Treball Final de Màster

MÀSTER EN MATEMÀTICA AVANÇADA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Localizaciones de Bousfield para tipos de homotopía truncados

---

Autor: Marc Adillon Albero

Director: **Dr. Javier J. Gutiérrez**
Realitzat a: **Departament de Matemàtiques i Informàtica**

Barcelona, **11 de setembre de 2018**

Abstract

Localizations of homotopy theories are a fundamental tool in algebraic topology. They were introduced by Bousfield in the seventies to study topological spaces. Nowadays, these constructions are formulated, much more generally, using the language of model categories and play a key role in abstract homotopy theory. The main objectives of this project is prove that several known model structures in topological spaces, whose homotopy categories model truncated homotopy types, are instances Bousfield localizations.

Índice general

1. Introducción **2**

2. Preliminares sobre categorías **4**

3. Categorías de modelos **7**
3.1. Relaciones de homotopía en morfismos 11
3.2. Categoría homotópica de una categoría de modelos 17
3.2.1. Functores de Quillen 21
3.3. Ejemplos de categorías de modelos 22
3.3.1. Espacios topológicos 22
3.3.2. Conjuntos simpliciales 25
3.3.3. Complejos de cadenas 26

4. Localizaciones **27**
4.1. Espacios y equivalencias (co)locales 27
4.2. Localización de una categoría de modelos 30
4.2.1. Localización por la izquierda y por la derecha 31
4.2.2. Localización de Bousfield 32
4.3. Ejemplos de (co)localizaciones 35
4.3.1. Aproximación de Postnikov 36
4.3.2. Recubridor n-conexo 39

5. Estructuras de modelos como localización **41**
5.1. Estructura de categoría de modelos para los n-tipos 41
5.2. Estructura de categoría de modelos para los espacios n-conexos . . 45
5.3. Estructura de categoría de modelos para los $[n, m]$-tipos 46

6. Conclusiones **49**

Capítulo 1

Introducción

La localización es una técnica bien conocida en álgebra conmutativa y geometría algebraica. Por ejemplo, la construcción de anillos de fracciones y el proceso asociado de localización de módulos nos permiten reducir el estudio global de ciertas propiedades referentes a un cierto anillo a un estudio local en el que intervienen anillos más sencillos. Muchas de las propiedades formales de las localizaciones de módulos son compartidas por otras transformaciones similares definidas en otros contextos. De esta manera, se puede axiomatizar el concepto de functor de localización en categorías arbitrarias, con una terminología similar a la del álgebra.

El uso de las localizaciones en topología algebraica tiene sus orígenes en trabajos de Serre (1953) y Adams (1961). Las localizaciones de tipos de homotopía han sido estudiadas particularmente en el caso de localizaciones en primos, y posteriormente generalizadas a localizaciones homológicas.

La idea es la misma que en álgebra. Si queremos estudiar el tipo de homotopía de un objecto complicado, podemos estudia el tipo de homotopía de localizaciones de este objecto, potencialmente mas sencillas, y de esta manera obtener información del objeto inicial. Por ejemplo, para estudiar el tipo de homotopía de un espacio topológicos, podemos estudiar el tipo de homotopía de dicho espacio para cada primo, y su tipo de homotopía racional. Si conocemos esta información, hay resultados que nos permiten recuperar el tipo de homotopía del espacio inicial como un pullback homotópico de estos datos.

Las localizaciones de teorías de homotópicas son una herramienta fundamental en topología algebraica. Fueron introducidas por Bousfield en los años setenta para estudiar espacios topológicos y espectros salvo E-equivalencias, donde E es una teoría homológica generalizada. Hoy en día, estas construcciones son formuladas, de forma mucho más en general, mediante el lenguaje de categoría de modelos y juegan un papel importante en la teoría abstracta de homotopía.

Las categorías de modelos, introducidas por Quillen en 1967, son una categoría en la que se distinguen tres clases de morfismos (fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles) que satisfacen cinco simples axiomas que recuerdan a las propiedades de los espacios topológicos. Sorprendentemente, estos axiomas crean el contexto necesario para poder desarrollar una teoría de homotopía. La ventaja de tener una estructura de modelos en una categoría es que tenemos a nuestra disposición toda la maquinaria de la teoría de categorías de modelos (resoluciones fibrantes y cofibrantes, limites y colimites homotópico, equivalencias de Quillen, etc) que ha sido ampliamente desarrolladas y que nos permite aplicarla en cada ejemplo concreto una vez sean comprobados los axiomas. El ejemplo prototipo es el de la categoría de espacios topológicos junto con las equivalencias débiles de homotopía. Pero hay muchas otras categorías que también tienen una estructura de modelos interesantes y no son de naturaleza topológica, por ejemplo la categoría de complejos de cadenas junto con los cuasi-isomorfismos. Ciertamente, cada categoría tendrá sus técnicas particulares y axiomas adicionales, pero la ventaja de una aproximación abstracta es que todas ellas pueden ser estudiadas con las mismas herramientas y descritas con el mismo lenguaje.

El objetivo de este proyecto será entrar en el lenguaje de las categorías de modelos y de las localizaciones de Bousfield por izquierda y por la derecha para llegar a demostrar que varias estructuras de categorías de modelos conocidas para espacios topológicos, que nos dan categorías homotópicas de tipos de homotopía truncados, son en efecto localizaciones. Más concretamente queremos construir, via localización de Bousfield, una estructura de categoría de modelos para espacios topológicos y conjuntos simpliciales para n-tipos, espacios n-conexos y para $[n, m]$-tipos, que son los espacios cuyos grupos de homotopía son triviales fuera de los grados que quedan entre n y m.

La memoria está distribuida en tres capítulos principales y unos preliminares sobre teoría de categorías. En el primer capítulo introduciremos la estructura de modelos para una categoría y estudiaremos la categoría homotópica que nos proporciona. En el segundo capítulo estudiaremos las localizaciones de objetos y morfismos para llegar a definir las localizaciones de Bousflied y caracterizar cuando existen. En el último capítulo usaremos estas técnicas de localización para construir las estructuras de modelos que hemos mencionado en los objetivos.

Capítulo 2

Preliminares sobre categorías

En este capítulo revisaremos algunas ideas y construcciones básicas de la teoría de categorías que más adelante usaremos. Siguiendo [2], asumiremos que ya son conocidos los conceptos de categoría, subcategoría, functor y transformación natural.

Definición 2.0.1. *Una categoría se dice que es pequeña si su colección de objetos forma un conjunto, y se dice que es finita si es un conjunto finito y solo hay un numero finito de morfismos entre dos objetos cualquiera.*

Definición 2.0.2. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor, diremos que F es*

- *faithfull si $\mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$ es inyectiva,*
- *full si $\mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$ es exhaustiva, y*
- *esencialmente suryectiva si para todo B objeto de $\mathcal{D}$, existe A objeto de $\mathcal{C}$ tal que $B \cong FA$.*

Functores

Definición 2.0.3. *Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos functores, y sea t una transformación natural entre ellos. La transformación natural t es llamada equivalencia natural si el morfismo $t_X : F(X) \to G(X)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$, para todo objeto X de $\mathcal{C}$. El functor F es llamado equivalencia de categorías si existe un functor $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que las composiciones FF' y $F'F$ estan relacionadas con los correspondientes morfismos identidad mediante equivalencias naturales.*

Definición 2.0.4. *Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos functores (covariantes). Diremos que (F, G) son adjuntos, en particular F es adjunto por la izquierda y G es adjunto por la derecha, si para todo objeto A de $\mathcal{C}$ y todo objeto B de $\mathcal{D}$ existe una biyección natural*

$$\mathcal{D}(FA, B) \overset{\cong}{\to} \mathcal{C}(A, GB)$$

Limites y colimites

A continuación introduciremos la noción de colimite de un functor. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{D}$ una categoría pequeña. Daremos los ejemplos para los casos que $\mathcal{D}$ sea una de las siguientes categorías:

(i) La categoría con un conjunto $\mathcal{I}$ de objetos y solo morfismos identidad.

(ii) La categoría $\mathcal{D} = \{a \leftarrow b \rightarrow c\}$, con tres objetos y los identidad más dos morfismos indicados.

Podemos definir el functor diagonal

$$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$$

que envía un objeto X de $\mathcal{C}$ al functor constante $\Delta(X) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (que por definición envía cada objeto a X y cada morfismo a la identidad de X). El functor Δ asigna a cada morfismo $f : X \to X'$ de $\mathcal{C}$ la transformación natural constante $t(f) : \Delta(X) \to \Delta(X')$ determinada por la formula $t(f)d = f$ para todo objeto d de $\mathcal{D}$.

Definición 2.0.5. *Sea $\mathcal{D}$ una categoría pequeña y $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Un colimite para F es un objeto C de $\mathcal{C}$ con una transformación natural $t : F \to \Delta(C)$ tal que para todo objeto X de $\mathcal{C}$ y toda transformación natural $s : F \to \Delta(X)$, existe un único morfismo $s' : C \to X$ en $\mathcal{C}$ tal que $\Delta(s')t = s$.*

Veamos ahora algunos ejemplos de colimite, dependiendo de que categoría $\mathcal{D}$ elijamos.

Definición 2.0.6. *Sea $\mathcal{D}$ la categoría **(i)**, de modo que el functor $X : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es solo una colección $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de objetos de $\mathcal{C}$. El colimite de X es llamado el coproducto de la colección y se denota por $\coprod_i X_i$.*

*En el caso de que $\mathcal{C}$ sea **Top** o **Set** tenemos que el coproducto es la union disjunta.*

Definición 2.0.7. *Si $\mathcal{D}$ es la categoría **(ii)**, tenemos que el functor $X : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un diagrama $X(a) \leftarrow X(b) \rightarrow X(c)$ en $\mathcal{C}$. En este caso el colimite de X es llamado el pushout P del diagrama $X(a) \leftarrow X(b) \rightarrow X(c)$. Es el resultado de pegar $X(a)$ a $X(c)$ a lo largo de $X(b)$. La definición de colimite nos proporciona un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X(b) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X(c) \arrow[d, "j'"] \\ X(a) \arrow[r, "i'"] & P. \end{tikzcd}$$

Todo diagrama isomorfo a un diagrama de esta forma es llamado un diagrama de pushout. Dados morfismos $f : X(a) \to Y$ y $g : X(c) \to Y$ tales que $fj = gi$, existe un único morfismo $h : P \to Y$ tal que $hj' = g$ y $hi' = f$.

Ahora introduciremos la idea de limite de un functor. Es el dual de la noción de colimite, en el sentido que un limite de $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es lo mismo que el colimite del functor $F^{op} : \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$.

Definición 2.0.8. *Sea $\mathcal{D}$ una categoría pequeña y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor. Un limite para F es un objeto L de $\mathcal{C}$ junto con una transformación natural $t : \Delta(L) \to F$ tal que para todo X de $\mathcal{C}$ y toda trnasformación natural $s : \Delta(X) \to F$, se tiene un único morfismo $s' : X \to L$ en $\mathcal{C}$ tal que $t\Delta(s') = s$.*

Veamos algunos ejemplos, según la categoría $\mathcal{D}$ sea una de las siguientes

(i) La categoría con un conjunto $\mathcal{I}$ de objetos y solo los morfismos identidad.

(ii) La categoría $\mathcal{D} = \{a \to b \leftarrow c\}$, con tres objetos y los identidad más dos morfismos indicados.

Definición 2.0.9. *Sea $\mathcal{D}$ la categoría* ***(i)****, de manera que el functor $X : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es solo la colección de objetos $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ en $\mathcal{C}$. El limite de X es llamado producto de la colección y se denota por $\prod_i X_i$. Si $\mathcal{C}$ es la categoría de* ***Top*** *o* ***Set*** *entonces el producto es lo que se conoce como producto cartesiano.*

Definición 2.0.10. *Sea $\mathcal{D}$ la categoría de* ***(ii)****, entonces el functor $X : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un diagrama $X(a) \to X(b) \leftarrow X(c)$ en $\mathcal{C}$. En este caso el limite de X es llamado el pullback P del diagrama $X(a) \to X(b) \leftarrow X(c)$. Es el resultado de pegar $X(a)$ a $X(c)$ a lo largo de $X(b)$. La definición de limite nos proporciona un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j'"'] & X(c) \arrow[d, "j"] \\ X(a) \arrow[r, "i"] & X(b) \end{tikzcd}$$

Todo diagrama isomorfo a un diagrama de esta forma es llamado un diagrama de pullback.

Capítulo 3

Categorías de modelos

En este capítulo introduciremos el concepto de categoría de modelos y estudiaremos la categoría homotópica asociada. Terminaremos con unos ejemplos de categorías con estructura de modelos.

Definición 3.0.11. *Una categoría de modelos es una categoría $\mathcal{C}$ con tres clases de morfismos destacados:*

(i) *equivalencias débiles ($\xrightarrow{\sim}$);*

(ii) *fibraciones ($\twoheadrightarrow$);*

(iii) *cofibraciones ($\hookrightarrow$).*

Cada una de las clases es cerrada por composición y contiene todos los morfismos identidad; y además cumplen los siguientes cinco axiomas:

MC1. *(Axioma límites) Existen los limites y colimites finitos en $\mathcal{C}$.*

MC2. *(Axioma dos de tres) Si f y g son morfismos en $\mathcal{C}$ de manera que gf esta definido. Se tiene que si dos de los tres morfismos f, g, gf son equivalencias débiles, entonces también lo es el tercero.*

MC3. *(Axioma retracto) Dado un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "i'"] & Y \arrow[r, "r'"] & B \end{tikzcd}$$

en el cual $r \circ i = id_A$ y $r' \circ i' = id_B$ (en este caso decimos que f es un retracto de g), si g es una fibración, cofibración o equivalencia débil, entonces también lo es f.

MC4. *(Axioma elevación) Dado un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ de la forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y, \end{tikzcd}$$

donde i es una cofibración y p una fibración, entonces si i o p es además una equivalencia débil, existe un elevación (representado por la flecha discontinua) que hace el diagrama conmutativo.

MC5. *(Axioma factorización) Todo morfismo f admite dos factorizaciones functoriales:*

- *$f = p \circ i$, con i cofibración y p fibración y equivalencia débil, y*
- *$f = q \circ j$, con q fibración y j una cofibración y equivalencia débil.*

Un morfismo f que es a la vez una fibración (cofibración) y una equivalencia débil lo llamaremos una fibración (cofibración) trivial o acíclica. Un objeto X de $\mathcal{C}$ diremos que es fibrante si el morfismo de X al objeto final $X \to *$ es una fibración y diremos que es cofibrante si el morfismo del objeto inicial a él $\emptyset \to X$ es una cofibración.

Observación 3.0.12. Los axiomas de la definición 3.0.11 describen lo que Quillen llamó categoría de modelos "cerrada", pero como en este trabajo no trataremos ningún otro tipo de categoría de modelos, optaremos por quitar la palabra "cerrada".

