



UNIVERSITAT DE BARCELONA

Modelos de curva de luz de las supernovas de tipo I

Rosario López Hermoso

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tdx.cat) i a través del Dipòsit Digital de la UB (diposit.ub.edu) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX ni al Dipòsit Digital de la UB. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX o al Dipòsit Digital de la UB (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tdx.cat) y a través del Repositorio Digital de la UB (diposit.ub.edu) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR o al Repositorio Digital de la UB. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR o al Repositorio Digital de la UB (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tdx.cat) service and by the UB Digital Repository (diposit.ub.edu) has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized nor its spreading and availability from a site foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository is not authorized (framing). Those rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

UNIVERSIDAD DE BARCELONA FACULTAD DE FISICA
DEPARTAMENTO DE FISICA DE LA TIERRA Y DEL COSMOS

MODELOS DE CURVA DE LUZ DE LAS SUPERNOVAS DE TIPO I

Memoria presentada por Doña Rosario López Hermoso para
acceder al grado de Doctor en Ciencias, Sección Físicas

Barcelona, diciembre de 1984



41.471

TABLA VIII

INFLUENCIA DE LA OPACIDAD

| modelo | κ | R_p | V_p | L_{43} | T_e | T_e^* | M_B | M_V |
|--------|----------------------------|------------------------|-------------------|--------------------|-------|---------|--------|--------|
| | (cm^2/g) | (10^{15}cm) | (km/s) | (erg/s) | (K) | (K) | | |
| A | 0.1 | 1.3 | 11319 | 2.23 | 11733 | 17856 | -20.11 | -20.11 |
| A'' | 0.2 | 1.77 | 12144 | 1.73 | 9375 | 11711 | -19.62 | -19.81 |

Pueden apreciarse los efectos que produce un incremento de la opacidad comparando las dos filas de la Tabla VIII. En esencia, un incremento de la opacidad supone que el gas de una determinada zona tarda más tiempo en hacerse transparente a la radiación. En consecuencia, el máximo de luminosidad se retrasa (para un incremento de la opacidad en un 100%, el máximo se retrasa sólo un 3%). La variable más afectada es el radio fotosférico, que sufre un incremento de un 36%. Al estar localizada la fotosfera durante el máximo en una región más externa en el modelo de opacidad más elevada, corresponde a la misma una temperatura inferior (~20% y 34%, según se considere cuerpo negro o cuerpo negro truncado, respectivamente; la discrepancia de porcentaje el decremento de ambas temperaturas tiene su origen en que las correcciones a aplicar al cuerpo negro truncado son función de

la temperatura). La luminosidad queda reducida en un 22% respecto a la del modelo de opacidad menor. Las magnitudes absolutas son algo más altas en el modelo A" que en el modelo A ($\sim 2.5\%$ y 1.5% en M_B y M_V , respectivamente).

La velocidad de expansión en el máximo queda afectada por el aumento de κ de forma equivalente a como lo sería debido a un incremento del rendimiento energético α del mismo orden que el descrito en el punto anterior (el modelo A", al igual que el A', posee una velocidad de expansión un 7% superior a la del modelo A). Sin embargo, no son equivalentes los efectos provocados por un incremento de α o de κ en tiempos posteriores al máximo. En el primer caso, una velocidad de expansión más alta favorece que el gas se enfríe con mayor rapidez, lo que se traduce en un incremento de la pendiente del postmáximo de la curva de luz. En el segundo caso, predominan los efectos de una opacidad más alta sobre los de una velocidad de expansión mayor en cuanto a conseguir la transparencia de las capas más externas, con lo que se obtiene el efecto opuesto al caso anterior por lo que a la pendiente de la curva de luz se refiere.

La figura (19) representa las curvas de luz en la banda fotométrica B de los modelos A y A". Puede apreciarse que un aumento de la opacidad provoca una disminución de la pendiente del postmáximo, un decremento en la altura del máximo (como ya se ha indicado) y un ensanchamiento de la curva. En particular, la rama de subida es menos abrupta en el modelo A" que en el modelo A. Este último hecho no hace sino confirmar el efecto, ya comentado al tratar la formulación de los modelos iniciales, de que imponer un perfil inicial de temperaturas prácticamente isoterma puede dar lugar a luminosidades en el premáximo relativamente elevadas por haberse depositado un número mayor de fotones cerca de la superficie, lo que se traduce en una rama de subida en la curva de luz relativamente rápida. Al aumentar el valor de la opacidad este efecto se palía en parte y se traduce en la curva de luz en que la rama de subida es más suave.

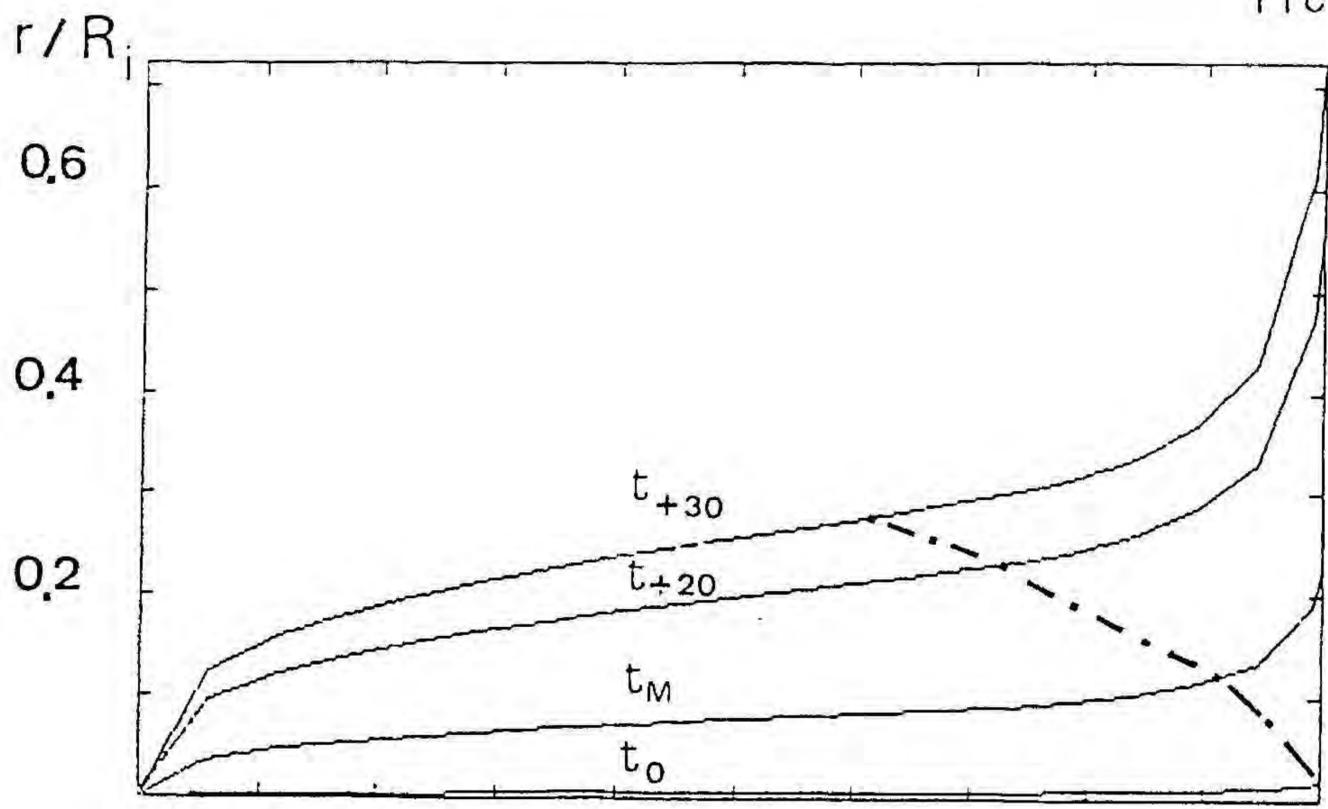


FIGURA 13 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 X_m

Perfiles de los radios, en función de la fracción de masa ($x = m / M$), en el instante inicial (t), durante el máximo (t_M), veinte (t_{+20}) y treinta días (t_{+30}) después del máximo para el modelo A. La curva a trazos discontinuos indica la evolución de la posición de la fotosfera.
 ($R_i = 10^{16}$ cm).

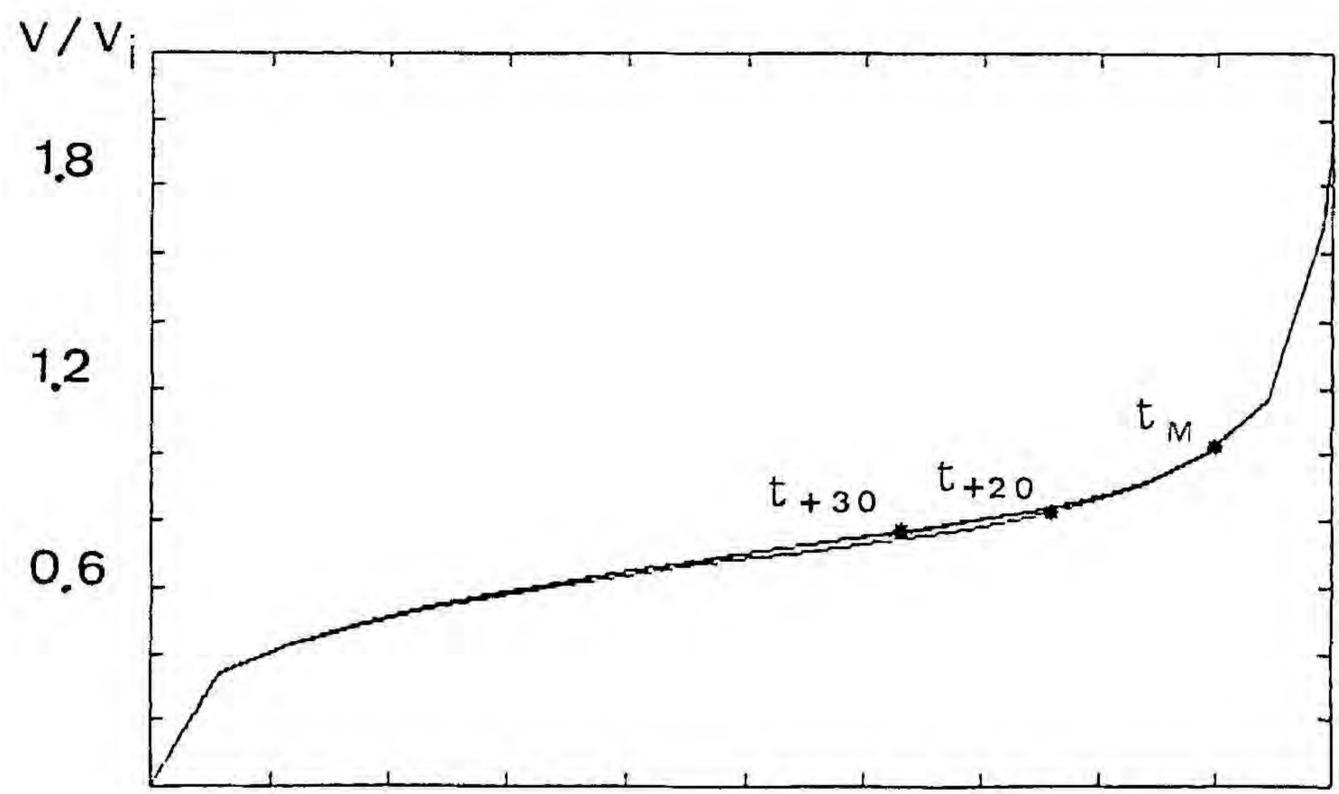


FIGURA 14 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 X_m

Perfiles de velocidad, en función de la fracción de masa ($x = m / M$), correspondientes al máximo, veinte y treinta días después de éste. El punto (.) indica la localización de la fotosfera.
 ($v_i = 10^9$ cm/s).

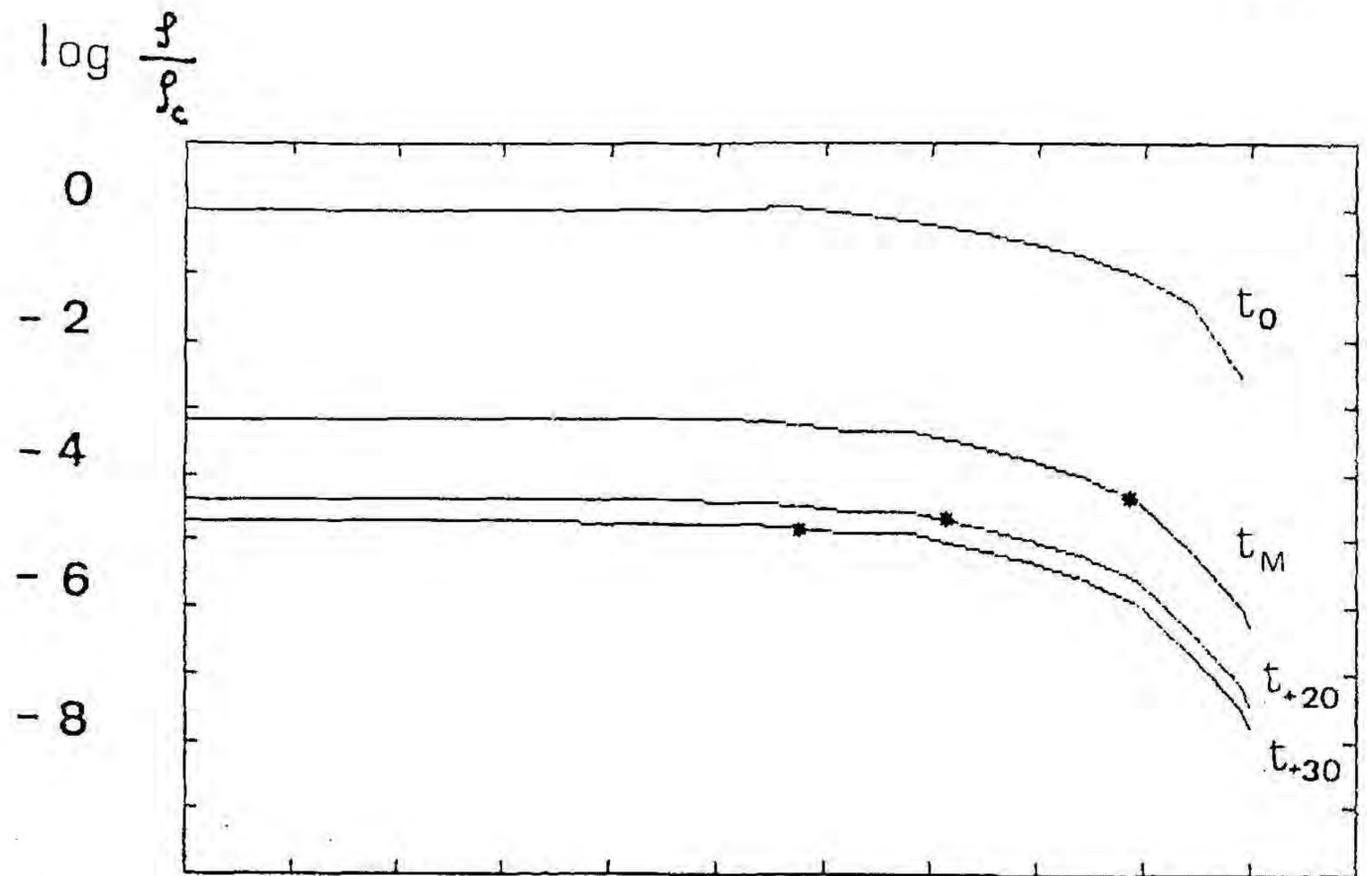


FIGURA 15

0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 X_m

Perfiles logarítmicos de densidad, en función de la fracción de masa ($x_m = m/M_T$) para el modelo A correspondientes al instante inicial, al máximo, veinte y treinta días posteriores al mismo. Se señala la posición de la fotosfera.

