\xi_n(\omega)| \geq e^{-\frac{\Delta}{2}}$, per tant $\xi_n(\omega)$ no està contingut en U_Δ, llavors conté almenys algun interval $I_{m,k}$. $\square$

Ara ja tenim les eines per demostrar la Proposició que ens demostra que les funcions D_{n-1} i ξ'_n estàn fitades pels intervals $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$:

Proposició 3.20. *Existeix una constant $C = C(\alpha - \beta)$ tal que si $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$, per $n \geq N$, i $\xi_n(\omega) \subset U_1$ llavors per tot $a, b \in \omega$:*

$$(a)\frac{|D_{n-1}(a)|}{|D_{n-1}(b)|} \leq C \qquad (b)\frac{|\xi'_n(a)|}{|\xi'_n(b)|} \leq C$$

Demostració. Associem a ω la successió de retorns $(\mu_j)_{j=1,\dots,s}$ amb els seus períodes acotats de longituds $(p_j)_{j=1,\dots,s}$ i de intervals hoste $I^+_{m_1,k_1}, \dots, I^+_{m_s,k_s}$, i per convenencia d'anotació posarem $\mu_0 = 1$, $p_0 = -1$ i $\mu_{s+1} = n$. Definirem $\sigma_j = \xi_{\mu_j}(\omega)$. Demostrarem (a) per casos:

1. $n \leq \mu_s + p_s$:
   Com que $D_{n-1}(a) = (f_a \circ f_a^{n-2})'(1) = f'_a(f_a^{n-1}(0)) \cdot f_a^{n-2}(1) = -2a\xi^{n-1}(a)D_{n-2}(a)$ podem escriure:

$$\frac{|D_{n-1}(a)|}{|D_{n-1}(b)|} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{|\xi_i(a)|}{|\xi_i(b)|}$$

   Pel Lema 3.11 i que:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{|\xi_i(a)|}{|\xi_i(b)|} \leq \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 + \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|}\right] \leq \exp\left\{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|}\right\}$$

   només hem de veure que:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|}$$

   està acotada per una constant que depèn de $\alpha - \beta$. Dividirem S en retorns, períodes acotats i òrbites lliures:

$$S'_j = \sum_{\mu_j+1}^{\mu_j+p_j} \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|}$$

$$S''_j = \sum_{i=\mu_j+p_j+1}^{\mu_{j+1}-1} \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|}$$

$$R_j = \frac{|\xi_{\mu_j}(a) - \xi_{\mu_j}(b)|}{|\xi_{\mu_j}(b)|}$$

per $j = 0, ..., s$. Primer estimarem S''_j. Per $j = 0, ..., s-1$ i $\mu_j + p_j + 1 \leq i \leq \mu_{j+1}$, pel Lema 3.16, ja que satisfà les condicions (a) i (b) de la Propositiò 3.6 per ser òrbita lliure, tenim per alguna $t \in \omega$:

$$\frac{|\xi_{\mu_{j+1}}(a) - \xi_{\mu_{j+1}}(b)|}{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|} \geq \frac{1}{A^2} \cdot |(f_{t_i}^{\mu_{j+1}-i})'(\xi_i(t))| > \frac{e^{c_0(\mu_{j+1}-i)}}{A^2}$$

on l'última igualtat es deguda a la Proposició 3.5 (b) ja que $(f^{\mu_j - 1})(\xi_i(t)) = f^{\mu_j}(t)$ és un retorn. Com que i és un moment lliure $|\xi_i(b)| \geq \delta = e^{-(\Delta+1)}$, obtenim:

$$\begin{aligned}\frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|} &\leq \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{\delta} = \frac{|\xi_{\mu_{j+1}}(a) - \xi_{\mu_{j+1}}(b)|}{\delta} \cdot \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_{\mu_{j+1}}(a) - \xi_{\mu_{j+1}}(b)|} \\ &\leq \frac{A^2}{\delta} e^{c_0(i-\mu_{j+1})} |\xi_{\mu_{j+1}}(a) - \xi_{\mu_{j+1}}(b)| \leq \frac{A^2}{\delta} \cdot e^{\frac{2}{3}(i-\mu_{j+1})} |\sigma_{j+1}|.\end{aligned}$$

Així:

$$\begin{aligned}S''_j &\leq \frac{A^2}{\delta} |\sigma_{j+1}| \sum_{i=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}-1} e^{\frac{2}{3}(i-\mu_{j+1})} \leq M_1 \frac{|\sigma_{j+1}|}{\delta} \\ &= M_1 \frac{|I_{m_{j+1}}|}{\delta} \frac{|\sigma_{j+1}|}{|I_{m_{j+1}}|} \leq M_2 \frac{|\sigma_{j+1}|}{|I_{m_{j+1}}|}\end{aligned}$$

Ara acotem R_j amb $j = 0, ..., s$:

$$R_j = \frac{|\xi_{\mu_j}(a) - \xi_{\mu_j}(b)|}{|\xi_{\mu_j}(b)|} \leq \frac{|\sigma_j|}{e^{-(m_j+1)}} \leq \frac{2|\sigma_j|}{|I_{m_j}|}$$

I per últim S_j. Per $\mu_j + 1 \leq i \leq \mu_j + p_j$:

$$\frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|} = \frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b) - \xi_{i-\mu_j}(b)|} \frac{|\xi_i(b) - \xi_{i-\mu_j}(b)|}{|\xi_i(b)|} \tag{3.17}$$

Per (CA):

$$|\xi_i(b) - \xi_{i-\mu_j}(b)| < e^{-\beta(i-\mu_j)}$$

i per tant:

$$|\xi_i(b)| \geq |\xi_{i-\mu_j}(b)| - e^{-\beta(i-\mu_j)} \geq e^{-\alpha(i-\mu_j)}(1 - e^{(\alpha-\beta)(i-\mu_j)}) \geq (1 - e^{\alpha-\beta})e^{-\alpha(i-\mu_j)}. \tag{3.18}$$

Així, el segon factor de (3.17) el podem acotar de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{|\xi_i(b) - \xi_{i-\mu_j}(b)|}{|\xi_i(b)|} &\leq \frac{e^{-\beta(i-\mu_j)}}{(1 - e^{-\alpha-\beta})e^{-\alpha(i-\mu_j)}} = (1 - e^{\alpha-\beta})^{-1} \cdot e^{(\alpha-\beta)(i-\mu_j)} \\ &= M_3 e^{(\alpha-\beta)(i-\mu_j)}\end{aligned}$$

Pel primer factor de (3.17) utilitzarem el Lema 3.16 per tenir una $t \in \omega$ tal que:

$$\frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_{\mu_j}(a) - \xi_{\mu_j}(b)|} \leq A^2 \cdot |(f_t^{i-\mu_j})'(\xi_{\mu_j}(t)) \leq A^2 |(f_t^{i-\mu_j-1})'(f_t(\xi_{\mu_j}(t)))| \cdot |f'_t(\xi_{\mu_j}(t))|$$