Definición 3.0.13. *Un morfismo $i : A \to B$ se dice que tiene la propiedad de elevación por la izquierda (LLP) respecto otro morfismo $p : X \to Y$ y diremos que p tiene la propiedad de elevación por la derecha (RLP) respecto i si existe una elevación en todo diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y. \end{tikzcd}$$

Es decir, existe la flecha punteada que hace conmutativo el diagrama.

Proposición 3.0.14. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos*

(i) *Las cofibraciones en $\mathcal{C}$ son los morfismos que tienen la LLP respeto a las fibraciones acíclicas.*

(ii) *Las cofibraciones acíclicas en $\mathcal{C}$ son los morfismos que tienen la LLP respeto a las fibraciones.*

(iii) *Las fibraciones en $\mathcal{C}$ son morfismos tienen la RLP respecto a las cofibraciones acíclicas.*

(iv) *Las fibraciones acíclicas en $\mathcal{C}$ son los morfismos que tienen la RLP respecto a las cofibraciones.*

Demostración. Por el axioma **MC4** tenemos que una cofibración (acíclica) o una fibración (acíclica) tiene la propiedad de elevación que le corresponde en la proposición.

Nos quedaría comprobar el reciproco en cada caso. Veamos a continuación la demostración de **(i)**, las otras tres son muy similares.

Supongamos que $f : K \to L$ tiene la LLP respecto todas las fibraciones acíclicas. Factorizemos f por el axioma **MC5** como $K \overset{\sim}{\hookrightarrow} L' \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} L$, de manera que $i : K \hookrightarrow L'$ es una cofibración y $p : L' \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} L$ es una fibración acíclica. Por hipótesis tenemos que debe existir una elevación $g : L \to L'$ en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "f"'] & L' \arrow[d, "p"', "\sim"] \\ L \arrow[r, "id"] & L \end{tikzcd},$$

con lo que obtenemos que f es un retracto de i

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "id"'] \arrow[d, "f"'] & K \arrow[r, "id"'] \arrow[d, "i"'] & K \arrow[d, "f"'] \\ L \arrow[r, "g"] & L' \arrow[r, "p"] & L \end{tikzcd}$$

y el axioma **MC3** nos permite concluir que f es una cofibración. $\square$

Observación 3.0.15. La Proposición 3.0.14 nos muestra que los axiomas para una estructura de modelos en una categoría contienen información redundante en cierto sentido. Una de las consecuencias clave es que si queremos dotar a una categoría de estructura de modelos y hemos elegido las cofibraciones y las equivalencias débiles, la clase de las fibraciones esta determinada por la propiedad 3.0.14(**iii**). Dualmente, si tenemos elegidas las fibraciones y las equivalencias débiles, la clase de cofibraciones esta determinada por la propiedad 3.0.14(**i**).

Proposición 3.0.16. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos.*

(i) *La clase de cofibraciones en $\mathcal{C}$ es estable bajo cambios de cobase.*

(ii) *La clase de cofibraciones triviales en $\mathcal{C}$ es estable bajo cambios de cobase.*

(i) *La clase de fibraciones en $\mathcal{C}$ es estable bajo cambios de base.*

(ii) *La clase de fibraciones triviales en $\mathcal{C}$ es estable bajo cambios de base.*

Demostración. [2] Proposición 3.14. $\square$

Recordemos a continuación que es un cambio de cobase y base.

Definición 3.0.17. *Dado el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & C \arrow[d, "j'"] \\ B \arrow[r, "i'"] & D \end{tikzcd}$$

el morfismo i' es un cambio de cobase (base) de i, y j' es un cambio de cobase (base) de j si el diagrama es un pushout (pullback).

Dualidad

Dada una categoría de modelos $\mathcal{C}$ podemos dotar de una estructura de modelos a la categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ definiendo que un morfismo $f^{op} : Y \to X$ sea

(i) una equivalencia débil si $f : X \to Y$ es una equivalencia débil en $\mathcal{C}$

(ii) una fibración si $f : X \to Y$ es una fibración en $\mathcal{C}$

(iii) una cofibración si $f : X \to Y$ es una cofibración en $\mathcal{C}$

Esta construcción nos muestra que los axiomas para una categoría de modelos son auto duales. Sea P una declaración sobre una categoría de modelos $\mathcal{C}$, y P^* la declaración dual obtenida invirtiendo las flechas en P y intercambiando "fibración" por "cofibración" y al revés. Si P es cierta en $\mathcal{C}$, entonces también lo es P^* en $\mathcal{C}^{op}$.

Observación 3.0.18. Para espacios una estructura de modelos en la categoría de espacios topológicos esta dualidad es conocida como la dualidad "Eckmann-Hilton" en teoría homotópica ordinaria, es decir la inducida por la relación de homotopía ordinaria. Como existen declaraciones verdaderas P sobre teoría de homotopía en espacios topológicos para las que la declaración dual de "Eckmann-Hilton" P^* no es cierta, tenemos que hay hechos interesantes en la teoría de homotopía ordinaria que no pueden ser derivados de los axiomas de categoría de modelos.
Esto no debe extrañarnos ya que los axiomas son intento de codificar lo que todas las teorías de homotopía deben tener en común, y luego cualquier categoría de modelos particular tiene sus propiedades adicionas que van más allá de los axiomas.

Categorías de modelos simpliciales

Una categoría simplicial es una categoría $\mathcal{C}$ enriquecida en conjuntos simpliciales. Una categoría de modelos simplicial $\mathcal{C}$ es una categoría simplicial que también es una categoría de modelos, junto con construcciones naturales de objetos $K \otimes X$ y X^K en $\mathcal{C}$, donde X es un objeto de $\mathcal{C}$ y K un conjunto simplicial, que cumple unos ciertos axiomas.

Definición 3.0.19. *Una categoría simplicial $\mathcal{C}$ es una categoría tal que*

(i) *Para cada par de objetos X e Y de $\mathcal{C}$ tenemos un conjunto simplicial que denotaremos por $map(X, Y)$.*

(ii) *Para cada tres objetos X, Y y Z de $\mathcal{C}$ hay una aplicación*

$$c_{X,Y,Z} : map(Y, Z) \times map(X, Y) \to map(X, Z)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta para X, Y, Z y W de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(map(Y,Z) \times map(X,Y)) \times map(W,X) \arrow[r, "c_{X,Y,Z} \times id"] \arrow[d, "\cong"'] & map(X,Z) \times map(W,X) \arrow[dd, "c_{W,X,Z}"] \\
map(Y,Z) \times (map(X,Y) \times map(W,X)) \arrow[d, dotted, "id \times c_{W,X,Y}"'] & \\
map(X,Z) \times map(W,X) \arrow[r, "c_{W,Y,Z}"'] & map(W,Z).
\end{tikzcd}$$

(iii) *Para cada objeto X de $\mathcal{C}$, hay una aplicación de conjuntos simpliciales $i_X : * \to map(X,X)$ que hace que los siguientes diagramas conmuten para todo Y de $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd} * \times map(X,Y) \arrow[r, "i_Y \times id"] \arrow[d, "\cong"'] & map(Y,Y) \times map(X,Y) \arrow[dl, "c_{X,Y,Y}"] \\ map(X,Y), & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} map(X,Y) \times * \arrow[r, "id \times i_X"] \arrow[d, "\cong"'] & map(X,Y) \times map(X,X) \arrow[dl, "c_{X,X,Y}"] \\ map(X,Y). & \end{tikzcd}$$

(iv) *Para cada par de objetos X e Y de $\mathcal{C}$, hay un isomorfismo*

$$\pi_0(map(X,Y)) \cong \mathcal{C}(X,Y)$$

Definición 3.0.20. *Una categoría de modelos simplicial es una categoría simplicial que también es categoría de modelos y que satisface los dos axiomas siguientes:*

MC6. *Para cada par de objetos X e Y de $\mathcal{C}$ y para todo conjunto simplicial K existen objetos $X \otimes K$ e Y^K de $\mathcal{C}$ tales que tenemos las siguientes equivalencias naturales de conjuntos simpliciales:*

$$map(X \otimes K, Y) \cong map(K, map(X,Y)) \cong map(X, Y^K).$$

MC7. *Si $i : A \to B$ y $p : X \to Y$ son una cofibración y una fibración en $\mathcal{C}$ respectivamente, entonces la aplicación de conjuntos simpliciales*

$$map(B,X) \to map(A,X) \times_{map(A,Y)} map(B,Y)$$

es una fibración, que es trivial si i o p es una equivalencia débil.

El isomorfismo de conjuntos simpliciales de **MC6** da lugar en grado cero a una biyección natural de conjuntos

$$\mathcal{C}(X \otimes K, Y) \cong \mathbf{sSets}(K, map(X,Y)) \cong \mathcal{C}(X, Y^K).$$

3.1. Relaciones de homotopía en morfismos

En esta sección consideraremos fijada una categoría de modelos $\mathcal{C}$. Nuestro objetivo es a partir de los axiomas llegar a construir alguna relación de homotopía razonable en el conjunto de morfismos entre dos objetos de $\mathcal{C}$. Primero estudiaremos el concepto de homotopía por la izquierda definida en términos de los objeto cilindro, y después la noción dual de homotopía por la derecha, definida en términos de los objeto camino. Resultará que las dos definiciones coinciden cuando el objeto de salida sea cofibrante y el de llegada fibrante.

Objetos cilindro y homotopía por la izquierda

Recordemos que dados dos morfismos $f, g : X \to Y$ de espacios topológicos, decimos que son homotópicos si existe un morfismo

$$H : X \times I \to Y$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$. Donde $X \times I$ denota el producto de X con el intervalo unidad $I = [0, 1]$. El morfismo H se llama homotopía entre f y g.
Por lo tanto, vemos que la noción básica de homotopía entre espacios topológicos es inducida por la construcción de un cilindro

$$X \times I = X \times [0, 1],$$

en un espacio topológicos X, junto con las aplicaciones restricción a las tapas y el morfismo que colapsa (x, t) a x, como podemos ver en la imagen siguiente

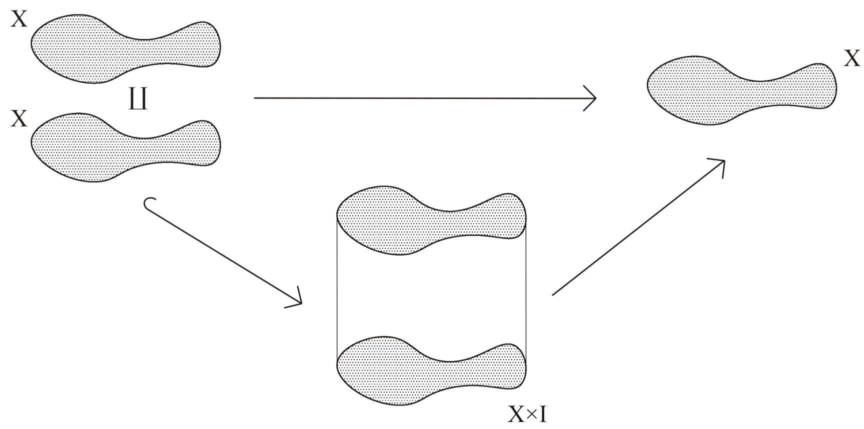

Figura 3.1: Cilindro para un espacio topológico X.

Definición 3.1.1. *Un cilindro para A es un objeto $Cyl(A)$ de $\mathcal{C}$ junto con un diagrama*

$$\begin{tikzcd} A\coprod A \arrow[rr, "id_A+id_A"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & Cyl(A). \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Decimos que $Cyl(A)$ es

(i) *un buen cilindro, si $A\coprod A \to Cyl(A)$ es una cofibración , y*

(ii) *un muy buen cilindro, si además el morfismo $Cyl(A) \to A$ es una fibración (necesariamente trivial).*

A los dos morfismos $A \to Cyl(A)$ los denotaremos por $i_0 = i \circ in_0$ y $i_1 = i \circ in_1$. Donde in_0 y in_1 son las dos inclusiones de A en $A\coprod A$.

Observación 3.1.2. Gracias al axioma **MC5** sabemos que al menos existirá un muy buen cilindro para A.

Lema 3.1.3. *Si A es un objeto cofibrante y $Cyl(A)$ es un buen cilindro para A entonces los morfismos $i_0, i_1 : A \to Cyl(A)$ son cofibraciones triviales.*

Demostración. Es suficiente comprobarlo para i_0. Como el morfismo identidad de A factoriza como $A \stackrel{i_0}{\to} Cyl(A) \stackrel{\sim}{\to} A$, tenemos por el axioma **MC2** que i_0 es una equivalencia débil. Ahora, como $A \coprod A$ está definido por el diagrama de pushout

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, "in_0"] \\
A \arrow[r, "in_1"'] & A \coprod A
\end{tikzcd}$$

y las cofibraciones son estables bajo cambios de cobase tenemos que in_0 es una cofibración. Y de la definición de i_0

$$A \stackrel{in_0}{\to} A \coprod A \to Cyl(A),$$

como es la composición de dos cofibraciones, obtenemos que también i_0 es una cofibración. □

Definición 3.1.4. *Dados dos morfismos $f, g : A \to B$ en $\mathcal{C}$ se dice que son homótopos por la izquierda, y escribiremos $f \stackrel{l}{\sim} g$, si existe un cilindro $Cyl(A)$ para A tal que el morfismo suma $f + g : A \coprod A \to B$ se extiende a un morfismo $H : Cyl(A) \to B$, es decir, si existe $H : Cyl(A) \to B$ tal que $H(i_0 + i_1) = f + g$.*

Un morfismo como H es llamado homotopía por la izquierda de f a g (via el cilindro $Cyl(A)$).

Diremos que una homotopía por la izquierda es (muy) buena si $Cyl(A)$ es un (muy) buen cilindro para A.

Observación 3.1.5. Si $f \stackrel{l}{\sim} g$ via la homotopía H, entonces por el axioma **MC2** tenemos que f es una equivalencia débil si y solo si g lo es. Para verlo, fijémonos que los morfismos i_0, i_1 son equivalencias débiles, entonces si $f = Hi_0$ es una equivalencia débil, también lo sera H y luego también lo sera $Hi_1 = g$.

Lema 3.1.6. *Si $f \stackrel{l}{\sim} g : A \to B$, entonces existe una buena homotopía por la izquierda de f a g. Si además B es fibrante, existe una muy buena homotopía por la izquierda de f a g.*

Demostración. La primera afirmación se obtiene de aplicar el axioma **MC5(i)** al morfismo

$$A \coprod A \to Cyl(A),$$

donde $Cyl(A)$ es un objeto cilindro para la homotopía por la izquierda de f a g.

