



UNIVERSITAT^{DE}
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

EL MOVIMIENTO
BROWNIANO Y SU
GEOMETRÍA

Autor: Daniel Santos Serrano

Director: Dr. Josep Vives
Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 11 de julio de 2018

Abstract

Brownian motion is probably the most studied stochastic process. This kind of movement can be found in many situations, as in the movement of a particle suspended in water.

In this work, we try to understand the brownian motion from a theoretical point of view. First of all, in the first chapter, we introduce the concept of stochastic process and some of its properties, as well as some of the most important theorems, concerning its existence and continuity. The last section of the chapter introduces the concept of Hausdorff measure and dimension.

In the second chapter, we approach the Brownian motion. Firstly, we define the process and then we proof its existence. Moreover, we also show some of the most important properties of the Brownian motion, for the one dimensional case and the general case, $n > 1$. To conclude, we study the Hausdorff dimension of the Brownian motion.

The chapter 3 deepens in the concept of the planar Brownian motion. For this purpose, we show some of the classical properties that P. Lévy introduces in one of his famous books "Processus Stochastiques et Mouvement Brownien". Then, we study a concept that P. Lévy defined but he did not develop: the convex hull of the planar Brownian motion. Finally, we analyze a paper published in 2017 by James McRedmon and Chang Xu, which delves into the upper and lower bound of the diameter in the convex hull.

Ultimately, in the last chapter, we briefly explain how we simulate the Brownian motion in \mathbb{R} and we describe the method followed to obtain the figures of this work.

Motivación del trabajo

Debido a una noche del verano de 2017 en la cual no podía dormir, encontré navegando por internet un artículo de James McRedmon y Chang Xu en el cual se abordaba el problema del diámetro de la celda convexa del movimiento Browniano plano. Al principio entendía poco sobre el tema, pero sentí unas ganas de profundizar en él para poder entender el artículo. El ver en la bibliografía de ese artículo como, de manera progresiva, se va avanzando en demostrar propiedades y problemas no resueltos, me motivó también a querer entender cómo poco a poco las matemáticas avanzan gracias a la aportación de matemáticos y matemáticas de todo el mundo.

Finalmente decidí hacer un trabajo sobre el movimiento Browniano para poder llegar a entender el artículo. Ciertamente, aunque muchos conceptos y problemas que se abordan en la bibliografía del artículo todavía me quedan grandes, creo que en gran medida he logrado entender todos los conceptos y demostraciones que se presentan en la publicación.

En el trabajo se presentan demostraciones de todo tipo, muchas de las cuales me han traído fuertes quebraderos de cabeza, así que he decidido completarlas ya sea en la misma demostración o con observaciones adicionales para que al lector o lectora le sea más fácil de entender, sobretodo si es la primera vez que aborda el tema.

Agradecimientos

Quiero dar las gracias al Dr. Josep Vives por darme la oportunidad de realizar el trabajo bajo su tutela, y por darme consejos e información adicional que me ha sido de utilidad en el trabajo. También quiero agradecer a mi buen amigo Daniel del Pozo por asesorarme en el desarrollo del trabajo.

Finalmente quiero agradecer a todos los autores de la bibliografía y a todos los matemáticos que día a día participan en el proyecto de hacer crecer y avanzar las matemáticas; además de agradecer a mi insomnio, porque sin él probablemente no hubiese encontrado el artículo.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Conceptos básicos sobre procesos estocásticos	1
1.1.1. Procesos estocásticos y espacios de funciones	1
1.1.2. Filtraciones y evolución temporal	3
1.2. Tipos principales de procesos estocásticos	4
1.3. Teorema de existencia de procesos estocásticos de Daniell-Kolmogorov	5
1.3.1. Resultados previos para la demostración del Teorema de Daniell-Kolmogorov	5
1.3.2. Demostración y consecuencias	6
1.4. El Teorema de Continuidad de Kolmogorov	9
1.5. Medida y dimensión de Hausdorff	12
1.5.1. Método del potencial	13
2. El movimiento Browniano	15
2.1. Definición y construcción del movimiento Browniano	15
2.1.1. Construcción intuitiva del movimiento Browniano y su simulación en \mathbb{R}	17
2.2. Propiedades del movimiento Browniano unidimensional	18
2.2.1. Propiedades de continuidad y no-derivabilidad	20
2.3. Propiedades del movimiento Browniano multidimensional	25
2.3.1. Dimensión de Hausdorff y autointersección del movimiento Browniano	26
3. El movimiento Browniano plano	29
3.1. Definición y algunas propiedades	29
3.2. La celda convexa	31
3.2.1. El diámetro de \mathcal{K}	32
4. Apéndice: Cómo obtener las figuras en \mathbb{R}	36

1. Introducción

En este primer capítulo introductorio se asentarán las bases previas necesarias para abordar el estudio del movimiento Browniano. Se repasarán algunas definiciones básicas así como se abordarán algunos conceptos útiles para su estudio. Se suponen conocidos conceptos básicos de la probabilidad y la estadística tales como la definición de una variable aleatoria, la esperanza, la varianza etc. La mayor parte del capítulo sigue el curso de la referencia [1], aunque también de [2] y [3]. En el último apartado presentamos la definición de la medida y la dimensión de Hausdorff[4][6], que usaremos en el siguiente capítulo para demostrar algunas propiedades del movimiento Browniano.

1.1. Conceptos básicos sobre procesos estocásticos

Definición 1.1.1. Un proceso estocástico $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ es una colección de variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$.

A cada proceso le podemos asociar la función $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$, $t \in \mathcal{T}$, $\omega \in \Omega$. El espacio imagen de la función (consecuentemente del proceso) se llama espacio de estados \mathcal{S} .

Al conjunto \mathcal{T} se le llama conjunto de parámetros. Si es un conjunto contable diremos que el proceso es discreto y si no es contable diremos que es continuo.

Definición 1.1.2. Para cada $\omega \in \Omega$, la función $t \mapsto X_t(\omega)$ se llama trayectoria del proceso.

Obs. Usualmente, el conjunto \mathcal{T} representa el tiempo y será \mathbb{Z}_+ si el proceso es discreto o bien \mathbb{R} o $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si el proceso es continuo, y el espacio de estados \mathcal{S} será \mathbb{R} o bien \mathbb{R}^n .

Ejemplo. Sean A y B dos variables aleatorias tal que $E[A]=1$, y $B \sim N(0, 1)$. Consideremos el proceso con parámetro $t \in (0, \infty)$:

$$X_t = tA + B.$$

Las trayectorias de este proceso serán rectas con coeficientes aleatorios en el plano. Además,

$$E[X_t] = E[tA + B] = tE[A] + E[B] = t.$$

1.1.1. Procesos estocásticos y espacios de funciones

Definición 1.1.3. Sea $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$ el conjunto de funciones de \mathbb{R}_+ en \mathbb{R}^d . Denotaremos por $\mathcal{W}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ a la σ -álgebra generada por los cilindros:

$$\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), f(t_1) \in I_1, \dots, f(t_n) \in I_n\},$$

donde $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, e I_1, \dots, I_n son intervalos de la forma $I_i = \prod_{k=1}^d (a_i^k, b_i^k]$.

Obs. Dado que nos van a interesar los procesos estocásticos continuos a tiempo real, es más útil utilizar el conjunto de funciones continuas de \mathbb{R}_+ en \mathbb{R}^d , $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, con la σ -álgebra \mathbb{R}^d , $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ generada por los cilindros:

$$\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), f(t_1) \in I_1, \dots, f(t_n) \in I_n\},$$

donde $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, e I_1, \dots, I_n son intervalos de la forma $I_i = \prod_{k=1}^d (a_i^k, b_i^k]$.

Definición 1.1.4. Un par ordenado (X, Σ) donde X es un conjunto y Σ una σ -álgebra sobre X se denomina espacio medible.

Definición 1.1.5. Sean (X, Σ) y (Y, Ψ) dos espacios medibles. Entonces $f : X \rightarrow Y$ es medible si $f^{-1}(E) \in \Sigma, \forall E \in \Psi$.

Definición 1.1.6. Un proceso estocástico d -dimensional sobre $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ es una colección de variables aleatorias en \mathbb{R}^d , $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$, medibles respecto a \mathcal{F} .

Además, la probabilidad dada por $\mu(A) = \mathcal{P}(X^{-1}(A)), A \in \mathcal{W}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, es la ley de $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$.

Obs. Estamos suponiendo que el proceso es a tiempo real, y por lo tanto suponiendo que el conjunto de parámetros son los reales positivos.

Definición 1.1.7. Para $t \geq 0$ denotaremos por π_t a la aplicación que transforma $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ en $f(t)$. El proceso estocástico asociado, $(\pi_t)_{t \geq 0}$ definido en el espacio de probabilidad $(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mu)$ se llama proceso canónico asociado a X .

Definición 1.1.8. Diremos que el proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ es medible si la aplicación $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ es medible respecto a la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ denota la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}_+ .

Obs. El operador \otimes entre A y B σ -álgebras nos indica la mínima σ -álgebra generada por $A \times B$.

Definición 1.1.9. Si $X \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, esto es, si las trayectorias de X son funciones continuas, entonces diremos que el proceso X es un proceso continuo.

Proposición 1.1.10. Un proceso estocástico continuo es medible.

Demostración. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico continuo. Primero vamos a ver que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$\{(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega, X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, consideremos $X_t^n = X_{\lfloor \frac{2^n t}{2^n} \rfloor}, t \in [0, 1]$, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera. Como las trayectorias de X^n son constantes a trozos, tenemos que

$$\{(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega, X_t^n(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Además, $\forall (t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_t^n(\omega) = X_t(\omega)$. Por lo tanto,

$$\{(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega, X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

De la misma manera, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\{(t, \omega) \in [k, k + 1] \times \Omega, X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Ahora solo basta observar que

$$\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, X_t(\omega) \in A\} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \{(t, \omega) \in [k, k + 1] \times \Omega, X_t(\omega) \in A\}.$$

□

Obs. La necesidad de discretizar los valores del proceso viene dada por la propiedad de las σ -álgebras que dice que si tenemos una sucesión de elementos de la misma, entonces la unión contable de ellos también estará en la σ -álgebra. Si no discretizamos el proceso y no lo hacemos constante a trozos, podría ser que un conjunto de tiempos nos hiciera que X_t entrara y saliera un número no contable de veces del conjunto borealiano A , y por lo tanto no podemos asegurar directamente que la antiimagen estará en $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$.

1.1.2. Filtraciones y evolución temporal

Definición 1.1.11. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad. Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ es una familia no decreciente de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} .

Ejemplo. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, entonces,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t),$$

es una filtración. Esta filtración se llama filtración natural del proceso X . Aquí, $\sigma(X_s, s \leq t)$ denota la mínima σ -álgebra que hace a las variables aleatorias $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ medibles.

Obs. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ puede ser visto como un sistema que evoluciona en el tiempo de manera aleatoria. Además, si uno observa la trayectoria del proceso hasta un $t \geq 0$, es capaz de decir si un evento $A \in \sigma(X_s, s \leq t)$ ha ocurrido o no. Esta noción de información transportada en el proceso se puede modelar utilizando las filtraciones.

Definición 1.1.12. Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ está adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria X_t es medible respecto \mathcal{F}_t .

Obs. Un proceso estocástico siempre está adaptado a su filtración natural. Además, si $(X_t)_{t \geq 0}$ está adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ y \mathcal{F}_0 contiene todos los subconjuntos de \mathcal{F} que tienen probabilidad 0, entonces cualquier proceso $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ tal que $\mathcal{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1, t \geq 0$, también estará adaptado a esa filtración.

Definición 1.1.13. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se dice que es progresivamente medible respecto a la filtración, si $\forall t \geq 0$,

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

Obs. La diferencia entre que un proceso estocástico esté adaptado a una filtración y que sea progresivamente medible respecto a la filtración es importante:

- En la primera definición estamos pidiendo que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \{(t, \omega), X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_t$.
- Mientras que en la segunda, estamos pidiendo que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Observemos que la primera definición es más restrictiva que la segunda, de hecho si un proceso está adaptado a una filtración, entonces, debido a la naturaleza no decreciente de la misma, también será progresivamente medible respecto a ella.

