Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

NOTAS SOBRE DIFUSION DE ARNOLD

Amadeo Delshams

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Abstract.- KAM theorem doesn't ensure stability for dynamical systems close to integrable Hamiltonian systems when the dimension of the phase space is more than four. In this case, irregular unstable orbits may occur, arbitrarily close to stable invariant tori. This is the Arnold diffusion. We study here some sufficient conditions which guarantee the existence of this diffusion.

§1.-Introducción. Un problema de gran importancia en los sistemas dinámicos, y en particular, en los sistemas hamiltonianos, es el problema de la inestabilidad, tanto de tipo local (en el entorno de un conjunto invariante por el flujo), como de tipo global. De gran importancia es el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser { 1} para sistemas perturbados de sistemas integrables, que nos asegura que casi todo toro invariante (en el sentido de la medida de Lebesgue) del sistema no perturbado, se deforma ligeramente al añadir la perturbación. Esto asegura estabilidad para sistemas con dos grados de libertad, pues los toros invariantes separan la hipersuperficie donde el hamiltoniano es constante, cosa que no ocurre cuando hay más de dos grados de libertad, donde una órbita que se apoya en el complementario de estos toros invariantes, próxima en un punto a uno de ellos, puede alejarse hasta una distancia arbitrariamente grande, si logra "esquivar" esta colección de toros invariantes.

El primer ejemplo de ello lo dio Arnold { 2}, que ideó el proceso de las cadenas de transición, que permiten empalmar las variedades invariantes estable e inestable de distintos toros de transición. Este fenómeno recibe el nombre de difusión de Arnold (para más detalles véase { 3}). Veamos a continuación algunas condiciones suficientes para la existencia de estas variedades invariantes pertenecientes a toros así mismo invariantes, para pasar luego al problema de inestabilidad global.

§2.-Inestabilidad local. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1a)\begin{cases}\dot{I}_1 = F(I_1,\phi_1)\\ \dot{\phi}_1 = f(I_1,\phi_1)\end{cases} \quad (1b)\begin{cases}\dot{I}_2 = 0 & I_1\in R^d,\ \phi_1\in T^d\\ \dot{\phi}_2 = I_2 & I_2\in R^e,\ \phi_2\in T^e,\end{cases}$$

claramente dividido en dos subsistemas, el primero de ellos con F,f 2π-periódicas en ϕ_1, de clase C^1, siendo el origen $I_1=0,\phi_1=0$ un punto fijo hiperbólico. Para cada $\omega\in R^e$, el sistema (1) tiene toros invariantes T_ω de ecuaciones $I_1=0$, $\phi_1=0$, $I_2=\omega$. Aplicando el teorema de Hartman{ 4}, existen variedades invariantes inestable y estable $\bar{W}^u_\omega$, $\bar{W}^s_\omega$ del sistema (1) con $\bar{W}^u_\omega\cap\bar{W}^s_\omega=T_\omega$, donde las trayectorias de $\bar{W}^u_\omega$ se acercan a T_ω cuando $t\to-\infty$, y las trayectorias de $\bar{W}^s_\omega$ se acercan a T_ω cuando $t\to\infty$. Diremos que T_ω es un toro con mostachos, siendo $\bar{W}^u_\omega$ el mostacho saliente, y $\bar{W}^s_\omega$ el mostacho entrante.

Nos preguntamos ahora: ¿Qué ocurre si perturbamos ligeramente el sistema (1) ? ¿El sistema perturbado contiene toros con mostachos, si la perturbación es suficientemente pequeña? .

La respuesta es afirmativa cuando la perturbación no afecta a los toros T_ω.

Proposición.- Sea el sistema

$$(2)\begin{cases}\dot{I}_1= F(I_1,\phi_1) + \varepsilon G_1(I_1,\phi_1,I_2,\phi_2,t)\ ,\ \dot{I}_2= \varepsilon G_2(I_1,\phi_1,I_2,\phi_2,t)\\ \dot{\phi}_1= f(I_1,\phi_1) + \varepsilon g_1(I_1,\phi_1,I_2,\phi_2,t)\ ,\ \dot{\phi}_2= I_2 + \varepsilon g_2(I_1,\phi_1,I_2,\phi_2,t)\end{cases}$$

con $I_1,\phi_1,I_2,\phi_2,F,f$ cumpliendo las hipótesis del sistema (1), con $G=(G_1,g_1,G_2,g_2)$ de clase C^2, 2π-periódica con respecto a ϕ_1,ϕ_2,t; anulándose en T_ω ,$\omega\in R^e$: $G(0,0,\omega,\phi_2,t)$ $\forall\phi_2\in T^e,\forall t\in T$. Entonces, existe $\varepsilon_o>0$ tal que si $|\varepsilon|<\varepsilon_o$, el toro T_ω es un toro con mostachos del espacio de fases ampliado.

La demostración se hace por el método standard de las aproximaciones sucesivas.

Así pues, para perturbaciones que se anulan sobre los toros con mostachos del sistema no perturbado, el sistema perturbado (2)continua teniendo toros con mostachos, éstos ligeramente deformados. La existencia de estos mostachos implica la inestabilidad local de estos toros invariantes. Pasemos ahora al concepto global.