Aplicant el TVM, per alguna $x \in U_m^+$

$$\begin{aligned}|\xi_i(b) - \xi_{i-\mu_j}(b)| &= |f_b^{i-\mu_j-1}(f_b(\xi_{\mu_j}(b)) - f_b^{i-\mu_j-1}(f(0))| \\ &= |(f_b^{i-\mu_j-1})'(f_b(x))| \cdot |f_b(\xi_{\mu_j}(b)) - f_b(0)| \\ &= b|\xi_{\mu_j}(b)|^2 \cdot |(f_b^{i-\mu_j-1})'(f_b(x))|\end{aligned}$$

i pel Lema 3.11:

$$\begin{aligned}\frac{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|}{|\xi_i(b) - \xi_{i-\mu_j}(b)|} &\leq \frac{|\xi_{\mu_j}(a) - \xi_{\mu_j}(b)|}{b|\xi_{\mu_j}(b)|^2} A^2 \frac{|(f_t^{i-\mu_j-1})'(f_t(\xi_{\mu_j}(t))|}{|(f_b^{i-\mu_j-1})'(f_b(x))|} |f_t'(\xi_{\mu_j}(t))| \\ &\leq A^2 B_2 \frac{2|t|}{b} \frac{|\xi_{\mu_j}(t)|}{|\xi_{\mu_j}(b)|} \frac{|\xi_{\mu_j}(a) - \xi_{\mu_j}(b)|}{|\xi_{\mu_j}(b)|} \leq M_4 \frac{|\xi_{\mu_j}(a) - \xi_{\mu_j}(b)|}{|\xi_{\mu_j}(b)|}\end{aligned} \tag{3.19}$$

on $M_4 = M_4(\alpha - \beta)$. Llavors per (3.17), (3.18) i (3.19) tenim:

$$S_j' \leq M_5 \frac{|\sigma_j|}{|I_{m_j}|}$$

on hem utilitzat per 3.18 que $\alpha - \beta < 0$.Així, per $j = 1, ..., s$

$$S_{j-1}'' + S_j' + R_j \leq M_6 \frac{|\sigma_j|}{|I_{m_j}|}$$

on $M_6 = M_6(\alpha - \beta)$. Ara definim el conjunt:

$$N_m = \left\{ i \in \{1, .., s\} | m_i = m \right\}$$

Si $N_m \neq \emptyset$ i r_m =maxN_m, com que en el Lema 3.17 hem vist que $|\sigma_{j+1}| \geq 2|\sigma_j|$ tenim:

$$\sum_{j \in N_m} \frac{|\sigma_j|}{|I_m|} \leq \frac{|\sigma_{r_m}|}{|I_m|} \leq \frac{|I_{m,k}^+|}{|I_m|} \leq \frac{5}{m^2}$$

Llavors:

$$\begin{aligned}S = \sum_{j=1}^{s} S_{j-1}'' + S_j' + R_j &\leq M_6 \sum_{m: N_m \neq \emptyset} \sum_{j \in N_m} \frac{|\sigma_j|}{|I_m|} \leq 5M_6 \sum_{m: N_m \neq \emptyset} \frac{1}{m^2} \\ &\leq 5M_6 \sum_{m=\Delta}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty\end{aligned}$$

2. $n \geq \mu_s + p_s + 1$.
   Diferenciarem un altre cop dos casos:

   - Si $|\xi_{n-1}(\omega)| \leq e^{-2\Delta}$. Llavors pel Lema 3.16 per $\mu_s + p_s + 1 \leq i \leq n$ tenim:

     $$\frac{|\xi_{n-1}(a) - \xi_{n-1}(b)|}{|\xi_i(a) - \xi_i(b)|} \geq \frac{1}{A^2} \cdot |(f_t^{n-1-i})'(\xi_i(t))|, \ t \in \omega$$

Com que no podem garantir que $\xi_{n-1}(t) \in U_{\Delta-1}$ només podem aplicar el apartat (a) de la Proposició 3.5 per obtenir que $|(f_t^{n-1-i})'(\xi_i(t))| \geq \delta e^{c_0(n-1-i)}$. També sabem que i és un moment lliure ($|\xi_i(b)| \geq \delta$) i per tant:

$$\frac{|\xi_i(a)-\xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|} \leq \frac{|\xi_i(a)-\xi_i(b)|}{\delta} = \frac{|\xi_{n-1}(a)-\xi_{n-1}(b)|}{\delta} \cdot \frac{|\xi_i(a)-\xi_i(b)|}{|\xi_{n-1}(a)-\xi_{n-1}(b)|}$$
$$\leq \frac{A^2}{\delta^2} e^{c_0(i-n+1)} |\xi_{n-1}(a)-\xi_{n-1}(b)| \leq A^2 \cdot \frac{e^{-2\Delta}}{\delta^2} \cdot e^{\frac{2}{3}(i-n+1)}$$

i per tant:

$$S''_s = \sum_{i=\mu_s+p_s+1}^{n-1} \frac{|\xi_i(a)-\xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|} \leq M_7.$$

Així, S està acotada per una constant que depén de $\alpha-\beta$ i ja ho tindríem.

- Si $|\xi_{n-1}(\omega)| \geq e^{-2\Delta}$. Llavors si $k_1 \geq \mu_s+p_s+1$ és el primer enter tal que $|\xi_{k_1}(\omega)| \geq e^{-2\Delta}$, k_1 està ben definit. Per tant per $i = \mu_s+p_s+1, ..., k_1-1$, $|\xi_i(\omega)| \leq e^{-2\Delta}$. Així, pel cas anterior podem obtenir una cota de distorsiò per a:

$$\frac{|D_{k_1-1}(a)|}{|D_{k_1-1}(b)|} \leq M_8.$$

Ara considerem el conjunt $H = \{k_1 \leq i < k_2 | \xi_i(b) \notin U_1\}$, que pot ser buit. Llavors:

$$S''_{s,2} = \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \frac{|\xi_i(a)-\xi_i(b)|}{|\xi_i(b)|} \leq 3\sum_{i=k_1}^{k_2-1} |\xi_i(a)-\xi_i(b)| \quad \text{pel Lema 3.16}$$
$$\leq 3\sum_{i=k_1}^{k_2-1} \frac{A^2}{|(f_t^{n-i})'(\xi_i(t))|} \cdot |\xi_n(a)-\xi_n(b)| \quad \text{per la Proposicio 3.5}$$
$$\leq 3\sum_{i=k_1}^{k_2-1} \frac{5A^2}{4} e^{-(n-i)\frac{2}{3}} |\xi_n(\omega)| < \infty$$

Si $k_2 = n$, la Ja ho tindríem. En cas de que no escribim:

$$\frac{|D_{n-1}(a)|}{|D_{n-1}(b)|} = \frac{|(f_a^{n-k_2})'(x)|}{|(f_b^{n-k_2})'(y)|} \cdot \frac{|D_{k_2-1}(a)|}{|D_{k_2-1}(b)|}$$

on $x = \xi_{k_2}(a)$ i $y = \xi_{k_2}(b)$. Si no existeix cap $i \geq k_1$ tal que $\xi_i(b) \notin U_1$ agafem $k_2 = k_1$. Observem que només ens queda acotar el segon factor aixi que ho dividim en dos casos:

  - $\xi_{k_2}(a) \geq \frac{1}{2}$. Llavors , com que $\xi_{k_2}(b) < \frac{1}{e}$, tenim $|\xi_{k_2}(a)-\xi_{k_2}(b)| \geq \frac{1}{10}$. A més, pel Lema 3.16 i la Proposició 3.5:

$$|\xi_n(\omega)| \geq \frac{1}{A^2} |(f_t^{n-k_2})'(\xi_i(t))| \frac{1}{10} \geq \frac{4}{5} e^{(n-k_2)\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{10A^2}.$$

Per tant, com que $|\xi_n(\omega)| \leq 1$, tenim:

$$\begin{aligned} A^2 \frac{25}{2} &\geq e^{(n-k_2)\frac{2}{3}} \\ \log \frac{25A^2}{2} &\geq (n-k_2)\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}\log \frac{25A^2}{2} &\geq n-k_2 \end{aligned}$$

i tenint en compte que $|(f_a^{n-k_2})'(x)| \leq 4^{n-k_2}$ i $|(f_b^{n-k_2})'(y)| \geq \frac{4}{5}e^{\frac{2}{3}(n-k_2)}$, ens queda:

$$\frac{|(f_a^{n-k_2})'(x)|}{|(f_b^{n-k_2})'(y)|} \leq M_9$$

– $|\xi_{k_2}(a)| \leq \frac{1}{2}$. Llavors:

$$\frac{|(f_a^{n-k_2})'(x)|}{|(f_b^{n-k_2}(y)|} = L \cdot \frac{|(g_a^{n-k_2})'(h^{-1}(x))|}{|(g_b^{n-k_2})'(h^{-1}(x))|}$$

on:

$$L = \sqrt{\frac{1-(f_a^k(x))^2}{1-x^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-y^2}{1-(f_b^k(y))^2}} \leq \frac{4}{3}$$

i pel Lema 3.3 tenim:

$$\frac{|(g_a^{n-k_2})'(h^{-1}(x))|}{|(g_b^{n-k_2})'(h^{-1}(x))|} \leq \left[\frac{2+\frac{3\pi}{\delta^3}(2-a)}{2-\frac{3\pi}{\delta^3}(2-a)}\right]^{n-k_2}$$