1.2. Tipos principales de procesos estocásticos

Sea $X = X_t, t \in \mathcal{T}$ un proceso estocástico definido en $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ con $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T} = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definición 1.2.1. X es un proceso que tiene incrementos independientes si para todo subconjunto finito $\{t_0, \dots, t_n\} \subset \mathcal{T}$, los incrementos

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

son variables aleatorias independientes.

Definición 1.2.2. X es un proceso de Markov con espacio de estados $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si para cualquier $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathcal{T}$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P(X_{t_n} \in B | X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1}) = P(X_{t_n} \in B | X_{t_{n-1}})(c.s).$$

Definición 1.2.3. X es un proceso estrictamente estacionario si para cualesquiera $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathcal{T}$ y $\{t_1 + h, \dots, t_n + h\} \subset \mathcal{T}$ y cualesquiera $(B_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P(X_{t_1+h} \in B_1, \dots, X_{t_n+h} \in B_n) = P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n).$$

Definición 1.2.4. Supongamos que X tiene momento de segundo orden finito. X es un proceso estacionario en sentido amplio si $\forall t \in \mathcal{T}$ y $t + h \in \mathcal{T}$:

$$E(X_{t+h}) = E(X_t),$$

y

$$Cov(X_{t+h}, X_{s+h}) = Cov(X_t, X_s).$$

Definición 1.2.5. X tal que $E(|X|) < \infty$ es una martingala si para cada $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathcal{T}$,

$$E(X_{t_n} | X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1}) = X_{t_{n-1}}(c.s).$$

De la misma manera, X es una supermartingala (submartingala) si

$$E(X_{t_n} | X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1}) \leq (\geq) X_{t_{n-1}}(c.s).$$

1.3. Teorema de existencia de procesos estocásticos de Daniell-Kolmogorov

Definición 1.3.1. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico. Para $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, denotaremos por μ_{t_1, \dots, t_n} la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$. Esta probabilidad se llama distribución finito-dimensional del proceso $(X_t)_{t \geq 0}$.

Obs. Observemos que es una medida de probabilidad en \mathbb{R}^n . Además, si $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ y τ es una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$, cumple:

- 1) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_{t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(n)}}(A_{\tau(1)} \times \dots \times A_{\tau(n)}), \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$
- 2) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1, \dots, t_{n-1}}(A_1 \times \dots \times A_{n-1}), \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$

Teorema 1.3.2. (Teorema de Daniell-Kolmogorov) Supongamos que para cada $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ tenemos una probabilidad μ_{t_1, \dots, t_n} en \mathbb{R}^n . Además supongamos que estas probabilidades satisfacen:

- 1) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_{t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(n)}}(A_{\tau(1)} \times \dots \times A_{\tau(n)}), \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$
- 2) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1, \dots, t_{n-1}}(A_1 \times \dots \times A_{n-1}), \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$

Entonces, existe una única probabilidad μ en $(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{W}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$ tal que para $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ y $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu(\pi_{t_1} \in A_1, \dots, \pi_{t_n} \in A_n) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n).$$

1.3.1. Resultados previos para la demostración del Teorema de Daniell-Kolmogorov

Para demostrar el teorema necesitaremos el siguiente teorema y el siguiente lema.

Teorema 1.3.3. (Teorema de extensión de Caratheodory) Sea Ω un conjunto no vacío y \mathcal{A} una familia de subconjuntos tal que:

- 1) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- 2) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
- 3) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

Sea $\sigma(\mathcal{A})$ la σ -álgebra generada por \mathcal{A} . Si μ_0 es σ -aditiva en (Ω, \mathcal{A}) , entonces existe una extensión, μ , σ -aditiva en $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ tal que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mu_0(A) = \mu(A)$. Además, si μ_0 es σ -finita, entonces la extensión es única y también σ -finita.

Lema 1.3.4. Sea $B_n \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, una secuencia de conjuntos de Borel tal que $B_{n+1} \subset B_n \times \mathbb{R}$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos una probabilidad μ_n en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ que cumplen:

$$\mu_n(A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{n-1}(A_1 \times \dots \times A_{n-1}), \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

y además $\mu_n(B_n) > \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < 1$.

Entonces existe una secuencia de conjuntos compactos $K_n \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, tal que:

- 1) $K_n \subset B_n$.
- 2) $K_{n+1} \subset K_n \times \mathbb{R}$.
- 3) $\mu_n(K_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Demostración. Para cada n , podemos encontrar $K_n^* \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $K_n^* \subset B_n$ y que cumpla $\mu_n(B_n \setminus K_n^*) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Sea $K_n = (K_1^* \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \dots \cap (K_{n-1}^* \times \mathbb{R}) \cap K_n^*$. Podemos comprobar fácilmente que:

1) $K_n \subset B_n$.

2) $K_{n+1} \subset K_n \times \mathbb{R}$.

Además:

$$\begin{aligned} \mu_n(K_n) &= \mu_n(B_n) - \mu_n(B_n \setminus K_n) = \mu_n(B_n) - \mu_n(B_n \setminus ((K_1^* \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \dots \cap (K_{n-1}^* \times \mathbb{R}) \cap K_n^*)) \\ &\geq \mu_n(B_n) - \mu_n(B_n \setminus ((K_1^* \times \mathbb{R}^{n-1}))) - \dots - \mu_n(B_n \setminus (K_{n-1}^* \times \mathbb{R})) - \mu_n(B_n \setminus K_n^*) \\ &\geq \mu_n(B_n) - \mu_1(B_1 \setminus K_1^*) - \dots - \mu_n(B_n \setminus K_n^*) \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \dots - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \geq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

□

1.3.2. Demostración y consecuencias

Con estos dos previos resultados ya podemos demostrar el Teorema de Daniell-Kolmogorov.

Demostración. Para empezar vamos a definir cuál va a ser nuestra μ .

Tengamos en cuenta el cilindro siguiente:

$$\mathcal{C}_{t_1, \dots, t_n}(B) = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in B\},$$

donde $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Definiremos nuestra medida de probabilidad μ como

$$\mu(\mathcal{C}_{t_1, \dots, t_n}(B)) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(B).$$

Debido a las suposiciones que hemos hecho sobre μ_{t_1, \dots, t_n} es claro que μ está bien definida y cumple $\mu(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})) = 1$.

El conjunto \mathcal{A} de todos los posibles cilindros satisface las condiciones del Teorema de Caratheodory. Dado que μ es finita, también es σ -finita (basta tomar como unión contable de conjuntos al total), y solo nos queda comprobar que μ es σ -aditiva:

Sea $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de cilindros disjuntos dos a dos tal que $C = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ también es un cilindro. Tenemos que comprobar si $\mu(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(C_n)$.

Notemos que, si $N \in \mathbb{N}$, $\mu(C) = \mu(C \setminus \cup_{n=0}^N C_n) + \mu(\cup_{n=0}^N C_n)$, por lo tanto tenemos que comprobar que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mu(D_N) = 0, \quad D_N = C \setminus \cup_{n=0}^N C_n.$$

La sucesión $(\mu(D_N))_{N \in \mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y por lo tanto converge. Supongamos que converge a $\varepsilon > 0$ y veamos en este caso que $\cap_{N \in \mathbb{N}} D_N \neq \emptyset$, lo cual es absurdo.

Como D_N es un cilindro, $\cup_{N \in \mathbb{N}} D_N$ solo involucra una sucesión contable de tiempos

$t_1 < \dots < t_n < \dots$ y entonces podemos suponer que (añadiendo convenientemente otros conjuntos, si hace falta):

$$D_N = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_N)) \in B_N\},$$

donde $B_n \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de conjuntos de Borel tal que $B_{n+1} \subset B_n \times \mathbb{R}$. Como estamos suponiendo que $\mu(D_N) \geq \varepsilon$, por el lema anterior podemos construir una sucesión de compactos $K_n \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ tal que:

- 1) $K_n \subset B_n$.
- 2) $K_{n+1} \subset K_n \times \mathbb{R}$.
- 3) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(K_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Dado que K_n no es vacío, tomemos $(x_1^n, \dots, x_n^n) \in K_n$.

La sucesión $(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendrá una subsucesión convergente $(x_1^{j_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ a $x_1 \in K_1$. De la misma manera, la sucesión $((x_1^{j_1(n)}, x_2^{j_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tendrá una parcial convergente a $(x_1, x_2) \in K_2$. Recurrentemente, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_n) \in K_n$.

Por lo tanto el evento $\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_N)) = (x_1, \dots, x_N)\}$ está en D_N , lo que nos lleva a contradicción. Por lo tanto la sucesión $(\mu(D_N))_{N \in \mathbb{N}}$ converge a 0, lo que implica la σ -aditividad de μ . \square

Obs. (Comentarios a la demostración)

- $\mu(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})) = 1$, porque para cualesquiera $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, $\mu(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(\mathbb{R}^n) = 1$.
- \mathcal{A} cumple las condiciones del Teorema de Caratheodory porque:
 - $\mathcal{A} = C_{t_1, \dots, t_n}(\mathbb{R}^n)$.
 - $C_{t_1, \dots, t_n}(A)^c \in \mathcal{A}$ porque $C_{t_1, \dots, t_n}(A)^c = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in A^c\}$ y A^c es también un boreliano.
 - $C_{t_1, \dots, t_n}(A) \cup C_{t_1, \dots, t_n}(B) \in \mathcal{A}$? Tenemos que $C_{t_1, \dots, t_n}(A)^c \cap C_{t_1, \dots, t_n}(B)^c = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in A^c \cap B^c\}$. Como A y B son borelianos, A^c y B^c también lo son y también lo es su intersección. Si tomamos el complementario, por el punto anterior tenemos lo que buscamos.
- Hemos visto que la unión finita, la intersección finita y los complementarios de cilindros son cilindros, por lo que los conjuntos D_N son cilindros. Además, $D_{N+1} \subset D_N$, y es lo que nos permite escribirlos como $D_N = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (f(t_1), \dots, f(t_N)) \in B_N\}$, con $B_{N+1} \subset B_N \times \mathbb{R}$. Así, D_N se va haciendo cada vez más pequeño.
- La necesidad del lema para ver que existen los compactos convenientes viene dada por asegurar que existen parciales convergentes (Teorema de Bolzano-Weierstrass).
- Dado que $K_{n+1} \subset K_n \times \mathbb{R}$, cuando tomamos $(x_1^n, \dots, x_n^n) \in K_n$, las n-1 primeras coordenadas tienen que pertenecer a K_{n-1} , así como los límites. De esta manera vemos que D_N no es vacío.

Corolario 1.3.5. (Construcción de procesos estocásticos). Para cada $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, supongamos dada una probabilidad μ_{t_1, \dots, t_n} en \mathbb{R}^n . Supongamos además que cumplen las condiciones del Teorema de Daniell-Kolmogorov. Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ y un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ definido en este espacio tal que tiene como distribuciones finito-dimensionales μ_{t_1, \dots, t_n} .

Demostración. Escogemos como espacio de probabilidad

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) = (\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{W}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mu),$$

donde μ es la probabilidad dada por el Teorema de Daniell-Kolmogorov.

El proceso canónico $(\pi_t)_{t \geq 0}$ definido en $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ por $\pi_t(f) = f(t)$ satisface la propiedad. \square

Definición 1.3.6. Un proceso estocástico real $(X_t)_{t \geq 0}$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ se llama proceso Gaussiano si todas sus distribuciones finito-dimensionales son gaussianas (o normales).

Obs. Un resultado conocido sobre distribuciones finito-dimensionales normales es que, vía la transformada de Fourier, vienen determinadas por su esperanza,

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t),$$

y su covarianza,

$$R(s, t) = \mathbb{E}((X_t - m(t))(X_s - m(s))),$$

que además es simétrica ($R(s, t) = R(t, s)$) y definida positiva: para $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j R(t_i, t_j) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \mathbb{E}((X_{t_i} - m(t_i))(X_{t_j} - m(t_j))) = \\ &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_{t_i} - m(t_i)) \right)^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Veamos una aplicación del Teorema de Daniell-Kolmogorov:

Proposición 1.3.7. Sea $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $R : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función simétrica y definida positiva. Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ y un proceso Gaussiano $(X_t)_{t \geq 0}$ definido en él cuya esperanza es la función m y cuya covarianza es la función R .

