Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Inferència Causal

Ferran Cancio Pujols

Director: Dr. Oriol Pujol Vila
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

This project has two main objectives. The first one is to give a general and introductory idea of what causality is, especially in problems that can be represented by directed acyclic grafs. *Do-calculus* and interventions are introduced as a tool to identify and quantify causal effects. Moreover, this document wants to serve as an introductory but complete study to anyone interested in this field.

The second objective is to improve in a given problem: which are the causes of altitude sickness? From here we will explore how oxygen saturation affects altitude sickness. Is low oxygen saturation the cause of altitude sickness or is it only a mediator of altitude?

Resum

Aquest projecte té dos objectius principals. El primer d'ells és donar una idea general i introductòria del que és la causalitat, especialment en problemes en que aquest efecte pot ser representat per un graf acíclic dirigit. S'introdueix també, el *do-calculus* l'eina que juntament amb les intervencions permet distingir aquests efectes causals i avaluar la seva magnitut. També pretén ser útil com a introducció senzilla però completa per a qualsevol que vulgui introduïr-se en aquest camp.

El segon objectiu és aplicar aquest coneixement a un problema determinat. En particular, quines son les causes del mal d'alçada? A partir d'aquí investigarem com la saturació d'oxigen afecta el mal d'alçada. Volem respondre a la pregunta: és la baixa saturació d'oxigen causa del mal d'alçada o només és un mediador de l'alçada?

2010 Mathematics Subject Classification. 62-07, 62-09, 62P10,

Agraïments

S'han de començar les coses de la forma que es mereixen, primer vull agrair al director d'aquest treball, al Dr. Oriol Pujol Vila, que ha estat el meu guia quan no sabia cap on avançar, per tot el seu saber estar, dedicació i sempre trobar temps per la meva persona en la seva estreta agenda, sense ell res d'aquest treball hagués estat possible.

Cal continuar per la meva família, el meu pare i la meva mare, que més enllà de posar-me pressió i demanar-me explicacions sobre el temps que portava dedicant a la carrera m'han ajudat i recolzat sempre, sense ells no podria estar veient la llum d'entregar aquest treball.

Finalment agrair a tots els amics que m'han ajudat poc o molt a fer-ho tot més fàcil, alguns de l'àmbit matemàtic com l'Òscar amb el qual sempre tenim a punt alguna discussió per resoldre i d'altres que de matemàtiques en saben el mateix que una paret però sempre han estat allà per ajudar-me a distreure'm i gaudir en altres coses, Jaume, Josep i Miquel, també una menció a tothom qui va acompanyar-me en la meva aventura a sud Amèrica.

Índex

1 Introducció

En el meu darrer any vaig cursar un intercanvi a Chile, en la universitat on estava vaig tenir l'oportunitat de conèixer el que és Machine Learning o Aprenentatge Automàtic, hem va sorgir la idea de realitzar el meu treball de fi de grau amb quelcom relacionat amb això, després d'aconseguir trobar un tutor que m'ajudes vam posar sobre la taula diversos treballs sobre aquesta temàtica vam decidir treballar sobre contrafactuals, totes les afirmacions que contenen un "siï el que fa referència aquest "si"o bé no és cert o bé no ha estat realitzat es coneixen com a contrafactuals[2], però en els primers dies ja ens vam adonar que per arribar a parlar de contrafactuals primer teniem un gran recorregut per un camp molt ampli, el camp de la causalitat, així que en veure tot el que haviem de recorrer per arribar a contrafactuals i les coses interesants que passariem en diagonal de causalitat vam creure oportu quedar-nos treballant en aquest camp, la causalitat. Tothom ha sentit alguna vegada en el primer curs d'estadística *correlació no és causalitat*, però gairebé ningu ha estudiat la causalitat. La causalitat filosoficament parlant és la "relació que s'estableix entre la causa i l'efecte", podem parlar d'aquesta relació entre aconteixaments, processos, etc. No existeix encara una única definició comunment acceptada del terme çausa". En la seva acceptació més amplia, es diu que alguna cosa és causa d'un efecte quan aquest últim depen de la primera. Matemàticament el que voldrem estudiar és similar al que es relata, com alguna cosa és causa d'una altre i poder separar aquesta causalitat de la ja coneguda correlació. Aquest treball constarà de dos grans objectius, el primer ser una introducció simple pero completa de la causalitat, conèixent així el camp i les eines per poder treballar-hi, utilitzant teoria de grafs, calculant l'efecte causal d'una cosa sobre una altre, diferenciant quan la podem calcular i quan no, en definitva intentar separar en els casos menys clars la causalitat de la habitual correlació. Per tal d'intentar possar una mica de llum en el problema mencionat al resum, quins són els causants del mal d'altura.

Estructura de la Memória

Per escriure la memòria la base bibliografica que més he seguit és [1] [3] i [2]. La memòria està estructurada en tres seccions. En la primera aportarem totes eines necessaries per poder treballar en la causalitat, és a dir els grafs, els models causals estructurals i com es relacionen aquestes eines amb les dades i entre elles. Finalment veurem un seguit d'estructures importants que ens valdrà la pena identificar dins dels grafs ja que tant sols fer-ho ja ens aporta informació sobre el graf (i.e sobre les dades).

La segona està dedicada a les intervencions i en general al Do-Calculus, expliquem com podem ajustar les dades, "modificar-les"[3] intervenint-les perquè prenguin els valors que ens interesen per estudiar-les, aportem alguns criteris per evitar caure en estimacions equivocades.

[2]si hi ha interes en conèixer més sobre els contrafactuals llegir la seva secció en [3]

[3]aquest modificar-les esta entre cometes ja que realment tant sols les modifiquem teòricament, a la pràctica no ho fem

Per últim la darrera secció, on parlarem sobre el problema del mal d'alçada, quines són les causes del mal d'alçada i com intentem abordar el problema modelitzant-lo realitzant simplificacions per tal de poder-ne extreure alguna cosa.

2 Eines i estructures necessaries

2.1 Grafs

Un graf consisteix en un conjunt V de *vèrtex* (o bé *nodes*) i un conjunt E *d'arestes* que connecten parells de vèrtex. Els vèrtexs en els nostres grafs corresponen a les variables i les arestes representen una certa relació entre el parell de vèrtex que uneixen, aquesta relació varia en cada context. Dues variables (vèrtexs) connectades per una aresta s'anomenen *adjacents*.

Cada aresta en un graf pot ser o bé dirigida (marcada amb una única fletxa en un dels extrems) o bé no dirigida (sense marcar amb cap fletxa). En algunes aplicacions podem utilitzar arestes "bidirigides"[4].

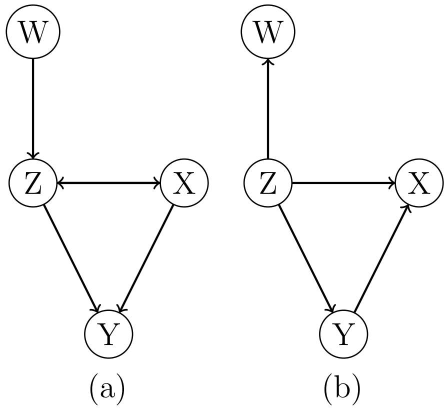


Figura 1: (a)Un graf que conte arestes dirigides i bidirigides (b) Un graf acíclic dirigit (DAG) amb el mateix esquelet que (a)

Si totes les arestes són dirigides (Figura1(b)) tindrem un graf *dirigit*. Si nosaltres extraiem totes les fletxes de les arestes d'un graf G, el graf no dirigit resultant és anomenat *esquelet* del graf G. Un *camí* en un graf és una seqüència d'arestes (per exemple $((W, Z), (Z, Y), (Y, X), (X, Z))$ en la Figura1(b)) tal que cada aresta comença en el vèrtex on ha acabat l'anterior. Dit d'una altre forma, un camí és una ruta traçada sense interseccions entre diferents vèrtex del graf que pot anar en la mateixa direcció de les fletxes o en contra d'elles. Sí tot el camí és en la direcció de les fletxes tenim un *camí dirigit*. En la Figura1(a) el camí $((W, Z), (Z, X), (X, Y))$ és un camí dirigit però el camí $((W, Z), (Z, Y), (Y, X))$ no ho és. Sí existeix un camí entre dos vèrtex en un graf diem que aquests vèrtexs estan *connectats*, d'altre manera diem que estan *desconnectats*.

Els grafs dirigits poden incloure cicles dirigits.

(per exemple $(X, Y), (Y, X)$) però no llaços propis (per exemple (X, X)). Un graf com en la Figura1(b) que no conté cicles dirigits es anomenat *acíclic*. Un graf que és a la vegada dirigit i acíclic l'anomenem *graf acíclic dirigit* (DAG), aquests grafs són molt ocupats per les discusions de causalitat. Farem ús de paraules del parentesc

[4]Solen utilitzar-se per denotar causes comuns no observades es representen com una aresta amb una fletxa a cada extrem, nosaltres en el treball no les utilitzarem

per denotar relacions en els grafs (per exemple *pares, fills, descendents, ancestres.* Aquestes relacions de parentesc es defineixen a partir de les arestes, incluint les que formen cicles dirigits però ignorant les arestes no dirigides i les bidirigides.

Per exemple en la Figura1(a) el vèrtex Y té dos pares (X i Z), tres ancestres (X, Zi W) no te cap fill mentre que el vèrtex X no conta amb cap pare (per tant cap ancestre) una dona (Z) i un fill (Y). Una família en un graf és un conjunt de nodes que conté un node i tots els seus parents, per exemple $\{W\}, \{Z, W\}, \{X\}\{Y, Z, X\}$, són tres families del graf de Figura 1(a).

Un vèrtex en un graf dirigit s'anomena *arrel* si no té pares i *final* si no te cap fill. Un graf on cada parell de vèrtex estan connectats s'anomena graf *complet.* El graf de la Figura1(a), és connectat però no complet, ja que els parells $(W, X), (W, Y)$ no són adjacents.

2.2 Models Causals Estructurals.

Per ser rigurosos amb les qüestions de causalitat necessitem una forma d'establir formalment les nostres suposicions sobre la història causal darrere d'un conjunt de dades. Per fer-ho s'introdueix el concepte de Models Causals estructurals, o com els anomenarem a partir d'aquí *SCM*, els quals són la forma de descriure les característiques del món rellevants i com aquestes interaccionen entre elles. Específicament un SCM descriu com la natura assigna valors a les variables que ens interessen.