Com que $|\xi_{k_1}(\omega)| \geq e^{-2\Delta}$ podem treure que $n-k_1 \leq 4\Delta$ amb una Δ suficientment gran, i per tant $n-k_2 \leq 4\Delta$, així, per lèlecció de a que hem fet a 3.7, tenim que:

$$\frac{|(f_a^{n-k_2})'(x)|}{|(f_b^{n-k_2})'(y)|} \leq \frac{8}{3}$$

$\square$

3.7 Mesura del conjunt Ω_∞

En aquesta secció volem demostrar la Proposició 3.9, és a dir, que tenim la desigualtat:

$$|\Omega_\infty| \geq (1-\rho)|\Omega|.$$

Per fer-ho demostrarem les següents propietats per $n \geq N$:

1. $|\Omega_{n-1} \setminus \Omega'_n| \leq e^{-\epsilon n}|\Omega_{n-1}|$.
2. $|\Omega'_n \setminus \Omega_n| \leq e^{-\epsilon n}|\Omega|$.

on $\Omega'_n = \cup\{\omega|\omega \in \mathcal{P}'_n\}$.

Demostrant aquestes desigualtats, com que $|\Omega_{n-1} \setminus \Omega_n| = |\Omega_{n-1} \setminus \Omega'_n| + |\Omega'_n \setminus \Omega_n|$, obtindríem:

$$|\Omega_n| \geq (1 - e^{-\epsilon n})|\Omega_{n-1}| - e^{-\epsilon n}|\Omega|$$

Per l'elecció de la constant ϵ i fixant un enter n_0 tal que:

$$\prod_{i=n_0}^{\infty}(1 - e^{\epsilon i}) \geq 1 - \frac{\rho}{2}$$

i

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} e^{-\epsilon i} \leq \frac{\rho}{2}$$

. Ens queda que per tot $n > n_0$:

$$|\Omega_n| \geq \left[\prod_{i=n_0}^{\infty}(1 - e^{-\epsilon i}) - \sum_{i=n_0}^{\infty} e^{-\epsilon i}\right]|\Omega| \geq (1 - \rho)|\Omega|$$

i ja hauríem demostrat la Proposició 3.9.

Proposició 3.21. *Per $n \leq N$ tenim que:*

$$|\Omega_{n-1} \setminus \Omega'_n| \leq e^{-\epsilon n}|\Omega_{n-1}|$$

Demostració. Agafem $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$ i denotem per $\omega_{exc} = \{a \in \omega | a \notin \Omega'_n\}$. Si n no és una situació de retorn essencial per ω, llavors per construcció tenim que $\omega_{exc} = \emptyset$. Quan n és una situació retorn essencial, tenim que $\xi_n(\omega_{exc}) \subset U_{[\alpha n]-1}$ i per tant:

$$|\xi_n(\omega_{exc})| \leq 2e^{-\alpha n+1} \tag{3.20}$$

Ara denotem per $\hat{\omega}{=}\xi_n^{-1}(U_1) \cap \omega$,que és un interval degut a que $\xi_n|_\omega$ és un homeomorfisme. Pel teorema del valor mitjà ens queda la desigualtat:

$$\frac{|\omega_{exc}|}{|\omega|} \leq \frac{|\omega_{exc}|}{|\hat{\omega}|} = \frac{|\xi'_n(t_1)|}{|\xi'_n(t_2)|} \cdot \frac{|\xi_n(\omega_{exc})|}{|\xi_n(\hat{\omega})|}$$

on $t_1 \in \hat{\omega}$ i $t_2 \in \omega_{exc} \subset \hat{\omega}$ ja que per N gran tenim $U_{[\alpha n-1]} \subset U_1$. Per 3.20 i la Proposició 3.20, ens queda:

$$\frac{|\omega_{exc}|}{|\omega|} \leq 2C \cdot \frac{e^{-\alpha n+1}}{|\xi_n(\hat{\omega})|}.$$

Ara pel Lema 3.18,i que si $\hat{\omega} \neq \omega$ implica que $|\xi_n(\hat{\omega})| \geq \frac{1}{e} - e^{-\Delta}$, tenim $|\xi_n(\hat{\omega})| \geq e^{-\frac{\alpha n}{2}}$ per N gran. Llavors obtenim:

$$\frac{|\omega_{exc}|}{|\omega|} \leq 2Ce^{-\frac{\alpha n}{2}+1} \leq e^{-\frac{\alpha n}{3}}.$$

Per acabar, com que $\mathcal{P}_{n-1}$ és la partició de Ω_{n-1} obtenim el resultat final:

$$|\Omega_{n-1} \setminus \Omega'_n| = \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{n-1}} |\omega_{exc}| \leq \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{n-1}} e^{-\frac{\alpha n}{3}}|\omega| \leq e^{-\frac{\alpha n}{3}}|\Omega_{n-1}|.$$

□

Per estimar el valor de $|\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}|$ definirem una nova funció T_n que sumarà el número d'iteracions entre una situació d'escapada i la següent, però abans farem una divisió de la òrbita $\{\xi_k(a) : k = 1, ...n-1\}$:

Sigui $a \in \Omega'_n$ tal que $a \in \omega_k \in \mathcal{P}_k$ per $k = 1, ..., n-1$, i recordem que per construcció ω_k és únic. Denotem per $\nu_1 < ... < \nu_s$ la successió de situacions de retorns per a, amb intervals hoste $I^+_{m_1,k_1}, ..., I^+_{m_s,k_s}$. Per convenencia de notació posarem $\nu_0 = 1$ i $\nu_{s+1} = n$. Dividim l'òrbita $\{\xi_k(a) : k = 1, ...n-1\}$ en moments $O_i = O_i(a)$ que són de la forma:

$$
\begin{aligned}
&O_0 = \{\nu_{l_0}, ..., \nu_{l_1} - 1\} \ (l_0 = 0)\\
&O_1 = \{\nu_{l_1}, ..., \nu_{l_2} - 1\}\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\
&O_r = \{\nu_{l_r}, ..., \nu_{l_{r+1}} - 1\} \ (l_{r+1} = s+1)
\end{aligned}
$$

tal que:

$$
\begin{aligned}
&|m_l| = \Delta - 1 \text{ per } l_0 \leq l \leq l_1\\
&|m_l| \geq \Delta \text{ per } l_1 \leq l \leq l_2\\
&\quad\vdots\\
&|m_l| = \Delta - 1 \text{ per } l_{2i} \leq l \leq l_{2i+1} - 1\\
&|m_l| \leq \Delta \text{ per } l_{2i+1} \leq l \leq l_{2i+2} - 1\\
&\quad\vdots\\
&|m_l| = \Delta - 1 \text{ per } l_r \leq l \leq l_{r+1} \text{ si r es par.}\\
&|m_l| \geq \Delta \text{ per } l_r \leq l \leq l_{r+1} \text{ si r es senar.}
\end{aligned}
$$

Em resum, quan j és par, O_j està format per les situacions de retorn tal que és produeix una situació d'escapada, en canvi quan j és senar està format pels retorns essencials i inessencials. Per tant, O_{2i} per $i = 0, ..., [\frac{r}{2}]$ és una part de la òrbita lliure associada a a, i la definirem com períodes d'escapada.