Para ver que si B es fibrante entonces se tiene que existe una muy buena homotopía, consideremos una buena homotopía por la izquierda $H : Cyl(A) \to B$ de f

a g. Por el axioma **MC5(i)** y **MC2**, podemos factorizar el morfismo $Cyl(A) \xrightarrow{\sim} A$ como

$$Cyl(A) \overset{\sim}{\hookrightarrow} Cyl(A)' \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A.$$

Aplicando el axioma **MC4** al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Cyl(A) \arrow[r, "H"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
Cyl(A)' \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "H'"] & * \coprod A
\end{tikzcd}$$

obtenemos la muy buena homotopía $H' : Cyl(A)' \to X$ □

Lema 3.1.7. *Si A es cofibrante, entonces $\overset{l}{\sim}$ es una relación de equivalencia en $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.*

Demostración. (Reflexiva) Si A es cofibrante podemos tomar $Cyl(A) = A$ y f como una homotopía entre f y f.

(Simétrica) Sea $s : A \coprod A \to A \coprod A$ que intercambia factores (técnicamente, $s = i_{n_1} + i_{n_0}$). La identidad $(g+f) = (f+g)s$ muestra que si $f \overset{l}{\sim} g$, entonces $g \overset{l}{\sim} f$.

(Transitiva) Supongamos que tenemos $f \overset{l}{\sim} g$ y $g \overset{l}{\sim} h$. Consideremos una buena homotopía $H : Cyl(A) \to B$ de f en g y una buena homotopía $H' : Cyl(A)' \to B$ de g en h. Sea $Cyl(A)''$ un pushout del siguiente diagrama

$$Cyl(A) \overset{\sim}{\leftarrow}_{i_1} A \overset{\sim}{\rightarrow}_{i'_0} Cyl(A)'$$

Como los morfismos $i_1 : A \to Cyl(A)$ y $i'_0 : A \to Cyl(A)'$ son cofibraciones triviales, gracias a la propiedad universal de los pushouts y a que cofibraciones triviales son estables por cambios de cobase, se tiene que $Cyl(A)''$ es un cilindro para A. Usando de nuevo la Proposición 3.0.16, se tiene que los morfismos H y H' nos dan la deseada homotopía $H'' : Cyl(A) \to B$ de f a h. □

Notación 1. *Denotaremos por $\pi^l(A, B)$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{C}(A, B)$ modulo la relación de equivalencia generada por la homotopía por la izquierda.*

Observación 3.1.8. Observemos que no hemos hecho ninguna suposición sobre A. Es decir, podemos considerar el conjunto $\pi^l(A, B)$ aún y cuando A no sea cofibrante. En este caso la homotopía por la izquierda, no es necesariamente una relación de equivalencia en $\mathcal{C}(A, B)$. Por eso, en la definición, hablamos de la relación de equivalencia generada.

A continuación enunciaremos algunas propiedades más, en relación con $\pi^l(A, B)$.

Lema 3.1.9. *Si A es cofibrante y $p : C \to B$ es una fibración trivial, entonces la composición con p induce una biyección*

$$\begin{array}{rccc} p_* : & \pi^l(A, C) & \longrightarrow & \pi^l(A, B) \\ & [f] & \longmapsto & [pf] \end{array}$$

Demostración. [2] Lema 4.9. □

Lema 3.1.10. *Si B es fibrante, $f \overset{l}{\sim} g : A \to B$ y tenemos un morfismo $h : A' \to A$, entonces $fh \overset{l}{\sim} gh$.*

Demostración. [2] Lema 4.10. □

Lema 3.1.11. *Si B es fibrante, entonces la composición en $\mathcal{C}$ induce un morfismo*

$$\begin{array}{ccc} \pi^l(A', A) \times \pi^l(A, B) & \longrightarrow & \pi^l(A', B) \\ ([h], [f]) & \longmapsto & [fh] \end{array}$$

Demostración. [2] Lema 4.11. □

Objetos camino y homotopía por la derecha

Por dualidad, todo lo que hemos probado en la sección anterior nos da inmediatamente los correspondientes resultados duales.

Definición 3.1.12. *Un objeto camino para B es un objeto $Path(B)$ de $\mathcal{C}$ junto con un diagrama (dual al del cilindro)*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "(id_B, id_B)"] \arrow[dr, "i"', "\sim"] & & B \times B \\ & Path(B). \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Diremos que un objeto camino $Path(B)$ es

(i) *un buen objeto camino, si $Path(B) \to B \times B$ es una fibración, y*

(ii) *un muy buen objeto camino, si ademas el morfismo $B \to Path(B)$ es una cofibración (necesariamente trivial).*

A los dos morfismos $Path(B) \to B$ los denotaremos por $p_0 = pr_0 \circ p$ y $p_1 = pr_1 \circ p$, donde pr_0 y pr_1 son las dos proyecciones de $B \times B$ en B.

Observación 3.1.13. Los functores

$$Cyl(-) : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \qquad Path(-) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

son adjuntos.

Observación 3.1.14. Gracias al axioma **MC5** sabemos que al menos un muy buen objeto camino existirá para B.

Lema 3.1.15. *Si B es fibrante y $Path(B)$ es un buen objeto camino para B, entonces los morfismos $p_0, p_1 : Path(B) \to B$ son fibraciones triviales*

Definición 3.1.16. *Dados dos morfismos $f, g : A \to B$ en $\mathcal{C}$ se dice que son homótopos por la derecha, y escribiremos $f \overset{r}{\sim} g$, si existe un objeto camino $Path(B)$ para B tal que el morfismo producto $(f, g) : A \to B \times B$ se eleva a un morfismo $H : A \to Path(B)$.*
Un morfismo como H es llamado homotopía por la derecha de f a g (via el objeto camino $Path(B)$).
Diremos que una homotopía por la derecha es (muy) buena si $Path(A)$ es un (muy) buen objeto camino para B.

Lema 3.1.17. *Si $f \overset{r}{\sim} g : A \to B$, entonces existe una buena homotopía por la derecha de f a g. Si además A es cofibrante, existe una muy buena homotopía por la derecha de f a g.*

Lema 3.1.18. *Si B es fibrante, entonces $\overset{r}{\sim}$ es una relación de equivalencia en $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.*

Notación 2. *Denotaremos por $\pi^r(A, B)$ el conjunto de clases de equivalencia de $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ modulo la relación de equivalencia generada por la homotopía por la izquierda.*

Observación 3.1.19. Observemos que, como antes, no hemos hecho ninguna suposición sobre B.

Lema 3.1.20. *Si B es fibrante y $i : A \to C$ es una cofibración trivial, entonces la composición con i induce una biyección*

$$\begin{array}{rccc} i^* : & \pi^r(C, B) & \longrightarrow & \pi^r(A, B) \\ & [f] & \longmapsto & [fi] \end{array}$$

Lema 3.1.21. *Si A es cofibrante, $f \overset{l}{\sim} g : A \to B$ y tenemos un morfismo $h : B \to C$, entonces $hf \overset{r}{\sim} hg$.*

Lema 3.1.22. *Si A es cofibrante, entonces la composición en $\mathcal{C}$ induce un morfismo*

$$\begin{array}{rcc} \pi^r(A, B) \times \pi^r(B, C) & \longrightarrow & \pi^r(A, C) \\ ([f], [h]) & \longmapsto & [hf] \end{array}$$

Relación entre homotopía por la derecha y por la izquierda

El siguiente lema implica que si A es cofibrante y B es fibrante, entonces las relaciones de homotopía por la izquierda y por la derecha coinciden sobre $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Lema 3.1.23. *Sean $f, g : A \to B$ dos morfismos*

(i) *Si A es cofibrante y $f \overset{l}{\sim} g$, entonces $f \overset{r}{\sim} g$*

(ii) *Si B es fibrante y $f \overset{r}{\sim} g$, entonces $f \overset{l}{\sim} g$*

Demostración. Como las dos afirmaciones son una la dual de la otra solo hay que demostrar una, veamos **(i)**. Por el Lema 3.1.6 tenemos que existe un buen objeto cilindro para A

$$A \coprod A \xrightarrow{i_0+i_1} Cyl(A) \xrightarrow{j} A$$

y una buena homotopía $H : Cyl(A) \to B$ de f a g. Sabemos por 3.1.3 que la inclusión i_0 es una cofibración acíclica. Tomemos un objeto camino para B

$$B \xrightarrow{q} Path(B) \xrightarrow{(p_0,p_1)} B \times B.$$

Ahora por el axioma **MC4** tenemos que existe una elevación en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "qf"] \arrow[d, "i_0"'] & Path(B) \arrow[d, "(p_0,p_!)"] \\ Cyl(A) \arrow[r, "(f_j,H)"] & B \times B. \end{tikzcd}$$

Si denotamos por K a esta elevación, tenemos que la composición $Ki_1 : A \to Path(B)$ es la homotopía por la derecha de f a g. □

Definición 3.1.24. *Si A es cofibrante y B es fibrante, entonces denotaremos a las relaciones de homotopía por la izquierda y por la derecha en $\mathcal{C}(A, B)$ de la misma forma con el símbolo "$\sim$" y diremos que dos morfismos relacionados por esta relación son homótopos. El conjunto de clases de equivalencia con respecto a esta relación se denota por $\pi(A, B)$.*

Observación 3.1.25. Supongamos que tenemos A un objeto cofibrante y B un objeto fibrante, $Cyl(A)$ un buen cilindro para A fijado y $Path(B)$ un buen objeto camino para B fijado. Sean $f, g : A \to B$ dos morfismos. La demostración del Lema 3.1.23 implica que $f \sim g$ si y solo si $f \overset{r}{\sim} g$ via el objeto camino $Path(B)$ fijado. Dualmente, $f \sim g$ si y solo si $f \overset{l}{\sim} g$ via el objeto cilindro $Cyl(A)$ fijado.

Terminamos esta sección enunciando un resultado importante para la construcción de la categoría homotópica de una categoría de modelos.

Lema 3.1.26. *Supongamos que $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ entre objetos que son fibrante y cofibrante, respectivamente. Entonces f es una equivalencia débil si y solo si f tiene una una inversa homotópica, es decir, si y solo si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que las composiciones gf y fg son homótopas a los respectivos morfismos identidad.*

Demostración. [2] Lema 4.24. □

3.2. Categoría homotópica de una categoría de modelos

El objetivo de esta sección es construir la categoría homotópica $Ho(\mathcal{C})$ asociada a una categoría de modelos $\mathcal{C}$.

Notación 3. *Empecemos fijando nuestra atención en las siguientes seis categorías asociadas a $\mathcal{C}$*

$\mathcal{C}_c$ *la subcategoría full generada por los objetos cofibrantes de $\mathcal{C}$.*

$\mathcal{C}_f$ *la subcategoría full generada por los objetos fibrantes de $\mathcal{C}$.*

$\mathcal{C}_{cf}$ *la subcategoría full generada por los objetos fibrantes y cofibrantes de $\mathcal{C}$.*

$\pi\mathcal{C}_c$ *la categoría con objetos los objetos cofibrantes de $\mathcal{C}$ y morfismos las clases de homotopía por la derecha.*

$\pi\mathcal{C}_f$ *la categoría con objetos los objetos fibrantes de $\mathcal{C}$ y morfismos las clases de homotopía por la izquierda.*

$\pi\mathcal{C}_{cf}$ *la categoría con objetos los objetos fibrantes y cofibrantes de $\mathcal{C}$ y morfismos las clases de homotopía.*

Por medio de estas categorías definiremos la categoría $Ho(\mathcal{C})$ y construiremos un functor canónico $\mathcal{C} \to Ho(\mathcal{C})$.

Definición 3.2.1. *Para cada objeto X de $\mathcal{C}$ podemos aplicar el axioma **MC5(i)** al morfismo $\emptyset \to X$ y obtenemos*

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & X \\ & Q(X) \arrow[ur, two heads, "\sim", "p_X"'] & \end{tikzcd}$$

con $Q(X) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ una fibración trivial y $Q(X)$ un objeto cofibrante. Definiremos el objeto $Q(X)$ como el remplazo cofibrante de X.
*También podemos aplicar **MC5(ii)** al morfismo $X \to *$ y obtenemos*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, hook, "\sim", "i_X"'] & & * \\ & R(X) \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

con $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} R(X)$ una cofibración trivial y $R(X)$ un objeto fibrante. Definiremos el objeto $R(X)$ como el remplazo fibrante de X.

Si X es cofibrante, entonces podemos tomar $Q(X) = X$; si X es fibrante tomaremos $R(X) = X$.

Lema 3.2.2. *Dada $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$, entonces existe $\widetilde{f} : Q(X) \to Q(Y)$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} Q(X) \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, two heads, "p_X"', "\sim"] & Q(Y) \arrow[d, two heads, "p_Y"', "\sim"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo. El morfismo $\widetilde{f}$ depende de f, salvo equivalencia homotópica por la derecha o por la izquierda.

Además, se tiene que $\widetilde{f}$ es equivalencia débil si y solo si f es equivalencia débil. Si Y es fibrante, $\widetilde{f}$ depende de la clase de homotopía por la izquierda de f, salvo homotopía por la derecha o por la izquierda. A un morfismo como $\widetilde{f}$ lo llamaremos reemplazo cofibrante de f.

Demostración. [2] Lema 5.1. □

Observación 3.2.3. La unicidad en el Lema 3.2.2 nos dice que si $f = id_X$ entonces $\widetilde{f}$ es homótopa por la derecha a $id_{Q(X)}$. Del mismo modo, si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ y $h = gf$, entonces $\widetilde{h}$ es homótopa por la derecha a $\widetilde{g}\widetilde{f}$. Por lo tanto, podemos definir un functor

$$\begin{array}{cccc} Q: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \pi\mathcal{C}_c \\ & X & \longmapsto & Q(X) := \tilde{X} \\ & f : X \to Y & \longmapsto & [\widetilde{f}] \in \pi^r(Q(X), Q(Y)) \end{array}$$

Lema 3.2.4. *Dado $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$, entonces existe $\overline{f} : R(X) \to R(Y)$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"', "\sim"] & Y \arrow[d, "i_Y"', "\sim"] \\ R(X) \arrow[r, "\overline{f}"] & R(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. El morfismo $\overline{f}$ depende de f, salvo equivalencia homotópica por la derecha o por la izquierda.

Además, se tiene que $\overline{f}$ es equivalencia débil si y solo si f es equivalencia débil. Si X es cofibrante, $\overline{f}$ depende de la clase de homotopía por la derecha de f, salvo homotopía por la derecha o por la izquierda. A un morfismo como $\overline{f}$ lo llamaremos reemplazo fibrante de f.