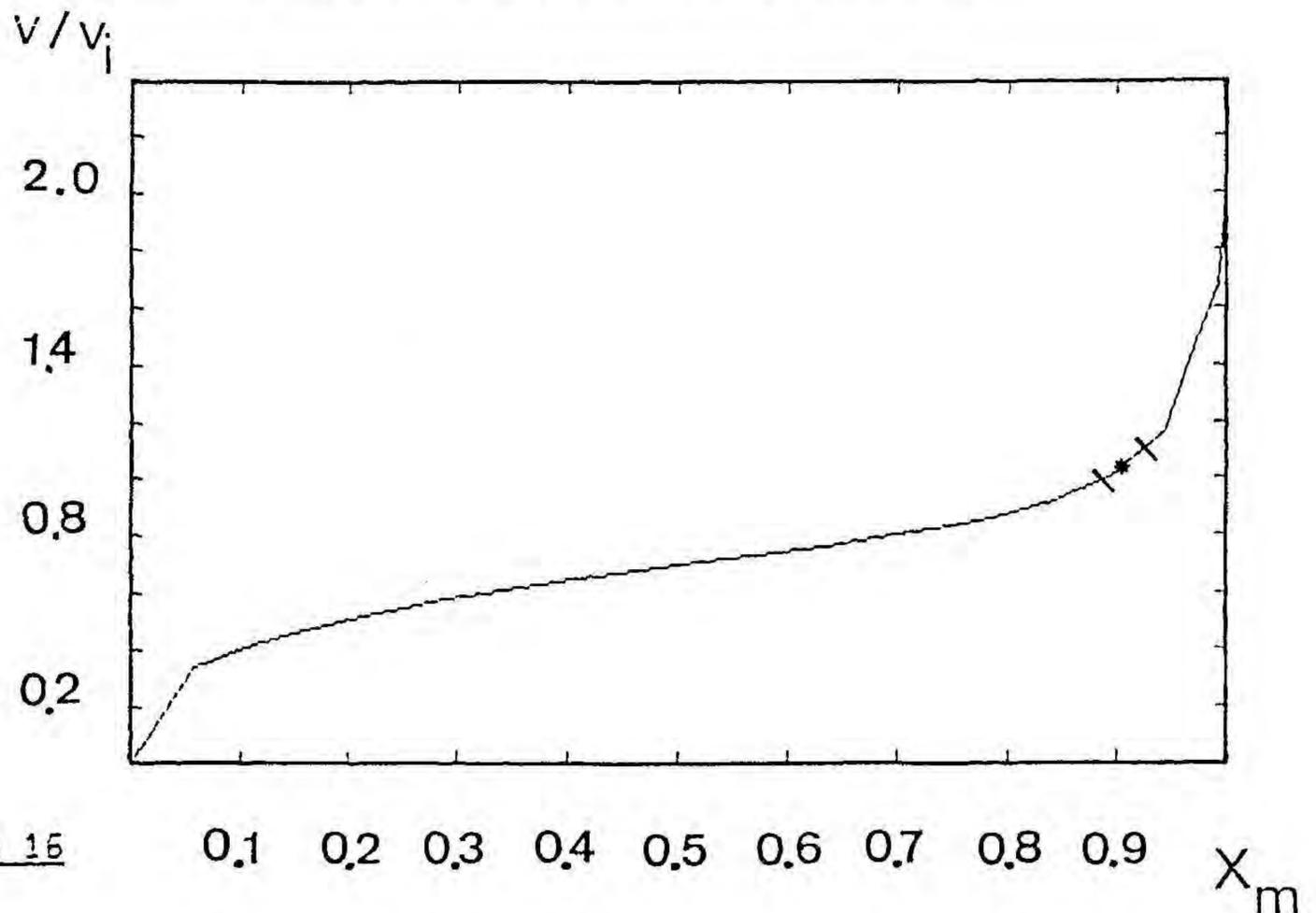


FIGURA 16

0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 X_m

Perfil de velocidad, en función de la fracción de masa, ($x_m = m/M_T$), correspondiente al modelo A durante el máximo óptico. Se indica la posición de la fotosfera (.) con un error de un 5% .

($v_i = 10^9$ cm/s)

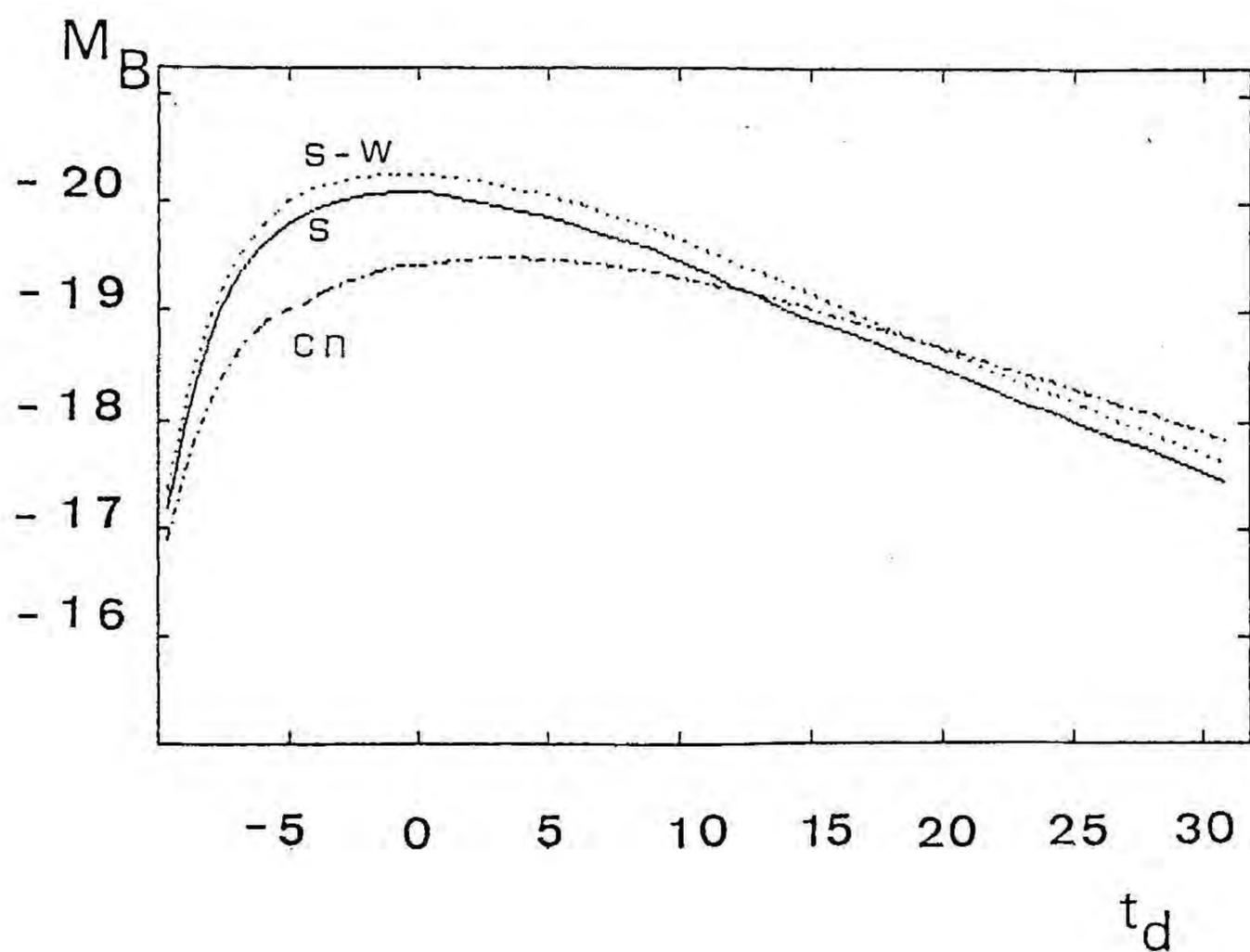


FIGURA 17

Curvas de luz, en la banda fotométrica B, del modelo A: para un cuerpo negro (CN), aplicando la corrección de Schurmann (1983) para un cuerpo negro truncado (S), id. con la corrección de Sutherland y Wheeler (1984) (S-W).

FIGURA 18

Curvas de luz en la banda fotométrica B correspondientes a un modelo con $M_{Ni} = 1 M_{\odot}$ y $M_{\oplus} = 1.4 M_{\oplus}$ para dos valores del rendimiento energético $\alpha = 0.85$ (modelo A) y $\alpha = 0.9$ (modelo A').

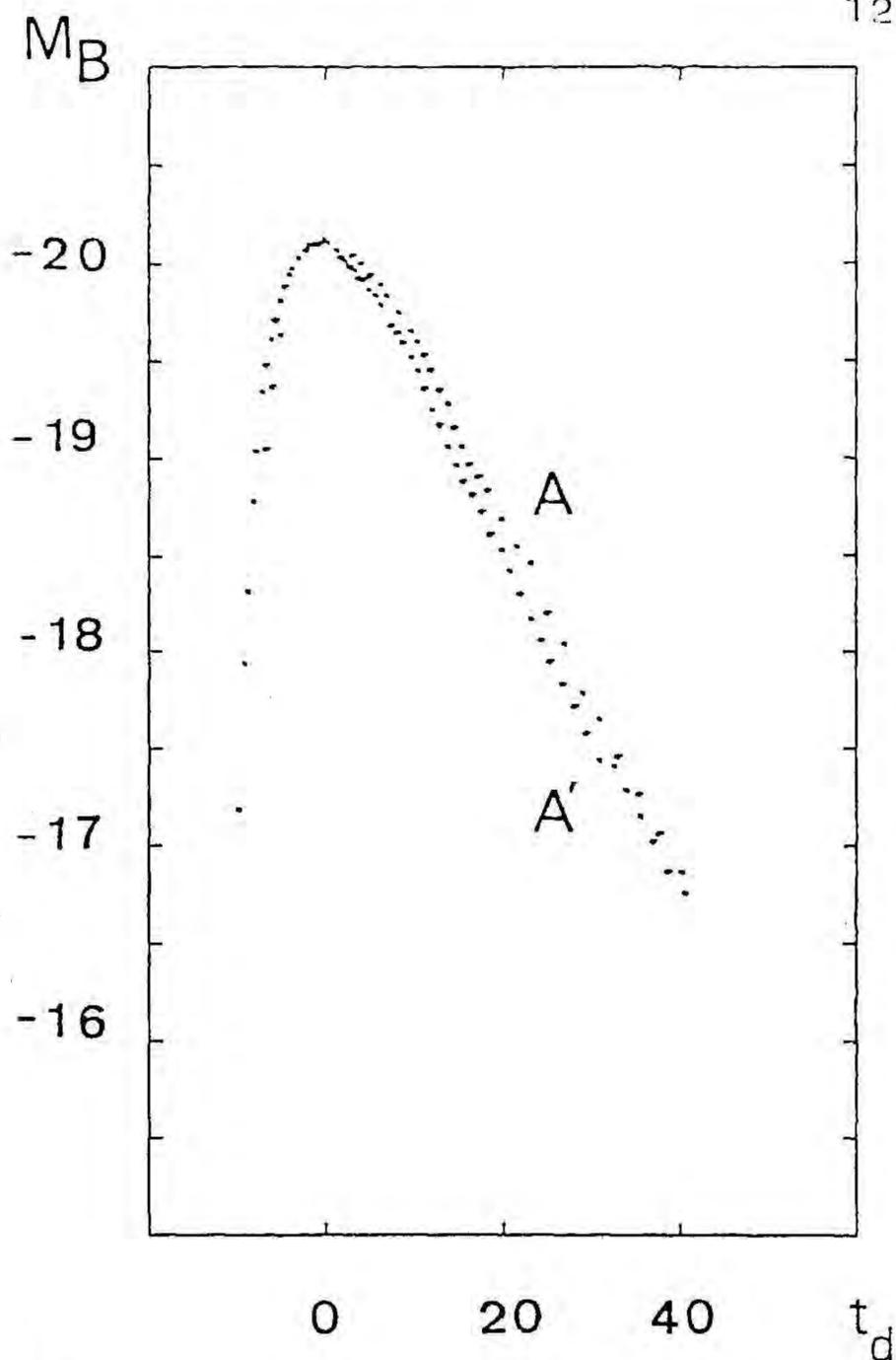
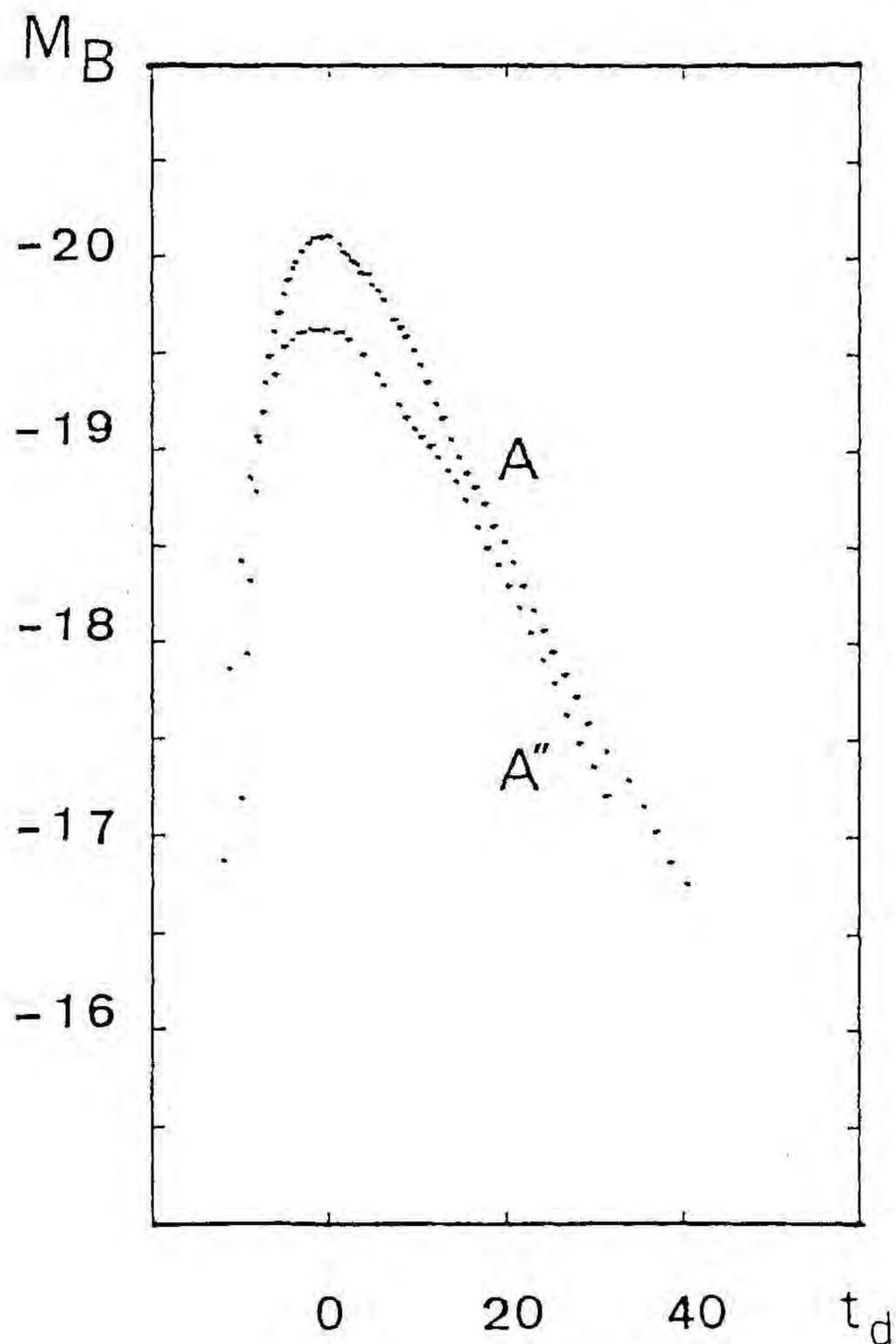


FIGURA 19

Curvas de luz en la banda fotométrica B para un modelo de $M_{Ni} = 1 M_{\oplus}$ y $M_{\oplus} = 1.4 M_{\oplus}$ para dos valores de la opacidad: $\kappa = 0.1 \text{ cm}^2/\text{g}$ (modelo A) y $\kappa = 0.2 \text{ cm}^2/\text{g}$ (modelo A'').



2.2 ESTUDIO COMPARATIVO DE MODELOS CON Y SIN RESIDUO : IMPLICACIONES.

Se presenta a continuación una síntesis de los resultados que se han obtenido y de las consecuencias que tiene considerar modelos en los que la explosión destruye toda la estrella o, por el contrario, deja un residuo ligado. Como se señaló anteriormente, los ocho modelos calculados se agrupan en dos secuencias, que pasamos a comentar.

2.2.1 MODELOS EN LOS QUE LA EXPLOSION DESTRUYE LA ESTRELLA

Los modelos que integran esta secuencia (A,b y c) tienen en común el hecho de considerar que la explosión destruyó por completo la enana presupernova. Por este motivo, el valor que toma la masa expulsada es común a todos ellos ($M_e \sim 1.4 M_\odot$). La característica diferencial es la masa de Ni, cuyo valor modificamos arbitrariamente con objeto de constatar los efectos observables que produce dicha variación.