Demostración. Dadas las funciones $m(t)$ y $R(s, t)$, definiremos $E(X_t) = m(t)$ y $Cov(X_s, X_t) = R(s, t)$. Así, por la observación anterior podemos encontrar las distribuciones finito-dimensionales y aplicar directamente el Teorema de Daniell-Kolmogorov para hallar la probabilidad μ y el corolario para hallar el proceso. \square

1.4. El Teorema de Continuidad de Kolmogorov

El Teorema anterior es muy útil para probar la existencia de procesos estocásticos, pero no nos dice nada sobre sus trayectorias. Otro teorema, también demostrado por Kolmogorov, nos va a ayudar a comprobar ciertos aspectos de estas trayectorias.

Definición 1.4.1. Una función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ diremos que es continua en sentido Hölder con exponente $\alpha > 0$ si existe una constante $C > 0$ tal que para $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|f(t) - f(s)\| \leq C |t - s|^\alpha.$$

Obs. Las funciones continuas en el sentido Hölder son en particular continuas. Además, no siempre nos interesará hablar de continuidad Hölder global, sino de continuidad Hölder local. De hecho las constantes de Hölder van a depender del intervalo.

Definición 1.4.2. Diremos que un proceso estocástico $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ es una modificación del proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ si $\forall t \geq 0, \mathcal{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1$.

Obs. Si $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ es una modificación del proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ entonces tiene la misma distribución que $(X_t)_{t \geq 0}$, porque los dos tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.

Teorema 1.4.3. (Teorema de continuidad de Kolmogorov) Sean $\alpha, \varepsilon, c > 0$. Si un proceso estocástico d -dimensional $(X_t)_{t \geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ satisface que para $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}(\|X_t - X_s\|^\alpha) \leq c |t - s|^{1+\varepsilon},$$

entonces existe una modificación del proceso, $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, que es un proceso continuo y que tiene trayectorias γ -Hölder para cada $\gamma \in [0, \frac{\varepsilon}{\alpha})$.

Demostración. Dada la extensión y dificultad técnica de la demostración del teorema, nosotros vamos a abordar el caso en $d = 1$ y $t \in [0, 1]$, que son suficientemente representativos de la utilidad del lema de Borell-Cantelli y de la desigualdad de Markov. Si algún lector o lectora está interesado en la demostración completa, la puede encontrar en [3]

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n}, k = 0, \dots, 2^n \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{D} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n.$$

Sea $\gamma \in [0, \frac{\varepsilon}{\alpha})$. Por la desigualdad de Markov tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \left(\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right) &= \mathcal{P} \left(\cup_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^n} \mathcal{P} \left(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\mathbb{E} \left(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|^\alpha \right)}{2^{-\gamma n \alpha}} \leq c 2^{-n(\varepsilon - \gamma \alpha)} \end{aligned}$$

Entonces, ya que $\gamma\alpha < \varepsilon$, podemos deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \left(\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right) < +\infty.$$

Ahora, por el lema de Borell-Cantelli, podemos hallar un conjunto $\Omega^* \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{P}(\Omega^*) = 1$ y para el cual si $\omega \in \Omega^*$ entonces existe $N(\omega)$ tal que para $n \geq N(\omega)$, $\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \leq 2^{-\gamma n}$.

En particular, existirá una variable aleatoria finita (casi seguramente) C tal que para cada $n \geq 0$, $\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \leq C2^{-\gamma n}$.

Veamos ahora que las trayectorias de $X_{/\Omega^*}$ son γ -Hölder en \mathcal{D} .

Sean $s, t \in \mathcal{D}$, $s \neq t$. Podremos encontrar un $n \geq 0$ tal que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |s - t| \leq \frac{1}{2^n}$.

Tomemos ahora una sucesión creciente $(s_k)_{k \geq n}$ que converja a s tal que $s_k \in \mathcal{D}_k$ y $|s_{k+1} - s_k| = 2^{-(k+1)}$ o 0 .

De la misma manera podemos encontrar una sucesión $(t_k)_{k \geq n}$ que converja a t y que además cumpla que s_n y t_n son vecinos en \mathcal{D}_n .

Tenemos entonces que

$$X_t - X_s = \sum_{i=n}^{\infty} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) + (X_{s_n} - X_{t_n}) + \sum_{i=n}^{\infty} (X_{t_i} - X_{t_{i+1}}),$$

Con lo cual,

$$|X_t - X_s| \leq C2^{-\gamma n} + 2 \sum_{k=n}^{+\infty} C2^{-\gamma(k+1)} \leq 2C \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-\gamma k} \leq \frac{2C}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-\gamma n}.$$

Acabamos de comprobar que las trayectorias de $X_{/\Omega^*}$ son γ -Hölder en \mathcal{D} .

Finalmente, si $\omega \in \Omega^*$, $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ y si $\omega \notin \Omega^*$, entonces $\tilde{X}_t(\omega) = 0$. El proceso $(\tilde{X}_t)_{t \in [0,1]}$ es la modificación que buscábamos. \square

Obs. (Comentarios a la demostración)

- $\mathcal{P} \left(\bigcup_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \mathcal{P} \left(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right)$ porque \mathcal{P} es una probabilidad, y por lo tanto σ -aditiva.
- $\sum_{k=1}^{2^n} \mathcal{P} \left(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\mathbb{E} \left(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|^\alpha \right)}{2^{-\gamma \alpha n}}$ utilizando la desigualdad de Markov: $\mathcal{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^\alpha)}{a^\alpha}$
- $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{\mathbb{E} \left(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|^\alpha \right)}{2^{-\gamma \alpha n}} \leq c2^{-n(\varepsilon - \gamma\alpha)}$ utilizando la premisa del teorema.
- El lema de Borell-Cantelli nos dice que, como tenemos $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{P} \left(\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right) < +\infty$, entonces $\mathcal{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} (\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n})) = \mathcal{P}(N_0) = 0$. Por lo que tomaremos $\Omega^* = \Omega \setminus N_0$.

- Del propio lema, deducimos que existe $N(\omega)$ tal que para $n \geq N(\omega)$,

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \leq 2^{-\gamma n},$$

porque lo que nos dice en palabras el propio lema es que la probabilidad de que vayan ocurriendo infinitamente los eventos es 0.

- En particular, existirá una variable aleatoria C tal que para $n \geq 0$

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \leq C2^{-\gamma n},$$

porque simplemente estamos reescalando la desigualdad. Obviamente $C = C(\omega)$.

Obs. Es estrictamente necesario que $\varepsilon > 0$. Un ejemplo de que el teorema no funciona con $\varepsilon = 0$ es el siguiente. Supongamos que $\Omega = [0, 1]$ con la σ -álgebra de borelianos y medida uniforme de probabilidad. Sea $U(\omega) = \omega$, es decir, U es una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. Definamos $X_t(\omega) = I_{\{U \leq t\}}(\omega)$, $t \geq 0$.

Es claro que $|X_{t+h} - X_t| = 1$ si $0 \leq t < 1$ y $t < U \leq t+h$ y 0 en caso contrario. Entonces para $0 \leq t < 1$ y $h > 0$, $\mathbb{E}|X_{t+h} - X_t| = \mathcal{P}(t < U \leq t+h) \leq h$. Observemos que X_t satisface el teorema de continuidad de Kolmogorov con $C = 1$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0$, pero claramente no va a tener una modificación continua.

Sea $A = \{\omega : t \rightarrow X_t(\omega) \text{ es continua}\}$. Si $\omega = 0$, entonces $U = 0$ y $X_t = 1$ para cualquier $t \geq 0$ y esta trayectoria en particular es continua. Si $\omega > 0$, claramente la trayectoria no va a ser continua, por lo que $A = \{0\}$. Pero además, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{0\}) = 0$, por lo que $(X_t)_{t \geq 0}$ no tiene trayectorias continuas casi seguro (de hecho, casi seguro, $(X_t)_{t \geq 0}$ tendrá trayectorias discontinuas).

Definición 1.4.4. Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ es continuo en probabilidad si $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : |X_s(\omega) - X_t(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Obs. Continuidad en probabilidad no implica trayectorias continuas. Si tomamos el ejemplo de la observación anterior tenemos que, para $\varepsilon > 0$, usando la desigualdad de Markov,

$$\mathcal{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}|X_{t+h} - X_t| \leq \frac{h}{\varepsilon},$$

por lo que si hacemos $h \rightarrow 0$ obtenemos la continuidad en probabilidad.

Lo que sí podemos asegurar, y se demostrará en la siguiente proposición, es que si se cumplen las condiciones del Teorema de continuidad de Kolmogorov, entonces se tiene también continuidad en probabilidad.

Proposición 1.4.5. Si el proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ cumple las condiciones del Teorema de continuidad de Kolmogorov, entonces también es continuo en probabilidad.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \mathbb{E}(|X_{t+h} - X_t|^\alpha) \text{ por la desigualdad de Markov,} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^\alpha} |t - s|^{1+\varepsilon} \text{ por las condiciones del teorema.} \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$, el último término tiende a 0 cuando $|t - s| \rightarrow 0$. □

1.5. Medida y dimensión de Hausdorff

Definición 1.5.1.

- Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, definimos el diámetro de U como $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$.
- Si $\{U_i\}$ es una colección contable de conjuntos de diámetro como mucho δ que cubren F , es decir, $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ entonces decimos que $\{U_i\}$ es una δ -cobertura de F .
- Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y s un número no negativo. Para $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cobertura de } F\right\}.$$

Fijémonos que cuando δ se va haciendo pequeño, el valor del ínfimo irá creciendo (cada vez hay menos coberturas posibles). Escribimos

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Llamaremos a $\mathcal{H}^s(F)$ medida de Hausdorff s -dimensional de F .

Obs. Se puede demostrar que $\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \text{vol}^n(F)$, donde c_n es el volumen de una esfera n -dimensional de diámetro 1.

Proposición 1.5.2. Sea S una transformación que escala con factor $\lambda > 0$. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración. Si $\{U_i\}$ es una δ -cobertura de F entonces $\{S(U_i)\}$ es una $\lambda\delta$ -cobertura de $S(F)$ y entonces

$$\sum |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s.$$

Por lo que

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ obtenemos una desigualdad y cambiando S por S^{-1} , λ por $1/\lambda$ y F por $S(F)$ obtendremos la otra desigualdad. \square

Proposición 1.5.3. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \quad x, y \in F, \quad c > 0, \quad \alpha > 0.$$

Entonces para cada s ,

$$\mathcal{H}_{c\delta}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Demostración. Si $\{U_i\}$ es una δ -cobertura de F , entonces ya que $|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$, tenemos que $\{f(F \cap U_i)\}$ es una $c\delta^\alpha$ -cobertura de $f(F)$. Así, $\sum |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum |U_i|^s$ y entonces

$$\mathcal{H}_{c\delta}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Obtenemos el resultado tomando límite $\delta \rightarrow 0$. \square

Obs. Observemos que la condición del teorema es la definición de la continuidad Hölder.

Definición 1.5.4. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$. La dimensión Hausdorff de F está definida por

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

La motivación de esta definición viene dada por lo siguiente. Si $\delta < 1$, es claro que la medida de Hausdorff es decreciente con s . También, si $t > s$ y $\{U_i\}$ una δ -cobertura de F ,

$$\sum |U_i|^t = \sum |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum |U_i|^s.$$

Tomando ínfimos, $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ y haciendo $\delta \rightarrow 0$, si $\mathcal{H}^s(F) = 0$, $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para $t > s$. Esto nos muestra que $\mathcal{H}^s(F)$ tiene un valor crítico (la dimensión de Hausdorff) para el cual salta al 0.

Proposición 1.5.5. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface la condición de Hölder. Entonces $\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$.

Demostración. Por la Proposición 1.5.3. y, si $s > \dim_H F$, $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c_\alpha^s \mathcal{H}^s(F) = 0$, implicando que $\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$, $\forall s > \dim_H F$. Aplicando $s \rightarrow \dim_H F^+$ obtenemos el resultado. \square

Corolario 1.5.6. ■ Si la función es Lipschitz, entonces $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$.