Demostración. [2] Lema 5.3. □

Observación 3.2.5. La unicidad en el Lema 3.2.4 nos dice que si $f = id_X$ entonces $\overline{f}$ es homótopa por la izquierda a $id_{R(X)}$. Ademas, si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h = gf$, entonces $\overline{h}$ es homótopa por la derecha a $\overline{g}\overline{f}$. Es decir, podemos definir un functor

$$\begin{array}{cccc} R: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \pi\mathcal{C}_f \\ & X & \longmapsto & R(X) := \hat{X} \\ & f : X \to Y & \longmapsto & [\overline{f}] \in \pi^r(Q(X), Q(Y)) \end{array}$$

Lema 3.2.6. *La restricción del functor $Q : \mathcal{C} \to \pi\mathcal{C}_c$ a $\mathcal{C}_f$ induce un functor $Q' : \pi\mathcal{C}_f \to \pi\mathcal{C}_{cf}$, al igual que la restricción del functor R a $\mathcal{C}_c$ que induce un functor $R' : \pi\mathcal{C}_c \to \pi\mathcal{C}_{cf}$.*

Demostración. [2] Lema 5.5. □

Definición 3.2.7. *La categoría homotópica $Ho(\mathcal{C})$ de una categoría de modelos $\mathcal{C}$ es una categoría con los mismos objetos que $\mathcal{C}$ y con morfismos*

$$Ho(\mathcal{C})(X,Y) = \pi\mathcal{C}_{cf}(R'(Q(X)), R'(Q(Y))) = \pi(R'(Q(X)), R'(Q(Y))).$$

Observación 3.2.8. Existe un functor

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & \mathcal{C} & \longrightarrow & Ho(\mathcal{C}) \\ & X & \longmapsto & X \text{ es la identidad para los objetos} \\ & f: X \to Y & \longmapsto & R'Q(f): R'Q(X) \to R'Q(Y). \end{array}$$

Si dos objetos X e Y son a la vez fibrantes y cofibrantes tenemos por construcción que

$$\gamma: \mathcal{C}(X,Y) \to Ho(\mathcal{C})(X,Y)$$

es exhaustiva y induce una biyección

$$\pi(X,Y) \cong Ho(\mathcal{C})(X,Y).$$

Observación 3.2.9. Una pregunta natural sería plantearse que pasaría si en lugar de hacer esta definición usando el functor $R'Q$ la hiciéramos usando el functor $Q'R$. La respuesta es que obtendríamos lo mismo, es decir, obtenemos la misma categoría $Ho(\mathcal{C})$

Proposición 3.2.10. *Si f es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $\gamma(f)$ será un isomorfismo en $Ho(\mathcal{C})$ si y solo si f es una equivalencia débil.*

Los morfismos de $Ho(\mathcal{C})$ están generados por composiciones de las imágenes por γ de los morfismos de $\mathcal{C}$ y los inversos de las imágenes por γ de las equivalencias débiles de $\mathcal{C}$.

Demostración. [2] Proposición 5.8. □

Corolario 3.2.11. *Si F y G son dos functores de $Ho(\mathcal{C})$ en $\mathcal{D}$ y $t: F\gamma \to G\gamma$ es una transformación natural, entonces t nos da una transformación natural de F en G.*

Demostración. [2] Corolario 5.9. □

Lema 3.2.12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor que envía las equivalencias débiles de $\mathcal{C}$ a isomorfismos en $\mathcal{D}$. Si $f \overset{l}{\sim} g: A \to B$ o $f \overset{r}{\sim} g: A \to B$ entonces $F(f) = F(g)$ en $\mathcal{D}$.*

Demostración. [2] Lema 5.10. □

Proposición 3.2.13. *Supongamos que A es cofibrante en $\mathcal{C}$ y que B es fibrante. Entonces el morfismo*

$$\gamma: \mathcal{C}(A,B) \to Ho(\mathcal{C})(A,B)$$

es exhaustivo, y induce la siguiente biyección

$$\pi(A,B) \cong Ho(\mathcal{C})(A,B).$$

Demostración. [2] Proposición 5.11. □

La categoría homotópica vista como una localización

A continuación daremos una interpretación conceptual de la categoría homotopica de una categoría de modelos. Sorprendentemente, esta interpretación solo depende de la clase de equivalencias débiles.

Esto sugiere que en una categoría de modelos las equivalencias débiles contienen toda la información de la categoría homotópica, mientras que las fibraciones y cofibraciones junto con los axiomas que se verifican son herramientas para hacer diversas construcciones.

También nos sugiere que cuando demos una estructura de modelos a una categoría tiene mas importancia la elección de las equivalencias débiles que elección de las fibraciones y cofibraciones

Definición 3.2.14. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ una clase de morfismos. Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice que es una localización de $\mathcal{C}$ respecto $\mathcal{W}$ si*

(i) *$F(f)$ es un isomorfismo para todo $f \in \mathcal{W}$,*

(ii) *para todo $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}'$ functor que envía los elementos de $\mathcal{W}$ a isomorfismos, existe un único functor $G' : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ tal que $G'F = G$.*

Observación 3.2.15. La condición (ii) nos da que dos localizaciones de una categoría $\mathcal{C}$ respecto $\mathcal{W}$ son canónicamente isomorfas. Si existe la localización la denotaremos por $\mathcal{C} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$.

Teorema 3.2.16. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ la clase de las equivalencias débiles. Entonces, el functor $\gamma : \mathcal{C} \to Ho(\mathcal{C})$ es una localización de $\mathcal{C}$ respecto a $\mathcal{W}$. Es decir, tenemos que $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$ existe y es isomorfa a $Ho(\mathcal{C})$.*

Demostración. [2] Teorema 6.2. □

3.2.1. Functores de Quillen

Cuando se trabaja con categorías con estructuras de modelos, los functores que nos interesa considerar son los que "conservan" la estructura de modelos, estos functores entre categorías de modelos son conocidos como functores de Quillen.

Definición 3.2.17. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías de modelos y $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$ un par de functores adjuntos. Diremos que*

- *F es un functor de Quillen por la izquierda,*
- *U es un functor de Quillen por la derecha, y*
- *(F, U) es un par de Quillen,*

si

(i) *el adjunto por la izquierda conserva cofibraciones y cofibraciones triviales, y*

(ii) *el adjunto por la izquierda conserva fibraciones y fibraciones triviales.*

Definición 3.2.18. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías de modelos y $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$ un par Quillen. Diremos que*

- *F es una equivalencia de Quillen por la izquierda,*
- *U es una equivalencia de Quillen por la derecha, y*
- *(F, U) es una equivalencia de Quillen,*

si para todo objeto cofibrante B de $\mathcal{C}$, todo objeto fibrante X de $\mathcal{D}$ y todo morfismo $f : B \to UX$ en $\mathcal{C}$, el morfismo f es una equivalencia débil en $\mathcal{C}$ si y solo si el morfismo correspondiente $f' : FB \to X$ es una equivalencia débil.

La siguiente proposición nos caracteriza cuando un par de Quillen es una equivalencia de Quillen en función del functor izquierda.

Proposición 3.2.19. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías de modelos y $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$ un par de Quillen. Entonces, son equivalentes:*

(i) *(F, G) es una equivalencia de Quillen,*

(ii) *F refleja equivalencias débiles entre objetos cofibrantes, y para todo objeto fibrante Y, el morfismo $FQU(Y) \to Y$ es una equivalencia débil.*

Demostración. [8] Corolario 1.3.16. $\square$

3.3. Ejemplos de categorías de modelos

En esta sección daremos ejemplos de estructuras de modelos para las categorías de los espacios topológicos, espacios simpliciales y cadenas de complejos.

3.3.1. Espacios topológicos

Construiremos una estructura de modelos para la categoría **Top** de espacios topológicos con equivalencias débiles las equivalencias débiles de homotopía.

Definición 3.3.1. *Un morfismo $f : X \to Y$ entre espacios es una equivalencia débil de homotopía si para todo punto base $x \in X$ se tiene que el morfismo $f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ es una biyección de espacios punteados para $n = 0$ y un isomorfismo de grupos para $n \geq 1$.*

Definición 3.3.2. *Un morfismo $p : X \to Y$ es una fibración de Serre si, para todo CW-complejo A, el morfismo tiene la RLP con respecto a la inclusión $A \times 0 \to A \times [0, 1]$, es decir*

$$\begin{tikzcd} A \times 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ A \times [0,1] \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$

Teorema 3.3.3. *Si consideramos las tres siguientes clases de morfismos de espacios topológicos*

(i) *equivalencias débiles de homotopía como equivalencias débiles,*

(ii) *las fibraciones de Serre como fibraciones, y*

(iii) *las cofibraciones los morfismos con la LLP respecto a las fibraciones acíclicas.*

*Entonces, con estas clases de morfismos **Top** es una categoría de modelos.*

Para la demostración necesitaremos dos lemas de teoría de homotopía elemental.

Notación 4. *Sea D^n $(n \geq 1)$ el disco topológicos de dimensión n y sea S^n $(n \geq 0)$ la esfera topológica de dimensión n. D^0 será un solo punto y S^{-1} el espacio vacío. Tenemos las inclusiones estándares $j_n : S^{n-1} \to D^n$ $(n \geq 0)$.*

Lema 3.3.4. *Sea $p : X \to Y$ un morfismo entre espacios. Se tiene que p es una fibración de Serre si, y solo si, p tiene la RLP respecto a las inclusiones $D^n \to D^n \times [0,1]$, $n \geq 0$.*

Lema 3.3.5. *Sea $p : X \to Y$ un morfismo entre espacios. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *p es a la vez una fibración de Serre y una equivalencia débil de homotopía,*

(ii) *p tiene la RLP respecto toda inclusión $A \to B$ tal que (B, A) es un CW-complejo relativo, y*

(iii) *p tiene la RLP respecto los morfismos $j_n : S^{n-1} \to D^n$ para $n \geq 0$.*

También requeriremos un lema de topología de espacios punteados.

Lema 3.3.6. *Supongamos que*

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n \to \cdots$$

es un sistema directo de espacios tal que para todo $n \geq 0$ el espacio X_n es un subespacio de X_{n+1} y el par (X_{n+1}, X_n) es una CW-complejo relativa. Entonces, el morfismo natural

$$colim_n \boldsymbol{Top}(A, X_n) \to \boldsymbol{Top}(A, colim_n X_n)$$

es una biyección de conjuntos.

Demostración. [2] Lema 8.7. □

Observación 3.3.7. Si estamos en una situación como la del Lema 3.3.6 llamaremos al morfismo natural $X_0 \to colim_n X_n$ como una inclusión relativa de CW generalizada y diremos que el $colim_n X_n$ se obtiene de X_0 adjuntando celdas.

Observación 3.3.8. Del Lema 3.3.5 se sigue fácil que toda inclusión relativa de CW generalizada es una cofibración respecto la estructura de categoría de modelos descrita en el Teorema 3.3.3. De hecho hay un especie de reciproco.

Proposición 3.3.9. *Toda cofibración en* ***Top*** *es un retracto de una inclusión relativa de CW generalizada.*

Pasemos a ver la verificación de los axiomas.

Demostración. (**MC1-MC3**) Se tiene directamente que las clases de las equivalencias débiles, fibraciones y cofibraciones contiene todos los morfismos identidad y son cerradas por composición.

El axioma **MC1** se tiene por el hecho que en **Top** existen los límites y colímites pequeños. El axioma **MC2** es obvio.

Para las equivalencias débiles el axioma **MC3** se tiene por functorialidad y que el retracto de un isomorfismo es un isomorfismo. Los otros dos casos del axioma **MC3** son parecidos, con lo que nos centraremos en el caso de las cofibraciones. Supongamos que f es el retracto de una cofibración f'. Queremos ver que existe una elevación en todo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"'] & Y, \end{tikzcd}$$

donde p es una fibración acíclica. Consideremos ahora el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r, "a"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "j"'] & B' \arrow[r, "s"'] & B \arrow[r, "b"'] & Y, \end{tikzcd}$$

donde los morfismos i, j, r y s son retractos. Como f' es una cofibración tenemos que existe una elevación $h : B' \to X$ en el diagrama anterior. Entonces, hj es la elevación que buscábamos para el primer diagrama. □

La prueba de **MC4**(ii) y **MC5(ii)** depende del siguiente lema.

Lema 3.3.10. *Todo morfismo $p : X \to Y$ en* ***Top*** *puede ser factorizado como la composición $p_\infty i_\infty$, donde $i_\infty : X \to X'$ es una equivalencia débil de homotopía con la LLP respecto todas las fibraciones de Serre, y $p_\infty : X' \to Y$ es una fibración de Serre.*

Demostración. [2] Lema 8.12. □

Demostración. (**MC4**) El axioma **MC4(i)** es inmediato de la definición de cofibración.

Para **MC4(ii)** supongamos que $f : A \to B$ es una fibración acíclica, queremos ver que f tiene la LLP con respecto las fibraciones. Por el Lema 3.3.10 podemos factorizar f como la composición pi, con p una fibración y i una equivalencia débil de homotopía. Como $f = pi$ es por hipótesis una equivalencia débil de homotopía, tenemos que p también es una equivalencia débil de homotopía. Como f es una cofibracion y p es una fibración acíclica tenemos que existe una elevación $g : B \to A'$ en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "p"', "\sim"] \\ B \arrow[r, "id"'] & B. \end{tikzcd}$$

Esta elevación g nos permite ver f como un retracto de i. Ahora con un argumento similar al de la demostración de **MC3** se puede ver que la clase de morfismos que tiene la LLP respecto todas las fibraciones de Serre es cerrada bajo retractos. Con lo que f tiene la LLP respecto todas las fibraciones de Serre, ya que i la tiene. □

Demostración. (**MC5**) El axioma **MC5(i)** es consecuencia inmediata del Lema anterior.

Para ver **MC5(ii)**, la idea es que si p es el morfismo que tenemos que factorizar, consideremos la factorización $p = p_\infty i_\infty$ de p dada en el lema anterior. Como i_∞ se define a través de un colimite tenemos que conserva las propiedades y por lo tanto por el Lema 3.3.5 tenemos que tendrá la LLP respecto a las fibraciones de Serre que sean equivalencias débiles de homotopía, por lo tanto, por definición tendremos que i_∞ será una cofibración. Usando el Lema 3.3.6 se obtiene que p_∞ es una equivalencia débil y una fibración de Serre. □

Observación 3.3.11. A la categoría **Top** se le puede dotar de otra estructura de modelos definiendo que un morfismo $f : X \to Y$ sea

- una equivalencia débil si f es una equivalencia homotopía,
- una cofibración si f es una cofibración de Hurewicz cerrada, y
- una fibración si f es una fibración de Hurewicz.

Con esta estructura de modelos, la categoría homotópica que se obtiene es la equivalente a la categoría homotópica usual de espacios topológicos.

3.3.2. Conjuntos simpliciales

A continuación presentaremos una estructura de modelos para la categoría de los conjuntos simpliciales.

Definición 3.3.12. *Dado un morfismo $f : X \to Y$ diremos que*

- *f es una fibración si tiene la RLP respecto $V(n, k) \to \Delta[n]$ para $0 \leq k \leq n$ y $n > 0$,*
- *f es una fibración trivial si tiene la RLP respecto $\partial\Delta[n] \to \Delta[n]$ para $n \geq 0$,*
- *f es una cofibración si tiene la LLP respecto las fibraciones triviales,*
- *f es una cofibración trivial si tiene la LLP respecto las fibraciones, y*

- *f es una equivalencia débil si puede ser factorizada como $f = pi$ con p una fibración trivial y i una fibración trivial.*

Teorema 3.3.13. *La categoría de los conjuntos simpliciales con las clases de morfismos descritas en la Definición 3.3.12 tiene estructura de categoría de modelos.*

3.3.3. Complejos de cadenas

A continuación introduciremos una estructura de categoría de modelos para la categoría de los complejos de cadenas. Este, es un ejemplo de categoría no topológica que admite una estructura de modelos y por lo tanto nos permite desarrollar una teoría de homotopía.

