

CADENES DE SALES DISCRETES

Antoni Torrens Torrell

Dpt. d'Estadística Matemàtica
 Universitat de Barcelona

Abstract:

The Sales algebras are the substract of some positive implicational calculi. As a first aproximation to their representation we Study the Sales algebras that are discrete and linear.

In this paper we present a caracteritzation of the finite Sales algebras and we give also an infinite discrete Sales algebra such that we can identify with it every linear infinite simple Sales algebra with a penultimate element. The most interes ting result is the first Theorem .In it we show that certain elements of the Sales algebras generate finit linear subalgebras of them.

Per algebras de Sales (a.de.S.), veigi's [2] , [4], entenem una terna $(A, ., u)$ amb A un conjunt, . una operació binària definida en A , i u un element distingit de A (operació 0-ària), tal que per tot $a, b, c \in A$, satisfà:

- 1.- $a.a = u$
- 2.- $a.b = b.a = u$, implica $a = b$
- 3.- $a.u = u$
- 4.- $a.(b.c) = b.(a.c)$
- 5.- $(a.b).((c.a).(c.b)) = u$
- 6.- $(a.b).b = (b.a).a$ (Sales [3])

Es a dir, $(A, ., u)$ és un algebra d- completa que satisfà 6. A més(veigi's [2] [4]), la relació $a \leq b$ sii $a.b = u$, és d'ordre i u n'és l'element màxim; és a dir, $(A, ., u)$ es àlgebra imlicativa. D'altra banda $a \vee b = (a.b).b$ és el suprem de a i b i $(A, ., \vee, u)$ és suprareticole d- complet (op. cit).

Quan (A, \leq) té element mínim 0 ([2] , [4]), alesh-

hores fent $\neg a = a.0$, i $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$ s'obté un àlgebra de Wajsberg (a.de W.), i es té que $(A, \neg, \wedge, \vee, \cdot, u, 0, \neg)$ es un reticle d- complet distributiu amb negació forta de Morgan. L'obtenció i les propietats de les àlgebres esmentades poden trobar-se en [2] i [4]. També en [1], (en reben el nom de MV-àlgebres), encara que utilitzen unes altres operacions: $\ast, +, \neg$; malgrat que es pot veure que:
 $a + b = \neg a.b$, i $a \ast b = \neg(\neg a + \neg b)$.

En primer lloc provem el següent Teorema:

TEOREMA 1.- Si (A, \neg, u) és a.de S. i $a \in A$ és tal que existeixen $c \in A$, $n \in \mathbb{N}$ i $a^n.c = a$; aleshores:
 $(W_c(a) = \{c, a.c, a^2.c, \dots, a^n.c = a, u\}, \neg, u)$ és subàlgebra lineal de (A, \neg, u) .

Abans ens ha calgut veure:

Lema 1. Si (a, \neg, u) és a.de S. i $z \in A$ és tal que existeix $a \in A$ i $z.a = a$, $a.z = u$; aleshores $z = u$.

Lema 2. En les hipòtesis del Teorema 1.
 Per tot $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n-1$, es satisfà:
 A. $(a^{n+k}.c).(a^r.c) = a^{n-k+1}.c$,
 per tot $1 \leq r \leq n-k$.
 B. $(a^k.c) = (a^{n-k+1}.c).c$.

Com a conseqüències importants obtenim:

I. Si (A, \neg, u) és un algebra de Wajsberg simple amb penúltim element a , aleshores $A = W_c(a)$, on c es el primer element.

Aquest resultat fou donat anteriorment per C.C.Chang [1] usant unes tècniques diferents, que no permeten traslladar el problema a les a. de S.

II. Si (A, \neg, u) és a. de S. simple i lineal amb penúltim element aleshores:

- 1.- si $\text{card}(A) < \aleph_0$, es el cas 1
- 2.- si $\text{card}(A) \geq \aleph_0$, aleshores (A, \neg, u) és isomorf a $(N, \rightarrow, 0)$ on $n \rightarrow m = n \cdot n$
- 3.- De 1 i 2 deduí $\text{card}(A) \leq \aleph_0$.

Per demostrar-ho hem definit, en primer lloc, dos tipus d'aplicacions de A en N : Si $d \in A$:

$$g_d(a) = \begin{cases} m & \text{sii } a^m \cdot d = a \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

$$i \quad G_d(a) = \begin{cases} \min \{1/a^l \cdot d = u\} \\ 0 & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

per tot $a \in A$.

I es satisfà:

Lema 3. Si (A, \cdot, u) és a. de S. amb penúltim element a, aleshores (A, \cdot, u) és simple sii $g_d(a) \geq 1$ per tot $d \in A$.

Lema 4. Tota àlgebra lineal de Sales finita és simple

i d'aquests es dedueix que :

en I.- si $d \in A$ $d = a \cdot g_c(a) \cdot g_d(a) \cdot c$,

en II.- l'isomorfisme ve donat per l'aplicació de A en N , tal que:

$$f(u) = 0, f(a) = 1, f(d) = G_d(a), d \neq a, d \neq u$$

i resulta que f és isomorfisme d'àlgebres de Sales.

Cites:

- [1] CHANG, C.C. "Algebraic analysis of many valued logics", T.A.M.S. July 1958.
- [2] RODRIGUEZ SALAS, A.J. Treballs previs a la redacció de la seva tesi doctoral. Universitat de Barcelona.
- [3] SALES, F. d'A. "Les algebres de la Lògica". Curs monogràfic de doctorat. Universitat de Barcelona 1976.
- [4] TORRENS TORRELL, A. "Estudi i algebratització de certes logiques: Algebres d-completes". Tesi doctoral. Pendent de Lectura. Barcelona 1980.