Avaluació empírica del CAPM aplicat al cas espanyol

ESTER BORRULL BLANES

Universitat de Barcelona
Facultat d'Economia i Empresa
Grau d'Economia

Febrer 2019

Tutor: Dr. Francesc Ortí Celma
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

ABSTRACT I PARAULES CLAU

En aquest treball realitzo una investigació empírica sobre el CAPM aplicat a l'economia espanyola. En primer lloc, estableixo el marc conceptual i teòric sobre el qual es basarà l'anàlisi, incloent anàlisi de mitja-variància, teorema de separació de dos fons i CAPM. El segon bloc es basa en la investigació empírica, on selecciono 43 empreses que cotitzen a la borsa espanyola durant un període de 15 anys. En aquesta part estimo les betes dels actius mitjançant dos indicadors de mercat. Per un costat, l'*Índice General de la Bolsa de Madrid* i, per l'altre, la cartera eficient formada a partir d'una combinació dels actius.
Els resultats obtinguts són consistents amb la teoria. La cartera eficient calculada té un gran poder explicatiu, però té la flaquesa d'haver estat formada de forma endògena per dades ja observades, mentre que l'IGBM resulta no ser un bon indicador del mercat ja que no és capaç d'explicar amb precisió l'evolució dels rendiments dels actius.

Beta, alfa de Jensen, rendiments esperats, volatilitat, CAPM, cartera eficient, Línia de Mercat de Capitals, *Security Market Line*, *Índice General de la Bolsa de Madrid*.

In this report I perform an empirical research about the CAPM applied to the Spanish economy. In first place, I set the conceptual and theoretical framework on which my analysis will be based, including mean-variance analysis, two-fund separation theorem and CAPM. The second part is based on the empirical evaluation itself, where I select 43 firms that are listed in the Spanish stock market during a 15 years period. In this section I estimate the associate betas of the assets using two market indicators. On one hand, *Índice General de la Bolsa de Madrid* while, on the other, the efficient portfolio created from an optimal combination of the assets.
The obtained results are consistent with the theory. The efficient portfolio computed has a great explanatory power, but it has the drawback of having been created endogenously by observed data, while IGBM turns out not to be a good market indicator since it is not capable of fully explain with accuracy the evolution of the asset's returns.

Beta, Jensen's alpha, expected returns, volatility, CAPM, efficient portfolio, Capital Market Line, Security Market Line, *Índice General de la Bolsa de Madrid*.

ÍNDEX

I. INTRODUCCIÓ

L'any 1952 Harry Markowitz va publicar "*Portfolio Selection*", l'inici de la teoria moderna de carteres. Dotze anys més tard, William Sharpe (1964), va revolucionar les finances modernes amb el CAPM (*Capital Asset Pricing Model)*, una teoria de formació de preus d'actius financers.

El model CAPM destaca per la seva senzillesa i pel fet d'oferir uns resultats fàcils d'interpretar, així doncs, s'ha convertit en un dels principals instruments pel que fa a la valoració d'actius financers, a la predicció de riscos, a l'avaluació del rendiment de carteres i, també, com a eina de selecció de projectes d'inversió.

En aquest treball es pretén aplicar el model CAPM per diferents actius que cotitzen a la borsa espanyola. L'objectiu és, per una part, avaluar el CAPM com a model de valoració financer, contrastant els resultats obtinguts a partir de la estimació de les rendibilitats de diferents empreses de l'economia espanyola amb les dades reals. Per altra banda, es vol destacar la importància de la selecció de dades utilitzant, per a una variable clau, dues aproximacions diferents, i comparant els resultats obtinguts.

El cos del treball s'estructura en dos grans blocs: en primer lloc estableixo les bases teòriques que estructuren el model per així poder entendre i contextualitzar els resultats obtinguts: defineixo els models de Markowitz i CAPM, així com les eines prèvies per al seu desenvolupament, les seves flaqueses i les possibles propostes de millora.
El segon gran apartat del treball es centra en l'avaluació empírica. Aquesta part es divideix en diferents subapartats: aplicació del model de Markowitz i, seguidament, del CAPM, amb les seves respectives interpretacions i, finalment, les conclusions.

Per al desenvolupament del model de Markowitz, la metodologia emprada ha sigut el *Two-fund separation theorem* (teorema de separació de dos fons). Per al còmput del CAPM, s'han utilitzat els resultats obtinguts anteriorment i s'ha aplicat una regressió economètrica per a calcular els estimadors del model.

En aquest treball he seleccionat 43 empreses que cotitzen a la borsa espanyola, durant un període de 15 anys (del gener del 2002 al desembre del 2016). Com a indicador de l'actiu lliure de risc, he escollit el rendiment del bo espanyol a 10 anys, i finalment, com a indicador de mercat, el rendiment de l'*Índice General de la Bolsa de Madrid* (IGBM).

La finalitat és crear un perfil de cada una de les empreses en termes de rendibilitat esperada i risc per, posteriorment, establir un indicador de mercat (tant exogen con endogen) i aplicar el model CAPM.
La intenció no es aconseguir que el model repliqui de forma perfecta el comportament de les empreses, sinó estudiar la metodologia i entendre els resultats, així com avaluar diferents alternatives dins del propi model.

Les dades s’han extret a partir de *Yahoo Finance*, utilitzant un codi en llenguatge de programació *Python*.
L’elaboració de tot l’anàlisi s’ha realitzat mitjançant el llenguatge de programació de *Matlab*. Tot el codi es troba als annexos.

Personalment considero que aquesta investigació suposa un oportunitat no només pels resultats que s’obtinguin, sinó com a experiència formativa per entendre millor un dels principals instruments utilitzats tant avui en dia com històricament en el sector financer.

II. MARC DE REFERÈNCIA

1. Rendiment esperat

Segons (Sharpe, Portfolio Theory and Capital Markets, 2000), el rendiment esperat d'una cartera és la mitja ponderada dels rendiments esperats dels actius individuals. Així, un actiu tindrà un impacte major o menor al rendiment total de la cartera depenent de la seva ponderació així com del seu propi rendiment.
La següent equació mostra el rendiment net d'un actiu que paga dividends:

$$R_{jt} = \frac{P_{jt} + D_{jt} - P_{jt-1}}{P_{jt-1}}$$

On:
R_{jt} = rendiment net de l'acció j
P_{jt} = preu de l'acció en el temps t
P_{jt-1} = preu de l'acció en el temps t-1
D_{jt} = dividends de l'acció en temps t

El rendiment esperat d'un actiu es pot definir com la mitja ponderada del rendiment de l'actiu en tots els possibles estats de la naturalesa:

$$E(R_{jt}) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{jts}$$

On:
$E(R_{jt})$ = rendiment esperat de l'acció j en el temps t
π_s = ponderació de l'estat de la naturalesa s
R_{jts} = rendiment de l'actiu j en el temps t i l'estat de la naturalesa s

El rendiment d'una cartera d'inversió es defineix de la següent manera:

$$R_{pt} = \sum_{j=1}^{N} R_{jt}\omega_j \quad \text{amb} \quad \omega_j = \frac{P_{jt-1}n_j}{\sum_{j=1}^{N} P_{jt-1}n_j} \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{N} \omega_j = 1$$

On:
R_{pt} = rendiment de la cartera p en el temps t
R_{jt} = rendiment de l'actiu j en el temps t
ω_j = ponderació de l'actiu j
P_{jt-1} = preu de l'actiu j en el temps t-1
n_j = nombre d'actius j

Així doncs, el rendiment esperat d'una cartera d'inversió serà:

$$E(R_p) = E\left(\sum_{j=1}^{N} \omega_j R_{js}\right) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j E(R_j)$$

On:
$E(R_p)$ = rendiment esperat de la cartera p
R_{js} = rendiment de l'actiu j en l'estat de la naturalesa s
ω_j = ponderació de l'actiu j
$E(R_j)$ = rendiment esperat de l'actiu j

2. Mesura de risc

La desviació estàndard és la mesura de la incertesa associada a un actiu. Es fa servir per quantificar el risc d'una inversió i, en finances, és sovint anomenada volatilitat.
En un conjunt dades, la desviació estàndard és una mesura de dispersió d'aquestes envers la seva mitja. Així doncs, com més disperses estiguin les dades, major serà la seva desviació estàndard (Sharpe, Portfolio Theory and Capital Markets, 2000).
La següent fórmula mostra el càlcul de la variància, a partir de la qual s'obté la volatilitat (desviació estàndard), la seva arrel quadrada.

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 \sigma_j^2 + 2\sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ h>j}}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh}$$

On:
σ^2_p = variància de la cartera p
σ^2_j = variància de l'actiu j
ω_j ω_h = ponderacions des actius j i h
σ_{jh} = covariància entre els actius j i h

L'últim terme de la equació fa referència la suma de les covariàncies entre els diferents actius de la cartera d'inversió. En cas de que els actius siguin ortogonals (no correlacionats), aquest terme serà igual a 0.

2.1. Covariància

Markowitz va trobar una manera de determinar el risc d'una cartera d'inversió, ho va anomenar covariància (Markowitz, 1959).
La covariància mesura la direcció d'un grup d'accions. Dues accions presenten una elevada covariància quan els seus preus tendeixen a moure's de la mateixa manera. Pel contrari, una baixa covariància descriu dues accions que es mouen en direccions oposades.
El risc d'una cartera d'inversió no és la variància dels actius que la componen, sinó la covariància del conjunt de la cartera (Markowitz, 1959). Així doncs, com més elevada sigui la covariància de la cartera, major és la possibilitat de que aquesta es vegi molt afectada per un canvi en l'economia.

2.2. Risc sistemàtic i no sistemàtic

Segons (Ahmed, 1998) existeixen dos tipus de risc, el risc sistemàtic (o risc de mercat o risc no diversificable) i el risc no sistemàtic (o risc diversificable).
El risc no sistemàtic engloba el conjunt de factors propis d'una empresa o indústria, i afecta només a la rendibilitat de les seves accions. Per altra banda, el risc de mercat engloba al conjunt de factors econòmics, monetaris, polítics i socials que provoquen les variacions de la rendibilitat d'un actiu.
Si els components d'una cartera no estan correlacionats, la diversificació proporciona una reducció substancial del risc. Tot i així, sempre hi haurà una petita proporció de risc que no es podrà eliminar, el risc sistemàtic.

3. Model de Markowitz

Markowitz va desenvolupar la Teoria Moderna de Selecció de Carteres. Va assumir que la majoria d'inversors són cautelosos a l'hora d'invertir, i volen el mínim risc possible per obtenir el major rendiment possible. Aquesta teoria afirma que no és suficient fixar-se només amb el risc esperat i el rendiment d'una acció en particular. Invertint en més d'un actiu, l'inversor pot obtenir els beneficis de la diversificació: una reducció de la volatilitat del conjunt de la cartera (Markowitz, 1959).
L'objectiu del model és optimitzar la relació entre risc i rendiment creant carteres d'actius determinats pels seus retorns, riscs i covariàncies.

3.1. Hipòtesis del model

- És un model estàtic.
- Els n actius que formaran part de la cartera són coneguts.
- Tots els actius seleccionats tenen risc, agafant com a mesura de risc la variància o volatilitat.
- Es coneixen les variables aleatòries de la rendibilitat de tots els actius que, a més, es distribuiran segons lleis normals.
- Tot el pressupost que es destini a la constitució de la cartera s'ha d'esgotar.
- Els inversors son adversos al risc.
- No s'admet la venda a crèdit o venda al descobert.
- Els actius són infinitament divisibles i no es tenen en compte cap tipus de despeses, ni inflació, ni impostos.

3.2. Definicions

- **Conjunt d'oportunitats d'inversió**: són tots els parells de rendiments amb mitja i desviació estàndard que es poden obtenir combinant N actius amb risc.
  Exemple amb 3 actius (A, B i C):

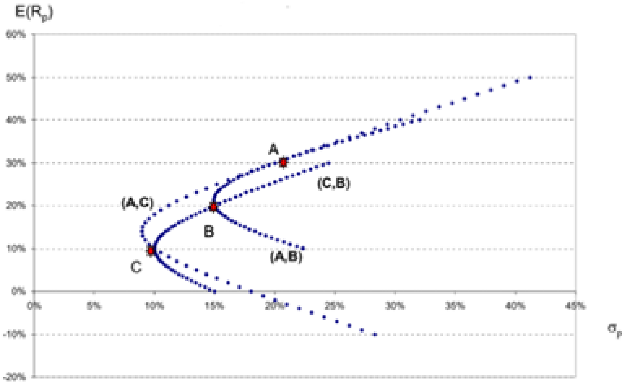

Figura 1

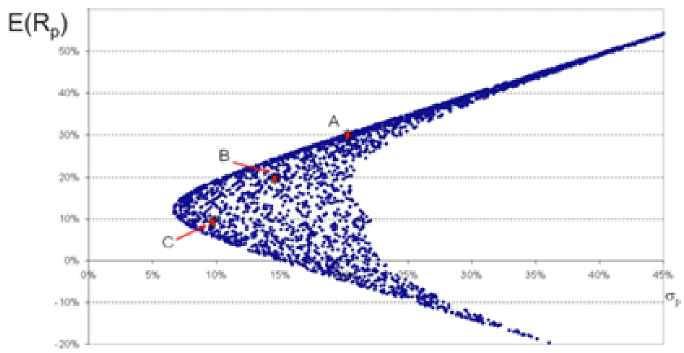

Figura 2

En la figura 1 es representen els tres actius A, B i C amb les possibles combinacions entre els parells d'actius. La figura 2 mostra totes les possibles combinacions entre els tres actius.