Formalment, un SCM consta de dos conjunts de variables U i V, i un conjunt de funcions que assignen a cada variable de V un valor basat ens els valors de les altres variables del model. Així podrem dir; una variable X és *causa directa* d'una altre variable Y si X apareix en la funció que assigna el valor a Y. X causa Y sí és una causa directa de Y o bé és causa directa de qualsevol variable que causa Y.

Les variables en U les anomenarem *variables exògenes*, significa que aquestes variables són externes del model, escollides per qualsevol raó i de les quals no explicarem quina n'es la causa. Les variables V són *variables endògenes.* Totes les variables endògenes en els models seran descendents com a mínim d'una variable exògena. Les variables exògenes no podran ser descendents d'altres variables, i en particular no podran ser descendents de variables endògenes; les variables exògenes no tindran ancestres representaran nodes arrels en els grafs. Si nosaltres sabem el valor de totes les variables exògenes, llavors utilitzant les funcions en f, podrem determinar amb exactitud el valor de totes les variables endògenes.

Per exemple, suposem que estem interesats en estudiar la relació causal entre un tractament X i una funció pulmonar Y per individus que pateixen asma. Podem suposar que Y depèn també, o és causada pels, nivell de contaminació de l'aire que seran mesurats per una variable Z. En aquest cas, podem referir-nos a X i Y com a variables endògenes i Z com a variable exògena. Això és perquè assumim que el nivell de contaminació de l'aire és un factor extern, i no és causat per un tractament individual o bé una funció pulmonar.

Cada SCM va associat a un *model causal gràfic*, al qual ens referim de manera informal com model gràfic ó simplement graf. Els grafs com ja s'ha explicat anteriorment consisteixen en un conjunt de nodes que representen les variables U i v, i un conjunt d'arestes entre nodes que representen les funcions en f. El graf G per un SCM M conte un node per cada variable en M. Si, en M, la funció f_X per una variable X conté una variable Y (és a dir Si X depen de Y pel seu valor), llavors tindrem una aresta dirigida (amb una fletxa) de Y a X. Tractarem principalment amb SCM's on els seus grafs són DAG's. Gràcies a la relació entre els SCM's i els grafs, podem donar una definició gràfica de la causalitat: Sí, en un graf, una variable X és un fill d'una altre variable Y, llavors Y és una causa directa de X; sí X és un descendent de Y, llavors Y, és una causa potencial de X (a vegades hi ha casos intransitius on Y no és causa de X).

Exemple 2.1. Exemple de SCM, salari basat en l'educació i l'experiència

$$U = \{X, Y\},\ V = \{Z\},\ F = \{f_Z\}$$
$$f_Z : Z = 2X + 3Y$$

Aquest model representa el salari Z que un empresari paga al seu treballador amb X anys d'estudis i Y anys d'experiència. X i Y apareixen en f_Z així que X i Y són ambdues causes directes de Z. Sí X i Y tinguessin ancestres, aquests podrien ser causes potencials de Z el graf associat al SCM és el següent:

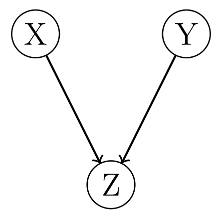


Figura 2: graf associat al SCM anterior, amb X indicant els anys d'estudis i Y els anys d'experiència

Ja que tenim arestes que conecten Z amb X i Y, podem concloure tant sols amb un petit cop de vista al graf que hi ha alguna funció f_Z en el model que assigna el valor de Z a partir de X i Y, així que X i Y són causes de Z. Tot i això, sense tota la informació del SCM no podem deduïr a partir del graf quina funció és la que defineix Z o dit d'una altre manera, *com* X i Y causen Z.

Si els grafs contenen menys informació que els SCMs, perquè els utilitzem? Hi ha diverses raons. Primer de tot, normalment el coneixement que tenim sobre les relacions de causalitat no és quantitatiu, com es necessita en un SCM, sinó que és qualitatiu, com quan ho representem via grafs.

Per exemple sabem que el gènere és una causa de l'altura i l'altura és una causa del rendiment al basquet, pero certament no podem donar un valor numeric a aquesta relació, així que podem dibuixar un graf per simplement tenir una visió parcial d'aquest SCM.

Exemple 2.2. Exemple de SCM, Rendiment al basquet basat en l'altura i el gènere

$$V = \{\text{Alçada, Gènere, Rendiment}\}, U = \{U_1, U_2, U_3\}, F = \{f_1, f_2\}$$
$$\text{Gènere} = U_1$$
$$\text{Alçada} = f_1(\text{Gènere}, U_2)$$
$$\text{Rendiment} = f_2(\text{Alçada, Gènere}, U_3)$$

Aquí $U = \{U_1, U_2, U_3\}$ representen varis factors els quals no mencionarem, però que afecten les variables V que podem mesurar. Moltes vegades els factors U els anomenem termes d'error o factors omesos. Aquests representen causes exògenes que desconeixem i/o són aleatories del que nosaltres mesurem.

Però els grafs són una manera més intuitiva per entendre la causalitat que els SCMs parcials. Considerem l'SCM anterior i el seu graf associat, contenen la mateixa informació, que és: X causa Z i Y causa Z, però es molt més rapid i fàcil observar el graf que l'SCM.

2.3 Conectant els models amb les dades.

Els grafs resultaran ser una eina molt potent. El rol que juguen en la modelització probabilística i estadística és molt important, la podem dividir en tres parts.

1. Proporcionar mitjants per expressar supòsits substantius.
2. Facilitar una representació econòmica de funcions de probabilitats conjuntes.
3. Facilitar inferències eficients a partir d'observacions.

Comencem centrant-nos en la importancia del segon punt ja que la part anterior dels SCM ja ens ha donat un exemple dels altres dos punts. considerem la tasca d'especificar una distribució arbitraria conjunta $P(x_1, \ldots, x_n)$, per n variables dicòtomiques. Per tenir explícitament $P(x_1, \ldots, x_n)$, requeriríem una taula amb 2^n entrades, un nombre impensablement gran per qualsevol cas. Podem economitzar-ho quan cada variable depèn d'un subconjunt petit d'altres variables. Aquesta informació de dependència ens permet descomposar llargues funcions de distribució en diverses distribucions més petites (cadascuna involucrant un petit subconjunt de variables) i llavors unir-les de manera coherent per respondre preguntes de naturalesa global. Els grafs juguen un rol essencial en aquesta descomposició, ja que porporcionen una representació dels conjunts de variables importants per les altres en un estat determinat.

Tant els grafs dirigits com els no dirigits han estat utilitzats per varis investigadors durant els darrers anys, però nosaltres ens centrarem en els DAGs.

L'esquema de descomposició bàsica que ofereixen els DAGs es pot veure com següeix. Suposem que tenim una distribució de probabilitat P definida en n variables discretes, que podem ordenar de manera arbitrària com $X_1, X_2, \ldots, X_n$

La regla de la cadena del càlcul de probabilitats sempre ens permet descomposar P com a producte de n distribucions condicionades:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_j P(x_j | x_1, \ldots, x_{j-1}) \tag{2.1}$$

Ara suposem que la probabilitat condicionada d'alguna variable X_j no és sensible a tots els seus predecessors, sino que només ho és a un petit subconjunt d'aquests predecessors. En altres paraules, soposem que X_j és independent a tots els altres predecessors, tant bon punt sabem el valor del grup de predecessors als quals és sensible, anomenem-lo PA_j, podem escriure:

$$P(x_j | x_1, \ldots, x_{j-1}) = P(x_j | pa_j), \tag{2.2}$$

El producte de (2.1) es simplifica considerablement la informació d'entrada requerida. En comptes d'especificar la probabilitat de X_j amb tots els seus predecessors $X_1, \ldots, X_{j-1}$, tant sols ens preocuparem del conjunt de predecessors PA_j. El conjunt PA_j l'anomenarem *Pares Markovians* de X_j, o *pares* per dir-ho de forma més curta. La raó d'aquest nom quedarà clara quan construim grafs a partir d'aquest concepte.

Definició 2.3. ***(Pares Markovians)*** *Sigui $V = \{X_1, \ldots, X_n\}$ un conjunt ordenat de variables, i sigui $P(v)$ una distriució conjunta de probabilitats d'aquestes variables. Un conjunt de variables PA_j s'anomena Pares Markovians de X_j si PA_j és el mínim conjunt de predecessors de X_j que fan X_j independent dels seus altres predecessors. En altres paraules PA_j és l'únic subconjunt de $X_1, \ldots, X_{j-1}$ que satisfa*

$$P(x_j | pa_j) = P(x_j | x_1, \ldots, x_{j-1}) \tag{2.3}$$

i tal que no hi ha cap subconjunt propi de PA_j que satisfa (2.3)

La definició (2.3) assigna a cada variable X_j el seu conjunt PA_j de les variables predecessores suficients per determinar la probabilitat de X_j; conèixer el valor de les altres variables predecessores és redundant una vegada que coneixem els valors pa_j del conjunt de pares PA_j. Aquesta assignació es pot representar en forma de DAG on les seves variables són representades per nodes i fletxes dibuixades desde cada node del conjunt de pares PA_j cap al node fill X_j. La definició (2.3) també ens dona un mètode recursiu molt simple per construir DAGs: començant amb el parell (X_1, X_2), dibuixem una fletxa de X_1 a X_2 si i només si les dues variables són dependents, continuant amb X_3, no dibuixem cap fletxa en el cas que X_3 sigui independent de $\{X_1, X_2\}$, en cas contrari examinem sí X_2 condiciona la independència de X_3 i X_1 (és a dir la independencia entre X_1 i X_3 depen de X_2) o sí X_1 condiciona la independència de X_3 i X_2 (és a dir la independencia entre X_2 i X_3 depen de X_1), en el primer cas dibuixem una fletxa de X_2 a X_3, en el segon cas la dibuixem de X_1 a X_3. Sí no trobem que cap de les dues condiciona la independència en relació a l'altre dibuixem una fletxa de X_1 a X_3 i una de X_2 a X_3. En general al j-essím pas de la construcció seleccionem qualsevol subconjunt minimal del conjunt X_j de predecessors que condiciona la independència de X_j dels seus altres predecesors (com en l'equació (2.3)), anomenem aquest conjunt PA_j i dibuixem una fletxa desde cada membre de PA_j a X_j. El resultat és un DAG, anomenat *Xarxa Bayesiana*, en la qual una fletxa de X_i a X_j significa que X_i és un pare Markovia de X_j, consistent amb la definició (2.3).

