



UNIVERSITAT<sup>DE</sup>  
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona

---

**DIMENSIÓ DE HAUSDORFF I  
SISTEMES DINÀMICS**

---

**Autor: Robert Salla Gras**

**Director: Dr. Xavier Jarque Ribera**

**Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica**

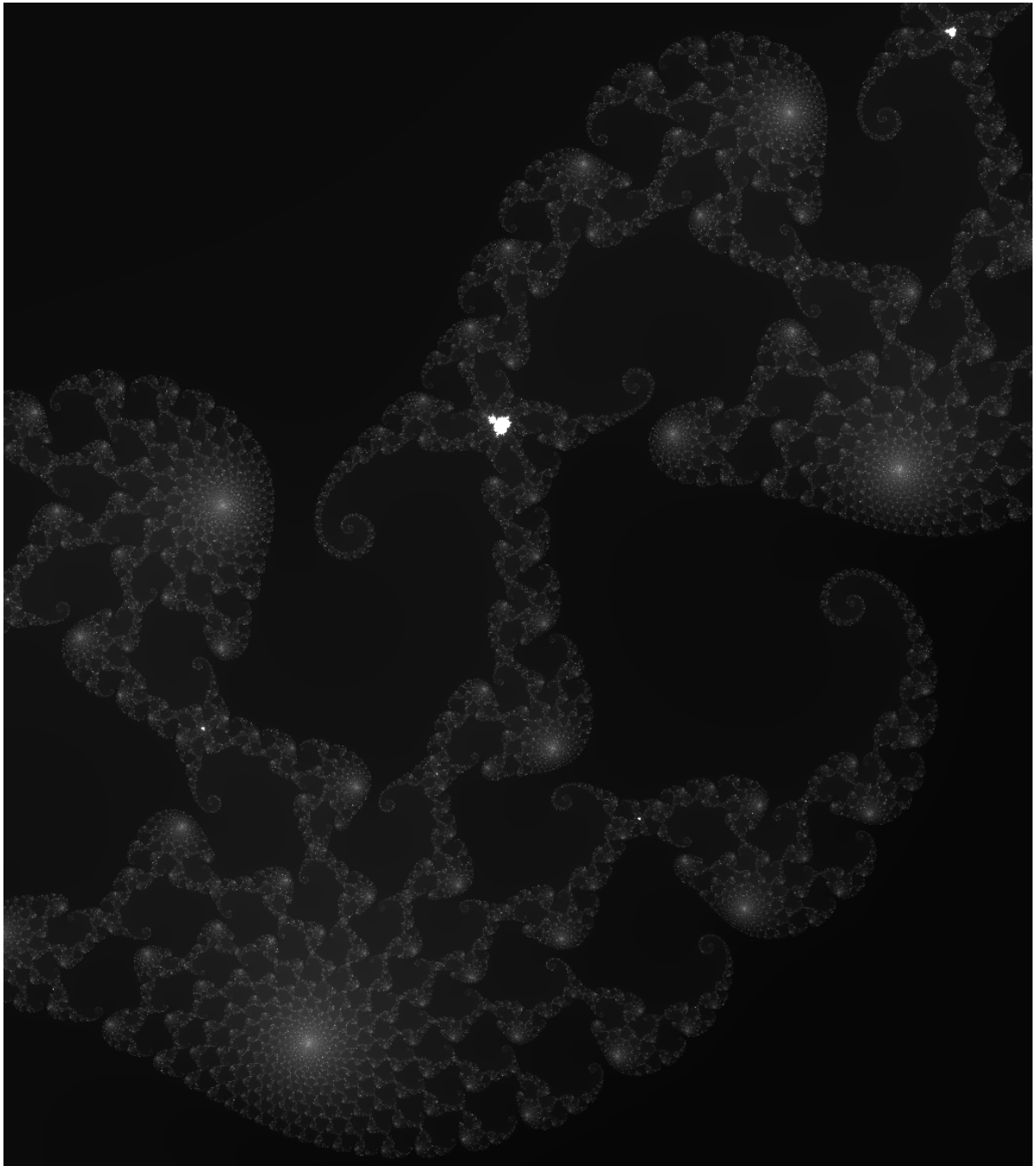
**Barcelona, 27 de juny de 2018**

## Abstract

In this final degree project it is studied the different types of dimension, like the fractal one, Box-Counting and Hausdorff's. We will focus on finding and comparing these dimensions through several objects, among them, fractal sets. Then, we will study Julia's set, its shapes and at the end we will connect those with the different definitions of dimensions.

## Resum

En aquest treball final de grau s'estudien diferents definicions de dimensió, com la fractal, recompte de caixes i la de Hausdorff. Ens centrarem en trobar i comparar aquestes dimensions per diversos objectes, entre ells conjunts fractals. Seguidament, estudiarem els conjunts de Julia, les seves formes i, finalment, els relacionarem amb les diferents definicions de dimensió.



La geometria fractal us ho farà veure tot de manera diferent. És perillós seguir llegint. S'enfronta al risc de perdre la visió innocent que té dels núvols, boscos, galàxies, fulles, plomes, flors, roques, muntanyes, torrents d'aigua, catifes, maons entre d'altres coses. Mai més la seva interpretació d'aquestes coses serà la mateixa.

Michael Barnsley

# Agraïments

Vull agrair a totes aquelles persones amb qui en un moment o altre ens hem trobat pel camí de les matemàtiques. Cadascú des del seu punt de vista m'han ajudat durant la realització d'aquest treball mitjançant aportacions que m'han fet arribar fins aquí. Gràcies doncs...

als professors i professores amb qui he coincidit a la facultat de Matemàtiques i Informàtica durant aquests últims anys que han fet enriquir el meu coneixement matemàtic. En especial a la Núria Fagella i en Xavier Jarque, tutors del treball, que m'han guiat, aconsellat i ajudat durant tot aquest curs;

als companys i companyes de la facultat, als que fa cinc anys que m'aguanten i als que fa poques setmanes, que m'han recolzat i acompanyat en tot moment. En especial a l'Abel Hernández per la seva ajuda quan m'he quedat encallat i ho he necessitat, i els seus missatges d'ànims i comentaris del treball a altes hores de la matinada;

als meus companys de pis, l'Adolfo, l'Anna, l'Ariadna i el Sergi per l'escalfor que li donen al pis i l'energia que em transmeten dia rere dia.

M'agradaria agrair-ho també...

a tots els membres de la meva família, que s'han preocupat molt per mi i m'han recolzat i animat en tot moment;

al poble de La Canonja, al Agrupament Escolta i Guia Bisbe Borràs de La Canonja per haver-me educat i haver-me fet créixer com a persona i al Comitè Lúdic perquè han comprès la meva relació amb el treball de final de grau aquests últims mesos;

al Jesús Fuente, per totes les hores que ha dedicat ensenyant-me el Latex i corregint-me tot tipus d'errors;

i a totes les persones que s'han interessat pel meu treball

Moltes gràcies a tots!

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mesura i dimensió de Hausdorff</b>	<b>5</b>
2.1	Mesura de Hausdorff . . . . .	5
2.2	Dimensió de Hausdorff . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Recompte de caixes</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Sistemes de funcions iterades i dimensió fractal</b>	<b>21</b>
4.1	Sistemes de funcions iterades . . . . .	21
4.2	Dimensió fractal . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Iteració de polinomis quadràtics</b>	<b>28</b>
5.1	Propietats dels conjunts de Julia . . . . .	32
5.2	El conjunt de Mandelbrot . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Dimensió de Hausdorff de conjunts de Julia</b>	<b>37</b>
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>40</b>
<b>8</b>	<b>Annexos</b>	<b>41</b>
8.1	Càlcul computacional de la dimensió del recompte de caixes . . . . .	41
8.2	Sistema de funcions iterades (IFS) . . . . .	44
8.3	Conjunts de Julia . . . . .	48
8.4	Conjunt de Mandelbrot . . . . .	52

# 1 Introducció

Des de fa segles, totes les civilitzacions han mostrat interès per mesurar objectes i figures que observem a la natura. Quan la tecnologia encara no existia, per mesurar quelcom es feien servir parts dels cos humà (dits, pams, peus...) o objectes amb una mida prefixada. També mostraven interès per figures geomètriques simples i perfectes, com és el cas de la circumferència. Molts anys després, el coneixement científic i el desenvolupament de la tecnologia va permetre observar mitjançant un microscopi una nova geometria molt més rica i amb objectes invisibles per als nostres ulls.

A finals del segle XIX, i des d'un punt de vista abstracte, matemàtics com Cantor, Koch i Weierstrass construeixen una sèrie de conjunts amb propietats topològiques i geomètriques que no són pròpies d'objectes que s'havien estudiat fins al moment. Aquests objectes, s'obtenen com límit de processos iteratius i per construcció tenen com a propietat geomètrica bàsica que el conjunt és igual a ell mateix amb un canvi d'una homotècia i/o rotació, és a dir, dins seu hi han petites còpies d'ell mateix. Aquesta propietat s'anomena auto-semblança o autosimilitud i els objectes que la compleixen es diuen fractals. Un exemple d'una estructura fractal podria ser la corba de Koch (veure Figura 1), veurem més exemples d'aquests objectes al llarg de la memòria. A principis del segle XX, matemàtics com Fatou, Julia i Poincaré



Figura 1: Corba de Koch.

van realitzar estudis sobre sistemes dinàmics discrets que correspon a l'estudi de la iteració de funcions contínues, diferenciables, holomorfes... d'un espai en si mateix. L'objectiu fonamental dels sistemes dinàmics és entendre el comportament assintòtic de les òrbites generades per cada condició inicial de l'espai de fase i l'estudi de conjunts dinàmicament invariants com poden ser les òrbites periòdiques. Per posar una referència fonamental de sistemes dinàmics podem pensar en l'aplicació de Poincaré, primer, considerem un camp vectorial de dimensió  $n$  que té una òrbita periòdica que l'anomenarem  $\Gamma$  de període  $\tau$ . Sigui  $\Sigma$  una secció transversal de  $\Gamma$  en el punt  $x_0 \in \Gamma$  (condició inicial) que és un subespai de dimensió  $n-1$ . Considerem l'aplicació

$$P : \Sigma \longrightarrow \Sigma$$

que associa a cada punt  $x \in \Sigma$  a  $P(x)$  que correspon al primer punt en que l'òrbita que el conté retorna a la secció. Certament, el punt  $x_0$  és un punt fix de  $P$  ja que  $P(x_0) = x_0$  això és degut a que  $\Gamma$  és una òrbita periòdica i cada vegada que aquesta òrbita intersequi amb  $\Sigma$ , ho farà en el mateix punt. Els estudis de Poincaré inclouen

el comportament asimptòtic de les òrbites del camp vectorial en un entorn de  $\Gamma$  via l'estudi de les propietats dinàmiques de l'aplicació  $P$  anomenada aplicació de Poincaré (o aplicació de retorn, veure Figura 2). Observem que si l'òrbita periòdica és atractora, si apliquem  $P$  a una  $x$  fixada,  $P(x)$  estarà més aprop del punt fix  $x_0$  que  $x$ , anàlogament, si l'òrbita periòdica és repulsora si apliquem  $P$  a una  $x$  fixada,  $P(x)$  estarà més lluny del punt fix  $x_0$  que  $x$ . Aquest fet, va motivar l'estudi sistemàtic d'aplicacions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , en particular dels objectes (o varietats) invariants per la dinàmica generada per  $f$ . El mateix Poincaré (i posteriorment, els treballs seminaris d'Arnold i de Stephen Smale) va demostrar que en casos genèrics aquests conjunts invariants per  $f$  tenien exactament les mateixes propietats geomètriques i topològiques que els conjunts abstractes estudiats per l'escola polonesa i alemanya de Cantor i Koch.

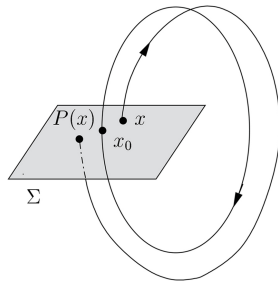


Figura 2: Aplicació de Poincaré o de retorn.

En un altre context, diversos autors van interessar-se per la iteració de funcions de variable complexa. Un dels objectius principals era distingir les òrbites que estan acotades de les que no ho estan. En aquest treball, trobarem i treballarem amb conjunts invariants d'una certa dinàmica que han generat interès per l'estudi dels conjunts amb estructura fractal. El principal d'aquests, és el conjunt de Mandelbrot (veure Figura 14) que es defineix com el lloc geomètric de connexitat de la família uniparamètrica de polinomis quadràtics  $\{f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f_c(z) := z^2 + c\}$  amb  $c \in \mathbb{C}$ , és a dir, el conjunt de Mandelbrot és el subconjunt de punts  $c$  del pla complex per als quals el conjunt de Julia és connex. El conjunt de Julia, és la frontera que separa les  $c$  per les quals l'òrbita de  $f_c$  està acotada de les que no ho està, o sigui,  $\{f_c^k(z_0) \rightarrow \infty \text{ quan } k \rightarrow \infty\}$ .

L'aparició dels primers ordinadors, capaços de realitzar milions d'operacions algebraiques per segon fou, sense cap dubte, la màxima expressió de la revolució tecnològica iniciada un segle abans. Els ordinadors, ens permeten visualitzar el problema i les formes d'aquestes figures. Exemples concrets de sistemes dinàmics i fractals, podrien ser tumors cerebrals, estats d'equilibri d'espècies, costes de grans continents, generació d'imatges 3D.

És interessant, descriure aquests objectes topològicament, és a dir, veure si són connexos, totalment disconnexos, arc-connexos, compactes,... o descriure'ls geomètricament, però aquesta no és la finalitat d'aquest treball. En aquest projecte ens interessarem per saber de quina dimensió és un objecte, estudiant les dife-

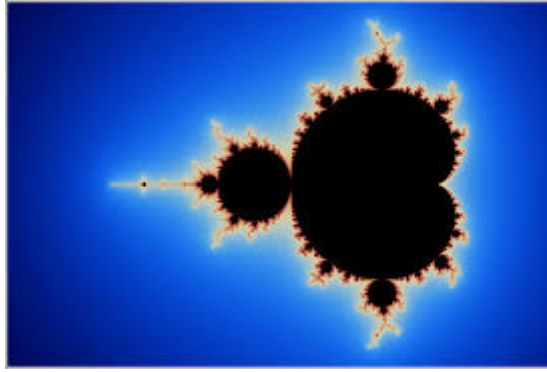


Figura 3: Conjunt de Mandelbrot.

rents definicions de dimensió (estudi analític). Primerament, tenim la dimensió topològica, que l'entendem com la dimensió d'un espai vectorial que correspon al nombre de vectors d'una base d'aquest i és un nombre natural. Seguidament, tenim la dimensió de Hausdorff, que es defineix a partir d'una mesura, agafant un recobriment d'oberts de diàmetre menor que  $\delta > 0$  de l'objecte en qüestió i calculant l'ímfim del sumatori de la  $s$ -èsima potència del diàmetre de cada un dels oberts que recobreixen l'objecte, la dimensió de Hausdorff és el valor de  $s$  pel qual la funció de  $s$  descrita és discontinua. A continuació, definim la dimensió fractal, que és només per objectes amb estructura fractal, aleshores, aquesta dimensió és defineix mitjançant la següent fórmula:

$$D_F(A) = \frac{\ln k}{\ln m} = \frac{\ln(\text{nombre de peces})}{\ln(\text{factor d'augment})}$$

on  $A$  és el conjunt amb estructura fractal. Finalment, treballem amb la dimensió del recompte de caixes, que a l'annex tenim programada, que és una aproximació de la dimensió de Hausdorff amb un argument semblant al de la dimensió fractal, fent una malla a l'objecte i relacionant el nombre de quadrats d'aquesta malla que contenen l'objecte i la mida d'aquests quadrats. Veurem que aquestes dimensions en molts objectes coincideixen o s'aproximen molt, però hi poden haver excepcions, veurem doncs contraexemples on no coincideixen. Mitjançant aquestes definicions de dimensió que acabem de veure, podem definir fractal com aquell objecte tal que la seva dimensió de Hausdorff és major que la seva dimensió topològica.

## Estructura de la Memòria

En el primer punt, definim el concepte de mesura de Hausdorff i posteriorment definim la dimensió de Hausdorff, aquest últim, és un concepte important ja que el tractarem al llarg del treball.

Seguidament, parlem de la dimensió del recompte de caixes (box-counting en anglès), en aquest capítol, es donen diversos exemples de com calcular-la. A l'annex, tenim un programa fet amb Python per calcular aquesta dimensió d'una imatge. A més,



comparem la dimensió de Hausdorff amb la dimensió del recompte de caixes, observant que poden no coincidir.

El següent punt de la memòria tracta els sistemes de funcions iterades, explicant el joc del caos i es presenta la teoria necessària per acabar enunciant el teorema de Collage, a l'annex he afegit un programa en C que donades un conjunt d'iteracions i mitjançant el Gnuplot ens dibuixa els resultats. També en aquest punt, es defineix la dimensió fractal d'un objecte.

El cinquè apartat, titulat iteració de polinomis quadràtics, defineix conceptes com conca de l'infinit i conjunt de Julia entre d'altres. També es presenta el mètode de la iteració inversa que el tenim programat amb exemples a l'annex i finalment, es defineix el conjunt de Mandelbrot i tota una sèrie de proposicions i definicions necessàries per a utilitzar i entendre el programa en C que, donada una  $c \in \mathbb{C}$  calcula i dibuixa el conjunt de Julia corresponent.

Finalment, en l'últim apartat, construïm conjunts de Julia per a polinomis de la família quadràtica  $z^2 + c$  i observem com es comporten a mesura que canvia  $c$ . Veurem que és important saber cap a quina direcció estem movent el paràmetre  $c$  per veure com serà el conjunt que ens sortirà. A l'Annex 8.3, he afegit un programa en C i un exemple de com es comporta el conjunt de Julia a mesura que  $c$  es mou per l'eix real.

## 2 Mesura i dimensió de Hausdorff

En aquesta secció, recordarem alguns conceptes que s'han vist al llarg del grau i n'introduïrem de nous que necessitarem per poder definir la noció de dimensió de Hausdorff i estudiar-ne algunes propietats bàsiques. Finalment, donarem dos exemples i unes quantes propietats que ens seran útils per quan apliquem la dimensió de Hausdorff al llarg del treball.