- Si la función es bi-Lipschitz, esto es

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|,$$

entonces $\dim_H f(F) = \dim_H F$

Demostración. Para la primera parte simplemente hay que tomar $\alpha = 1$ y aplicar directamente la proposición. Aplicando esto a f^{-1} obtenemos la otra desigualdad para probar el segundo punto. \square

Obs. Esta última propiedad nos dice que la dimensión de Hausdorff es invariante bajo transformaciones bi-Lipschitz, por lo que si dos conjuntos tienen dimensión de Hausdorff diferente, no existe una transformación bi-Lipschitz entre ellos.

1.5.1. Método del potencial

En esta sección se presenta un teorema útil para calcular dimensiones de Hausdorff basado en los conceptos de potencial y energía.

Definición 1.5.7. Sea $s \geq 0$.

- Definimos el s -potencial en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ debido a una distribución de masa μ como

$$\phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x - y|^s}.$$

- Definimos la s -energía de μ como

$$I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) = \int \int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s}.$$

Nota. Si $\nu(x)$ es la densidad de $\mu(x)$, entonces $d\mu(x) = \nu(x)dx$ [9].

Teorema 1.5.8. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$. Entonces:

- Si existe una distribución de masa μ en F con $I_s(\mu) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ y $\dim_H F \geq s$.
- Si F es un boreliano con $\mathcal{H}^s > 0$ entonces existe una distribución de masa μ en F tal que $I_t(\mu) < \infty$ para todo $0 < t < s$.

La demostración es un poco técnica y tampoco nos va a aportar mucho al estudio del movimiento Browniano como tal. Se puede consultar en las páginas 70-72 de [4]. Particularmente interesante para el cálculo de dimensiones de Hausdorff es el primer punto.

2. El movimiento Browniano

El segundo capítulo trata sobre el movimiento Browniano, su definición, su construcción y algunas de las propiedades más importantes. Nociones como la continuidad, diferenciabilidad, el teorema del logaritmo iterado o propiedades de autointersección se encuentran en este capítulo. Seguiremos las referencias [4], [6], [7] y [8].

2.1. Definición y construcción del movimiento Browniano

Definición 2.1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad. Un proceso real y continuo $(B_t)_{t \geq 0}$ se denomina movimiento Browniano estándar si es un proceso gaussiano con esperanza

$$m(t) = E(B_t) = 0,$$

y covarianza

$$R(s, t) = E(B_s, B_t) = E(B_s B_t) - E(B_s)E(B_t) = E(B_s B_t) = \min(s, t).$$

Obs. $R(s, t) = \min(s, t)$ es una función de covarianza porque es simétrica, y para $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \min(t_i, t_j) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0, t_i]}(s) \mathbf{1}_{[0, t_j]}(s) ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[0, t_i]}(s) \right)^2 ds \geq 0. \end{aligned}$$

Definición 2.1.2. Un proceso estocástico n-dimensional $(B_t)_{t \geq 0}$ se llama movimiento Browniano estándar si

$$(B_t)_{t \geq 0} = (B_t^1, \dots, B_t^n)_{t \geq 0},$$

y los procesos $(B_t^i)_{t \geq 0}$ son movimientos Brownianos estándar independientes.

Teorema 2.1.3. Existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ y un proceso estocástico en este espacio el cual es un movimiento Browniano estándar.

Demostración. Por la observación anterior y la Proposición 1.3.7, la cual utiliza directamente el teorema de existencia de Daniell-Kolmogorov, el resultado es inmediato. \square

Definición 2.1.4. Una definición alternativa pero más visual del movimiento Browniano es la siguiente. Un proceso estocástico $(B_t)_{t \geq 0}$ se denomina movimiento Browniano (estándar) si cumple las siguientes condiciones:[5]

- Comienza en cero: $B_0 = 0$.

- Su trayectoria es continua.
- Tiene incrementos estacionarios e independientes.
- $\forall t > 0$, B_t tiene una distribución $N(0,t)$.

Realmente el último punto se puede deducir de los tres primeros, pero es bastante complicado de demostrar.

Obs. Veamos rápidamente que las dos definiciones son equivalentes:

- De la propia definición se tiene que $E(B_t) = 0$.
- De la estacionaridad de los incrementos, tenemos que $B_t - B_s$ tiene la misma distribución que $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$, que es $N(0,t-s)$. Puesto que los incrementos son independientes, para $t > s$ se tiene la siguiente función de covarianza

$$\begin{aligned} c(t, s) &= E(B_t, B_s) = E(B_t B_s) = E(((B_t - B_s) + B_s) B_s) = \\ &= E((B_t - B_s) B_s) + E(B_s^2) = E(B_t - B_s) E(B_s) + s = s. \end{aligned}$$

- Puesto que un proceso gaussiano se caracteriza por su esperanza y su función de covarianza, podemos concluir que las dos definiciones son equivalentes.

Proposición 2.1.5. Si $(B_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano entonces tenemos que

- B_t es una martingala.
- $B_t^2 - t$ es una martingala.

Demostración. Tomemos $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$. Observemos que $E(B_t) = 0 < \infty$ y $E(B_t^2) = t < \infty$. Debido a que los incrementos son estacionarios e independientes tendremos que, para $t > s$:

- $E(B_t | \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) + B_s = B_s$.
- $E(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = E((B_t + B_s - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) - t = E((B_t - B_s)^2 + B_s^2 + 2(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) - t = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$.

□

Nota. $B_t \equiv B(t)$.

Proposición 2.1.6. (Propiedad de escalamiento) Sea $a > 0$ y $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano. Entonces el proceso $(B_a(t))_{t \geq 0} = (\sqrt{a} B_{\frac{t}{a}})_{t \geq 0}$ es también un movimiento Browniano con la misma distribución.

Demostración. Debido a que $(B_t)_{t \geq 0}$ es continuo y tiene incrementos independientes y estacionarios, es inmediato que $(B_a(t))_{t \geq 0}$ también es continuo y tiene incrementos independientes y estacionarios. Además,

$$\begin{aligned} E(B_a(t)) &= \sqrt{a} E(B(\frac{t}{a})) = 0. \\ Var(B_a(t)) &= Var(\sqrt{a} B(\frac{t}{a})) = a Var(B(\frac{t}{a})) = a \frac{t}{a} = t. \end{aligned}$$

□

2.1.1. Construcción intuitiva del movimiento Browniano y su simulación en R

Lévy ya hizo una construcción de este proceso detalladamente a mediados del siglo pasado. Si el lector o lectora está interesado en ella puede consultarla en el apartado 1.1.2 de [6]. En este trabajo hemos demostrado su existencia vía el teorema de Daniell-Kolmogorov y demostrarlo también por el camino de Lévy nos llevaría demasiadas páginas.

En este apartado vamos a intentar visualizar cómo se construye el movimiento Browniano a partir del paseo aleatorio. No vamos a hacerlo de forma rigurosa, sino de manera más visual y esto además nos enseñará a simular este proceso en R.

Consideremos una partícula situada en el 0 de la recta real y supongamos que ésta tiene probabilidad 1/2 de moverse 1 a la izquierda o 1 a la derecha cada cierto tiempo τ . Sea $B_\tau(t)$ la posición de la partícula en un tiempo t . Ahora debemos hacer que τ sea cada vez más pequeño, es decir, que tienda a 0. El problema de hacer esto directamente es que en un corto período de tiempo podría ser que tengamos la partícula en el infinito. Para que esto no suceda, utilizando el Teorema Central del Límite, multiplicaremos el proceso por una función adecuada:

$$B(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\tau} B_\tau(t).$$

Para generalizarlo a n dimensiones, solo tendríamos que construir un vector cuyas componentes se comporten como la anterior descrita y que además sean independientes.

De esta manera, a la hora de simular el proceso, vamos a pensar en dividir el intervalo donde vayamos a simularlo en el máximo número de subintervalos posibles y en cada tiempo vamos a simular la normal correspondiente. Esto es, sabemos que $B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim N(0, t-s)$, por lo que $B_t - B_s = \sqrt{t-s}Z$, donde $Z \sim N(0, 1)$. Así,

$$B(t_{i+1}) = B(t_i) + (B(t_{i+1}) - B(t_i)) = B(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_i, \quad Z_i \sim N(0, 1).$$

Implementando el código en una función de R nos quedaría:

```
mov_brown <-function(Tiempo,pasos){
t<-seq(0,Tiempo,pasos)
x<-numeric(length(t))
for(i in 1:(length(t)-1)){
Z<-rnorm(1)
x[i+1]<-x[i]+sqrt(t[i+1]-t[i])*Z}
data.frame(t,x)
}
```

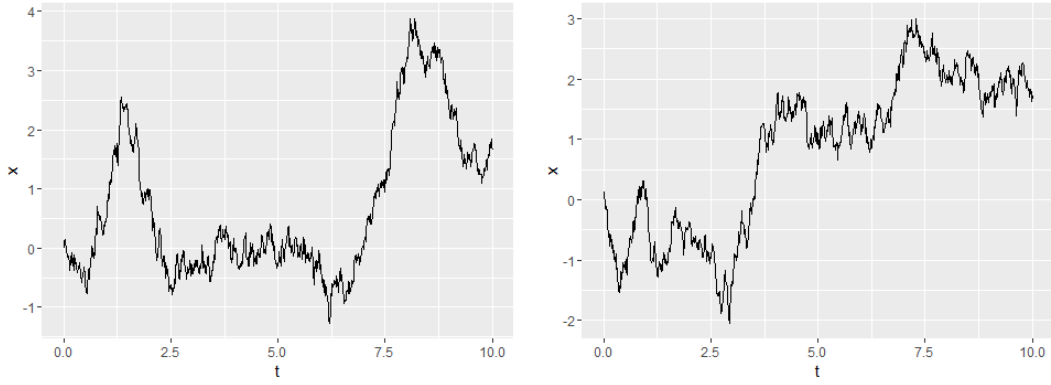


Figura 1: Simulación de dos movimientos Brownianos unidimensionales para Tiempo=10 y pasos=0,01.

2.2. Propiedades del movimiento Browniano unidimensional

Proposición 2.2.1. Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano. Entonces,

$$\mathcal{P} \left(\inf_{t \geq 0} B_t = -\infty, \sup_{t \geq 0} B_t = +\infty \right) = 1.$$

Demostración. Dado que de la propia Definición 2.1.4 se deduce trivialmente que $(-B_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano, en realidad solo tenemos que ver que

$$\mathcal{P} \left(\sup_{t \geq 0} B_t = +\infty \right) = 1.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$, por la propiedad de escalamiento tenemos que

$$\mathcal{P} \left(c \sup_{t \geq 0} B_t \leq N \right) = \mathcal{P} \left(\sup_{t \geq 0} B_t \leq N \right), c > 0.$$

Ya que $\sup_{t \geq 0} B_{tc^2} = \sup_{t \geq 0} B_t$. Entonces, como c puede ser arbitrariamente lo grande que queramos,

$$\mathcal{P} \left(\sup_{t \geq 0} B_t \leq N \right) = \mathcal{P} \left(\sup_{t \geq 0} B_t = 0 \right).$$

Observemos que

$$\mathcal{P} \left(\sup_{t \geq 0} B_t = 0 \right) \leq \mathcal{P} \left(B_1 \leq 0, \sup_{t \geq 1} B_t = 0 \right) = \mathcal{P} \left(B_1 \leq 0, \sup_{t \geq 0} (B_{t+1} - B_1) = -B_1 \right).$$

Ya que $(B_{t+1} - B_1)_{t \geq 0}$ es independiente de B_1 tenemos que para $c > 0$,

$$\mathcal{P} \left(B_1 \leq 0, \sup_{t \geq 0} (B_{t+1} - B_1) = -B_1 \right) = \mathcal{P} \left(B_1 \leq 0, c \sup_{t \geq 0} (B_{t+1} - B_1) = -B_1 \right).$$

y entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(B_1 \leq 0, \sup_{t \geq 0}(B_{t+1} - B_1) = -B_1\right) &= \mathcal{P}\left(B_1 \leq 0, \sup_{t \geq 0}(B_{t+1} - B_1) = 0\right) = \\ &= \mathcal{P}(B_1 \leq 0) \mathcal{P}\left(\sup_{t \geq 0}(B_{t+1} - B_1) = 0\right) = \frac{1}{2} \mathcal{P}\left(\sup_{t \geq 0} B_t = 0\right).\end{aligned}$$

Finalmente, la primera desigualdad nos queda

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(\sup_{t \geq 0} B_t = 0\right) &\leq \frac{1}{2} \mathcal{P}\left(\sup_{t \geq 0} B_t = 0\right) \Rightarrow \mathcal{P}\left(\sup_{t \geq 0} B_t = 0\right) = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{P}\left(\sup_{t \geq 0} B_t \leq N\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{P}\left(\sup_{t \geq 0} B_t = +\infty\right) = 1.\end{aligned}$$

La última implicación es debido a que N puede ser arbitrariamente grande. \square

Corolario 2.2.2. Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano. Para cada $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}(\exists s \geq t, B_s = x) = 1.$$

Demostración. Observemos que $\mathcal{P}(\sup_{t \geq s} B_t = +\infty) = \mathcal{P}(\sup_{t-s \geq 0}(B_t - B_s) + B_s = +\infty) = \mathcal{P}(\sup_{t-s \geq 0} B_{t-s} = +\infty) = 1$ cambiando $t-s$ por t' y utilizando el teorema anterior. Por el teorema de Bolzano tenemos probado el corolario. \square

Proposición 2.2.3. (Inversión temporal) Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano. El proceso $(Y_t)_{t \geq 0}$ definido por

$$Y_t = \begin{cases} tB(\frac{1}{t}) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

es un movimiento Browniano con la misma distribución que el primero.

