Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

INTRODUCCIÓ D'INTERIORS D'ORDRE EN LÒGIQUES ABSTRACTES

Josep Ma Font i Llovet

Dpt. d'Estadística Matemàtica
Universitat de Barcelona

Let $L = (S,C)$ be an abstract logic ([1]). Using the methods of [3] we study the abstract logic $L_o = (S,C_o)$ associated with $\mathcal{C}_o = \{X \subseteq S : X = C(X), f\langle X\rangle \subseteq X\}$ for a given mapping $f: S \to S$. We see that L_o preserves several logical properties of L. We state necessary and sufficient conditions on C to obtain separately the three properties of an interior mapping on the logical quotient of S by C, when the last is an ordered set, a semilattice, or an implicative algebra.

Sigui $L = (S,C)$ una lògica abstracta, $\mathcal{C}$ el sistema clausura associat i $f : S \to S$ una aplicació. Les definicions i notacions usades es poden trobar en [1], [3] i [4].

Direm que $X \in \mathcal{C}$ és <u>obert</u> quan $f\langle X\rangle \subseteq X$. Posarem $\mathcal{C}_o = \{X : X \text{ és obert}\}$

<u>(0.0)</u> $\mathcal{C}_o$ és un sistema clausura sobre S.

Si C_o denota l'operador conseqüència associat a $\mathcal{C}_o$, $L_o = (S,C_o)$ serà anomenada " lògica dels oberts de L".

1. PROPIETATS GENERALS DE L_o.

En [2] es donen algunes propietats sota hipòtesis molt restringides, que equivalen a $C_o = C \circ f$. A continuació donem les propietats de L que es traspassen a L_o, sense hipòtesis suplementàries:

<u>(1.1)</u> Si C és unitari, C_o ho és. Si C és finitari, C_o ho és també. Si C satisfa el Principi d'Adjunció, C_o també, respecte la mateixa operació. Si L té teoremes ($C(\emptyset) \neq \emptyset$), L_o també. Si L té tesis en el sentit de Monteiro ($\bigcap\{T \in \mathcal{C}, T \neq \emptyset\} \neq \emptyset$), L_o també. Tot element de S que sigui inconsistent en L és inconsistent en L_o.

A més tot quocient que respecti L respectarà L_o:

<u>(1.2)</u> Si $\sim \in \Theta_L$ aleshores $\sim \in \Theta_{L_o}$ i la projecció $\pi : S \longrightarrow S/\sim$ compleix que $\pi \in \mathrm{Epi}^*(L,\widetilde{L}) \cap \mathrm{Epi}^*(L_o,\widetilde{L_o})$.

Com que $\sim_c \in \Theta_L$ podem estudiar $\bar{S} = S/\sim_c$ on tenim $\bar{C}_0$ a més [illegible]
I en comptes d'estudiar $S/\sim_{C_0}$ la seguent proposició, totalment general, ens permet d'estudiar equivalentment $\bar{S}/\sim_{\bar{C}_0}$.

(1.3) Siguin $L = (S,C)$ i $L_1 = (S_1,C_1)$ dues lògiques abstractes tals que $\sim_{C_1} \in \Theta_L$. Posant $S' = S/\sim_C$, $\bar{S} = S/\sim_{C_1}$, $\bar{\bar{S}} = \bar{S}/\sim_{\bar{C}}$; i C', $\bar{C}$ i $\bar{\bar{C}}$ per als operadors induïts en S' ,$\bar{S}$ i $\bar{\bar{S}}$ per C respectivament, aleshores existeix un isomorfisme lògic entre $L' = (S',C')$ i $\bar{\bar{L}} = (\bar{\bar{S}}, \bar{\bar{C}})$.

2. CONDICIONS PER A OBTENIR UN INTERIOR D'ORDRE EN $\bar{S}$.

Recordem que en S la relació $x \leq y \Leftrightarrow y \in C(x)$ és un preordre, que origina un ordre en $\bar{S}$.

(2.1) L'aplicació f és morfisme de $\leq$ si i només si $\forall x \in S$, $f\langle C(x)\rangle \subseteq C(f(x))$.

En aquest cas, f indueix en $\bar{S}$ un morfisme d'ordre I tal que $\bar{\mathcal{C}}_0 = \{X \in \bar{\mathcal{C}} : I\langle X\rangle \subseteq X\}$

Ara estem en condicions de respondre a la pregunta: còm reconèixer si una lògica donada és la lògica dels oberts d'una altra lògica?