La noció que usem de forma usual és la de dimensió topològica, que diu: donat un conjunt  $A \subset \mathbb{R}^n$ , aquest té dimensió topològica zero ( $k = 0$ ), si per cada punt de  $A$  podem trobar un entorn a  $\mathbb{R}^n$  tan petit com vulguem tal que la seva frontera tingui intersecció buida amb el conjunt  $A$ . De forma inductiva, un conjunt  $A \subset \mathbb{R}^n$  té dimensió topològica  $k > 0$  si per cada  $p \in A$  té entorns de  $\mathbb{R}^n$  arbitràriament petits tals que la seva frontera interseca el conjunt  $A$  en un subconjunt de dimensió  $k - 1$ , i, a més,  $k$  és el nombre natural més petit amb aquesta propietat.

A diferència d'aquesta, la dimensió de Hausdorff no sempre és un nombre enter. Naturalment, les dues dimensions coincideixen per segments, quadrats o cubs, entre d'altres. Tindrem una nova noció de dimensió per treballar de forma més fina amb conjunts estranys, que malgrat tot, suposarem que són conjunts de  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1 Mesura de Hausdorff

Al llarg del grau, hem treballat amb moltes classes de distàncies, la distància del mínim, la distància euclídea, distància de punt a punt, distància de conjunt a conjunt... Ara, començarem definint el terme de distància com una aplicació que compleix una sèrie de propietats.

**Definició 2.1.** *Sigui  $X$  un conjunt, definim la distància com una aplicació*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto d(a, b) \end{aligned}$$

*tal que:*

- $d(a, b) \geq 0, \forall a, b \in X$
- *Simetria:*  $d(a, b) = d(b, a) \quad \forall a, b \in X$
- *Desigualtat triangular:*  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) \quad \forall a, b, c \in X$
- $\forall x \in X, d(x, x) = 0$  i si a més,  $y \in X$  tal que  $d(x, y) = 0$ , aleshores,  $x = y$ .

*Podem definir la distància d'un punt a un conjunt  $E$ , que és un espai mètric, de la forma següent:*

$$d(x, E) := \inf\{d(x, y) : y \in E\}$$

**Observació 2.2.** Si  $x \in E$ , aleshores,  $d(x, E) = 0$ .

**Exemple 2.3.** La distància euclídea a  $\mathbb{R}^n$  es defineix com

$$d_E(x, y) = |x - y| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

on  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  i  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Definició 2.4.** Sigui  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunt obert, no buit. El diàmetre de  $U$  es defineix com

$$|U| = \sup \{ |x - y| : x, y \in U \}$$

on  $\sup$  denota el suprem del conjunt.

Sigui  $F$  un conjunt qualsevol de  $\mathbb{R}^n$ , del qual voldrem calcular la seva dimensió de Hausdorff, que definirem al final d'aquesta secció. Agafem  $\{U_i\}_{i \geq 0}$  una col·lecció numerable de conjunts oberts de diàmetre menor que  $\delta$  que cobreixen  $F$ , i.e.  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ , amb  $|U_i| < \delta \forall i$ , aleshores direm que la col·lecció  $\{U_i\}$   $\delta$ -cobreix  $F$ .

**Definició 2.5.** Sigui  $F \subset \mathbb{R}^n$  i  $s$  un nombre real no negatiu. Per a tota  $\delta > 0$  definim

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq F, |U_i| < \delta \right\}$$

on  $\inf$  denota l'ínfim del conjunt, és a dir, la màxima de les cotes inferiors. Aquest ínfim s'anomena mesura externa de Hausdorff.

El nostre objectiu és doncs recobrir  $F$  per un conjunt d'oberts que tinguin com a màxim diàmetre  $\delta$  i buscar de *minimitzar* la suma de la  $s$ -èsima potència del diàmetre.

**Proposició 2.6.** Suposem que tenim  $x_n \geq 0$ , una successió monòtona creixent de  $\mathbb{R}$ , és a dir, per tota  $n$ ,  $x_n \leq x_{n+1}$ , aleshores, quan  $n \rightarrow \infty$ , o bé  $x_n \rightarrow \infty$ , o bé,  $x_n \rightarrow l \in [0, \infty)$ .

A mesura que  $\delta$  decreix, l'ínfim  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  creix de forma monòtona, és a dir, si prenem una successió  $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$  de valors de  $\delta$  tendint a zero, els valors de  $\mathcal{H}_{\delta_n}^s(F)$  formen una successió monòtona creixent, aleshores, prenem el límit quan  $\delta \rightarrow 0$  i ho denotem com:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

Per la proposició anterior, podem assegurar que aquest límit existeix per qualsevol subconjunt  $F \subset \mathbb{R}^n$ , podent ser 0 o  $\infty$  (veure teorema 2.7). Diem que  $\mathcal{H}^s(F)$  és la mesura de Hausdorff de  $F$  de dimensió  $s$ .

## 2.2 Dimensió de Hausdorff

Tornant a l'equació de la Definició 2.5, tenim que per a tot conjunt  $F \subset \mathbb{R}^n$  i  $\delta < 1$ , el valor de  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  no augmenta amb  $s$ . Sigui  $0 \leq s_1 < s_2$ , aleshores tenim:

$$\sum_i |U_i|^{s_2} \leq \sum_i |U_i|^{s_2-s_1} |U_i|^{s_1} \leq \delta^{s_2-s_1} \sum_i |U_i|^{s_1} \leq \sum_i |U_i|^{s_1}$$

Aleshores, tenim:

$$0 \leq \mathcal{H}^{s_2}(F) \leq \mathcal{H}^{s_1}(F)$$

Seguidament, es presenta el teorema que demostra que la mesura de Hausdorff de qualsevol objecte  $F$  és zero o infinit per a tota  $s \in \mathbb{R}$  excepte, com a màxim, en un punt que correspondrà a la dimensió de Hausdorff de  $F$ .

**Teorema 2.7.** *Sigui  $0 \leq s_1 < s_2$  i sigui  $F \subset \mathbb{R}^n$ :*

(a) *Si  $\mathcal{H}^{s_1}(F) < \infty$ , aleshores,  $\mathcal{H}^{s_2}(F) = 0$ .*

(b) *Si  $\mathcal{H}^{s_2}(F) > 0$ , aleshores  $\mathcal{H}^{s_1}(F) = \infty$ .*

*Demostració.* Tenim com a hipòtesi que  $0 \leq s_1 < s_2$ , primer, demostrem l'apartat (a). Tenim que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{s_2}(F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^{s_2}(F) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in I} |U_\alpha|^{s_2} : \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq F, |U_\alpha| < \delta \right\} \leq \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in I} |U_\alpha|^{s_1} \delta^{s_2-s_1} : \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq F, |U_\alpha| < \delta \right\} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{s_2-s_1} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in I} |U_\alpha|^{s_1} : \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq F, |U_\alpha| < \delta \right\} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{s_2-s_1} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in I} |U_\alpha|^{s_1} : \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq F, |U_\alpha| < \delta \right\} = 0 \end{aligned}$$

Seguidament, demostrem l'apartat (b) del teorema, suposem ara  $\mathcal{H}^{s_2}(F) > 0$ , aleshores,

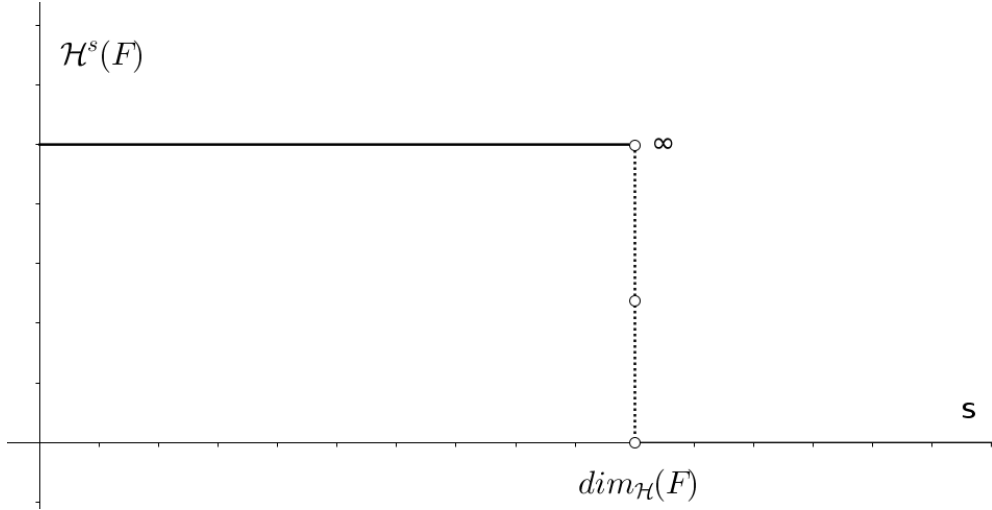


Figura 4: Gràfica de  $\mathcal{H}^s(F)$ . Observem que la gràfica d'aquesta funció és zero o infinit per a tot  $s \geq 0$  excepte a  $\dim_{\mathcal{H}}(F)$  que pot ser zero, infinit o un nombre real positiu, aquest punt on canvia la funció correspon a la dimensió de Hausdorff de  $F$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{s_1}(F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^{s_1}(F) = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in I} |U_{\alpha}|^{s_1} : \bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha} \supseteq F, |U_{\alpha}| < \delta \right\} \geq \\
&\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in I} |U_{\alpha}|^{s_2} \delta^{s_1 - s_2} : \bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha} \supseteq F, |U_{\alpha}| < \delta \right\} = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{s_2 - s_1}} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in I} |U_{\alpha}|^{s_2} : \bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha} \supseteq F, |U_{\alpha}| < \delta \right\} = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{s_2 - s_1}} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in I} |U_{\alpha}|^{s_2} : \bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha} \supseteq F, |U_{\alpha}| < \delta \right\} = +\infty
\end{aligned}$$

□

Amb aquest teorema, hem demostrat que existeix com a màxim una  $s$  real tal que la mesura de Hausdorff és diferent de zero i d'infinit.

**Definició 2.8.** Per a tot  $F \subset \mathbb{R}^n$ , definim formalment el concepte de dimensió de Hausdorff com

$$\dim_{\mathbb{H}}(F) = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

A la Figura 4 observem la gràfica que té  $\mathcal{H}^s(F)$ , observem, com hem vist al teorema que és una funció constant amb un únic punt de discontinuïtat, que és

precisament el que correspon a la dimensió de Hausdorff de  $F$ . És a dir, només pren valors 0 i  $\infty$  i com a màxim hi ha un punt (corresponent al canvi d'infinít a zero) on  $\mathcal{H}^s(F)$  pren un valor diferent i que, aquest correspon a la dimensió de Hausdorff.

Per visualitzar-ho millor, es consideraran dues situacions amb objectes que tenen dimensió un nombre enter. A l'exemple 2.9, veiem com  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$  per una  $k > s$  i a l'exemple 2.10, observem com  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  per una  $k < s$ .

**Exemple 2.9.** Sigui  $F \subset \mathbb{R}^n$  un quadrat de costat 1, volem veure que  $\mathcal{H}^1(F) = \infty$ , és a dir, que la llargada d'un quadrat de costat 1 és infinit, aquest exemple es pot traslladar per qualsevol quadrat i/o rectangle. El que volem calcular és doncs,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^1(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^1 : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq F, |U_i| < \delta \right\}$$

Agafem doncs, per a recobrir-lo, la col·lecció d'oberts  $\{U_i\}$  corresponents als quadrats de costat  $\delta = \frac{1}{n}$ . Per recobrir tot el quadrat de costat 1, necessitarem exactament  $n^2$  quadrats de costat  $\delta$  (veure Figura 5). El diàmetre d'aquests quadrats és:

$$\delta^2 + \delta^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}\delta = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

on  $d$  denota el diàmetre de cada quadrat. Tenim doncs,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n^2} \frac{\sqrt{2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}n^2}{n} = \infty$$

Fins aquí hem vist que la llargada d'un quadrat de costat 1 és infinit. Ara, apliquem la definició de dimensió de Hausdorff per aquest quadrat agafant  $s = 2$ , el que volem calcular és:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^2(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^2 : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq F, |U_i| < \delta \right\}$$

Tenim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

que ens justifica que un quadrat de costat 1 té dimensió de Hausdorff 2.

**Exemple 2.10.** Sigui ara  $F \subset \mathbb{R}^n$  un segment de mida 1, volem veure que  $\mathcal{H}^2(F) = 0$ , és a dir, que l'àrea d'un segment de costat 1 és zero. El que volem calcular és doncs,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^2(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^2 : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq F, |U_i| < \delta \right\}$$

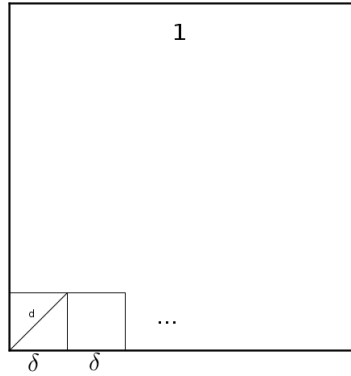


Figura 5: Quadrat de costat 1 dividit en  $n^2$  quadrats de costat  $\delta$  i diàmetre  $\sqrt{2}\delta$ .



Figura 6: Segment de mida 1 dividit en  $n$  trossos de llargada  $\delta$ .

Agafem doncs, per a recobrir-lo, la col·lecció d'oberts  $\{U_i\}$  corresponents als segments de costat  $\delta = \frac{1}{n}$ . Per recobrir tot aquest segment, necessitarem exactament  $n$  segments de costat  $\delta$  (veure Figura 6). Tenim doncs

$$\delta > |U_i| \Rightarrow n \geq \frac{1}{\delta} \Rightarrow n\delta \geq 1$$

com volem l'ímfim, triem  $\delta = \frac{1}{n}$ . Tenim doncs,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

Fins aquí hem vist que l'àrea d'un segment de mida 1 és zero. Ara, apliquem la definició de dimensió de Hausdorff per aquest segment agafant  $s = 1$ , veient que la dimensió d'un segment és 1, el que volem calcular és:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^1(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^1 : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq F, |U_i| < \delta \right\}$$

Tenim en el nostre cas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$$

que ens justifica que un segment de mida 1 té dimensió de Hausdorff 1.

Seguidament, es presenten un conjunt de propietats que satisfan la dimensió de Hausdorff per a conjunts qualsevols de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposició 2.11.** *Es verifiquen els següents enunciats:*

- (a) *Si  $E \subset F$ , aleshores,  $\dim_{\mathcal{H}} E \leq \dim_{\mathcal{H}} F$ .*
- (b) *Siguin  $F_1, F_2, \dots$  una seqüència de conjunts numerables, tenim  $\dim_{\mathcal{H}}(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_{\mathcal{H}} F_i$ , en particular,  $\dim_{\mathcal{H}}(E \cup F) = \max(\dim_{\mathcal{H}} E, \dim_{\mathcal{H}} F)$ .*
- (c) *Conjunts oberts. Sigui  $F \subset \mathbb{R}^n$  obert, aleshores,  $\dim_{\mathcal{H}}(F) = n$*
- (d) *Conjunts comptables. Si  $F$  és comptable, aleshores,  $\dim_{\mathcal{H}}(F) = 0$ .*



### 3 Recompte de caixes

En el darrer punt, hem estudiat la dimensió de Hausdorff, tanmateix, aquesta no és la única definició de dimensió. En aquest apartat, n'estudiarem una altra, la dimensió del recompte de caixes (en anglès Box-Counting), que és una de les dimensions més conegudes actualment, estudiada per Hermann Minkowski<sup>2</sup>. La definició formal d'aquesta sorgeix al voltant del 1930. La fórmula de la dimensió del recompte de caixes, està inspirada en la relació entre l'escala a la que observem una forma auto-semblant i el nombre de còpies escalades que hi ha dins d'aquesta forma (Veure Capítol 4).

Aquesta dimensió apareix perquè calcular la dimensió de Hausdorff pot ser molt complicat i és una dimensió que en general aproxima a la dimensió de Hausdorff. A més, donat un objecte en forma d'imatge, aquesta dimensió és possible calcular-la mitjançant un ordinador.

Per a objectes senzills com els que hem vist a l'apartat anterior, hem pogut calcular l'ímfim del sumatori de la  $s$ -èssima potència del diàmetre de cada obert tals que tota una col·lecció d'aquests oberts recobreix el nostre conjunt. La dimensió del recompte de caixes sorgeix per poder treballar amb certs conjunts rars tals que no podem calcular la dimensió de Hausdorff.

Finalment, veurem un exemple on la dimensió del recompte de caixes i la de Hausdorff no coincideixen ni s'aproximen. A l'Annex 8.1 he programat en Python un programa que donada una imatge en blanc i negre et calcula la seva dimensió del recompte de caixes.

**Definició 3.1.** *Sigui  $F$  un conjunt no buit i acotat de  $\mathbb{R}^n$  i sigui  $N_\delta(F)$  el nombre més petit de conjunts de diàmetre com a màxim  $\delta \in (0, 1)$  que poden recobrir  $F$ . La dimensió inferior i superior del recompte de caixes de  $F$ , respectivament, es defineixen com*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

*Si aquests dos límits existeixen i, a més, coincideixen, aquest valor serà la dimensió del recompte de caixes o Box-Counting de  $F$  i l'escriurem*

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Seguidament, es dona una definició equivalent a la definició anterior. Considerem la col·lecció de cubs de  $\mathbb{R}^n$  de la forma

---

<sup>2</sup>Hermann Minkowski (Imperi rus, 1864 - Imperi alemany, 1909) va ser un matemàtic alemany d'origen jueu que va desenvolupar la teoria geomètrica dels nombres. Els seus treballs més destacats van ser realitzats en les àrees de la teoria de nombres, la física matemàtica i la teoria de la relativitat.

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

on  $m_1, \dots, m_n$  son enters i aquests cubs cobreixen tot l'espai, (corresponen a intervals a  $\mathbb{R}$  i a quadrats a  $\mathbb{R}^2$ ). Sigui  $N'_\delta(F)$  el nombre de cubs que intersequen amb  $F$ . Aquests cubs, ens proporcionen una col·lecció de  $N'_\delta(F)$  conjunts de diàmetre  $\delta\sqrt{n}$  que cobreixen  $F$ , per tant,

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F)$$

Si agafem  $\delta$  tal que  $\delta\sqrt{n} < 1$ , tenim

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta}$$

i agafant el límit inferior i superior quan  $\delta \rightarrow 0$

$$\underline{\dim}_B F \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \quad \overline{\dim}_B F \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \quad (3.1)$$

Tot conjunt de diàmetre com a màxim  $\delta$  està contingut en  $3^n$  cubs encaixats de costat  $\delta$ . Aleshores,

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$$

i agafant logaritmes i el limit de  $\delta$  quan tendeix a zero ens porta a les desigualtats contràries a les que hem obtingut a 3.1. Aleshores, per calcular la dimensió del recompte de caixes, podem fer servir  $N_\delta(F)$  com el nombre de cubs encaixats de mida  $\delta$  que intersequen amb  $F$ .