Consideremos R un anillo asociativo con unidad, denotaremos por $\mathbf{Mod}_R$ la categoría de los R-módulos por la izquierda. Recordemos que la categoría de $\mathbf{Ch}_R$ de las cadenas de complejos de R-módulos es la categoría donde los objetos M son colecciones $\{M_k\}_k$ de R-módulos junto con los morfismos $\partial : M_k \to M_{k-1}$ $(k \geq 1)$ tales que $\partial^2 = 0$. Un morfismo $f : M \to N$ es una colección de homomorfismos $f_k : M_k \to N_k$ tales que $f_{k-1}\partial = \partial f_k$.

El objetivo de esta sección es construir una estructura de categoría de modelos en $\mathbf{Ch}_R$.

Definición 3.3.14. *Dado un objeto M de Ch_R, definimos el modulo ciclo de dimensión k $Cy_k(M)$ que sea M_0 si $k = 0$ y $\ker(\partial : M_k \to M_{k-1})$ si $k > 1$. Definiremos el modulo frontera de dimensión k $Bd_k(M)$ que sea $im(\partial : M_{k+1} \to M_k)$.*

Se tienen los functores de homología $H_k : \boldsymbol{Ch}_R \to \boldsymbol{Mod}_R$ $(k \geq 0)$ dado por $H_kM = Cy_k(M)/Bd_k(M)$. Diremos que un complejo M es acíclico si $H_kM = 0$ $(k \geq 0)$.

Definición 3.3.15. *Recordemos que un R-modulo P es proyectivo si una de las siguientes tres condiciones equivalentes se cumplen:*

- *P es suma directa de R-módulos libres,*
- *todo epimorfismo $f : A \to P$ de R-módulos tiene un inverso por la derecha, o*
- *para todo epimorfismo $A \to B$ de R-módulos, el morfismo inducido*

  $$\boldsymbol{Mod}_R(P, A) \to \boldsymbol{Mod}_R(P, B)$$

  es un epimorfismo.

Teorema 3.3.16. *Si definimos el morfismo $f : M \to N$ en $\boldsymbol{Ch}_R$ que sea*

(i) *una equivalencia débil si el morfismo f induce isomorfismo entre H_kM y H_kN para $k \geq 0$,*

(ii) *una cofibración si para todo $k \geq 0$ el morfismo $f_k : M_k \to N_k$ es un monomorfismo con cokernel un R-modulo proyectivo, y*

(iii) *una fibración si para todo $k \geq 0$ el morfismo $f_k : M_k \to N_k$ es un epimorfismo.*

Entonces, con estos morfismos $\boldsymbol{Ch}_R$ es una categoría de modelos.

Capítulo 4

Localizaciones

El objetivo de este capítulo es introducir las localizaciones de Bousfield por la derecha y por la izquierda y dar en unos teoremas condiciones para su existencia. Empezaremos con las definición de objetos y espacios locales y colocales, y luego pasaremos a las definiciones de localización y colocalización de objetos y morfismos con lo que entraremos en la sección de localizaciones en categorías de modelos. Terminaremos el capítulo con un ejemplo de localización y uno de colocalización que no serán de gran interés en el Capítulo 5.

En este capítulo no haremos ninguna demostración y seguiremos en gran parte el libro de Hirschhorn [7].

4.1. Espacios y equivalencias (co)locales

Dada una categoría de modelos $\mathcal{C}$, un complejo de funciones homotópico es una elección funtorial de un conjunto simplicial $map(X, Y)$ para cada dos objetos X e Y de $\mathcal{C}$, cuyo tipo de homotopía es el mismo que el de la diagonal del conjunto bisimplicial $\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, donde $\mathbf{X}$ es una resolución cosimplicial de X e $\mathbf{Y}$ es una resolución simplicial de Y. En este trabajo no discutiremos como se construye este conjunto simplicial y nos bastará con saber que los complejos de funciones homotópicos existen en cualquier categoría de modelos y son invariantes y únicos salvo homotopía. En el caso que $\mathcal{C}$ sea una categoría de modelos simplicial (por ejemplo, espacios topológicos o conjuntos simpliciales), se puede definir $map(X, Y)$ como el conjunto simplicial que resulta de tomar el enriquecimiento simplicial de $\mathcal{C}$ después de haber reemplazado el domino por un objeto cofibrante y el codominio por un objecto fibrante.

Los complejos de funciones homotópicos juegan un papel importante en la definición de los objetos y morfismos locales y colocales.

Espacios y equivalencias f-locales.

Empezaremos definiendo lo que son los objetos y las equivalencias locales respecto un único morfismo f de $\mathcal{C}$.

Definición 4.1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y consideremos $f : A \to B$ un morfismo entre objetos cofibrantes de $\mathcal{C}$*

1. *Un objeto X es f-local si*
   - *X es fibrante, y*
   - *$f^*: map(B, X) \to map(A, X)$ es una equivalencia débil*
2. *Un morfismo $g : X \to Y$ es una equivalencia f-local si para todo $\forall W$ f-local se tiene que para todo objeto W f-local de $\mathcal{C}$ el morfismo inducido*

$$g^* : map(Y, W) \to map(X, W)$$

es una equivalencia débil.

A continuación daremos algunas propiedades de los objetos locales.

Proposición 4.1.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y sea $f : A \to B$ un morfismo entre objetos cofibrantes.*

- *Si X y Y son fibrantes y $g : X \to Y$ es una equivalencia débil, entonces X es f-local si y sólo si Y es f-local.*
- *Si X es f-local y Y es un retracto de X, entonces Y es f-local.*

Demostración. [7] Proposición 1.2.4 y 1.2.5. □

En las siguientes proposiciones estudiamos el comportamiento de los objetos f-locales al cambiar el morfismo f.

Proposición 4.1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y sean f y f' dos morfismos entre objetos cofibrantes. Si la clase de los objetos f-locales es igual a la clase de los objetos f'-locales, entonces la clase de las equivalencias f-locales es igual a la clase de las equivalencias f'-locales.*

Demostración. [7] Proposición 1.2.8. □

Proposición 4.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y sean $f : A \to B$ y $f' : A' \to B'$ dos morfismos entre objetos cofibrantes. Si existen equivalencias débiles $A \to A'$ y $B \to B'$ tales que el diagrama siguiente conmute*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & B \arrow[d, "\cong"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

entonces,

1. *La clase de objetos f-locales es la misma que la de los objetos f'-locales.*
2. *La clase de equivalencias f-locales es igual a la clase de equivalencias f'-locales.*

Demostración. [7] Proposición 1.2.10. □

Observación 4.1.5. La proposición anterior nos implica, por ejemplo, que si $\mathcal{C}$ es la categoría de espacios topológicos, siempre podemos remplazar el morfismo $f : A \to B$ por una inclusión por una inclusión de CW-complejos de forma que ni los espacios ni las equivalencias f-locales cambien.

Espacios y equivalencias M-locales.

Ahora introduciremos los espacios y equivalencias locales y colocales respecto un conjunto M de morfismos de $\mathcal{C}$.

Definición 4.1.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y consideremos M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$.*

1. **(i)** *Un objeto W de $\mathcal{C}$ es M-local si es f-local para toda $f \in M$. Si M consiste solo en el morfismo $A \to *$ entonces un objeto M-local también es llamado un objeto A-local.*

   (ii) *Un morfismo $g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ es una equivalencia M-local si es f-local para todo $f \in M$. Si M consiste en un morfismo $* \to A$ entonces una equivalencia M-local también es llamada una equivalencia A-local.*

2. **(i)** *Un objeto W de $\mathcal{C}$ es M-colocal si*

   - *W es cofibrante*
   - *Para todo elemento $f : A \to B$ de M el morfismo inducido*

   $$f_* : map(W, A) \to map(W, B)$$

   es una equivalencia débil.

   (ii) *Un morfismo $g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ es una equivalencia M-colocal si*

   - *para todo objeto W que sea M-colocal de $\mathcal{C}$ el morfismo inducido*

   $$g_* : map(W, X) \to map(W, Y)$$

   es una equivalencia débil.

Proposición 4.1.7. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos y M es una clase de morfismos en $\mathcal{C}$ entonces toda equivalencia débil es a la vez una equivalencia M-local y M-colocal.*

Demostración. [7] Proposición 3.1.5. □

Otra forma interesante de definir las equivalencias colocales, que es la que utilizaremos en la práctica, es directamente a partir de un conjunto de objetos.

Definición 4.1.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y sea K un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$.*

1. *Un morfismo $g : X \to Y$ lo llamaremos equivalencia K-colocal o K-celular si para todo elemento A de K el morfismo inducido*

   $$g_* : map(A, X) \longrightarrow map(A, Y)$$

   es una equivalencia débil. Si K consiste en un solo objeto A, entonces las equivalencias K-colocales también se llamaran equivalencias A-colocales o A-celulares.

2. *Si M es la clase de equivalencias K-colocales, entonces un objeto M-colocal sera también llamado K-colocal.*

Observación 4.1.9. En el caso en que consideremos una categoría $\mathcal{C}$ de espacios no punteados y A un espacio no vacío, entonces el espacio consistente en un solo punto es un retracto de A, y entonces todo espacio X es un retracto del espacio de morfismos X^A. Esto implica que si K es un conjunto de espacios no vacíos, tenemos que una equivalencia K-colocal de espacios no punteados debe ser una equivalencia débil. Es decir, que no estamos definiendo nada nuevo.

Para acabar añadimos un par de resultados interesantes sobre objetos y equivalencias M-(co)locales que más adelante vamos a necesitar

Proposición 4.1.10 (Teorema de Whitehead)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$.*

1. *Si X y Y son objetos M-locales y $g : X \to Y$ es una equivalencia M-local, entonces g es una equivalencia débil.*

2. *Si X y Y son objetos M-colocales y $g : X \to Y$ es una equivalencia M-colocal, entonces g es una equivalencia débil.*

Demostración. [7] Teorema 3.2.13. □

4.2. Localización de una categoría de modelos

El objetivo de las categorías de modelos es ser la base para construir las categorías homotópicas, por lo tanto una localización de una categoría de modelos debe ser una construcción que añade inversos de morfismos en la categoría homotópica, en lugar de añadir inversos para morfismos de la categoría subyacente.

Empezemos con las definiciones de localización y colocalización de objetos y morfismos.

Definición 4.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y consideremos M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$.*

1. **(i)** *Una M-localización de un objeto X es*

   - *un objeto $\widehat{X}$ M-local,*
   - *junto con una equivalencia M-local $j : X \to \widehat{X}$.*

   Una M-localización cofibrante es una M-localización en la que la equivalencia M-local j es también una cofibración.

   (ii) *Una M-localización de un morfismo $g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ es*

   - *una M-localización $(\widehat{X}, j_X)$ de X*
   - *una M-localización $(\widehat{Y}, j_Y)$ de Y*

- *un morfismo $\widehat{g} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j_X"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \\ \widehat{X} \arrow[r, "\widehat{g}"'] & \widehat{Y} \end{tikzcd}$$

conmuta.

2. **(i)** *Una M-colocalización de un objeto X es*
   - *un objeto $\widetilde{X}$ M-colocal,*
   - *junto con una equivalencia M-colocal $i : \widetilde{X} \to X$.*

   Una M-colocalización cofibrante es una M-colocalización en la que la equivalencia M-colocal i es también una cofibración.

   (ii) *Una M-colocalización de un morfismo $g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ es*
   - *una M-colocalización $(\widetilde{X}, i_X)$ de X*
   - *una M-colocalización $(\widetilde{Y}, i_Y)$ de Y*
   - *un morfismo $\widetilde{g} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "i_X"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta.

4.2.1. Localización por la izquierda y por la derecha

En esta sección definiremos la localización por la izquierda y por la derecha de categorías de modelos.

Definición 4.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y sea M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$.*

1. *Una localización por la izquierda de $\mathcal{C}$ respecto M es una categoría de modelos $L_M\mathcal{C}$ junto con un functor de Quillen por la izquierda $j : \mathcal{C} \to L_M\mathcal{C}$ tal que*

   - *el functor derivado total por la izquierda (es decir, el inducido a categorías homotópicas) $Lj : Ho(\mathcal{C}) \to Ho(L_M\mathcal{C})$ de j envía las imágenes de los elementos de M a isomorfismos en $Ho(L_M\mathcal{C})$, y*

   - *si $\mathcal{D}$ es una categoría de modelos y $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un functor-izquierda de Quillen tal que $L\varphi : Ho(\mathcal{C}) \to Ho(\mathcal{D})$ envía las imágenes de los elementos de M a isomorfismos en $Ho(L_M\mathcal{D})$, entonces existe un único functor de Quillen por la izquierda $\delta : L_M\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $\delta j = \varphi$.*

2. *Una localización por la derecha de $\mathcal{C}$ respecto M es una categoría de modelos $R_M\mathcal{C}$ junto con un functor de Quillen por la derecha $j : R_M\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que*

- *el functor derivado total por la derecha (es decir, el inducido a categorías homotópicas) $Rj : Ho(\mathcal{C}) \to Ho(R_M\mathcal{C})$ de j envía las imágenes de los elementos de M a isomorfismos en $Ho(R_M\mathcal{C})$, y*
- *si $\mathcal{D}$ es una categoría de modelos y $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un functor-derecha de Quillen tal que $R\varphi : Ho(\mathcal{C}) \to Ho(\mathcal{D})$ envía las imágenes de los elementos de M a isomorfismos en $Ho(L_M\mathcal{D})$, entonces existe un unico functor de Quillen por la derecha $\delta : L_M\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $\delta j = \varphi$.*

Proposición 4.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y sea M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$. Si existe una localización (por la izquierda o por la derecha) de $\mathcal{C}$ respecto a M, entonces esta es única salvo isomorfismo.*

Demostración. [7] Proposición 3.1.2. □

4.2.2. Localización de Bousfield

En esta sección presentaremos la localización de Bousfield (por la izquierda y por la derecha) de categorías, un caso especial de localización por la izquierda y por la derecha.

La idea básica de la localización de Bousfield por la izquierda de una categoría $\mathcal{C}$ con una estructura de modelos es una nueva estructura de modelos sobre la misma categoría con las mismas cofibraciones pero mas equivalencias débiles. Para la localización de Bousfield obtenemos una nueva estructura de modelos con las mismas fibraciones que la original y más equivalencias débiles.