Demostración. Tenemos que ver que $E(Y_t) = 0$ y que $Cov(Y_t, Y_s) = \min(s, t)$. Para $t, s \neq 0$,

- $E(Y_t) = tE(B(\frac{1}{t})) = 0$.
- $Cov(Y_t, Y_s) = E(Y_t Y_s) = stE(B(\frac{1}{t})B(\frac{1}{s})) = st \cdot Cov(B(\frac{1}{t})B(\frac{1}{s})) = st \cdot \min(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}) = \min(s, t)$.

Para finalizar la demostración nos queda garantizar la continuidad en el 0. Ésta viene dada por la ley de los grandes números aplicada a nuestro proceso:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad c.s.$$

(Lema 14 de [7]). \square

2.2.1. Propiedades de continuidad y no-derivabilidad

La definición del movimiento Browniano requiere que sus trayectorias sean continuas casi seguramente. Esto implica que en el intervalo $[0,1]$ (o cualquier otro compacto) las trayectorias sean uniformemente continuas, es decir, que existe una función, llamada módulo de continuidad de $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, en principio aleatoria, φ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ y que cumple [6]

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\varphi(h)} \leq 1.$$

La pregunta que se nos presenta ahora es si podemos encontrar esa función. La respuesta es que sí, y además no es aleatoria.

Teorema 2.2.4. Existe una constante $C > 0$ tal que, casi seguramente, para cada $h > 0$ suficientemente pequeña y $0 \leq t \leq 1 - h$,

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C \sqrt{h \log\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

La demostración de este teorema la encontramos en las páginas 24 y 25 de [6]. Para comprender la demostración se requiere conocer primero la construcción del movimiento Browniano de Lévy.

Además, existe un valor de C para el cual se cumple la igualdad.

Teorema 2.2.5. (Teorema del módulo de continuidad de Lévy) Casi seguramente,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\sqrt{2h \log\left(\frac{1}{h}\right)}} = 1.$$

La demostración de este teorema requiere de un teorema y dos lemas previos. Si alguien desea conocerla, puede consultarla en las páginas 25-27 de [6].

Ahora vamos a centrarnos en la continuidad en sentido Hölder (Definición 1.4.1). Así, vamos a demostrar que el movimiento Browniano será continuo en sentido Hölder si el exponente de la definición es menor que $1/2$ y no lo será en caso contrario. Para ello necesitamos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.6. (Criterio del Momento de Kolmogorov) Sea X un proceso estocástico real indexado por $\mathbb{Q}_2 = \{m2^{-n} : m, n \geq 0\}$. Si para algunas $\alpha, \beta > 0$,

$$E|X_t - X_s|^\beta \leq K|t - s|^{1+\alpha} \quad \forall s, t \in \mathbb{Q}_2 \cap [0, 1],$$

entonces para cualquier $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$, existe casi seguramente $C = C(\omega) \in (0, \infty)$ tal que

$$|X_q - X_r| \leq C|q - r|^\gamma \quad \forall q, r \in \mathbb{Q}_2 \cap [0, 1].$$

En particular, X se puede extender a un proceso continuo en $[0,1]$, donde la última desigualdad se cumple para $q, r \in [0, 1]$.

Observemos que este Teorema es una reformulación más visual del Teorema de Continuidad de Kolmogorov (Teorema 1.4.3).

Teorema 2.2.7. Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano. Entonces casi seguramente:

- $(B_t)_{t \in [0,1]}$ es continuo en sentido Hölder con exponente $\gamma < \frac{1}{2}$, esto es

$$\sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|B_t - B_s|}{|t - s|^\gamma} < \infty.$$

- $(B_t)_{t \in [0,1]}$ no es continuo en sentido Hölder si $\gamma \geq \frac{1}{2}$, esto es

$$\sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|B_t - B_s|}{|t - s|^\gamma} = \infty.$$

Demostración.

- Recordemos que para cualquier $0 \leq s \leq t \leq 1$, $B_t - B_s$ es una normal de esperanza 0 y varianza $t-s$. Un resultado conocido es el del momento de orden β de la normal:

$$E|B_t - B_s|^\beta = f(\beta)|t - s|^{\frac{\beta}{2}}, \quad f(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty$$

Observemos que el teorema anterior se cumple para $\alpha = \frac{\beta}{2} - 1$ para $\beta > 2$ (momentos de orden superior). Como $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, por el teorema anterior, el movimiento Browniano es continuo en sentido Hölder si $\gamma < \frac{1}{2}$.

- Es suficiente que comprobemos el caso $\gamma = \frac{1}{2}$. Observemos que

$$K = \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{t - s}} \geq \max\left\{ \sup_{\frac{i-1}{n} \leq s < t \leq \frac{i}{n}} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{t - s}} : 1 \leq i \leq n \right\}$$

donde $K_n^i = \sup_{\frac{i-1}{n} \leq s < t \leq \frac{i}{n}} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{t - s}}$, $1 \leq i \leq n$ son independientes (por la propiedad de incrementos independientes). Además su distribución es la misma que la de K . Sea $M > 0$, entonces

$$\mathcal{P}(K \leq M) \leq \mathcal{P}(K_n^1 \leq M, \dots, K_n^n \leq M) = \mathcal{P}(K \leq M)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\mathcal{P}(K > M) > 0$, $\forall M > 0$, entonces $\mathcal{P}(K \leq M) = 0$, $\forall M > 0$. Esto implica que $K = \infty$ casi seguramente.

□

Obs. K_n^i tiene la misma distribución que K ya que:

$$\sup_{\frac{i}{n} \leq s < t \leq \frac{i+1}{n}} \frac{|B_t - B_s|}{\sqrt{t - s}} = \sup_{i \leq ns < nt \leq i+1} \frac{\sqrt{n}|B_t - B_s|}{\sqrt{nt - ns}} = \sup_{0 \leq ns-i < nt-i \leq 1} \frac{|B_{nt-i} - B_{ns-i}|}{\sqrt{nt - ns - i + i}},$$

y finalmente haciendo $ns - i = s'$ y $nt - i = t'$ vemos que tienen la misma distribución. Hemos utilizado la propiedad de escalamiento y que $B_t - B_s = B_{t-s}$.

Teorema 2.2.8. (Ley del logaritmo iterado) Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano. Se tiene casi seguramente que

- $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} = 1.$
- $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} = -1.$

Demostración. Gracias a la simetría del movimiento Browniano, es suficiente probar solo el límite superior. Probaremos el caso cuando $t \rightarrow 0$ y el caso cuando $t \rightarrow \infty$ se ve directamente utilizando la propiedad de la inversión temporal (Proposición 2.2.3.). Probemos entonces que

$$\mathcal{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right) = 1.$$

Veremos las dos desigualdades.

- Veamos que $\mathcal{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} \leq 1 \right) = 1.$

Denotaremos $h(t) = \sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}$. Aplicaremos la desigualdad maximal de Doob a la martingala $\left(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t} \right)_{t \geq 0}$. Para $t \geq 0$,

$$\mathcal{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left(B_s - \frac{\alpha}{2} s \right) > \beta \right) = \mathcal{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} e^{\alpha B_s - \frac{\alpha^2}{2} s} > e^{\alpha \beta} \right) \leq e^{-\alpha \beta}.$$

Sean $\theta, \delta \in (0, 1)$. Usando la desigualdad anterior para $n \in \mathbb{N}$ con $t = \theta^n, \alpha = \frac{(1+\delta)h(\theta^n)}{\theta^n}, \beta = \frac{1}{2}h(\theta^n)$, y haciendo $n \rightarrow +\infty$ llegamos a

$$\mathcal{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq \theta^n} \left(B_s - \frac{(1+\delta)h(\theta^n)}{2\theta^n} s \right) > \frac{1}{2}h(\theta^n) \right) = O \left(\frac{1}{n^{1+\delta}} \right).$$

Por el lema de Borell-Cantelli, para casi cualquier $\omega \in \Omega$, podemos encontrar $N(\omega)$ tal que para $n \geq N(\omega)$,

$$\sup_{0 \leq s \leq \theta^n} \left(B_s(\omega) - \frac{(1+\delta)h(\theta^n)}{2\theta^n} s \right) \leq \frac{1}{2}h(\theta^n).$$

Y esto implica que para $\theta^{n+1} \leq t \leq \theta^n$,

$$B_t(\omega) \leq \sup_{0 \leq s \leq \theta^n} B_s(\omega) \leq \frac{1}{2}(2+\delta)h(\theta^n) \leq \frac{(2+\delta)h(t)}{2\sqrt{\theta}}.$$

Y de aquí, aplicando el límite superior, podemos concluir que

$$\mathcal{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} \leq \frac{2+\delta}{2\sqrt{\theta}} \right) = 1.$$

Haciendo ahora $\delta \rightarrow 0$ y $\theta \rightarrow 1$ obtenemos el resultado.

- Veamos ahora que $\mathcal{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} \geq 1 \right) = 1$.

Sea $\theta \in (0, 1)$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $A_n = \left\{ \omega, B_{\theta^n}(\omega) - B_{\theta^{n+1}}(\omega) \geq (1 - \sqrt{\theta})h(\theta^n) \right\}$.

Veamos que $\sum \mathcal{P}(A_n) = +\infty$. Para ello utilizaremos el siguiente resultado:

$\int_a^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \geq \frac{a}{1+a^2} e^{-\frac{a^2}{2}}$ (Lema 12.9 de [6]). Tenemos que

$$\mathcal{P}(A_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \geq \frac{a_n}{1+a_n^2} e^{-\frac{a_n^2}{2}}, \quad a_n = \frac{(1 - \sqrt{\theta})h(\theta^n)}{\theta^{n/2}\sqrt{1-\theta}}.$$

Cuando n es suficientemente grande, $\frac{a_n}{1+a_n^2} e^{-\frac{a_n^2}{2}} = O \left(\frac{1}{n \frac{1+\theta-2\sqrt{\theta}}{1-\theta}} \right)$, por lo que $\sum \mathcal{P}(A_n) = +\infty$.