- **Frontera**: és el conjunt de carteres amb mínima variància d'entre tots els que tenen el mateix rendiment esperat.
- **Cartera eficient**: una cartera és eficient quan no existeix cap altra amb el mateix risc que proporcioni un major rendiment.
- **Frontera eficient**: és la corba formada pel conjunt de totes les carteres eficients.

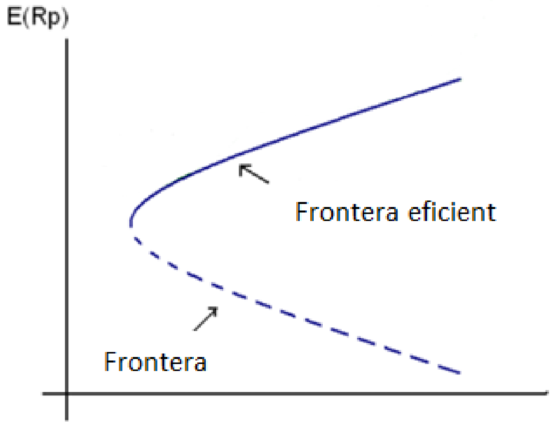

Figura 3

La figura 3 mostra la frontera del conjunt d'inversió. La línia discontínua representa la frontera no eficient, mentre que la contínua és la frontera eficient.

3.3. Model de separació de dos fons (Two-fund separation theorem)

El model de separació de dos fons permet trobar la frontera de Markowitz combinant dues carteres, w_1 (cartera tangent amb la línia de 45°) i w_2 (cartera amb mínima variància).

L'objectiu és trobar una cartera amb mínima variància i màxim rendiment esperat, tenint en compte que la suma de les ponderacions de cada empresa ha de ser igual a 1.
El problema matemàtic és el següent:

$$\min_{\{\omega_j;\, j=1,2,\ldots,N\}} \sigma_e^2 \qquad \sum_{j=1}^{N} \omega_j E(R_j) = E(R_e) \qquad \sum_{j=1}^{N} \omega_j = 1$$

Per resoldre aquest problema de minimització utilitzem el lagrangià,

$$L = \sigma_e^2 + 2\lambda\left[E(R_e) - \sum_{j=1}^{N} \omega_j E(R_j) - \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \omega_j\right) r_f\right]$$

i la solució ve donada per les següents igualtats:

$$w_1 = \frac{V^{-1}E(R)}{1_N{}'V^{-1}E(R)} \qquad w_2 = \frac{V^{-1}1_N}{1'_N V^{-1}1_N}$$

w_1 és el vector de ponderacions que forma la cartera tangent amb la línia de 45º, i w_2 és el vector de ponderacions que forma la cartera amb mínima variància.
Gràficament:

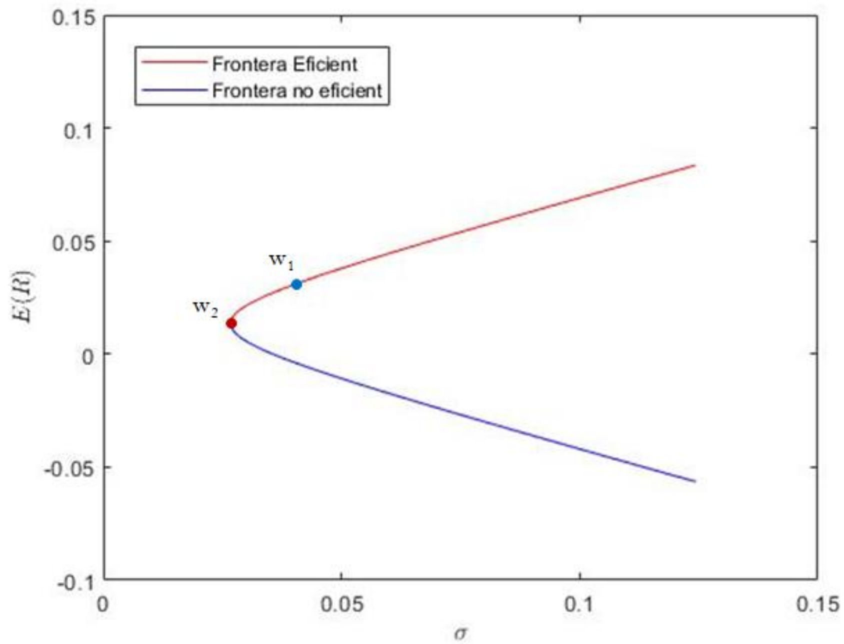

Figura 4

La frontera eficient és el tram vermell de la corba, que està per damunt de la cartera amb mínima variància (w_2).

Una vegada es coneix la frontera eficient, cada inversor, d'acord amb les seves preferències, escollirà la seva cartera òptima.
Gràficament:

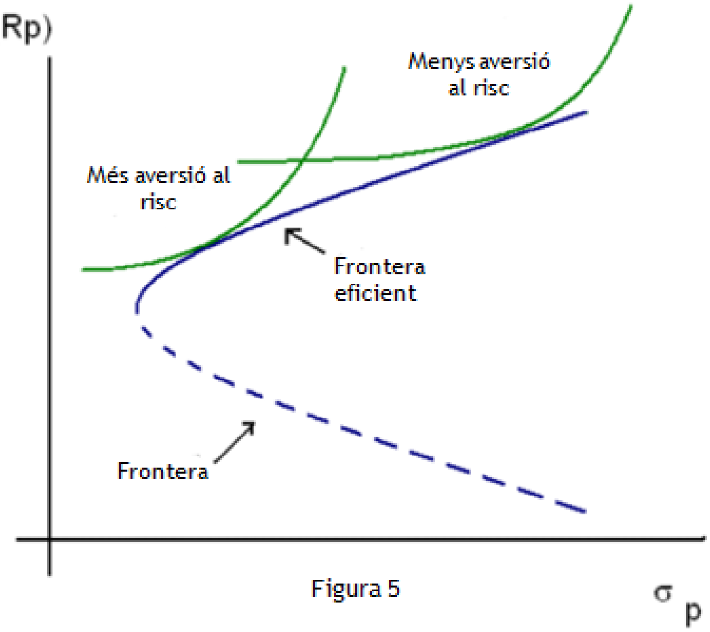

Figura 5

4. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

El model CAPM està basat en la Teoria Moderna de Selecció de Carteres de Markowitz. Com s'ha descrit abans, el model de Markowitz assumeix que l'inversor és advers al risc i vol aconseguir el mínim risc possible amb el major rendiment possible. Més tard, aquest model va ser ampliat per (Sharpe, 1964) i (Linter, 1965), amb algunes aportacions de (Black, 1972) i (Mossin, 1966).

Aquest nou model afegeix una assumpció clau al model de Markowitz:
- Tots els inversors poden prestar i demanar prestat de forma il·limitada l'actiu lliure de risc.

El CAPM s'utilitza per:
- Valorar actius amb risc (per obtenir el cost de capital)
- Seleccionar projectes d'inversió
- Avaluar del rendiment d'una cartera

4.1. Hipòtesis del model

- Tots els inversors del mercat tenen el mateix horitzó temporal.
- Tots els actius del mercat, N, poden formar part de la cartera.
- Existeix una taxa d'interès a la qual podem invertir o endeutar-nos sense risc. La resta d'actius tenen risc.
- Tots els inversors del mercat tenen expectatives homogènies sobre les distribucions de rendibilitat de tots els actius que, a més, es distribueixen segons lleis Normals.
- Tot el capital dels inversors està distribuït entre tots els actius del mercat.
- No s'admet la venda a crèdit o venda al descobert.
- Els actius són infinitament divisibles i no es tenen en compte cap tipus de despeses, ni inflació, ni impostos.

4.2. Combinació d'actius amb l'actiu lliure de risc

La següent expressió mostra els efectes de combinar l'actiu lliure de risc amb la cartera d'inversió:

$$R_p = pR_X + (1-p)r_f$$
$$E(R_p) = pE(R_X) + (1-p)r_f = r_f + \big(E(R_X) - r_f\big)p$$
$$\sigma_p^2 = p^2\sigma_X^2$$
$$\Rightarrow \sigma_p = p\ \sigma_X \text{ if } p > 0 \qquad E(R_p) = r_f + \big(E(R_X) - r_f\big)\frac{\sigma_p}{\sigma_X} \text{ if } p > 0$$
$$\Rightarrow \sigma_p = -p\ \sigma_X \text{ if } p < 0 \qquad E(R_p) = r_f - \big(E(R_X) - r_f\big)\frac{\sigma_p}{\sigma_X} \text{ if } p < 0$$

$$\frac{\big(E(R_X) - r_f\big)}{\sigma_X}$$ = **Ràtio de Sharpe**

On:
R_p = rendiment de la cartera p
p = ponderació de l'actiu x (o cartera x)
r_f = rendiment de l'actiu lliure de risc
σ^2_p = variància de la cartera p
σ^2_x = variància de l'actiu x (o cartera x)

El ràtio de Sharpe indica la rendibilitat de la inversió ajustada al seu risc. El fet d'ajustar el risc ens permet comparar, per exemple, fons amb diferents riscos i saber quin és millor. Com més gran és el ràtio de Sharpe, millor és la rendibilitat del fons d'inversió en relació a la quantitat de risc. Si el ràtio és negatiu, indica que la rendibilitat de la inversió ha sigut menor a la rendibilitat d'un actiu sense risc. És a dir, que és més rentable invertir en bons o dipòsits sense risc, que invertir en aquest fons x.

4.3. Línia del Mercat de Capitals (LMC)

La LMC és la nova frontera eficient formada a partir de la combinació de l'actiu lliure de risc amb la cartera tangent a la frontera de Markowitz. Aquesta cartera és aquella que maximitza el Ràtio de Sharpe (pendent de la LMC).
Aquest gràfic ens mostra un exemple de diferents maneres de combinar l'actiu lliure de risc amb un actiu amb risc.

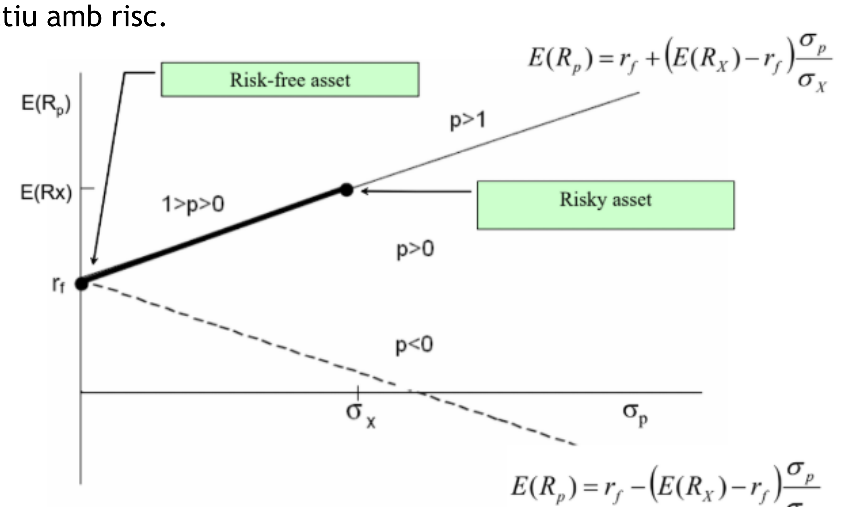

Figura 6

En el punt (0,r_f) (actiu lliure de risc), p=0, és a dir, aquest és el punt on tot el capital està invertit en l'actiu sense risc. En canvi, el punt *risky asset* correspon a p=1, tot el capital s'inverteix en l'actiu amb risc. Així doncs, el tram on 1>p>0 indicarà totes les possibles combinacions entre aquests dos actius.

D'altra banda, si es permet el *short selling*[1], s'amplien les possibilitats d'inversió en el segments p>1 (es ven actiu sense risc per adquirir més quantitat d'actiu amb risc) i p<0 (es ven actiu amb risc per comprar actiu sense risc).

4.3.1. Procediment matemàtic

La LMC és la recta que mostra totes les possibles combinacions de l'actiu lliure de risc amb la cartera òptima. Així doncs, el primer pas per trobar la nova frontera del CAPM és calcular aquesta cartera.

El plantejament matemàtic és similar al de Markowitz però afegint la possibilitat d'invertir en l'actiu lliure de risc. L'objectiu és trobar una cartera amb mínima variància, tenint en compte que també s'exigeix un màxim rendiment esperat. Així doncs, la nova minimització és la següent:

$$\min_{\{\omega_j ; j=1,2,\ldots,N\}} \sigma_e^2 \qquad \sum_{j=1}^{N} \omega_j E(R_j) + \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \omega_j\right) r_f = E(R_e)$$

Per a resoldre aquest problema utilitzem el lagrangià,

$$L = \sigma_e^2 + 2\lambda \left[E(R_e) - \sum_{j=1}^{N} \omega_j E(R_j) - \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \omega_j\right) r_f \right]$$

i la solució ve donada per la següent igualtat:

$$\omega_T = \frac{V^{-1}\left(E(R) - r_f 1_N\right)}{1'_N V^{-1}\left(E(R) - r_f 1_N\right)}$$

On:
ωT = vector de ponderacions que forma la cartera tangent (cartera de mercat)
V = matriu de variàncies i covariàncies
E(R) = rendiment esperat
$\boldsymbol{r_f}$ = rendiment de l'actiu lliure de risc
$\boldsymbol{1_N}$ = columna de 1 de dimensió N

---

[1] operació especulativa que permet als inversors vendre títols prestats, o que encara no tenen, amb l'esperança de tornar a comprar-los més endavant a un menor preu i obtenir un benefici.