En la Tabla IX figuran los valores que alcanzan las variables más características de cada modelo durante el máximo de luminosidad. En las primeras columnas aparecen los valores de la masa expulsada y de las masas de Ni que definen cada modelo. La terminología de las columnas restantes es idéntica a la que se utiliza en las Tablas VII y VIII.

TABLA IX

MODELOS EN LOS QUE LA EXPLOSION DESTRUYE LA ESTRELLA

| modelo | M_e | M_{Ni} | R_p | V_p | L_{43} | T_e | T_e^* | M_B | M_V |
|--------|-------------|-------------|------------------------|-----------------|------------------|--------------|--------------|--------|--------|
| | (M_\odot) | (M_\odot) | (10^{15} cm) | (km/s) | (erg/s) | (K) | (K) | | |
| A | 1.4 | 1.0 | 1.3 | 11319 | 2.23 | 11733 | 17856 | -20.11 | -20.11 |
| b | | 0.6 | 1.3 | 8217 | 1.17 | 9943 | 12964 | -19.24 | -19.37 |
| c | | 0.2 | 1.1 | 5970 | 0.41 | 8262 | 9586 | -17.86 | -18.19 |

En la figura (20) se han representado las curvas de luz de los tres modelos (la magnitud absoluta en la banda fotométrica B en función del tiempo, expresado en días, y tomando como origen el correspondiente al máximo).

De la observación de la tabla y de la figura se deduce que este tipo de modelos, en los que la explosión destruye toda la estrella, permite reproducir en promedio las características observacionales de la SN I pero, sin embargo, no es apto para dar cuenta del rango de variación que presentan estos objetos. En particular, el efecto Pskovskii-Branch no puede ser obtenido en base a este modelo de explosión de supernova, ya que el modelo carece de la suficiente flexibilidad para ello al fijar la masa expulsada. Quedaría el recurso de variar la masa de Ni sintetizado, pretendiendo conseguir de esta forma cierto rango de varia-

ción, pero las correlaciones que se obtienen entre la luminosidad en el máximo, la velocidad de expansión del material y la pendiente de la curva de luz van en sentido opuesto al mostrado por las observaciones. Las relaciones dimensionales de Arnett ayudan a comprender este comportamiento (véase II 4.). En efecto; conforme se recorre la Tabla IX desde el modelo A al c, la disminución de la masa de Ni sintetizado hace que disminuya la luminosidad en el máximo y la velocidad de expansión del material, de acuerdo con las observaciones que indican que las supernovas más brillantes son también las que presentan mayores velocidades de expansión. Sin embargo, en la fig. (20) se ve claramente cómo la disminución de la masa de Ni trae consigo una disminución de la pendiente de la curva de luz, de forma que las supernovas "rápidas" serían las más luminosas, al contrario de lo que se observa.

Incidentalmente, cabe señalar que el modelo c, donde sólo se han sintetizado $0.2 M_{\odot}$ de Ni, es incompatible con las observaciones de supernovas de tipo I según se deduce de los valores de su velocidad de expansión y de su temperatura efectiva correspondientes a la época del máximo de luminosidad.

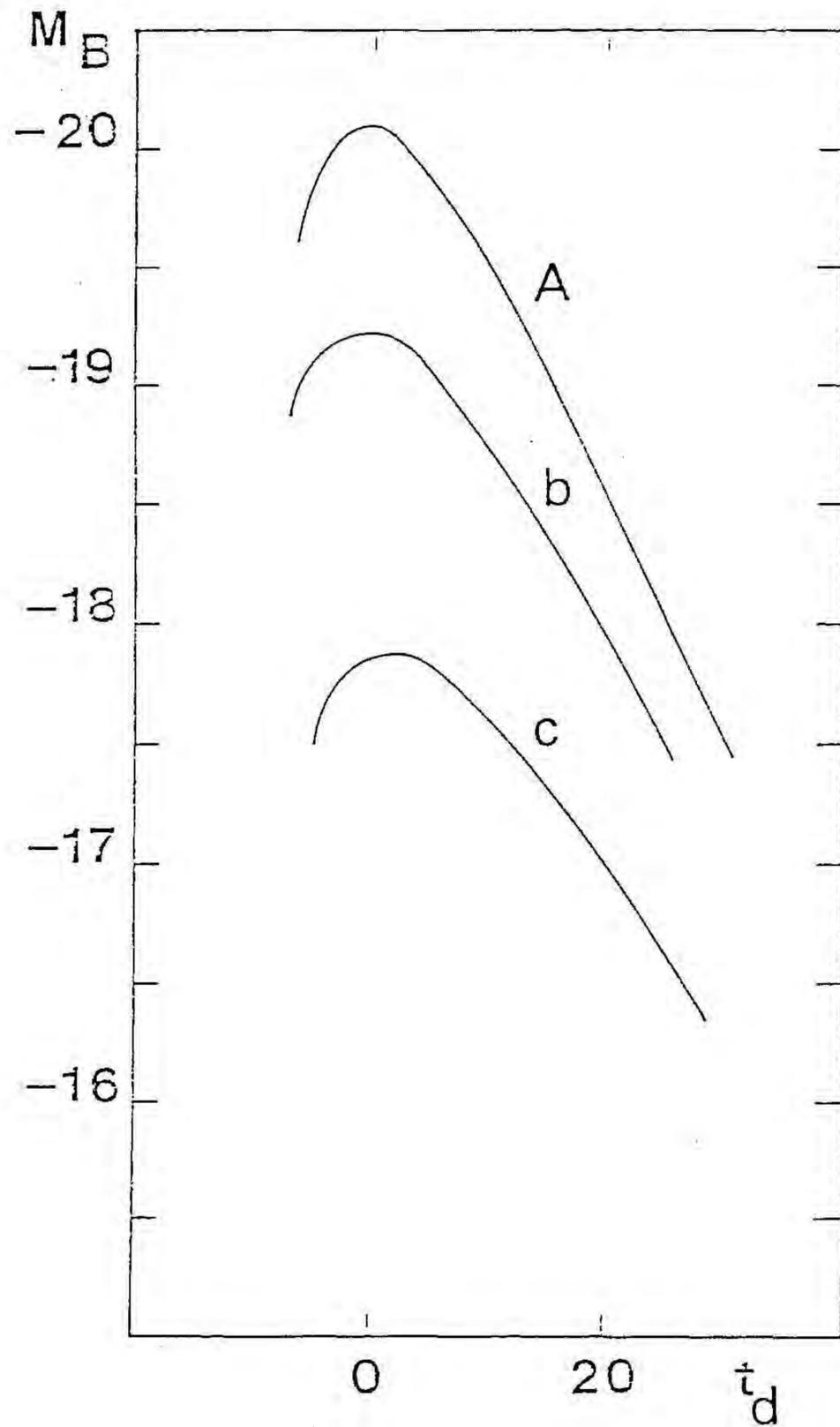


FIGURA 20

Curvas de luz correspondientes a los modelos de la primera secuencia (modelos en los que la explosión destruye la estrella).

2.2.2 MODELOS EN LOS QUE LA EXPLOSION DEJA UN RESIDUO LIGADO

La segunda secuencia está formada por los modelos A a F. Las características de los mismos en la época del máximo se exponen en la Tabla X y sus curvas de luz en la banda fotométrica B en la figura (21).

TABLA X

MODELOS QUE DEJAN UN RESIDUO LIGADO

| Modelo | M_e | M_{Ni} | R_p | V_p | L_{43} | T_e | T_e^* | M_B | M_V |
|--------|-------------|-------------|------------------------|-----------------|------------------|--------------|--------------|--------|--------|
| | (M_\odot) | (M_\odot) | (10^{15} cm) | (km/s) | (erg/s) | (K) | (K) | | |
| A | 1.4 | 1.0 | 1.30 | 11319 | 2.23 | 11733 | 17856 | -20.11 | -20.11 |
| B | 1.2 | 0.8 | 1.17 | 10679 | 1.81 | 11651 | 17595 | -19.87 | -19.88 |
| C | 1.0 | 0.6 | 1.11 | 10370 | 1.42 | 11275 | 16450 | -19.57 | -19.61 |
| D | 0.8 | 0.4 | 0.96 | 9515 | 1.09 | 11331 | 16616 | -19.28 | -19.32 |
| E | 0.6 | 0.2 | 0.88 | 7649 | 0.57 | 10066 | 13252 | -18.47 | -18.61 |
| F | 0.4 | 0.1 | 0.68 | 7026 | 0.35 | 10145 | 13440 | -17.95 | -18.08 |

Los modelos de esta secuencia han sido diseñados teniendo en cuenta los resultados preliminares de cálculos sobre el comportamiento frente a la acreción de enanas blancas con un núcleo sólido (Isern et al., 1984). Es particularmente importante tener presente que la explosión puede dejar un residuo ligado, cuya masa depende de la historia previa del sistema en que se asienta la presupernova (eventualmente, y como caso particular, la explosión puede destruir toda la estrella).

En este tipo de modelos, la masa expulsada en la explosión no es siempre la misma, a diferencia de lo que ocurre en los modelos de explosión de supernova de la primera secuencia. Se consigue por ello un marco más flexible, ya que son dos los parámetros que han de tenerse en cuenta para caracterizar cada modelo: la masa expulsada y la masa de Ni. Como se dijo en su momento, esta última no se ha variado "ad hoc", sino teniendo en cuenta los resultados preliminares de los cálculos anteriormente citados, de manera que se ha considerado que las $0.4 M_{\odot}$ más externas de la estrella no han sido procesadas .

De la simple inspección de la Tabla X puede inferirse cómo la variación de ambas masas (la expulsada y la de Ni) provoca el que se respete la correlación observacional entre la luminosidad en el máximo y la velocidad de expansión del material: conforme se va del modelo A al modelo F, disminuye la luminosidad y crecen las magnitudes absolutas a la vez que decrece las velocidades con las que se desplaza el material. Sin embargo, las pendientes de las curvas de luz no disminuyen al movernos desde el modelo A al modelo F, según puede apreciarse en la figura 21. De esta forma, las supernovas "lentas" son más luminosas y poseen mayores velocidades de expansión que las "rápidas", menos brillantes y con velocidades de expansión más bajas, tal como corresponde a los resultados de las observaciones.

Como se muestra en la figura (22), el modelo de explosión de supernova en que se basan los modelos de la segunda secuencia permite obtener curvas de luz capaces de ajustarse a las curvas de luz promedio de las supernovas "rápidas" y "lentas" construídas a partir de las observaciones. En la citada figura, aparecen las curvas de luz en la banda fotométrica B correspondientes a los modelos A y E (trazo continuo), a las que se han superpuesto las curvas de luz compuestas obtenidas por Barbon, Ciatti y Rosino (1973) para las supernovas rápidas y para las lentas. Dado que las curvas de luz compuestas no están calibradas en magnitudes absolutas y con esta figura sólo pretendemos comparar las pendientes de la región postmáximo, las hemos ajustado de forma que coincidan los máximos de las curvas de luz teóricas y observacionales. Puede apreciarse el buen acuerdo que existe entre las pendientes de las curvas teóricas y de las curvas promedio.

Hubiera sido conveniente encontrar el valor del parámetro β , que Pskovskii y Branch utilizan para clasificar la rapidez de las curvas de luz, en cada uno de nuestros modelos así como la relación de dicho parámetro con los valores de las masas expulsadas y de Ni. Ello nos habría permitido una mejor conexión entre modelos teóricos y sus consecuencias observables a la vez que comparar de forma más directa los resultados de los modelos con el efecto Pskovskii-Branch. No hemos podido asignar una β a cada curva de luz proporcionada por un modelo teórico. Ello se debe fundamentalmente a que no nos es posible determinar con exactitud el punto de inflexión de la curva de luz, necesario para el cálculo de β , debido a que el inicio de la "cola" de la curva de luz, alrededor de 30 días después del máximo, coincide con la época en la que la aproximación de difusión para el transporte de radiación deja de ser válida y el modelo construído pierde fiabilidad. En su defecto, hemos optado por comprobar que los modelos de la segunda secuencia se ajustan, dentro del rango de las incertidumbres, a la relación velocidad de expansión - magnitud absoluta en el máximo deducida a partir de las observaciones, tal como se expone seguidamente.

De los trabajos de Branch (1982) se deducen las relaciones (1) y (2) entre la velocidad de expansión y β y entre la magnitud absoluta en el máximo y dicho parámetro β , respectivamente (véase I 3.2.3). Si eliminamos β entre ambas, resulta la relación

$$M_B = -19.69 + 0.22 (20.3 - v_g / 0.05) + 5 \log(H_0 / 50) \quad (45)$$

donde el segundo sumando permite establecer la variación experimentada por la magnitud en el caso de considerar valores de la constante de Hubble diferentes de $H_0 = 50$ km/s/Mpc.

La figura (23) compara los resultados de los modelos de la segunda secuencia con la relación observacional velocidad-magnitud (45). Se representa mediante una línea continua la citada relación para un valor de $H_0 = 50$ km/s/Mpc. Dado que existe una dispersión de $\sim \pm 0.5$ en la determinación de las magnitudes en el máximo y la determinación de la velocidad de expansión viene afectada por un error de $\sim \pm 800$ km/s, se ha señalado mediante líneas de puntos cómo afectan dichas incertidumbres a la relación (45). La posición en el plano velocidad-magnitud de los modelos integrantes de la segunda secuencia se indica mediante un punto. Los modelos homólogos al A y al E, pero calculados con un valor del rendimiento energético diferente ($\alpha = 0.9$) se señalan con una X. La línea vertical punteada, que corresponde un valor de $\beta = 10$, valor que normalmente se acepta como límite de separación entre las supernovas rápidas y las lentas, divide el plano velocidad-magnitud en dos regiones. Las supernovas lentas, con $\beta \leq 10$, quedan situadas en el semiplano de la derecha y en el de la izquierda estarían localizadas las rápidas, con $\beta \geq 10$.

Queda patente en esta figura cómo los modelos A a E se ajustan razonablemente bien a la relación velocidad-magnitud. El modelo E está muy en el límite de la región enmarcada por dicha relación; no obstante, teniendo en cuenta las incertidumbres, puede ser considerado como el caso extremo de las SN I "rápidas", hecho que también puede apreciarse a través de su curva de luz (figs. (21) y (22)). Por el contrario, el modelo F no muestra un comportamiento típico de una supernova de tipo I, según se encuentra situado en el plano v-M; en cambio, podría ser representativo de un colapso "suavemente explosivo".

Cabe señalar que, en líneas generales, los modelos se encuentran ligeramente por debajo de la línea que representa la relación v-M (45) con $H_0 = 50$ km/s/Mpc por lo que respecta a su luminosidad. Estos mismos modelos se situarían sobre dicha línea tomando para H_0 un valor de 55 km/s/Mpc. Los modelos de explosión de supernova propuestos son incompatibles con $H_0 = 100$ km/s/Mpc. En estas condiciones se requieren cantidades inferiores de Ni con tal de ajustar las magnitudes resultantes, pero ello supondría obtener velocidades de expansión demasiado bajas, con lo que los modelos no estarían situados sobre la línea v-M correspondiente a $H_0 = 100$ km/s/Mpc., sino a su derecha, a menos que jueguen otros mecanismos en la formación del residuo ligado no previstos en este modelo, tales como una transferencia de momento a las capas externas del objeto o bien que la explosión sólo afecte a las capas más superficiales.