Ara, ens centrarem en les formes més senzilles, veient exemples per a formes tals que la seva dimensió topològica coincideix amb la de Hausdorff i és un nombre natural, i, seguidament, ho generalitzarem per formes tals que les seves dimensions del recompte de caixes i topològica també coincideixen i donen un nombre racional o irracional.

Per a segments, quadrats i cubs, observem que hi ha una relació entre un factor d'escala  $r$  i el nombre de còpies d'una forma similar,  $N(r)$ , escalades per aquest  $r$ . Considerarem còpies de l'objecte  $R \subset \mathbb{R}^n$  a escala  $r < 1$ , llavors necessito  $\left(\frac{1}{r}\right)^n$  peces per a recuperar l'objecte inicial. Sigui  $D$  la dimensió d'aquestes formes, la relació és:  $N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^D$ . Si aquesta relació es manté, aleshores, aïllant  $D$  tenim:

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow \ln(N(r)) = D \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow D = \frac{\ln(N(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Sovint, aquest resultat pot ser sensible a la posició que coloquem la graella, però això no suposarà cap problema per als fractals matemàtics ja que farem el límit quan la mida de la caixa tendeix a zero. Seguidament, es mostra un exemple per a objectes de dimensions u, dos i tres respectivament.

**Exemple 3.2.** En aquest exemple, a partir d'un segment de longitud 1, podem escalar el segment per  $1/2$  i observar que surten dos còpies de longitud  $1/2$  que cobreixen el segment inicial. De forma anàloga, necessitem tres segments escalats per  $1/3$ , quatre segments escalats per  $1/4$ . Aplicant la fórmula anterior, tenim les següents igualtats:

$$2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad , \quad 3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad , \quad 4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)}$$

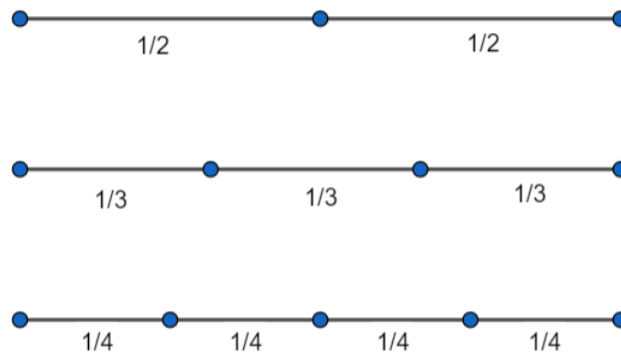


Figura 7: En aquesta figura es visualitza les diverses particions per a cada longitud  $r$  dels segments dels quals fem la partició.

En general, representant l'escala per  $r$  i el nombre de segments d'escala  $r$  per  $N(r)$ , tenim la següent relació:

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^1$$

**Exemple 3.3.** Considerem un quadrat de costat 1, necessitem 4 còpies d'aquest quadrat escalat per  $1/2$  per recobrir-lo, cada còpia del quadrat, tindrà costat  $1/2$ . De forma anàloga, si escalem per  $1/3$  necessitem 9 quadrats. Aplicant la fórmula anterior tenim les següents igualtats:

$$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad , \quad 9 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \quad , \quad 16 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

En general, representant l'escala per  $r$  i el nombre de quadrats d'escala  $r$  per  $N(r)$ , tenim la següent relació:

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^2$$

**Exemple 3.4.** Finalment considerem un cub de costat 1, necessitem 8 còpies d'aquest cub escalat per 1/2 per recobrir-lo, cada còpia del cub, tindrà costat 1/2. De forma anàloga, si escalem per 1/3 necessitem 27 cubs. Aplicant la fórmula anterior tenim les següents igualtats:

$$8 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \quad , \quad 27 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \quad , \quad 64 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$$

En general, representant l'escala per  $r$  i el nombre de cubs d'escala  $r$  per  $N(r)$ , tenim la següent relació:

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^3$$

**Observació 3.5.** Sigui  $Q$  un cub de  $\mathbb{R}^n$ , aleshores,  $n = \dim_T(Q) = \dim_B(Q) = \dim_H(Q) = n$ , on  $\dim_T$  correspon a la dimensió topològica,  $\dim_B$  correspon a la dimensió del recompte de caixes i  $\dim_H$  correspon a la dimensió de Hausdorff.

Ara es presenten exemples que consten d'objectes que tenen com a dimensió de recompte de caixes un número irracional, però segueixen sent figures senzilles. Observem que per aquests tres exemples, la dimensió de recompte de caixes coincideix amb la dimensió de Hausdorff. Seguidament, doncs, calcularem la dimensió del recompte de caixes del conjunt de Cantor, la corba de Koch i la catifa de Sierpinski a partir de la definició donada. El conjunt de Cantor és un subconjunt fractal de l'interval real  $[0, 1]$  que admet dues definicions equivalents:

- Numèrica: Conjunt de punts de l'interval real  $[0, 1]$  que admeten una expressió en base 3 que no tingui el dígit 1.
- Geomètrica: De caràcter recursiu, que elimina a cada pas el segment obert corresponent al terç central de cada interval, és a dir, al primer pas agafem l'interval  $[0, 1]$  i eliminem el seu terç interior, o sigui, l'interval  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . El següent pas és treure als dos segments resultant els seus respectius terços interiors, és a dir, els dos intervals oberts  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  i  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  i així successivament.

**Exemple 3.6.** Sigui  $F$  el conjunt de Cantor (veure Figura 8) on el pas zero és l'interval  $[0, 1]$ . Demostrarem que la dimensió del recompte de caixes d'aquest conjunt és  $\frac{\log 2}{\log 3}$ .

Al pas  $k$ , podem cobrir el conjunt amb  $2^k$  intervals  $I_k$  de llargada  $3^{-k}$  i tenim que  $N_\delta(F) \leq 2^k$  si  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ . Aplicant la definició tenim

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{(k-1) \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Per altra banda, tot interval de longitud  $\delta$  amb  $3^{-k-1} < \delta \leq 3^{-k}$  interseca al pas  $k$  amb el conjunt  $F$  com a màxim amb un dels intervals de longitud  $3^{-k}$ . Tenim al pas  $k$ ,  $2^k$  intervals, per tant, necessitem com a mínim  $2^k$  intervals de longitud  $\delta$  per a cobrir tot  $F$ . Aleshores,

$$N_\delta(F) \geq 2^k \Rightarrow \underline{\dim}_B F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$$

Finalment, gràcies a les dues desigualtats tenim,

$$\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F) = \frac{\log 2}{\log 3} \Rightarrow \dim_B(F) = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63093\dots$$

tal i com volíem. Seguidament, estudiarem la dimensió de Hausdorff del conjunt de Cantor. Observem que al pas  $n$ , per recobrir l'objecte i trobar l'ínfim del sumatori de la  $s$ -èsima potència del diàmetre de cada obert del recobriment, i que aquest ínfim no sigui ni zero ni infinit, cal trobar aquest diàmetre, que en aquest cas, és  $\frac{1}{3^n}$ . Tenim un total de  $2^n$  oberts. Aleshores,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{1}{3^n}\right)^s = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\frac{1}{3^{ns}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{ns}}$$

Volem que aquest límit sigui un número diferent de zero i d'infinit, per tant,

$$2^n = 3^{ns} \Rightarrow \ln 2^n = \ln 3^{ns} \Rightarrow n \ln 2 = ns \ln 3 \Rightarrow s = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63093\dots$$

Observem que per al conjunt de Cantor la dimensió del recompte de caixes i la dimensió de Hausdorff coincideixen.

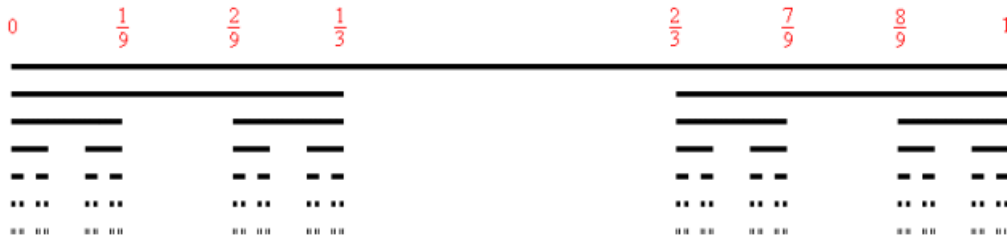


Figura 8: Conjunt de Cantor

La corba de Koch, és una corba contínua però no diferenciable en cap punt descrita pel matemàtic suec Helge von Koch l'any 1904. Per construir aquesta corba, agafem un segment i el dividim en tres parts iguals, substituint la part central per dos parts de la mateixa llargada fent un angle de 60 graus. Aleshores, amb els quatre segments que tenim repetim el mateix procés, cosa que donarà lloc a 16 segments més petits i repetim aquest procés de forma iterativa.

**Exemple 3.7.** Sigui  $F$  la corba de Koch (veure figura 9) on el pas zero és l'interval  $[0,1]$ . Hem de veure que  $\dim_B F = \frac{\log 4}{\log 3}$ . Veurem la següent igualtat  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$ , que implica el que volem.

Al pas  $k$ , podem cobrir el conjunt  $F$  amb  $4^k$  boles  $B_k$  tancades de diàmetre  $3^{-k}$  i obtenim que  $N_\delta(F) \leq 4^k$  si  $3^{-k} < \delta < 3^{-k+1}$ . Aleshores,

$$\overline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 4^k}{\log 3^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 4}{(k-1) \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3}$$

Per altra banda, tota bola de diàmetre  $\delta$  amb centre al centre de cada segment de  $F$  tal que  $3^{-k-1} < \delta \leq 3^{-k}$  interseca al pas  $k$  amb el conjunt  $F$  com a màxim en un segment d'aquest conjunt que té longitud  $3^{-k}$ . A més, al pas  $k$ , el conjunt  $F$  té en total  $4^k$  segments, aleshores, necessitarem com a mínim  $4^k$  boles de radi  $\delta$  per recobrir el nostre conjunt  $F$ . Aleshores,

$$N_\delta(F) \geq 4^k \Rightarrow \underline{\dim}_B F \geq \frac{\log 4}{\log 3}$$

Finalment, gràcies a les dues desigualtats tenim,

$$\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F) = \frac{\log 4}{\log 3} \Rightarrow \dim_B(F) = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26186\dots$$

tal i com volíem. Seguidament, estudiarem la dimensió de Hausdorff de la corba de Koch. Observem que al pas  $n$ , per recobrir l'objecte i trobar l'ínfim del sumatori de la  $s$ -èssima potència del diàmetre de cada obert del recobriment, i que aquest ínfim no sigui ni zero ni infinit, cal trobar aquest diàmetre, que en aquest cas, és  $\frac{1}{3^n}$ . Tenim un total de  $4^n$  oberts. Aleshores,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{4^n} \left(\frac{1}{3^n}\right)^s = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left(\frac{1}{3^{ns}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{ns}}$$

Volem que aquest límit sigui un número diferent de zero i d'infinit, per tant,

$$4^n = 3^{ns} \Rightarrow \ln 4^n = \ln 3^{ns} \Rightarrow n \ln 4 = ns \ln 3 \Rightarrow s = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26186\dots$$

Observem que per a la corba de Koch, la dimensió del recompte de caixes i la dimensió de Hausdorff coincideixen.



Figura 9: Corba de Koch

La catifa de Sierpinski és un conjunt fractal descrit per primer cop pel matemàtic polonès Waclaw Sierpiński l'any 1916. Constitueix una generalització a dues dimensions del conjunt de Cantor. La construcció de la catifa de Sierpinski es defineix de forma recursiva, suposem que a l'inici tenim un quadrat, el tallem en nou quadrats iguals i eliminem el quadrat central, aquest pas es torna a aplicar de forma recursiva per a cadascun dels 8 quadrats que han quedat. La catifa de Sierpinski és doncs, el límit d'aquest procés després d'un nombre infinit d'iteracions.

**Exemple 3.8.** Per últim veure un exemple on  $F$  és la catifa de Sierpinski (veure figura 10), el pas zero és el quadrat de costat 1. Hem de veure que  $\dim_B F = \frac{\log 8}{\log 3}$ . De la mateixa forma que als exemples anteriors, veurem la igualtat  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$ , que implica el que volem.

Al pas  $k$ , podem recobrir el conjunt  $F$  amb  $8^k$  quadrats  $Q_k$  tancats de costat  $3^{-k}$  i obtenim que  $N_\delta(F) \leq 4^k$  si  $3^{-k} < \delta < 3^{-k+1}$ . Aleshores,

$$\overline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 8^k}{\log 3^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 8}{(k-1) \log 3} = \frac{\log 8}{\log 3}$$

Per altra banda, tot quadrat de costat  $\delta$  amb centre al centre de cada quadrat de  $F$  tal que  $3^{-k-1} < \delta \leq 3^{-k}$  interseca al pas  $k$  amb el conjunt  $F$  com a màxim en un quadrat d'aquest conjunt que té costat  $3^{-k}$ . A més, al pas  $k$ , el conjunt  $F$  té en total  $4^k$  quadrats, aleshores, necessitarem com a mínim  $4^k$  quadrats de costat  $\delta$  per cobrir el nostre conjunt  $F$ . Aleshores,

$$N_\delta(F) \geq 8^k \Rightarrow \underline{\dim}_B F \geq \frac{\log 8}{\log 3}$$

Finalment, gràcies a les dues desigualtats tenim,

$$\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F) = \frac{\log 8}{\log 3} \Rightarrow \dim_B(F) = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.89279 \dots$$

tal i com volíem. Seguidament, estudiarem la dimensió de Hausdorff de la catifa de Sierpinski. Observem que al pas  $n$ , per recobrir l'objecte i trobar l'ímfim del sumatori de la  $s$ -èsima potència del diàmetre de cada obert del recobriment, i que aquest ímfim no sigui ni zero ni infinit, cal trobar aquest diàmetre, que en aquest cas, és  $\frac{\sqrt{2}}{3^n}$ , ja que cada subquadrat del conjunt el triem com a l'obert, així ens assegurem trobar l'ímfim. Tenim un total de  $8^n$  oberts. Aleshores,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{8^n} \left( \frac{\sqrt{2}}{3^n} \right)^s = \lim_{n \rightarrow \infty} 8^n \left( \frac{\sqrt{2}}{3^{ns}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n}{3^{ns}}$$

Volem que aquest límit sigui un número diferent de zero i d'infinit, per tant,

$$8^n = 3^{ns} \Rightarrow \ln 8^n = \ln 3^{ns} \Rightarrow n \ln 8 = ns \ln 3 \Rightarrow s = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.89279 \dots$$

Observem que per a la catifa de Sierpinski la dimensió del recompte de caixes i la dimensió de Hausdorff coincideixen.

Finalment, veurem que existeixen objectes tals que la seva  $\dim_H$  i  $\dim_B$  no coincideixen, donarem proposicions i un exemple per visualitzar-ho.

**Proposició 3.9.** *Sigui  $\overline{F}$  la clausura de  $F$  (és a dir, el menor conjunt tancat de  $\mathbb{R}^n$  que conté  $F$ ). Aleshores,*

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F \quad i \quad \overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F$$

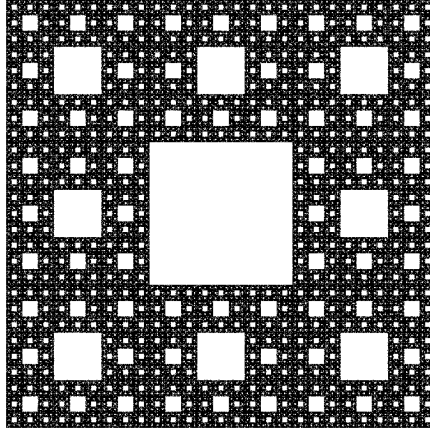


Figura 10: Catifa de Sierpinski

*Demostració.* Siguin  $B_1, \dots, B_n$  una col·lecció finita de boles tancades de radi  $\delta$ . Clarament, el conjunt  $\bigcup_{i=1}^k B_i$  és tancat, si aquest conjunt conté  $F$ , aleshores conté  $\overline{F}$ . Llavors, el nombre de boles tancades de radi  $\delta$  més petit que cobreix  $F$  és el mateix que necessitem per cobrir  $\overline{F}$  i per tant, tenim el que volíem.  $\square$

**Corol·lari 3.10.** Si  $F$  és un conjunt dens d'una regió oberta de  $\mathbb{R}^n$  aleshores,  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$

**Exemple 3.11.** Sigui  $F$  el conjunt (numerable) dels nombre racionals a l'interval  $[0,1]$ . Com  $F$  és dens,  $\overline{F} = [0,1]$ , aleshores,  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 1$ .

**Exemple 3.12.** Sigui  $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ . Vegem que  $\dim_H$  i  $\dim_B$  en aquest cas no coincideixen, calculem  $\dim_B$ . Sigui  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  i sigui  $k$  un enter tal que

$$\frac{1}{(k-1)k} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$$

si  $|U| < \delta$ , aleshores,  $U$  pot cobrir com a màxim un dels punts del conjunt  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}\}$ . Així, almenys necessitem  $k$  conjunts de diàmetre  $\delta$  per cobrir el conjunt  $F$ , per tant,  $N_\delta(F) \geq k$ , triant  $\delta \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  tenim,

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log(k)}{\log k(k+1)} \Rightarrow \underline{\dim}_B(F) = \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(k)}{\log k(k+1)} = \frac{1}{2}$$

obtenint,  $\dim_B(F) \geq \frac{1}{2}$ . Per altra banda, agafant també  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  i  $k$  un enter tal que

$$\frac{1}{(k-1)k} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$$

tenim  $(k+1)$  intervals de mida  $\delta$  cobrint l'interval  $[0, \frac{1}{k}]$ , deixant  $(k-1)$  punts de  $F$  que els cobrim amb els altres  $(k-1)$  intervals. Així,  $N_\delta(F) \leq 2k$

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(2k)}{\log k(k-1)} \Rightarrow \overline{\dim}_B(F) = \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(2k)}{\log k(k-1)} = \frac{1}{2}$$



que juntament amb la desigualtat anterior obtenim  $\dim_B(F) = \frac{1}{2}$ . En canvi, per calcular  $\dim_H(F)$ , podem triar com a col·lecció  $\{U_i\}$  cadascun dels punts  $\frac{1}{k}$ , excepte a partir d'un cert  $k$  gran que agafarem un obert molt petit però que contindrà un nombre infinit de punts, aleshores, per un costat tindrem  $|U_i| = 0$  per a tota  $i < k$  i per a l'obert  $k$ ,  $|U_i| = \delta$ . Aleshores,  $\dim_H(F) = 0$ .