Como el movimiento Browniano tiene incrementos independientes, podemos aplicar el segundo lema de Borell-Cantelli y obtenemos que el evento

$$B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}} \geq (1 - \sqrt{\theta})h(\theta^n),$$

ocurrirá casi seguramente para infinitas n . Gracias a la primera parte de la demostración, además sabemos que para casi cualquier ω podemos encontrar una $N(\omega)$ tal que para $n \geq N(\omega)$, $B_{\theta^{n+1}} > -2h(\theta^{n+1}) \geq -2\sqrt{\theta}h(\theta^n)$ y esto nos implica que casi seguramente el evento

$$B_{\theta^n} > h(\theta^n)(1 - 3\sqrt{\theta}),$$

ocurrirá para infinitas n . Por lo tanto podemos concluir que (tomando el límite superior)

$$\mathcal{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} \geq 1 - 3\sqrt{\theta} \right) = 1.$$

Y obtenemos el resultado haciendo $\theta \rightarrow 0$.

□

Obs. (Comentarios a la demostración)

- Debido a que $(-B_t)_{t \geq 0}$ es también un movimiento Browniano,

$$\mathcal{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{-B_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right) = \mathcal{P} \left(\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right) = 1.$$

- Utilizando la inversión temporal,

$$\mathcal{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1 \right) = \mathcal{P} \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{tB(\frac{1}{t})}{t\sqrt{2\frac{1}{t} \ln \ln t}} = 1 \right) = 1.$$

- Que $(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t})_{t \geq 0}$ es una martingala se comprueba de manera igual a las martingalas de la Proposición 2.1.5. y teniendo en cuenta que si $X \sim N(0, \sigma^2)$ entonces $E[e^{tX}] = e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}}$.
- Recordemos que la desigualdad maximal de Doob nos asegura que si (M_n) es una martingala, $p \geq 1$ y $E(|M_n|^p) < \infty$ entonces

$$\mathcal{P}(\sup_{0 \leq n \leq N} M_n \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|M_N|^p).$$

- Para encontrar a_n y reconocer la integral hay que recordar que $B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}} \sim N(0, \theta^n(1 - \theta)) \sim \theta^{\frac{n}{2}} \sqrt{1 - \theta} N(0, 1)$.

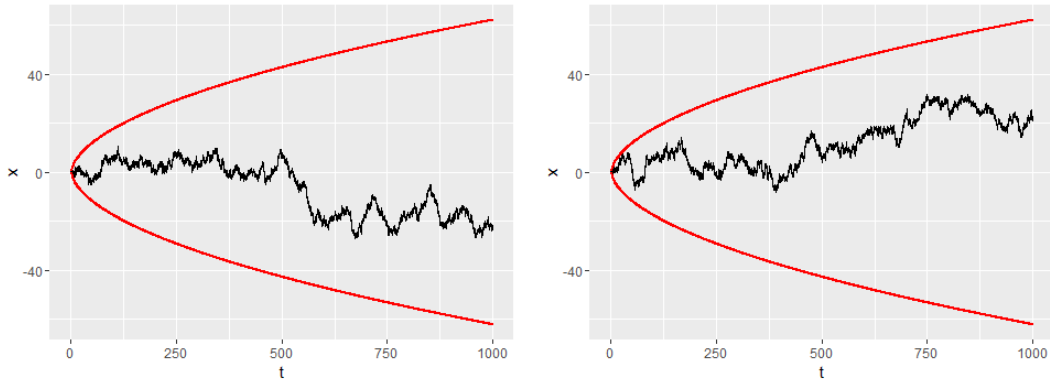


Figura 2: Simulación de dos movimientos Brownianos unidimensionales para Tiempo=1000 y pasos=0,01. Se observan en rojo las funciones $h(t)$ y $-h(t)$, que son la envoltura asintótica del Browniano. Se puede observar que normalmente el tiempo que el camino pasa cerca de la envoltura es muy escaso.

Finalmente vamos a comentar algunos detalles sobre la no-diferenciabilidad del movimiento Browniano.

Teorema 2.2.9. Para casi cualquier $\omega \in \Omega$, la trayectoria de $B(\omega)$ no es monótona en ningún intervalo.

Demostración. Supongamos que lo es en un intervalo I . Entonces existen dos racionales en I , $q_1 < q_2$ y la trayectoria es monótona en $[q_1, q_2]$. Por la propiedad de escalamiento, existe un movimiento Browniano con una trayectoria monótona en $[0, 1]$. Por la propiedad de simetría, es suficiente ver que la trayectoria del movimiento es no-decreciente para casi ninguna ω .

Sean $A_n = \{\omega \in \Omega : \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, B_{i+1/n}(\omega) - B_{i/n}(\omega) \geq 0\}$. Entonces

$$\mathcal{P}(A_n) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}(B_{i+1/n}(\omega) - B_{i/n}(\omega) \geq 0) = 2^{-n}.$$

Sea $A = \{\omega \in \Omega : B(\omega) \text{ es no-decreciente en } [0, 1]\}$. Entonces $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Por lo que

$$\mathcal{P}(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) = 0.$$

□

Definición 2.2.10. Para una función $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, denotamos:

$$\begin{aligned} \text{la derivada superior derecha de Dini } D^+ f(t) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \\ \text{la derivada superior izquierda de Dini } D^- f(t) &= \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \\ \text{la derivada inferior derecha de Dini } D_+ f(t) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \\ \text{la derivada inferior izquierda de Dini } D_- f(t) &= \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \end{aligned}$$

Decimos que f es diferenciable en $t \geq 0$ si las 4 derivadas son finitas y del mismo valor.

Teorema 2.2.11. (Paley, Wiener y Zygmund 1933) Para casi cualquier $\omega \in \Omega$ la trayectoria del movimiento Browniano no es diferenciable en ninguna $t \geq 0$. La demostración del teorema es un poco extensa y técnica. Si alguien está interesado o interesada en consultarla, se trata del Teorema 26 de [7].

2.3. Propiedades del movimiento Browniano multidimensional

Algunas de las propiedades anteriores se pueden generalizar al movimiento Browniano de más de una dimensión teniendo en cuenta que las componentes de éste son Brownianos independientes, como las de continuidad y no-diferenciabilidad. En esta sección pretendemos ir un poco más allá. Si el lector o lectora quiere entrar más en profundidad en este tema, en las referencias [4] y [6] hay varios capítulos explicando todo mucho más detalladamente y en profundidad.

Supongamos que $B(t) = (B_1(t), \dots, B_n(t))$ un movimiento Browniano n -dimensional. Como cada componente tiene intervalos independientes, tenemos que, si $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}(X_i(t+h) - X_i(t) \in [a_i, b_i]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) dx_i.$$

Entonces si E es el paralelepípedo $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X(t+h) - X(t) \in E) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) dx_i \\ &= (2\pi h)^{-n/2} \int_E \exp\left(-\frac{|x|^2}{2h}\right) dx, \end{aligned}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Aproximando conjuntos por paralelepípedos, podemos cambiar E por cualquier boreliano. Tomando $E = B(0, \rho)$ y pasando a coordenadas polares,

$$\mathcal{P}(|X(t+h) - X(t)| \leq \rho) = ch^{-n/2} \int_{r=0}^{\rho} r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) dr,$$

donde $c = (2\pi)^{-n/2}a_n$, donde a_n es el área de la superficie de una esfera n-dimensional de radio 1.

Proposición 2.3.1. Sea $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Casi seguramente un movimiento Browniano $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface

$$|B(t+h) - B(t)| \leq b|h|^\lambda,$$

con $|h| < H_0$ para algún $|H_0| > 0$ y además b depende solamente de λ .

Demostración. Para $h > 0$ tenemos

$$\mathcal{P}(|B(t+h) - B(t)| > h^\lambda) = ch^{-n/2} \int_{h^\lambda}^{\infty} r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) dr.$$

Haciendo el cambio $u = rh^{-1/2}$ y haciendo algunas acotaciones:

$$c \int_{h^{\lambda-1/2}}^{\infty} u^{n-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \leq c_1 \int_{h^{\lambda-1/2}}^{\infty} \exp(-u) du = c_1 \exp(-h^{\lambda-1/2}) \leq c_2 h^2,$$

donde c_1 y c_2 no dependen de h ni de t . Tomando los intervalos $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$ (es decir, de la forma $[t, t+h]$ con $h = 2^{-j}$) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(|B((m-1)2^{-j}) - B(m2^{-j})| > 2^{-j\lambda}, \quad j \geq k, \quad 1 \leq m \leq 2^j) &\leq \\ &\leq c_2 \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^j} 2^{-2j} = c_2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = c_2 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Entonces ha de existir un entero K (observemos que la probabilidad anterior se hace pequeña con k) tal que casi seguramente

$$|B((m-1)2^{-j}) - B(m2^{-j})| \leq 2^{-j\lambda} \quad \forall j > K, \quad 1 \leq m \leq 2^j.$$

Si $h < H_0 = 2^{-K}$, el intervalo $[t, t+h]$ puede ser expresado, con posible excepción en los extremos, como una unión contable de intervalos contiguos de la forma $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$ con $2^{-j} \leq h$ y con no más de dos intervalos de la misma longitud (es decir, cada vez vamos haciendo el paso h más pequeño). Así, si k es el menor entero tal que $2^{-k} \leq h$, teniendo en cuenta la desigualdad anterior,

$$|B(t) - B(t+h)| \leq 2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\lambda} = \frac{2^{-k\lambda} 2}{(1-2^{-\lambda})} \leq \frac{2h^\lambda}{(1-2^{-\lambda})}.$$

□

2.3.1. Dimensión de Hausdorff y autointersección del movimiento Browniano

Teorema 2.3.2. Casi seguramente, el movimiento Browniano en \mathbb{R}^n , ($n \geq 2$) tiene dimensión de Hausdorff igual a 2.

Demostración. Para $\lambda < \frac{1}{2}$, $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Hölder, entonces por la Proposición 1.5.5, casi seguramente $\dim_H B \leq \frac{1}{\lambda} \dim_H [0, 1] = \frac{1}{\lambda}$. Haciendo $\lambda \rightarrow \frac{1}{2}$ obtenemos una desigualdad.

Para la otra desigualdad utilizaremos el método del potencial. Tomemos $1 < s < 2$. Para un t y h dados, y teniendo en cuenta la probabilidad que hemos calculado al principio de la sección,

$$E(|B(t+h) - B(t)|^{-s}) = ch^{-n/2} \int_0^\infty r^{-s+n-1} \exp\left(\frac{-r^2}{2h}\right) dr.$$

Haciendo el cambio $w = \frac{r^2}{h}$ llegamos a

$$\frac{1}{2} ch^{-s/2} \int_0^\infty w^{\frac{n-s-2}{2}} \exp\left(\frac{-w}{2}\right) dw = c_1 h^{-s/2},$$

donde c_1 es independiente de h y de t . Así,

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^1 \int_0^1 |B(t) - B(u)|^{-s} dt du\right) &= \int_0^1 \int_0^1 E(|B(t) - B(u)|^{-s}) dt du \\ &= \int_0^1 \int_0^1 c_1 |t - u|^{-s/2} dt du < \infty, \end{aligned}$$

ya que $s < 2$. Definimos la siguiente distribución de masa: $\mu_f(A) = \mathcal{L}\{t : 0 \leq t \leq 1, f(t) \in A\}$ con \mathcal{L} la medida de Lebesgue. Entonces $\int g(x) d\mu_f(x) = \int_0^1 g(f(t)) dt$, así la ecuación anterior se escribe

$$E\left(\int \int |x - y|^{-s} d\mu_B(x) d\mu_B(y)\right) < \infty.$$

Finalmente, por el Teorema 1.5.8, $\dim_H B([0, 1]) \geq s$ y tomando $s \rightarrow 2$ obtenemos la desigualdad que nos faltaba. \square

Obs. De una manera similar se puede demostrar que para $n=1$, el movimiento Browniano tiene casi seguramente dimensión de Hausdorff $\frac{3}{2}$ (páginas 265-266 de [4]).

Finalmente vamos a enunciar tres teoremas muy interesantes, los cuales no vamos a poder demostrar por falta de teoría (además sus demostraciones son largas y tediosas, si alguien las quiere ver están en el capítulo 9 de [6]).

Teorema 2.3.3.

- Para $d \geq 4$, casi seguramente dos movimientos Brownianos independientes en \mathbb{R}^d tienen intersección vacía, excepto para un posible punto inicial en común.
- Para $d \leq 3$, casi seguramente la intersección de dos movimientos Brownianos independientes en \mathbb{R}^d es no trivial, es decir, contiene puntos diferentes a un posible punto inicial en común.