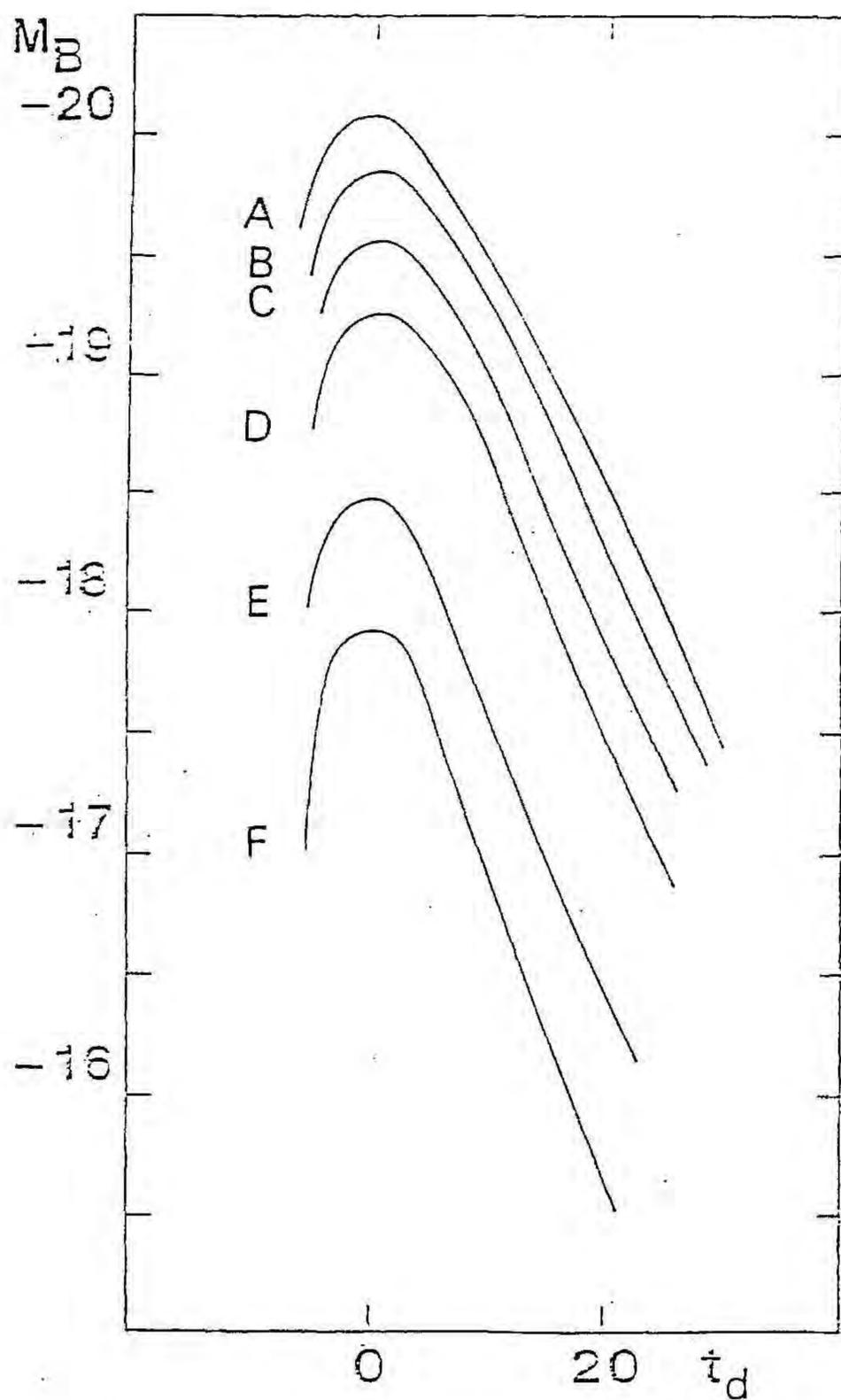


FIGURA 21

Curvas de luz correspondientes a los modelos de la segunda secuencia (modelos en los que la explosión deja un residuo ligado).

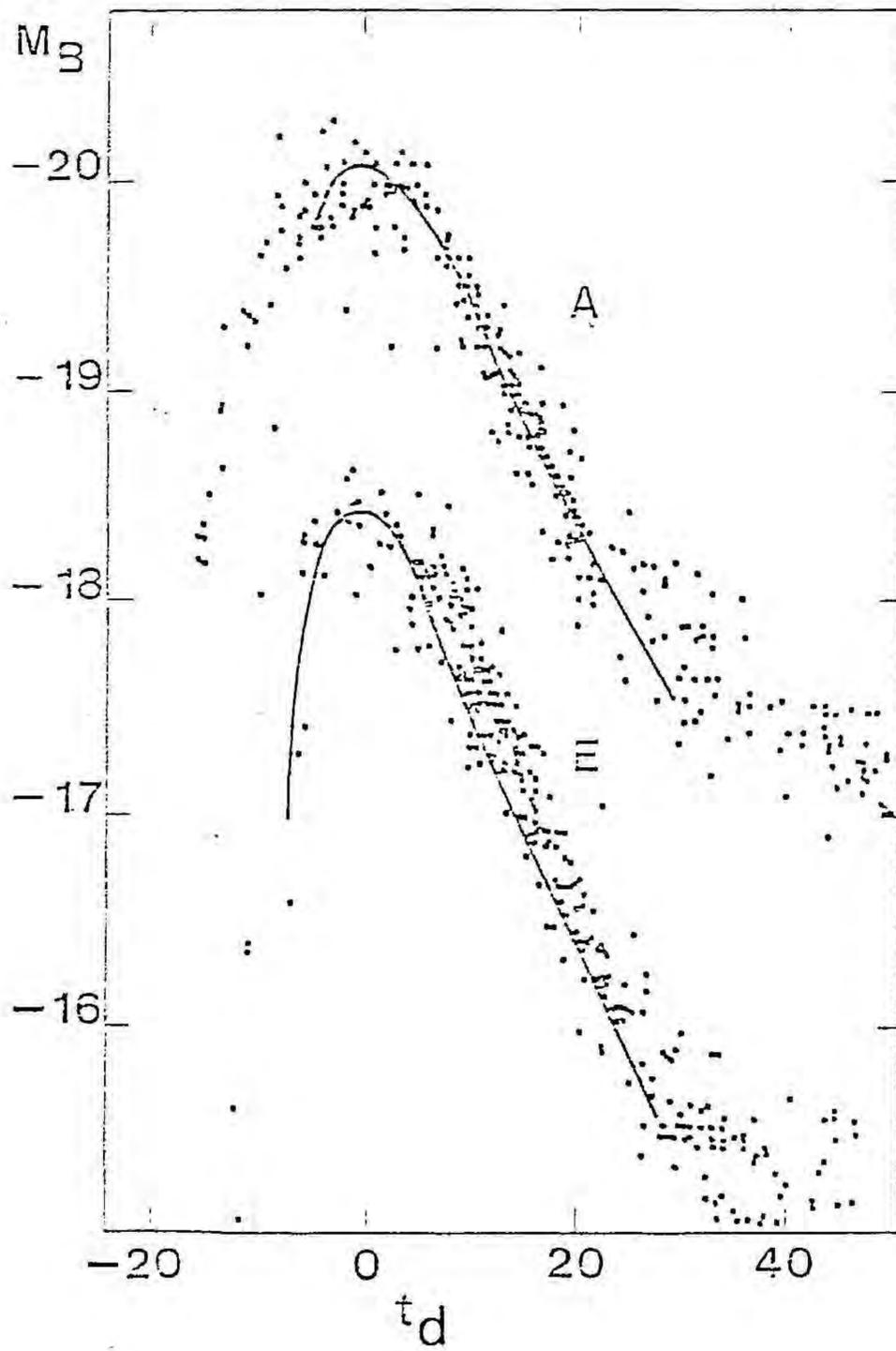
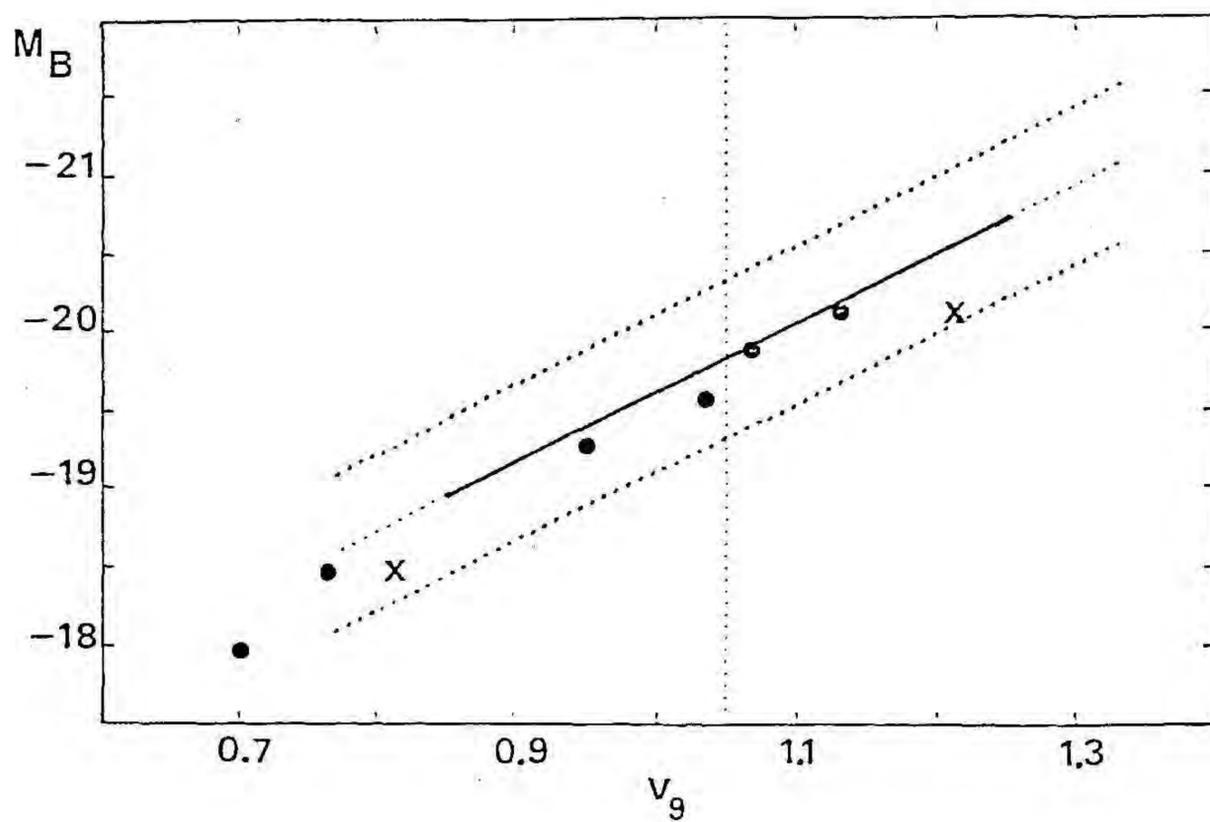


FIGURA 22

Curvas de luz en la banda fotométrica E de los modelos A y E sobrepuestas a las curvas de luz compuestas (nubes de puntos) de las supernovas "lentas" y "rápidas" de Barbon, Ciatti y Rosino (1973).

FIGURA 23

Diagrama magnitud absoluta en la banda fotométrica B - velocidad de expansión del material (en unidades de 10^5 cm/s) para las SN I durante el máximo óptico. La línea continua da la relación observacional velocidad - magnitud para $H_0 = 50$ km/s/Mpc. Las líneas punteadas indican la dispersión, en velocidad y magnitud, de los valores observados. La línea vertical punteada señala la separación entre las SN I rápidas y las lentas ($\beta = 10$).



V.- CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha construido un modelo numérico para obtener la curva de luz de una explosión de supernova de tipo I. Las hipótesis introducidas hacen que el modelo sea válido hasta el inicio del declive exponencial de la curva de luz, unos treinta días después de haberse producido el máximo óptico. Los resultados que se presentan indican que dicho modelo es capaz de reproducir el comportamiento cualitativo y cuantitativo de los observables más característicos del fenómeno: forma de la curva de luz, altura y anchura de su máximo, velocidad de expansión del material, etc.

El interés de este modelo radica esencialmente en que no sólo permite obtener las características medias de una explosión de supernova de tipo I, como ocurre con los modelos formulados hasta la fecha, sino que, además, reproduce el rango de variación y las correlaciones entre luminosidad en el máximo, velocidad de expansión del material y pendiente del postmáximo de la curva de luz que muestran las observaciones (efecto Pskovskii - Branch), cosa que los restantes modelos no logran.

Es un hecho comunmente aceptado que la curva de luz de una explosión de supernova de tipo I necesita ser explicada en base al proceso de desintegración radioactiva del ^{56}Ni . A grandes rasgos, puede decirse que la energética (curva de luz y velocidad de expansión, principalmente) de cada modelo de explosión está determinada por los valores de la masa de ^{56}Ni generado y de la masa que se expulsa en la explosión.

Los modelos propuestos por otros autores consideran como origen de las SN I la explosión de una enana blanca masiva, miembro de un sistema doble, y suponen que dicha explosión destruye la estrella por completo. Estos modelos fijan el valor de

la masa expulsada (que es la masa total de la estrella), obteniéndose de esta forma una configuración única, incapaz de reflejar el rango de variación que aparece en el efecto Pskovskii - Branch. La secuencia de modelos (A, b, c) es prueba de ello.

Por el contrario, en el modelo de curva de luz de supernovas de tipo I que presentamos, se admite que la explosión puede dejar un residuo ligado, tal como sugieren los modelos que toman en consideración el estado físico del interior de las enanas blancas. De esta manera, la masa expulsada en cada explosión no es un valor constante y el modelo puede reproducir el comportamiento aparentemente contradictorio de las supernovas rápidas y las lentas, tal como se muestra con la secuencia de modelos A - F.

El modelo propuesto en este trabajo goza de ciertas ventajas, a la vez que repercute en diferentes campos:

.En primer lugar, nuestro modelo refuerza la verosimilitud del escenario constituido por un sistema binario en el que hay una enana blanca masiva de C-O que ha tenido tiempo de enfriarse y desarrollar un núcleo sólido antes de comenzar a capturar materia, expuesto en los trabajos de Canal, Isern y Labay.

En general, una enana blanca masiva es un objeto que puede poseer un núcleo sólido cuyo tamaño depende de la historia previa del sistema. Los modelos de explosión de supernova de tipo I que se han venido proponiendo consideran que el interior de la enana es completamente fluido, lo cual no es sino un caso particular, con el inconveniente de que la explosión origen del fenómeno SN I destruye toda la estrella y la cantidad de materia expulsada es la misma siempre.

En cambio, tener presente la existencia de un núcleo sólido en la enana, más o menos extenso, aparte de situarnos en el caso general, permite que se expulsen cantidades diferentes de materia y se sinteticen cantidades variables de Ni en cada explosión, de acuerdo con el tamaño del núcleo sólido. Con ello

queda cubierto de manera natural el marco de condiciones que requiere el modelo propuesto en este trabajo.

.En segundo lugar, aceptar el modelo de explosión de SN I propuesto, dentro del marco de los sistemas binarios con enanas blancas de núcleo sólido, posee la ventaja de unificar bajo un mismo tipo de mecanismo el origen de las supernovas de tipo I y el de las fuentes compactas de rayos X del bulbo galáctico (Canal et al. 1984).

.Una consecuencia observable de este modelo es que algunas SN I (las más rápidas) dejan un residuo ligado, que no necesariamente ha de ser una estrella de neutrones. Sería altamente interesante confirmar si la estrella azul caliente identificada como una enana blanca o una subenana de los últimos tipos O o primeros tipos B por Schweizer y Middleditch (1980) cerca del centro de la explosión de la SN del 1006 es el residuo ligado de dicha explosión.

.El que algunas explosiones de SN I dejen residuo debe repercutir en un menor aporte de elementos del pico del hierro a la galaxia procedente de este tipo de acontecimientos.

El modelo de explosión de supernova que se propone parece incompatible con valores elevados de la constante de Hubble; en particular, lo es con $H_0 = 100$ km/s/Mpc, pues la cantidad de níquel necesaria para producir las luminosidades registradas proporcionaría velocidades de expansión bajas en exceso para considerarlas compatibles con las observaciones. En cambio, el modelo y la relación empírica Pskovskii - Branch (teniendo en cuenta las incertidumbres que ésta lleva consigo) dan para la constante de Hubble valores comprendidos entre 50 y 65, obteniéndose el mejor ajuste para $H_0 = 55$ km/s/Mpc. Sería pues de gran utilidad reducir los márgenes de incertidumbre que lleva consigo el efec-

to Pskovskii - Branch mejorando las observaciones de las SN I. En particular, sería altamente aconsejable disponer de buenas observaciones fotométricas y espectroscópicas de estos objetos durante su máximo de luminosidad.

Como ya se ha mencionado, la curva de luz antes del máximo que se obtiene en estos modelos presenta una subida algo brusca. Este efecto transitorio, consecuencia de haber depositado un exceso de fotones en las capas más externas al tomar perfiles iniciales de temperatura prácticamente isoterms (efecto que, por otra parte, no afecta a los resultados obtenidos a partir del máximo) así como la incertidumbre adicional que supone el parámetro α (o rendimiento energético) hacen altamente aconsejable la construcción de modelos autoconsistentes que abarquen todo el proceso de la explosión.