## 4 Sistemes de funcions iterades i dimensió fractal

En aquest punt, dividit en dos apartats, veurem sistemes de funcions iterades, que ja em citat al llarg d'aquest treball i, en el segon apartat, definirem el concepte de fractal i el que entenem per dimensió fractal creat per un sistema de funcions iterades.

### 4.1 Sistemes de funcions iterades

En aquest apartat, definirem i donarem propietats i exemples del que s'anomena un sistema de funcions iterades IFS, (en anglès, Iterated Function Systems). Primerament, per introduir aquest concepte s'explica el joc del Caos i seguidament donarem definicions i proposicions necessàries. Finalment, a l'annex s'adjunta un petit programa en C que donat una família de transformacions ens retorna la imatge final després d'un nombre alt d'iteracions.

En altres apartats d'aquest treball ja hem citat algun fractal i hem vist imatges (per exemple, conjunt de Cantor, corba de Koch, catifa de Sierpinski...). Aquests fractals són casos particulars de conjunts obtinguts mitjançant sistemes de funcions iterades, ho veurem a continuació. El triangle de Sierpinski (veure Figura 11) és

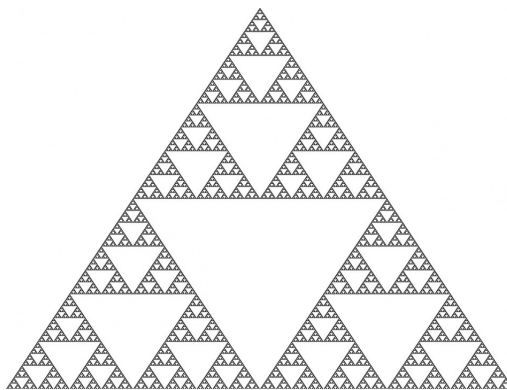


Figura 11: Triangle de Sierpinski

el resultat d'iterar un conjunt d'afinitats donades pel sistema de funcions iterades de manera reiterativa. Veurem també que el conjunt resultant d'aquesta iteració és únic i independent del conjunt amb el qual comencem a iterar (teorema de Collage). Per al triangle de Sierpinski, necessitarem tres transformacions diferents que són les següents:

$\omega$	a	b	c	d	e	f	p
$f_1$	0.5	0	0	0.5	1	1	0.33
$f_2$	0.5	0	0	0.5	1	50	0.33
$f_3$	0.5	0	0	0.5	50	50	0.34

Taulla 1: Afinitats del triangle de Sierpinski.

Veurem sistemes de funcions iterades des del punt de vista probabilístic. És a dir, en alguns casos, donada una família de transformacions, necessitarem assignar una probabilitat a cada transformació per poder crear l'objecte final que desitgem (per exemple, la falguera i l'arbre), però en altres, podem triar la transformació de forma aleatòria (en aquest cas, el que he fet és assignar la mateixa probabilitat a cada transformació). L'última columna de la Taula 1 correspon a la probabilitat, en aquest cas, observem que la transformació que triem és pràcticament aleatòria. La resta de columnes s'expliquen al llarg d'aquesta secció. Cada fila de la taula correspon a una afinitat.

Per al joc del Caos, suposem que tenim 3 punts al pla, aquest punt poden ser aleatoris, denotem aquests punts amb les lletres H, T i S. El jugador ha d'escollir un punt qualsevol del pla i marcar-lo, aquest punt el notarem  $z_1$ . Seguidament, agafem un dau perfecte de sis cares i el llancem, si surt 1 o 2 ens em de fixar amb el punt H, si surt 3 o 4 ens fixarem en el punt T i si surt 5 o 6 ens fixem en el punt S. Suposem que a la primera llançada del dau ens ha sortit un 3, aleshores marquem el punt  $z_2$  que és el punt mig entre  $z_1$  i el punt que correspon a la cara 3 del dau, és a dir, T. Fem una segona llançada del dau, suposem que ara surt un 1, aleshores, el punt  $z_3$  correspon al punt mig entre  $z_2$  i el punt H. Realitzem aquest experiment un nombre molt gran de vegades, per exemple un milió de cops, aleshores tindrem marcats 1.000.003 de punts (els tres inicials i un per cada llançada de dau). Aleshores, la figura que ens queda al finalitzar el joc del caos és molt semblant a un triangle de Sierpinski que té vèrtexs H, T i S. Sigui P la figura que ens queda després d'un nombre gran de llançades, observem que P és la unió de tres còpies escalades d'ell mateix, en efecte,

$$P = \omega_1(P) \cup \omega_2(P) \cup \omega_3(P)$$

on,  $\omega_1$  és una transformació afí que passa del triangle que té vèrtexs H, T i S al triangle que té vèrtexs H, el punt mig entre H i T i el punt mig entre H i S. De forma anàloga definim  $\omega_2$  i  $\omega_3$ .

Seguidament, donarem una generalització del joc del Caos, donarem un llenguatge matemàtic i la teoria que hi ha darrere d'aquest joc. Siguin  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  un conjunt de N transformacions tals que agafant un punt  $z \in \mathbb{R}^2$  (podem suposar  $z \in \mathbb{C}$ , en aquest apartat ho visualitzarem com un punt de  $\mathbb{R}^2$ ) obtenim un nou punt  $\omega(z) \in \mathbb{R}^2$ . En cada una d'aquestes transformacions, els punts s'estan acostant, és a dir, sigui  $d(z_1, z_2)$  la distància entre dos parells de punts  $z_1$  i  $z_2$ , tenim que per alguna  $k \in (0, 1)$ ,

$$d(\omega_j(z_1), \omega_j(z_2)) < k \cdot d(z_1, z_2)$$

per a tot parell de punts  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$  i per tota transformació  $\omega_j$ , en aquest cas, direm que  $\omega_j$  és una transformació contractiva. La mínima constant k que verifica la desigualtat anterior s'anomena constant de Lipschitz.

**Exemple 4.1.** Sigui  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformació tal que

$$\omega(z) = \omega(x, y) = \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 0.5, \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 0.25 \right)$$

Notem que podem escriure aquesta transformació en forma de matriu de la següent forma:

$$\omega(z) = \omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Siguin  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  un conjunt d'aplicacions contractives de  $\mathbb{R}^2$ . Fixem un punt  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ , i, escollim aleatòriament una de les transformacions anteriors per generar  $z_1$ , de forma anàloga ho fem per la resta de punts, d'aquesta forma, generem una seqüència de punts  $z_1, z_2, \dots$ , per exemple, per generar  $z_{243}$ , escollim aleatòriament un punt entre  $\omega_1(z_{242}), \omega_2(z_{242}), \dots, \omega_N(z_{242})$ . Aleshores, amb probabilitat 1, aquesta seqüència de punts convergeix a una única figura<sup>3</sup>. La figura en qüestió serà la única que compleixi

$$P = \omega_1(P) \cup \omega_2(P) \cup \dots \cup \omega_N(P)$$

L'estructura de  $P$  és molt complexa.  $P$  és totalment fixa un cop coneixem les transformacions  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ . Aquesta figura pot tindre molts forats i formes diferents, no es auto-similar<sup>4</sup>, grans augments de parts de la imatge no ens revelaran petites còpies de la imatge sencera. Per tant,  $P$  no dependrà de les probabilitats relatives assignades a cada transformació sempre i quan siguin positives.

**Definició 4.2.** Una transformació afí  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es defineix com

$$\omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{pmatrix}$$

on  $a_{ij}, b_i$  són consants reals.

**Notació 4.3.** Denotarem  $A$  a la matriu  $(a_{ij})$ ,  $b$  al vector  $(b_1, b_2)^t$  i  $z = (x, y)^t$ , aleshores, podem escriure

$$\omega(z) = Az + b$$

**Observació 4.4.** Una transformació afí a  $\mathbb{R}^2$  ve donada per sis nombres reals.

Donada una transformació afí, podem trobar un nombre real no negatiu  $s$  tal que

$$|\omega(z_1) - \omega(z_2)| \leq s \cdot |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$$

on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

tal i com l'hem definida abans, la menor  $s$  que compleixi la inequació anterior, l'anomenarem constant de Lipschitz de l'aplicació  $\omega$ . Aleshores, una transformació afí  $\omega$  l'anomenarem:

---

<sup>3</sup>Durant tot el treball, quan parlem de figures i imatges, considerarem que tot allò de color blanc forma part del fons i el que no sigui de color blanc formarà part de la figura.

<sup>4</sup>Propietat d'alguns objectes en el que el tot és exacta o aproximadament semblant a una part d'ella mateixa, per exemple, quan el tot té la mateixa forma que una o diverses de les seves parts.

- Contractiva, si  $s < 1$ .
- Simetria, si  $s = 1$ , i.e.  $|\omega(z_1) - \omega(z_2)| = |z_1 - z_2|$ ,  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ .
- Expansiva, si  $s > 1$ .

Seguidament, donarem dues definicions rigoroses del concepte d'IFS utilitzant les definicions anteriors, la primera, és la que utilitza Michael F. Barnsley en els seus llibres i la segona és la que se'ns ha donat al grau, aquestes, ens serviran per poder enunciar el teorema de Collage.

**Definició 4.5.** *Sigui  $N$  un nombre enter positiu, un sistema de funcions iterades (IFS) de dimensió 2 és un conjunt de  $N$  transformacions afins,  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  tals que  $\omega_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , amb una probabilitat  $\{p_1, \dots, p_N\}$  on  $p_i > 0$ ,  $\forall i$ , i, com que és una probabilitat, compleix  $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ . Denotem el conjunt dels IFS com  $\{\omega_n, p_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .*

Sigui  $s_n$  la constant de Lipschitz respectiva per cada  $\omega_n$ , aleshores direm que un IFS compleix la condició de *mitjana contractiva* si

$$s := s_1^{p_1} \cdot s_2^{p_2} \cdot \dots \cdot s_N^{p_N} < 1$$

**Definició 4.6.** *Siguin  $A, B$  dos conjunts tancats i acotats de  $\mathbb{R}^2$ , definim la distància de Hausdorff del conjunt  $A$  al conjunt  $B$  com*

$$h(A, B) = \max \left\{ \max_{x \in A} \min_{y \in B} |x - y| ; \max_{y \in B} \min_{x \in A} |x - y| \right\}$$

Aquesta  $h$ , ens dirà quant de diferents són aquests dos conjunts, i veurem que aquesta és petita al teorema de Collage ja que volem garantir que donat un sistema de funcions iterades, el resultat final sempre és el mateix independentment de l'inici, què és irrellevant quan iteres de forma reiterativa.

**Teorema 4.7.** *(Collage). Sigui  $\{\omega_n, p_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  un IFS que compleix la condició de mitjana contractiva amb constant de Lipschitz  $s < 1$ . Sigui  $\epsilon > 0$  qualsevol. Donat un subconjunt  $T$  tancat i acotat de  $\mathbb{R}^2$  i suposem que  $\omega_n$  han estat triats tal que*

$$h \left( T, \bigcup_{n=1}^N \omega_n(T) \right) < \epsilon$$

*Aleshores,*

$$h(T, \mathcal{A}) < \frac{\epsilon}{1 - s}$$

*on  $\mathcal{A}$  denota l'atractor de l'IFS.*

**Definició 4.8.** Un IFS és un conjunt de contraccions del pla  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  i  $P_0$  una figura qualsevol (conjunt de punts) tals que

$$\begin{aligned} P_1 &= \omega_1(P_0) \cup \dots \cup \omega_N(P_0) \\ P_2 &= \omega_1(P_1) \cup \dots \cup \omega_N(P_1) \\ &\dots \\ P_{k+1} &= \omega_1(P_k) \cup \dots \cup \omega_N(P_k) \end{aligned}$$

Si quan  $k$  tendeix a infinit aquesta successió convergeix a una figura  $P$ , aquesta ha de ser invariant per les  $N$  afinitats simultàniament, i en aquest cas tindrem

$$P = \omega_1(P) \cup \dots \cup \omega_N(P)$$

**Teorema 4.9.** (Collage). Siguin  $\omega_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, N$ , contraccions. Sigui  $\omega : K(\mathbb{R}^2) \rightarrow K(\mathbb{R}^2)$  que actua sobre el conjunt de compactes del pla per

$$\omega(C) = \omega_1(C) \cup \dots \cup \omega_N(C)$$

on

$$\omega_i(C) = \{\omega_i(x, y) : (x, y) \in C\}$$

Aleshores, existeix un únic compacte  $A$  tal que  $\omega(A) = A$ . A més, per tot compacte  $B$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(B) = A$$

amb la mètrica de Hausdorff a  $K(\mathbb{R}^2)$ .

Seguidament, presentarem un exemple d'un fractal molt conegut que té forma de falguera (Barnsley fern). Aquest fractal és un exemple bàsic de conjunt autònom, és a dir, un patró matemàticament generat que pot reduir-se en qualsevol ampliació o reducció. És un exemple que ens mostra com és poden construir estructures belles a partir d'usos repetitius de fòrmules matemàtiques amb l'ajuda d'ordinadors.

**Exemple 4.10.** Per poder construir la figura en forma de falguera necessitarem quatre transformacions afins, una per la tija, una per les fulles més petites i dues per les fulles més grans (una per les de la dreta i una altra per les de l'esquerra)

$\omega$	a	b	c	d	e	f	p	Porció que generen
$f_1$	0	0	0	0.16	0	0	0.01	Tija
$f_2$	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.60	0.85	Fulles més petites
$f_3$	0.20	-0.26	0.23	0.22	0	1.60	0.07	Fulles grans de l'esquerra
$f_4$	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07	Fulles grans de la dreta

Taula 2: Afins de la falguera.

Aquestes afinitats corresponen a les següents transformacions:

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{pmatrix}$$

$$f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

$$f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.44 \end{pmatrix}$$

A l'annex, he afegit la imatge i tres exemples més de sistemes de funcions iterades.

## 4.2 Dimensió fractal

La dimensió fractal és una mesura sensible, ens proporciona una eina objectiva per a comparar fractals. Existeixen diferents definicions equivalents de dimensió fractal. Podem estimar la dimensió fractal d'objectes que veiem cada dia al nostre voltant, com poden ser núvols, arbres, penínsules, tumors, pulmons... Aquesta dimensió, ens permetrà comparar aquests objectes entre ells o comparar un objecte en un moment donat amb el mateix objecte passat un cert temps. La dimensió fractal que es planteja en aquest treball és aplicable només en objectes auto-similars. Com hem observat en seccions anteriors, podem dividir un segment de llargada 1 en  $n$  trossos iguals de mida  $1/n$ . Si augmentem la mida de les peces per un factor  $n$ , queda exactament el segment inicial de llargada 1. Anàlogament, si tenim un quadrat de costat 1 i el dividim en quadrats iguals de costat  $1/n$ , haurem de dividir aquest quadrat en  $n^2$  peces quadrades iguals. De la mateixa forma, passaria amb el cub amb la diferència que en aquest cas necessitaríem un total de  $n^3$  cubs de costat  $1/n$  per a recobrir el cub inicial.

**Definició 4.11.** *Un fractal és un objecte tal que la seva dimensió de Hausdorff és més gran que la seva dimensió topològica.*

**Definició 4.12.** *Suposem que tenim un conjunt  $A \subset \mathbb{R}^n$  que és auto-similar i pot descomposar-se en  $k$  peces iguals que es transformen en el conjunt inicial mitjançant un augment de factor  $m$ . Aleshores, la dimensió fractal d' $A$  és:*

$$D_F(A) = \frac{\ln k}{\ln m} = \frac{\ln(\text{nombre de peces})}{\ln(\text{factor d'augment})}$$

Seguidament, veurem com aquesta definició satisfà els exemples esmentats anteriorment i que en aquests casos la dimensió fractal i la dimensió topològica coincideixen.

**Exemple 4.13.**  $D_F(\text{segment}) = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$

**Exemple 4.14.**  $D_F(\text{quadrat}) = \frac{\ln(n^2)}{\ln(n)} = \frac{2 \ln(n)}{\ln(n)} = 2$

**Exemple 4.15.**  $D_F(\text{cub}) = \frac{\ln(n^3)}{\ln(n)} = \frac{3 \ln(n)}{\ln(n)} = 3$

Ara calcularem la dimensió fractal dels objectes que hem vist en apartats anteriors, és a dir, del conjunt de Cantor, de la corba de Koch i de la catifa de Sierpinski). Veurem que en aquest cas, la dimensió fractal d'aquests objectes no és un nombre enter, i, a més, aquesta coincideix amb la dimensió de Hausdorff i la dimensió del recompte de caixes però no amb la topològica. Gràcies a això, i utilitzant la Definició 4.11 podrem dir que aquests conjunts són fractals.

**Exemple 4.16.** Sigui  $F$  el conjunt de Cantor. Hem vist que aquest, per a tot  $n > 0$ , es pot descompondre en un total de  $2^n$  peces iguals que es transformaven en el conjunt inicial al aplicar-se un factor d'augment de  $3^n$ , aleshores,

$$D_F(F) = \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = 0.6309 \dots$$

**Exemple 4.17.** Sigui  $F$  la corba de Koch. Hem vist que aquest, per a tot  $n > 0$ , es pot descompondre en un total de  $4^n$  peces iguals que es transformaven en el conjunt inicial al aplicar-se un factor d'augment de  $3^n$ , aleshores,

$$D_F(F) = \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{n \ln 4}{n \ln 3} = 1.2619 \dots$$

**Exemple 4.18.** Finalment, sigui  $F$  la catifa de Sierpinski. Hem vist que aquest, per a tot  $n > 0$ , es pot descompondre en un total de  $8^n$  peces iguals que es transformaven en el conjunt inicial al aplicar-se un factor d'augment de  $3^n$ , aleshores,

$$D_F(F) = \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{n \ln 8}{n \ln 3} = 1.8928 \dots$$



## 5 Iteració de polinomis quadràtics

En aquesta secció, ens centrarem en iterar en el pla complex un polinomi de grau dos amb un paràmetre complex  $c$  i estudiar que passa quan iterem un nombre molt gran de vegades. Haurem de distingir dos plans complexos, el pla de les  $z \in \mathbb{C}$  i el pla del paràmetre  $c \in \mathbb{C}$ . El nostre objectiu serà distingir els subconjunts del pla complex pels quals la funció  $f_c = z^2 + c$  iterada  $n \rightarrow \infty$  vegades escapa a infinit de quan no ho fa.