(2.2) Si $L_0 = (S,C_0)$ és una lògica abstracta, Són equivalents:
(1) Existeix una lògica $L=(S,C)$ i una aplicació $f:S \rightarrow S$ tals que (a) $\forall x \in S$, $f\langle C(x)\rangle \subseteq C(f(x))$ i (b) $\mathcal{C}_0 = \{X \in \mathcal{C} : f\langle X\rangle \subseteq X\}$;
i (2) Existeix un conjunt ordenat $(S_2, \leq)$ i un morfisme d'ordre $I: S_2 \rightarrow S_2$ i una lògica $L_2 = (S_2,C_2)$ tals que (a) $\mathcal{C}_2$ és una família de filtres d'ordre que conté tots els principals, (b) Si posem $\mathcal{C}_3 = \{X \in \mathcal{C}_2 : I\langle X\rangle \subseteq X\}$, i $L_3 = (S_2,C_3)$, aleshores existeix un $h \in Epi^{*}(L_0,L_3)$.
Si es compleix (1) ó (2), aleshores també $h \in Epi^{*}(L, L_2)$.

Totes les proposicions que seguiran en la resta del treball es suposen com un complement a (2.2): els dos termes de les equivalències s'entenen afegits a (1) i (2) de (2.2) respectivament.

(2.3) (a) $\forall x \in S_2$ $I(x) \leq x$ sii $\forall x \in S, C(x) \subseteq C(f(x))$
(b) $\forall x \in S_2$ $I(x) \leq x$ i $I^2(x) = x$ sii $\forall x \in S, C(x) \subseteq C(f(x))$ i $f\langle C(f(x))\rangle \subseteq C(f(x))$.
(c) les dues darreres condicions de (b) impliquen la de (2.1).

Per tant la proposició(2.2) completada amb (2.3.b) ens dóna la caracterització de les lògiques dels oberts d'un <u>interior d'ordre</u>.

3. INTERIORS EN ESTRUCTURES MES COMPLEXES.

En afegir propietats a L (algunes, segons(1.1), es traspassaran a L_o) el conjunt ordenat S_2 enriqueix la seva estructura. Es poden obtenir condicions sobre f que facin que I respecti l'estructura que apareix.

(3.1) Suposem que $(S_2, \leqslant)$ té maxim u (ó sigui, que $C(\emptyset) \neq \emptyset$). Aleshores $I(u) = u$ sii $f\langle C(\emptyset)\rangle \subseteq C(\emptyset)$.

(3.2) Suposem que $(S_2, \leqslant)$ té mínim 0 ($\exists x \in S$, $C(x) = S$). Aleshores $I(0) = 0$ sii $C(x) = S$ implica $C(f(x)) = S$.

Naturalment (3.2) és independent de (2.3.a)

(3.3) Suposem que$(S_2, \wedge)$ és un inf-semireticle i que $\mathcal{C}_2$ és una família de filtres de reticle (C satisfa el Principi d'Adjunció). Aleshores $I(x \wedge y) = I(x) \wedge I(y)$ sii $f\langle C(x,y)\rangle \subseteq C(f(x),f(y))$

El resultat anterior segueix essent vàlid en estructures més riques, amb conjunció $\wedge$: reticles, àlgebres de Heyting,de Boole.Aquestes darreres estructures tenen també una formulació purament implicativa; l'interior I també respecta aquesta estructura:

(3.4) Suposem que $(S_2,.,u)$ és una àlgebra de Hilbert i $\mathcal{C}_2$ la família dels sistemes deductius de S_2(C és finitari i satisfa el Principi de la Deducció).Aleshores $I(x.y) \leqslant Ix . Iy$ sii $f\langle C(x,y)\rangle \subseteq$ $\subseteq C(f(x),f(y))$

Remarquem que el Principi de la Deducció no es traspassa a C_o.Veiem que en les estructures que tenen . i $\wedge$ la definició d'operador interior és coherent, ja que en (3.3) i en (3.4) apareix la mateixa condició. La proposició (2.2) completada amb la (3.3) ó amb la (3.4) ens dóna la caracteització de les lògiques dels oberts d'un interior reticular ó implicatiu en termes de lògiques abstarctes.

REFERÈNCIES

[1] BROWN- SUSZKO: "Abstract logics", Dissertationes Mathematicae CII. pp. 9-40 .Warszawa, 1973.

[2] FONT- VERDÚ: " Lògiques abstractes, operadors interior i lògiques modals S4".Actas de las VI Jornades matemáticas Hispano-Lusas. Santander. 1979.

[3] VERDÚ : "Contribució a l´estudi de certs tipus de lògiques abstractes". Tesi Docotral. Barcelona 1978.

[4] VERDÚ : " Lògiques distributives i Booleanes ". Stochastica Vol III nº2 1979 pàgs. 97-108.