Denotem $|O_i|$ com la longitud del conjunt O_i, i definim la funció mencionada abans:

$$T_n(a) := \sum_{i=0}^{r_1} |O_{2i+1}|, \quad r_1 = \left[\frac{r-1}{2}\right].$$

Recordem que $F_n(a)$ era la longitud de la òrbita lliure associada a a, i com que O_{2i} és una peça d'aquesta òrbita lliure tenim que:

$$n - T_n(a) = \sum_{i=0}^{r_1} |O_{2i}| \leq F_n(a).$$

Llavors, si demostrem que:

$$|\{a \in \Omega'_n : T_n(a) \geq \alpha n\}| \leq e^{-\epsilon n} |\Omega| \tag{3.21}$$

ja haurem demostrat que $|\{a \in \Omega'_n : F_n(a) \leq (1-\alpha)n\}| \leq e^{-\epsilon n}|\Omega|$.

Però per realitzar aquest plantejament un es podría preguntar com de freqüents són les situacions de retorn essencials per a poder fer aquesta divisió de la òrbita del punt crític. Per això tenim el següent Lema:

Lema 3.22. *Suposem que ν_0 és un retorn essencial per $\omega \in \mathcal{P}_{\nu_0}$ amb $I_{m_0,k_0} \subset |\xi_{\nu_0}|$ tal que $|m_0| \geq \Delta$. Llavors la següent situació de retorn essencial ν_1 satisfà:*

$$\nu_1 - \nu_0 < 5|m|$$

Demostració. Tinguem la successió de retorns inessencials $\nu_0 = \mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_s < \mu_{s+1} = nu_1$ tal que per $1 \leq i \leq s$ i els seus intervals hoste $I^+_{m_1,k_1}, ..., I^+_{m_s,k_s}$. Definim $\sigma_i = \xi_{\mu_i}(\omega)$, i $q_i = \mu_{i+1} - (\mu_i + p_i + 1)$. Ho farem per casos:

- Primer farem el cas $s > 0$. Llavors per (1) del Lema 3.17 tenim:

$$|\sigma_1| \geq e^{c_0 q_0 - 6\beta|m_0|} \tag{3.22}$$

$$\frac{|\sigma_{i+1}|}{|\sigma_i|} \geq e^{c_0 q_i} \cdot e^{(1-6\beta)|m_i|} \textit{ per } 1 \leq i \leq s-1 \tag{3.23}$$

Llavors escribint

$$|\sigma_s| = |\sigma_1| \cdot \prod_{i=1}^{s-1} \frac{|\sigma_{i+1}|}{|\sigma_i|}$$

i tenint en compte que $\sigma_s \subset I^+_{m_s,k_s}$, i per tant $|\sigma_s| \leq e^{-(\Delta+1)}$ (ja que $|m_s| \geq \Delta$),amb (3.22) i (3.23), tenim que:

$$\exp\left\{ -6\beta|m_0| + c_0 q_0 + \sum_{i=1}^{s-1} c_0 q_i + (1-6\beta)|m_i| \right\} \leq \exp\{-(\Delta+1)\}$$

i llavors:

$$c_0 q_0 + \sum_{i=1}^{s-1} c_0 q_i + (1-6\beta)|m_i| \leq 6\beta|m_0| - (\Delta+1) \tag{3.24}$$

Per 2 del Lema 3.17

$$\frac{|\sigma_{s+1}|}{|\sigma_s|} \geq e^{c_0 q_s - \Delta} \cdot e^{(1-6\beta)|m_s|}. \tag{3.25}$$

Pel mateix Lema tenim que $|\sigma_s| \geq 2^{s-1} \geq |\sigma_1|$. Com que μ_{s+1} és una situació de retorn essencial, tant per situació d'escapada com per return essencial sabem almenys que el seu interval hoste $I_{m_{s+1},k_{s+1}} \subset (-e^{-(\Delta-1)}, e^{-(\Delta-1)}) \subset [-1,1]$. Juntant aquests dos resultats:

$$2 \geq |\sigma_{s+1}| \geq |\sigma_1| \cdot \frac{|\sigma_{s+1}|}{|\sigma_s|}.$$

Per (3.22) obtenim que $|\sigma_1| \geq e^{6\beta|m_0|}$ i per (3.25) obtenim:

$$\exp\{-6\beta|m_0| + c_0 q_s - \Delta + (1-6\beta)|m_s|\} \leq 2 \leq e^1$$

i per tant:

$$c_0 q_s + (1-6\beta)|m_s| \leq \Delta + 1 + 6\beta|m_0|.$$

Per 3.24 i la última inequació ens queda:

$$c_0 q_0 + \sum_{i=1}^{s} c_0 q_i + (1-6\beta)|m_i| \leq 12\beta|m_0|. \tag{3.26}$$

Per la secció 3.4 sabem que $p_i < 3|m_i| \leq 4(1-6\beta)|m_i|$ (recordem que β és suficientment petita), i llavors ens dóna:

$$\nu_1 - \nu_0 \leq \sum_{i=0}^{s} p_i + q_i \leq 3|m_0| + 4\left[\sum_{i=1}^{s} c_0 + (1-6\beta)|m_i|\right].$$

Per (3.26) obtenim:

$$\nu_1 - \nu_0 \leq 3|m_0| + 48\beta|m_0| < 4|m_0|$$

ja que $\beta < \frac{1}{48}$.

- Cas que $s = 0$. Pel (2) del Lema 3.17, tenim:

$$\frac{|\sigma_1|}{|\sigma_0|} \geq e^{c_0 q_0 - \Delta - 5\beta|m_0|}$$

o per tant, com que $|\sigma_1| \leq 2$ ($\xi_{\mu_1} \subset [-1, 1]$)tenim que:

$$c_0 q_0 \leq 6\beta|m_0| + \Delta + 1$$

i aplicant $c_0 \geq \frac{2}{3}$, tenim: $q_0 \leq 9\beta|m_0| + \frac{3}{2}\Delta$, amb una Δ suficientment gran. Llavors:

$$\nu_1 - \nu_0 \leq p_0 + q_0 \leq 3|m_0| + 9\beta|m_0| + \frac{3}{2}\Delta < 4|m_0| + \Delta < 5|m_0|.$$

□

Anem a estudiar millor la funció T_n i com la podem escriure d'una altra manera per així poder simplificar la demostració de 3.21. Tinguem la successió de situacions d'escapada $1 = e_0 < e_1 < ... < e_r < e_{r+1} = n$ i definim per $i = 1, ..., r$:

$$E_i(a) = e_i - \hat{\mu}_i$$

on $\hat{\mu}_i$ és la situació de retorn següent a e_{i-1}. Evidentment, si la següent situació de retorn és una situació d'escapada llavors $\hat{\mu}_i = e_i$ i per tant $E_i(a) = 0$. En canvi, si $\hat{\mu}_i$ és un retorn (essencial o inessencial) llavors $\{\hat{\mu}_i, ..., e_{i-1}\} = O_{2j-1}$ per una certa j, i per tant $E_i = |O_{2j+1}|$. Ara podem esciure T_n de la forma:

$$T_n(a) = E_1(a) + ... + E_{r+1}(a).$$

En anteriors apartats hem vist que la successió de situacions de retorns associada a a és igual per tot $a \in \omega$. Per tant, si tenim $\omega \in \mathcal{P}'_n$ com que e_i és unasituació de retorn essencial per tot $i = 1, ..., r$ per construcció tenim una successió de intervals components d'escapada $\omega = \omega_{e_{r+1}} \subset \omega_{e_r} \subset ... \subset \omega_{e_0} = \Omega$. Per notació ficarem $\omega^i = \omega_{e_i}$, llavors E_i és una funció constant en cada interval ω^i per cada $i = 1, ..., r$ podem esciure:

$$T_n(\omega) = E_1(\omega^1) + ... + E_{r+1}(\omega^{r+1})$$

Completant per $j = r + 2, ..., n$ de la forma:

$$\begin{aligned} e_i &= n \\ \hat{\mu}_i &= n \\ \omega^i &= \omega \\ E_i(\omega^i) &= 0. \end{aligned}$$

i per tant podem definir de forma general les funcions T_j per $1 \leq j \leq n$ com:

$$T_j(\omega) = \sum_{i=1}^{j} E_i(\omega^i)$$

.