Teorema 2.3.4.

- Si $d \geq 3$, casi seguramente tres movimientos Brownianos independientes en \mathbb{R}^d tienen intersección vacía, excepto en un posible punto inicial en común.
- En \mathbb{R}^2 , casi seguramente la intersección de p movimientos Brownianos es no trivial.

Definición 2.3.5. Un punto $x \in \mathbb{R}^d$ tiene multiplicidad p para un movimiento Browniano si existen $0 < t_1 < \dots < t_p$ tal que

$$x = B(t_1) = \dots = B(t_p)$$

Teorema 2.3.6. Supongamos que $d \geq 2$ y $(B(t))_{0 \leq t \leq 1}$ un movimiento Browniano d -dimensional. Entonces casi seguramente:

- Si $d \geq 4$ no existen puntos dobles, es decir, el Browniano es inyectivo.
- Si $d=3$ existen puntos dobles pero no triples.
- Si $d=2$ existen puntos de cualquier multiplicidad.

3. El movimiento Browniano plano

En este capítulo vamos a presentar el movimiento Browniano plano con algunas de sus propiedades clásicas [10]. Además, vamos a presentar la definición de celda convexa y finalmente vamos a explicar un artículo reciente, del 2017, en el cual se mejora la cota del diámetro de esta celda [11].

3.1. Definición y algunas propiedades

Definición 3.1.1. Llamaremos curva del movimiento Browniano plano, C , a la trayectoria de un punto móvil $A(t) = (B_1(t), B_2(t))$, donde las coordenadas son movimientos Brownianos unidimensionales e independientes.

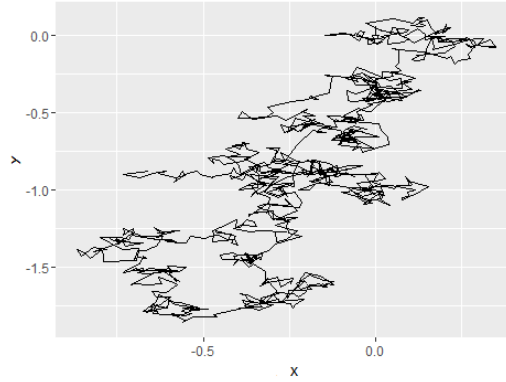


Figura 3: Simulación de un movimiento Browniano plano para Tiempo=1 y pasos=0,001. Se pueden observar autointersecciones con bastante frecuencia.

Proposición 3.1.2. Sean $A(t)$ y $A(t + \tau)$ dos puntos de la curva C . Sea $\mathcal{V}(\tau)$ el vector que los une y $R = R(\tau)$ su longitud. Entonces:

- $E(\mathcal{V}^2) = 2\tau$,
- $\mathcal{P}(R(t) > \rho\sqrt{t}) = e^{-\frac{\rho^2}{2}}$, $\rho > 0$.

Demostración.

- Dado que $\mathcal{V} = (\Delta X_1 + \Delta X_2)$,

$$E(\mathcal{V}^2) = E[(\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2] = 2\tau,$$

ya que cada componente es un movimiento Browniano independiente.

- Recordemos que en el apartado 2.3 ya calculamos la probabilidad de que el movimiento Browniano perteneciera a un boreliano (página 25). Si tomamos $n=2$ obtenemos

$$\mathcal{P}(R(t) > \rho\sqrt{t}) = \frac{1}{t} \int_{\rho\sqrt{t}}^{\infty} r \exp\left(-\frac{r^2}{2t}\right) dr = e^{-\frac{\rho^2}{2}}.$$

□

Proposición 3.1.3. Casi seguramente la curva C es un conjunto de puntos de medida superficial nula.

Demostración. Designaremos por C_1 , C_2 y C' a los arcos $A(0)A(1)$, $A(1)A(2)$ y $A(0)A(2)$, respectivamente. Sean sus medidas superficiales

$$m_1 = \text{med}.C_1, \quad m_2 = \text{med}.C_2, \quad m' = \text{med}.C'.$$

Debido a la aleatoriedad del proceso, estas cantidades también serán variables aleatorias, por lo que nos interesa saber sus esperanzas. Por la propiedad de incrementos independientes y teniendo en cuenta que el arco C' es de la escala de C_1 multiplicada por 2, tendremos que

$$\mu = E(\text{med}.C_1) = E(\text{med}.C_2), \quad 2\mu = E(\text{med}.C').$$

Sea C_1C_2 el conjunto de puntos comunes de C_1 y C_2 . Entonces

$$\mu'' = E(\text{med}.C_1C_2) = E(\text{med}.C_1 + \text{med}.C_2 - \text{med}.C') = \mu + \mu - 2\mu = 0.$$

Supongamos ahora conocido $A(1)$ y construyamos los arcos C_1 y C_2 a partir de este punto. La determinación de estos arcos será independiente la una de la otra y con la misma ley de probabilidad. La probabilidad de que un punto M pertenezca a C_1 , C_2 y C' será, respectivamente $\phi(M)$, $\phi(M)$, $\psi(M) = 2\phi(M)(1 - \phi(M)) + \phi(M)^2 = \phi(M)(2 - \phi(M))$. Por lo tanto, debido a la simetría polar del movimiento Browniano plano y colocando los ejes de coordenadas en $A(1)$,

$$\mu = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(M) dx_1 dx_2, \quad \mu'' = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(M) dx_1 dx_2.$$

Ahora bien, sabemos que la segunda integral tiene que valer 0, y como la probabilidad es un número que está entre 0 y 1 y estamos integrando siempre valores positivos, tenemos que $\psi(M) = 0$, y esto nos implica que $\phi(M) = 0$, porque es una probabilidad y no puede valer 2. Así, $\mu = 0$. □

Corolario 3.1.4. La probabilidad de que la curva C , construida a partir de un punto dado, pase por otro punto dado es nula.

Proposición 3.1.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto cerrado y de área finita. Supongamos que $A(0)$ es un punto interior del conjunto. Entonces la probabilidad de que el tiempo T en que tarda la curva C en llegar por primera vez a la frontera de Ω sea infinito es cero. En otras palabras, casi seguramente el movimiento Browniano llegará a salir del conjunto Ω .

Demostración. Sea $a \neq 0$ el diámetro de Ω . Entonces, por la Proposición 3.1.2,

$$k = \mathcal{P}(A(0)A(1) < a) = 1 - e^{-\frac{a^2}{2}},$$

donde $A(0)A(1)$ denota la distancia entre estos dos puntos. Entonces tenemos que

$$\mathcal{P}(T > n) \leq \mathcal{P}(A(0)A(1) < a, \dots, A(n-1)A(n) < a) = k^n.$$

Esta última desigualdad viene del hecho que si ocurre el evento $\{T > n\}$ entonces ocurre el evento $\{A(0)A(1) < a, \dots, A(n-1)A(n) < a\}$, pero no al revés, además de usar la independencia de los incrementos. Ahora tomamos el límite $n \rightarrow +\infty$ y obtenemos que $\mathcal{P}(T = \infty) = 0$, ya que $0 < k < 1$, porque suponemos que $a \neq 0$. \square

3.2. La celda convexa

Definición 3.2.1. Sea $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ un movimiento Browniano en \mathbb{R}^n . Para $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por $Conv(A)$ el conjunto convexo mínimo que contiene a A . La celda convexa del movimiento Browniano es el conjunto

$$\mathcal{K} = Conv[(B_t)_{0 \leq t \leq 1}].$$

En nuestro caso, vamos a tratar el caso de $n = 2$.

Proposición 3.2.2. Sea \mathbf{L} el perímetro de \mathcal{K} . Entonces $E(\mathbf{L}) = \sqrt{8\pi}$ [12].

Demostración. Sea $t \in [0, 1]$. Por definición, nuestro Browniano es $B(t) = (B_1(t), B_2(t))$ con $B_1(t)$ y $B_2(t)$ dos movimientos Brownianos unidimensionales independientes. Definimos la función de soporte de \mathcal{K} como[13]:

$$\varsigma_\alpha(t) = B_1(t)\cos\alpha + B_2(t)\sin\alpha.$$

En [13], Eddy demostró que:

$$\mathbf{L}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} [\max_{0 \leq u \leq t} \varsigma_\alpha(u)] d\alpha.$$

Calculando la esperanza de ésta última ecuación,

$$E(\mathbf{L}(t)) = E\left(\int_{-\pi}^{\pi} [\max_{0 \leq u \leq t} \varsigma_\alpha(u)] d\alpha\right) = \int_{-\pi}^{\pi} E(\max_{0 \leq u \leq t} \varsigma_\alpha(u)) d\alpha = 2\pi E(\max_{0 \leq u \leq t} \varsigma_\alpha(u)).$$

Por el principio de reflexión y teniendo en cuenta que $\varsigma_\alpha(u)$ es un movimiento Browniano estándar, tenemos que

$$\mathcal{P}(\max_{0 \leq u \leq t} \varsigma_\alpha(u) < a) = 2\mathcal{P}(\varsigma_\alpha(t) < a) - 1, \quad a > 0.$$

Entonces, como la distribución de $\varsigma_\alpha(t)$ es $N(0, t)$, podemos calcular la esperanza (tomando $t = 1$):

$$E(\max_{0 \leq u \leq t} \varsigma_\alpha(u)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Así, obtenemos que

$$E(\mathbf{L}) = \sqrt{8\pi}.$$

\square

Obs. (Comentarios a la demostración)

- $\zeta_\alpha(u)$ es un movimiento Browniano estándar porque su esperanza es 0 y su varianza es t . Sus incrementos son independientes y estacionarios porque $B_1(t)$ y $B_2(t)$ son independientes y tienen incrementos independientes y estacionarios.
- El principio de reflexión nos asegura que si $B(t)$ es un movimiento Browniano y $a > 0$,

$$\mathcal{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} B(t) > a) = 2\mathcal{P}(B(t) > a).$$

La demostración de este principio requiere del concepto de tiempo de parada (Teorema 2.21, pág. 45 de [6]).

Teorema 3.2.3. Sea $n \geq 2$. Entonces tenemos que[14]

$$E[\text{vol}_n(\mathcal{K})] = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)^2},$$

y

$$E[\text{vol}_{n-1}(\partial\mathcal{K})] = \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(n)}.$$

Obs. La segunda fórmula para $n=2$ nos lleva a la Proposición 3.2.2.

Corolario 3.2.4. Sea \mathbf{A} el área de \mathcal{K} . Entonces $E(\mathbf{A}) = \frac{\pi}{2}$.

Demostración. Tomando $n=2$ en la primera fórmula el resultado es inmediato. \square

3.2.1. El diámetro de \mathcal{K}

Para el la esperanza del diámetro de \mathcal{K} no hay una fórmula general conocida. Hasta antes de la publicación de [11] se tenía que, si \mathbf{D} es el diámetro de \mathcal{K} , entonces

$$1,595 \leq E(\mathbf{D}) \leq 2,507.$$

Los autores de esta publicación, la cual vamos a intentar explicar en este apartado, encontraron que

$$1,601 \leq E(\mathbf{D}) \leq 2,355.$$

Definición 3.2.5. Dado un movimiento Browniano $(B(t))_{0 \leq t \leq 1}$ definimos su función de rango, r , como

$$r(\theta) = \sup_{0 \leq s \leq 1} (B(s)e_\theta) - \inf_{0 \leq s \leq 1} (B(s)e_\theta),$$

donde $e_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Lema 3.2.6. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto no vacío, y sea $r_A(\theta) = \sup_{x \in A} (x \cdot e_\theta) - \inf_{x \in A} (x \cdot e_\theta)$. Entonces,

$$\text{diam}(A) = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta).$$

Demostración. Ya que A es compacto, para cada θ existen $x, y \in A$ tal que

$$r_A(\theta) = x \cdot e_\theta - y \cdot e_\theta = (x - y)e_\theta \leq \|x - y\|.$$

Por lo que $\sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta) \leq \sup_{x, y \in A} \|x - y\| = \text{diam}(A)$.