Es pot demostrar ([5]) que el conjunt PA_j és únic sempre que la distribució de probabilitat $P(v)$ és estrictament positiva (és a dir que no implica cap lògica o definició de restriccions) de manera que cada configuració de variables v, tingui certa probabilitat encara que sigui petita, en aquestes condicions la xarxa Bayesiana associada a $P(v)$ es única donat un ordre de variables.

La construcció que implica la definició (2.3) defineix una xarxa Bayesiana com un operador de les relacions condicionals d'independència al llarg de l'ordre de construcció. Clarament totes les distribucions que satisfan 2.3 es poden descomposar utilitzant la regla de la cadena del producte en el producte següent:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i|pa_i) \tag{2.4}$$

La descomposició del producte (2.4) ja no és específica respecte l'ordre ja que, donat P i G, podem comprobar si P descomposa en un producte donat per (2.4) sense fer cap referència al ordre de les variables, per tant podem concloure que la condició necessaria perquè un DAG G sigui una xarxa Bayesiana de distribució de probabilitat P és que P admeti una descomposició del producte dicatada per G com en (2.4).

Definició 2.4. ***(Compatibilitat de Markov)*** *Si una funció de probabilitat P admet una factorització com (2.4) relativa a un DAG G, podem dir que G representa P, que G i P són compatibles, o que P és Markov relatiu a G.*

La compatibilitat entre DAG's i probabilitats és molt important en la modelització estadística principalment perquè la compatibilitat és condició necessaria i suficient per a un DAG G per *explicar* un conjunt de dades empiriques representades per P.

Una manera convenient de caracteritzar els conjunts de distribucions compatibles amb un DAG G és enumerar el conjunt d'independencies (condicionades) que cadascuna d'aquestes distribucions ha de satisfer. Aquestes independencies s'extreuen del DAG utilitzant un critèri gràfic que explicarem més endavant anomenat *d-separació*.

2.4 Configuracions importants

Hi ha tres estructures de grafs que cal que conèixer i identificar ja que jugaran un paper força important. Al indentificar-les ja sigui com a graf total o bé com a subgraf d'un altre graf ens entregaran ja informació molt valuosa sobre la *història causal* de les dades que representen.

1.

Definició 2.5. ***cadena*** *Una estructura cadena (en àngles chain) és un graf (o bé un subgraf) format per tres nodes i dues arèstes, amb una aresta dirigida desde el primer node al del mig, i una altre desde el node del mig al últim.*

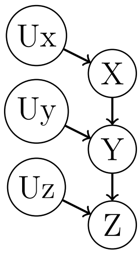


Figura 3: graf cadena associat als dos SCM anteriors

Siguin els dos següents SCM, tots ells amb el mateix graf associat(Figura 3), el primer SCM representa la relació causal entre el finançament escolar(X),- la puntuació en la prova de selectivitat (Y), i la taxa d'accepatació en la universitat (si entrem a la universitat desitjada)(Z), el segon és sobre els participants a una cursa, representa la relació causal entre les hores que treballen a la setmana en la seva feina(X), les hores que entrenen a la setmana(Y) i el temps en minuts en la cursa(Z). En els dos models les variables exògenes (U_x, U_y, U_z) tenen un efecte desconegut o bé aleatori que pot alterar la relació entre les variables endògenes.

SCM 2.6. ***(Finançament escolar, Puntuació selectivitat, Taxa d'acceptació)***

$$V = \{X, Y, Z\}, U = \{Ux, Uy, Uz\}, F = \{fx, fy, fz\}$$
$$fx : X = Ux$$
$$fy : Y = \frac{x}{3} + Uy$$
$$fz : Z = \frac{y}{16} + Uz$$

SCM 2.7. ***(Hores treballades, Hores entrenades, Temps a la cursa)***

$$V = \{X, Y, Z\}, U = \{Ux, Uy, Uz\}, F = \{fx, fy, fz\}$$
$$fx : X = Ux$$
$$fy : Y = 84 - x + Uy$$
$$fz : Z = \frac{100}{y} + Uz$$

Les relacions entre les variables del SCM 2.6 són totes positives (és a dir com més gran sigui el valor del pare, més gran serà el valor del fill), en canvi les relacions entre les variables del SCM 2.7 són totes negatives (és a dir com més gran sigui el valor del pare més petit serà el valor del fill). Els dos models no comparteixen cap funció en comú, però ja que comparteixen el mateix graf, les dades generades pels dos SCM compartiran varies independencies, i podrem predir aquestes independencies tant sols examinant el graf. Les dependencies/independencies que comparteixen els dos SCM són les següents.

(a) **Z i Y són probablement dependents**
Per alguns $z, y, P(Z = z|Y = y) \neq P(Z = z)$

(b) **Y i X són probablement dependents**
Per alguns $y, z, P(Y = y|X = x) \neq P(Y = y)$

(c) **Z i X són probablement dependents**
Per alguns $z, x, P(Z = z|X = x) \neq P(Z = z)$

(d) **Z i X són independents, condicionats per Y**
Per alguns $x, y, zP(Z = z|X = x, Y = y) = P(Z = z|Y = y)$

Per entendre el perquè d'aquestes independencies i dependencies examinarem el graf, primer de tot es verifica que dues variables amb una aresta entre elles seran probablement dependents, cal recordar que una fletxa d'una variable a una altre indica que la primera variable causa la segona, això vol dir que el valor de la primera variable és part de la funció que determina el valor de la segona, per això la segona variable *depen* de la primera pel seu valor, sempre que el valor de la primera variable canvii ho fara el de la segona.

Això significa que, quan examinem aquestes variables en un conjut de dades, la probabilitat que una variable prengui un valor canvia quan nosaltres sabem el valor de l'altre variable. Així en el model causal típic, independentment de les funcions específiques dues variables connectades per una aresta són dependents. Per aquest raonament podem veure que en els SCM's anteriors Z i Y són dependents, i que Y i X també ho són.

Per aquests factors podem concloure que Z i X són *probablement* dependents. Si Z depen de Y pel seu valor, i Y depen de X pel seu valor, llavors Z probablement depen de X pel seu valor.

Per un raonament similar al anterior podem observar que en un graf, donades dues variables X i Y, si l'unic camí entre X i Y és només un conjunt de cadenes encadenades, llavors X i Y són independents condicionades en qualsevol variable del camí. Aquesta relació d'independència es mantè per qualsevol funció que connecti les variables, el que ens dona la següent norma:

Regla 1(Independència Condicionada en Cadenes) Dues variables X i Y són independents condicionalment donada una variable Z si només hi ha un camí dirigit entre X i Y i Z és qualsevol conjunt de variables que intercepten aquest camí.

Una cosa important que cal remarcar és que la regla anterior tant sols funciona quan nosaltres assumim que els errors U_x, U_y, U_z són independents entre ells, si per exemple Ux fós causa de Uy condicionar en Y no necessàriament faria X i Z independents ja que variacions en X encara podrien estar associades a variacions en Y a traves dels seus errors.

2.

Definició 2.8. ***Bifurcació*** *Una estructura bifurcació (o forca en angles fork) és un graf (o bé subgraf) format per tres nodes i dues arèstes que surten del mig cap als altres dos nodes, el node el mig és anomenat causa comuna de les variables o qualsevol dels seus descendents.*

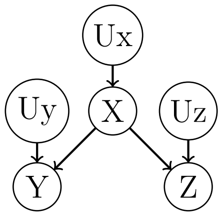


Figura 4: graf bifurcació associat als dos SCM anteriors

Siguin els dos següents SCM, tots dos amb el mateix graf associat (Figura 4), el primer SCM representa el mecanisme causal que connecta la temperatura en un dia en una ciutat en graus Celsius(X), el nombre de gelats venuts en una gelateria local en un dia(Y), i el nombre d'assassinats violents a la ciutat en un dia(Z), el segon representa el mecanisme causal que conecta l'estat (amunt o avall) d'un interruptor(X), l'estat (encesa o apagada) d'una bombeta(Y), i l'estat (encesa o apagada) d'una segona bombeta(Z). Les variables exògenes Ux, Uy, Uz representen uns altres factors, possiblement aleatoris, que influeixen en aquestes variables.

SCM 2.9. ***(Temperatura, Gelats venuts, Assassinats)***

$$V = \{X, Y, Z\}, U = \{Ux, Uy, Uz\}, F = \{fx, fy, fz\}$$
$$fx : X = Ux$$
$$fy : Y = 4x + Uy$$
$$fz : Z = \frac{x}{10} + Uz$$

SCM 2.10. ***(Interruptor i les dues bombetes)***

$$V = \{X, Y, Z\}, U = \{Ux, Uy, Uz\}, F = \{fx, fy, fz\}$$
$$fx : X = Ux$$
$$fy : Y = \begin{cases} Encesa\ SI(X = Amunt\ iUy = 0)\ ó\,(X = avall\ iUy = 1) \\ Apagada\ en\ qualsevol\ altre\ cas \end{cases}$$
$$fz : Z = \begin{cases} Encesa\ SI(X = Amunt\ iUz = 0)\ ó\,(X = avall\ iUz = 1) \\ Apagada\ en\ qualsevol\ altre\ cas \end{cases}$$

Si asumim els termes d'error Ux, Uy, Uz independents i examinem el graf anterior, podem veure que 2.9 i 2.10 comparteixen les següents indèpendencies i dependencies.

(a) **X i Y són probablement dependents**
Per alguns $x, y, P(X = x|Y = y) \neq P(X = x)$

(b) **X i Z són probablement dependents**
Per alguns $x, z, P(X = x|Z = z) \neq P(X = x)$

(c) **Z i Y són probablement dependents**
Per alguns $z, y, P(Z = z|Y = y) \neq P(Z = z)$

(d) **Y i Z són independents, condicionats per X**
Per tots $x, y, zP(Y = y|Z = z, X = x) = P(Y = y|X = x)$

Els primers dos punts venen altre cop de que Y i Z estan ambdos connectats dirigidament amb X, així que quan el valor de X canvia, el valor de Y i Z probablement canviarà. Això ens diu alguna cosa més, si Y canvia quan X canvia, i Z canvia quan X canvia, llavors això ens fa pensar que probablement (encara que no cert del tot) que Y i Z canvien de forma conjunta i viceversa.

Per tant, atès que un canvi el valor de Y ens dóna informació sobre un canvi en el valor Z, Y i Z són probablement variables dependents.

Perquè llavors Y i Z són independents condicionades en X? Bé que passa quan les condicionem per X? Filtrem les dades basant-nos en el valor de X. Ara comparem els casos on el valor de X és constant. Desde que X no canvia els valors de Y i de Z tampoc canvien d'acord amb això, els valors de Y i Z canvien només per culpa de Uy, Uz, que hem assumit que eren independents. Per tant, en qualsevol canvi adicional en els valors de Y i Z ha de ser independent, és a dir una ha de ser independent de l'altre.