§3.- Inestabilidad global. Una propiedad importante del sistema (1), que no habíamos citado, es que los toros $\mathcal{T}_\omega$ son toros de transición, es decir que entornos arbitrarios de dos puntos arbitrarios del mostacho entrante y saliente respectivamente, están conectados por órbitas del sistema (1), siempre y cuando ω sea inconmensurable ($\sum_1^e n_i\omega_i=0,\ n_i\in Z\to n_i=0,\ i=1,\dots,n$), pues entonces cada órbita del subsistema (1b) es densa . Es de esperar que esto también se cumpla en el sistema perturbado (2), aunque parece ser necesario imponer unas condiciones más restrictivas a ω. Actualmente se está trabajando en ello.

Expliquemos brevemente el mecanismo que asegura la inestabilidad global. Se basa en encontrar una cadena de toros de transición $T_1,\dots,T_n$, tales que para cada i, la variedad invariante inestable W_i^u del toro T_i corta transversalmente a la variedad invariante estable W_{i+1}^s del toro T_{i+1} ($W_i^u \pitchfork W_{i+1}^s$). Así se puede asegurar que un entorno arbitrario de un punto $x_1\in W_1^s$ está conectado con cualquier entorno de cualquier punto $x_n\in W_n^u$ por una órbita del sistema. Para poder aplicar este mecanismo de cadenas de transición, es necesario primeramente estudiar bajo qué condiciones se cumple $W_{\bar\omega}^u\pitchfork W_\omega^s$ en nuestro sistema perturbado (2), siendo $W_{\bar\omega}^u$ el mostacho saliente de $T_{\bar\omega}$, W_ω^s el mostacho entrante de T_ω del sistema (2), para dos frecuencias $\bar\omega,\omega\in R^e$. Esto equivale a resolver unas ecuaciones que en el caso en que el sistema (1) sea integrable, se simplifican considerablemente, pues podemos suponer $\bar W_\omega^s\subset\bar W_\omega^u$, por ejemplo. Sean V^s, V^u las ecuaciones de estas variedades invariantes del sistema no perturbado (1), de flujo $\psi(t-t^o,x^o)$, $x^o=(I_1^o,\phi_1^o,I_2^o,\phi_2^o)$. Trabajando en primera aproximación, obtenemos la siguiente

Proposición. Transversalidad de las variedades invariantes

Sea $y^o=(x^o,t^o)=(I_1^o,\phi_1^o,I_2^o,\phi_2^o,t^o)$. Si

1°) $V^s(I_1^o,\phi_1^o)=$

$$-\varepsilon\int_{t^o}^{\infty}\Big\{\frac{\partial V^s}{\partial I_1}(I_1(t-t^o,I_1^o,\phi_1^o),\phi_1(t-t^o,I_1^o,\phi_1^o))G_1(\psi(t-t^o,x^o),t-t^o)+$$
$$+\frac{\partial V^s}{\partial\phi_1}(I_1(t-t^o,I_1^o,\phi_1^o),\phi_1(t-t^o,I_1^o,\phi_1^o))g_1(\psi(t-t^o,x^o),t-t^o)\Big\}dt$$

$$I_2^o-\omega=-\varepsilon\int_{t^o}^{\infty}G_2(\psi(t-t^o,x^o),t-t^o)dt$$

$$2°)\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\frac{\partial V^u}{\partial I_1}(I_1(t-t^o,I_1^o,\phi_1^o),\phi_1(t-t^o,I_1^o,\phi_1^o))G_1(\psi(t-t^o,x^o),t-t^o)\ +$$

$$+\ \frac{\partial V^u}{\partial \phi_1}(I_1(t-t^o,I_1^o,\phi_1^o),\phi_1(t-t^o,I_1^o,\phi_1^o))g_1(\psi(t-t^o,x^o),t-t^o)\Big\}dt = 0$$

$$\bar{\omega}-\omega = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} G_2(\psi(t-t^o,x^{\bar{o}}),t-t^o)dt$$

3°) Para t^o fijo, x^o es solución única de 1°) y 2°).(Aquí por solución única se sobreentiende que la diferencial sea inversible. Así, la ecuación $f(x)=0$ tendrá solución única si existe $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x})=0$ y $Df(\bar{x})$ es inversible).

Entonces, bajo las hipótesis 1°),2°),3°), $W_\omega^u \pitchfork W_\omega^s$ en y^o.

Fijémonos que las integrales contienen únicamente el flujo del sistema no perturbado (1), que se supone conocido. Esta proposición aplicada a cada caso particular (mediante el cálculo efectivo de las integrales de 1°),2°)), es la que nos da las condiciones suficientes para la existencia de cadenas de transición para una sucesión $\omega_1,\ldots,\omega_n$ (suficientemente adecuados para que los toros $T_{\omega_1},\ldots,T_{\omega_n}$, sean toros de transición), con lo que se puede establecer la inestabilidad global.

§4.- Bibliografía

{1} Arnold, V.I. Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian, Russian Math. Surveys V 18 N 5, 1.963, pag. 9-36.

{2} Arnold, V.I. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Sov. Math. Doklady. V 5 N 3, 1.964, pag. 581-585.

{3} Arnold, V.I. et Avez,A. Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique, Gauthier-Villars, 1.967.

{4} Hartman, P. Ordinary Differential Equations, John Wiley, 1.964.