Nos falta ver la otra desigualdad. Si A tiene solo un punto es obvio así que suponemos que A tiene dos puntos o más. Supongamos que el diámetro de A viene dado por $x, y \in A$ y sea $z = y - x$ tal que $\hat{z} = \frac{z}{\|z\|} = e_{\theta_0}$, para $\theta_0 \in [0, \pi]$. Entonces,

$$\sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r_A(\theta) \geq r_A(\theta_0) \geq y \cdot e_{\theta_0} - x \cdot e_{\theta_0} = z \cdot \hat{z} = \|z\| = \text{diam}(A).$$

□

Obs. Como \mathcal{K} es compacto, $\mathbf{D} = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} r(\theta)$. Además, Feller (pág. 428 de [15]) encontró que

$$E(r(\theta)) = \sqrt{8/\pi} \quad y \quad E(r(\theta)^2) = 4 \log 2.$$

Combinando estos dos hechos obtenemos

$$E(\mathbf{D}) \geq E(r(0)) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \geq 1,595.$$

Esta cota es la que después se mejora en [11].

Lema 3.2.7. $E(\mathbf{D}) \geq \sqrt{8/\pi} + \frac{1}{2}E|X_1 - X_2|$, donde X_1 y X_2 son copias independientes de $X := r(0)$.

Demostración. De la observación anterior tenemos que $\mathbf{D} \geq \max(r(0), r[\frac{\pi}{2}])$. Observando que $r(0)$ y $r(\frac{\pi}{2})$ son independientes y además tienen la misma distribución [15], tenemos que

$$E(\mathbf{D}) \geq E(\max(X_1, X_2)).$$

Como $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, tenemos que

$$E[\max(X_1, X_2)] = E(r(0)) + \frac{1}{2}E|X_1 - X_2|.$$

□

Obs. En la pág. 430 de [15] se demuestra que la densidad de $r(\theta)$ es

$$f(r) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 \exp\left(-\frac{k^2 r^2}{2}\right), \quad r \geq 0.$$

Lema 3.2.8. Para cualquier $a, h > 0$,

$$E|X_1 - X_2| \geq 2h\mathcal{P}(X \leq a)\mathcal{P}(X \geq a + h).$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned} E|X_1 - X_2| &\geq E[|X_1 - X_2| \mathbf{1}\{X_1 \leq a, X_2 \geq a + h\}] + \\ &E[|X_1 - X_2| \mathbf{1}\{X_2 \leq a, X_1 \geq a + h\}] \geq h\mathcal{P}(X_1 \leq a)\mathcal{P}(X_2 \geq a + h) \\ &+ h\mathcal{P}(X_2 \leq a)\mathcal{P}(X_1 \geq a + h) = 2h\mathcal{P}(X \leq a)\mathcal{P}(X \geq a + h). \end{aligned}$$

□

Obs. Por los Lemas 3.2.7. y 3.2.8., mejorar la cota inferior se nos reduce a encontrar un valor óptimo de $2h\mathcal{P}(X \leq a)\mathcal{P}(X \geq a + h)$.

Proposición 3.2.9. Para $a, h > 0$ definimos

$$g(a, h) := h \left(\frac{4}{\pi} \exp \left[-\frac{\pi^2}{2a^2} \right] - \frac{4}{3\pi} \exp \left[-\frac{9\pi^2}{2a^2} \right] \right) \left(1 - \frac{4}{\pi} \exp \left[-\frac{\pi^2}{8(a+h)^2} \right] \right).$$

Entonces, $E(\mathbf{D}) \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}} + g(1, 492; 0, 337) \approx 1, 6014$.

Demostración. Consideremos

$$Z := \sup_{0 \leq s \leq 1} [B(s)e_\theta].$$

De la pág. 1047 de [16] tenemos que para $x > 0$,

$$\frac{4}{\pi} \exp \left[-\frac{\pi^2}{8x^2} \right] - \frac{4}{3\pi} \exp \left[-\frac{9\pi^2}{8x^2} \right] \leq \mathcal{P}(Z < x) \leq \frac{4}{\pi} \exp \left[-\frac{\pi^2}{8x^2} \right].$$

Además, podemos observar que

$$Z \leq X \leq 2Z,$$

y de la segunda parte de la desigualdad tenemos

$$\mathcal{P}(X \leq a) \geq \mathcal{P}(Z \leq \frac{a}{2}) \geq \frac{4}{\pi} \exp \left[-\frac{\pi^2}{2a^2} \right] - \frac{4}{3\pi} \exp \left[-\frac{9\pi^2}{2a^2} \right].$$

De la primera parte de la desigualdad tenemos que

$$\mathcal{P}(X \geq a + h) \geq \mathcal{P}(Z \geq a + h) \geq 1 - \frac{4}{\pi} \exp \left[-\frac{\pi^2}{8(a+h)^2} \right].$$

Aplicando el Lema 3.2.8. obtenemos que $E|X_1 - X_2| \geq 2g(a, h)$, y aplicando el Lema 3.2.7. llegamos a

$$E(\mathbf{D}) \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}} + g(a, h).$$

Utilizando MAPLE, McRedmond y Xu [11] obtuvieron que los valores óptimos para la función son $(a, h) = (1, 492; 0, 337)$. \square

Lema 3.2.10. $\mathbf{D}^2 \leq r(0)^2 + r(\frac{\pi}{2})^2$.

Demostración. El diámetro es una función creciente, esto es, si $A \subset B$, entonces $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$. Observemos también que por definición,

$$(B_t)_{0 \leq t \leq 1} \subset z + [0, r(0)] \times [0, r(\frac{\pi}{2})] := R_z,$$

para algún $z \in \mathbb{R}^2$. Debido a que el diámetro de R_z será la diagonal,

$$\text{diam}(R_z) = \sqrt{r(0)^2 + r(\frac{\pi}{2})^2}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2.$$

Así, $\mathbf{D} \leq \text{diam}(R_z)$ y elevando al cuadrado obtenemos el resultado. \square

Proposición 3.2.11. $E(\mathbf{D}) \leq \sqrt{8 \log 2} \approx 2,3548$.

Demostración. Aplicando esperanzas al Lema 3.2.10,

$$E(\mathbf{D}^2) \leq E(X_1^2 + X_2^2) = 2E(X^2) = 8 \log 2.$$

Aplicando la desigualdad de Jensen,

$$E(\mathbf{D}) \leq \sqrt{8 \log 2}.$$

□

4. Apéndice: Cómo obtener las figuras en R

Primero de todo necesitaremos tener instalada una distribución de R. Yo recomiendo RStudio, que se puede descargar de forma gratuita de <https://www.rstudio.com/>. Yo estoy usando concretamente la versión 1.0.153.

Una vez tengamos instalado y funcionando una distribución de R, necesitaremos el paquete para graficar funciones. Este paquete se llama `ggplot2`, y se puede descargar gratuitamente escribiendo

```
install.packages("ggplot2")
```

Una vez instalado lo cargamos:

```
library(ggplot2)
```

En el apartado 2.1.1. ya hemos comentado cómo implementar el movimiento Browniano a R (simplemente hay que escribir el código que obtuvimos en ese apartado en el programa). Una vez implementado, podemos guardar una simulación de la siguiente manera:

```
Q<-mov_brown(Tiempo,pasos)
```

Dando en valor que queramos a las variables `Tiempo` y `pasos`, nos guardará la simulación del Browniano en `Q` (la primera columna es la correspondiente al tiempo y la segunda al espacio). Ahora para obtener una simulación como la de la figura 1 hacemos

```
ggplot(Q,aes(x=t,y=x))+geom_line()
```

Es decir, llamamos a la función `ggplot()` para que grafique los datos de `Q` y con `geom_line()` le pedimos que nos una los puntos.

Para obtener la figura 2 simplemente hay que añadirle las funciones correspondientes al gráfico. Para esto hacemos

```
t<-3:1000
x<-sqrt(2*t*log(log(t)))
P<-data.frame(t,x)
T<-data.frame(t,-x)
```

La primera orden nos crea un vector con valores (3,4,5,...,1000) y la segunda nos crea un vector con los valores de la función que nosotros le indiquemos, en este caso la correspondiente a la ley del logaritmo iterado (Teorema 2.2.8.). Las dos ordenes restantes guardan los datos en dos columnas. Para graficar todo junto hacemos


```
ggplot(Q,aes(x=t,y=x))+geom_line()+geom_point(data=P,  
aes(x=t,y=x))+geom_point(data=T, aes(x=t,y=x))
```

Ahora hemos añadido la función `geom_point()`, que lo que hace es añadirnos funciones adicionales al gráfico.

Finalmente, vamos a explicar cómo obtener una simulación como la de la figura 3. Primero de todo simulamos dos movimientos Brownianos:

```
Q<-mov_brown(Tiempo,pasos)  
W<-mov_brown(Tiempo,pasos)
```

Ahora tenemos que unir los datos correspondientes a la parte del espacio de las dos funciones. Esto lo conseguimos mediante la función `data.frame()` de la siguiente manera:

```
B<-data.frame(Q$x,W$x)
```

Finalmente solo nos queda graficar la simulación. Ahora no vamos a utilizar la función `geom.line()` para unir los puntos porque ésta los ordena de menor a mayor según los valores de los datos guardados en la primera columna. Para que no nos ordene los valores utilizaremos la función `geom.path()`. Así,

```
ggplot(B,aes(x=Q.x,y=W.x))+geom_path()
```

Referencias

- [1] BAUDOIN, Fabrice. "Lectures of the Brownian motion". Blog de Fabrice Baudoin, profesor de matemáticas de la Universidad de Connecticut. Disponible en <https://fabricebaudoin.wordpress.com/>, 23 de marzo de 2012. [Consulta: 28/03/2018]
- [2] CORCUERA, José Manuel. Apuntes de la asignatura "Procesos estocásticos" del grado de Matemáticas de la Universidad de Barcelona, 2017.
- [3] BELL, Jordan. The Kolmogorov continuity theorem, Hölder continuity, and the Kolmogorov-Chentsov theorem. Department of Mathematics, University of Toronto, 2015. Disponible en <http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/kolmogorovcontinuity.pdf> [Consulta: 30/03/2018]
- [4] FALCONER, Kenneth. Fractal Geometry, mathematical foundations and applications. Wiley Editorial, 2003. ISBN 0470848626
- [5] MARTÍNEZ, Josefina y VILLANÓN, Julio. Introducción al cálculo estocástico. A Coruña: NETBIBLO S.L., 1a Edición, 2003. ISBN 8497450248
- [6] PERES, Yuval y MÖRTERS, Peter. "Brownian Motion". Disponible en www.yuvalperes.com (2012). [Consulta: 28/04/2018]
- [7] BRADY, Stephen. Construction and properties of Brownian Motion. 2006. Disponible en https://math.hawaii.edu/home/talks/brady_talk.pdf [Consulta: 05/05/2018]
- [8] SUN, Rongfeng. Lecture 11, Brownian motion: characterization. Disponible en <http://www.math.nus.edu.sg/~matsr/ProbII/Lec11.pdf> [Consulta: 05/05/2018]
- [9] JULIÀ de Ferran, Olga. Apuntes de la asignatura "Probabilitats avançades" del grado de Matemáticas de la Universidad de Barcelona, 2017.
- [10] LÉVY, Paul. Processus Stochastiques et mouvement Brownien. Gauthier-Villars Paris, segunda edición, 1965. ISBN : 9782876470910.
- [11] MCREDMON, James y XU, Chang. On the expected diameter of planar Brownian motion. Statistics & Probability Letters. 130, pag. 1-4 (2017)
- [12] LETAC, Gérard. Advanced problem 6230, Amer. Math. Monthly 85 (1978) 686.
- [13] Eddy, William. The distribution of the convex hull of a Gaussian sample. J. Appl.Prob. 17, 686–695 (1980).
- [14] EL DAN, Ronen. Electron. Volumetric properties of the convex hull of an n-dimensional Brownian motion. J. Probab. 19 (2014), no. 45, 1–34.

- [15] FELLER, William. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 22, No. 3 (Sep., 1951), pp. 427-432.
- [16] JAIN, Naresh C. y PRUITT, William E.. The other law of the iterated logarithm. Ann. Probab. 3 (1975) 1046–1049.