Per definició, ω_T és la cartera de mercat (cartera tangent) que inclou el conjunt de tots els actius del mercat. En la pràctica, aquesta cartera no és observable i normalment s'utilitza un índex de referència, o es computa una cartera de mercat a partir de una mostra d'actius.

Aquesta cartera de mercat ens permet obtenir l'equació de la frontera del CAPM, que és coneguda com la Línia del Mercat de Capitals:

$$E(R_e) = r_f + \frac{E(R_T) - r_f}{\sigma_T}\sigma_e$$

On:
E(R$_e$) = rendiment esperat de la cartera eficient
E(R$_T$) = rendiment esperat de la cartera tangent (cartera de mercat)
r_f = rendiment de l'actiu lliure de risc
σ^2_e = variància de la cartera eficient
σ^2_T = variància de la cartera tangent (cartera de mercat)

Gràficament:

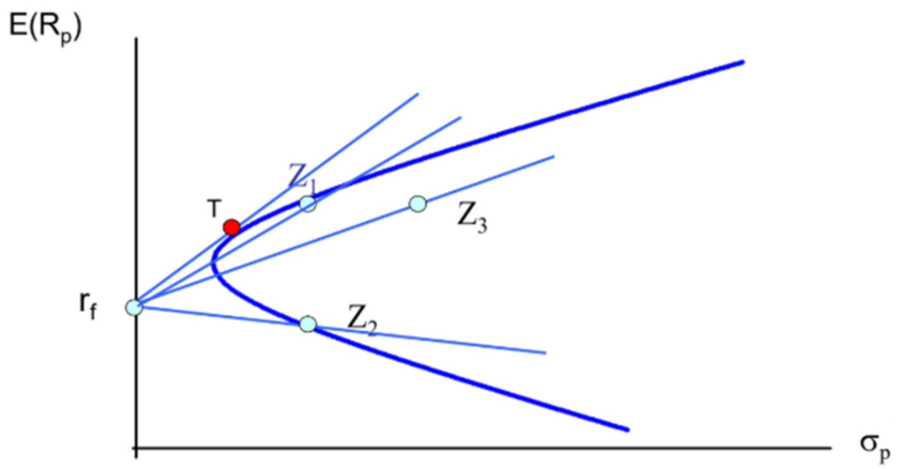

Figura 7

En aquest gràfic es mostren diverses combinacions de carteres amb l'actiu lliure de risc. Z_1, Z_2 i Z_3 són alguns exemples de carteres d'inversió, i la línia que les uneix amb l'actiu lliure de risc correspon a totes les possibles combinacions.
La cartera T però, és la cartera òptima mostrada en l'apartat anterior (ω_T). Com es pot apreciar, aquesta és la que aconsegueix maximitzar la pendent de la LMC (Ràtio de Sharpe).

S'ha de tenir en compte que la cartera de mercat no depèn de l'aversió al risc dels inversors. Cada inversor triarà la mateixa cartera ω_T i la combinarà amb l'actiu lliure de risc per tal de maximitzar la seva utilitat esperada com es mostra a continuació.

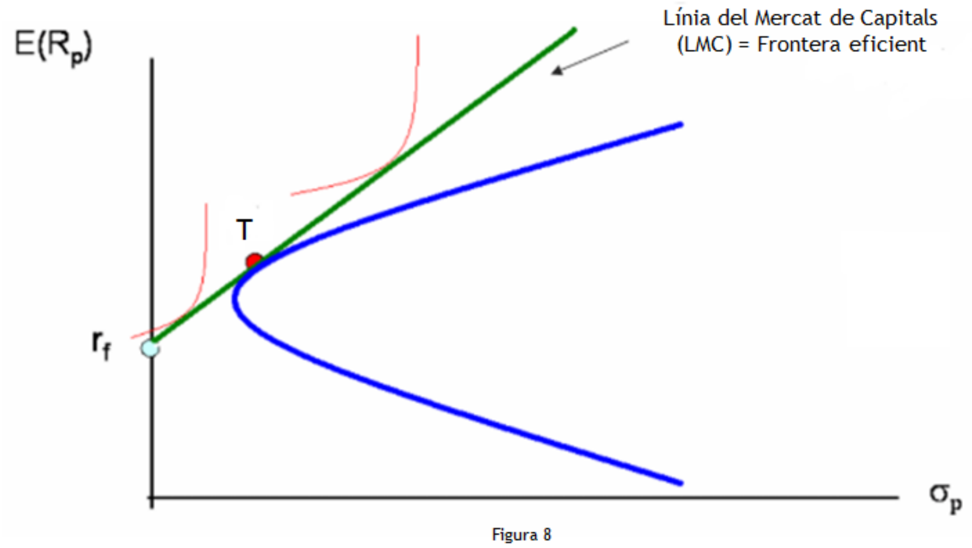

Figura 8

4.4. El coeficient Beta

Dels càlculs per trobar la Línia del Mercat de Capitals se'n deriven les següents expressions:

$$\beta_j \equiv \frac{\operatorname{cov}(R_j, R_M)}{\sigma_M^2} \quad \Rightarrow \quad E(R_j) - rf = \beta_j (E(R_M) - rf)$$

La primera expressió correspon al coeficient Beta, i la segona correspon a l'equació del *Capital Asset Pricing Model* (CAPM).
El coeficient de volatilitat o beta d'un actiu financer mostra el rendiment d'un actiu en funció del risc de mercat (o risc sistemàtic). Està determinat pel context, el que implica que no pot eliminar el risc, ja que aquest és inherent a l'activitat operacional i financera de l'empresa.

- ß = 1. Si la beta del mercat d'estudi és igual a la unitat, la rendibilitat de l'actiu financer es comportarà igual que l'índex de referència.

- ß > 1. A aquells actius que tenen una beta major a la unitat se'ls denomina actius agressius, i són els que més risc sistemàtic tenen: ascendeixen més ràpid davant d'una alça del mercat; cauen més ràpid quan el mercat es desploma; l'actiu financer mostrarà doncs, una major volatilitat que l'índex de referència i, per tant, amplificarà els moviments del mercat, tant a l'alça com a la baixa.

- ß < 1. Els actius que tenen una beta inferior a la unitat són els que varien menys que el conjunt del mercat, se'ls denomina actius defensius. Així doncs, tenen un menor risc sistemàtic al presentar una menor variabilitat que l'índex de referència.

El coeficient beta és una dada relativa, així que es pot interpretar en forma de percentatge. Per exemple, una beta de 1,2 significa que l'actiu financer és un 20% més variable que l'índex de referència. En cas contrari, una beta de 0,6 està indicant que el títol en qüestió és un 40% menys volàtil que l'índex.

El CAPM afirma que els inversors esperen un rendiment esperat més alt pel fet de suportar actius amb betes més elevades. Així doncs, els actius amb betes majors seran menys atractius pels inversors, els quals demanaran un retorn esperat més elevat.

4.4.1. Propietats del coeficient Beta

- El coeficient beta d'una cartera d'inversió és la mitja ponderada de les betes dels actius que conformen aquesta cartera.
- La beta de la cartera de mercat és igual a 1.
- La beta de l'actiu sense risc és igual a 0.

4.5. Security Market Line (SML)

La línia del mercat de valors, línia de mercat de títols o línia de mercat d'actius (també coneguda pel seu nom en anglès *Security Market Line*) és la representació del model CAPM. És una recta que, en un mercat en equilibri, relaciona linealment la rendibilitat esperada d'un actiu amb una mesura de risc del mateix (coeficient beta).

Segons (Sharpe, 1964), la rendibilitat que s'espera obtenir d'un actiu j (o una cartera) ha de ser la rendibilitat exempta de risc, r_f més una prima de risc (del mercat) que ha de ser proporcional al coeficient beta, és a dir:

$$E(R_j) - rf = \beta_j (E(R_M) - rf)$$

En condicions d'equilibri, les expressions de la LMC i la SML són equivalents, i tots els actius i carteres tendiran a situar-se geomètricament sobre la recta SML.
Gràficament:

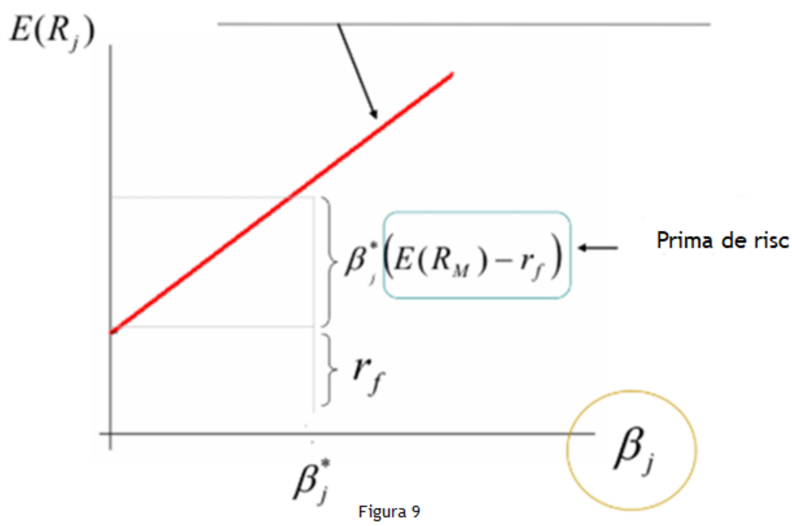

Figura 9

4.5.1. Desequilibri en el mercat de capitals

Quan el mercat no està en equilibri, la SML ens ajuda a determinar quins dels actius financers comprar i quins no.
Per un costat, tots els actius que estan per damunt de la SML es consideren infravalorats o, dit d'una altra manera, són actius barats per la relació rendibilitat-risc que tenen, per tant, són una bona oportunitat d'inversió. Per altra banda, tots els actius situats per sota de la SML es consideren sobrevalorats, és a dir, o bé ofereixen una rendibilitat inferior a l'actiu lliure de risc, o bé ofereixen una rendibilitat molt petita pel seu nivell de risc.

Una altra manera de reconèixer si un actiu està infravalorat o sobrevalorat és mitjançant l'α de Jensen, definida de la següent manera per (Jensen, 1967):

$$\alpha = E(R_p) - \left(rf + \beta_p\left(E(R_M) - rf\right)\right)$$

Alfa és simplement la diferència entre els dos termes de l'equació del CAPM:

$$E(R_j) - rf = \beta_j(E(R_M) - rf)$$

Si alfa és positiu:

$$E(R_p) = \frac{E(CF_p) - I_p}{I_p} > rf + \beta_p\left(E(R_M) - rf\right) \Rightarrow -I_p + \frac{E(CF_p)}{1 + rf + \beta_p\left(E(R_M) - rf\right)} \equiv NPV > 0$$

On:
I_p = inversió
$E(C_f)$ = *cash flows* esperats
NPV = *net present value* (Valor Actual Net, VAN)

És a dir, l'actiu o cartera està produint rendiments superiors als predits per la SML. Generalment l'alfa de Jensen s'utilitza com a mesura de precisió del CAPM, així com pels gestors actius de carteres per tal de aconseguir "superar" al mercat.

Així doncs, qualsevol inversor (sense importar l'aversió al risc) voldrà combinar la cartera de mercat amb una quantitat positiva d'actiu (amb alfa positiu). A més, una inversió amb un alfa positiu, millora el Ràtio de Sharpe i permet obtenir millor parelles de rendiment-risc. Contràriament, si l'alfa és negatiu, l'inversor preferirà fer *short selling* de la inversió (que no sempre és possible).

4.6. Limitacions del model CAPM

En la història de l'economia financera s'ha comprovat que, per a què un inversor dugui a terme una inversió de forma adequada, no només s'ha de tenir en compte la rendibilitat d'aquesta, sinó també el risc que aquesta comporta. El model CAPM sempre ha estat en el punt de mira de tots els estudis ja que es tracta d'un model pràctic i senzill a l'hora de tenir en compte aquestes variables. Tot i això, el model presenta diverses limitacions:

- El model no explica adequadament la variació en les rendibilitats dels títols de valors. Estudis empírics demostren que actius amb betes petites poden oferir rendibilitats més elevades de les que el model suggereix.

- La cartera de mercat consisteix en tots els actius de tots els mercats, on cada actiu està ponderat per la seva capitalització al mercat. Aquest fet assumeix que els inversors no tenen preferències entre mercats i actius, i que escullen només en funció del risc-rendibilitat.

- El model assumeix que tots els inversors tenen accés a la mateixa informació i es posen d'acord sobre el risc i la rendibilitat esperada per tots els actius.

- En aquest model s'assumeix que donada una certa taxa de rendibilitat esperada, els inversors prefereixen el menor risc possible. I donat un cert nivell de risc, preferiran les majors rendibilitats possibles associades a aquest risc. No es contempla que existeixin inversors disposats a acceptar menor rendibilitat per major risc, és a dir, que paguin per assumir risc.

- La l'actiu lliure de risc és el rendiment dels títols públics a curt termini. El problema amb l'ús d'aquest actiu és que el rendiment canvia diàriament, creant volatilitat.