Si dues variables comparteixen una causa comú, i si aquesta causa comú es part de l'unic camí entre aquestes dues variables, llavors amb un raonament anàleg a l'anterior ens diu que aquestes dependències i independenciès condicionals són certes, per tant podem escriure una altre regla.

Regla2 (Independencia Condicional en forques) Si una variable X és una causa comú de les variables Y, Z i X és l'unic camí entre Z i Y, llavors Y i Z són independents condicionades en X

3.

Definició 2.11. ***col·lisió*** *Una estructura col·lisió (en àngles anomenada collider) és un graf (o bé un subgraf) un node rep arèstes dels altres dos nodes, és a dir dues variables en causen una tercera, a vegades també es anomenat bifurcació inversa.*

El graf més simple que conte una col·lisió esta ilustrat a la figura 5, que representa un efecte comú Z, de dues causes X i Y. Com anteriorment tot SCM que tingui aquest graf associat comparteix un conjunt de dependencies i independències que extreiem del graf, assumint Ux, Uy, Uz independents entre ells tenim:

(a) **X i Z són probablement dependents**
Per alguns $x, z, P(X = x|Z = z) \neq P(X = x)$

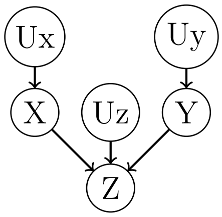


Figura 5: graf col·lisió associat als models que representen un efecte comú de dues causes

(b) **Y i Z són probablement dependents**
Per alguns $y, z, P(Y = y|Z = z) \neq P(Y = y)$

(c) **X i Y són independents**
Per alguns $x, y, P(X = x|Y = y) = P(X = x)$

(d) **X i Y són probablement dependents, condicionats per Z**
Per tots $x, y, zP(X = x|Y = y, Z = z) \neq P(X = x|Z = z)$

La certesa dels primers dos punts ha estat establerta anteriorment en les definicions de cadena i bifurcació, el tercer punt és evident, X no és cap ancestre de Y ni cap descendent, tampoc Y és cap ancestre ni cap descendent de X, el seu valor no depen de l'altra variable, X només té com a responsable del seu valor Ux i Y només te com a responsable del seu valor Uy que els hem assumit independents, aleshores les variacions en valors de X no venen associades amb les variacions en el valor de Y. Aquesta independència també ens mostra que la causalitat perdura a través del temps; els esdeveniments que són independents en el present no es converteixen en dependents només perquè poden tenir efectes comuns en el futur.

Perquè és cert llavors el punt 4? Perquè dues variables independents es converteixen de cop en variables dependents quan les condicionem en el seu efecte comú? La resposta a aquestes preguntes ve donada per la definció de condicionament com a filtratge pel valor de la variable amb la que condicionem. Quan condicionem en Z, limitem les nostres comparacions en els casos en què Z té el mateix valor. Però recordem el valor de Z depen de X i de Y. Així que quan comparem casos que Z pren un valor fix, qualsevol canvi en X ha de ser compensat per un canvi en Y, ja que sino el valor de Z canviaria també.

El raonament darrere d'aquesta característica dels col·lisionadors (condicionar en el node de col·lisió produeix dependencia entre els nodes parents) pot ser difícil de veure al principi. Observem primer el cas més simple on $Z = X + Y$, sent X i Y variables independents, prenem la següent lógica, si diem que $X = 3$, no podrem saber res sobre el valor potencial de Y, ja que tots dos nombres són independents. Per altre banda si comencem dient $Z = 10$ llavors quan diem $X = 3$ immediatament estem dient que $Y = 7$, llavors X i Y són dependents donat $Z = 10$.

Per clarificar una mica més les coses passarem a un cas més pròxim a la vida real; observem els estats units, les universitats acostumen a finançar dos perfils d'estudiants els talentosos pel basquet i els que treuen notes extraordinaries. Normalment aquestes dues virtuts es solen presentar de manera independent, és difícil trobar un jugador de basquet que tingui notes extraordinares, en la població Americana en general trobar una persona que jugui bé al basquet no ens aporta res sobre el seu coneixament acadèmic, però trobar una persona que disposa de finançament universitari canvia les coses, saber que aquesta persona no sap jugar a basquet ens diu directament que poseeix unes notes extraordinaries. Així, dues variables que eren independents es converteixen en dependents coneixent el valor de la tercera variable (finançament escolar) que és efecte comú de les dues primeres variables.

Ara observem un exemple numèric. Considerem dues tirades simultanies de dues monedes (independents) i un mecanisme en forma de timbre que sona sempre que com a mínim una moneda sigui cara. Anomenem els resultats, de les tirades, de la moneda 1 (X), de la moneda 2 (Y) i del timbre (Z), si el timbre sona direm que $Z = 1$, si no sona $Z = 0$. Aquest mecanisme es pot representar com un col·lisió que te com a graf associat la figura5, on els resultats de les dues monedes són els nodes pares i el soroll del timbre el node de col·lsió.

Si sabem que la moneda ha caigut de cara no ens dona cap informació sobre com ha caigut la moneda 2, degut a la seva independència. Però suposem que el timbre ha sonat i la moneda 1 ha caigut de creu, llavors això ens diu que la moneda 2 ha caigut de cara. De manera similar, si assumim que el timbre ha sonat, la probabilitat que la moneda 1 sigui cara canvia si sabem que la moneda 2 ha estat cara. Aquest particular canvi en la probabilitat és una cosa més sutil que en el primer cas.

X	Y	Z	P(X,Y,Z)
Cara	Cara	1	0.25
Cara	Creu	1	0.25
Creu	Cara	1	0.25
Creu	Creu	0	0.25

Taula 1: Distribució de probabilitat per dues tirades dues monedes, amb X representant el resultat de la primera moneda, Y el de la segona i Z representant l'estat d'un timbre (sona si alguna de les tirades es cara sino no).

Per veure el càlcul anterior, considerem les probabilitats incials que es mostren en la taula (1)

$$P(X = Cara|Y = Cara) = P(X = Creu|Y = Creu) = \frac{1}{2} \qquad (2.5)$$

Ja que X i Y són independents. Ara condicionem amb $Z = 1$ i $Z = 0$ (quan el timbre sona i quan el timbre no sona). Els subconjunts de dades resultants es troben en la taula (2).

Via el càlcul de probabilitats de les taules tenim:

$$P(X = Cara|Z = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (2.6)$$

Si continuem filtrant en $Z = 1$ per examinar només els casos on $Y = Cara$, veiem que:

$$P(X = Cara|Y = Cara, Z = 1) = \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

Podem veure que amb $Z = 1$ la probabilitat de $X = Cara$ canvia de $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$

X	Y	Z	P(X,Y |Z=1)
Cara	Cara	1	0.333
Cara	Creu	1	0.333
Creu	Cara	1	0.333
Creu	Creu	0	0

X	Y	Z	P(X,Y|Z=0)
Cara	Cara	1	0
Cara	Creu	1	0
Creu	Cara	1	0
Creu	Creu	0	1

Taula 2: Distribucions de probabilitat condicional per a la distribució de la taula (1) (A sobre Distribució condicionada en Z=1, a sota Distribució condicionada en Z=0

desprès de saber que $Y = Cara$. Llavors es clar que X i Y són dependents condicionats en $Z = 1$. Una dependència més gran apareix quan el timbre no sona ($Z = 0$), ja que inmediatament sabem que el resultat de la tirada d'ambdues monedes és creu.

Com en les configuracions anteriors auquestes independències ens porten a poder establir una nova norma.

Regla3 (Independencia Condicional en col·lisions) Si una variable Z es un node de col·lisió entre dues variables X i Y, i aquesta variable Z es l'unic camí que hi ha entre X i Y, llavors X i Y son independents (sense estar condicionades) però dependents condicionades en Z (o algun descendent de Z).

Una vegada coneixem aquestes configuracions importants, amb les seves normes d'independència podem veure un exemple global.

La figura(6) il·lustra un graf que és un simple exemple d'una xarxa Bayesiana explicada en la secció 2.3 i que conté una bifurcació i una col·lisió. Descriu les relacions entre l'estació de l'any (X), si plou (Y), si un aspersor s'encen (Z), si el paviment esta moll (W) i si el paviment rellisca (T). Totes les variables del graf anterior son binaries (certes o falses) excepte l'arrel X que pot pendre

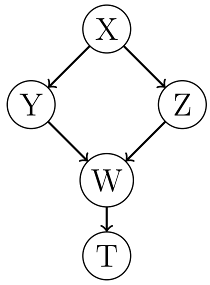


Figura 6: graf que representa la dependència entre cinc variables

el valor de primavera, estiu, tardor o hivern. L'absencia d'una fletxa directa entre X i T és perquè entenem que la influencia entre les variacions estacionals i si el paviment rellisca o no està mediat [5] per les altres condicions (per exemple si el terra esta moll). Amb el que sabem ens podem dir que coneixent el valor de W fa independent T de $\{X, Y, Z\}$. Així doncs podem descomposar utilitzant 2.4:

$$P(x, y, z, w, t) = P(x)P(y|x)P(z|x)P(w|y, z)P(t|w). \tag{2.8}$$

És important remarcar que aquestes configuracions és poden trobar dins de cada graf com un subgraf, és a dir per exemple en una col·lisió com la de figura 5 la variable Z podria tenir més descendents i seguiria sent una col·lisió.

[5] més endavant en la secció 3.8 entrarem en com entendre les mediacions d'efectes causals

3 Intervencions i Do-Calculus

El darrer objectiu en molts estudis d'estadística és predir l'efecte de les intervencions, per exemple quan es realitza un estudi sobre un nou medicament pel càncer, s'intenta identificar com canvia la malaltia o estat d'un pacient quan intervenim començant-lo a medicar.

Primer de tot començarem explicant un critèri gràfic molt útil i seguidament continuarem amb les intervencions.

3.1 D-Separació

Una forma convenient de caracteritzar el conjunt de distribucions compatibles amb el DAG G és enumerar el conjunt d'independències (condicionals) que cada una de les distribucions ha de satisfer. Aquestes independències es poden llegir del DAG G utilitzant un criteri gràfic, anomenat *d-separació* (on la d denota dirigida).