Utilizar β como parámetro de clasificación de la "rapidez" o "lentitud" de las SN I presenta el inconveniente de que, en muchas ocasiones, la curva de luz observada no tiene definidos exactamente su máximo y su punto de inflexión pero, sobre todo de que, aun sabiendo que el valor de dicho parámetro β se encuentra intrínsecamente relacionado con las características de la física de la explosión (en particular, con la masa de Ni y con la masa expulsada), no se ha determinado su relación cuantitativa con las mismas. Sería de gran interés encontrar la forma de asignar unívocamente una curva de luz analítica a cada SN I, de manera que fuese posible escribir un signo de igualdad en las relaciones (I) a (III). De esta forma, modelos teóricos y observación quedarían conectados más directamente y la clasificación de las SN I en rápidas y lentas mostraría de forma más clara su relación con las características físicas de los progenitores de las SN I.

Una alternativa al punto anterior podría ser determinar el valor de la β correspondiente a cada modelo teórico. Para ello,

es necesario tener bien definido el punto de inflexión de la curva de luz teórica. Para poder hacerlo con las suficientes garantías, se requiere tratar con más detalle el transporte de radiación en las capas más externas del objeto. Por este motivo, construir buenos modelos en los que se tenga en cuenta los mecanismos de transporte de radiación en un medio de muy baja densidad que se está expansionando, junto con una valoración más cuidadosa de las opacidades es altamente recomendable no sólo para calcular la curva de luz durante la fase de declive exponencial, sino también para perfeccionar algunos aspectos del modelo. En particular, podría abordarse mejor el problema de la localización de la fotosfera, que nos plantea dificultades conforme nos acercamos al inicio del declive de la curva de luz.

Un buen tratamiento del transporte en las capas externas también sería muy útil para calcular la fotometría infrarroja de los modelos teóricos, de gran interés ahora que se empieza a contar con buenos resultados observacionales en estas regiones del espectro.

Rosario Stoj

BIBLIOGRAFIA

- Allen, D.A., et al. 1984, preprint
- Alme, M. y Wilson, J.R. 1974, Ap. J., 194, 147.
- Ames, W.F. 1977, Numerical Methods for partial differential equations, ed. Academics Press. New York.
- Arnett, W.D. 1966, Can. Jour. of Phys. 44, 2553.
- 1979, Ap. J. (Letters), 230, L 37.
- 1980, Ap. J. 237, 541.
- 1982(a), en Supernovae: A Survey of Current Research, ed. M.J. Rees and R.J. Stoneham (Dordrecht: Reidel), p. 221.
- 1982(b), Ap.J. 253, 785.
- Axelrod, T.S. 1980, en Proceedings of the Texas Workshop on Type I Supernovae, ed. J.C. Wheeler (Austin: University of Texas), p. 80.
- Baade, W. 1936, Pub. Astron. Soc. Pacific, 48, 226.
- 1938, Ap. J., 88, 285.
- Baade, W. y Zwicky, F. 1938, Ap. J., 88, 411.
- Barbon, R., Ciatti, F., y Rosino, L. 1973, Astr. Ap., 25, 241.
- 1974, en Supernovae Remnants. Reidel Publishing Co. Dordrecht, Holland, p. 99.
- Barbon, R., Capaccioli, M. y Ciatti, F. 1975, Astr. Ap., 44, 267.
- Barbon, R., Ciatti, F., y Rosino, L. 1979, Astr. Ap., 72, 287.
- 1982, Astr. Ap., 116, 35.
- 1982, Astr. Ap., 116, 43.
- Barbon, R., Cappelaro, E., y Turatto, M. 1984, Astr. Ap., 135, 27.
- Bodansky, F., Clayton, D.D. y Fowler, W.A. 1968, Ap. J. Suppl., 16, 229.

- Branch, D. y Tull, R.G. 1979, *Astr. Jour.*, 84, 1837.
- Branch, D. 1981, *Ap. J.*, 248, 1076.
- 1982, en Supernovae: A Survey of Current Research, ed. M.J. Rees and R.J. Stoneham (Dordrecht: Reidel), p. 267.
- Branch, D. et al. 1982, *Ap. J. (Letters)*, 252, L 61.
- Branch, D. 1982, *Ap. J.*, 258, 35.
- Branch, D. et al. 1983, *Ap. J.*, 270, 123.
- Burbidge, E.M., Burbidge, G.R. y Fowler, W.A. 1957, *Rev. of Mod. Phys.*, 29, 547.
- Buta, R. y Turner, A. 1983, *Pub. Astr. Soc. Pacific*, 95, 72.
- Canal, R. y Schatzman, E. 1976, *Astr. Ap.*, 46, 229.
- Canal, R. e Isern, J. 1979, en I.A.U. Colloquium N° 56, White Dwarfs and Variable Degenerate Stars, ed. H.M. Van Horn and V. Weideman (Rochester: University of Rochester Press), p. 52.
- Canal, R., Isern, J. y Labay, J. 1980, *Ap. J. (Letters)*, 241, L33.
- 1982, *Nature*, 296, 225.
- 1984, en *Proc. of the Advanced Study Institute Collapse and Numerical Relativity*, Toulouse, ed. M. Signore (Reidel, Dordrecht).
- Chevalier, R.A. 1981, *Ap. J.*, 246, 267.
- 1981, *Fund. of Cosmics Phys.*, 7, 1.
- Christy, R. 1964, *Rev. Mod. Phys.*, 36, 555.
- Clark, D. H. y Stephenson, F.R. 1982, en Supernovae: A Survey of Current Research, ed. M.J. Rees and R.J. Stoneham (Dordrecht: Reidel), p. 355.
- Clayton, D.D. y Craddock, W. 1965, *Ap. J.*, 142, 189.
- Colgate, S.A. y White, R. 1966, *Ap. J.* 143, 626.
- Colgate, S.A., y McKee, C. 1969, *Ap. J.*, 157, 623.
- Colgate, S.A., Petschek, A.G., y Kriese, J.T. 1980, *Ap. J. (Letters)*, 237, L81.
- Elias, J.H. et al. 1981, *Ap. J. (Letters)*, 251, L 13.

- Elias, J.H. y Frogel, J.A. 1983, *Ap. J.*, 268, 718.
- Falk, S.W., Jr., y Arnett, W.D. 1977, *Ap. J. Suppl.*, 33, 515.
- Gordon, C. 1981, *Astr. Ap.* 81, 43.
- Humanson, M.L. 1936, *Pub. Astr. Soc. Pacific*, 48, 110.
- Iben, I., Jr 1983, *Ann. Rev. Astron. Ap.*, 21, 271.
- Isern, J., Labay, J., Canal, R. y Hernanz, M. 1983, *Ap. J.*, 273, 320.
- Isern, J., Labay, J. y Canal, R. 1984, *Nature*, 309, 431.
- Kirshner, R.P. et al. 1973, *Ap. J. (Letters)*, 180, L97.
- 1973, *Ap. J.*, 185, 303.
- Kirshner, R.P. y Oke J.B. 1975, *Ap. J.*, 200, 574.
- Kirshner, R.P. 1982, en Supernovae: A Survey of Current Research, ed. M. J. Rees and R.J. Stoneham (Dordrecht: Reidel), p. 1.
- Klein, R., Stein, R. y Kalkofen, W. 1976, *Ap. J.*, 205, 499.
- Kowal, C.T. 1968, *Astr. Jour.*, 73, 1021.
- Labay, J., Canal, R., e Isern, J. 1983, *Astr. Ap.*, 117, L 1.
- Lamb, D.Q. y van Horn, H.M. 1975, *Ap. J.*, 200, 306.
- Lasher, G. 1975, *Ap. J.*, 201, 194.
- Law, W.Y. y Ritter, H. 1983, 123, 33.
- Maza, J. y van den Bergh, S. 1976, *Ap. J.*, 204, 519.
- Mazurek, T.J. 1973, *Ap. Sp. Sci.*, 23, 365.
- Mazurek, T.J., Meier, D.C. y Wheeler, J.C. 1977, *Ap. J.*, 213, 518.
- Mazurek, T.J. y Wheeler, J.C. 1980, *Fund. of Cosmics Phys.*, 5, 193.
- Mestel, L. 1952, *M.N.R.A.S.*, 112, 583.
- Meyerott, R. 1978, *Ap. J.*, 221, 975.
- 1980, *Ap. J.*, 239, 257.
- Miller, G.E., y Chevalier, R.A. 1983, *Ap. J.*, 274, 840.
- Minkowski, R. 1940, *Pub. Astr. Soc. Pacific*, 52, 206.
- Mochkovich, R. 1983, *Astr. Ap.*, 122, 212.
- Nomoto, K. y Sugimoto, D. 1977, *Pub. Astr. Soc. Japan*, 29, 765.
- Nomoto, K. 1980, en Proceedings of the Texas Workshop on Type I

- Supernovae, ed. J.C. Wheeler (Austin: University of Texas), p. 164.
- 1982, Ap. J., 253, 798.
- Nomoto, K., Thielemann, F.K., y Wheeler, J.C. 1984, Ap. J. (Letters), 279, L 23.
- Oemler, A. y Tinsley, B.M. 1979, Astr. Jour., 84, 985.
- Panagia, N. 1984, Physica Scripta, T7, 15.
- Pankey, T. 1962, Ph. D. Thesis, Howard University.
- Payne-Gaposchkin, C.H. 1936(a), Ap. J., 83, 245.
- 1936(b), Ap. J., 83, 173.
- Pskovskii, Y.P. 1977, Soviet Astr.-AJ, 21, 675.
- Richtmyer, R. y Morton, K.W. 1967, Difference Methods for initial values problems, ed. Interscience Publishers. New York. (2^o ed.).
- Sandage, A. y Tammann, G.A. 1982, Ap. J., 256, 339.
- 1984, Nature, 307, 326.
- Schatzman, E. 1963, en Star Evolution. Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi N° 28, ed. L. Gratin (New York, Academic Press), p. 389.
- 1983, en Cataclysmic Variables and Related Objects, I.A.U. Coll. N° 72, p. 149.
- Schurmann, S.R. 1983, Ap. J., 267, 779.
- Schweitzer, F., y Middletich, J. 1980, Ap.J., 241, 1039.
- Stevenson, D.J. 1980, J. de Phys. Suppl., N° 3, Vol. 41., p. C2-53.
- Sutherland, P.G., y Wheeler, J.C. 1984, Ap. J., 280, 282.
- Taam, R.E. y Frixell, B.A. 1984, Ap. J., 279, 166.
- Tammann, C.A. 1977, en Supernovae, ed. D.N. Schramm (Dordrecht: Reidel), p. 95.
- 1982, en Supernovae: A Survey of Current Research, ed. M.J. Rees and R.J. Stoneham (Dordrecht: Reidel), p. 371.
- Thompson, L.A. 1981, Pub. Astr. Soc. Pacific, 93, 176.

- Trimble, V. 1982, *Rev. Mod. Phys.*, 54 N° 4, 1183.
- Truran, J.W., Arnett, W.D. y Cameron, A.G.W. 1967, *Can. Jour. Phys.*, 45, 2315.
- Vader, J.P., van den Heuvel, E.P.J., Lewin, W.H.G., y Takens, R.J. 1982, *Astr. Ap.*, 113, 328.
- van den Heuvel, E.P.J. 1981, *Space Sci. Rev.*, 30, 623.
- Webbink, R.F. 1979, en White Dwarfs and Variable Degenerate Stars, I.A.U. Coll. N° 53, ed. H.M. van Horn and V. Weidemann (Rochester: University of Rochester Press), p. 426.
- Weidemann, V. 1981, en Effects of Mass Loss on Stellar Evolution, I.A.U. Coll. N° 59, ed. C. Chiosi and R. Stalio (Dordrecht: Reidel), p. 339.
- Wheeler, J.C. 1982, en Supernovae: A Survey of Current Research ed. M. J. Rees and R.J. Stoneham (Dordrecht: Reidel), p. 167.
- Wheeler, J.C. 1983, *Nature*, 302, 209.
- Whelan, J. e Iben, I. 1973, *Ap. J.*, 186, 1007.
- Wilson, O.C. 1939, *Ap. J.*, 90, 634.
- Woosley, S.E., Weaver, T.A., y Taam, R.E. 1980, en Proceedings of the Texas Workshop on Type I Supernovae, ed. J.C. Wheeler (Austin: University of Texas), p. 96.
- Zwicky, F. 1939, *Phys. Rev.*, 55, 726.

A P E N D I C E S

A P E N D I C E A I

AI. ESQUEMA NUMERICO

1.- GENERALIDADES Y CONCEPTOS PREVIOS

Un medio esencial para la obtención de los modelos de observables fotométricos de las supernovas de tipo I ha sido el proceso de integración del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que, junto con las correspondientes condiciones de contorno, simulan la física del problema objeto de estudio.

Como es fácil prever, la resolución de dichas ecuaciones requiere el uso de un método numérico. La elección de un esquema determinado comporta la armonización de varios factores, esencialmente de aquellos que permitan satisfacer nuestras necesidades particulares dentro de las posibilidades reales de cálculo disponibles de acuerdo con los principios básicos de la teoría del Cálculo Numérico.

La discretización, o transformación del sistema de ecuaciones diferenciales (sistema continuo) en un sistema de ecuaciones en diferencias (sistema discreto), apropiado para ser resuelto por métodos numéricos, comporta como fondo la sustitución de un dominio continuo D por una malla de puntos pertenecientes al mismo. No se obtendrá por tanto una solución definida en cada punto de D sino aproximaciones en puntos dados de dicho dominio a partir de los cuales podrán conocerse valores en puntos intermedios, si así se desea, aplicando las técnicas de interpolación adecuadas.

Dado el carácter aproximativo de la discretización, el uso de la misma ha de realizarse con ciertas precauciones que contemplen los problemas matemáticos que lleva implícitos, entre los que cabe destacar la adecuación del método al tipo de problema a resolver y cuestiones tales como exactitud, convergencia y estabilidad del sistema numérico resultante.

Las ecuaciones diferenciales a tratar en nuestro caso han de ser discretizadas respecto al espacio (unidimensionalmente) y al tiempo.

Es ya clásico en los problemas de dinámica de fluidos hablar de una formulación euleriana o lagrangiana de las ecuaciones que los describen. En la forma euleriana, las variables espaciales están referidas a un sistema de coordenadas fijo en el espacio, de manera que el fluido se visualiza en movimiento respecto a dicho sistema de referencia y se puede caracterizar por un campo de velocidades dependiente del tiempo. Por el contrario, la formulación lagrangiana expresa las variables en un sistema de referencia comóvil con el fluido. Las posiciones de los elementos materiales del mismo pasan a ser ahora variables dependientes a determinar.

Como parece lógico, ambas formas son equivalentes. No obstante, podrían no serlo las dos soluciones que se obtuvieran a partir de las diferentes aproximaciones en diferencias finitas de dichas formas (Ames, 1977). Este hecho se encuadra dentro del marco más general de las condiciones de convergencia de los esquemas numéricos, las cuales exigen que la solución de la ecuación en diferencias converja hacia la de la ecuación diferencial.

Ambas formulaciones, lagrangiana y euleriana, tienen aproximadamente la misma complejidad. La mayor desventaja de los sistemas eulerianos frente a los lagrangianos aparecen cuando surgen interfases u ondas de choque separando fluidos de diferente densidad.

Por otro lado, los sistemas lagrangianos pueden requerir un reordenamiento de la discretización en etapas posteriores del cálculo si la evolución del sistema así lo aconseja. No obstante, tradicionalmente parece preferirse la formulación lagrangiana (Christy, 1964; Arnett, 1966; Colgate & White, 1966; Colgate & Mckee, 1969; Falk & Arnett, 1977) y hasta hace relativamente poco tiempo, los esquemas numéricos estables más exactos se han desarrollado para ella.

El sistema de ecuaciones diferenciales que se tiene planteado es claramente no lineal. La aproximación en diferencias finitas comporta la linearización del mismo. Ello conlleva a dar cabida a lo que se conoce en cálculo numérico como errores de truncamiento que, junto con los llamados errores de redondeo (de los que es responsable el número finito de dígitos con que cuenta la máquina), puede ser una fuente de inestabilidad numérica si no se palián sus efectos de forma adecuada.

Aunque la contribución de los errores de redondeo es más difícil de controlar dado el carácter marcadamente aleatorio de los mismos, es un hecho comprobado que el tamaño de la malla espacio-temporal de discretización afecta a ambos tipos de errores (de truncamiento y de redondeo) en sentido opuesto. Como señala Richtmyer y Morton (1967), la elección del tamaño de la malla implica un compromiso tal que no suponga sacrificar la estabilidad del esquema numérico en aras de la exactitud de la solución que éste genera o viceversa.