Definición 4.2.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y sea M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$.*

1. *La localización de Bousfield por la izquierda de $\mathcal{C}$ respecto M (si existe) es una estructura de categoría de modelos $L_M\mathcal{C}$ para la misma categoría $\mathcal{C}$ tal que*
   - *la clase de las equivalencias débiles de $L_M\mathcal{C}$ es igual a la clase de equivalencias M-locales de $\mathcal{C}$,*
   - *la clase de cofibraciones de $L_M\mathcal{C}$ es la misma que la clase de cofibraciones en $\mathcal{C}$, y*
   - *la clase de fibraciones de $L_M\mathcal{C}$ es la clase de morfismos que tienen la propiedad RLP respecto los morfismos que son a la vez cofibraciones y equivalencias M-locales en $\mathcal{C}$.*
2. *La localización de Bousfield por la derecha de $\mathcal{C}$ respecto M (si existe) es una estructura de categoría de modelos $R_M\mathcal{C}$ para la misma categoría $\mathcal{C}$ tal que*
   - *la clase de las equivalencias débiles de $R_M\mathcal{C}$ es igual a la clase de equivalencias M-colocales de $\mathcal{C}$,*
   - *la clase de fibraciones de $R_M\mathcal{C}$ es la misma que la clase de fibraciones en $\mathcal{C}$, y*

- *la clase de cofibraciones de $R_M\mathcal{C}$ es la clase de morfismos que tienen la propiedad LLP respecto los morfismos que son a la vez fibraciones y equivalencias M-colocales en $\mathcal{C}$.*

Observación 4.2.5. En esta definición no estamos afirmando que dada una categoría de modelos $\mathcal{C}$ una clase de morfismo M entonces la localización de Bousfield por la izquierda o por la derecha de $\mathcal{C}$ respecto M exista, es decir, que las tres clases de morfismos descritas en la definición puede que no verifiquen los axiomas de categoría de modelos sobre $\mathcal{C}$.

Más adelante, en los Teoremas 4.2.12 y 4.2.13, veremos bajo que condiciones si que se da la existencia .

La siguiente proposición nos da mas de información de que relación hay entre las tres clases de morfismos de $L_M\mathcal{C}$ o $R_M\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$

Proposición 4.2.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$.*

1. *Si $L_M\mathcal{C}$ es la localización de Bousfield por la izquierda de $\mathcal{C}$ respecto M, entonces*
   - *toda equivalencia débil de $\mathcal{C}$ es una equivalencia débil de $L_M\mathcal{C}$,*
   - *la clase de las fibraciones triviales de $L_M\mathcal{C}$ es la misma que la clase de fibraciones triviales de $\mathcal{C}$,*
   - *toda fibración de $L_M\mathcal{C}$ es una fibración de $\mathcal{C}$, y*
   - *toda cofibración trivial de $\mathcal{C}$ es una cofibración trivial de $L_M\mathcal{C}$.*
2. *Si $R_M\mathcal{C}$ es la localización de Bousfield por la derecha de $\mathcal{C}$ respecto M, entonces*
   - *toda equivalencia débil de $\mathcal{C}$ es una equivalencia débil de $R_M\mathcal{C}$,*
   - *la clase de las cofibraciones triviales de $R_M\mathcal{C}$ es la misma que la clase de cofibraciones triviales de $\mathcal{C}$,*
   - *toda cofibración de $L_M\mathcal{C}$ es una cofibración de $\mathcal{C}$, y*
   - *toda fibración trivial de $\mathcal{C}$ es una fibración trivial de $R_M\mathcal{C}$.*

Demostración. Como las equivalencias débiles son locales y colocales respecto cualquier conjunto M (por la Proposición 4.1.7) tenemos que lo otro se sigue por definición de la localización de Bousfield y de las relaciones entre los morfismos destacados de las categorías de modelos. □

Corolario 4.2.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y sea M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$.*

1. *Si $j : \mathcal{C} \to L_M\mathcal{C}$ es la localización de Bousfield por la izquierda de $\mathcal{C}$ respecto M, entonces los functores identidad $id_\mathcal{C} : \mathcal{C} \rightleftarrows L_M\mathcal{C} : id_\mathcal{C}$ son un par de Quillen.*

2. *Si $j : \mathcal{C} \to R_M\mathcal{C}$ es la localización de Bousfield por la derecha de $\mathcal{C}$ respecto M, entonces los functores identidad $id_\mathcal{C} : R_M\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C} : id_\mathcal{C}$ son un par de Quillen.*

La localización de Bousfield es una localización

Teorema 4.2.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos y consideremos M una clase de morfismos en $\mathcal{C}$.*

1. *Si $L_M\mathcal{C}$ es la localización de Bousfield por la izquierda de $\mathcal{C}$ respecto M, entonces el functor identidad $\mathcal{C} \to L_M\mathcal{C}$ es una localización por la izquierda de $\mathcal{C}$ respecto M.*

2. *Si $R_M\mathcal{C}$ es la localización de Bousfield por la derecha de $\mathcal{C}$ respecto M, entonces el functor identidad $\mathcal{C} \to R_M\mathcal{C}$ es una localización por la derecha de $\mathcal{C}$ respecto M.*

Demostración. [7] Proposición 3.3.18. □

Existencia y propiedades de la localización de Bousfield

A continuación estudiaremos los teoremas de existencia de localizaciones de Bousfield por la izquierda y por la derecha de categorías de modelos. Para tener existencia se necesita que la categoría cumpla un par de hipótesis. La primera es que la categoría tiene que ser celular. La definición de que una categoría sea celular es muy técnica y nos desviaría del interés del trabajo. No obstante se sabe que las categorías de espacios topológicos y conjuntos simpliciales las dos son celulares, con lo que tendremos suficiente para esta memoria.

Teorema 4.2.9. *Las categorías de **Top**, **Top**$_*$, **sSets** y **sSets**$_*$ son celulares.*

Demostración. [7] Proposición 12.1.4. □

La segunda condición que tiene que verificar la categoría es que sea propia por la izquierda o por la derecha, dependiendo de por donde queramos localizar.

Definición 4.2.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos.*

1. *La categoría de modelos $\mathcal{C}$ es propia por la izquierda si todo pushout de una equivalencia débil por una cofibración es una equivalencia débil, es decir, si el siguiente diagrama es un pushout*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, "\sim"'] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

   entonces el morfismo de C a D también es una equivalencia débil.

2. *La categoría de modelos $\mathcal{C}$ es propia por la derecha si todo pullback de una equivalencia débil por una fibración es una equivalencia débil, es decir, si el siguiente diagrama es una pullback*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "\sim"] \\ B \arrow[r, two heads] & D \end{tikzcd}$$

   entonces el morfismo de A a B también es una equivalencia débil.

3. *La categoría de modelos $\mathcal{C}$ será propia si es propia por la izquierda y por la derecha.*

Teorema 4.2.11. *Las categorías de* ***Top***, ***Top***$_*$, ***sSets*** *y* ***sSets***$_*$ *son propias.*

Demostración. [7] Teoremas 13.1.11 y 13.1.13. □

Teorema 4.2.12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos celular y propia por la izquierda y sea S un conjunto de morfismos en $\mathcal{C}$. Entonces, la localización de Bousfield por la izquierda de $\mathcal{C}$ respecto de S, $L_S\mathcal{C}$, existe. Ademas,*

- *los objetos fibrantes de $L_S\mathcal{C}$ son los objetos S-locales de $\mathcal{C}$,*
- *$L_S\mathcal{C}$ es una categoría de modelos celular y propia por la izquierda, y*
- *si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos simplicial, entonces esta estructura dota a $L_S\mathcal{C}$ de estructura de categoría de modelos simplicial.*

Demostración. [7] Teorema 4.1.1. □

Teorema 4.2.13. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos celular y propia por la derecha y sea K un conjunto de objetos en $\mathcal{C}$ y M la clase de equivalencias K-locales. Entonces, la localización de Bousfield por la derecha de $\mathcal{C}$ respecto de M, $R_M\mathcal{C}$, existe. Ademas,*

- *los objetos cofibrantes de $R_M\mathcal{C}$ son los objetos M-locales de $\mathcal{C}$,*
- *$R_M\mathcal{C}$ es una categoría de modelos propia por la derecha. Si se tiene que todos los objetos de $\mathcal{C}$ son fibrantes entonces, $R_M\mathcal{C}$ es una categoría de modelos celular y propia por la derecha con todos los objetos fibrantes.*
- *si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos simplicial, entonces esta estructura dota a $R_M\mathcal{C}$ de estructura de categoría de modelos simplicial.*

Demostración. [7] Teorema 5.1.1. □

A continuación tenemos un resultado interesante de como se comporta ser propio por la derecha bajo localizaciones por la izquierda de Bousfield.

Proposición 4.2.14. *Si $\mathcal{C}$ es la categoría de los espacios topológicos punteados o la categoría de los conjuntos simpliciales punteados. Entonces, se tiene que la localización de Bousfield por la izquierda de $\mathcal{C}$ respecto M, $L_M\mathcal{C}$, es propia por la derecha si y solo si $M = \{f : A \to *\}$.*

Demostración. [1] Remark 9.11 □

4.3. Ejemplos de (co)localizaciones

En esta sección veremos como dos construcciones clásicas en la teoría de homotopía de espacios como las secciones de Postnikov y los recubridores conexos, pueden verse como casos particulares de localización y colocalización, respectivamente.

4.3.1. Aproximación de Postnikov

Definición 4.3.1 (Torre de Postnikov). *Sea X un espacio topológico. Un sistema de Postnikov para X es una secuencia*

$$\cdots \xrightarrow{q_n} P_nX \cdots \xrightarrow{q_2} P_2X \xrightarrow{q_1} P_1X \xrightarrow{q_0} P_0X$$

junto con morfismos $p_n : X \to P_nX$ tales que $q_{n-1} \circ p_n = p_{n-1}$ que ademas verifica que para todo punto base

- $\pi_m(P_nX) = 0, \forall m > n$
- $(p_n)_* : \pi_m(X) \xrightarrow{\cong} \pi_m(P_nX), \forall m \leq n.$

Localización

El objetivo de esta sección es probar que la n-esima sección de Postnikov $p_n : X \to P_nX$ es una f_n-localización respecto la inclusión en **Top** $f_n : S^{n+1} \to D^{n+2}$. Es decir, tenemos que ver que P_nX es f_n-local (Proposición 4.3.2) y que p_n es una equivalencia f_n-local (Proposición 4.3.5)

Notación 5. *Para no sobrecargar la notación, definimos dado $X \in$**Top** y $A \in$**sSets***

$$X \otimes A := X \times |A|,$$

donde $|\cdot|$ denota el functor de realización geométrica.

Proposición 4.3.2. *Sea $n \geq 0$ y $f_n : S^{n+1} \to D^{n+2}$ la inclusión en **Top**. Entonces, un espacio X es f_n-local si y solo si $\pi_iX = 0$, para todo $i > n$ y para todo punto base.*

Demostración. Consideremos las siguientes inclusiones

$$S^{n+1} \hookrightarrow^i D^{n+2} \in \mathbf{Top},$$

$$\partial\Delta[k] \hookrightarrow^j \Delta[k] \in \mathbf{sSets},$$

y el siguiente diagrama de pushout

$$\begin{tikzcd}
S^{n+1} \otimes \partial\Delta[k] \arrow[r, "i\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes j"'] & D^{n+2} \otimes \partial\Delta[k] \arrow[d, dotted] \arrow[ddr, bend left, "id\otimes j"] & \\
S^{n+1} \otimes \Delta[k] \arrow[r, dotted] \arrow[drr, bend right, "i\otimes id"'] & (\odot) \arrow[dr, dotted] & \\
 & & D^{n+2} \otimes \Delta[k],
\end{tikzcd}$$

donde $(\odot) = S^{n+1} \otimes \Delta[k] \coprod_{S^{n+1}\otimes\partial\Delta[k]} D^{n+2} \otimes \partial\Delta[k]$.

Si $k \geq 0$ se tiene que la inclusión

$$S^{n+1} \otimes \Delta[k] \coprod_{S^{n+1}\otimes\partial\Delta[k]} D^{n+2} \otimes \partial\Delta[k] \to D^{n+2} \otimes \Delta[k]$$

adjunta una celda de dimensión $n+k+2$ relativa a CW-complejos. Es decir, se tiene que $S^{n+1}\otimes\Delta[k]\coprod_{S^{n+1}\otimes\partial\Delta[k]} D^{n+2}\otimes\partial\Delta[k]$ es el borde de $D^{n+2}\otimes\Delta[k]$ y el morfismo corresponde a "rellenar" el interior de $S^{n+1}\otimes\Delta[k]\coprod_{S^{n+1}\otimes\partial\Delta[k]} D^{n+2}\otimes\partial\Delta[k]$ mediante la adjunción de una celda de dimensión $n+k+2$.

Por lo tanto, el morfismo

$$S^{n+1}\otimes\Delta[k]\coprod_{S^{n+1}\otimes\partial\Delta[k]} D^{n+2}\otimes\partial\Delta[k]\to X$$

se puede extender a $D^{n+2}\otimes\Delta[k]$ si y solo si $\pi_{n+k+1}X=0$ para todo punto base. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S^{n+1}\otimes\Delta[k]\coprod_{S^{n+1}\otimes\partial\Delta[k]} D^{n+2}\otimes\partial\Delta[k] \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \\
& D^{n+2}\otimes\Delta[k] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

si y solo si $\pi_iX=0$ para todo $i>n$. □

Con lo que el resultado se sigue de la siguiente proposición:

Proposición 4.3.3. *Si $f:A\to B$ es una inclusión de CW-complejos, entonces X es f-local si y sólo si el morfismo $X\to *$ tiene la RLP respecto a los elementos del conjunto de f-horns aumentados.*

Recordemos que son el conjunto de horns y el conjunto de horns aumentado.

Definición 4.3.4. *Sea $f:A\to B$ un morfismo inclusión de CW-complejos en **Top**.*

- *El conjunto de horns en f es el conjunto de morfismos*

$$\Lambda\{f\}=\{A\otimes\Delta[n]\coprod_{A\otimes\partial\Delta[n]} B\otimes\partial\Delta[n]\to B\otimes\Delta[n]|n\geq 0\}.$$

- *El conjunto de horns aumentado de f es el conjunto*

$$J_f=\Lambda\{f\}\cup\{|\Lambda[n,k])|\to|\Delta[n]|\mid n>0,\ n\geq k\geq 0\}$$

Demostración. Sabemos que X es f-local si y solo si X es fibrante, y el morfismo: $f_*: map(B,X)\to map(A,X)$ es una equivalencia débil en **sSets**. La primera parte sale de que exista una elevación en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda[n,k] \arrow[r] \arrow[d, tail, "\sim"'] & X \arrow[d, two heads] \\
\Delta[n] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & *
\end{tikzcd}$$

y la segunda condición sale de que una elevación en el diagrama

$$\begin{tikzcd} {|\partial\Delta[n]|} \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathcal{C}(B,X) \arrow[d, tail, "\sim"] \\ {|\Delta[n]|} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathcal{C}(A,X) \end{tikzcd}$$

es, por la adjunción $\mathbf{Top}(A\otimes X, Y) \cong \mathbf{sSets}(A, map(X,Y))$, lo mismo que una elevación en

$$\begin{tikzcd} A\otimes\Delta[n]\coprod_{A\otimes\partial\Delta[n]} B\otimes\partial\Delta[n] \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d] \\ B\otimes\Delta[n] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & * \end{tikzcd}$$

□

Proposición 4.3.5. *Sea $n \geq 0$ y sean $f_n : S^{n+1} \to D^{n+2}$ las inclusiones estándar en **Top**. Si $g : X \to Y$ induce isomorfismo entre $\pi_i X$ y $\pi_i Y$ para $i \leq n$ y cualquier punto base, entonces g es una equivalencia f_n-local.*

Demostración. En la categoría de espacios topológicos g es una equivalencia f_n-local si existe una aproximación cofibrante $\widetilde{g} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ de g tal que para todo Z espacio f-local $\widetilde{g} : map(\widetilde{Y}, Z) \to map(\widetilde{X}, Z)$ sea una equivalencia débil.