Considerem tres conjunts de variables disjunts, X, Y i Z, que són nodes en un DAG G. Per veure si X es independent de Y donat Z en qualsevol distribució compatible amb G, hem de probar si els nodes corresponents a las variables de Z "bloquejen"tots els camins dels nodes en X als nodes en Y. Per camins ens referim a la seqüència d'arestes consecutives (de qualsevol direcció) en el graf, i el bloqueig l'interpretem com una detenció del flux d'informació (o dependencia) entre las variables que estan connectades per aquests camins. De manera visual podem pensar que els camins són un conjunt de canonades i la dependencia l'aigua que transporta, tant sols que una canonada estigui desbloquejada l'aigua passa d'un lloc a un altre, igualment si un sol camí està desbloquejat, les variables a cada extrem seràn dependents. A més a més una canonada tant sols ha de ser bloquejada en un sol punt perque l'aigua no continüi passant, de forma similar tant sols cal un node (bloquejat) per aturar la dependencia en el camí.

Definició 3.1. ***(d-Separació):***

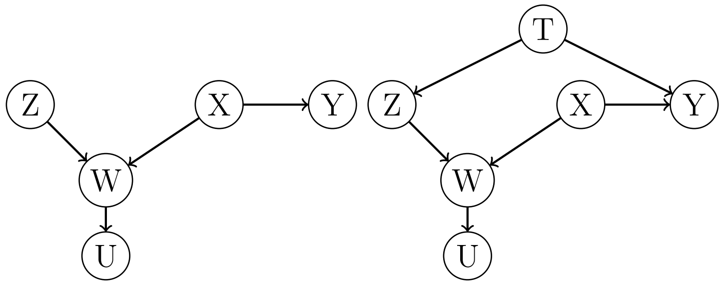
Un camí p es diu que està d-separat (o bloquejat) pel conjunt de nodes Z si i només si:

1. *p conté o bé una cadena $i \longrightarrow m \longrightarrow j$ o bé una bifurcació $i \longleftarrow m \longrightarrow j$ tal que el node del mig m està dins de Z, ó*

2. *p conté una col·lisió $i \longrightarrow m \longleftarrow j$ de manera que el node del mig m no està dins de Z i tal que cap descendent de m tampoc està a Z.*

Es diu que un conjunt fa X i Y d-separats si i només si Z bloqueja tots els camins entre un node de X a un node de Y.

Amb el coneixement de la d-separació, podem observar grafs més complexos i determinar quines variables en ells són independents o bé dependents. Prenem l'exemple de la Figura7(a). Aquest graf podria estar associat a qualsevol model



(a) (b)

Figura 7: (a) Un graf que conté una cadena, una bifurcació i una col·lisió.(b) el mateix graf d'abans però afegint una bifurcació entre Z i Y

causal, les variables poden ser discretes, continues ó una barreja de les dues; la relació entre elles podria ser lineal, exponencial ó qualsevol relació. Sense importar el model, la d-Separació sempre proporcionara el mateix conjunt d'indepèndencies de les dades que genera el model.

En particular observem la relació entre Z i Y. Utilitzant el conjunt buit com a condicionant, són d-separades, el que ens diu que Z i Y són independents (amb el conjunt buït com a condicionant). perquè? Perquè no hi ha un camí desbloquejat entre elles, només hi ha un camí entre Z i Y, i aquest camí està bloquejat per una col·lisió ($Z \longrightarrow W \longleftarrow X$).

Però suposem que condicionem en W. La d-separació ens diu que Z i Y són d-connectats, condicionats en W. La rao és que el nostre conjunt de condicionament es ara $\{W\}$, i com que només l'únic camí entre Z i Y conte una bifurcació (X) que no esta en aquest conjunt i l'única col·lisió (W) en el camí està en el conjunt el camí no està bloquejat.(Cal recordar que condicionar les col·lisions les desbloqueja). També serà cert si condicionem en U, perquè U es descendent d'una col·lisió en el camí entre Z i Y.

Per una altra banda si condicionem en $\{W, X\}, Z$ i Y segueixen independents. Ara el camí entre Z i Y és bloquejat pel primer criteri en comptes del segon: ara hi ha un node no col·lisionat (X) en el camí que és el conjunt de condicionament. Encara que W ha estat desbloquejat pel condicionament, un node bloquejat es suficient per bloquejar tot el camí. Ja que l'única ruta entre X i Y esta bloquejada per aquest conjunt de condiconament, Z i Y estan d-separades condicionades en $\{W, X\}$

Ara observem que passa si afegim un altre camí entre Z i Y com en la Figura7(b), Z i Y ara són incondicionalment dependent. Perquè? Perquè hi ha un camí entre elles ($Z \longleftarrow T \longrightarrow Y$) que no conte col·lisions. Sí condicionem en T, aquest camí estarà bloquejat, Z i Y seran independents altre cop. Condicionant en $\{T, W\}$ per altre banda, les fem d-connectades de nou (condicionant en T bloqueja el camí ($Z \longleftarrow T \longrightarrow Y$), però condicionar en W desbloqueja el camí ($Z \longrightarrow W \longleftarrow X \longrightarrow Y$). I sí afegim X al conjunt de condicionament convertint-lo en $\{T, W, X\}$, Z i Y seràn independents un cop més. En aquest graf, Z i Y són d-connectades (i per tant probablement dependents) condicionant en

$W, U, \{W, U\}, \{W, T\}$,$\{U, T\}, \{W, U, T\}, \{W, X\}, \{U, X\}$ i $\{W, U, X\}$. Llavors Z i Y són d-separades (i per tant independets) condicionant en T, $\{X, T\}, \{W, X, T\}$, $\{U, X, T\}$i$\{W, U, X, T\}$. És molt important veure que T està en cada conjunt de condicionament quan Z i Y són d-separades, això és perquè T és l'únic node en el camí que incondicionalment d-connecta Z i Y, per tant sí no condicionem en T, Z i Y sempre seran d-connectats.

3.2 Intervencions.

Tothom qui ha realitzat un curs d'estadística al principi ha sentit la frase *correlació no és causalitat*, una asociació entre dues variables no implica que una variable causa l'altre (un clar exemple és l'expresat anteriorment, un augment en el consum de gelats està correlacionat amb l'increment de crims en una determinada ciutat via les altes temperatures). Per aquesta raó els experiments aleatoris controlats es consideren el cavall de batalla de l'estadística. En un experiment d'aquest tipus tots els factors que influeixen en el resultat són estàtics o varien a l'atzar, excepte un, de manera que qualsevol canvi en el resultat ha de ser degut a la variable que estudiem.

Malauradament, en moltes qüestions no podem realitzar experiments aleatoris controlats, per exemple si volguessim realitzar un estudi sobre incendis forestals, no podem controlar el temps meteorològic, així que no podem aleatoritzar les variables que afecten els incendis forestals, fins i tot en el cas de l'exemple anterior, un assaig de medicaments aleatoris pot tenir problemes quan els participants abandonen, s'obliden de prendre el medicament o no informen de que l'estan prenent.

Quan els experiments aleatoris controlats no són pràctics o no es poden realitzar, tant sols es realitzen estudis d'observació, en els quals només es registren dades, no es controlen, el problema d'aquests estudis és que és dificil diferenciar entre causalitat o simplement correlació.

Es molt important entendre la diferencia entre intervenir una variable o condicionar sobre aquesta variable. Quan intervenim una variable en el model, fixem el seu valor, *canviem* el model, i els valors de les altres variables sovint canvien el resultat. Quan condicionem en una variable no canviem res, tant sols ens centrem en el subconjunt de casos on la variable pren el valor que ens interesa. El que canvia és la nostra percepció sobre el model, no el model en si mateix.

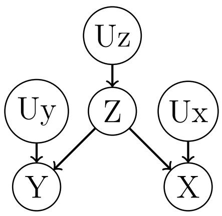


Figura 8: Graf que representa la relació entre la temperatura (Z), la venda de gelats (X) i la taxa de criminalitat (Y)

Utilitzarem els grafs per representar els models d'intervenció com fins ara i per representar la relació de pares-fills d'un DAG G generalitzarem el que ja ha estat mencionat en 2.2. Els conjunts (o també en podem dir famílies) en un DAG G representen una funció deterministica.

$$x_i = f_i(pa_i, u_i),\ i = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

on pa_i representen els pares de la variable X_i en G, u_i representa tots els factors no observats que afecten aquesta variable (poden incloure factors δ_i de pertorbació en la mesura de la variable) i x_i totes les variables.

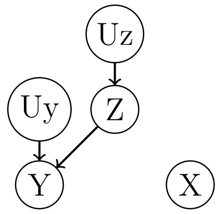


Figura 9: Graf que representa la intervenció en el model de la figura8 reduïnt la venda de gelats

Considerem la Figura(8) que mostra el cas plantejat anteriorment amb X la venta de gelats, Y la taxa de crims, i Z la temperatura. Quan intervenim fixant un valor de la variable, evitem que el valor d'aquesta variable varií en relació les altres variables, això equival a realitzar una cirurgia al graf, eliminant les arestes que van dirigides a aquesta variable. Si intervenim per reduïr la venda de gelats (per exemple tancant les gelateries), obtindrem el graf de la Figura(9). Quan examinem les correlacions en el nou graf, veiem que la taxa de crims, es totalment independent de (i també no correlacionada) la venda de gelats, ja que aquesta ja no esta relacionada amb la temperatura (Z), en altres paraules, si canviem el valor en el qual hem fixat X, no transmet una variació a Y. Així queda vist que intervenir en una variable ens entrega un patró de dependencies completament diferent que condicionar en una variable.

En notació cal distingir entre dos casos, el cas que la variable X pren valors x de manera natural i el cas en que fixem el valor de X= x que ho denotarem per $do(X = x)$. També $P(Y = y|X = x)$ és la probabilitat de que $Y = y$ condicionant en $X = x$, mentre que $P(Y = y|do(X = x))$ és la probabilitat de que $Y = y$ quan fem la intervenció $X = x$. En la terminologia de distribució, $P(Y = y|X = x)$ reflecteix la distribució de la població de Y que com a valor de la variable X té x. Per altre banda $P(Y = y|do(X = x))$ representa la distribució de la població Y *si tothom en la població* té el valor de X fixat en x. De manera similar escribim $P(Y = y|do(X = x), Z = z)$ per denotar la probabilitat de $Y = y$ condicionada en $Z = z$ en la distribució creada per la intervenció $do(X = x)$.

Utilitzant les $do-$expressions i la cirurgia de grafs amb les normes que s'explicitaran a continuació en 3.3 estem en condicions de començar a diferenciar les relacions de causalitat de les de correlació i de definir el que entendrem com a causalitat o bé efecte causal.