En los problemas no lineales, la estabilidad depende no sólo de la forma de las ecuaciones en diferencias finitas, sino también de la solución que se va obteniendo, por lo que el tamaño óptimo de la malla elegida para discretizar el sistema (o, en otras palabras, el de los incrementos de las variables independientes de espacio y de tiempo) está en función de las características del problema físico descritas por sus ecuaciones; pero, para el mismo problema, es diferente de acuerdo con el método de resolución (explícito o implícito) que se elija para tratar las ecuaciones.

Cuando se utiliza un método explícito para resolver el sistema de ecuaciones en diferencias, se van obteniendo soluciones para cada punto de la malla en el instante de tiempo considerado a partir de los valores de las mismas, ya conocidos, en instantes de tiempos previos. Se demuestra (cf. Richtmyer y Morton, 1967; Ames, 1977) que las condiciones de estabilidad del esquema numérico exigen el cumplimiento de la llamada "condición de

Courant", relación entre los incrementos de las variables espaciales y temporales cuyo efecto práctico supone la restricción del intervalo de tiempo de progreso del proceso de integración de las ecuaciones.

En algunos casos, la limitación que los métodos explícitos pueden llegar a imponer a los pasos de tiempo de integración repercute de forma considerable sobre el tiempo de cálculo necesario para resolver el problema. Una alternativa a este hecho la ofrecen los llamados métodos implícitos. Un método implícito supone obtener simultáneamente las soluciones en todos los puntos de la malla en cada paso de integración; es decir, la resolución de un sistema de ecuaciones más o menos complejo. En cada paso de tiempo se involucran cálculos iterativos e inversión de matrices. No son tan críticos como los explícitos en cuanto a imponer restricciones al paso de tiempo por cuestiones de estabilidad. No obstante, necesitar procesos iterativos e inversión de matrices hace que el tiempo de cálculo empleado en solucionar el problema no se reduzca tanto como a primera vista pudiera deducirse del hecho de que los métodos implícitos, al contrario que los explícitos, no tienen el tamaño del paso de tiempo limitado por la condición de Courant.

Como señala Ames (1977), la mayor estabilidad de los esquemas implícitos puede representar una desventaja en algunos casos, ya que generalmente no son disipativos, por lo que, de existir, pueden preservar efectos transitorios. Además, en muchos problemas de dinámica de fluidos no es justificable el uso de esquemas implícitos por el mero hecho de poder tomar pasos de tiempo mayores, ya que algunas de las variables que caracterizan el problema pueden sufrir cambios notables en intervalos de tiempo inferiores a los impuestos por la condición de Courant. Todo ello conlleva a no descartar del todo los esquemas explícitos.

Se ha elegido el método de cálculo a aplicar en nuestro problema teniendo en cuenta esta serie de consideraciones.

2.- DISCRETIZACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

El sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con el que se ha trabajado utiliza la formulación lagrangiana (variable independiente: masa) y supone simetría esférica (unidimensional).

Las ecuaciones a discretizar son:

$$\frac{dm}{dt} = 4 \pi r^2 \rho \quad (A1)$$

$$\frac{dr}{dt} = v \quad (A2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -4 \pi r^2 \frac{\partial (P+Q)}{\partial m} - \frac{GM_r}{r^2} \quad (A3)$$

$$\frac{dE}{dt} + (P + Q) \frac{dV}{dt} + \frac{\partial L}{\partial m} = \dot{\epsilon} \quad (A4)$$

$$L = -(4\pi r^2)^2 \frac{a c}{3 \chi_R} \frac{\partial T^4}{\partial m} \quad (A5)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{v^2}{2} + E - \frac{GM_r}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial m} \left[4\pi r^2 v (P+Q) + L \right] = \dot{\epsilon} \quad (A6)$$

donde el significado de cada símbolo es el habitual:

- . t : tiempo
- . r : radio
- . v : velocidad
- . P : presión (gas y radiación)
- . Q : pseudoviscosidad de von Neumann-Ritchmyer
- . m : masa (variable espacial independiente)
- . M_r : masa interior a la esfera de radio r
- . E : energía interna específica (gas y radiación)
- . V : volumen específico
- . L : luminosidad
- . $\dot{\epsilon}$: ritmo de generación de energía
- . T : temperatura
- . a : constante de Stefan-Boltzman
- . χ_R : opacidad media de Rosseland

La discretización y el procedimiento de cálculo sigue fundamentalmente el esquema de Falk y Arnett (1977).

Se divide la estrella en capas esféricas de masa $\Delta m_{k+1/2}$. Los subíndices $k+1/2$ y k indican que las cantidades están evaluadas en el centro de la capa o en el borde de la misma, respectivamente. Los superíndices se refieren a la discretización temporal. La numeración de las capas es creciente con la masa. A los bordes de cada zona k se le asigna una masa dada por

$$\Delta m_k = 1/2 (\Delta m_{k+1/2} + \Delta m_{k-1/2}) \quad (A7)$$

El paso de tiempo se representa por $\Delta t^{n+1/2}$ y se toma de acuerdo con las condiciones de estabilidad y exactitud que se detallan más adelante.

El sistema en diferencias que hemos utilizado resulta como sigue:

$$v_{k+1/2}^{n+1} = (\rho_{k+1/2}^{n+1})^{-1} = \frac{4\pi}{3} [(r_{k+1}^{n+1})^3 - (r_k^{n+1})^3] \frac{1}{\Delta m_{k+1/2}} \quad (A8)$$

$$r_k^{n+1} = r_k^n + v_k^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (A9)$$

$$v_k^{n+1/2} = v_k^{n-1/2} - 4\pi (r_k^{n+\lambda})^2 [P_{g, k+1/2}^{n+\lambda} - P_{g, k-1/2}^{n+\lambda} - Q_{k+1/2}^{n-1/2} + Q_{k-1/2}^{n-1/2}]^*$$

$$\frac{\Delta t^n}{\Delta m_k} = \frac{GM_k}{(r_k^{n+\lambda})^2} \Delta t^n + Z_k^{n+\lambda} \Delta t^n \quad (A10)$$

$$\{ [E_{k+1/2}^{n+1} - E_{k+1/2}^n] + 1/2 [P_{k+1/2}^{n+1} + P_{k+1/2}^n + 2Q_{k-1/2}^{n-1/2}] [V_{k+1/2}^{n+1} - V_{k+1/2}^n] \} \frac{1}{\Delta t^{n+1/2}} + [\theta (L_{k+1}^{n+1} - L_k^{n+1}) + (1-\theta) (L_{k+1}^n - L_k^n)]^*$$

$$\frac{1}{\Delta m_{k+1/2}} - \theta \dot{\epsilon}_{k+1/2}^{n+1} - (1-\theta) \dot{\epsilon}_{k+1/2}^n = 0 \quad (A11)$$

$$L_k^n = -[4\pi (r_k^n)^2]^2 \frac{ac}{3\alpha} \frac{(T_{k+1/2}^n)^4 - (T_{k-1/2}^n)^4}{\Delta m_k} \quad (A12)$$

$$\frac{(ET_{k+1/2}^{n+1} - ET_{k+1/2}^n)}{\Delta t^{n+1/2}} + [\theta (X_{k+1}^{n+1} - X_k^{n+1}) + (1-\theta) (X_{k+1}^n - X_k^n)]^*$$

$$\frac{1}{\Delta m_{k+1/2}} = \theta \dot{\epsilon}_{k+1/2}^{n+1} + (1-\theta) \dot{\epsilon}_{k+1/2}^n \quad (A13)$$

El valor de Δt^n en la ecuación (A10) viene dado por

$$\Delta t^n = 0.5 (\Delta t^{n+1/2} - \Delta t^{n-1/2}), \quad (A14)$$

2.1 ESTRUCTURA MECANICA

Las J ecuaciones (A8), (A9) y (A10), que informan sobre la estructura mecánica del objeto, se resuelven explícitamente. Dado que los pasos de tiempo de integración no serán, en general, constantes, la eq. (A10) debe escribirse tomando diferencias centradas en el tiempo (cf. Falk y Arnett, 1977). Si así se hace, las expresiones de $r^{n+\lambda}$, $P^{n+\lambda}$ y $Z^{n+\lambda}$ que resultan originan un esquema implícito. Para poder resolver explícitamente la ecuación (A10) sin recurrir a hacer $\lambda = 0$, se aproximan sus valores por los desarrollos siguientes:

$$r_k^{n+\lambda} \simeq r_k^n + 1/4 v_k^{n-1/2} (\Delta t^{n+1/2} - \Delta t^{n-1/2}), \quad (A15)$$

$$W_{k+1/2}^{n+\lambda} = W_{k+1/2}^n + \frac{1}{4} \frac{\Delta t^{n+1/2} - \Delta t^{n-1/2}}{\Delta t^{n-1/2}} (W_{k+1/2}^n - W_{k+1/2}^{n-1}) \quad (A16)$$

donde W representa a P_g o a Z (Klein, 1976).

M_k representa la masa interior a la capa de radio r_k :

$$M_k = M_{k-1} + \Delta m_{k+1/2} \quad (\text{A17})$$

Q es el término que da cuenta de la pseudoviscosidad, artificio numérico de gran utilidad en caso de producirse ondas de choque. Ideado por von Neumann y Ritchmyer, simula un mecanismo disipativo puramente artificial cuyo efecto consiste en repartir la intensidad de la discontinuidad física sobre un cierto número de zonas espaciales con el fin de evitar problemas numéricos en el esquema en diferencias. El mecanismo quiere semejarse a la existencia de una viscosidad en el fluido (de ahí el nombre), pero en lugar de representarla por términos lineales como en el caso de la viscosidad ordinaria, se hace en función de términos cuadráticos, lo que es equivalente a tomar un coeficiente de viscosidad pequeño para choques poco intensos y elevado para los de gran intensidad (cf. Ritchmyer & Morton, 1967). Las expresiones que se han adoptado para Q en las ecuaciones (A10) son:

$$Q_{k+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} 2(v_{k+1}^{n+1/2} - v_k^{n+1/2})^2 \int_{k+1/2}^{n+1/2} & \begin{cases} v_{k+1/2}^{n+1} < v_{k+1/2}^n \\ v_{k+1}^{n+1/2} < v_k^{n+1/2} \end{cases} \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases} \quad (\text{A18})$$

El término P_g sólo incluye la presión debida a la presión del gas (gas ideal en nuestro caso). La aceleración causada por el gradiente de la presión de radiación se representa por la variable Z . El tratamiento de ésta última es más delicado para profundidades ópticas pequeñas. Para estas condiciones, se ha hecho uso de un limitador de flujo (Alme y Wilson, 1974), cuyas expresiones, analítica y discretizada, se detallarán en (A1 3.).

Como condiciones de contorno para las ecuaciones (A10), se toman

$$v_1 = 0$$

y se adopta la condición de superficie libre

$$P_J = 0$$

ambas, para cualquier instante de tiempo. La eq. (A10) queda ligeramente modificada para $k = J$ al considerarse una presión ficticia en algún punto exterior del objeto

$$P_{J+1/2} = - P_{J-1/2}$$

(Christy, 1964).

2.2 ESTRUCTURA TERMICA

Las ecuaciones (A11) y (A12) permiten determinar la evolución energética del objeto. θ es un parámetro que puede variar entre 0 y 1. Cuando $\theta = 0$, el esquema de cálculo resultante es un esquema explícito; para los demás valores de θ , es necesario resolver el sistema de $J-1$ ecuaciones simultáneamente. En el caso particular de que $\theta = 1/2$, tenemos el conocido esquema de Crank-Nicholson, de gran estabilidad numérica. Es el que hemos utilizado.

La eq. (A12) indica que el transporte de radiación se lleva a cabo por difusión térmica de los fotones.

Las $J-1$ ecuaciones (A11) se han escrito en función de la temperatura en la interzona correspondiente y se han linearizado tomando correcciones para las temperaturas. El resultado es un sistema de $J-1$ ecuaciones, cada una de las cuales adopta la forma:

$$A_{k+1/2} \delta T_{k+3/2} + B_{k+1/2} \delta T_{k+1/2} + C_{k+1/2} \delta T_{k-1/2} = D_{k+1/2} \quad (A19)$$

donde cada zona espacial se encuentra acoplada con las zonas adyacentes superior e inferior.

Los coeficientes de las incógnitas vienen dados por las expresiones que se indican a continuación:

$$A_{k+1/2} = \frac{\theta}{\Delta m_{k+1/2}} \left(\frac{\partial L_{k+1}^{n+1}}{\partial T_{k+3/2}} \right) \tilde{T} \quad (A20)$$

$$B_{k+1/2} = \frac{1}{\Delta t^{n+1/2}} \left[\left(\frac{\partial E_{k+1/2}^{n+1}}{\partial T_{k+1/2}} \right)_{\tilde{T}} + \frac{1}{2} (V_{k+1/2}^{n+1} - V_{k+1/2}^n) \right] + \left(\frac{\partial P_{k+1/2}^{n+1}}{\partial T_{k+1/2}} \right)_{\tilde{T}} + \frac{\theta}{\Delta m_{k+1/2}} \left[\left(\frac{\partial L_{k+1}^{n+1}}{\partial T_{k+1/2}} \right)_{\tilde{T}} - \left(\frac{\partial L_k^{n+1}}{\partial T_{k+1/2}} \right)_{\tilde{T}} \right] \quad (A21)$$

$$C_{k+1/2} = - \frac{\theta}{\Delta m_{k+1/2}} \left(\frac{\partial L_k^{n+1}}{\partial T_{k-1/2}} \right)_{\tilde{T}} \quad (A22)$$

$$D_{k+1/2} = - \{ \text{eq. (A11)} \}_{\tilde{T}} \quad (A23)$$

Para $k = 1$ y para $k = J - 1/2$ las eqs. (A20) a (A23) sufren modificaciones de acuerdo con las condiciones de contorno que se utilicen. Con las condiciones de contorno que hemos empleado, resulta lo siguiente:

Para $k = 1$, la condición de contorno $L_1 = 0$ en todo momento, no modifica el coeficiente $A_{3/2}$, mientras que:

$$B_{3/2} = \frac{1}{\Delta t^{n+1/2}} \left[\left(\frac{\partial E_{3/2}^{n+1}}{\partial T_{3/2}} \right)_{\tilde{T}} + \frac{1}{2} (V_{3/2}^{n+1} - V_{3/2}^n) \right] + \left(\frac{\partial P_{3/2}^{n+1}}{\partial T_{3/2}} \right)_{\tilde{T}} + \frac{\theta}{\Delta m_{3/2}} \left(\frac{\partial L_2^{n+1}}{\partial T_{3/2}} \right)_{\tilde{T}} \quad (A24)$$

$$C_{3/2} = 0 \quad (A25)$$

En $k = J$ se impone que la luminosidad y la temperatura se relacionen por la aproximación de Eddington

$$L_J = \frac{ac}{3} 4\pi r_J^2 T_{J-1/2}^4 \left(\Delta \tau_J + \frac{2}{3} \right)^{-1} \quad (A26)$$

$$\text{con} \quad \Delta \tau_J = \frac{\kappa \Delta m_J}{4\pi r_J^2} \quad (A27)$$

con lo que los coeficientes de las eqs. (A19) sufren también modificaciones para $k = J-1/2$. En particular,

$$A_{J-1/2} = 0 \quad (A28)$$

y $D_{J-1/2}$ se aparta de la forma general (A23) como consecuencia de sustituir en (A11) la expresión (A26) para L_J^{n+1} .

El símbolo \tilde{T} que aparece en los coeficientes del sistema (A19) representa una temperatura estimada para el instante en

que se resuelve el sistema (n+1) y se obtiene, para cada intercapa, por extrapolación a partir de las temperaturas existentes en instantes anteriores (n, n-1).

El sistema (A19) constituye pues un sistema de J-1 ecuaciones lineales en las correcciones de temperatura y puede representarse en forma matricial:

$$A \delta T^{n+1} = D \quad (A28)$$

donde A, matriz del sistema, presenta la particularidad de ser tridiagonal (tiene nulos todos sus términos excepto los de la diagonal principal y sus diagonales adyacentes), por lo que el sistema puede ser resuelto empleando el algoritmo de Thomas sin necesidad de invertir la matriz.

La resolución del sistema (A19) permite obtener nuevos valores para \tilde{T} e iterar hasta obtener la exactitud que se desea.

2.3 CONSERVACION DE LA ENERGIA TOTAL

La resolución de la ecuación (A6) no aporta nuevos elementos para la descripción del sistema físico, pero representa la conservación de la energía total del mismo y se ha utilizado como comprobación para verificar la exactitud del método de cálculo.