A l'Annex 8.3 he afegit un programa fet amb C i un conjunt d'exemples pels quals dibuixem les  $z$  tals que l'òrbita de  $z$  (quan iterem  $n$  vegades) no escapa a infinit.

Considerem la següent família de funcions definida en el pla complex,

$$\begin{aligned} f_c : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f_c(z) = z^2 + c \end{aligned}$$

on  $c \in \mathbb{C}$  i  $z \in \mathbb{C}$ . La dinàmica de  $f_c$  ens dona una gran varietat d'estructures fractals. En moltes ocasions, és convenient estendre el pla complex afegint el "punt de l'infinit". Aquesta extensió resulta en l'esfera de Riemann. Per treballar-hi usarem dues cartes locals  $\phi_1(z) = z$  i  $\phi_2(z) = \frac{1}{z}$  (aquesta darrera ens permet treballar en  $z = \infty$ ). Farem servir la notació següent  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Per aquest apartat, fixem  $c \in \mathbb{C}$  i no escriurem la dependència en el paràmetre  $c$  si no és necessari.

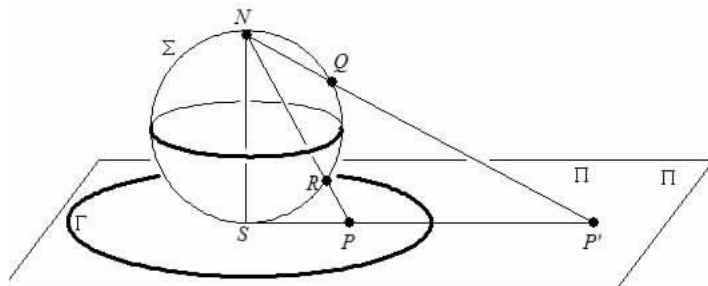


Figura 12: Interpretació gràfica de l'esfera de Riemann.

L'òrbita d'un punt  $z_0 \in \mathbb{C}$  és la successió  $\{z_n := f^n(z_0)\}_{n \geq 1}$ . Si tenim  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $z_0 = f^p(z_0)$  i  $f^l(z_0) \neq z_0$ ,  $\forall 0 \leq l < p$  direm que  $z_0$  és un punt periòdic de període  $p$ , en particular, si  $n = 1$  direm que tenim un punt fix. Per estudiar el comportament de l'aplicació  $f$  a l'infinit, usarem la carta local  $\phi_2(z)$ , notant la reflexió  $r(z) = \frac{1}{z}$ , considerarem

$$F_c(z) = r(f_c(r(z))) = r\left(f_c\left(\frac{1}{z}\right)\right) = r\left(\frac{1}{z^2} + c\right) = \frac{1}{\frac{1}{z^2} + c} = \frac{z^2}{1 + cz^2}$$

Observem que  $F_c(0) = 0$  i, a més,  $F'_c(0) = 0$  cosa que significa que el punt 0 és

un punt fix atractiu<sup>5</sup> de  $F_c$ . Equivalentment,  $\infty$  és un punt fix atractiu de  $f$ , en general, si  $p \in \mathbb{C}$  és un punt fix atractiu existeix un entorn de  $p$ , diem-li  $U$  tal que per tota condició inicial  $z_0 \in U$  tenim que  $f^n(z_0) \rightarrow p$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Això justifica la següent definició.

**Definició 5.1.** *La conca d'atracció de l'infinit és el conjunt de punts de  $\widehat{\mathbb{C}}$  tals que la seva òrbita tendeix a infinit, formalment,*

$$A_c(\infty) = \{z_0 \in \mathbb{C} : f^k(z_0) \rightarrow \infty \text{ amb } k \rightarrow \infty\}$$

Aquest conjunt no és buit,  $z = \infty$  és un punt fix atractiu i per tant existeix  $U \in \widehat{\mathbb{C}}$  obert que és entorn de  $z = \infty$  tal que per a tot  $z_0 \in U$ ,  $f^n(z_0) \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ . A més,  $A(\infty)$  és un conjunt obert ja que si  $z_0 \in A(\infty)$  usant la continuïtat de  $f$  existeix un entorn de  $z_0$  que també hi pertany.

En general,  $A(\infty)$  podria tenir més d'una component connexa però hom pot veure que en aquest cas,  $A(\infty)$  és connex usant el principi del mòdul màxim<sup>6</sup>. Suposem que n'hi ha dues,  $U$  i  $V$ , aleshores,  $U \cap V$  és obert. Hem vist que  $f^n(z)$  restringit a la frontera de  $V$  està acotat i  $f^n(z)$  restringit a l'interior de  $V$  tendeix a infinit, cosa que contradueix el principi del mòdul màxim.

**Definició 5.2.** *Sigui  $c \in \mathbb{C}$ , definim el conjunt ple de Júlia com*

$$\begin{aligned} K_c &= \widehat{\mathbb{C}} \setminus A_c(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : f_c^k(z) \not\rightarrow \infty \text{ si } k \rightarrow \infty\} = \\ &= \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \exists M := M(c) \text{ tal que } |f_c^k(z)| < M\} \end{aligned}$$

*Aquest conjunt és tancat i diferent del buit, ja que qualsevol punt periòdic solució de  $f^p(z) = z$  és de  $K_c$ .*

**Definició 5.3.** *La frontera de  $A_c(\infty)$  s'escriu  $\partial A_c(\infty)$  i s'anomena conjunt de Júlia de  $f_c$ , també utilitzarem la notació  $J_c$  per a referir-nos a aquest conjunt.  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J_c$  s'anomena conjunt de Fatou.*

**Observació 5.4.** La igualtat  $\partial K_c = J_c = \partial A_c(\infty)$  és certa.

**Proposició 5.5.** *Els conjunts  $A_c(\infty)$  i  $K_c$  són completament invariants, és a dir, si  $z_0$  pertany a un d'ells també ho fan tots els iterats endavant  $O_+(z_0)$  i enrere  $O_-(z_0)$ . Observem que l'òrbita enrere la definim com a conjunt, és a dir,  $\omega \in O_-(z_0)$  si i només si existeix una  $k$  positiva tal que  $f^k(\omega) = z_0$ .*

En general, és difícil determinar explícitament els conjunts de Julia i conjunt ple de Julia. Seguidament veurem un exemple trivial ( $c=0$ ) i un exemple on trobem el conjunt de Julia via conjugacions.

<sup>5</sup>Sigui  $F(z)$  una funció als complexos i sigui  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que,  $F(z_0) = z_0$  aleshores, direm que  $z_0$  és un punt fix atractiu si  $|F'(z_0)| < 1$  i repulsor si  $|F'(z_0)| > 1$

<sup>6</sup>Sigui  $\Omega \in \mathbb{C}$  un obert connex,  $f$  una funció holomorfa diferent de constant, aleshores,  $|f|$  no té màxim local a  $\Omega$ . Si a més,  $\Omega$  és acotat i  $f \in \mathcal{C}(\delta\Omega)$ , el màxim de  $|f(z)|$  s'assoleix a  $f(\delta\Omega)$ .

**Exemple 5.6.** Suposem  $c = 0$ , en aquest cas,  $f_0(z) = z^2$ . Tenim,

$$f_0^k(z) = z^{2^k}$$

Sabem que  $z^k$  quan  $k \rightarrow \infty$ , tendeix a zero si  $|z| < 1$  i tendeix a infinit si  $|z| > 1$ . Per tant,

$$A_0(\infty) = \mathbb{C} \setminus \{z : |z| < 1\}$$

$$J_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$$K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

**Exemple 5.7.** Considerem ara el cas on  $c = -2$ , tenim  $f_{-2}(z) = z^2 - 2$ . Aleshores,

$$f_{-2}^2(z) = (z^2 - 2)^2 - 2 = z^4 - 4z + 2, \quad f_{-2}^3(z) = (z^4 - 4z + 2)^2 - 2 \dots$$

La funció  $f_{-2}(z)$  en  $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$  és conjugada a  $f_0(z) = z^2$  en  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . És a dir, el següent diagrama comuta per a una certa  $h$  homeomorfisme.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} & \xrightarrow{z^2} & \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{C} \setminus [-2, 2] & \xrightarrow{f_{-2}} & \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \end{array}$$

En conseqüència, tenim:

$$A_{-2}(\infty) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$$

$$J_c = K_c = [-2, 2]$$

Vegem'ho:

Sigui  $h(z) = z + \frac{1}{z}$  considerada a  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{|z| > 1\}$ .

- $h$  conjugada. Cal veure  $h(z^2) = h(z)^2 - 2$ .

$$h(z)^2 - 2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2z\frac{1}{z} - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = h(z^2)$$

- $h$  injectiva.

$$z + \frac{1}{z} = \omega + \frac{1}{\omega} \Rightarrow z - \omega = \frac{z - \omega}{\omega z}$$

Aleshores, tenim o  $z = \omega$  i per tant la nostra  $h$  és injectiva o  $\omega z = 1$  llavors,  $|z| > 1$  i  $|\omega| < 1$  però  $\omega$  està definida fora del disc unitat.

- $h$  exhaustiva.

$$z + \frac{1}{z} = \omega \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \Rightarrow z^2 - \omega z + 1 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són:

$$z_+ = \frac{1}{2}(\omega + \sqrt{\omega^2 - 4}) \quad z_- = \frac{1}{2}(\omega - \sqrt{\omega^2 - 4})$$

El multiplicador és  $z_+ \cdot z_- = 1$  (terme independent de l'equació). Aleshores, o bé un dels dos és a  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  o bé tots dos són a  $S^1$ , en aquest cas,

$$\omega = h(z_+) = h(z_-) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \in [-2, 2]$$

Observem que cada punt de  $(-2, 2)$  té dues antiimatges a  $S^1$ .

- $h$  contínua. En efecte, a  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ .
- $h^{-1}$  contínua. Cert ja que  $h$  és contínua, bijectiva i oberta, aleshores  $h^{-1}$  és contínua.

Hem vist que  $h$  és una semiconjungació entre  $f_0$  a  $S^1$  i  $f_{-2}$  a  $[-2, 2]$ , en conseqüència, els punts són densos a  $[-2, 2]$  (ja que els homeomorfismes envien conjunts densos a conjunts densos).

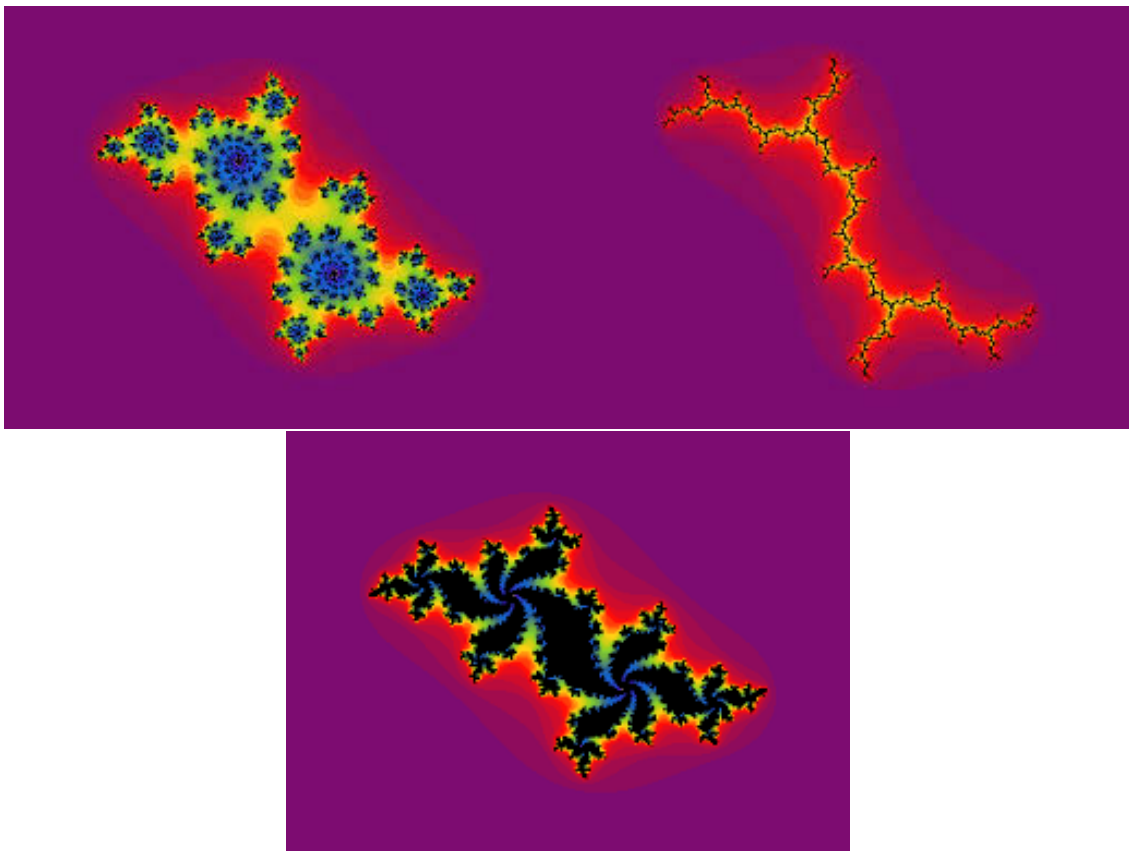


Figura 13: Exemples de conjunts plens de Julia

A la Figura 13 tenim tres exemples de conjunts de Julia diferents, el primer és totalment disconnex, el segon és connex però amb interior buit i finalment, el tercer és connex amb interior diferent del conjunt buit. En quant als colors, de color lila tenim  $A(\infty)$  i de color negre el conjunt ple de Julia. La resta de colors, representen la velocitat amb la que escapa, és a dir, el color vermell ens indica que per escapar, necessita més iterades que el color lila però menys que el groc.

## 5.1 Propietats dels conjunts de Julia

A la secció anterior hem definit el concepte de conjunt de Julia, ara, veurem una sèrie de propietats que compleixen i les conseqüències d'aquestes, explicant detalladament aquelles que ens interessin per assolir l'objectiu d'aquest treball.

**Proposició 5.8.** *Sigui  $c \in \mathbb{C}$ , les següents afirmacions són certes.*

- (a)  $J(f_c) \neq \emptyset \quad \forall c \in \mathbb{C}$ .
- (b)  $J(f_c)$  és tancat, recordem que  $J(f_c) = \delta A_c(\infty)$ .
- (c)  $J(f_c)$  és totalment invariant.
- (d)  $J_c = \overline{\{z \in \mathbb{C} : z \text{ repulsor}\}}$ , on  $z$  és un punt periòdic repulsor. És a dir, la clausura de la unió de tots els punts periòdics repulsors de període  $p \in \mathbb{N}$  (existeix una  $k > 0$  amb  $f^k(\psi) = \psi$ , en altres paraules, els punts periòdics repulsors són densos al conjunt de Julia).
- (e) Sigui  $z_0 \in J(f_c)$  llavors,

$$J(f_c) = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(z_0)}$$

Aquest últim punt, té dues "grans" aplicacions. En primer lloc, com  $f$  és holomorfa, si  $z_0$  no és un punt crític, és a dir,  $f'(z_0) \neq 0$ , aleshores  $f$  preserva angles i si tenim  $z_0 \in U$  i  $f(z_0) \in V$  on  $J_c \cap V$  és una imatge conforme<sup>7</sup> de  $U$ , aleshores, tenim l'autosimilitud. En segon lloc, obtenim un criteri per dibuixar els conjunts de Julia, agafant  $z_0 \in J_c$  i prenent preimatges (veure a l'Annex 8.4 on tenim un programa que ens realitza aquest procés i exemples).

## 5.2 El conjunt de Mandelbrot

Aquest conjunt va ser descobert per Benoît Mandelbrot<sup>8</sup> l'any 1980, té lloc en dinàmica complexa, un camp investigat per primera vegada pels matemàtics fran-

<sup>7</sup>Diem que una funció de projecció conforme és aquella que preserva els angles en tot el conjunt excepte en un nombre finit de punts. L'ús més comú és per funcions amb dominis al pla complex. Sabem que  $f$  és conforme en  $z$  si i només si  $f$  és holomorfa i  $f'(z_0) \neq 0$ .

<sup>8</sup>Benoît Mandelbrot (Polònia 1924 - Cambridge 2010) fou un matemàtic polonès conegut pels seus treballs sobre Fractals. Considerat el principal responsable de l'auge d'aquest camp de les matemàtiques desde principis dels anys 70 i popular per utilitzar l'ordinador a l'hora de tractar objectes fractals.

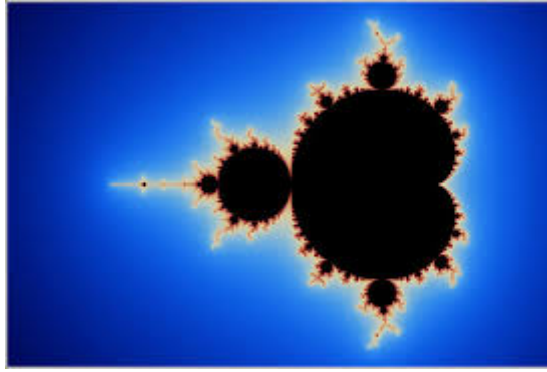


Figura 14: Conjunt de Mandelbrot.

cesos Pierre Fatou<sup>9</sup> i Gaston Julia<sup>10</sup> a principis del segle XX. Benoit Mandelbrot va estudiar l'espai de paràmetres dels polinomis quadràtics en un article que va aparèixer l'any 1980 anomenat "Fractals aspects of the iteration of  $z \mapsto z\lambda(1-z)$ ", on tracta la funció logística que es defineix a continuació.

**Definició 5.9.** (*Funció logística*) La funció  $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  amb  $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$  on  $\lambda \in \mathbb{R}$  s'anomena *funció logística*.

**Definició 5.10.** El conjunt de Mandelbrot<sup>11</sup> (veure Figura 14) es defineix com:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ és connex}\}$$

Alternativament, fent servir les propietats que hem vist a l'apartat anterior de  $J_c$ , podem definir el conjunt de Mandelbrot com el conjunt dels nombres complexos  $c$  tals que la iteració de la funció  $f_c = z^2 + c$  amb valor inicial 0 està acotada,

$$\mathcal{M} := \left\{ c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(0)| < \infty \right\}$$

La raó per iterar el valor  $z = 0$  està basada en què aquest és l'únic punt crític. Hi ha un teorema principal, anomenat teorema de la dicotomia, que enunciem a continuació i ens dóna un resultat sobre la topologia de  $J_c$ .