Si calculem la següent acotació de la integral:

$$\int_{\Omega'_n} e^{\gamma T_n(a)} da \leq e^{\epsilon n} |\Omega| \tag{3.27}$$

serà suficient per demostrar (3.21), cota que serà més fàcil gràcies al canvi d'escriptura que hem fet a T_n. Veiem com:

Definim una nova serie de conjunts per $i = 1, ..., n$ a partir de les ω^i de la forma:

$$Q_i = \cup\{\omega^i : \omega \in \mathcal{P}'_n\}$$

i la seva partició:

$$\mathcal{Q}_i = \{\omega^i : \omega \in \mathcal{P}'_n\}$$

És evident que $Q_0 = \Omega$, $\mathcal{Q}_0 = \{\Omega\}$ i que $Q_n = \Omega'_n$, $\mathcal{Q}_n = \mathcal{P}'_n$. Per la construcció de la funció T_i, només depén dels conjunts Q_i. Per cada component $\omega \subset Q_{i-1}$ definim:

$$< \omega >= \omega \cap Q_i$$

i

$$\mathcal{Q}(\omega') = \{\omega'' \in \mathcal{Q}_i : \omega'' \subset \omega'\}$$

.

Lema 3.23. *Si $t > 10|m|$:*

$$|\{a \in < \omega_{m,k} >: E_i(a) = t\} \leq e^{-2\gamma t} |\omega_{m,k}|$$

Demostració. Si $\omega_{m,k}$ és un component d'escapada llavors és evident que $\{a \in <\omega_{m,k}>: E_i(a) = t\} = \emptyset$, i per tant ja ho tindríem. Per tant suposem que $\omega_{m,k}$ no és un component d'escapada. Escollim $\omega \in \mathcal{Q}(\omega_{m,k})$ amb situació d'escapada $e_i = \hat{\mu}_i + t$, i denotem per $\hat{\mu}_i = \nu_0(\omega) < \nu_1(\omega) < ... < \nu_s(\omega)$ els retorns essencials de ω, i per $\omega_i = \omega_{(m_0,k_0),(m_1,k_1),...,(m_i,k_i)}$ l'interval que pertany a $\mathcal{P}_{\nu_i(\omega)}$, que conté ω i que compleix:

$$I_{m_i,k_i} \subset \xi_(\omega_i) \subset I^+_{m_i,k_i}$$

Per la secció 3.3 sabem que ω_i està ben definit per $0 \leq i \leq s$, llavors per un interval fixat ω_s tenim:

$$\frac{|\omega_s|}{|\omega_0|} = \prod_{i=1}^{s} \frac{|\omega_i|}{|\omega_{i-1}|} \leq \prod_{i=1}^{s} \frac{|\omega_i|}{|\hat{\omega}_{i-1}|}$$

on $\hat{\omega}_{i-1} = \xi^{-1}_{\nu_i}(U_1) \cap \omega_{i-1}$ i per tant $\hat{\omega}_{i-1} \subset \omega_{i-1}$. Pel Teorema del Valor Mitjà i la Proposició 3.20 tenim que:

$$\frac{|\omega_s|}{|\omega_0|} \leq \prod_{i=1}^{s} C \frac{|\xi_{\nu_i}(\omega_i)|}{|\xi_{\nu_i}(\hat{\omega})_{i-1}|}$$

Sabem que $|\xi_i(\omega_i)| \leq |I^+_{m_i,k_i}| \leq \frac{5|I_{m_i}|}{m_i^2} \leq \frac{5e^{-|m_i|}}{m_i^2}$ i pel Lema 3.17 tenim que $|\xi_{\mu_i}(\omega_{m,k})| \geq e^{qc_0 - 6\beta|m|} \geq e^{-6\beta|m|}$. Obtenim:

$$\frac{|\omega_s|}{|\omega_0|} \leq \prod_{i=1}^{s} \frac{5C}{|m_i|^2} \cdot \frac{e^{-|m_i|}}{e^{6\beta|m_{i-1}|}} \leq \prod_{i=1}^{s} \exp\{6\beta|m_{i-1}| - |m_i|\}$$

per Δ prou gran ja que $|m| \geq \Delta$ i podem acotar $\frac{5C}{|m_i|^2} \leq 1$.Així:

$$|\omega_s| \leq \exp\left\{ -(1-6\beta)\sum_{i=1}^{s} |m_i| + 6\beta|m| \right\} |\omega_{m,k}|$$

Fixada una M i una s denotem per $\eta_s(M)$ el número de components $\omega_{(m_0,k_0),...,(m_s,k_s)} \subset \omega_{m,k}$ sense cap situació d'escapada desprès de s, que és una situació de retorn essencial i $|m_1| + ... + |m_s| = M$, i per $\eta = \eta_1 + ... + \eta_s$, $s \geq 0$. Llavors, denotant per X_M el conjnt de paràmetres $a \in \omega_{m,k}$ tal que després d'un retorn essencial s, a no té cap situació d'escapada i $a \in \omega_{(m_0,k_0),...,(m_s,k_s)}$ amb $|m_1| + ... + |m_s| = M$,, tenim:

$$|X_M| \leq \eta(M) \exp\left\{ -(1-6\beta)M + 5\beta|m| \right\} |\omega_{m,k}| \leq \eta(M) \exp\left\{ -7M/8 + 6\beta|m| \right\} |\omega_{m,k}| \tag{3.28}$$

Fixant $u_1 \geq \Delta, ..., u_s \geq \Delta$ tenim com a molt $2^s u_1^2 \cdot ... \cdot u_s^2 \leq 2^s e^{(u_1+...+u_s)/20}$ components de la forma $\omega_{(m_0,k_0),...,(m_s,k_s)}$ amb $|m_1| = u_1, ..., |m_s| = u_s$, quan Δ és un nombre prou gran tal que si $|u_i| \geq \Delta$ implica que $u_i^2 \leq e^{u_i/20}$.Llavors per $u_i \geq \Delta$, tenim que $s\Delta \leq u_1 + ... + u_s$ i per tant $s \leq \frac{M}{\Delta}$, que ens dóna:

$$\eta_s(M) \leq \rho_s(M) 2^{\frac{M}{\Delta}} e^{\frac{M}{20}} \leq \rho_s(M) e^{\frac{M}{16}} \tag{3.29}$$

per Δ prou gran i on $\rho_s(M)$ és el nombre de solucions de l'equació:

$$M = u_1 + ... + u_s, \quad u_i \in \mathbb{N}$$

Per tant, de combinatoria sabem que:

$$\rho_s(M) = \binom{M+s-1}{s-1} \leq \binom{M+M/\Delta-1}{M/\Delta-1} \tag{3.30}$$

L'aproximació de Stirling és una aproximació pels factorials de la forma:

$$\vartheta! \sim \sqrt{2\pi\vartheta}(\vartheta/e)^{\vartheta}$$

Per tant podríem treure les fites:

$$\sqrt{2\pi\vartheta}\cdot\vartheta^{\vartheta}\cdot e^{-\vartheta} \leq \vartheta! \leq \sqrt{2\pi\vartheta}\cdot\vartheta\cdot e^{-\vartheta}\left(1+\frac{1}{4\vartheta}\right)$$

i de (3.30):

$$\rho_s(M) \leq \frac{(M+M/\Delta-1)^{(M+M/\Delta-1)}}{M^M(M/\Delta-1)^{(M/\Delta-1)}} \leq (1+L_1(\Delta))^M$$

on $L_1(\Delta)\to 0$ quan $\Delta\to\infty$. Agafant Δ prou gran podem posar a partir de (3.28):

$$\eta(M) \leq \sum_{s=1}^{M/\Delta}\rho_s(M)e^{M/16} \leq \frac{M}{\Delta}(1+L_1(\Delta))^M e^{M/16} \leq e^{M/8}.$$