Definició 3.2. ***(Efecte causal)*** *Donats dos conjunts de variables X i Y l'efecte causal de X sobre Y que denotem $P(y|do(X=x))$, és una funció de X a l'espai de la distribució de probabilitat sobre Y. Per a cada element x de X $P(y|do(X=x))$ ens entrega la probabilitat de que $Y=y$ induïda per l'eliminació de totes equacions corresponents a la variable X del model 3.1 (totes les arestes entrants a X) i substituint $X=x$ en totes les altres equacions.*

Clarament, el graf corresponent al conjunt reduit d'equacions és un subgraf de G on totes les arestes entrants a X han estat eliminades.

3.3 Regles del do-Calculus.

Ara establirem un conjunt de regles d'inferència en què les sentencies probabilistiques on hi ha intervencions es poden transformar en altres sentencies només basades en observacions. El conjunt d'aquestes regles s'anomera *do-calculus.*

Partirem d'un graf en el qual hi ha nodes què són observables i altres que seguiran sense observar. L'objectiu és facilitar una expressió de l'efecte causal $P(Y=y|do(X=x))$ equivalent però que tant sols involucri probabilitats de variables observades i probabilitats condicionades

Teorema 3.3. ***(Regles del do-Calculus)***[6]

Sigui G un DAG associat a un model causal com s'ha definit a 3.1 i sigui $P(.)$ la distribució de probabilitat induida per aquest model. Per a qualsevols subconjunts de variables $X, Y, Z,$ i W es tenen les següents regles:

1. ***Regla1****(Insercció/eliminació d'observacions)*

   $P(y|do(X=x), z, w) = P(y|do(X=x), w)$, *si Y i Z són d-separats per X, W en un graf on les arestes entrants en X han estat eliminades.*

2. ***Regla2****(Intercanvi d'acció/observació)*

   $P(y|do(X=x), do(Z=z), w) = P(y|do(X=x), z, w)$ *si Y i Z són d-separats per X, W en un graf on les arestes entrants en X i les sortints de Z han estat eliminades.*

3. ***Regla3****(Insercció/eliminació d'accions)*

   $P(y|do(X=x), do(Z=z), w) = P(y|do(X=x), w)$ *si Y i Z són d-separats per X, W en un graf on les arestes entrants en X i les arestes entrants a $Z(W)$ han estat eliminades. Aquí $Z(W)$ és el subconjunt de nodes en Z que no són ancestres de cap node en W en el graf que s'obte de G despres d'eliminar totes les arestes entrants a X*

Totes aquestes regles d'inferència es dedueixen de la interpretació bàsica de l'operador *do* que substitueix el mecanimse que connecta X amb els seus ancestres pel

[6] La demostració del teorema es troba a [6]

nou mecanisme $X = x$. El resultat és un submodel caracteritzat pel subgraf $G_{\overline{X}}$ (graf on s'eliminen totes les arestes entrants a X) que s'anomena graf *manipulat* (aquesta nom apareix per primer cop en [7])

La regla 1 reafirma que la d-separació és un test valid per la independència condicional en la distribució resultant de la intervenció $do(X = x)$, d'aquí el graf $G_{\overline{X}}$. Aquesta normal resulta del fet que eliminar equacions del model no introdueix dependencia entre els termes restants u_i del model 3.1.

Ls regla 2 proporciona la condició que una intervenció externa $do(Z = z)$ tingui el mateix efecte sobre Y que condicionar(observar) el valor $Z = z$. La condició equival a que X, W facin Y i Z d-separats

La regla 3 proporciona una condició per introduir (o eliminar) una intervenció externa $do(Z = z)$ sense afectar en la probabilitat $Y = y$. La validesa d'aquesta regla prové de nou, de la simulació de la intervenció $do(Z = z)$ mitjançant l'eliminació de totes les equacions corresponents a les variables en Z (d'aqui el graf eliminant les arestes sortints tant de X com de Z). La raó per limitar la supressió als no ancestres dels nodes de W es proporciona en la demostració de les Regles1-3 en el document abans mencionat [6]

Corol·lari 3.4. *Un efecte causal $q = P(y_1, \ldots, y_k | do(X_1 = x_1), \ldots, do(X_k = x_k))$ és identificable en un model associat a un graf G si hi ha una seqüencia finita de transformacions, cadascuna complint les regles del teorema 3.3 que redueix q en una expressió de probabilitats que tant sols involucra observacions (és a dir, sense cap operador do).*

Teorema 3.5. ***(Do-Calculus)*** *Les següents afirmacions es compleixen* [7]

1. *Les regles són completes; és a dir, totes les distribucions d'intervenció identificables es poden calcular mitjançant una aplicació iterativa d'aquestes tres regles [8] [9]*
2. *Així doncs, hi ha un algoritme, proposat en [10] i demostrat [8] [9] que permet trobar totes les distribucions d'intervenció identificables*
3. *Hi ha un criteri gràfic necessari i suficient per a la identificació de les distribucions d'intervenció [8] [9](coro·lari 3)*

3.4 La fórmula d'ajust.

L'exemple explicat anteriorment de la venda de gelats representa un cas extrem on la correlació entre X i Y esta totalment separada de la prespectiva causal ja que no hi havia cap camí causal de X cap a Y.

Però com és d'esperar en la majoria de situacions de la vida real no esta tant clar. Continuarem observant una situació més real, que es mostra en la figura 10 on hi ha una fletxa desde X i desde Z cap a Y, un exemple de la situació que trobem

[7] el teorema ha estat extret de[2].

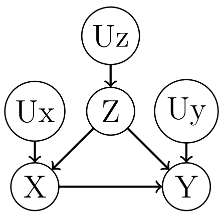


Figura 10: Graf que representa els efectes d'un nou medicament, on Z representa el gènere, X representa l'ús del medicament i Y la recuperació

en la paradoxa de Simpson[8], on X és l'us d'un medicament, Y representa la recuperació i Z el gènere. Si com a objectiu tenim esbrinar l'eficàcia del medicament en la població, imaginem la hipotètica intervenció de subministrar el medicament uniformement a tota la població i comparem la taxa de recuperació vist la intervenció complementaria, que és que cap element de la població prengui el medicament. Podem denotar la primera intervenció com $do(X = 1)$ i la segona com $do(X = 0)$ necessitarem estimar la següent diferencia:

$$P(Y = 1|do(X = 1)) - P(Y = 1|do(X = 0)) \tag{3.2}$$

La diferència anterior 3.2 es coneix com:*causal effect difference* (diferència d'efecte causal) o bé com *average causal efect* (efecte causal mitjà) generalment es coneix també per les sigles ACE.

És important remarcar com entenem 3.2, ja que la $-1 \leq ACE \leq 1$, en el nostre exemple si obtenim un valor positiu deduirem que és millor prendre el medicament per recuperar-se, en canvi si obtenim un valor negatiu veurem que aquest medicament no ajuda a la població, tot el contrari.

Generalment les variables poden prendre més valors no és sempre blanc o negre, si X i Y prenen més valors que els binaris voldrem predir l'efecte causal general $P(Y = y|do(X = x))$, on x i y són valors que poden prendre les variables X i Y. Per exemple, x pot ser la dosis de medicament i y la pressió arterial del pacient.

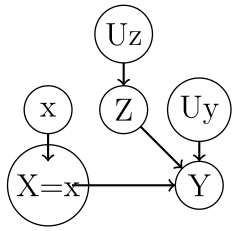


Figura 11: Graf modificat que representa una intervenció en el model representat de la figura 10 que estableix l'us del medicament en la població i provoca la probabilitat manipulada P_m

La lliço més important que hem d'assumir és que la causalitat no pot ser estimada directament de les dades, les dades en si mateixies no tenen la capacitat

[8]La paradoxa de Simpson és un cas famos podeu estudiar-la en [11]

per determinar-la, per exemple en el nostre cas ens es imposible saber si l'efecte d'un medicament és positiu o negatiu però utilitzant el graf associat si que podem calcular la magnitud de l'efecte causal de les dades. Per fer-ho simulem una intervenció en forma de cirurgia de grafs (figura11) tal com ho hem fet en l'exemple de la venda de gelats. L'efecte causal $P(Y = y|do(X = x))$ es igual a la probabilitat condicionada $P_m(Y = y|X = x)$ en el model manipulat de la figura11

La clau per calcular l'efecte causal és en l'observació de P_m, la probabilitat manipulada (probabilitat associada al model manipulat), es que comparteix dues propietats essencials amb P (la probabilitat original en el model preintervingut de figura10). La primera propietat que comparteixen és, la probabilitat marginal $P(Z = z)$ és invariant sota la intervenció, ja que el procés per determinar Z no canvia pel fet d'eliminar les arestes que van de Z a X. En el nostre exemple, això significa que la proporció d'homes i de dones es manté igual, abans i desprès de la intervenció. Ara bé la segona és, la probabilitat condicionada $P(Y = y|Z = z, X = x)$ també és invariant, ja que el proces pel qual Y respon a X i Z, $Y = f(x, z, u_y)$ es manté igual, independentment de si X canvia de forma espontània o mitjançant una intervenció deliberada. Per tant, podem escriure dues equacions d'invariància:

$$P_m(Y = y|Z = z, X = x) = P(Y = y|Z = z, X = x), P_m(Z = z) = P(Z = z)$$

Utilitzem també el fet que Z i X són d-separades en el model intervingut i, per tant, són independents sota la distribució de la intervenció. Això ens diu que $P_m(Z = z|X = x) = P_m(Z = z) = P(Z = z)$. Amb aquestes dues consideracions juntes tenim:

$$P(Y = y|do(X = x)) = P_m(Y = y|X = x)(\text{per definició}) \tag{3.3}$$

$$= \sum_z P_m(Y = y|X = x, Z = z)P_m(Z = z|X = x) \tag{3.4}$$

$$\sum_z P_m(Y = y|X = x, Z = z)P_m(Z = z) \tag{3.5}$$

L'equació 3.4 l'obtenim a partir de la llei de probabilitats totals convinant amb la definició de probabilitat condicionada sobre els valors de $Z = z$, mentre que per l'equació 3.5 utilitzem la independència de Z i X en el model intervingut.

Finalment, utilitzant les relacions invariants abans mencionades obtenim una formula per l'efecte causal en on tal sols apareixen probabilitats del model preinvervingut.