**Teorema 5.11.** (*Dicotomia*). Sigui  $c \in \mathbb{C}$  i  $f_c(z) = z^2 + c$ , es verifica

<sup>9</sup>Pierre Joseph Louis Fatou (1878, 1929) va ser un matemàtic i astrònom francès, que es va graduar en matemàtiques l'any 1901 va començar a treballar d'astrònom a l'observatori de París, lloc on va realitzar les seves investigacions matemàtiques que al 1907 li donaren com a fruit el doctorat en Ciències Matemàtiques amb el treball de tesi "Séries trigonométriques et séries de Taylor", publicat l'any anterior a Acta Mathematica.

<sup>10</sup>Gaston Maurice Julia (1893, 1978) va ser un matemàtic francès d'ascendència catalana que va treballar en el camp de la dinàmica complexa. Fill de Josep Julià i Dolors Delavent, provinents del Pirineu i emigrats a Algèria. Va estudiar el batxillerat a Orà (Algèria). El 1910 es va traslladar a París a continuar els seus estudis. Entre altres contribucions, és conegut per l'estudi del conjunt de Julia.

<sup>11</sup>L'any 1991, Mitsuhiro Shishikura va demostrar que la dimensió de la frontera del conjunt de Mandelbort és 2, ho va presentar en un article titulat: "The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets"

(a) Si  $f_c^n(0) \not\rightarrow \infty$ , llavors  $J_c$  és connex.

(b) Si  $f_c^n(0) \rightarrow \infty$ , llavors  $J_c$  és totalment disconnex.

Observem que si  $J_c$  no és connex, aleshores,  $f_c^n(0) \rightarrow \infty$  i per tant  $J_c$  és totalment disconnex, anàlogament, si  $J_c$  no és totalment disconnex,  $f_c^n(0) \not\rightarrow \infty$  i llavors,  $J_c$  és connex. El següent teorema mostra la relació que hi ha entre els punts periòdics atractors i els punts crítics de  $f$ , però, abans d'enunciar-lo necessitem unes definicions prèvies.

**Definició 5.12.** Definim la conca del punt periòdic atractor de període  $p$   $z_0$  com

$$A(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : f^{pn}(z) \rightarrow z_0 \text{ quan } n \rightarrow \infty\}$$

És a dir, són les  $z \in \mathbb{C}$  tals que a mesura que iterem la funció  $f$  i l'apliquem a  $z$  ens acostem a  $z_0$ .

**Definició 5.13.** Sigui  $C = \{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$  on  $z_l = f(z_{l-1})$  amb  $0 \leq l \leq p-2$  i  $z_0 = f(z_{p-1})$ , definim la conca immediata d'atracció de l'òrbita periòdica  $C$ , que l'escriuim  $A(C)$ , com

$$A(C) = \bigcup_{j=0, \dots, p-1} A(z_j)$$

**Teorema 5.14.** Sigui  $f_c(z) = z^2 + c$ , suposem que  $C = \{z_0, z_1, \dots, z_{p-1}\}$  és una òrbita periòdica atractor de període  $p$ . Aleshores,  $0 \in A(C)$ .

Definim  $H_p$  com el conjunt de  $c \in \mathbb{C}$  tals que existeix una òrbita periòdica atractor de període  $p$  per  $f_c$ . Aquest conjunt és obert i la demostració d'aquest fet és basa en observar la dependència analítica de les òrbites periòdiques en funció del paràmetre  $c$ , sabent que

$$f_{c_0}^p(z_0) = z_0 \quad i \quad |(f_{c_0}^p)'(z_0)| < 1$$

aplicar el teorema de la funció implícita a la funció

$$R(z, c) = f_c^p(z) - z \quad a \quad R(z_0) = f^p(z_0) - z_0 = 0$$

i trobar una funció  $z(c)$  tal que  $R(z(c), c) = 0$ .

**Definició 5.15.** Cadascuna de les components connexes de  $H_p$  s'anomena component hiperbòlica.

**Teorema 5.16.**  $H_p \subset \mathring{\mathcal{M}}$

**Observació 5.17.** És una conjectura clàssica veure que  $H_p = \mathring{\mathcal{M}}$ .

**Proposició 5.18.** Tenim que:

- $H_1$  té una única component connexa i és la cardioide.

- $H_2$  té una única component conexa i és  $D(\frac{-3}{4}, \frac{1}{4})$ .

**Proposició 5.19.** La funció  $f_c = z^2 + c, c \neq \frac{1}{4}$ , té dos punts fixos,

$$z_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad i \quad z_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

A més,  $z_+$  sempre és repulsor.

*Demostració.* Primerament, calculem els punts fixos de la funció, és a dir, volem resoldre l'equació complexa  $z^2 + c = z$ :

$$z^2 + c = z \Leftrightarrow z^2 - z + c = 0$$

Aplicant la fórmula per resoldre equacions de segon grau, aquesta equació té les solucions següents:

$$z_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad i \quad z_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

Per tant, només queda per veure que  $z_+$  és un punt fix repulsor.

$$f'_c(z) = 2z \Rightarrow f'_c(z_+) = 1 + \sqrt{1 - 4c}$$

Per veure el seu comportament, hem de veure si el mòdul de la derivada es major o menor que 1. Com que hem agafat l'arrel positiva,  $\sqrt{1 - 4c}$  és un nombre complex amb part real positiva, aleshores, ho podem escriure com  $a + bi, a > 0$ , per tant,  $|f'_c(z_+)| = |1 + a + bi|$ . Tenim doncs,

$$|1 + \sqrt{1 - 4c}| > 1 \Leftrightarrow |(1 + a) + bi| > 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1 + a)^2 + b^2} > 1 \Leftrightarrow (1 + a)^2 + b^2 > 1$$

I aquesta última desigualtat és certa perquè com  $a > 0$ ,  $1 + a > 1$  i per tant,  $(1 + a)^2 > 1$  i  $b$  com és un nombre real,  $b^2 \geq 0$  cosa que ens demostra la última desigualtat. Finalment, podem assegurar que el punt fix  $z_+$  és un punt fix repulsor.  $\square$

Un cop vist que la família  $f_c(z) = z^2 + c$  té almenys un punt fix repulsor, estudiem que passa amb l'altre punt fix,  $z_-$ , trobant la regió de valors de  $c \in \mathbb{C}$  pels quals  $f_c(z) = z^2 + c$  té un punt fix atractor. En aquest cas s'ha de verificar,

$$\begin{cases} z^2 + c = z \\ |f'_c(z)| = |2z| < 1 \end{cases}$$

Aleshores, la frontera ve donada per

$$\begin{cases} z^2 + c = z \\ |2z| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 + c = z \\ |z| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2}e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$$

Aleshores,

$$c(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$$



que correspon a la funció que defineix una cardioide. Aquest resultat ens diu que per a totes les  $c \in \mathbb{C}$  que estiguin dins d'aquesta cardioide, tindrem un punt fix atractor (ja que  $|f'_c(z)| < 1$ ).

Ara ens centrarem en calcular les òrbites periòdiques atractores de període dos de la família  $F_c(z) = z^2 + c$ , és a dir, trobarem en quins punts  $(f_c \circ f_c)(z) = z$ .

$$(f_c \circ f_c)(z) = z \Leftrightarrow (z^2 + c)^2 + c = z \Leftrightarrow z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c = 0$$

Si factoritzem els punts fixos obtenim  $z^2 + z + c + 1 = 0$  que té com a solucions

$$z_+ = \frac{-1 + \sqrt{-3 - 4c}}{2} \quad i \quad z_- = \frac{-1 - \sqrt{-3 - 4c}}{2}$$

El seu multiplicador és

$$2z_+ \cdot 2z_- = 1 - (-3 - 4c) = 4(c + 1)$$

Aleshores, és atractor si,

$$4|c + 1| < 1 \Rightarrow |c - (-1)| < \frac{1}{4}$$

És a dir, tenim una òrbita periòdica de període dos al disc centrat a -1 i radi  $\frac{1}{4}$ . Aquests dos conjunts que hem vist (cardioide i disc centrat a -1 amb radi  $\frac{1}{4}$ ) són exemples de components hiperbòliques. Seguidament, s'enuncia un teorema que relaciona una conca d'atracció amb un punt crític.

**Teorema 5.20.** *Sigui  $f$  un polinomi complex, aleshores tota conca d'atracció ha de contenir almenys un punt crític.*

**Corol.lari 5.21.** Per a cada  $c \in \mathbb{C}$ ,  $f_c$  té com a màxim una òrbita periòdica atractor.

**Observació 5.22.**  $f_c(z)$  té un únic punt crític (derivada igual a zero) a  $z = 0$ , per tant, cada component hiperbòlica té un sol període associat.

## 6 Dimensió de Hausdorff de conjunts de Julia

En aquest apartat, seguirem treballant amb la família quadràtica  $f_c(z) = z^2 + c$ , agafarem el conjunt de Mandelbrot i estudiarem els valors de  $c$  que ens donaran les òrbites periòdiques d'aquesta aplicació i calcularem el conjunt de Julia corresponent amb l'ajuda d'un programa en C que he fet que està afegit a l'annex. Veurem com es modifica el conjunt de Julia a mesura que el paràmetre s'acosta a una  $c$  per la qual tenim una òrbita periòdica. Donaré exemples amb imatges per a òrbites periòdiques (veure Annex 8.3) i calcularem, mitjançant el programa del recompte de caixes, una aproximació de la dimensió de Hausdorff. Després, donaré una fórmula general per a òrbites del període que desitgem.

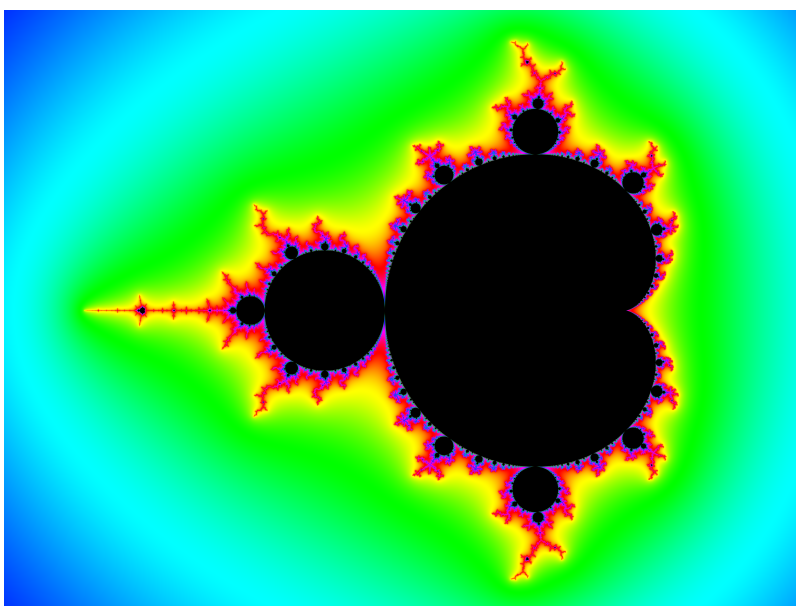


Figura 15: Conjunt de Mandelbrot.

Si mirem el conjunt de Mandelbrot (veure Figura 15) hom veu directament una regió (la més gran) en forma de cardioide al centre de la imatge. Com hem vist al apartat anterior, aquesta cardioide principal, és la regió dels paràmetres  $c$  pels quals l'aplicació  $f_c$  té un punt fix atractor ja que el mòdul de la derivada és estrictament menor que 1, per tant, aquesta cardioide correspon a tots els paràmetres complexos de la forma

$$c = \frac{\eta}{2} \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$$

per qualsevol  $\eta$  que estigui dins del disc unitat obert. Aquesta  $c$  surt de:

$$1 - \sqrt{1 - 4c} = \eta \Leftrightarrow c = \frac{\eta^2 - 2\eta}{-4} \Leftrightarrow c = \frac{\eta}{2} \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$$

A l'esquerra d'aquesta cardioide principal unida a aquesta pel punt  $c = -3/4$ , podem visualitzar una regió circular. Aquesta regió, correspon a aquells paràmetres  $c$  pels

quals  $f_c$  té una òrbita periòdica de període dos. Aquest conjunt de paràmetres és un cercle de radi  $1/4$  centrat al punt  $-1$ .

Hi ha infinites regions tangents a la cardioide principal, per cada nombre racional  $p/q$  amb  $p$  i  $q$  coprimers, és a dir,  $m.c.d(p, q) = 1$ , hi ha una regió que és tangent al paràmetre:

$$c_{\frac{p}{q}} = \frac{e^{2\pi i \frac{p}{q}}}{2} \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \frac{p}{q}}}{2} \right)$$

Aquesta regió l'anomenarem  $\frac{p}{q}$ -regió del conjunt de Mandelbrot. Consisteix en els paràmetres tals que  $f_c$  té com a atractor una òrbita periòdica de període  $q$  i el nombre de rotació combinatòria  $\frac{p}{q}$ . De forma més precisa, les components  $q$ -periòdiques del conjunt de Fatou<sup>12</sup> que contenen la conca d'atracció, intersequen tots en un punt comú que anomenarem  $\alpha$ . Si a aquestes components  $q$ -periòdiques les anomenem  $U_0, U_1, \dots, U_{q-1}$ , agafant l'orientació antihorària, aleshores, la imatge del conjunt  $U_j$  per  $f_c$  és la component  $U_{j+p \pmod{q}}$ .

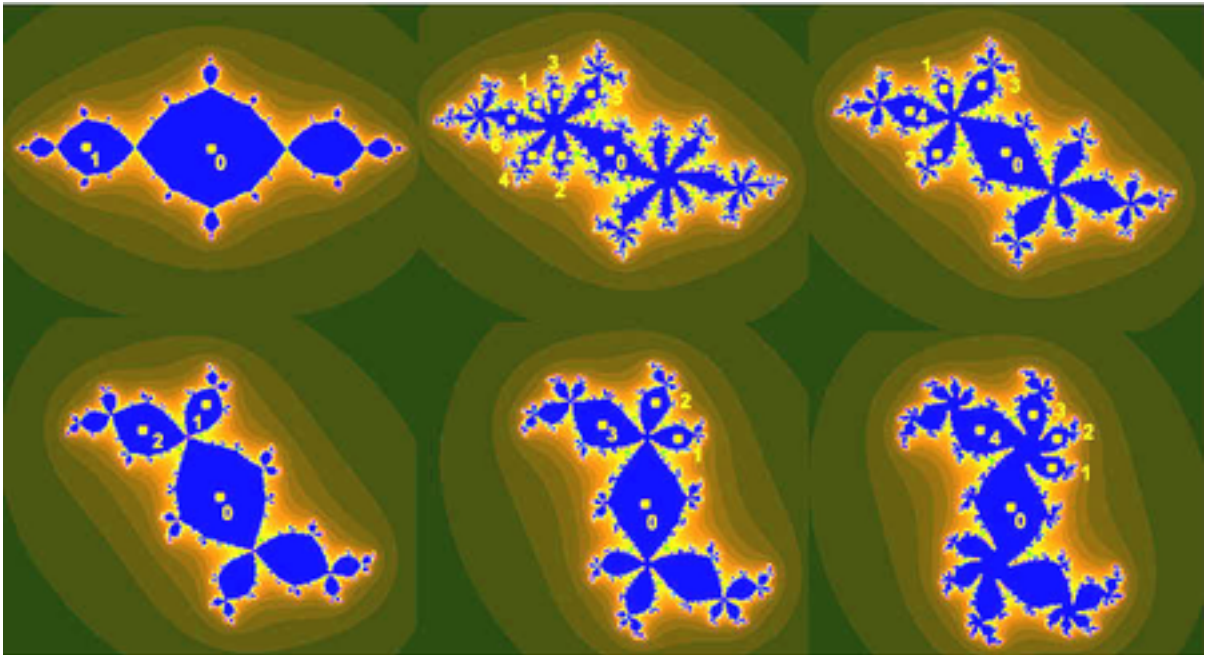


Figura 16: Conques atractores i conjunts de Julia per paràmetres a les regions  $1/2$ ,  $3/7$ ,  $2/5$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ , i  $1/5$  respectivament.

Aquest canvi de comportament es produeix a  $c_{\frac{p}{q}}$  i es coneix amb el nom de bifurcació: el punt fix atractor col·lionava amb un període repelent de cicle  $q$ . A mesura que passem pel paràmetre de bifurcació a la regió de  $\frac{p}{q}$  el punt fix atractor es converteix en un punt fix repulsor i l'òrbita periòdica de període  $q$  es converteix en atractora. El nombre natural  $p$ , correspon al nombre de voltes en sentit antihorari que fa

<sup>12</sup>El conjunt de Fatou es defineix com el complementari del conjunt de Julia, que per simetria de l'aplicació, aquest conjunt (igual que el de Julia) és simètric respecte l'origen.

l'òrbita periòdica de període  $q$  respecte al punt fix, és a dir, quantes voltes fa des de que sortim del punt  $z_0$  fins que tornem a ell mateix. Veiem diferents exemples de les regions que ens donen a la Figura 16.

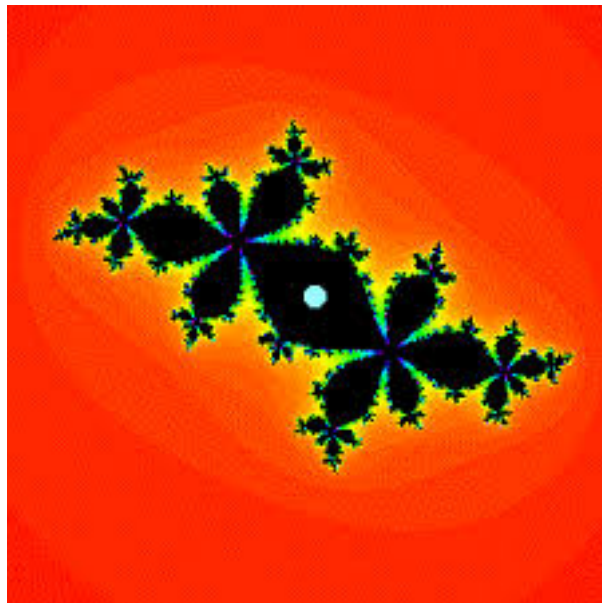


Figura 17: Conjunt ple de Julia per  $q=5$ .