4.7. Propostes de millora

(Lintner, 1965) afegeix una nova variable que mesura la part del risc diversificable mitjançant un estudi utilitzant la metodologia economètrica de tall transversal . Els resultats obtinguts amb aquesta investigació són contradictoris amb la teoria del CAPM, ja que observa un gran nivell de significació i un elevat pes de la variable que mesura el risc específic (no sistemàtic). Això significa que els inversors no només s'haurien de preocupar pel risc sistemàtic sinó també pel risc específic de l'actiu o cartera. (Miller & Scholes, 1972), realitzant un estudi molt similar al de Lintner, van ratificar les seves investigacions. (Levy, 1978) també realitza un estudi amb dades de la borsa de Nova York on conclou que, quan els volums de negociació són elevats, el coeficient beta és una bona mesura a l'hora d'explicar la rendibilitat dels actius. En canvi, quan els volums de negociació són baixos, el coeficient beta no és acurat. Més tard, (Reinganum, 1981) ratifica les conclusions de Levy afirmant que la beta no és una bona mesura per poder explicar les rendibilitats de les accions en el mercat dels Estats Units.

Un altre estudi va ser dut a terme per (Merton, 1973), on es critica el model estàtic. Les decisions de cada inversor són molt diferents al llarg del temps, així que Merton tracta de solucionar el binomi rendibilitat-risc fent canviar el model al llarg del temps.

Per altra banda, (Roll, 1977) critica que el CAPM és un model teòric no contrastable amb la realitat ja que la cartera de mercat hauria de ser coneguda, però no és directament mesurable ni observable. Afirma que la cartera de mercat hauria d'incloure tots els actius amb risc existents en l'economia.

Finalment, (Fama & French, 1993) realitzen un estudi empíric per poder analitzar la precisió i validesa del model CAPM. Utilitzen dades del mercat dels Estats Units durant un llarg període de temps. Conclouen que el coeficient beta és molt dèbil a l'hora d'explicar la volatilitat d'un actiu financer.

III. AVALUACIÓ EMPÍRICA

1. Selecció de dades

1.1. Horitzó temporal

Per tal d'obtenir unes estimacions consistents del model, he decidit seleccionar una franja de dades lo suficientment elevada. En la investigació he escollit un període de 15 anys (des del gener del 2002 fins al desembre del 2016).
En un primer moment la meva intenció era utilitzar periodicitat diària ja que és factible a nivell de disponibilitat de dades pels retorns. Les dades diàries, però, mostren nivells superiors de volatilitat entre observacions (soroll), per tant, aquesta opció va quedar descartada. Finalment, degut a l'escassedat de dades pel que fa a l'actiu lliure de risc (en termes de periodicitat), he decidit normalitzar la freqüència seleccionant dades mensuals per a totes les variables del model.

En cas de seleccionar una quantitat inferior de dades es podria córrer el risc de trobar correlacions entre les primes de risc dels actius i la del mercat, que poden ser degudes, per exemple, a un xoc que ha afectat al conjunt del mercat. Per tant, per tal d'evitar aquest fenomen, he escollit un període suficientment gran.

1.2. Empreses

Com que en aquest treball replico el model de Markowitz (anàlisis de mitja-variància), he decidit incorporar a l'estudi com més empreses millor per tal de poder obtenir un conjunt d'inversió suficientment variat així com obtenir una cartera de mercat molt diversificada (augmentant les possibilitats de que aquesta cartera de mercat sigui més eficient que l'índex de referència).

El treball es centra exclusivament en el mercat espanyol, per aquest motiu he seleccionat únicament empreses que cotitzen en la borsa espanyola.
Inicialment, en l'anàlisi utilitzava una mostra de 50 empreses. Durant el transcurs d'aquest n'he hagut de rebutjar 7. Quatre d'aquestes degut a que van deixar de cotitzar a la borsa espanyola durant els últims períodes de l'horitzó temporal (vaig decidir reduir el número d'empreses en comptes observacions temporals). Les altres tres les he rebutjat degut a que, canvis en la seva composició del capital (*stock split*[2]) produïen valors anormals de rendiments esperats i volatilitat (la base de l'anàlisi).

Addicionalment, he procurat seleccionar empreses tant de diferents sectors com diferents nivells de capitalització, per tal de aconseguir una cartera lo més diversificada possible.

[2] Acte corporatiu en el que una companyia divideix les seves accions en accions múltiples per tal d'augmentar la seva liquiditat.

En la següent taula es poden observar els *tickers* de cada empresa juntament amb els seus principals indicadors descriptius, inclosos els retorns esperats i les volatilitats.

TICKER	E(R)	σ^2	σ	R MÀX	R MIN
ABG	0,80%	0,0196	0,1400	42,05%	-43,84%
ANA	1,03%	0,0078	0,0884	25,44%	-30,62%
ACX	0,93%	0,0076	0,0869	26,04%	-25,82%
AMP	-0,14%	0,0216	0,1470	58,33%	-44,64%
AZK	0,55%	0,0119	0,1091	51,20%	-27,81%
BBVA	0,41%	0,0080	0,0892	35,52%	-24,48%
SAN	0,73%	0,0085	0,0924	40,08%	-23,02%
BAY	1,17%	0,0067	0,0816	30,33%	-23,47%
CIE	2,36%	0,0098	0,0992	47,49%	-29,15%
CAF	4,38%	0,0148	0,1215	54,93%	-16,33%
ALB	0,71%	0,0047	0,0687	15,51%	-20,58%
OLE	1,68%	0,0833	0,2885	352,77%	-39,11%
ENO	1,93%	0,0079	0,0888	43,51%	-26,02%
ENC	1,41%	0,0110	0,1048	30,73%	-30,37%
ELE	1,14%	0,0101	0,1005	63,34%	-50,34%
ECR	0,71%	0,0220	0,1483	60,38%	-39,25%
FAE	0,43%	0,0110	0,1050	41,25%	-27,04%
FCC	0,41%	0,0094	0,0969	45,09%	-22,96%
GCO	1,72%	0,0082	0,0907	28,06%	-25,86%
EZE	-0,39%	0,0377	0,1942	87,73%	-67,75%
IBE	1,37%	0,0055	0,0745	21,81%	-21,15%
IBG	0,75%	0,0036	0,0599	17,50%	-18,59%

TICKER	E(R)	σ^2	σ	R MÀX	R MIN
COL	-0,16%	0,0227	0,1508	59,32%	-44,55%
LGT	1,72%	0,0076	0,0873	44,10%	-23,35%
MAP	1,34%	0,0076	0,0873	31,51%	-28,26%
MEL	0,93%	0,0141	0,1188	75,59%	-40,13%
MCM	1,11%	0,0136	0,1167	56,84%	-40,74%
NAT	0,59%	0,0184	0,1358	54,31%	-34,69%
NHH	0,36%	0,0162	0,1273	80,00%	-30,38%
NEA	0,54%	0,0148	0,1217	56,50%	-28,24%
OHL	1,14%	0,0168	0,1297	55,84%	-50,16%
PVA	0,43%	0,0060	0,0778	22,79%	-66,03%
PHM	0,14%	0,0151	0,1230	44,39%	-39,92%
PSG	2,27%	0,0054	0,0732	24,71%	-12,65%
REP	0,63%	0,0052	0,0721	19,12%	-27,90%
SCYR	0,52%	0,0202	0,1421	47,32%	-40,25%
SNC	1,73%	0,0542	0,2328	180,61%	-50,88%
TEF	0,42%	0,0052	0,0722	27,06%	-24,98%
TUB	1,07%	0,0108	0,1038	36,08%	-37,39%
UBS	0,22%	0,0565	0,2377	200,00%	-40,38%
VID	1,47%	0,0044	0,0661	19,89%	-19,92%
VIS	1,57%	0,0044	0,0665	23,44%	-22,21%
ZOT	0,66%	0,0066	0,0814	31,77%	-32,55%
	N = 43				

Per al càlcul dels retorns de les empreses he utilitzat el preu ajustat de tancament, que ja té en compte els dividends. Seguidament, mitjançant una taxa de variació, he obtingut els rendiments de cada empresa. Els rendiments esperats els he calculat com la mitjana de tots els rendiments del període.

La informació ha sigut extreta de *Yahoo Finance*, mitjançant un codi de llenguatge de programació *Python*.

1.3. Actiu lliure de risc

Com a indicador per l'actiu lliure de risc, he considerat diferents opcions com ara el bo espanyol a curt termini (3 mesos), a llarg termini (10 anys), el bo alemany tant a curt com a llarg termini i l'EURIBOR. Finalment, m'he decantat pel bo espanyol a 10 anys ja que s'ajusta millor al marc geogràfic en el que es centra l'estudi, i també a l'observat en la literatura financera: històricament s'ha utilitzat el bo a 10 anys com a indicador de l'actiu lliure de risc.
Tal i com he indicat a l'apartat d'horitzó temporal, he escollit una periodicitat mensual ja que era la més convenient degut a la disponibilitat de dades.

He ajustat el tipus per a calcular la seva rendibilitat mensual de la següent manera:

$$\sqrt[12]{1+rf}-1$$

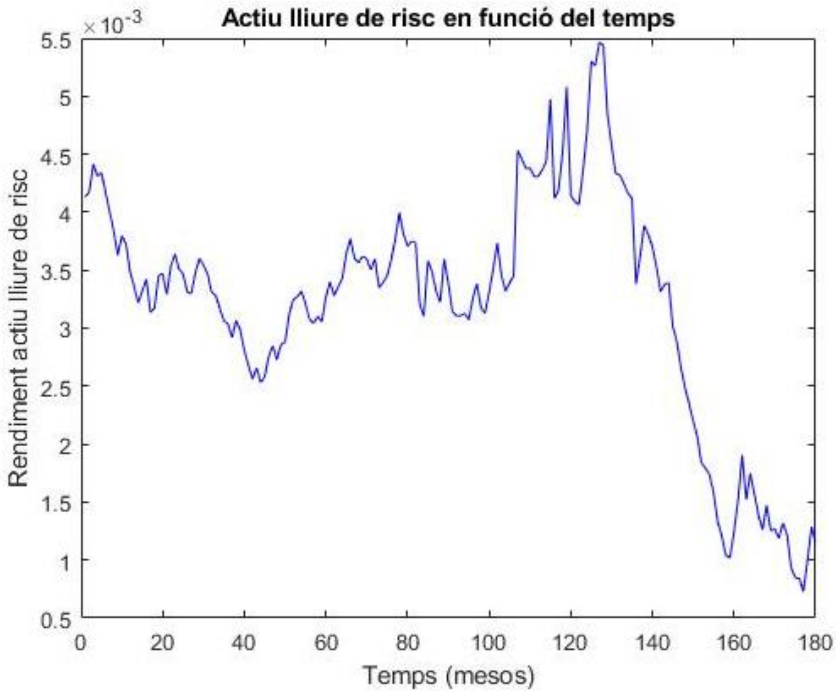

Figura 10

En la figura 10 es pot observar la evolució en el temps de la rendibilitat de l'actiu lliure de risc, en aquest cas, del bo espanyol a 10 anys. És especialment rellevant la seva dràstica reducció durant crisi econòmica.

En la següent taula es mostren els principals indicadors descriptius de l'actiu lliure de risc:

	Mitjana	σ^2	σ	R MÀX	R MIN	T
r_f	0,32%	0,000001	0,001018	0,547%	0,073%	180 mesos

1.4. Índex de referència

Per a exemplificar els moviments del mercat, he seleccionat com a índex de mercat l'*Índice General de la Bolsa de Madrid*: format per 113 valors negociats, reflexa exclusivament la rendibilitat obtinguda per l'augment o la disminució dels preus de les accions que el formen. Aquest indicador l'utilitzaré per calcular les betes dels diferents actius i comparar els resultats amb les estimacions realitzades utilitzant la cartera de mercat obtinguda aplicant el model de Markowitz.
Vaig plantejar-me utilitzar l'IBEX-35 com a índex de mercat, però l'IGBM és més representatiu per al mercat espanyol ja que inclou moltes més empreses.
Tot i això, per a aconseguir la optimalitat del model seria ideal utilitzar el conjunt de totes les empreses del mercat espanyol.

La següent taula mostra els principals indicadors descriptius de l'IGBM durant el període de 15 anys estudiat:

	E(R)	σ^2	σ	R MÀX	R MIN	T
IGBM	0,236%	0,00320	0,05656	16,41%	-16,76%	180 mesos

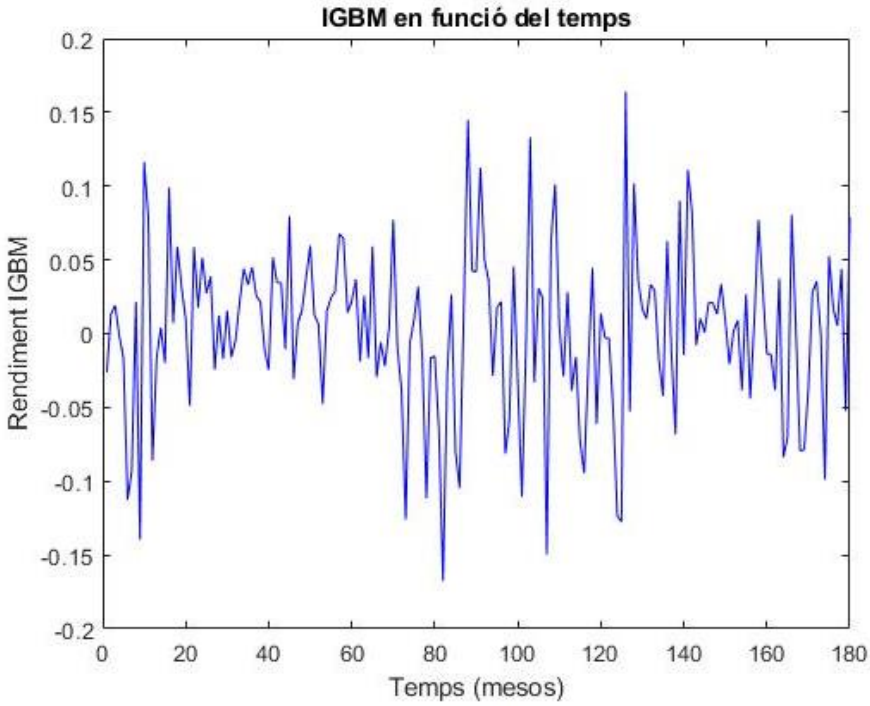

Figura 11

La figura 11 mostra l'evolució de l'IGBM durant el període estudiat. Es pot comprovar com els rendiments oscil·len al voltant de 0, amb una variància molt més accentuada a l'inici del període i durant els anys de la crisi.