Si g induce isomorfismo entre $\pi_i X$ y $\pi_i Y$ para $i \leq n$ y todo punto base, entonces gracias al teorema de aproximación celular podemos elegir una aproximación cofibrante $\widetilde{g} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ de g tal que

1. $\widetilde{Y}$ sea CW-complejo
2. $\widetilde{g}$ inclusión de un subcomplejo que contiene el skeleton de $\widetilde{Y}$ de dimensión n.
3. toda célula de dimensión $n+1$ de $\widetilde{Y}\setminus\widetilde{X}$ es adjuntada via el morfismo constante de S^n.

Recordemos que el esqueleto de dimensión n de un CW-complejo es el conjunto de celdas de dimensión menor que n. Si $k = 0$ el morfismo

$$\widetilde{X}\otimes\Delta[k] \coprod_{\widetilde{X}\otimes\partial\Delta[k]} \widetilde{Y}\otimes\partial\Delta[k] \to \widetilde{Y}\otimes\Delta[k]$$

es justamente el morfismo $\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ y si $k > 0$ entonces es la inclusión de un subcomplejo que contiene el $(n+k)$-esqueleto. Entonces, si Z es un espacio f_n-local tenemos por la proposición 4.3.2 que todo morfismo $\widetilde{X}\otimes\Delta[k]\coprod_{\widetilde{X}\otimes\partial\Delta[k]}\widetilde{Y}\otimes\partial\Delta[k] \to Z$ puede extenderse a $\widetilde{Y}\otimes\Delta[k]$, y por lo tanto, g es una equivalencia f_n-local. □

Hasta aquí hemos comprobado el siguiente resultado

Teorema 4.3.6. *Si $n > 0$ y $f_n : S^{n+1} \to D^{n+2}$ es la inclusión estándar en **Top**, entonces la proyección de un espacio en la n-esima sección de Postnikov $p_n : X \to P_n X$ es una f_n-localización.*

Demostración. Consecuencia de las proposiciones 4.3.2 y 4.3.5 □

El objetivo de la siguiente proposición es comprobar una especie de reciproco, es decir, dado un morfismo que sea una equivalencia f_n-local nos induce isomorfismo en los grupos de homotopía hasta grado n.

Proposición 4.3.7. *Sea $n \geq 0$ y $f_n : S^{n+1} \to D^{n+2}$ la inclusión estándar en **Top**. Si $g : X \to Y$ es una equivalencia f_n-local, entonces g induce isomorfismo entre $\pi_i X$ y $\pi_i Y$ para $i \leq n$ y toda elección de punto base en X.*

Demostración. La aplicación $P_n g$ es una equivalencia homotópica porque es una f_n equivalencia entre objetos f_n-locales (por el Teorema 4.1.10). Para todo X la aplicación $X \to P_n X$ induce isomorfismo en los grupos de homotopía de dimensión menor o igual que n. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_i X \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_i Y \arrow[d, "\cong"] \\ \pi_i P_n X \arrow[r, "\cong \forall i"] & \pi_i P_n Y. \end{tikzcd}$$

Todos los morfismos son isomorfismos excepto el superior. Por lo tanto $g_* : \pi_i X \to \pi_i Y$ es un isomorfismo para $i \leq n$. □

4.3.2. Recubridor n-conexo

Definición 4.3.8 (Torre de Whitehead)**.** *Sea X un espacio topologico. Un recubridor n-connexo de X es un espacio $X\langle n\rangle$ junto con un morfismo $\alpha_n : X\langle n\rangle \to X$ que verifican*

- $\pi_i(X\langle n\rangle) = 0$, $\forall i \leq n$
- $\pi_i(X\langle n\rangle) \cong \pi_i(X)$, $\forall i > n$.

S^{n+1}-colocalización

El objetivo de esta sección es probar que el recubridor n-conexo $X\langle n\rangle \to X$ es una S^{n+1}-colocalización.
Es decir, queremos establecer el siguiente resultado:

Teorema 4.3.9. *Sea $A = S^{n+1}$*

(i) *$f : X \to Y$ es una equivalencia A-colocal si y sólo si $f_* : \pi_i X \to \pi_i Y$ es un isomorfismo para todo $i > n$.*

(ii) *X es A-colocal si y sólo si $\pi_i X = 0$, para todo $0 \leq i \leq n$*

Demostración. Para demostrar la parte **(i)**, observar que $f : X \to Y$ es una equivalencia S^{n+1}-colocal si y sólo si

$$f_* \colon map(S^{n+1}, X) \to map(S^{n+1}, Y)$$

es una equivalencia débil. O, equivalentemente, $\pi_{n+1+k}X \cong \pi_{n+1+k}Y$ para todo $k \geq 0$.

Para demostrar la parte **(ii)** vamos a utilizar que para cualquier espacio X tenemos una fibración de espacios topológicos ([6],Capítulo 3, Proposición B.3.)

$$C_n X\langle n\rangle \to X \to P_{n+1}X,$$

donde C_n es el funtor de reemplazo cofibrante de la estructura de modelos colocalizada $R_{S^n}\mathbf{Top}$. Si aplicamos esta fibración al espacio $X\langle n\rangle$ tenemos que $C_n X\langle n\rangle \simeq X\langle n\rangle$, ya que $P_{n+1}X\langle n\rangle \simeq *$.

Por otro lado, si X es S^{n+1}-colocal, entonce es cofibrante en $R_{S^n}\mathbf{Top}$, y por tanto $X \simeq C_n X$. Pero la aplicación $X\langle n\rangle \to X$ es una equivalencia S^{n+1}-colocal por el apartado **(i)**. Por lo tanto $X \simeq X\langle n\rangle$. $\square$

Capítulo 5

Estructuras de modelos como localización

En este capítulo usaremos las localizaciones de Bousfield por izquierda y por la derecha para llegar a demostrar que varias estructuras de categorías de modelos conocidas para espacios topológicos, que nos dan categorías homotópicas de tipos de homotopía truncados, son en efecto localizaciones.

5.1. Estructura de categoría de modelos para los n-tipos

Categoría de espacios topológicos

En el articulo [3] construyen, para cada $n \geq 0$, una estructura de modelos, para la categoría de los espacios topológicos, en la que las equivalencias débiles son los morfismos que inducen isomorfismo entre los grupos de homotopía de orden menor igual que n.

Definición 5.1.1. *Dado un morfismo $f : X \to Y$ (con $X \neq \emptyset$) en **Top** diremos que*

- *f es una n-equivalencia débil si, para todo $0 \leq i \leq n$ y todo punto $x \in X$ se tiene que el morfismo inducido*

$$\pi_i(f) : \pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, fx)$$

  es un isomorfismo. La identidad del conjunto vacío también es una n-equivalencia débil.

- *f es una n-fibración si f tiene la RLP respecto los morfismos $D^{k-2} \to D^k$ para $0 < k \leq n+1$ y $D^n \to \partial D^{n+2}$.*

- *f es una n-cofibración si tiene la LLP respecto todas las n-fibraciones triviales (n-fibraciones que son a la vez n-equivalencias débiles).*

Con estas clases de morfismos en [3] Teorema 2.2. demuestran el siguiente resultado

Teorema 5.1.2. *La categoría de los espacios topológicos **Top** con las clases de n-equivalencias débiles, n-cofibraciones y n-fibraciones tiene estructura de categoría de modelos, la denotaremos por $\boldsymbol{Top}_n$.*

En el articulo, establecen el resultado mediante la comprobación de todos y cada uno de los axiomas de las categorías de modelos (ver Definición 3.0.11).

Nuestro objetivo en esta sección es ver que también podemos construir una estructura de modelos, que tenga las mismas equivalencias débiles de manera formal utilizando la localización de Bousfield. Como las categorías homotópicas dependen solo de las equivalencias débiles, tendremos que la categoría homotópica construida en [3] y la construida mediante la localización serán equivalentes. Por lo tanto, en cuestiones de homotopía será lo mismo trabajar con una estructura que con la otra.

Tenemos por el Teorema 4.2.11 y 4.2.9 que la categoría de los espacios topológicos **Top** es celular y propia, en particular es propia por la izquierda.
Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 4.2.12 de existencia de localización de Bousfield por la izquierda.
Considerando la estructura de categoría de modelos para **Top** vista en la sección 3.3.1 y como conjunto de morfismos $M = \{f_n : S^{n+1} \to D^{n+2}\}$ obtenemos que L_M**Top** existe y que

- la clase de las equivalencias débiles de L_M**Top** es igual a la clase de equivalencias M-locales de **Top**,
- la clase de cofibraciones de L_M**Top** es la misma que la clase de cofibraciones en **Top**, y
- la clase de fibraciones de L_M**Top** es la clase de morfismos que tienen la propiedad RLP respecto los morfismos que son a la vez cofibraciones y equivalencias M-locales en **Top**.

Además, en la sección 4.3.1 hemos probado que las equivalencias M-locales son las que inducen isomorfismo en los grupos de homotopía de orden $i \leq n$.

Es decir, hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 5.1.3. *La localización de Bousfield por la izquierda de **Top** respecto $M = \{f_n : S^{n+1} \to D^{n+2}\}$, nos da una nueva categoría de modelos con*

- *la clase de las equivalencias débiles de L_M**Top** los morfismos que inducen isomorfismo en los grupos de homotopía de orden $i \leq n$,*
- *la clase de cofibraciones de L_M**Top** es la misma que la clase de cofibraciones en **Top** y*
- *la clase de fibraciones de L_M**Top** es la clase de morfismos que tienen la propiedad RLP respecto los morfismos que son a la vez cofibraciones y equivalencias M-locales en **Top**.*

Una cosa importante a notar es que las dos estructuras de modelos no son la misma. En el articulo [3] caracterizan las n-fibraciones triviales con la siguiente proposición.

Proposición 5.1.4. *Un morfismo es una n-fibración trivial si y solo si tiene la LLP respecto $\partial\Delta[k] \to \Delta[k]$, para $0 \le k \le n+1$.*

En cambio, las fibraciones triviales que hemos obtenido en L_M**Top** son mismas que en **Top**, y por lo tanto sabemos que son las que tienen la LLP respecto $\partial\Delta[k] \to \Delta[k]$, para todo k. Es decir, tenemos que

$$\text{fibraciones triviales } L_M\mathbf{Top} \subsetneq \text{fibraciones triviales } \mathbf{Top}_n, \tag{5.1.1}$$

o, equivalentemente,

$$\text{cofibraciones } \mathbf{Top}_n \subsetneq \text{cofibraciones } L_M\mathbf{Top}, \tag{5.1.2}$$

No obstante, hemos probado el siguiente resultado, que nos relaciona las dos estructuras de modelos.

Teorema 5.1.5. *Si consideramos los functores identidad*

$$id : \boldsymbol{Top}_n \rightleftarrows L_M\boldsymbol{Top} : id$$

tenemos que son una equivalencia de Quillen.

Demostración. La adjunción es un par de Quillen ya que $id : \mathbf{Top}_n \to L_M\mathbf{Top}$ conserva equivalencias débiles (ambas estructuras de modelos tienen las mismas equivalencias débiles) y cofibraciones (por la observación anterior).

Es además una equivalencia de Quillen por la Proposición 3.2.19, ya que los functores son los identidad y el reemplazo cofibrante es una equivalencia débil. ☐

Como resumen, hemos obtenido una estructura de modelos para **Top** mediante localización de Bousfield que tiene como equivalencias débiles los morfismos que inducen isomorfismo entre los grupos de homotopía de orden $i \le n$. Además, la estructura L_M**Top** es distinta a la de $\mathbf{Top}_n$, pero tenemos que los functores identidad entre L_M**Top** y $\mathbf{Top}_n$ son una equivalencia de Quillen.

Categoría de conjuntos simpliciales

En el articul [3], también construyen una estructura de modelos para los n-tipos de la categoría de los conjuntos simpliciales.

Definición 5.1.6. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo en la categoría de los conjuntos simpliciales diremos que*

- *f es una n-equivalencia débil si $|f| : |X| \to |Y|$ es una n-equivalencia débil en $\boldsymbol{Top}_n$,*
- *f es una n-fibración si tiene la RLP respecto los morfismos $V(p,k) \to \Delta[p]$ para $0 < p \le n+1$, $0 \le k \le p$ y respecto los morfismos $V(n+2,k) \to \partial\Delta[n+2]$, y*
- *f es una n-cofibración si tiene la LLP respecto todas las n-fibraciones triviales.*

Teorema 5.1.7. *La categoría de los espacios simpliciales **sSets** con las clases de morfismos descritas en la definición anterior tiene estructura de categoría de modelos, la denotaremos por $\mathbf{sSets}_n$.*

Empecemos recordando los siguientes functores, entre las categorías **Top** y **sSets**

- $Sing$:**Top**$\rightarrow$**sSets** functor singular.
- $|\cdot|$:**sSets**$\rightarrow$**Top** functor realización geométrica.

El functor singular pasa de un espacio topológicos X a un conjunto simplicial y está definido como $Sing_n(X) = \mathbf{Top}(\Delta[n], X)$.

La realización geométrica es la operación que construye de un conjunto simplicial X un espacio topológico $|X|$ obtenido a partir de interpretar cada n-símplice en X como un n-símplice topológico y uniéndolos entre ellos por sus bordes obteniendo un espacio topológico.