**Exemple 6.1.** Ara estudiarem el conjunt ple de Julia de la Figura 17. Observem que de cada punt fix surten 5 pètals, aleshores, tindrem  $q = 5$ . Per saber  $p$ , hem de saber com es comporta la òrbita d'aquest conjunt. Sabem que a cada iteració es desplaça d'una component connexa a una altra, si, per exemple, el punt inicial és el de color blanc, i a cada iteració passa a la component connexa següent (entesa com aquella més propera mirada en sentit antihorari), aleshores la  $p$  val 1, ja que per tornar a l'inici, només donarem una volta al punt. Si per exemple, l'òrbita va en sentit horari, aleshores, com ens ho hem de mirar en sentit antihorari, l'òrbita donarà un total de quatre voltes al punt fix. En aquest darrer cas, tenim  $p = 4$ .

## 7 Conclusions

Durant aquest treball he fet un camí juntament amb els conceptes de dimensió que hem anat coneixent, veient de quina manera entendre-les i com calcular-les en cas que sigui possible. També he tractat el pla complex, un terme matemàtic que sempre m'ha generat interès en especial després de cursar les assignatures de models matemàtics i sistemes dinàmics i anàlisis complexa, aprofundint en terme d'iteració i conjunts fractals.

D'altra banda, he practicat la programació, ja que és una àrea aplicable i utilitzada actualment, programant en dos llenguatges que he après durant el grau. Una dificultat que m'he trobat és a l'hora de treballar amb imatges (en especial al programa on calculo la dimensió del recompte de caixes), ja que mai ho havia fet.

Personalment, amb aquest treball he après molt sobre sistemes dinàmics i estudis que han fet matemàtics recents, cal dir, que el que més m'ha cridat l'atenció és que només 25 anys es va demostrar que la dimensió de la frontera del conjunt de Mandelbrot és 2, demostració que aquest estiu em miraré amb calma i intentaré entendre ja que em sembla sorprenent.

Amb tots el coneixements que he adquirit, i com cito al principi del treball amb un paràgraf escrit per Michael Barnsley, aquest projecte em farà veure el món d'una manera lleugerament diferent, i estic segur que em serà útil pel meu futur com a matemàtic.

Encara que el resultat final del treball no contingui tots els aspectes que m'hagués agradat tractar, ja que per falta de temps no he pogut aprofundir en els últims punts que són els que més em motivaven, el camí que n'ha resultat és, fins i tot, més ampli del que en un principi m'havia imaginat.

Com diu un company meu: tot i que el camí sempre ha fet pujada, cal pensar que cada vegada som més aprop del cim.

## 8 Annexos

### 8.1 Càlcul computacional de la dimensió del recompte de caixes

En aquest primer annex, adjunto un programa que he fet en Python que donada una imatge en format JPG o PNG calcula la seva dimensió del recompte de caixes o Box Counting. Aquest petit programa, per al seu funcionament òptim és necessari que l'usuari adapti la mida del pas, és a dir, agafar un nombre enter de píxels a cada pas. Per exemple, si una imatge té una mida de 800x800 píxels, l'usuari ha de ser conscient de la mida que ha de tindre la caixa en cada pas, (400,200,100,50,25,5,1).

Al principi, ens imprimeix la matriu de píxels, això ens servirà per escollir l'entrada que se'ns demana, que, serveix per distingir quina part de la imatge considerem figura i quina no. En general, si la figura és en blanc i negre, els píxels poden ser un nombre entre 0 i 255 o un nombre entre 0 i 1, en els dos casos, 0 es considera negre, és a dir, part de la figura.

Seguidament, adjunto el programa en qüestió:

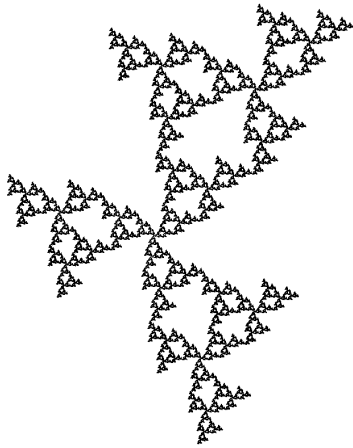
```
sier = plt.imread("imatge.png")
plt.imshow(sier)
blancInegre = sier[:, :, :3].mean(axis = 2)
print(blancInegre.shape[0], blancInegre.shape[1])
print(blancInegre)
im = blancInegre
plt.imshow(im)
dim = im.shape[0]
color = float(input("A partir de quin nombre deixa de ser
    figura?"))
dimGran = dim
pas = 2
dimPetit = (int)(dimGran / pas)
for step in range(0,7):
    if step == 5:
        pas = 5
    if(step != 0):
        dimPetit = (int)(dimPetit/pas)
    contadorPlens = 0
    print("DIM:", dimGran, dimPetit)
    for i in range(0, dimGran, dimPetit): #files gran
        for j in range(0, dimGran, dimPetit): #columnes
            gran
                noRepetit = 0
                for k in range(i, i+dimPetit):
                    for l in range(j, j+dimPetit):
                        if im[k][l]<color and noRepetit == 0:
```

```

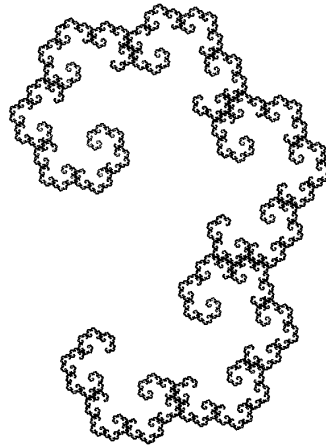
        contadorPlens = contadorPlens + 1
        noRepetit = 1
    if contadorPlens != 0:
        print("ComptadorPlens =", contadorPlens, "DimPetit:",
dimPetit)
        dim = (float)(math.log10(contadorPlens)/-math.log10(
dimPetit/dimGran))
        print("La dimensio al pas", step, "es", dim)
    else:
        print("Contadors plens:", contadorPlens)
print("La dimensio BC de la figura es: ", dim)

```

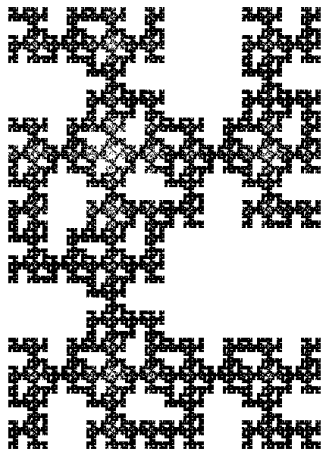
Ara, es presenten vuit imatges de fractals amb la seva dimensió real i la dimensió Box-Counting que dóna com a resultat al passar la imatge al programa.



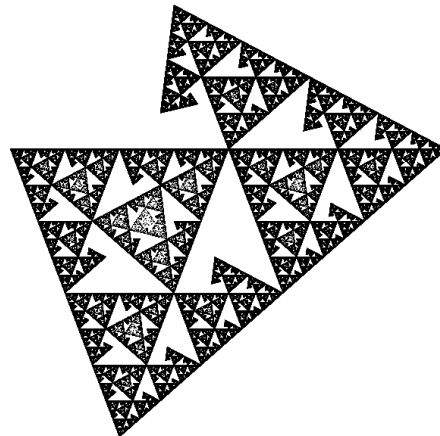
Dimensió real: 1.579  
Dimensió programa: 1.602



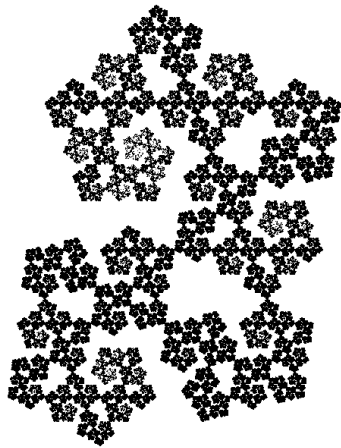
Dimensió real: 1.579  
Dimensió programa: 1.606



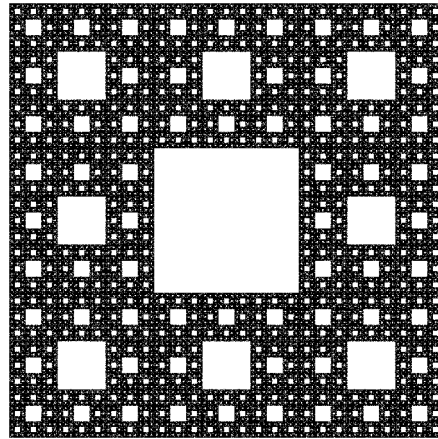
Dimensió real: 1.758  
Dimensió programa: 1.775



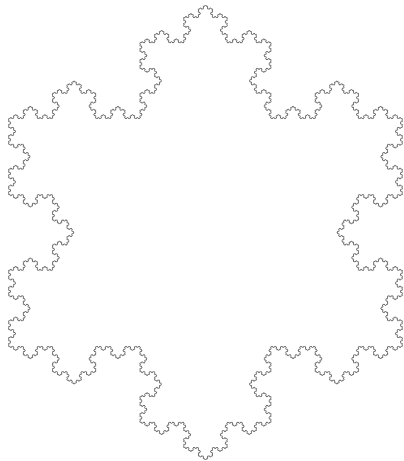
Dimensió real: 1.758  
Dimensió programa: 1.750



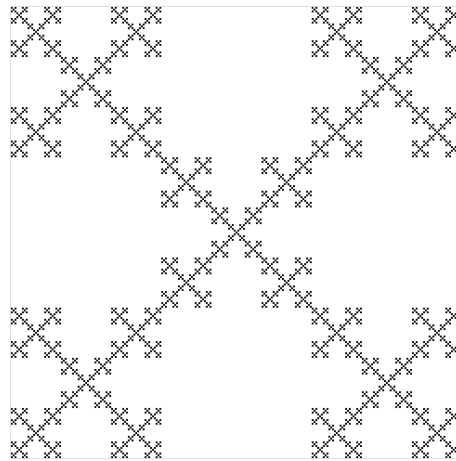
Dimensió real: 1.758  
Dimensió programa: 1.762



Dimensió real: 1.893  
Dimensió programa: 1.893



Dimensió real: 1.262  
Dimensió programa: 1.267



Dimensió real: 1.465  
Dimensió programa: 1.622

Observem que en les cinc primeres imatges, les dimensions que ens donen són similars a les reals, la corba de Koch i la catifa de Sierpinski la dimensió real i la que ens dona el programa són gairebé iguals (o igual), això és degut a que es tracta d'una IFS (amb un nombre alt d'iteracions) i té una estructura més regular. Finalment, observem que l'última imatge, la dimensió real d'aquest fractal (fractal de Vicsek) és 1.465 però en el nostre programa ens dona com a resultat 1.622, que s'allunya bastant de la realitat. Això es deu a que la imatge que hem passat no és realment el fractal de Vicsek, si no que correspon a iterar 5 cops l'IFS de Vicsek i per tant, si fem zoom a la imatge veuríem que realment és un objecte que ocupa bastant més que el fractal en qüestió.



## 8.2 Sistema de funcions iterades (IFS)

En aquest segon apartat de l'annex, adjunto un programa que he fet en C. Aquest programa, passant per fitxer una taula amb un conjunt de transformacions (IFS) amb les seves respectives probabilitats i un punt inicial (passat per pantalla) calcula les n primeres iterades (també donades) i imprimeix la solució en un fitxer de punts (x,y) que seguidament el dibuixem utilitzant el Gnuplot.

Per executar el programa, s'han de seguir les següents indicacions (README):

- Aquest programa representa afinitats (IFS)
- El fitxer d'entrada, ha de contenir a la primera línia el nombre d'afinitats que hi ha i seguidament una fila per cada afinitat, amb els nombres a, b, c, d, e, f, p en aquest ordre
- Donem el punt inicial per començar a iterar
- La variable iterades es el nombre d'iteracions que volem (idealment entre 5.000 i 50.000, en cas contrari queda massa ple o massa buit)
- El conjunt de punts solucio es guarden en un fitxer anomenat afinitats que posteriorment s'ha de dibuixar al gnuplot amb la comanda següent: plot "afinitats" w p

```
/*Robert Salla Gras, 04/06/2018*/
```

```
#include <stdio.h>  
#include <stdlib.h>  
#include <math.h>
```

```
int main(void){  
    int nombreAfinitats;  
    double x0, y0, x1, y1, taula[100][7];  
    int i, j, r, iterades;  
    FILE *p, *e;  
    char nomFitxer[10];  
    for(i = 0; i < 100; i++){  
        for(j = 0; j < 7; j++){  
            taula[i][j] = 0;  
        }  
    }  
    printf("Fitxer amb les dades\n");  
    scanf("%s", nomFitxer);  
    e = fopen(nomFitxer, "r");  
    if(e == NULL){  
        printf("error obrir fitxer lectura\n");  
        exit(1);  
    }
```

```

}
fscanf(e, "%d", &nombreAfinitats);
p = fopen("afinitat", "w");
if(p == NULL){
    printf("error obrir fitxer\n");
    exit(1);
}
for(i = 0; i < nombreAfinitats; i++)
    for(j = 0; j < 7; j++)
        fscanf(e, "%le", &taula[i][j]);
    printf("Punt inicial\n");
    scanf("%le%le", &x0, &y0);
    printf("Nombre iterades: \n");
    scanf("%d", &iterades);
for(i = 0; i < nombreAfinitats; i++)
    taula[i][6] = taula[i][6] * 100;
for(i = 1; i < nombreAfinitats; i++)
    taula[i][6] = taula[i][6] + taula[i-1][6];
for(i = 0; i < iterades; i++){
    r = rand()%100;
    j = 0;
    while(taula[j][6] < r)
        j++;
    x1 = taula[j][0]*x0 + taula[j][1]*y0 + taula[j][4];
    y1 = taula[j][2]*x0 + taula[j][3]*y0 + taula[j][5];
    fprintf(p, "%le %le\n", x1, y1);
    x0 = x1;
    y0 = y1;
}
return 0;
}

```

Seguidament, utilitzant Gnuplot, i executant el programa, adjunto els resultats que m'han donat passant per fitxer un conjunt d'IFS dels quals coneixem el resultat que ens donarà. Les figures són similars a les que sabem que donaran, però pot haver-hi petites diferències i/o alteracions degut al funcionament del Gnuplot.

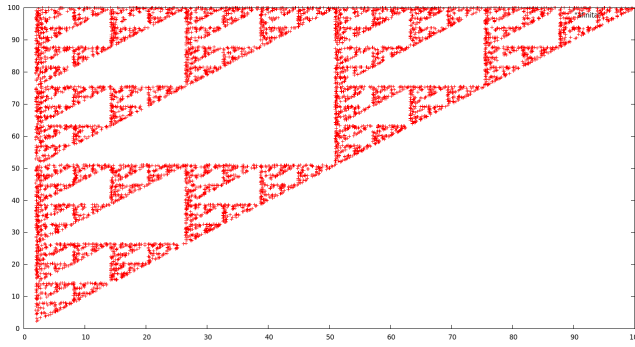


Figura 22: Triangle de Sierpinski.

$\omega$	a	b	c	d	e	f	p
$f_1$	0.5	0	0	0.5	1	1	0.33
$f_2$	0.5	0	0	0.5	1	50	0.33
$f_3$	0.5	0	0	0.5	50	50	0.34

Taula 3: Afinitats del triangle de Sierpinski.

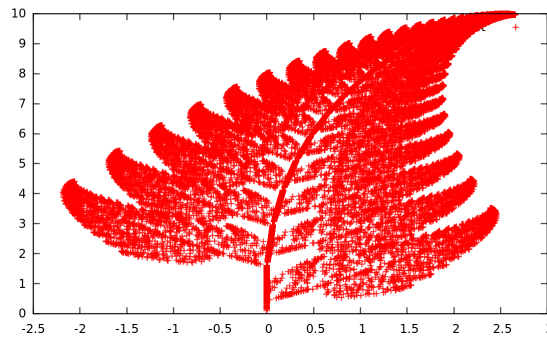


Figura 23: Fractal falguera.

$\omega$	a	b	c	d	e	f	p
$f_1$	0	0	0	0.16	0	0	0.01
$f_2$	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.60	0.85
$f_3$	0.20	-0.26	0.23	0.22	0	1.60	0.07
$f_4$	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

Taula 4: Afinitats de la falguera.

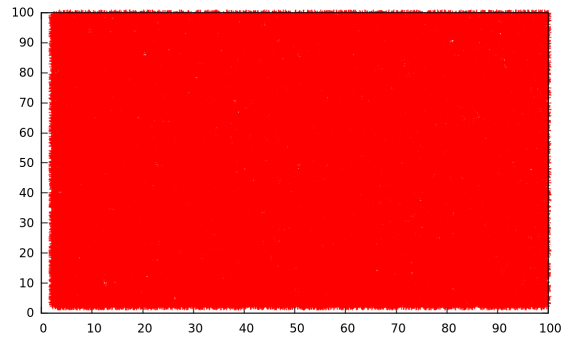


Figura 24: Quadrat.

$\omega$	a	b	c	d	e	f	p
$f_1$	0.5	0	0	0.5	1	1	0.25
$f_2$	0.5	0	0	0.5	50	1	0.25
$f_3$	0.5	0	0	0.5	1	50	0.25
$f_4$	0.5	0	0	0.5	50	50	0.25

Taula 5: Afinitats del quadrat.

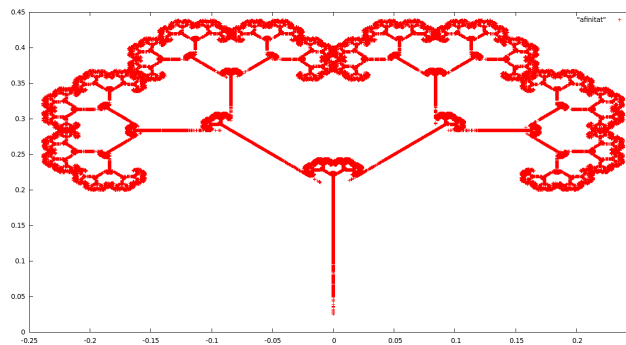


Figura 25: Arbre.

$\omega$	a	b	c	d	e	f	p
$f_1$	0	0	0	0.5	0	0	0.05
$f_2$	0.42	-0.42	0.42	0.42	0	0.2	0.4
$f_3$	0.42	0.42	-0.42	0.42	0	0.2	0.4
$f_4$	0.1	0	0	0.1	0	0.2	0.15

Taula 6: Afinitats del fractal arbre.