2. Model de Markowitz

2.1. Rendiments esperats i volatilitats

En primer lloc, calculem els rendiments esperats i les volatilitats de cada un dels actius durant tot el període.

Gràficament:

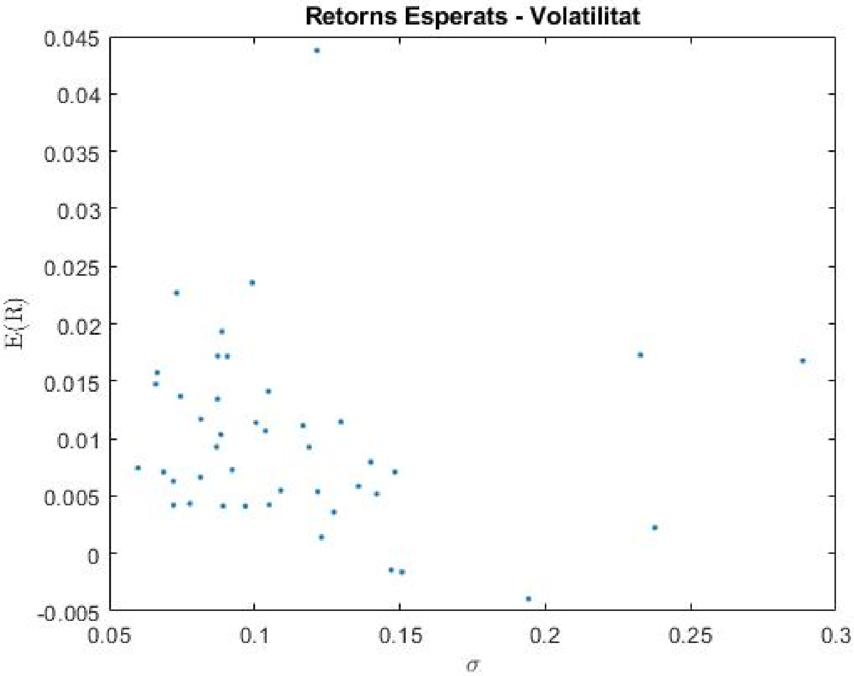

Figura 12

En aquest gràfic es poden observar els rendiments esperats de cada actiu en funció de la seva volatilitat. Alguns actius són molt més eficients que altres perquè ofereixen major rendiment esperat per al mateix nivell de risc. Aquest fet deixa intuir que en les carteres eficients aquests títols seran més rellevants.

Cal tenir en compte que, degut a la crisi econòmica, el rendiment esperat dels actius se situa en nivells substancialment més baixos que els mostrats en molta literatura financera pel que fa al mercat de *private equity*. A més, la volatilitat del títols també es veu afectada especialment durant els anys de crisi.

A continuació, utilitzant el teorema de separació de dos fons, trobem les carteres w1 (cartera tangent a la línia de 45º) i w2 (cartera amb mínima variància).

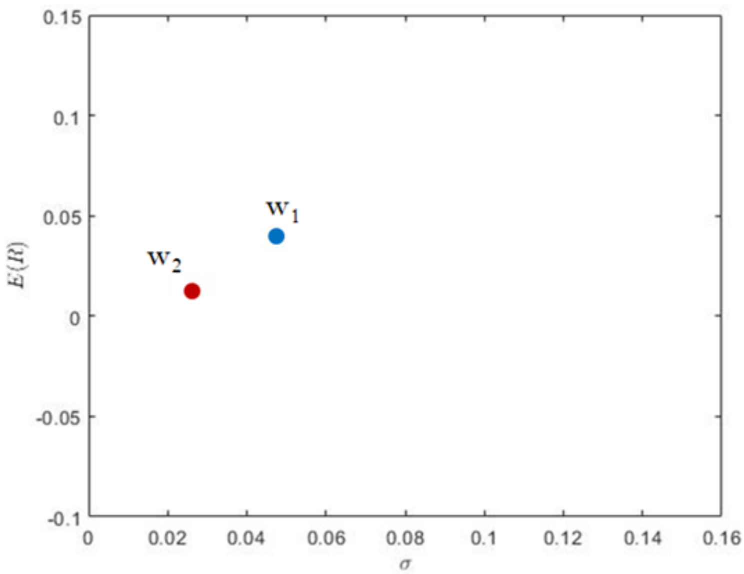

Figura 13

Cartera	E(R)	σ
w1	3,92%	0,0474
w2	1,22%	0,0264

Mitjançant la combinació d'aquestes dues carteres, obtenim la frontera del conjunt de possibilitats d'inversió.

Tot i que inicialment Markowitz assumia que no existia la possibilitat de fer *short selling*, jo permeto que en el model es pugui dur a terme dita operació. D'aquesta manera la frontera se'ns expandeix substancialment.

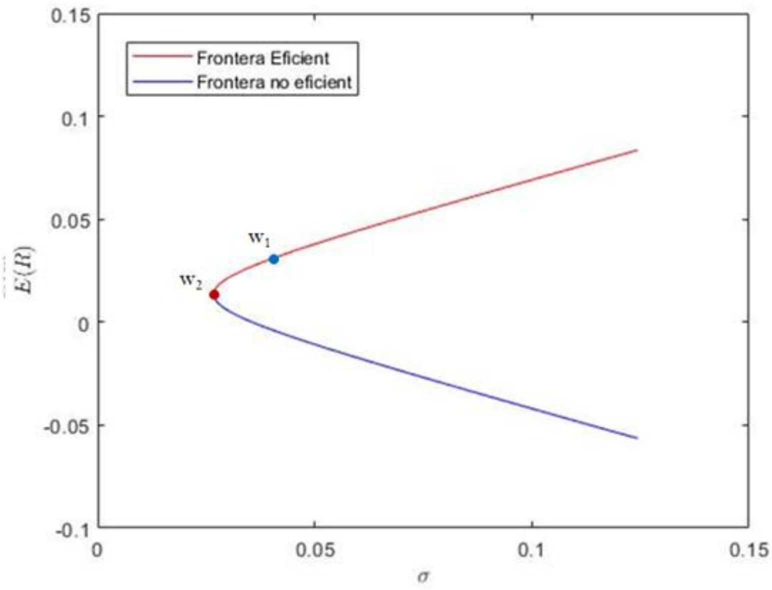

Figura 14

Com es pot observar, la línia vermella forma l'anomenada frontera eficient de Markowitz, que ofereix el màxim rendiment per a un nivell determinat de risc. Per altra banda, la línia blava s'anomena frontera no eficient, ja que es poden trobar carteres amb més rendibilitat per la mateixa quantitat de risc.
El tram de la frontera eficient en què $\sigma = [\mathrm{w}1, +\infty)$ s'aconsegueix mitjançant la venta de la cartera w_2 per tal de poder comprar més quantitat de w_1. Mentre que tot el tram de frontera no eficient (excloent el punt w_2) s'obté mitjançant la venta de la cartera w_1 per adquirir més quantitat de w_2.

3. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

3.1. Cartera de mercat i Línia del Mercat de Capitals (LMC)

Per tal d'aconseguir l'anomenada cartera de mercat i poder formar la LMC, introduïm l'actiu lliure de risc en el model. Mitjançant la condició de tangència entre dit actiu i la frontera eficient de Markowitz obtenim la cartera de mercat (w_t).

Formalment, aquesta cartera es considera la més eficient del model, i serà la que tots els inversors combinaran amb l'actiu lliure de risc creant la nova frontera eficient, la LMC.

Gràficament:

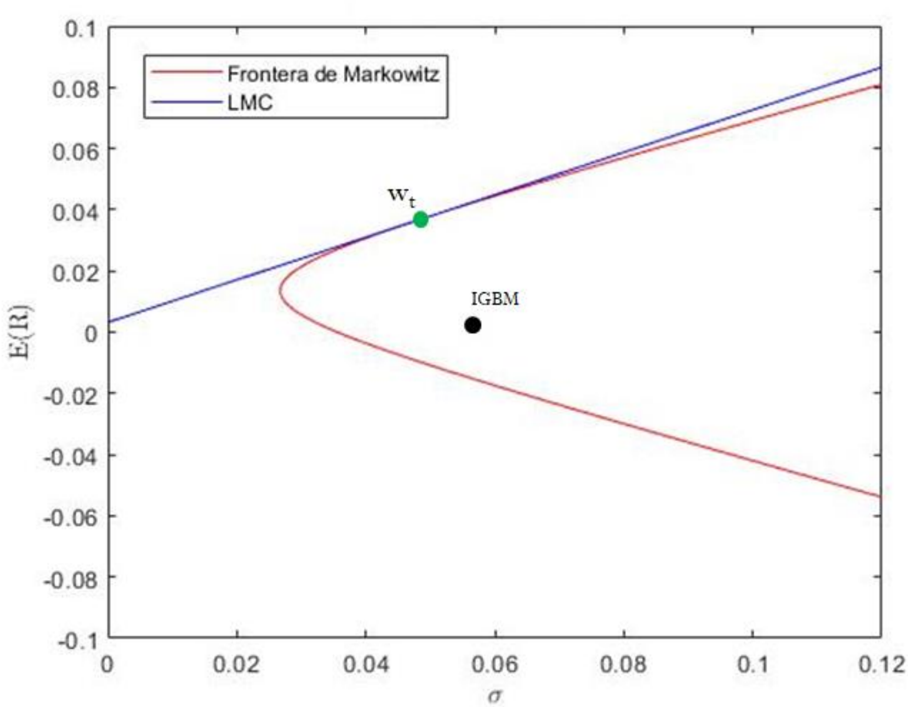

Figura 15

Cartera	E(R)	σ
wt	3,650%	0,048
IGBM	0,240%	0,057

En el gràfic he introduït l'Índex General de la Borsa de Madrid. Cal observar que aquest índex se situa en un punt interior de la frontera, i és estrictament menys eficient que la cartera de mercat obtinguda. Així doncs, es poden intuir les flaqueses derivades en utilitzar aquest índex com a representació del mercat per dur a terme les estimacions (pràctica comú en l'àmbit financer).

La LMC no només és estrictament superior al conjunt de possibilitats d'inversió en termes de rendiment esperat, sinó que també és la que maximitza el Ràtio de Sharpe (en aquest cas 0,6952). El Ràtio de Sharpe ens indica la compensació que els inversors exigiran per cada unitat addicional de risc (volatilitat).

3.2. El coeficient Beta i la Security Market Line (SML)

Un cop obtinguda la LMC i determinada la cartera de mercat, podem calcular les betes associades a cada un dels actius. Per a estimar les betes he dut a terme una regressió entre els rendiments esperats de cada actiu i la prima de risc del mercat juntament amb l'actiu lliure de risc:

$$E(R_j) - rf = \beta_j (E(R_M) - rf)$$

He realitzat aquesta estimació utilitzant dues variables diferents com a representació del mercat, en primer lloc amb l'*Índice General de la Bolsa de Madrid* i posteriorment amb la cartera de mercat trobada anteriorment.

TICKER	Betes (IGBM)	Betes (wt)	TICKER	Betes (IGBM)	Betes (wt)
ABG	0,2583	0,1395	**COL**	0,0143	-0,1327
ANA	0,2689	0,2185	**LGT**	0,2416	0,4301
ACX	0,1302	0,1870	**MAP**	0,2034	0,3086
AMP	0,1030	-0,1308	**MEL**	0,3391	0,1870
AZK	0,2424	0,0796	**MCM**	0,0998	0,2363
BBVA	0,0662	0,0298	**NAT**	0,3497	0,0804
SAN	0,1318	0,1250	**NHH**	0,4266	0,0149
BAY	0,0920	0,2559	**NEA**	0,3379	0,0701
CIE	0,3299	0,6145	**OHL**	0,3737	0,2453
CAF	0,2958	1,2158	**PVA**	0,3016	0,0379
ALB	0,1206	0,1200	**PHM**	0,0225	-0,0483
OLE	0,3171	0,4086	**PSG**	0,0152	0,5863
ENO	0,0327	0,4869	**REP**	0,2004	0,0944
ENC	0,1008	0,3299	**SCYR**	0,5144	0,0623
ELE	0,2238	0,2477	**SNC**	0,1273	0,4425
ECR	-0,0060	0,1305	**TEF**	-0,1960	0,0323
FAE	0,1799	0,0383	**TUB**	0,3260	0,2270
FCC	0,1878	0,0290	**UBS**	0,7409	-0,0184
GCO	0,1474	0,4201	**VID**	0,2112	0,3482
EZE	0,5927	-0,2091	**VIS**	-0,0208	0,3764
IBE	0,0864	0,3163	**ZOT**	0,1210	0,1027
IBG	0,1664	0,1323			

En aquesta taula es pot observar que els valors de beta canvien substancialment en funció de l'indicador de mercat que utilitzem. Per exemple, en el cas del *ticker* ABG, la beta estimada amb l'IGBM és de 0,2583, el que significa que aquest títol financer és un 70% menys volàtil (1-0,2583) que l'índex de mercat IGBM. En canvi, estimant el beta de la mateixa empresa però utilitzant la cartera de mercat w_t, ens indica que dit títol és un 86% (1-0.1395) menys volàtil que el mercat. Un altre exemple seria el del *ticker* CAF: segons l'IGBM, aquest títol és un 70% menys volàtil que el propi mercat, contràriament, segons la cartera w_t, aquest títol és un 21% més variable que l'índex.