Las expresiones (A13) dan cuenta de su forma en diferencias finitas, donde ET, energía total y X, trabajo, vienen dados, respectivamente, por

$$ET_{k+1/2}^n = \frac{(v_{k+1/2}^n)^2}{2} + E_{k+1/2}^n - \frac{GM_{k+1/2}}{r_{k+1/2}^n} \quad (A29)$$

$$X_k^n = 4\pi (r_k^n)^2 v_k^n (P_k^n + Q_k^n) + L_k^n \quad (A30)$$

θ toma el mismo valor que en las ecuaciones (A11).

2.4 DETERMINACION DE LOS INCREMENTOS DE TIEMPO

Se han puesto restricciones al tamaño de los incrementos de tiempo de progreso en la integración de las ecuaciones en diferencias con objeto de asegurar la estabilidad y convergencia del esquema numérico y la exactitud de las soluciones que produce.

Dado que las ecuaciones (A1), (A2) y (A3) se resuelven en forma explícita, conviene imponer como primera restricción para el t la llamada "condición de Courant" para cada zona espacial, que en el casos que nos ocupa se traduce en

$$(\Delta t_c)_{k+1/2} \sim 0.8 \left(\frac{\Delta r}{c_s} \right)_{k+1/2} \quad (A31)$$

$$\text{donde } \Delta r = r_{k+1} - r_k \quad (\text{A32})$$

es la anchura de la zona y c_s representa la velocidad local del sonido, que aproximamos por

$$(c_s)_{k+1/2} \sim (P_{g, k+1/2} V_{k+1/2})^{1/2} \quad (\text{A33})$$

Esta restricción tiene una sencilla interpretación física (Arnett, 1966): considerando únicamente los efectos de la dinámica del gas, el tiempo mínimo necesario para que el material de la zona k se comuniqué con el de la zona $k+1$ es el de propagación del sonido entre ambas zonas, dado por

$$t_s = \frac{(r_{k+1} - r_k)}{c_s} \quad (\text{A34})$$

El imponer que $\Delta t_c \leq t_s$ supone que en el instante considerado las zonas k y $k+1$ son físicamente independientes, ya que ninguna señal ha tenido tiempo suficiente para propagarse de una a otra.

En previsión de la posible presencia de choques y de valores elevados de las derivadas temporales que aparecen en las ecuaciones (A11), se han añadido otras restricciones al Δt : en cada paso de integración, la temperatura, volumen específico y flujo de energía no deben diferir más de un 3%, 2% y 5% respectivamen-

te con respecto a sus valores en el paso anterior, y ello, para cada zona espacial. Definimos otros Δt de la forma siguiente:

$$(t_T)_{k+1/2}^{n+1/2} = 0.03 \frac{T_{k+1/2}^{n-1}}{T_{k+1/2}^n - T_{k-1/2}^n} \Delta t^{n-1/2} \quad (A35)$$

$$(t_V)_{k+1/2}^{n+1/2} = 0.02 \frac{V_{k+1/2}^{n-1}}{V_{k+1/2}^n - V_{k-1/2}^n} \Delta t^{n-1/2} \quad (A36)$$

$$(t_F)_k^{n+1/2} = 0.05 \frac{F_k^{n-1}}{F_k^n - F_{k-1}^n} \Delta t^{n-1/2} \quad (A37)$$

El incremento de tiempo que se toma para el siguiente paso de integración es el mínimo de los resultantes de aplicar las expresiones (A31), (A35), (A36) y (A37) para todos los valores de k .

3.- LIMITADOR DE FLUJO

La ecuación de conservación del momento (A3) incluye un término de aceleración debida al gradiente de la presión de radiación: es el término que representamos por Z en el esquema en diferencias.

A grandes profundidades ópticas, el campo de radiación es isótropo y la aproximación de difusión permite expresar Z, utilizando variables lagrangianas, como:

$$Z = 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{3} \epsilon_r \right) = 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{a}{3} T^4 \right) \quad (A38)$$

donde ϵ_r es la densidad de energía de la radiación. Conforme el gas se va tornando ópticamente transparente a la radiación, la aproximación de difusión pierde validez y el tratamiento del término que nos ocupa puede conducir a sobreestimar el ritmo con el que se difunde el flujo de radiación (Chevalier, 1981).

Una forma de paliar este efecto es incluir un limitador de flujo. Se ha utilizado el de Alme y Wilson (1974).

El flujo de radiación integrado para todas las frecuencias lo expresan como

$$F = \frac{\lambda c D \epsilon_r}{3 + \lambda |D| [1 + 3 \exp(-\lambda |D|/2)]} \quad (A39)$$

donde

$$D = 4\pi r^2 \rho \frac{\partial \ln \epsilon_r}{\partial m} \quad (\text{A40})$$

$$\lambda = \frac{1}{\kappa_P \rho} \quad (\text{A41})$$

κ_P es la opacidad media de Planck. Con nuestras hipótesis,
 $\kappa_R = \kappa_P = \kappa_{\text{esc}} = \kappa$.

ϵ_r tiene el mismo significado y la misma expresión que en (A38)

La forma de Z en el caso de emplear el limitador de flujo se obtiene sin más que sustituir (A39) en la expresión general del gradiente de la presión de radiación (31), con lo que resulta

$$Z = \frac{1}{\rho} \frac{D \epsilon_r}{3 + \lambda |D| [1 + 3 \exp(-\lambda |D|/2)]} \quad (\text{A42})$$

Para grandes profundidades ópticas, λ , que representa el recorrido libre medio de los fotones, es muy pequeño ($\lambda \rightarrow 0$ para $\tau \rightarrow \infty$), con lo que

$$\lambda |D| [1 + 3 \exp(-\lambda |D|/2)]$$

tiende a 0 y se obtiene de nuevo (A38) al sustituir (A40) en (A42).

Conforme el gas se hace ópticamente delgado, λ crece y en el denominador de (A42) domina el factor $\lambda |D|$. El término de aceleración dado por Z queda reducido por un factor aproximado $r = 3/\lambda |D|$, $r < 1$, con respecto al valor que alcanzaría de haber utilizado (A38). Ello repercute en una disminución del enfriamiento de las capas correspondientes al frenarse la expansión de las mismas o, equivalentemente, en conseguir una pérdida menor de energía de radiación, de ahí el nombre de limitador de flujo.

La expresión (A42) en forma discreta es inmediata:

$$Z_k = 4\pi r_k^2 \frac{\frac{\Delta \epsilon_r}{\Delta m_k}}{3 + (\lambda |D|)_k \{1 + 3 \exp[-1/2 (\lambda |D|)_k]\}} \quad (A43)$$

$$\text{donde } \Delta \epsilon_r = (\epsilon_r)_{k+1/2} - (\epsilon_r)_{k-1/2} \quad (A44)$$

$$y \quad (\lambda |D|)_k = \frac{4\pi}{\lambda c} \frac{r_k^2}{\Delta m_k} \ln \frac{(\epsilon_r)_{k+1/2}}{(\epsilon_r)_{k-1/2}} \quad (A45)$$

(todas las variables están referidas al instante n).

Para el borde externo, $k = J$, se ha adoptado como condición de contorno

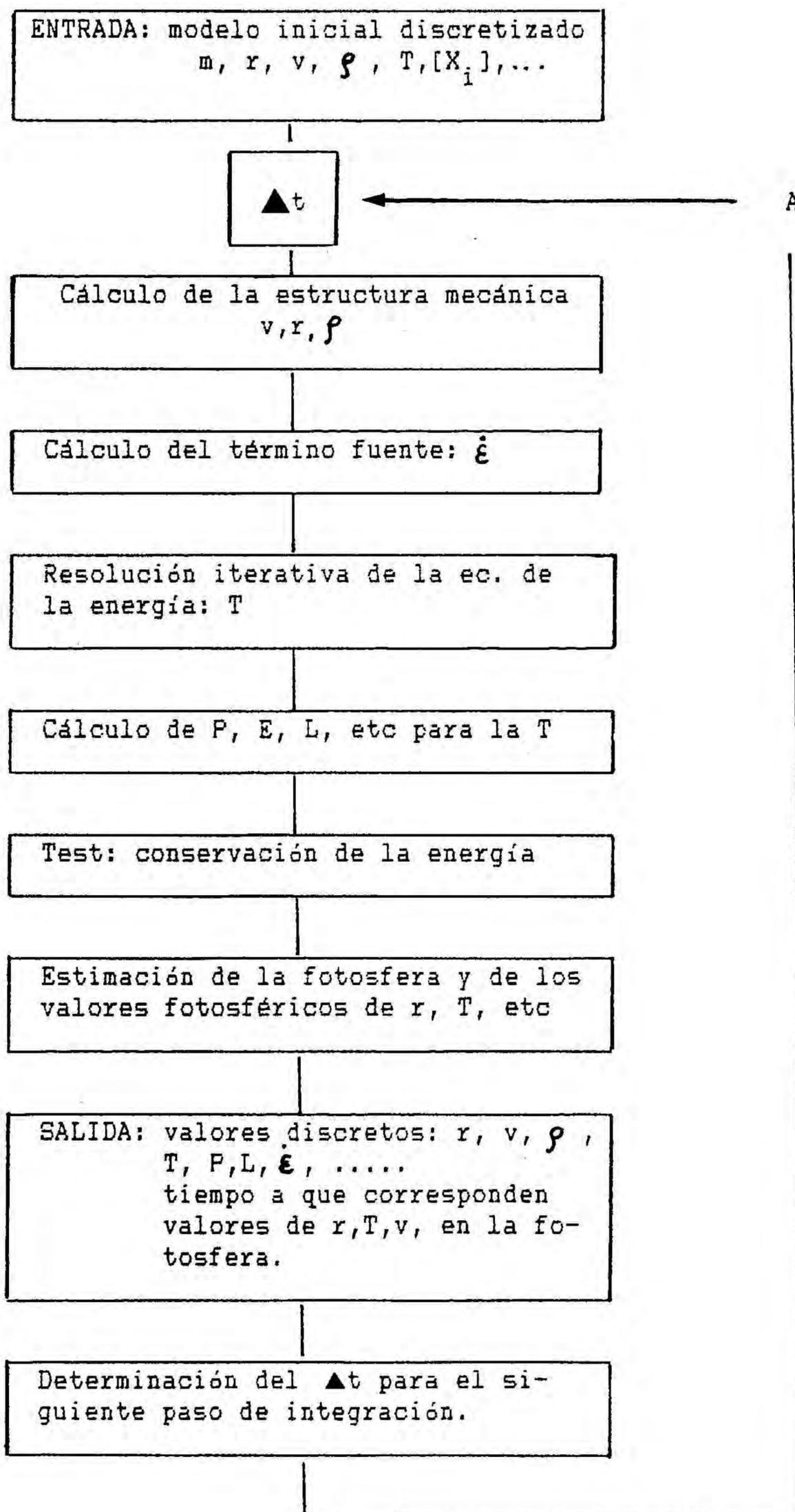
$$(\varepsilon_r)_{J+1/2} = 0 \quad (\text{A46})$$

con lo que resulta para Z_J

$$Z_J = -4\pi r_J^2 \frac{(\varepsilon_r)_{J-1/2}}{\Delta m_J} \frac{1}{3 + (\lambda|D|)_J \{ 1 + 3 [-1/2 (\lambda|D|)_J] \}} \quad (\text{A47})$$

siendo

$$(\lambda|D|)_J = \frac{8\pi r_J^2}{\alpha \Delta m_J} \quad (\text{A48})$$

4.- RESOLUCION DE LAS ECUACIONES4.1 ESQUEMA DEL PROCESO DE RESOLUCION DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

4.2 METODO DE RESOLUCION

El diagrama de bloques de (AI 4. 4.1) expone de forma muy esquemática el proceso seguido para resolver el esquema en diferencias planteado en (AI 2.). Sólo se ha representado la obtención de un modelo (o un paso de integración) a partir de las condiciones iniciales (modelo inicial). El proceso puede repetirse a partir de "A" para progresar en el tiempo las veces necesarias. En la práctica, se ha detenido el cálculo cuando la aproximación del transporte de los fotones por difusión ha perdido claramente su validez.

La evolución temporal del sistema físico descrito por el sistema de ecuaciones a integrar vendrá dada por una secuencia de modelos.

A partir de unas condiciones iniciales, materializadas por un modelo inicial, la resolución según un método explícito de las ecuaciones (A10), (A9) y (A8), en este orden, permiten conocer la nueva estructura mecánica del objeto después de un tiempo $\Delta t^{n+1/2}$; en particular, obtener los valores de las velocidades y de los radios en los bordes de cada zona y la densidad (o, equivalentemente, el volumen específico) en las interzonas correspondientes.

La determinación del término fuente que figura en las ecuaciones (A11) y (A13) y que representa la energía de origen radioactivo que, por unidad de tiempo y masa es depositada en cada zona constituye el siguiente paso. Para ello es necesario realizar algunos cálculos previos, que indicamos.

Dado que se ha utilizado una opacidad constante, es posible conocer la profundidad óptica de cada interzona para el instante que nos ocupa con los datos de que se dispone sin más que utilizar la relación

$$\tau_{k+1/2}^{n+1} = \sum_{x=J-1}^{k+1/2} \Delta \tau_x^{n+1} \quad (\text{A49})$$

$$\text{donde } \Delta \tau_{k+1/2} = \frac{\kappa (r_{k+1}^{n+1} - r_k^{n+1})}{V_{k+1/2}^{n+1}} \quad (\text{A50})$$

Las leyes de desintegración del ^{56}Ni y ^{56}Co dan cuenta de la abundancia de estos elementos en cada una de las zonas en que existe material radioactivo así como de la energía liberada en los procesos de desintegración. Una vez evaluada la "función de depósito", queda determinado el término fuente \dot{E} .

Se está ya en condiciones de calcular la configuración térmica del objeto. Ello implica la resolución por un procedimiento iterativo de las ecuaciones (A11) y (A12).

A partir de los valores de las temperaturas en cada zona correspondientes a los instantes n y $n-1$, se extrapola un primer valor aproximado de la misma para el instante en que se trabaja ($n+1$); dicho valor lo representamos por $\tilde{T}_{k+1/2}$. La resolución del sistema de ecuaciones (A19) proporciona las correcciones a dicha temperatura de prueba. Se adopta ahora como valor para las temperaturas

$$\tilde{\tilde{T}}_{k+1/2} = \tilde{T}_{k+1/2} + \delta T_{k+1/2} \quad (\text{A51})$$

y se itera el proceso hasta conseguir la exactitud deseada.

Hemos considerado suficiente una extrapolación lineal para encontrar el primer valor de las temperaturas de prueba, ya que las restricciones impuestas al paso de tiempo de integración justifican que el valor hallado de esta forma no difiera en exceso del que realmente corresponde, condición muy conveniente para evitar procesos iterativos largos o divergentes.

La resolución del sistema (A19) se ha llevado a cabo mediante el conocido algoritmo de Thomas (Ritchmyer y Morton, 1967; Ames, 1977)

Como se indicó en (AI 2. 2.2), el sistema de ecuaciones (A19) puede representarse matricialmente por (A28), donde A es la matriz $J-1 \times J-1$ formada por los coeficientes $A_{k+1/2}$, $B_{k+1/2}$, $C_{k+1/2}$ (expresiones (A20) a (A22) y (A24) a (A28)) y $\sum T_{k+1/2}$ y D son vectores columnas de dimensión $J-1$ que tienen por componentes las incógnitas $\sum T_{k+1/2}$ y los coeficientes $D_{k+1/2}$ de (A23), respectivamente.

Puesto que la matriz A no es singular, puede despejarse $\sum T_{k+1/2}$ a partir de su inversa (A^{-1}), con lo que se obtendría la solución del sistema

$$\sum T_{k+1/2} = A^{-1} D \quad (A52)$$

No obstante, las características especiales de la matriz A permiten el empleo de un método de resolución más ventajoso desde el punto de vista del tiempo real de cálculo y ocupación de memoria de la máquina, ventajas no despreciables en cuanto que el cálculo forma parte de un proceso iterativo.