Llavors per (3.28) tenim:

$$|X_M| \leq \exp\{-3M/4+6\beta|m|\}|\omega_{m,k}|$$

Agafant:

$$Y_{M,t} = X_M \cap \{a \in <\omega_{m,k}>: E_i(a)=t\}.$$

Si $t\geq 5|M|+5|m|$ tenim que $Y_{M,t}=\emptyset$. A més, per $a\in Y_{M,t}$, amb $a\in\omega_{(m_1,k_1),\dots,(m_s,k_s)}$ i $\nu_{s+1}=e_i=\hat{\mu}_i+t$ situació d'escapada, utilitzant el Lema 3.22:

$$t = e_i-\hat{\mu}_i = \sum_{i=0}^{s}\nu_{i+1}-\nu_i \leq 5\sum_{i=0}^{s}|m_i| \leq 5M+5|m|$$

Llavors:

$$\begin{aligned}|\{a\in<\omega_{m,k}>: E_i(a)=t\}| &= \sum_{5M+5|m|\geq t}|Y_{M,t}| \leq e^{6\beta|m|}|\omega_{m,k}|\sum_{M\geq t/5-|m|}e^{-3M/4}\\ &\leq L_1 e^{6\beta|m|}|\omega_{m,k}|\exp\{-3t/20+3|m|/4\}.\end{aligned}$$

Finalment, per $t>10|m|$ i per Δ prou gran,

$$|\{a\in<\omega_{m,k}>: E_i(a)=t\}| \leq e^{-3t/20+|m|}|\omega_{m,k}| \leq e^{-2\gamma t}|\omega_{m,k}|$$

$\square$

Lema 3.24. *Per i=1,...,n i $\omega^{i-1} \in \mathcal{Q}_{i-1}$ tenim que per $\gamma = \frac{1}{40}$:*

$$\int_{<\omega^{i-1}>} e^{\gamma E_i(a)} da \leq e^{\epsilon} |\omega^{i-1}|.$$

Demostració. Sigui e_{i-1} el moment d'escapada de ω^{i-1} i denotem $\hat{\mu_i}$ la situació de retorn posterior a e_{i-1}. Si $\hat{\mu_i} = n$ llavors per tot $a \in \omega^{i-1}$ tenim $E_i(a) = e_i(a) - \hat{\mu_i} = 0$, ja que $\hat{\mu_i} \leq e_i(a) \leq n$, i ja ho tindríem. Per tant només ens queda veure el cas de $\hat{\mu_i} < n$: Tenim una situació de retorn per ω^{i-1} en el moment $\hat{\mu_i}$. Pel Corol·lari 3.19 obtenim que aquesta situació de retorn és essencial. Per la construcció dels conjunts $\Omega_{\hat{\mu_i}}$, ω^{i-1} està subdividit en intervals disjunts $\omega_{m,k}$ i pels intervals que és mantenen, és a dir, els que satisfàn $(BA_{\hat{\mu_i}})$, també satisfàn la condició del Lema 3.23. Ara denotem per $\mathcal{I}$ el conjunt de índexs (m,k) tal que $\omega_{m,k} \in \mathcal{P}_{\hat{\mu_i}}$ tenim:

$$\int_{<\omega^{i-1}>} e^{\gamma E_i(a)} da = \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} \int_{<\omega_{m,k}>} e^{\gamma E_i(a)} da =$$
$$= \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} \sum_{t\geq 0} e^{\gamma t} |\{a \in <\omega_{m,k}>: E_i(a) = t\}| = S_1 + S_2 + S_3$$

on

$$S_1 = \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} |\{a \in <\omega_{m,k}>: E_i(a) = 0\}|$$
$$S_2 = \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} \sum_{t=1}^{10|m|} e^{\gamma t} |\{a \in <\omega_{m,k}>: E_i(a) = t\}|$$
$$S_3 = \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} \sum_{t>10|m|} e^{\gamma t} |\{a \in <\omega_{m,k}>: E_i(a) = t\}|$$

Tenim que:

$$S_1 \leq \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} |<\omega_{m,k}>| \leq \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} |\omega_{m,k}| \leq |\omega^{i-1}| \tag{3.31}$$

Ara, per S_2, com que $a \in <\omega_{m,k}>$, $E_i(a) > 0$ només si $\omega_{m,k}$ no és un component d'escapada, i per tant $|m| \geq \Delta$. Ens queda llavors la següent cota:

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_{\substack{(m,k)\in\mathcal{I} \\ |m|\leq\Delta}} \sum_{t=1}^{10|m|} e^{\gamma t} |<\omega_{m,k}>| \leq \sum_{\substack{(m,k)\in\mathcal{I} \\ |m|\leq\Delta}} e^{10|m|\gamma} \sum_{t=1}^{10|m|} |<\omega_{m,k}>| \leq \\ &\leq \sum_{\substack{(m,k)\in\mathcal{I} \\ |m|\geq\Delta}} 10|m| e^{10\gamma|m|} |\omega_{m,k}| \end{aligned} \tag{3.32}$$

Definint $\hat{\omega}^{i-1} = \xi_{\hat{\mu_i}}^{-1}(U_1) \cap \omega^{i-1}$, i tenint en compte que $\frac{\omega_{m,k}}{\omega^{i-1}} \leq \frac{\omega_{m,k}}{\hat{\omega}^{i-1}}$, pel teorema del valor mitjà tenim:

$$\frac{|\omega_{m,k}|}{|\hat{\omega}^{i-1}|} = \frac{|\xi'_{\mu_i}(t_2)|}{|\xi'_{\mu_i}(t_1)|} \cdot \frac{|\xi_{\hat{\mu_i}}(\omega_{m,k})|}{|\xi_{\hat{\mu_i}}(\hat{(\omega)}^{i-1})|}$$

i per la Proposició 3.20 ens queda:

$$\frac{|\omega_{m,k}|}{|\omega^{i-1}|} \leq C \cdot \frac{|\xi_{\hat{\mu}_i}(\omega_{m,k})|}{|\xi_{\hat{\mu}_i}(\omega^{i-1})|}$$

Ara, tenint en compte que per $|m| \geq \Delta$, $|\xi_{\hat{\mu}_i}(\omega_{m,k})| \leq \frac{5e^{-|m|}}{m^2}$, com que $\xi_{\hat{\mu}_i}(\omega_{m,k}) \subset I^+_{m,k}$, i que $|\xi_{\hat{\mu}_i}(\omega^{i-1})| \geq e^{-\frac{\Delta}{2}}$ per (3.33), ja que recordem que e_i és un moment d'escapada i $\hat{\mu}_i$ és la seguent situació de retorn essencial. Obtenim de (3.32) que:

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \sum_{\substack{(m,k)\in\mathcal{I}\\|m|\geq\Delta}} 10|m|e^{10\gamma|m|} \cdot C \cdot |\omega^{i-1}| \cdot \frac{|\xi_{\hat{\mu}_i}(\omega_{m,k})|}{|\xi_{\hat{\mu}_i}(\omega^{i-1})|} \leq \\
&\leq \sum_{\substack{(m,k)\in\mathcal{I}\\|m|\geq\Delta}} 10|m|e^{10\gamma|m|} \cdot C \cdot \frac{5e^{-|m|}|\omega^{i-1}|}{m^2 \cdot e^{-\frac{\Delta}{2}}} \leq |\omega^{i-1}| \sum_{\substack{(m,k)\in\mathcal{I}\\|m|\geq\Delta}} \frac{50C}{|m|} e^{10\gamma-5)|m|+\frac{\Delta}{2}} \leq \\
&\leq |\omega^{i-1}| \cdot \sum_{|m|=\Delta}^{\infty} \sum_{k=1}^{m^2} \frac{50C}{|m|} e^{-|m|+\frac{\Delta}{2}} \leq |\omega^{i-1}| \cdot \sum_{|m|=\Delta}^{\infty} 50C|m|e^{-|m|+\frac{\Delta}{2}} \leq L_1(\Delta) \cdot |\omega^{i-1}|.
\end{aligned}$$