A continuació es mostren els dos gràfics de les SML per als dos indicadors.
La figura 16 seria la SML utilitzant la cartera w_t.

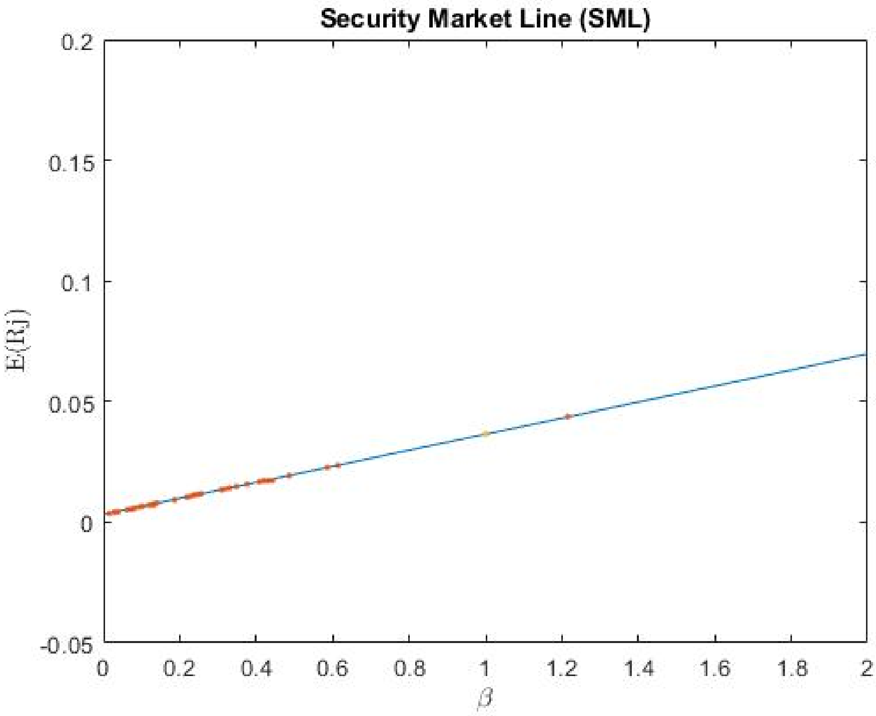

Figura 16

Tot i que sembla que tot els punts estiguin situats just a sobre de la línia SML, hi ha una certa desviació mesurada pel factor alfa de la taula que mostrarem posteriorment. La figura 16.1 mostra la mateixa estimació on s'ha aplicat un zoom. Es pot apreciar com els punts no se situen ben bé sobre de la SML. L'estimació és molt precisa, especialment si la comparem amb la figura 17 (estimada amb l'IGBM).

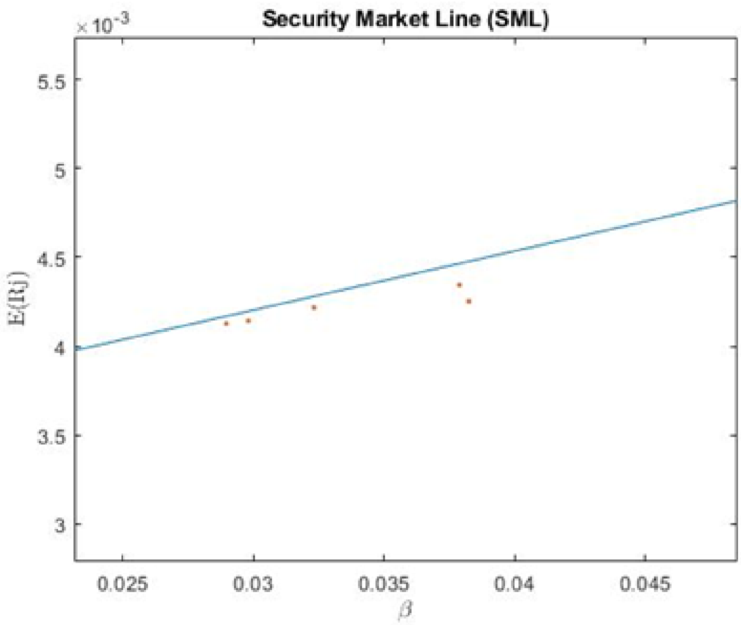

Figura 16.1

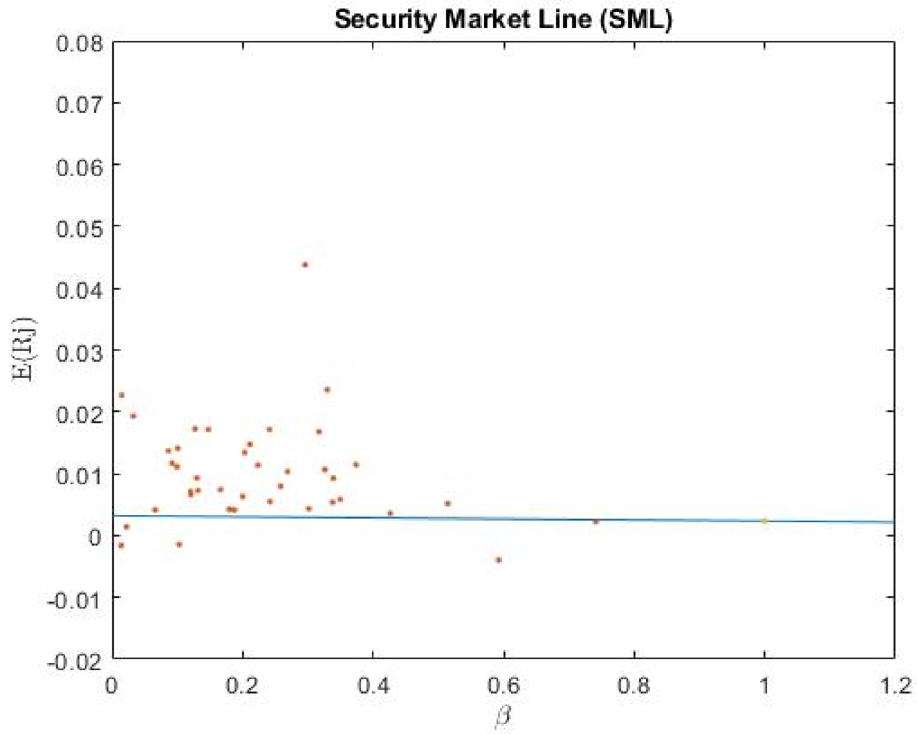

Figura 17

La majoria de punts estan per sobre de la línia SML, el que fa indicar que hi ha molts títols que donen retorns anormalment elevats (són actius infravalorats). Això ratifica que l'IGBM no és la cartera més eficient i, per tant, és un indicador poc representatiu del mercat ja que, per definició, la cartera de mercat ha de ser la més eficient.

En el cas de l'estimació amb la cartera w_t, els retorns dels actius són gairebé totalment explicats per la cartera eficient, satisfent doncs la teoria del model.

En el següent apartat em centro en quantificar aquestes diferències i avaluar el poder predictiu del model.

3.3. Quantificació del desequilibri del model

3.3.1. Resultats alfa

Tal i com hem definit en l'apartat de teoria *4.5.1. Desequilibri en el mercat de capitals*, l'alfa es pot utilitzar com a mesura de precisió de les nostres estimacions. A nivell empíric ens interessa aconseguir uns nivells mínims d'alfa, el que suposa que els actius rendeixen únicament en funció del mercat (ajustat per beta).

TICKER	Alfes (IGBM)	Alfes (wt)
ABG	0,0050	0,00012
ANA	0,0074	-0,00012
ACX	0,0062	-0,00015
AMP	-0,0046	-0,00030
AZK	0,0025	-0,00037
BBVA	0,0010	-0,00005
SAN	0,0042	-0,00007
BAY	0,0086	-0,00003
CIE	0,0206	-0,00009
CAF	0,0408	0,00011
ALB	0,0040	-0,00010
OLE	0,0138	-0,00002
ENO	0,0161	-0,00009
ENC	0,0110	-0,00007
ELE	0,0084	-0,00008
ECR	0,0039	-0,00045
FAE	0,0012	-0,00022
FCC	0,0011	-0,00004
GCO	0,0141	-0,00002
EZE	-0,0067	-0,00020
IBE	0,0105	-0,00005
IBG	0,0044	-0,00016

TICKER	Alfes (IGBM)	Alfes (wt)
COL	-0,00480	-0,00040
LGT	0,01418	-0,00033
MAP	0,01041	-0,00003
MEL	0,00634	-0,00017
MCM	0,00800	0,00006
NAT	0,00294	-0,00003
NHH	0,00075	-0,00011
NEA	0,00246	-0,00015
OHL	0,00856	0,00008
PVA	0,00139	-0,00012
PHM	-0,00176	-0,00017
PSG	0,01948	-0,00004
REP	0,00326	-0,00005
SCYR	0,00240	-0,00011
SNC	0,01416	-0,00066
TEF	0,00085	-0,00006
TUB	0,00774	-0,00009
UBS	-0,00034	-0,00035
VID	0,01170	-0,00006
VIS	0,01252	0,00001
ZOT	0,00353	0,00001

Tal i com havíem intuït en el gràfic de la SML, les estimacions dutes a terme amb la cartera de mercat wt ens aporten uns nivells d'alfa molt més propers a zero, el que indica que dita cartera permet que els coeficients betes dels diferents actius s'ajustin millor a la SML.
D'altra banda, aquests resultats són els esperats, ja que interpretant beta com el factor que indica la correlació entre els moviments de l'actiu j i els moviments del mercat, és normal que obtinguem estimacions més acurades a l'utilitzar una cartera de mercat formada justament pel conjunt d'aquests actius (com és el cas de la cartera wt). Mentre que si utilitzem un indicador exogen (com l'IGMB) és esperable que tingui més problemes a l'hora d'estimar un model acurat.

3.3.2. Predicció dels rendiments

Alternativament, la solidesa del model es pot mesurar a partir de la predicció dels rendiments esperats dels actius mitjançant les betes obtingudes en els apartats anteriors.
En la següent taula es poden observar els rendiments esperats reals dels actius juntament amb els rendiments esperats calculats a partir dels coeficients beta estimats. També he incorporat la taxa de variació entre els rendiments esperats reals i els estimats com a mesura d'avaluació del model.

TICKER	E(R)	E(R) IGBM	Variació en múltiples	E(R) wt	Variació en múltiples
ABG	0,796%	0,299%	2,67	1,180%	0,68
ANA	1,035%	0,298%	3,47	1,215%	0,85
ACX	0,927%	0,310%	3,00	0,754%	1,23
AMP	-0,144%	0,312%	-0,46	0,663%	-0,22
AZK	0,548%	0,300%	1,83	1,127%	0,49
BBVA	0,414%	0,315%	1,32	0,541%	0,77
SAN	0,729%	0,309%	2,36	0,759%	0,96
BAY	1,169%	0,313%	3,74	0,627%	1,87
CIE	2,356%	0,293%	8,05	1,418%	1,66
CAF	4,376%	0,296%	14,81	1,304%	3,35
ALB	0,710%	0,310%	2,29	0,722%	0,98
OLE	1,678%	0,294%	5,71	1,375%	1,22
ENO	1,931%	0,318%	6,08	0,429%	4,50
ENC	1,411%	0,312%	4,52	0,656%	2,15
ELE	1,137%	0,302%	3,77	1,065%	1,07
ECR	0,710%	0,321%	2,21	0,301%	2,36
FAE	0,425%	0,305%	1,39	0,919%	0,46
FCC	0,413%	0,305%	1,35	0,945%	0,44
GCO	1,716%	0,308%	5,57	0,811%	2,12
EZE	-0,395%	0,270%	-1,46	2,292%	-0,17
IBE	1,368%	0,313%	4,37	0,608%	2,25
IBG	0,745%	0,306%	2,43	0,874%	0,85
COL	-0,161%	0,319%	-0,50	0,368%	-0,44
LGT	1,718%	0,300%	5,72	1,124%	1,53
MAP	1,344%	0,303%	4,43	0,997%	1,35
MEL	0,926%	0,292%	3,17	1,449%	0,64
MCM	1,112%	0,312%	3,56	0,652%	1,71
NAT	0,585%	0,291%	2,01	1,484%	0,39
NHH	0,360%	0,284%	1,26	1,740%	0,21
NEA	0,538%	0,292%	1,84	1,445%	0,37
OHL	1,145%	0,289%	3,96	1,564%	0,73
PVA	0,434%	0,295%	1,47	1,324%	0,33
PHM	0,142%	0,319%	0,45	0,395%	0,36
PSG	2,267%	0,319%	7,10	0,371%	6,11
REP	0,629%	0,304%	2,07	0,987%	0,64
SCYR	0,517%	0,277%	1,87	2,032%	0,25
SNC	1,726%	0,310%	5,57	0,744%	2,32
TEF	0,422%	0,337%	1,25	-0,331%	-1,27
TUB	1,067%	0,293%	3,64	1,405%	0,76
UBS	0,224%	0,258%	0,87	2,785%	0,08
VID	1,473%	0,303%	4,87	1,023%	1,44
VIS	1,574%	0,322%	4,88	0,251%	6,26
ZOT	0,664%	0,310%	2,14	0,723%	0,92