La definición de los coeficientes de las incógnitas y las condiciones de contorno proporcionan a la matriz A la siguiente estructura, conocida como tridiagonal

$$\begin{pmatrix}
 B_{3/2} & A_{3/2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 C_{5/2} & B_{5/2} & A_{5/2} & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & C_{k+1/2} & B_{k+1/2} & A_{k+1/2} & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & C_{J-3/2} & B_{J-3/2} & A_{J-3/2} \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{J-1/2} & B_{J-1/2}
 \end{pmatrix}$$

(A53)

que permite, por un proceso de eliminación de Gauss, llegar a las siguientes recurrencias:

$$\delta T_{k+1/2} = \alpha_{k+1/2} \delta T_{k+3/2} + \beta_{k+1/2} \quad (A54)$$

donde los coeficientes α y β se obtienen aplicando las relaciones

$$\alpha_{3/2} = - \frac{A_{3/2}}{B_{3/2}} \quad (A55)$$

$$\beta_{3/2} = \frac{D_{3/2}}{B_{3/2}} \quad (A56)$$

$$\alpha_{k+1/2} = - \frac{A_{k+1/2}}{B_{k+1/2} + C_{k+1/2} \alpha_{k-1/2}} \quad (\text{A57})$$

$$\beta_{k+1/2} = \frac{D_{k+1/2} - C_{k+1/2} \beta_{k-1/2}}{B_{k+1/2} + C_{k+1/2} \alpha_{k-1/2}} \quad (\text{A58})$$

(A57) y (A58), para $k \neq 1$.

El proceso a seguir consiste en calcular los coeficientes $\alpha_{k+1/2}$ y $\beta_{k+1/2}$ en sentido de k creciente. Las condiciones de contorno implican $A_{J-1/2} = 0$, con lo cual,

$$\alpha_{J-1/2} = 0 \quad \text{y} \quad \delta_{T_{J-1/2}} = \beta_{J-1/2} \quad (\text{A59})$$

La recurrencia (A54) permite obtener los restantes $\delta_{T_{k+1/2}}$ en sentido de k decreciente.

Respecto a este algoritmo, únicamente cabe señalar que un valor pequeño del denominador de los coeficientes α y β puede ser una fuente importante de errores de redondeo (Ames, 1977), por lo que es conveniente cerciorarse de que no es éste nuestro caso.

Una vez se conocen las temperaturas de cada interzona, se procede a calcular las restantes variables que dependen de ellas:

presión, energía interna, luminosidad, etc a través de las expresiones que proporcionan las hipótesis de trabajo de gas ideal y transporte de radiación por el mecanismo de difusión.

Acto seguido, se aplica el test de conservación de la energía total (eq. (A5)) para verificar la exactitud del esquema numérico tras cada avance temporal en la integración.

Puesto que, en último término, el objetivo primordial del cálculo es obtener información sobre la evolución temporal de los observables fotométricos del modelo, es necesario contar con estimaciones de los valores que éstos alcanzan en la fotosfera. Por ello, cada cierto número de pasos de integración, (variable, de acuerdo con la mayor o menor rapidez de evolución del modelo) se calcula la posición de la fotosfera localizando, por interpolación lineal, el valor del radio R_p al que le correspondería una profundidad óptica $\tau = 2/3$. La velocidad estimada en R_p a partir de la existente en los bordes de las zonas adyacentes (v_p) nos da idea de la velocidad con que se mueve el material de la fotosfera, a la que además se asigna una temperatura T_e mediante la relación

$$T_e = \left(\frac{L}{4\pi R_p^2 \sigma} \right)^{1/4} \quad (A50)$$

donde L es la luminosidad total emitida. Dicha temperatura será corregida más tarde para poder comparar con las observaciones usando las tablas de Schurmann (1983).

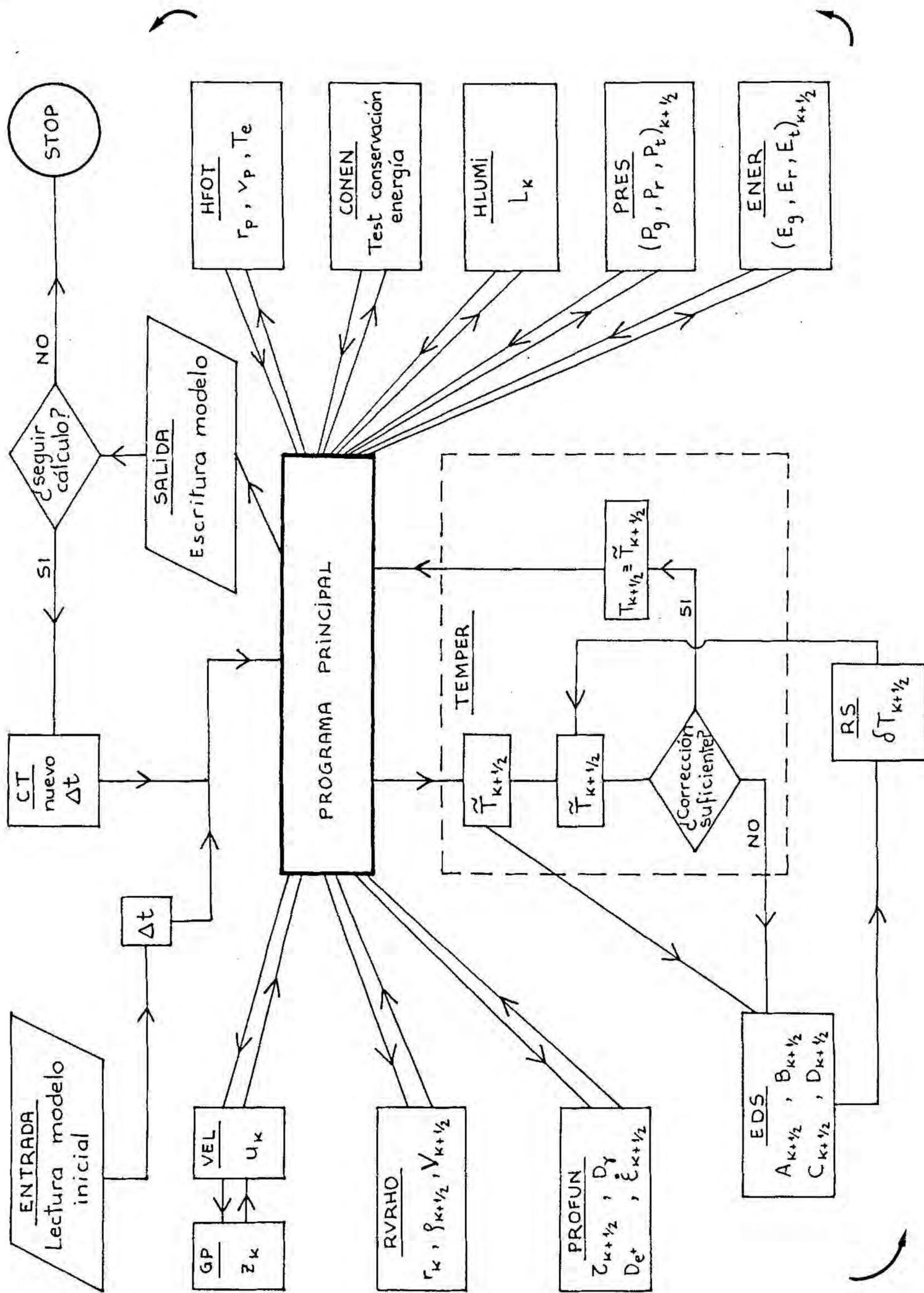
Después de cada paso de integración se procede al cálculo del incremento de tiempo que gobernará el siguiente paso aplicando las restricciones que se señalaron en (AI 2. 2.4).

4.3 PROGRAMA DE CALCULO

Para la realización práctica del proceso de integración del esquema en diferencias descrito en (AI 2.) se ha diseñado un program en lenguaje fortran. Un organigrama simplificado del mismo puede verse en (AI 4. 4).

Puede observarse en él que el programa ha sido estructurado como un conjunto de subrutinas, formando bloques casi independientes, en las que se van calculando las distintas variables. Se ha hecho de esta forma con objeto de facilitar la modificación de cualquiera de las partes del programa sin afectar al resto del mismo en el caso de querer introducir hipótesis físicas diferentes.

4.4



A P E N D I C E A I I

AII. ELABORACION DEL PERFIL TERMICO DE LOS MODELOS INICIALES COMPACTOS

Cuando el modelo inicial no ha sido obtenido de forma autoconsistente y la configuración de partida es una "configuración compacta" ($R_0 \leq 10^{12}$ cm), es muy aconsejable determinar un buen perfil térmico inicial. Tal cosa no es necesaria si la configuración inicial es una "configuración extensa" ($R_0 \geq 10^{13}$ cm) ya que, como quedó expuesto razonadamente (véase III 2.1.1), la energía interna contenida en este tipo de configuración es varios órdenes de magnitud inferior a la cinética o nuclear, hecho que resta importancia a cualquier error que pudiera derivarse de la adopción de un perfil térmico no muy bueno.

Tomar para nuestros modelos iniciales extensos un perfil de temperatura isoterma no va a afectar a los resultados que se obtengan del cálculo a partir de la época inmediatamente anterior al máximo de la curva de luz, como hemos comprobado, y puede hacerse de esta manera si así se desea. Tomar un perfil de temperatura isoterma plantea, no obstante, un pequeño inconveniente: la aparición de un transitorio que se manifiesta en forma de una luminosidad relativamente elevada en los primeros momentos del cálculo, efecto que desaparece al acercarnos al máximo real, cuando se ajusta la estructura térmica a la que daría la solución de la ecuación de difusión. Las razones de la aparición de este efecto transitorio se expusieron en (III 2.1.1).

Schurmann (1983) propone tomar como perfil térmico inicial el derivado de la ecuación de difusión en la aproximación analítica de Arnett (1980). De esta forma, el ajuste del perfil térmico inicial al resultante de cálculos hidrodinámicos más detallados tiene lugar en menos tiempo.

Aplicando este criterio, el cálculo de la estructura térmica de la configuración inicial se llevó a cabo de acuerdo con lo que sigue.

La primera ley de la termodinámica aplicada a nuestra esfera gaseosa nos dice:

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} + \frac{\partial L}{\partial m} = 0 \quad (\text{A61})$$

(se ha supuesto que no existen fuentes ni sumideros de energía). Bajo la hipótesis de gas ideal dominado por la radiación, la energía interna (E) y la presión (P) pueden escribirse como

$$E = a T^4 V \quad ; \quad P = 1/3 a T^4 \quad (\text{A62})$$

donde V es el volumen específico, inverso de la densidad.

La hipótesis de difusión térmica de los fotones nos permite escribir la luminosidad en la forma

$$L = - (4\pi r^2)^2 \frac{\lambda c}{3} \frac{\partial (aT^4)}{\partial m} \quad (\text{A63})$$

donde λ es el recorrido libre medio de los fotones, relacionado con la opacidad del medio por

$$\lambda = \frac{1}{\kappa \rho} \quad (\text{A64})$$

Haciendo uso de la hipótesis de que la expansión del gas se lleva a cabo homológamente, se tiene:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{3}{R} \frac{dR}{dt} = 3 \frac{v_e}{R} \quad (\text{A65})$$

(T, m, r tienen los significados habituales de temperatura, masa y radio; $R = R_{\text{tot}}$ y v_e = velocidad de escala).

Todo ello permite transformar (A61) en

$$4T^3 \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{v_e}{R} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{cr^2}{3\alpha\beta} \right) \left(\frac{\partial T^4}{\partial r} \right) \right]$$

(A66)

Mediante los cambios de variables

$$x = r/R \quad (\text{A67})$$

$$T^4(r, t) = \psi(x) \phi(t) T^4(0, 0) R^4(0)/R^4(t) \quad (\text{A68})$$

$$\rho(r, t) = \rho(0, 0) \eta(x) R^3(0)/R^3(t) \quad (\text{A69})$$

pueden separarse las variables en la ecuación (A66) y obtener para $\psi(x)$ la ecuación de autovalores

$$\alpha = - \frac{1}{x^2 \psi(x)} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2}{\eta(x)} \frac{d\psi}{dx} \right] \quad (\text{A70})$$

Como es fácil deducir, las funciones $\psi(x)$ y $\eta(x)$ describen los perfiles de las distribuciones de temperatura y densidad respectivamente.

$\psi(x)$ cumple las condiciones de contorno

$$\psi(0) = 1 \quad (\text{A71})$$

$$[d\psi/dx]_{x=0} = 0 \quad (\text{A72})$$

que se deducen de su normalización y de la condición de $L(0) = 0$, o de la no existencia de fuentes en el centro de la estrella, respectivamente.

El autovalor α se determina de forma que $\psi(1) = 0$; es la solución radiativa, que hace que la temperatura tienda a 0 en $r = R$.

La función $\eta(x)$ se obtiene a partir de las expresiones (9), que dan el perfil de densidad en nuestros modelos.

Haciendo

$$0.57 M_e = 4\pi \rho_1 R_e^3 / 3 \quad (A73)$$

y teniendo en cuenta, a partir de (A69), que

$$\eta(x) = \rho(x,0) / \rho(0,0) \quad (A74)$$

se encuentra

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq R_e / R \\ (R_e / R)^7 x^{-7} & R_e / R \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (A75)$$

Para el perfil de densidad dado por (A75) y para un determinado valor de prueba de α , se resuelve (A70). El valor de α que consigue hacer $\Psi(1) = 0$ es el autovalor buscado y la solución de (A70) para el mismo, permite conocer la función $\psi(x)$ que da la forma del perfil térmico.

La resolución de (A70) se ha hecho por un método de Runge-Kutta, previa su transformación en una forma más apropiada para aplicar dicho procedimiento.

Expresando

$$y = \frac{x^2}{\eta(x)} \frac{d\psi}{dx} \quad (\text{A76})$$

la ecuación (A70) puede escribirse como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi}{dx} = y \frac{\eta(x)}{x^2} \\ \frac{dy}{dx} = -\alpha x^2 \psi(x) \end{array} \right. \quad (\text{A77})$$

Las condiciones de contorno toman ahora la forma

$$y(0) = 1 \quad ; \quad [dy/dx]_{x=0} = 0 \quad (\text{A78})$$

Una vez se ha encontrado el autovalor α , se ha resuelto (A77) para dicho autovalor y se ha obtenido $\psi(x)$, el perfil de temperatura del modelo puede hallarse aplicando la relación

$$T^4(x) = T^4(0) \psi(x) \quad (\text{A79})$$

Antes, debe evaluarse el factor de normalización, $T^4(0)$ de forma que, si E_T es la energía interna atribuida al modelo inicial, se cumpla

$$E_T = a T^4(0) \int_0^1 \psi(x)/\eta(x) dx \quad (A80)$$

A P E N D I C E AIII

AIII.- CORRECCIONES PARA UN CUERPO NEGRO TRUNCADO

La Tabla XI (Schurmann, 1983) muestra las correcciones que hay que aplicar para un cuerpo negro con un espectro truncado en la región ultravioleta por debajo de una longitud de onda de 3.800 Å. Para cada temperatura efectiva (T_e), se da la temperatura efectiva correspondiente a un cuerpo negro truncado que emita el mismo flujo (T_e^*), y las correcciones bolométricas en las bandas fotométricas B y V respectivamente.

TABLA XI

CORRECCIONES PARA UN CUERPO NEGRO TRUNCADO

| T_e (10^3 K) | T_e^* (10^3 K) | Cb en B (mag) | Cb en V (mag) |
|----------------------|------------------------|------------------|------------------|
| 14.708 | 30. | - 0.49 | - 0.41 |
| 13.642 | 25. | - 0.47 | - 0.43 |
| 12.367 | 20. | - 0.44 | - 0.44 |
| 11.778 | 18. | - 0.44 | - 0.44 |
| 11.120 | 16. | - 0.37 | - 0.43 |
| 10.373 | 14. | - 0.31 | - 0.42 |
| 9.511 | 12. | - 0.23 | - 0.41 |
| 8.469 | 10. | - 0.10 | - 0.37 |
| 7.915 | 9. | + 0.07 | - 0.34 |
| 7.274 | 8. | + 0.13 | - 0.29 |
| 6.564 | 7. | + 0.32 | - 0.21 |
| 5.779 | 6. | + 0.61 | - 0.06 |
| 4.915 | 5. | + 1.07 | + 0.19 |
| 3.980 | 4. | + 1.89 | + 0.70 |
| 2.998 | 3. | + 3.51 | + 1.82 |

Sutherland y Wheeler (1984) calculan las magnitudes absolutas en las bandas fotométricas B y V mediante las expresiones

$$M_B = - 21.517 + 2.5 \log (\exp(x_B) - 1) - 5 \log R_{15}$$

$$M_V = - 20.956 + 2.5 \log (\exp(x_V) - 1) - 5 \log R_{15}$$

donde R_{15} es el radio de la fotosfera en unidades de 10^{15} cm

$$x_B = 3.27007/T_4$$

$$x_V = 2.61605/T_4$$

$$T_4 = T/10^4 \text{ K}$$

La temperatura T es la que correspondería a un cuerpo negro truncado que emitiera el mismo flujo.