Definició 3.6. ***(Fórmula d'ajust)***

$$P(Y = y|do(X = x)) = \sum_z P(Y = y|X = x, Z = z)P(Z = z) \tag{3.6}$$

L'equació 3.6 l'anomenem fórmula d'ajust. Com podem veure, permet calcular l'associació entre X i Y per cada valor z de Z

L'expressió final (la banda dreta de 3.6) es pot estimar directament de les dades, només hi apareixen probabilitats condicionades, cadascuna fàcil de calcular.

Durant tota aquesta secció s'ha estat parlant de la formula d'ajust tant sols amb una intervenció en la variable X, però moltes vegades convindrà intervenir més d'una variable, per representar intervencions múltiples serà necessari recórrer a la fórmula de descomposició del producte que ens entrega el graf que representa la configuració de les dades, és a dir la fórmula 2.4 de la qual ja s'ha parlat anteriorment:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i|pa_i)$$

És important notar que el model intervingut fara que s'eliminin factors que apareixien en la fórmula de descomposició del producte del model pre-intervingut (ja que varies arestes han estat podades), per tant en l'expressió de la fórmula s'han d'eliminar alguns factors.

Així doncs per generalitzar la fórmula d'ajust per a intervencions múltiples, és a dir intervencions que fixen el valor d'un conjut de variables X. Simplement escribim la fórmula de descomposició del producte del model pre-intervingut i eliminem tots els factors que corresponen a variables del conjunt d'intervencions X, formalment:

Definició 3.7. ***(Fórmula truncada del producte)***

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n|do(X = x)) = \prod_i P(x_i|pa_i),\ \forall i \ amb\ X_i \notin X \tag{3.7}$$

Que anomerarem fórmula truncada de producte ó g-fórmula

3.5 Quan s'ha d'ajustar i quan no?

Ara ja coneixem la fórmula d'ajust, però hi ha vegades que cal vigilar quan ajustar o bé ajustar en segons quina situació no ens treu de gaires mals de cap.

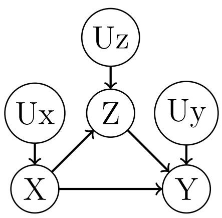


Figura 12: Graf que representa els efectes d'un nou medicament, on Z representa la pressió arterial (mesurada al final de l'estudi), X representa l'ús del medicament i Y la recuperació

Per exemple, observem ara la Figura12, amb les variables exògenes independents entre elles, és un graf amb el mateix esquelet que el de la Figura11, però amb la fletxa invertida entre X i Z, cosa que en l'ambit de l'exemple anterior indica que el tractament afecta a la pressió arterial. Intentem evaluar l'efecte causal $P(Y =$

$1|do(X = 1))$, és a dir la probabilitat que ens recuperem realitzant la intervenció de prendre el medicament. Primer realitzem la intervenció i llavors examinem la fórmula d'ajust que ens queda, en els grafs, com ja hem vist una intervenció equival a fixar un valor d'una variable (en aquest cas X) i eliminar totes les arestes entrants a aquesta variable. Com mostra en la Figura12 no hi ha cap aresta entrant a X, ja que X no té cap pare, el que significa que el nostre graf no requereix cap cirurgia.

Així el graf despres de la intervenció és igual que el graf preintervenció (cap aresta es eliminada) i la fórmula d'ajust es redueix al següent:

$$P(Y = y|do(X = x)) = P(Y = y|X = x)$$

Obviament si haguéssim ajustat per la pressió arterial, haguéssim obtingut una valoració incorrecte (una corresponent a un model que la pressió arterial fa que la gent busqui tractament) no correspondria al graf de la Figura12

Cal doncs saber en quins casos o quins conjunts de variables són aptes per aplicar la fórmula d'ajust. El procès amb el qual vam arribar a la fórmula d'ajustament ens deixava entre veure que Z havia de coincidir amb els pares de X, ja que és la influència d'aquests pares el que s'elimina quan fixem X mitjançant una intervenció, així denotant amb $PA(X)$ als pares de X podem escriure la següent fórmula d'ajustament general resumint-la en una regla:

Regla 1 de l'efecte causal Donat un graf G on el conjunt de variables PA representen els pares de X, l'efecte causal de X en Y ve donat per:

$$P(Y = y|do(X = x)) = \sum_z P(Y = y|X = x, PA = z)P(PA = z) \tag{3.8}$$

on z varia entre tots els valors que poden prendre les variables en PA.

Cal remarcar que és obvi que els conjunts Y i $\{X \cup PA(X)\}$ ja que no tindria sentit calcular l'efecte causal de X sobre Y sent Y pare de X.

Si multipliquem i dividim el sumand 3.8 per la probabilitat $P(X = x|PA = z)$, obtenim una forma més convenient:

$$P(Y = y|do(X = x)) = \sum_z \frac{P(X = x, Y = y, PA = z)}{P(X = x|PA = z} \tag{3.9}$$

Que possa a la llum el paper que juguen els pares a la vegada de predir els resultats de les intervencions, el factor $P(X = x|PA = z)$ es coneix com *propensity score* i els avantatges que comporta expressar $P(Y = y|do(X = x))$ de la forma 3.9 no es desenvoluparan durant el treball però es troben a [3](capítol4)

Aquí es veu la potencia de l'us de grafs, observant els pares podem predir els efectes causals d'una variable sobre un altre d'un conjunts de dades, identificant-ne els pares.

El resultat ja es sorprenent però no hem d'estar temptats de creure que la feina del graf ha acabat aquí, és a dir no podem creure que tot serà tant fàcil com identificar els pares i llavors la resta del graf ja el podem oblidar, ja que l'efecte causal el calcularem mecànicament amb la fórmula d'ajust. En la majoria dels casos pràctics, el conjunt de pares de X contindrà variables no observades que ens impediran calcular les probabilitats condicionades en la formula d'ajust, però afortunadament, com s'explicarà més endavant podrem solventar alguns d'aquests problemes .

3.6 Controlant la Confusió.

Quan ajustem per un conjunt de variables el que volem evitar és la confusió, el que entenem per confusió o confondre és el següent:

Definició 3.8. ***(Confounding*** *considerem un graf associat a un SCM amb un conjunt de nodes V amb un camí directe de X a Y, l'efecte causal de X sobre Y és anomenat confos si:*

$$P(Y = y|do(X = x)) \neq P(Y = y|X = x) \tag{3.10}$$

Anteriorment hem vist que per mesurar l'efecte d'una variable sobre una altre podem ajustar mitjançant els pares de la primera, però com ja hem comentat no sempre coneixerem tots els pares, molts cops hi haurà pares no mesurats o innacecibles, així que necessitarem obtenir formes d'ajust alternatives.

La qüestió sobre quin conjunt de variables serà el que usarem per ajustar dona pas a un dilema més profun, quan podem calcular l'efecte causal d'una variable sobre una altre a partir d'expressions sense intervencions, tant sols amb observacions? Quan decidim representar les relacions causals amb grafs això passa a ser un problema de teoria de grafs. Sota quines condicions, l'estructura d'un graf és suficient per calcular l'efecte causal del conjunt de dades que representa?.

Dedicarem la resta del document a intentar respondre a la pregunta anterior. Però una de les eines que més ens ajudaran a saber si podem calcular l'efecte causal és un simple test anomenat *Criteri de la porta del darrere.* Utilitzant-lo podrem determinar, per dues vairables qualsevol X i Y en un model causal representat per un DAG G, quin conjunt de variables en aquest model s'ha de condicionar per trobar la relació causal entre X i Y

3.6.1 El criteri de la porta del darrere.

Definició 3.9. ***(Criteri de la porta del darrere).***

Un conjunt de variables Z satisfà el criteri de la porta del darrere en relació a un parell ordenat de variables (X_i, X_j) en un DAG G sí:

1. *Cap node a Z es un descendent de X_i; i*
2. *Z bloqueja tots els camins entre X_i i X_j que contenen una fletxa cap a X_i*

De manera similar, sí X i Y són dos subconjunts disjunts de nodes en G, llavors Z es diu que satisfa el criteri de la porta del darrere en relació a (X,Y) sí Z satisfa el criteri per qualsevol parell (X_i,X_j) tal que $X_i \in$ X i $X_j \in$ Y

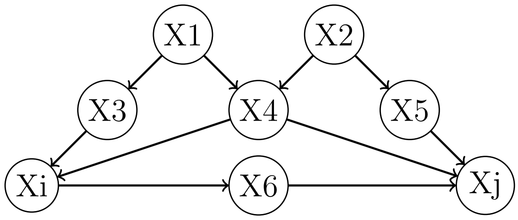


Figura 13: Un diagrama representant el criteri de la porta del darrere, ajustant per les variables $\{X3, X4\}$(ó $\{X4, X5\}$) obtenim una bona estimació de $P(X_j|do(X_i = x_i))$

Teorema 3.10. ***(Ajust de la porta del darrere).***

Sí un conjunt de variables Z satisfà el criteri de la porta del darrere en relació a (X,Y) llavors l'efecte causal de X sobre es pot identificar i ve donat per la següent expressió:

$$P(Y = y|do(X = x)) = \sum_z P(Y = y|X = x, Z = z)P(Z = z) \tag{3.11}$$

El criteri disposa d'una lògica bastant intuitiva, en genera el nostre objectiu es condicionar sobre un conjunt de nodes Z tal que:

1. Bloquejin tots els camins "falsos"[9] entre X i Y
2. Deixin tots els camins dirigits de X a Y tal com estan
3. No crein nous camins "falsos"

Al intentar estimar l'efecte causal de X en Y, volem que els nodes en que condicionem bloquejin qualsevol camí que tingui una fletxa entrant a X (camins no dirigits que solen ser "falsos"), ja que aquests camins poden fer X i Y depndents, evidentment aquests camins no transmeten efectes causals així sino els bloquejem, poden fer confondre l'efecte causal de X sobre Y (recordem que volem aquesta expressió amb tant sols observacions i al fer les variables dependents tindrem confusió), per això condicionem per bloquejar els camins "falsos" i complir la primera condició. Tanmateix, no volem condicionar en cap node que sigui descendent de X, els descendents de X serien afectats per intervencions de X i ells mateixos podrien afectar Y, condicionar-los bloquejaria aquest flux, aleshores no condicionem en els descendents de X per complir el segon requisit. Finalment, per cumplir el tercer requisit i no crear nous camins "falsos", no podrem condicionar cap col·lisió ja que com hem explicat fer-ho desbloquejaria un nou camí entre X i Y.