4. Comparativa entre cartera de mercat i IGBM

Com hem vist anteriorment, la cartera de mercat que hem calculat de forma endògena (w_t), té una capacitat explicativa superior a l'IGBM. Cal recordar que w_t ha sorgit com a resultat d'aplicar el teorema de Markowitz i, per tant, es considera la cartera més eficient. Per tal de comprovar-ho, analitzo els rendiments generats per dita cartera durant tot el període i els contrasto amb els rendiments de l'IGBM.
Gràficament:

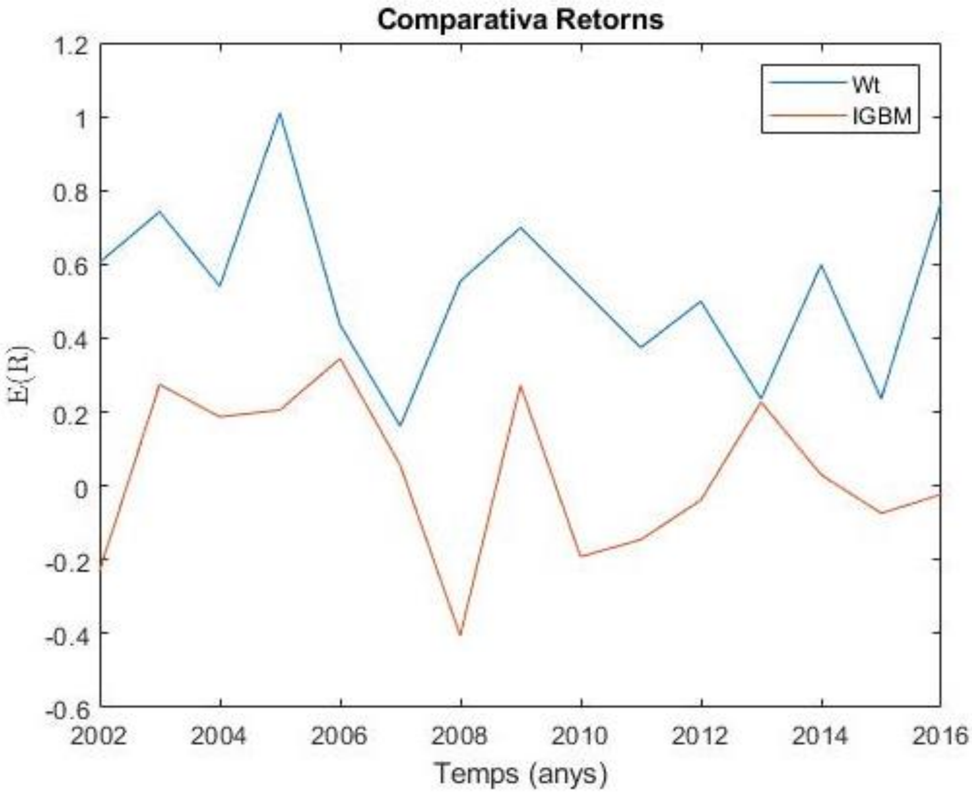

Figura 18

La figura 18 mostra els rendiments acumulats anuals de les dues carteres de mercat. Per a la computació d'aquests, he calculat els rendiments que les carteres generen durant un any.

Tal i com indica la teoria, la cartera eficient w_t té uns rendiments consistentment més elevats que l'IGBM. D'altra banda, excepte en l'any 2013, mostren uns patrons de comportament força similars. Cal destacar que els rendiments de la cartera wt no arriben a ser mai negatius, ni tan sols durant la forta baixada de 2008. Això fa indicar que es tracta d'una cartera ben diversificada ja que no només té uns rendiments esperats superiors, sinó que també és menys volàtil durant tot el període.

En el següent gràfic (Figura 19) es poden observar els rendiments acumulats generats per cada una de les carteres durant tot el període.

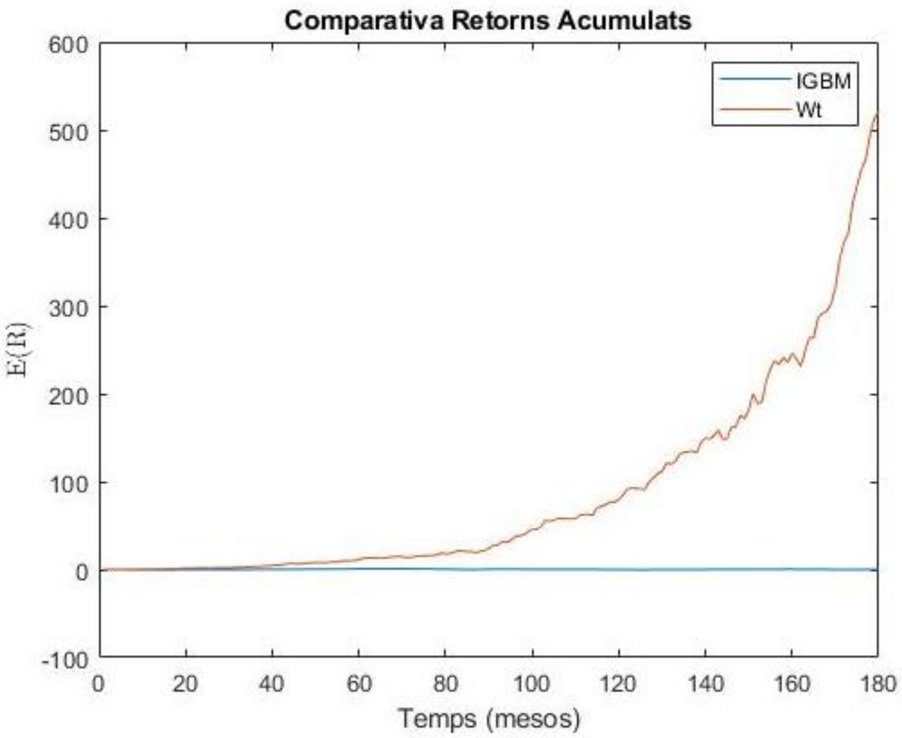

Figura 19

En primer lloc, es pot observar el comportament exponencial de la cartera de mercat wt. Tot i que el resultat sembla impactant, cal situar-lo en context: els rendiments de la cartera wt s'han d'interpretar com a la possibilitat òptima d'inversió durant el període, però ha sigut calculada a partir d'observacions ja conegudes.

Per a buscar un cas que exemplifiqui aquest fenomen, proposo al lector la següent qüestió: suposem que tingués la oportunitat d'invertir en la compra de bitllets de loteria de nadal de l'any anterior, si tot el que ens diu l'economia sobre la racionalitat dels agents es manté, podem assegurar que la gent (pel simple fet de que ja coneix el número guanyador de l'any passat) invertirà el total del seu capital en la compra del número premiat.
De forma similar, si la gent hagués tingut la oportunitat de conèixer les futures realitzacions dels rendiments durant tot el període, haguessin invertir sense dubtar-ho en wt. L'objectiu d'aquest gràfic és mostrar la potencialitat en quant a rendiments que existeix en el mercat format per aquests actius concrets.

D'altra banda, el comportament estable de l'IGBM es deu als seus reduïts rendiments esperats. Tal i com es pot observar a la figura 18, els rendiments de l'IGBM oscil·len al voltant de zero. A l'hora de fer l'acumulació, aquests convergeixen a zero.

IV. CONCLUSIONS

Després de realitzar tot l'anàlisi, he aconseguit trobar una cartera de mercat que rendeix molt millor que l'indicador de mercat de referència (l'IGBM). Aquesta cartera ha sigut obtinguda a partir de l'aplicació del teorema de separació de dos fons aplicat al context de *Modern portfolio theory* de Markowitz. Un cop calculada, he comparat les dues estimant els retorns del conjunt d'actius durant el període. La cartera eficient (w_t) ha sigut molt més precisa en l'estimació dels rendiments i, a més, ha presentat nivells alfa molt inferiors. L'alfa de Jensen és una mesura d'avaluació per a models de valoració financera, quan aquesta és zero (o s'hi acosta), implica que els factors introduïts en el model són els responsables d'explicar la totalitat de la variació dels rendiments.

Tot i que amb la cartera w_t s'han aconseguit uns molt bons resultats, aquests eren d'esperar. Cal recordar que dita cartera sorgeix a partir de la combinació més eficient d'uns actius específics. Al ser calculada de forma endògena, és normal que suposi un millor instrument per replicar els retorns dels títols a partir dels quals ha estat creada. Aquest fet és especialment rellevant quan ho comparem amb un instrument exogen, com pot ser l'IGBM, que és un punt interior (no eficient) del conjunt d'oportunitats d'inversió.

Els punts anteriors ens donen una intuïció sobre la eficiència del CAPM com a model de valoració d'actius. Per un costat, el model en sí té una capacitat acurada de relacionar moviments en els rendiments dels actius amb els del mercat, sempre i quan s'introdueixin dades molt representatives (com és el cas quan utilitzem la cartera wt). El problema és que aquestes dades no són observables a priori, així doncs, la pràctica usual suggereix seleccionar indicadors com a mesura explicativa de mercat (com ara l'IGBM, l'IBEX-35, etc). Pel que hem observat als resultats, a l'utilitzar aquests índexs, la consistència del model es veu afectada de forma significativa, ja que s'omet molta informació rellevant del mercat.

Ja que les dades del conjunt del mercat no són observables, ens veiem obligats a seleccionar un d'aquests indicadors. Sota aquesta premissa, el model CAPM mostra ineficiències que la literatura financera ha procurat anar disminuint durant el temps. Per exemple, al dur a terme l'estimació de les betes, es sol produir l'anomenat *Clustering Errors*, on xocs exògens i efectes estacionals tenen una influència en l'estimació de les betes degut a no permetre que aquestes canviïn durant el temps. Així doncs, per tal de resoldre aquesta problemàtica, Fama MacBeth va proposar una metodologia alternativa per al seu càlcul, basada en la tècnica economètrica *SUR* (regressions aparentment no relacionades), on es calcula una beta per període per després agregar-les corregint així les possibles correlacions dels errors. Mentre que el model clàssic estima una única beta per tot el període.

Una altra ineficiència en el CAPM té a veure amb que les variables introduïdes només consideren el risc sistemàtic (o de mercat). Així doncs, (Lintner, 1965) va afegir una nova variable que mesura la part del risc no sistemàtic (o diversificable) mitjançant un estudi utilitzant la metodologia economètrica de tall transversal.

Per últim, una altra possible millora del model, consisteix en introduir més factors explicatius com per exemple Fama-French va proposar el model de tres factors, on introduïa el nivell de capitalització i el ràtio *book-to-price*. Posteriorment, va desenvolupar el model de 5 factors, on s'afegien els factors de la rendibilitat operativa i creixement d'actiu total.

Actualment, la literatura financera presenta un nombre cada cop més elevat de factors potencialment rellevants (liquiditat, inèrcia, etc.), fins al punt en què molts teòrics comencen a mostrar el seu escepticisme envers a la suposada rellevància de tants factors.
Com a possibles tècniques per a poder discernir el nombre de factors rellevants a introduir en l'anàlisi, es consideren mètodes estadístics (*Principal Component Analysis*) o models macroeconòmics (factors establerts a priori).

Per concloure, considero que el CAPM és una molt bona eina per a valorar actius financers, tot i que la seva simplicitat implica unes flaqueses inherents al mateix model. Els resultats que ofereix són intuïtius i fàcils d'interpretar, sent aquest un dels motius principals pels quals el CAPM s'ha convertit en una de les principals eines de valoració i mesura del risc.

V. Bibliografia

Ahmed, R.-B. (1998). *Financial Analysis and the Predictability of Important Economic Event.* Westport, CT, USA: Greenwood Publishing Group, Incorporated.

Black, F. S. (1972). *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing.* The Journal of Business.

Black, F. S. (1993). *Beta and Return.* The Journal of Business.

Elton, E., & Gruber, M. (1995). *Modern portfolio theory and investment analysis.* New York: Wiley.

Fama, E., & French, K. (1993). Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds. *Journal of Financial Economics*.

Fama, E., & French, K. (2003). *The CAPM: Theory and Evidence*. Center for Research in Security Prices, University of Chicago.

Fama, E., & MacBeth, J. (1973). *Risk, return and equilibrium: Empirical tests. The Journal of Political Economy*.

García Estévez, P. (2007). *Análisis de carteras. Cálculo de la frontera eficiente mediante multiplicadores de lagrange. El caso de una cartera compuesta por tres valores.*

Gómez-Bezares, F. (1993). *Gestión de carteras.* Bilbao: Desclée de Brouwer.

Jensen, M. C. (1967). The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964. *Journal of Finance, Vol. 23, No. 2*, 389-416.