### 8.3 Conjunts de Julia

En aquest tercer apartat de l'annex, adjunto un programa que he fet en C. Aquest programa, donat un  $c$  fixat, calcula el conjunt de Julia mitjançant el mètode de la iteració inversa. Per trobar el  $z_0$  inicial, que ha de ser un punt del conjunt de Julia, el que faig és trobar un punt fix repulsor (que per una proposició enunciada i demostrada en aquest treball sabem que almenys existeix un punt fix repulsor) i aleshores aplico el mètode anant enrere, agafant l'arrel positiva o negativa (amb probabilitat un mig cadascuna). Per aquest programa, he trobat més senzill mirar-me els nombres complexos en forma polar. Finalment, guardo els punts trobats en un fitxer anomenat `sor` i seguidament els dibuixem utilitzant el Gnuplot. Per executar el programa, s'han de seguir les indicacions següents (README):

- Es pot canviar el nombre d'iteracions canviant l'arxiu en `c`.
- Per compilar: `gcc -c -ansi programa.c`, per linciar: `gcc programa.o -o programa.exe -lm` i per executar `./programa.exe`.
- La entrada és únicament la part real i imaginària de  $c$ .
- Escriure al gnuplot la següent comanda per dibuixar: `plot "sor" with points pointtype 0`.

*/\* Robert Salla Gras, 11/06/2018\*/*

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
int main(void){
    double cx, cy, wx, wy;
    double x, y, r, theta, m, n;
    int i, maxIter = 100000, random;
    FILE *sor;
    sor = fopen("sor", "w");
    if(sor == NULL){
        exit(1);
    }
    printf("Donam c\n");
    scanf("%le%le", &cx, &cy);
    x = 1 + sqrt((1 - 4*cx)*(1 - 4*cx) + (4*4*cy*cy))*cos((2*
        cy)/(1 - 4*cx));
    y = sqrt((1 - 4*cx)*(1 - 4*cx) + (4*4*cy*cy))*sin((2*cy)
        /(1 - 4*cx));
    x = x/2;
    y = y/2;
    for(i = 0; i < maxIter; i++){
        wx = x-cx;
```

```

wy = y-cy;
if(wx > 0){
    theta = atan(wy/wx);
}
if(wx < 0){
    theta = 4*atan(1)+atan(wy/wx);
}
if(wx == 0){
    theta = 2*atan(1);
}
theta = theta/2;
r = sqrt(wx*wx+wy*wy);
random = rand()%100;
if(random < 50){
    r = sqrt(r);
} else{
    r = -sqrt(r);
}
x = r*cos(theta);
y = r*sin(theta);
fprintf(sor, "%le %le\n", x, y);
}
fclose(sor);
return 0;
}

```

Seguidament, adjunto els conjunts de Julia que hi han des de  $c = 0$  fins a  $c = -1.5$  agafant com a camí l'eix real. Observem com varia el conjunt de Julia a mesura que ens acostem a  $-0.75$  i com varia a partir d'aquest. Per a que es vegi més clar, he separat en dos figures, una per arribar de  $0$  a  $-0,75$  (veure Figura 26) i l'altra per anar de  $-0,75$  fins a  $-1,5$  (veure Figura 27). Un exemple interessant, referent al que hem vist a la secció 6, seria veure el comportament dels conjunts de Julia, a mesura que canvia  $c$ , quan ens acostem o allunyem al paràmetres de la forma

$$c_{\frac{p}{q}} = \frac{e^{2\pi i \frac{p}{q}}}{2} \left( 1 - \frac{e^{2\pi i \frac{p}{q}}}{2} \right)$$

amb  $p$  i  $q$  nombres naturals i tals que el seu màxim comú divisor sigui  $1$ . Es pot observar que s'obtenen figures com les que hem comentat a la Figura 17.

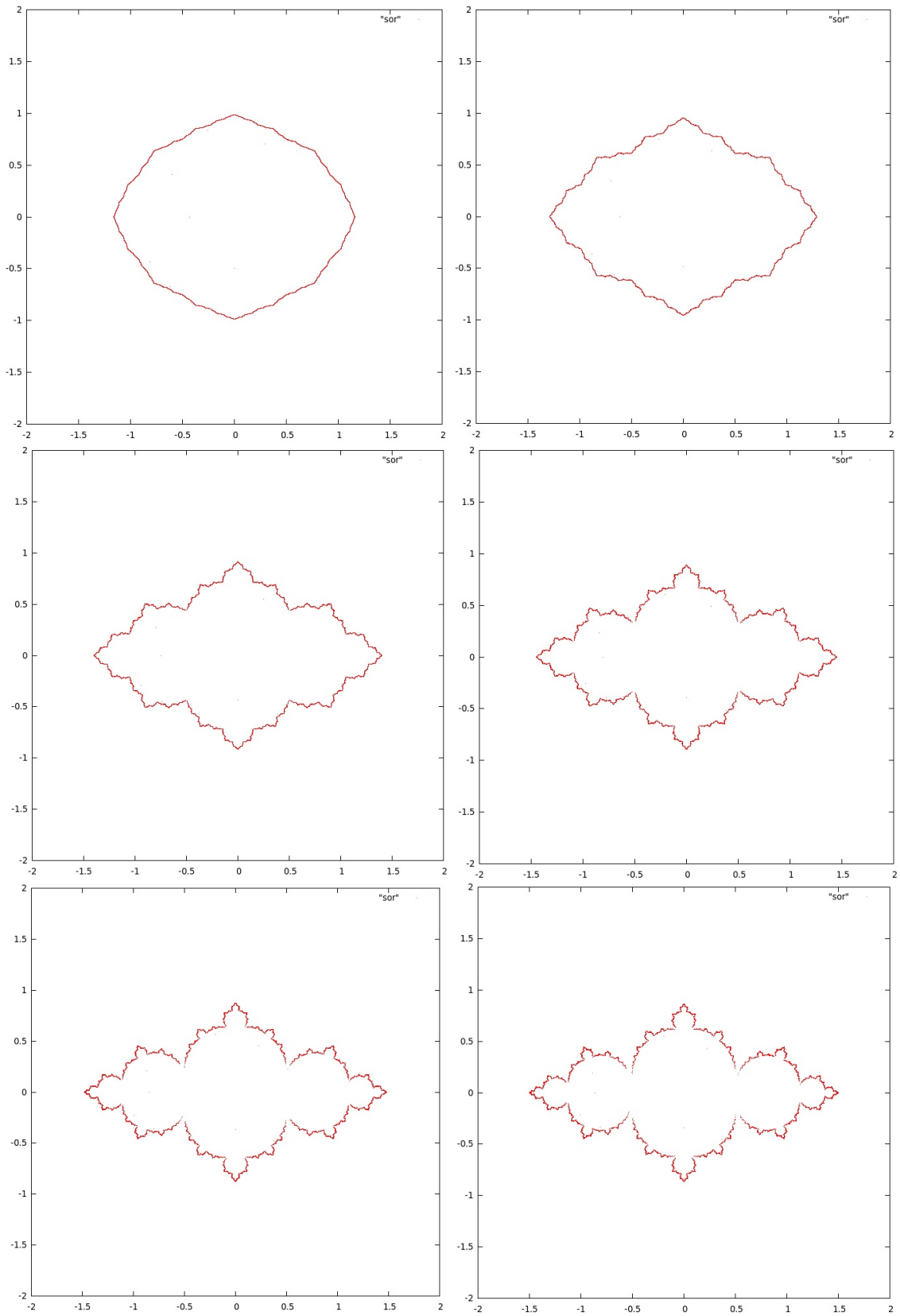


Figura 26: Conjunts de Julia començant des de  $c = 0$  fins arribar a  $c = -0,75$ .

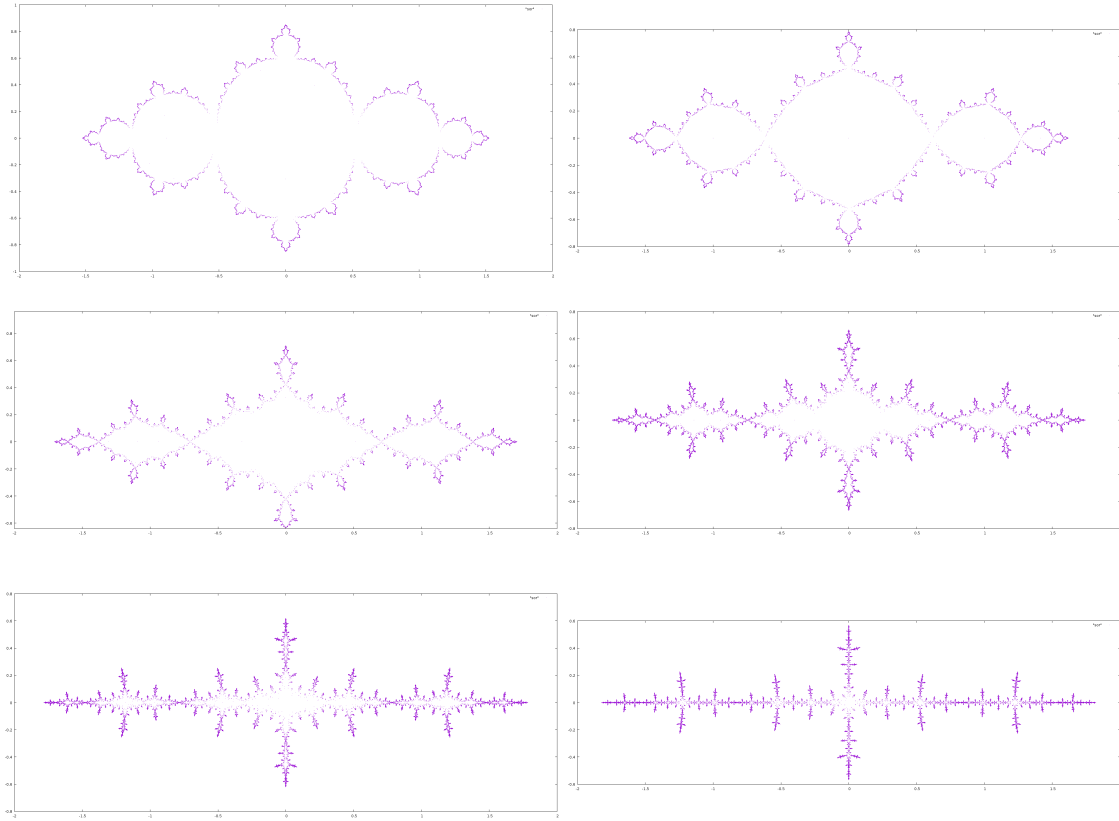


Figura 27: Conjunts de Julia començant des de  $c = -0,75$  fins arribar a  $c = -1,5$ .

Totes aquestes imatges les he passat pel programa de l'Annex 8.1 que et calcula la dimensió del recompte de caixes, els resultat han estat els següents:

1.31218	1.31688
1.3108	1.3204
1.32895	1.33340
1.33401	1.3456
1.3523	1.3576
1.3580	1.3646

Taula 7: Afinitats del fractal arbre.

La taula està escrita en el mateix ordre al que estan les imatges dels conjunts de Julia. Observem doncs, que cada cop la dimensió de Hausdorff augmenta.



## 8.4 Conjunt de Mandelbrot

En aquest annex, adjunto un programa que he fet en C. Aquest programa, donat un rang per les x i un rang per les y, et dibuixa de color blanc sobre un fons de color negre el conjunt de Julia d'aquella zona del conjunt de Mandelbrot, és a dir, pinta de color blanc la frontera del conjunt de Mandelbrot. Per executar el programa, s'han de seguir les indicacions següents (README):

- L'entrada del programa ha de ser: x mínima, x màxima, y mínima, y màxima, nombre màxim d'iteracions, la resolució que és vol de la imatge resultant i el nom del fitxer .png que serà on es guardi el resultat (en aquest ordre).
- Per compilar: `gcc -o mandelbrot -O4 mandelbrot.c`, i per executar `./mandelbrot.exe`.
- Per convertir un fitxer en png: `convert -normalize pic.ppm pic.png`
- Per canviar el color a la imatge: `convert -negate -normalize -fill blue -tint 100 pic.ppm pic.png`

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdint.h>

int main(int argc, char* argv[]) {
    /*Passar els arguments per linia de comandes*/
    if(argc != 8){
        exit(1);
    }
    /*Coordenades que volem dibuixar*/
    const double xmin = atof(argv[1]);
    const double xmax = atof(argv[2]);
    const double ymin = atof(argv[3]);
    const double ymax = atof(argv[4]);
    if(xmin > xmax || ymin > ymax){
        printf("Error coordenades\n");
    }
    /*Nombre maxim d'iteracions*/
    const int maxiter = atoi(argv[5]);
    /*Tamany de la imatge en pixels*/
    const int xres = atoi(argv[6]);
    const int yres = (xres*(ymax-ymin))/(xmax-xmin);
    /*Nom del fitxer on es vol guardar*/
    const char* filename = argv[7];

    FILE *fp = fopen(filename, "wb");
```

```

if (fp==NULL){
    printf("Error obrir fitxer\n");
    exit(1);
}
/* Escriptura capcalera*/
fprintf(fp, "P6\n# Mandelbrot, xmin=%lf, xmax=%lf, ymin=%lf, ymax=%lf, maxiter=%d\n%d\n%d\n%d\n", xmin, xmax, ymin, ymax, maxiter, xres, yres, (maxiter < 256 ? 256 : maxiter));
/* Calcul altura i llargada*/
double dx = (xmax-xmin)/xres;
double dy = (ymax-ymin)/yres;
double x, y;
double u, v;
int i, j; /*Pixels*/
int k; /*Iteracio*/
for (j = 0; j < yres; j++){
    y = ymax - j * dy;
    for (i = 0; i < xres; i++){
        double u = 0.0;
        double v = 0.0;
        double u2 = u * u;
        double v2 = v*v;
        x = xmin + i * dx;
        for (k = 1; k < maxiter && (u2 + v2 < 4.0); k++)
        {
            v = 2 * u * v + y;
            u = u2 - v2 + x;
            u2 = u * u;
            v2 = v * v;
        }
        if (k >= maxiter){
            const unsigned char negre [] = {0, 0, 0, 0, 0, 0};
        }
        fwrite (negre, 6, 1, fp);
    }
    if(k < maxiter){
        unsigned char color [6];
        color [0] = k >> 8;
        color [1] = k & 255;
        color [2] = k >> 8;
        color [3] = k & 255;
        color [4] = k >> 8;
        color [5] = k & 255;
    }
}

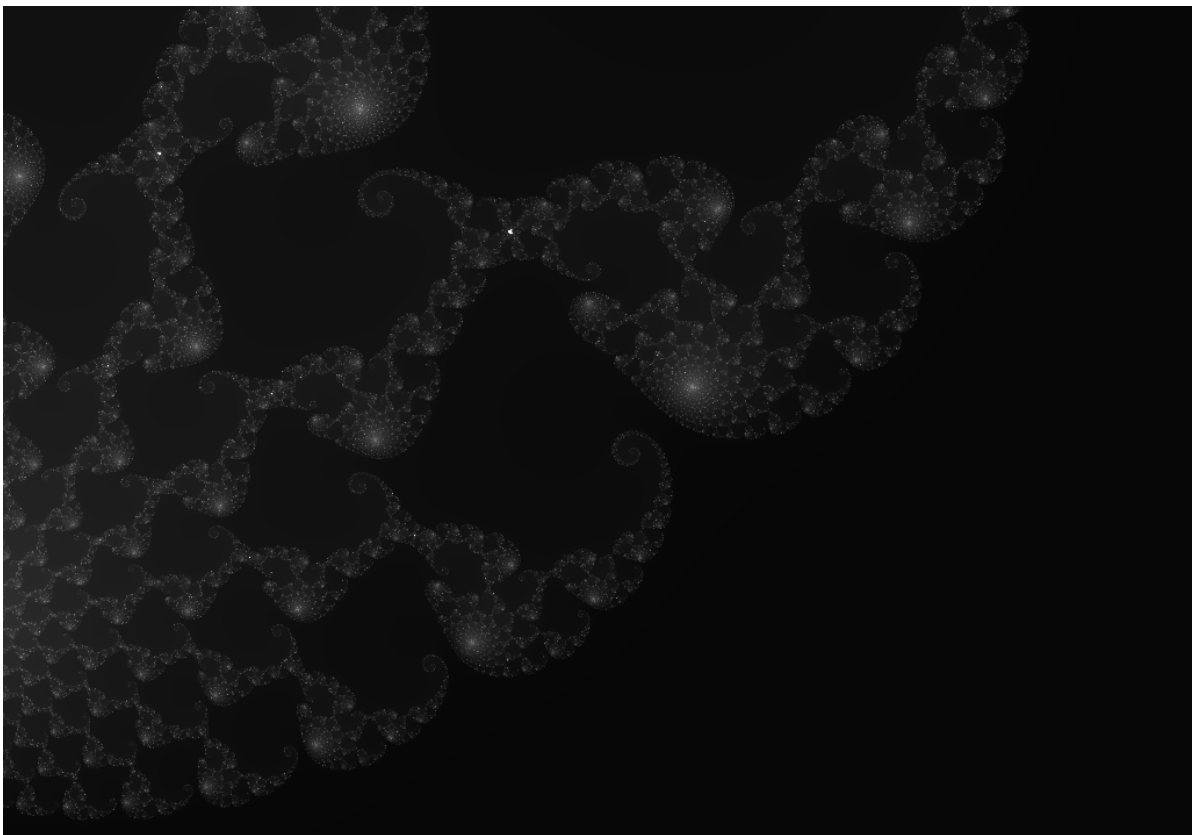
```

```
fclose(fp);  
return 0;  
}
```

La primera imatge que apareix en aquest treball en blanc i negre correspon un conjunt de Julia que ha fet aquest programa amb l'entrada següent:

```
0.27085 0.27100 0.004640 0.004810 1000 1024 pic.ppm
```

La imatge següent surt de dividir la imatge de la que parlem en quatre quadrats iguals i agafar el quadrat que queda a la part de sota a la dreta. Observem que per molts *zooms* que fem, sempre trobem còpies del conjunt de Mandelbrot.



## Referències

- [1] Arnold, Vladimir I.: *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag Textbook, New York, 1992.
- [2] Barnsley, M.F.; Devaney, R.L.; Mandelbrot, B.B.; Peitgen, H.O.; Saupe, D.; Voss, R.F.: *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] Barnsley M.F.: *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., London, 1988.
- [4] Devaney, Robert L.: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Advanced Book Program (ABP), Colorado, 2003.
- [5] Fagella, Núria; Jarque, Xavier: *Iteración compleja y fractales*, Vicens Vives, Barcelona, 2007.
- [6] Falconer, Kenneth: *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, England, 2003.