Lema 5.1.8. *Los functores $Sing(\cdot)$ y $|\cdot|$ son una equivalencia de Quillen.*

Demostración. [7] Ejemplo 8.5.22. □

A partir de la estructura de modelos $L_M\mathbf{Top}$ que le hemos dado a **Top** podemos construir una análoga para la categoría de los conjuntos, mediante la equivalencia de Quillen

$$|\cdot| : \mathbf{sSets} \rightleftarrows \mathbf{Top} : Sing$$

ya que esta, al localizar nos da que una nueva equivalencia de Quillen

$$|\cdot| : L_{\partial\Delta[n+2]\to\Delta[n+2]}\mathbf{sSets} \rightleftarrows L_{|\partial\Delta[n+2]|\to|\Delta[n+2]|}\mathbf{Top} : Sing.$$

Observemos que $|\partial\Delta[n+2]| = S^{n+1}$ y $|\Delta[n+2]| = D^{n+2}$, con lo que

$$L_{|\partial\Delta[n+2]|\to|\Delta[n+2]|}\mathbf{Top} = L_M\mathbf{Top}$$

construida anteriormente.

Ahora tenemos que $X \to Y$ en $L_{\partial\Delta[n+2]\to\Delta[n+2]}\mathbf{sSets}$ es una equivalencia débil si es una equivalencia $\partial\Delta[n+2]$-local, es decir, si

$$map(Y, Z) \to map(X, Z) \text{ equivalencia débil en } \mathbf{sSets}\ \forall Z\ \partial\Delta[n+2]\text{-local}$$

o lo que es lo mismo, por la equivalencia de Quillen, que

$$map(|Y|, |Z|) \to map(|X|, |Z|) \text{ equivalencia débil en } \mathbf{Top}$$

y sabemos que esto sucede justo cuando $|X| \to |Y|$ es una equivalencia S^{n+1}-local en **Top**.

Por lo tanto, tenemos que una aplicación $X \to Y$ es una equivalencia débil en $L_{\partial\Delta[n+2]\to\Delta[n+2]}\mathbf{sSets}$ si y sólo si su realización geométrica $|X| \to |Y|$ es una aplicación S^{n+1}-local en **Top**, y como los grupos de homotopía de un conjunto simplicial pueden definirse como los grupo de homotopía de su realización geométrica, tenemos que hemos construido una estructura de modelos para la categoría de conjuntos simpliciales con equivalencias débiles las que inducen isomorfismo entre los grupos de homotopía de orden menor que n.

5.2. Estructura de categoría de modelos para los espacios n-conexos

Categoría espacios topológicos punteados

En el articulo [4] construyen, para cada $n \geq 0$, una estructura de modelos, para la categoría de los espacios topológicos punteados, en la que las equivalencias débiles son los morfismos que inducen isomorfismo entre los grupos de homotopía de orden mayor que n.

Definición 5.2.1. *Dado un morfismo $f : X \to Y$ en **Top**, diremos que*

- *f es una equivalencia-n débil si, para todo $i \geq n$ y todo punto $x \in X$ se tiene que el morfismo inducido*

$$\pi_i(f) : \pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, fx)$$

  es un isomorfismo.

- *f es una fibración-n si f tiene la RLP respecto los morfismos*

$$|V(p, k)/sk_{n-1}V(p, k)| \to D^k$$

  para todo $p > n$ y $0 \leq k \leq p$.

- *f es una cofibración-n si tiene la LLP respecto todas las fibraciones-n triviales.*

Con estas clases de morfismos en [4] Teorema 1.3. demuestran el siguiente resultado

Teorema 5.2.2. *Para todo $n > 0$, la categoría de los espacios topológicos punteados **Top**$_*$ con las clases de equivalencias-n débiles, cofibraciones-n y fibraciones-n tiene estructura de categoría de modelos, que denotaremos por **Top**$_*^n$.*

En el articulo, establecen el resultado mediante la comprobación de todos y cada uno de los axiomas de las categorías de modelos 3.0.11.

Nuestro objetivo en esta sección es ver que podemos construir una estructura de modelos, mediante una localización de Bousfield, que también tenga de equivalencias débiles las equivalencias-n débiles.

Por el Teorema 4.2.11 y 4.2.9 tenemos que la categoría de los espacios topológicos **Top**$_*$ es celular y propia, en particular es propia por la derecha.
De este modo, podemos aplicar el Teorema 4.2.13 de existencia de localización de Bousfield por la derecha.
Considerando la estructura de categoría de modelos para **Top**$_*$ vista en la sección 3.3.1 y como conjunto de objetos $K = \{S^{n+1}\}$, denotemos por M el conjunto de las equivalencias K-colocales obtenemos que R_M**Top**$_*$ existe y que

- la clase de las equivalencias débiles de $R_M\mathcal{C}$ es igual a la clase de equivalencias M-colocales de **Top**$_*$,

- la clase de fibraciones de $R_M\mathbf{Top}_*$ es la misma que la clase de fibraciones en $\mathbf{Top}_*$, y
- la clase de cofibraciones de $R_M\mathbf{Top}_*$ es la clase de morfismos que tienen la propiedad LLP respecto los morfismos que son a la vez fibraciones y equivalencias M-colocales en $\mathbf{Top}_*$.

Además, en la sección 4.3.2 hemos probado que las equivalencias M-colocales son las que inducen isomorfismo en los grupos de homotopía de orden $i > n$.

Es decir, hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 5.2.3. *La localización de Bousfield por la derecha de $\boldsymbol{Top}_*$ respecto M, las equivalencias K-colocales con $K = \{S^{n+1}\}$ nos da una nueva categoría de modelos $R_M\boldsymbol{Top}_*$, con*

- *la clase de las equivalencias débiles de $R_M\boldsymbol{Top}_*$ los morfismos que inducen isomorfismo en los grupos de homotopía de orden $i > n$,*
- *la clase de fibraciones de $R_M\boldsymbol{Top}_*$ es la misma que la clase de fibraciones en $\boldsymbol{Top}_*$ y*
- *la clase de cofibraciones de $R_M\boldsymbol{Top}_*$ es la clase de morfismos que tienen la propiedad LLP respecto los morfismos que son a la vez fibraciones y equivalencias M-colocales en $\boldsymbol{Top}_*$.*

Observación 5.2.4. En el la sección 5.1 hemos demostrado el Teorema 5.1.5 que nos decía que los functores identidad entre las dos estructuras de modelos para los n-tipos eran una equivalencia de Quillen. En esta sección, aunque no lo demostraremos, seguramente hay un Teorema parecido entre la estructura de $\mathbf{Top}_*^n$ y $R_M\mathbf{Top}$.

Categoría de espacios simpliciales punteados

Con un razonamiento parecido al de la sección anterior mediante la equivalencia de Quillen de $Sing$ y $|\cdot|$ podemos construir una estructura de modelos para los conjuntos simpliciales n-conexos.

5.3. Estructura de categoría de modelos para los $[n, m]$-tipos

Categoría espacios topológicos punteados

Dados $m \geq n > 0$, en el articulo [5] muestran que existen dos estructura de categoría de modelos en la que las equivalencias débiles son los morfismos que inducen isomorfismo entre los grupos de homotopía de ordenes comprendidos entre n y m. Dependiendo de la elección de las fibraciones.

Definición 5.3.1. *Para todo par de enteros $m \geq n > 0$ consideraremos las siguientes familias de morfismos.*
Dado un morfismo $f : X \to Y$ en $\boldsymbol{Top}_*$, diremos que

- *f es una $[n,m]$-equivalencia débil si, para todo $n \leq i \leq m$ y todo punto $x \in X$ se tiene que el morfismo inducido*

$$\pi_i(f) : \pi_i(X,x) \to \pi_i(Y,fx)$$

es un isomorfismo.

- *f es una $[n,m]$-fibración si f tiene la RLP respecto las inclusiones*

$$|V(p,k)/sk_{n-1}V(p,k)| \to |\Delta[p]/sk_{n-1}\Delta[p]|$$

para todo p que verifique $n < p \leq m$ y $0 \leq k \leq p$, y respecto

$$|V(m+2,k)/sk_{n-1}V(m+2,k)| \to |\partial\Delta[m+2]/sk_{n-1}\partial\Delta[m+2]|$$

para $0 \leq k \leq m+2$.
Un morfismo que es a la vez una $[n,m]$-equivalencia débil y una $[n,m]$-fibración diremos que es una $[n,m]$-fibración trivial.

- *f es una $[n,m]$-cofibración si tiene la LLP respecto todas las $[n,m]$-fibraciones triviales.*
Un morfismo que es a la vez una $[n,m]$-cofibración y una $[n,m]$-equivalencia débil diremos que es una $[n,m]$-cofibración trivial.

Definición 5.3.2. *Para todo par de enteros $m \geq n > 0$ consideraremos las siguientes familias de morfismos.*
Dado un morfismo $f : X \to Y$ en $\boldsymbol{Top}_*$, diremos que

- *f es una $[n,m]'$-equivalencia débil si es una $[n,m]$-equivalencia débil.*

- *f es una $[n,m]'$-fibración si f si es una $[n,m]$-fibración y tiene la RLP respecto las inclusiones*

$$|\partial\Delta[p]/sk_{n-1}\partial\Delta[p]| \to |\Delta[p]/sk_{n-1}\Delta[p]|$$

para todo $p \geq m+2$.

Y de forma similar que en la definición anterior se definición anterior, definimos las $[n,m]'$-fibraciones triviales, las $[n,m]'$-cofibraciones y las $[n,m]'$-cofibraciones triviales.

Con estas clases de morfismos en [5] Teoremas 2.2. y 2.2.' demuestran los siguientes resultados

Teorema 5.3.3. *Para todo par de enteros $m \geq n > 0$, la categoría de los espacios topológicos $\boldsymbol{Top}_*$ con las clases de $[n,m]$-equivalencias débiles, $[n,m]$-cofibraciones y $[n,m]$-fibraciones tiene estructura de categoría de modelos.*

Teorema 5.3.4. *Del mismo modo, para todo par de enteros $m \geq n > 0$, la categoría de los espacios topológicos $\boldsymbol{Top}_*$ con las clases de $[n,m]'$-equivalencias débiles, $[n,m]'$-cofibraciones y $[n,m]'$-fibraciones tiene estructura de categoría de modelos.*

En el articulo, establecen el resultado mediante la comprobación de todos y cada uno de los axiomas de las categorías de modelos 3.0.11.

Nuestro objetivo en esta sección es ver que podemos obtener una estructura de modelos, mediante localización de Bousfield, que tenga como equivalencias débiles las $[n, m]$-equivalencias.

La idea es primero hacer una localización de Bousfield por la izquierda y luego hacerla por la derecha. La razón es que para poder aplicar los teoremas de existencia de localización de Bousfield por la izquierda (4.2.12) y por la derecha(4.2.13) necesitamos que la categoría de la que partimos sea propia por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Como tenemos que la categoría de espacios topológicos $\mathbf{Top}_*$ es propia y celular, podemos aplicar los dos teoremas.

Recordemos que en la proposición 4.2.14 hemos visto que la localización de Bousfield por la izquierda de una categoría propia es propia por la derecha si y sólo si la localización es una nulificación, es decir, localizamos respecto un morfismo $f : A \to *$.

Por lo tanto, tenemos que la categoría para los m-tipos construida en la sección 5.1 será propia por la derecha, gracias a la proposición 4.2.14, y podremos aplicar el teorema de existencia de localización de Bousfield por la derecha(4.2.13).

Repitiendo el proceso hecho en la sección 5.2 para la categoría $L_M\mathbf{Top}_*$ y considerando $K = S^n$ obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.3.5. *La localización de Bousfield por la izquierda y por la derecha (en este orden) de $\mathbf{Top}_*$ respecto $M = \{S^{m+1} \to D^{m+2}\}$ y respecto $K = \{S^n\}$ nos da una nueva categoría de modelos $R_K L_M \mathbf{Top}_*$, con*

- *la clase de las equivalencias débiles de $R_K L_M \mathbf{Top}_*$ los morfismos que inducen isomorfismo en los grupos de homotopía de orden entre n y m,*
- *la clase de fibraciones de $R_K L_M \mathbf{Top}_*$ es la misma que la clase de fibraciones en $L_M \mathbf{Top}_*$, es decir la clase de morfismos que tienen la propiedad RLP respecto los morfismos que son a la vez cofibraciones y equivalencias M-locales en $\mathbf{Top}_*$, y*
- *la clase de cofibraciones de $R_K L_M \mathbf{Top}_*$ es la clase de morfismos que tienen la propiedad LLP respecto los morfismos que son a la vez fibraciones y equivalencias débiles de $R_K L_M \mathbf{Top}_*$.*

Observación 5.3.6. En el la sección 5.1 hemos demostrado el Teorema 5.1.5 que nos decía que los functores identidad entre las dos estructuras de modelos para los n-tipos eran una equivalencia de Quillen. En esta sección, aunque no lo demostraremos, seguramente hay un Teorema parecido que nos relacione la categoría construida en el artículo [5] con la categoría del Teorema 5.3.5.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo he tenido la oportunidad de estudiar las categorías de modelos, un marco en teoría de categorías, que permite desarrollar la teoría de homotopía de forma abstracta. Por otro lado he estudiado las localizaciones de categorías de modelos, cuyo objetivo es construir una nueva estructura de modelos para la misma estructura con mas equivalencias débiles. En particular me he introducido en las localizaciones de Bousfield y he estudiado bajo que condiciones existen.

Las localizaciones de Bousfield me han permitido alcanzar los objetivos del trabajo, es decir, llegar a construir una estructura de categoría de modelos para espacios topológicos y conjuntos simpliciales para n-tipos, espacios n-conexos y para $[n, m]$-tipos.

En cierta forma podríamos decir que el trabajo no muere aquí. Después de haber alcanzado los objetivos se abren dos nuevas líneas que me empujan a seguir investigando en este campo.

La primera sería las dos observaciones que aparecen en el último capítulo, sobre la relación que hay entre las estructuras ya conocidas y las construidas en la memoria. Es decir, intentar ver si las dos estructuras son equivalentes en el sentido de Quillen.

La segunda sería darle uso a estas estructuras. Es decir, ya que he construido estas estructuras de modelos mediante localizaciones de Bousfield, usar este hecho para estudiar más a fondo las estructuras de tipos de homotopía truncados.

Bibliografía

[1] A.K. Bousfield. On the telescopic homotopy theory of spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 353(6):2391–2426, 2001.

[2] William G Dwyer and Jan Spalinski. Homotopy theories and model categories. *Handbook of algebraic topology*, 73:126, 1995.

[3] Carmen Elvira-Donazar and L.Javier Hernandez-Paricio. Closed model categories for the n-type of spaces and simplicial sets. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 118, pages 93–103. Cambridge University Press, 1995.

[4] J.Ignacio Extremiana, L.Javier Hernández, and M.Teresa Rivas. A closed model category for $(n-1)$-connected spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(11):3545–3553, 1996.

[5] J.Ignacio Extremiana, L.Javier Hernández, and M.Teresa Rivas. Closed model categories for $[n, m]$-types. *Theory and Applications of Categories*, 3(10):250–268, 1997.

[6] Emmanuel D Farjoun. *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization.* Springer, 2006.

[7] Philip S Hirschhorn. *Model categories and their localizations.* Number 99. American Mathematical Soc., 2009.

[8] Mark Hovey. *Model categories.* Number 63. American Mathematical Soc., 2007.