Levy, H. (1978). *Equilibrium in an Imperfect Market: A Constraint on the Number of Securities in the Portfolio.* American Economic Review.

Linter, J. V. (1965). *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, The Review of Economics and Statistics.*

Lintner, J. V. (1965). Security prices risk: The theory and comparative analysis of ATyT and leading industrials. *Conference on "The economics of regulated public utilities.* Chicago.

Marín, J.M., & Rubio, G. (2001). *Economía Financiera.* Antoni Bosch, editor, S.A.

Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* New York: John Wiley &.

Merton, R. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*.

Miller, M. H., & Scholes, M. S. (1972). *Rates of return in relation to risk: a reexamination of some recent findings.* New York: Praeger Publishing Co.

Mochón, F., & Aparicio, F. (1995). *Diccionario de términos financieros y de inversión. McGraw Hill.*

Mossin, J. (1966). *Equilibrium in a Capital Asset Market.* Econometrica.

Reinganum, M. (1981). A new empirical perspective on the CAPM. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.

Roll, R. (1977). A critique of Assets Pricing Theory. *Journal of Financial Economics*.

Sáez Madrid, J., & Ortí Celma, F. (2009). *Anàlisi i selecció de carteres de valors*. Publicació nº 20. Universitat de Barcelona.

Sharpe, W. F. (1963). *A simplified model for portfolio analysis.* Management science.

Sharpe, W. F. (1964). *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk.* Journal of Finance.

Sharpe, W. F. (1984). *Factor models, CAPMs and the APT.* Journal of Portfolio Management.

Sharpe, W. F. (2000). *Portfolio Theory and Capital Markets.* New York: McGraw-Hill.

VI. ANNEXOS

Codi Matlab:

```
clear all
clc

cd 'D:\-TFG-'
RetornsAjustats = xlsread('RetornsAjustats');
Rm = xlsread('RM');

RE = mean(RetornsAjustats)';
var_retorns_ajustats = var(RetornsAjustats)';
desv_retorns_ajustats = sqrt(var_retorns_ajustats);
max_retorns = max(RetornsAjustats)';
min_retorns = min(RetornsAjustats)';
covari = cov(RetornsAjustats); %matriu de covariancies

fila_1 = ones(1,size(RE,1));
col_1 = fila_1';

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%___FRONTERA EFICIENT DE MARKOWITZ I LMC___%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%__portfolio tangent amb 45°__%
w1 = (inv(covari)*RE)/(fila_1*inv(covari)*RE);

%__portfolio amb min var__%
w2 = (inv(covari)*col_1)/(fila_1*inv(covari)*col_1);

%__mitja ponderada dels portfolios, var, desv estand i covariancia__%
RE1 = w1'*RE;
RE2 = w2'*RE;
var1 = w1'*covari*w1;
std1 = sqrt(var1);
var2 = w2'*covari*w2;
std2 = sqrt(var2);
cov12 = w1'*covari*w2;

%__combinacio entre els dos portfolios per formar la frontera eficient__%
p = [-4:0.1:4];
REp = RE1*p+RE2*(1-p);
varp =(p.^2)*var1+((1-p).^2)*var2+cov12*2*(p.*(1-p));
stdp = sqrt(varp);

%__Gràfic Frontera Eficient__%
p1 = [0:0.1:4];
REp1 = RE1*p1+RE2*(1-p1);
varp1 =(p1.^2)*var1+((1-p1).^2)*var2+cov12*2*(p1.*(1-p1));
stdp1 = sqrt(varp1);

p2 = [-4:0.1:0];
REp2 = RE1*p2+RE2*(1-p2);
varp2 =(p2.^2)*var1+((1-p2).^2)*var2+cov12*2*(p2.*(1-p2));
stdp2 = sqrt(varp2);
```

```
figure();
plot(stdp1,REp1,'r');
hold on;
plot(stdp2,REp2,'b');
plot(std1,RE1,'.');
hold on;
plot(std2,RE2,'.');
axis([0 0.15 -0.1 0.15]);
xlabel('$\sigma$','Interpreter','Latex');
ylabel('$E(R)$','Interpreter','Latex');
legend('Frontera Eficient','Frontera no eficient');
h = gcf;
set(h,'Units','Inches');
pos = get(h,'Position');
set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3),
pos(4)]);
print(gcf,'-dpdf','frontera1.pdf');

%__Gràfic (W1,W2)__%
figure();
plot(std1,RE1,'.');
hold on;
plot(std2,RE2,'.');
axis([0 0.15 -0.1 0.15]);
xlabel('$\sigma$','Interpreter','Latex');
ylabel('$E(R)$','Interpreter','Latex');
h = gcf;
set(h,'Units','Inches');
pos = get(h,'Position');
set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3),
pos(4)]);
print(gcf,'-dpdf','frontera1.pdf');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%___ESTIMACIÓ CAPM___$
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%__afegim risk free__%
vector_rf = xlsread('interes_espanyol_bo_10anys');
rf_1 = (mean(vector_rf));
rf = rf_1;

%__gràfic rf__%
temps_rf = [1:1:180];
figure();
plot (temps_rf, vector_rf, 'b');
title('Actiu lliure de risc en funció del temps');
xlabel('Temps (mesos)');
ylabel('Rendiment actiu lliure de risc');

wt = (covari^(-1)*(RE-rf*col_1))/(fila_1*covari^(-1)*(RE-rf*col_1));
REt = wt'*RE;
vart = wt'*covari*wt;
stdt = sqrt(vart);

%__dibuixar nova frontera amb rf__%
pt = [0:0.1:3];
REe = REt*pt+(1-pt)*rf;
vare = (pt.^2)*(stdt^2);
stde = sqrt(vare);
```

```
stdm = sqrt(var(Rm));
REm = mean(Rm);

figure();
plot (stdp, REp,'r');
hold on;
plot (stde, REe,'b')
hold on;
plot (stdm, REm,'.')
hold off;
axis([0 0.12 -0.1 0.1]);
xlabel('$\sigma$','Interpreter','Latex');
ylabel('E(R)','Interpreter','Latex');
title('Analisi mitja variància');
legend('Frontera de Markowitz', 'LMC');
h = gcf;
set(h,'Units','Inches');
pos = get(h,'Position');
set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3),
pos(4)]);
print(gcf,'-dpdf','frontera5.pdf');

%_____FER CAPM AMB Rm_____%
%__Excés retorns (empreses i mercat)__%
excess_returns = RetornsAjustats - vector_rf.*ones(180,43);
mkt_excess_returns = Rm - vector_rf;
average_mkt_excess_returns_2 = mean(mkt_excess_returns);
average_Rm = mean(Rm);
average_mkt_excess_returns = average_Rm - rf_1;

alfa = zeros(43,1);
beta = zeros(43,1);

%__convertir vector rf a matriu__%
col_2 = ones(180,1);

for i = 1:1:43
    re = excess_returns(:,i);
    x = [col_2 mkt_excess_returns];
    b = regress(re,x);
    alfa(i) = b(1);
    beta(i) = b(2);
end

%__Gràfic betas-retorns__%
x1 = [0:0.1:2];
y1 = rf + average_mkt_excess_returns*x1;
figure();
plot(x1,y1);
hold on;
plot(beta,RE,'.');
hold on;
plot(1,mean(Rm),'.');
axis([0 1.2 -0.02 0.08]);
xlabel('$\beta$','Interpreter','Latex');
ylabel('E(Rj)','Interpreter','Latex');
title('Security Market Line (SML)');
```

```
%_____FER CAPM AMB wt_____%
retorns_mensuals_wt =  RetornsAjustats * wt;
%__Excés retorns (empreses i mercat)__%
retorns_mensuals_wt_excess = retorns_mensuals_wt - vector_rf;
average_mkt_excess_returns_2 = mean(retorns_mensuals_wt_excess);

alfa_2 = zeros(43,1);
beta_2 = zeros(43,1);

%__convertir vector rf a matriu__%
col_2_2 = ones(180,1);

for j = 1:1:43
    re_2 = excess_returns(:,j);
    x_2 = [col_2_2 retorns_mensuals_wt_excess];
    b_2 = regress(re_2,x_2);
    alfa_2(j) = b_2(1);
    beta_2(j) = b_2(2);
end

%__Gràfic betas-retorns__%
x1_2 = [0:0.1:2];
y1_2 = rf + average_mkt_excess_returns_2*x1;
figure();
plot(x1_2,y1_2);
hold on;
plot(beta_2,RE,'.');
hold on;
plot(1,REt,'.');
axis([0 2 -0.05 0.2]);
xlabel('$\beta$','Interpreter','Latex');
ylabel('E(Rj)','Interpreter','Latex');
title('Security Market Line (SML)');

%_____COMPARATIVA RETORNS INDEX I CARTERA_____%
%____TOT EL PERIODE____%
%__IGBM__%
ln_retorn_IGBM = log(1+Rm);
cumulative_retorns_index = [];
cumulative_retorns_index(1) = ln_retorn_IGBM(1);

for l = 2:1:180
    cumulative_retorns_index(l) =
ln_retorn_IGBM(l)+cumulative_retorns_index(l-1);
end
cumulative_retorns_index_columna = exp(cumulative_retorns_index')-1;

%__CARTERA__%
ln_retorn_cartera = log(1+retorns_mensuals_wt);
cumulative_retorns_cartera = [];
cumulative_retorns_cartera(1) = ln_retorn_cartera(1);

for m = 2:1:180
    cumulative_retorns_cartera(m) =
ln_retorn_cartera(m)+cumulative_retorns_cartera(m-1);
end
cumulative_retorns_cartera_columna = exp(cumulative_retorns_cartera') - 1;

t = 1:1:180
figure();
```

```
plot(t,cumulative_retorns_index_columna);
hold on;
plot(t,cumulative_retorns_cartera_columna);
xlabel('Temps (mesos)');
ylabel('E(R)','Interpreter','Latex');
title('Comparativa Retorns Acumulats');
legend('Wt', 'IGBM');

%____ANUALS IGBM____%
cumulative_retorns_anuals_IGBM = [];
cumulative_retorns_anuals_IGBM_mensual(1) = ln_retorn_IGBM(1);
for w = 2:1:12
    cumulative_retorns_anuals_IGBM_mensual(w) =
cumulative_retorns_anuals_IGBM_mensual(w-1) + ln_retorn_IGBM(w);
end
cumulative_retorns_anuals_IGBM(1) =
cumulative_retorns_anuals_IGBM_mensual(12);

comptador = 1;
comptador_2 = 2;
xi_mesos = [];
for q = 2:1:15
    for y = (12*comptador)+1:1:(12*(comptador+1));
       if y == (12*comptador)+1;
           xi_mesos(1) = ln_retorn_IGBM(y);
       else
           xi_mesos(comptador_2)= ln_retorn_IGBM(y) + xi_mesos(comptador_2-
1);
           comptador_2 = comptador_2 + 1;
       end

    end
    comptador_2 = 2;
    cumulative_retorns_anuals_IGBM(q) = xi_mesos(end);
    comptador = comptador + 1;
end

finals_retorns_anuals_IGBM = exp(cumulative_retorns_anuals_IGBM') - 1;

%____ANUALS CARTERA____%
cumulative_retorns_anuals_cartera = [];
cumulative_retorns_anuals_cartera_mensual(1) = ln_retorn_cartera(1);
for w = 2:1:12
    cumulative_retorns_anuals_cartera_mensual(w) =
cumulative_retorns_anuals_cartera_mensual(w-1) + ln_retorn_cartera(w);
end
cumulative_retorns_anuals_cartera(1) =
cumulative_retorns_anuals_cartera_mensual(12);

comptador = 1;
comptador_2 = 2;
xi_mesos_2 = [];
for q = 2:1:15
    for y = (12*comptador)+1:1:(12*(comptador+1));
       if y == (12*comptador)+1;
           xi_mesos_2(1) = ln_retorn_cartera(y);
       else
           xi_mesos_2(comptador_2)= ln_retorn_cartera(y) +
xi_mesos_2(comptador_2-1);
           comptador_2 = comptador_2 + 1
```

```
        end

    end
    comptador_2 = 2;
    cumulative_retorns_anuals_cartera(q) = xi_mesos_2(end);
    comptador = comptador + 1;
end
finals_retorns_anuals_cartera = exp(cumulative_retorns_anuals_cartera') -
1;

%__grafic comparativa retorns acumulats anuals__%

anys = 2002:1:2016
figure();
plot(anys,finals_retorns_anuals_cartera);
hold on;
plot(anys,finals_retorns_anuals_IGBM);
xlabel('Temps (anys)');
ylabel('E(R)','Interpreter','Latex');
title('Comparativa Retorns');
legend('Wt', 'IGBM');

%__Gràfic Rm-temps__%
%__gràfic rf__%
figure();
plot (temps_rf, Rm, 'b');
title('IGBM en funció del temps');
xlabel('Temps (mesos)');
ylabel('Rendiment IGBM');

%__Gràfic núvol de punts Markowitz__%
figure();
plot (desv_retorns_ajustats, RE,'.');
title('Retorns Esperats - Volatilitat');
xlabel('$\sigma$','Interpreter','Latex');
ylabel('E(R)','Interpreter','Latex');

%__Comparativa rendiments esperats reals i calculats__%
RE_amb_IGBM = rf.*ones(43,1)+beta.*(REm.*ones(43,1)-rf.*ones(43,1));
RE_amb_wt = rf.*ones(43,1)+beta.*(REt.*ones(43,1)-rf.*ones(43,1));
```