on $L_1(\Delta) \longrightarrow 0$ quan $\Delta \longrightarrow +\infty$. Per acabar ens falta acotar S_3. Pel Lema 3.23 podem acotar de la forma:

$$\begin{aligned}
S_3 &\leq \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} \sum_{t>10|m|} e^{\gamma t} \cdot e^{-2\gamma t} \cdot |\omega_{m,k}| \leq \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} |\omega_{m,k}| \sum_{t=10|m|}^{\infty} e^{-\gamma t} = \\
&= \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} \frac{e^{-10\gamma|m|}}{1-e^{\gamma}} |\omega_{m,k}| = \sum_{(m,k)\in\mathcal{I}} L_2 e^{-10\gamma|m|}|\omega_{m,k}| \leq L_2 e^{-10\gamma\Delta}|\omega^{i-1}|
\end{aligned} \tag{3.33}$$

on $L_2 = (1-e^{-\gamma})^{-1}$. Llavors per (3.31), (3.32) i (3.33) ens queda:

$$\int_{<\omega^{i-1}>} e^{\gamma E_i(a)} da \leq (1 + L_3(\Delta)) \cdot |\omega^{i-1}|$$

on $L_3(\Delta) \longrightarrow 0$ quan $\Delta \longrightarrow +\infty$, i per tant, agafant Δ prou gran ja ho tindríem. □

I ara ja si podem calcular amb facilitat (3.27):

Lema 3.25.

$$\int_{\Omega'_n} e^{\gamma T_n(a)} da \leq e^{\epsilon n}|\Omega|$$

Demostració. Demostrarem per inducció que per tot $j \geq 1$ que:

$$\int_{Q_j} e^{\gamma T_n(a)} da \leq e^{\epsilon\gamma}|\Omega|$$

El cas inicial és el Lema 3.24 amb i=1.

Ara suposem que és cert per $j-1$ i veiem si ho és per j:

$$\int_{\Omega'_j} e^{\gamma T_j(a)} da = \sum_{\omega' \in \mathcal{Q}_{j-1}} \int_{<\omega'>} e^{\gamma T_j(a)} da = \sum_{\omega' \in \mathcal{Q}_{j-1}} e^{\gamma T_{j-1}(\omega')} \int_{\omega'} e^{\gamma E_j(a)} \leq$$
$$\leq \sum_{\omega' \in \mathcal{Q}_{j-1}} e^{\gamma T_{j-1}(\omega')} e^{\epsilon} |\omega'| = e^{\epsilon} \int_{Q_{j-1}} e^{\gamma T_{j-1}(a)} da \leq e^{\epsilon j} |\Omega|$$

i agafant $j = n$, com que $Q_n = \Omega'_n$, ja ho tindríem. □

Proposició 3.26.

$$|\{a \in \Omega'_n : T_n(a) \geq \alpha n\}| \leq e^{\epsilon n} |\Omega|$$

Demostració. Com que

$$e^{\gamma \alpha n} |\{a \in \Omega'_n : T_n(a) \geq \alpha n\}| \leq \int_{\Omega'_n} e^{\gamma T_n(a)} da$$

i $2\epsilon \leq \gamma \alpha$ ja ho tindríem. □

I així, demostrant que el conjunt $E(c, \rho)$ té mesura potiva, acabem la demostració del Teorema que van plantejar Benedicks i Carleson.

Comentari: Anys més tard Luzzatto i Takahasi van treure un article ([8]) on calculaven de forma explícita la mesura del conjunt $|\Omega_\infty|$, així que donarem quines constants van agafar per calcular la cota:

1. Fixem $\rho = 0.97$ i $c = 0.61$.
2. Per la condició $(EG)_n$ agafem $\alpha = 0,277$ i necessitàvem també un Δ suficeintmen gran, que en aquest cas serà $\Delta = 2300$.
3. Tenint $c_0 = 0.693$, per la construccó del conjunt incial necessitàvem una a_1 i una N_1, que seràn $a_1 = 2 - 10^{-4990}$ i $N_1 = 8287$ i per tant tindrem com conjunt inicial:
$$\Omega = [2 - 10^{-4990}, 2].$$
4. Finalment la cota del conjunt Ω_∞ és:
$$|\Omega_\infty| \geq 0.97|\Omega| > 10^{-5000}.$$

És cert que la cota que hem donat és molt petita però ja serveix per comprovar que té mesura positiva, a més en l'article del Moreira o de més antics com els de Benedicks i Carleson sempre parlen de Δ's suficientment grans o conjunts Ω suficientment petits, sense donar un número explícit. Per això aquest article aporta idees molt importants a l'estudi de la funció quadràtica.

La demostració la van fer de forma totalment computacional, van crear 4 condicions inicials sobre el creixement de la derivada de f_a sobre la òrbita critica, i 4 condicions que han de satisfer les constants creant un munt de constants auxiliars. La construcció dels conjunts Ω ho van fer d'una forma semblant i els valors de les constants que necessitàven els van trobar de forma totalment computacional.

4 Resultats derivats

4.1 Construcció d'una mesura invariant

Al principi del TFG esmentàvem el teorema de Jackobson, que ens deia que existia un conjunt de paràmetres $a \in [1, 2]$ tal que f_a té una mesura de probabilitat ergòdica invariant absolutament continua. En aquesta secció veurem que en el conjunt de paràmetres $E(c, \rho)$ que ens dòna el Teroema 3.1 tenim aquesta propietat i així podem relacionar el creixement de la derivada del punt crític amb l'existencia d'una mesura invariant. S'ha de dir que aquí només es dónen les idees per sobre, i per una demostració més detallada es pot trobar al treball de Ferreira [1] que va fer a través del article de Moreira amb el que hem fet la demostració del Teorema de Benedicks-Carleson.

A partir d'ara considerarem λ com la mesura de Lebesgue i definirem uns quants conceptes de mesures invariants i de la teoria ergòdica. Sigui I un interval real i $\mathcal{B}$ una σ-àlgebra de Borel sobre I.

Definició 4.1. *$f : I \longrightarrow I$ és ergòdica respecte una mesura $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$ si per cada conjunt de Borel A tal que $f^{-1}(A) = A$ tenim que o $\mu(A) = 0$ o $\mu(I \setminus A) = 0$.*

Definició 4.2. *$\mu :\longrightarrow [0, \infty]$ és una mesura f-invariant si $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ per cada conjunt de Borel A.*

Definició 4.3. *Una mesura $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$ és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue λ si $\forall A \in \mathcal{B}$ tal que $\lambda(A) = 0$ implica que $\mu(A) = 0$.*

Per construir una mesura ergòdica absolutament continua per f_a Ferreira crea una successió de mesures invariants per f_a en un compacte, i aquesta successió tindrá un punt d'acumulació. Demostra que la mesura que surt de límit de la successió és única, ivariant i absolutament continua. Per fer això veu que per una aplicació ϕ λ-integrable, tots els elements de la successió estàn dominats per ϕ:

Fixa una $a \in E(c, \rho)$ i considera $f = f_a$. Construeix una altra successió de particions $\mathcal{R}_0 \prec \mathcal{R}_1 \prec ...$,però ara de l'interval U_Δ, con cada $v \in \mathcal{R}_n$ és un interval i se li associa una serie de retorns $\mu_0, ..., \mu_s$ amb les seus períodes acotats i intervals hoste, igual que en la nostra secció 3 amb els intervals ω.

Defineix la successió de mesures finites (ϑ_n) de la forma:

$$\vartheta_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j(\lambda | U_\Delta),$$

on $f_*^j(\lambda|U_\Delta)(A) = \lambda(f^{-j}(A) \cap U_\Delta)$. Per demostrar que és absolutament contínua construeix unes successions de mesures $(\mathcal{X}_n),\ (\mathcal{Y}_n),\ (\mathcal{Z}_n),\ (\mathcal{W}_n)$ de la forma:

$$\mathcal{X}_n = \sum_{\upsilon \in \mathcal{R}_n} f_*^{\mu_n}(\lambda|\upsilon)$$

$$\mathcal{Y}_n = \sum_{\upsilon \in \mathcal{R}_n} \sum_{j=\mu_n+1}^{\mu_n+p_n} f_*^{j}(\lambda|\upsilon)$$

$$\mathcal{Z}_n = \sum_{\upsilon \in \mathcal{R}_n} \sum_{j=\mu_n+p_n+1}^{\nu_n-1} f_*^{j}(\lambda|\upsilon)$$

$$\mathcal{W}_n = \sum_{\upsilon \in \mathcal{R}_{n+1}} \sum_{j=\nu_n}^{\mu_{n+1}-1} f_*^{j}(\lambda|\upsilon)$$

on recordem que μ_n és el retorn n-éssim de $\upsilon \in \mathcal{R}_n$, p_n és la longitud del període acotat associat a μ_n i ν_n és la següent situació de retorn posterior a ν_n. Per tant per als elements de $\mathcal{R}_n$ per als que ν_n és un retorn, $\mathcal{W}_n$ és nula, i pels elements pel qual ν_n sigui una situació d'escapada per arribar al següent retorn tenim a la mesura $\mathcal{W}_n$.

Demostra que:

$$\vartheta_n \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} f_*^j(\lambda|\{x \in U_\Delta : \mu_n(x) > j\}) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathcal{X}_k + \mathcal{Y}_k + \mathcal{Z}_k + \mathcal{W}_k)$$

i que hi ha una $\phi \in L^1([-1,1],\lambda)$ tal que:

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathcal{X}_k + \mathcal{Y}_k + \mathcal{Z}_k + \mathcal{W}_k) \leq \phi \ \forall k \geq 0$$

i per tant que:

$$\frac{d\vartheta_n}{d\lambda} \leq \phi \quad \forall n \geq 0$$

on $d\vartheta_n/d\lambda$ és la derivada de Radon-Nykodym de ϑ_n respecte λ, que lo que ens vol dir és que la derivada respecte el càlcul està acotada respecte una funció integrable i que per tot $A \in \mathcal{B}$ tenim:

$$\vartheta_n \leq \int_A \phi \ d\lambda$$

En general, la derivada de Radon-Nykodyn la definim com:

Definició 4.4. *Donat un espai mesurable (X, Σ), una mesura σ-finita $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ i una mesura amb signe σ-finita $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutament contínua respecte μ, llavors la funció f sobre (X, Σ) que satisfà:*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

per tot $A \in \Sigma$ se li diu derivada de Radon-Nykodym de ν respecte μ i es sol representar com $f = d\nu/d\mu$.

La demostració que fa Ferreira al seu article sobre la estimació de les densitat se les mesures $(\mathcal{X}_n)$, $(\mathcal{Y}_n)$, $(\mathcal{Z}_n)$, $(\mathcal{W}_n)$ utilitza el fet que $|D_n(a)| \geq e^{cn}$, i tota la construcció dels conjunts Ω, com de les succesions de retorns, períodes acotats i òrbites lliures, que hem realitzat al llarg del treball, per això he considerat que era interesant mencionar aquest treball malgrat no haver-ho explicat detalladament.

4.2 Exponent de Lyapunov positiu

En aquesta última part treballarem amb coeficients de Lyapunov, una eina molt important en dinàmica 1D. En la secció 3 hem vist que hi ha un conjunt de paràmetres $E(c, \rho)$ tal que per tot $a \in E(c, \rho)$, tenim $|D_n(a)| \geq e^{cn}$ per tot $n \geq 1$, i a partir d'aquesta condició hem pogut crear una mesura invariant per f_a. A partir d'aquí es pot demostrar que existeix un subconjunt $A \subset [-q_a, q_a]$ de mesura positiva tal que l'exponent de Lyapunov de f_a existeix i és positiu. Primer definim que és exactament l'exponent de Lyapunov:

Definició 4.5. *Sigui $f : I \longrightarrow I$, $f \in \mathcal{C}^1$ i sigui $x_0 \in I$. Definim $x_i := f^i(x_0)$.*

- *Definim el multiplicador de Lyapunov, en cas d'existir, com:*

$$L(x_0, f) := \lim_{n\to\infty} \left| \prod_{i=1}^{n} \frac{df^i}{dx}(x_0) \right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |f'(x_n) \cdot ... \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0)|^{1/n}.$$

- *L'exponent de Lyapunov és: $\lambda(x_0, f) := \log L(x_0, f)$.*

El pròxim resultat ens relacionarà que hi ha entre que f tingui una mesura invariant i el fet que tingui coeficient de Lyapunov per casi tot punt. Podem trobar la demostració a [9]:

Teorema 4.6 (Keller)**.** *Sigui $f : I \to I$ una aplicació unimodal amb un punt crític no lineal i derivada Schwarziana negativa llavors f té una mesura invariant absolutament cotinua si i nomé si per casi tot $x \in I$ tenim:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log |Df^n(x)| > 0$$

I es pot treure el següent Corol·lari del Teorema:

Corol·lari 4.7. *Sigui $f : I \to I$ una aplicació unimodal amb un punt crític no 1lineal i derivada Schwarziana negativa. Llavors existeix una constant λ_f tal que per casi tot $x \in I$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log |Df^n(x)| = \lambda_f.$$

A més:

1. *$\lambda_f > 0$ si i només si f té una mesura de probabilitat invariant absolutament continua. En aquest cas $\lim_{n\to\infty} \log |Df^n(x)| = \lambda_f$ per casi tot x.*

2. $\lambda_f < 0$ *si i només si* f *té un atractor hiperbòlic periòdic.*

Com que per tot a, f_a és unimodal i el punt 0 és no lineal tenim que per tot $a \in E(c, \rho)$, f_a té coeficient de Lyapunov positiu per casi tot $x \in [-q_a, q_a]$. S'ha de ser conscient de que aquest resultat és molt més fort que el que teníem com objectiu, fins i tot, segons un article de Ruelle, això implicaría que la funció és sensible respecte condicions inicials, un dels trets més característics que té una funció caòtica. Quan ens referim a sensibilitat respecte condicions volem dir que donada una $\epsilon > 0$, per qualsevol $x \in [-q_a, q_a]$ i un entorn V de x existeix una $y \in V$ i $n \geq 1$ tal que $|f_a^n(x) - f_a^n(y)| \leq \epsilon$.

Referències

[1] J. Alves: *Absolutely continuous invariant measures for the quadratic family* , Master's thesis, Univ. Porto, 1992

[2] M.Benedicks, L.Carleson: *On iteration of* $1 - ax^2$ *on* $[-1, 1]$, Ann.Math., 122 (1985), 1-25.

[3] M. Benedicks, L. Carleson: *The dynamics of the Hénon map*, Ann. Math., 133 (1991), 73-169.

[4] A. M. Blokh, M. Yu. Lyubich: Attractors of transformations of an interval, Func. Ann. and its Appl., 21 (1987), 148-150.

[5] P. Collet, J.-P. Eckmann: *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkauser, Boston, 1980

[6] J. Guckenheimer: *Sensitive dependence on initial condition for onedimensional maps*, Comm. Math. Phys., 70 (1979), 113-160.

[7] M. Jakobson: *Absolutely continuous invariant measures for oneparameter families of one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys., 81 (1981), 39-88.

[8] S. Luzzatto and H. Takahashi: *Computable conditions for the occurrence of non-uniform hyperbolicity in families of one-dimensional maps*, Nonlinearity 19 (2006), 1657-1695.

[9] W.de Melo, S.van Strien: *One-dimensional dynamics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folgue·Band 25,1991.

[10] F. J. Moreira: *Chaotic dynamics of quadratic maps*, Master's thesis, Univ. Porto, 1992.

[11] D.Ruelle: *Sensitive dependence on initial conditions and turbulent behavior of dynamical systems*, Bifurcation Theory and its Applications in Scientific Disciplines, New York Acad. of Sci. (1979) 317.

[12] D. Singer: *Stable orbits and bifurcations of maps of the interval*, SIAM J. Appl. Math., (1978), 35-260.