El nom "porta del darrere"és perque tant sols cal que es bloquegin els camins amb fletxes cap a X_i; aquests camins es poden veure com entrar a X_i per la porta del darrere. Observem la Figura13, els conjunts $Z_1 = \{X3, X4\}$ i $Z_2 = \{X4, X5\}$ compleixen el criteri de la porta del darrere, però el conjunt $Z_3 = \{X4\}$, no el compleix ja que $X4$ no bloqueja el camí $\{Xi, X3, X1, X4, X2, X5, Xj\}$

[9]entem per falsos els camins que passen dependencia entre variables pero no efecte causal, s'usara més vegades el terme "falsos"sempre tindra aquest significat

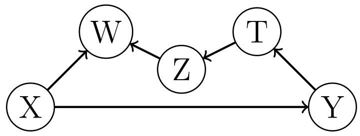


Figura 14: Un diagrama simplificat de la figura 13 per representar l'efecte de modificació

Amb l'ajuda del criteri de la porta del darrere es poden arribar a evaluar de manera senzilla i pas per pas grafs molt complicats. Considerem la Figura14, volem calcular l'efecte causal de X sobre Y. La primera pregunta sempre és la mateixa, quines variables hem de condicionar per obtenir l'efecte causal correcte? La pregunta queda reduida a trobar un conjunt de variables que satisfaci el criteri de la porta del darrere, però si no hi ha camins per la porta del darrere la resposta és molt simple, el conjunt buit satisfà el criteri, cap ajust es necessari, la resposta és:

$$P(Y = y|do(X = x)) = P(Y = y|X = x)$$

Suposem ara que passaria si haguessim ajustat per la variable W. Haguessim arribat a un resultat correcte de l'efecte causal de X sobre Y? W és una col·lisió, hem de recordar que quan condicionem en una col·lisió estem establint unes dependencies (com s'ha explicat a 2.4), obrim el camí $X \to W \leftarrow Z \leftarrow T \to Y$. Aquest camí com abans s'ha especificat és un camí "fals", creant aquestes dependencies portarà confusió i no ens permetra aconseguir un valor correcte de l'efecte causal de X en Y per cada valor de W. Ara imaginem que ens interesa controlar per aquest valor cosa que passa molt sovint, per exemple en el nostre estudi W és una variable que ens diu despres d'una operació quantes vegades és desperta el pacient durant la nit, i a nosaltres ens interesa saber l'efecte de X sobre Y tant sols pels pacients que dormen tota la nit seguida. Filtrant només pels paciens que dormen tota la nit, $W = w$ condicionem a observar tant sols aquest grup, i això és el que fa apareixer aquest camí "fals"ja que condicionem en una col·lisió, com calculem doncs l'efecte causal de X sobre Y per un valor w especific de W?

La resposta és que si tenim la opció de bloquejar aquest camí "fals" utilitzant altres variables ho fem. Per exemple si condicionem en T, bloquejarem el camí "fals"$X \to W \leftarrow Z \leftarrow T \to Y$, encara que W sigui part del conjunt de condicionament. Així podem calcular el l'efecte causal $w-$especific, que escribim com $P(Y = y|do(X = X), W = w)$, ajustant per T obtenim:

$$P(Y = y|do(X = x), W = w) =$$
$$= \sum_t P(Y = y|X = x, W = w, T = t)P(T = t|X = x, W = w) \qquad (3.12)$$

Calcular els efectes causals $W-$especifics és un pas essencial per en l'estudi de *effect modification or moderation*(modificació de l'efecte o moderació), és a dir el grau en que l'efecte causal de X en Y es veu alterat per un valor diferent de W, si és vol comparar dos valors diferents tant sols hem de fer els calculs i si ho volem restar-ho en 3.2 en el càlcul de l'ACE.

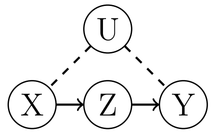


Figura 15: Un diagrama on la variable U no és observada per representar el criteri de la porta del davant.

3.6.2 El criteri de la porta del davant.

Per aquesta secció per tal de fer més curtes les expressions farem un abus de notació quan escribim $P(z)$ voldra dir com fins ara $P(Z = z)$, de manera similar si escribim $P(y|x, z)$ ens estarem referint a $P(Y = y|X = x, Z = z)$.

La primera condició de 3.9 reflecteix la pràcitca vigent l·les observacions concomitants no haurien de ser molt afectades pel tractament"([4], p48). Ara mostrarem com els concomitants afectats pel tractament es poden utilitzar per facilitar la inferència causal. El següent criteri que anunciarem seguidament, anomenat *criteri de la porta del davant* serà el segon test general per identificar efectes causals.

Considerem el diagrama de la Figura 15, que representa el model de la figura 13, quan les variables $X1, \ldots, X5$ no són observades i les variables $\{Xi, X6, Xj\}$ corresponen a les variables $\{X, Z, Y\}$ respectivament. Encara que Z no compleixi cap de les condicions del criteri de la porta del darrere, les mesures de Z permeten una estimació correcte de $P(Y = y|do(X = x))$. Això ho mostrarem reduint l'expressió $P(Y = y|do(X = x))$ a una expressió calculable a partir de la distribució observada $P(x, y, z)$

La distribució conjunta de la Figura 15 pot ser descomposada via l'equació 2.4 a la següent:

$$P(x, y, z, u) = P(u)P(x|u)P(z|x)P(y|z, u) \tag{3.13}$$

De l'equació 3.6, la intervenció $do(X = x)$ elimina el factor $P(x|u)$ i indueix la següent distribució post intervenció:

$$P(y, z, y|do(X = x)) = P(y|z, u)P(u) \tag{3.14}$$

Sumant sobre z i u tenim:

$$P(y|do(X = x)) = \sum_z P(z|x) \sum_u P(y|z, u)P(u) \tag{3.15}$$

Per eliminar u (ja que no es observat i no en podem saber el valor) utilitzem dues independencies condicionals que estan codificades en l'estructura de la Figura 15

$$P(u|z, x) = P(u|x) \tag{3.16}$$

$$P(y|x,z,u) = P(y|z,u) \tag{3.17}$$

Que genera les següents igualtats

$$\begin{aligned}\sum_u P(y|z,u)P(u) &= \sum_x \sum_u P(y|z,u)P(u|x)P(x)\\ &= \sum_x \sum_u P(y|x,z,u)P(u|x,z)P(x)\\ &= \sum_x P(y|x,z)P(x) \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Així hem obtingut la reducció de l'equació 3.15 sense involucrar cap variable no observada:

$$P(y|do(X=x)) = \sum_z P(z|x) \sum_{x'} P(y|x',z)P(x') \tag{3.19}$$

Tots els factors de la dreta de la igualtat 3.19 estan lliures d'intervencions, tant sols apareixen observacions, així $P(y|do(X=x))$ esta ben estimat, també distingim entre la x que apareix en l'equació 3.18 i la que apareix en 3.19 aquesta última és simplement un índex pel sumatori que també es pot anomenar x'. Per tant, tenim una estimació no paramètrica que ens permet identificar l'efecte causal de X sobre Y, sempre que poguem trobar una variable de mediació Z que compleixi les condicions 3.16 i 3.17.

L'equació 3.19 pot ser interpretada com una aplicació de la fórmula de la porta del darrere en dos pasos. En el primer pas, trobem l'efecte causal de X sobre Z, ja que no hi ha cap camí de la porta del darrere de X a Z podem simplificar

$$P(z|do(X=x)) = P(z|x)$$

Seguidament, calculem l'efecte causal de Z en Y, el qual ja no podem identificar amb la probabilitat condicionada $P(y|z)$ ja que ara hi ha un camí de a porta del darrere $Z \leftarrow X \leftarrow U \rightarrow Y$ de Z a Y. No obstant això ja que X bloqueja aquest camí, X pot jugar el rol de concomitant en el criteri de la porta del darrere, que ens permet calcular l'efecte causal de Z en Y tal com diu l'equació 3.10, donat $P(y|do(Z=z)) = \sum_{x'} P(y|x',z)P(x`)$. Finalment, convinem els dos efectes causals via:

$$P(y|do(X=x)) = \sum_z P(y|do(Z=z))P(z|do(X=x)$$

Que queda reduit a l'expressió 3.19, podem resumir el resultat en una definició i un teorema com següeix:

Definició 3.11. ***(Criteri de la porta del davant).***

Un conjunt de variables Z satisfà el criteri de la porta del davant en relació a un parell ordenat de variables (X, Y) sí:

1. Z intercepta tots els camins dirigits de X a Y.

2. No hi ha cap camí de la porta del darrere de X a Z.

3. Tots els camins de la porta del darrere de Z a Y estan bloquejats per X.

Teorema 3.12. ***(Ajust de la porta del davant).***

Sí un conjunt de variables Z satisfà el criteri de la porta del davant en relació a (X,Y) i P(x,z)¿0 llavors l'efecte causal de X sobre es pot identificar i ve donat per la següent expressió:

$$P(y|\hat{x}) = \sum_z P(z|x) \sum_{x'} P(y|x', z) P(x') \tag{3.20}$$

Seguidament mostrarem un exemple molt típic de l'aplicació d'aquest ajust.

Considerem l'antic debat sobre la relació entre el tabaquisme (X) i el càncer de pulmó (Y). Segons molts la industria del tabaquisme argumentava que la correlació entre fumar i el càncer de pulmó es podria explicar per algun tipus de genotip carcinogènic (U) que implica un desig imposible de contenir per la nicotina.

La quantitat de residu de tabac Z, és a dir el quitrà acumulat que es diposita en els pulmons d'una persona és una variable que promet satisfer les condicions de 3.11, ajustant-se així a l'estructura de la Figura15. Per satisfer la primera condició, s'ha de suposar que tabac no té efecte sobre la producció de càncer de pulmó, excepte quan es mesura a través dels dipósits de quitrà. Per satifer la segona i tercera condició, hem d'assumir el següent, si fins i tot un genotip esta augmentant el risc (la producció) de cancer de pulmó, aquest no té cap efecte sobre la quantitat de quitrà als pulmons excepte inderectament (a través del tabac). De la mateixa manera, hem d'assumir que cap altre factor que afecti el dipòsit de quitrà no influeix de cap manera en fumar. Finalment, la condició $P(x, y) > 0$ del teorema 3.12 requereix que els alts nivells de quitrà en els puloms no siguin tant sols resultat de fumar tabac, sinó també d'altres factors, per exemple, l'exposició a molta contaminació ambiental i que els diposits de quitrà poden no existir en alguns fumadors (per exemple els quals tinguin un mecanisme extremadament eficient per rebutjar aquests diposits, no generant-ne o eliminant-los). La satisfacció d'aquesta última condició es pot provar en les dades.

Per demostrar com podem avaluar el grau en què augmenta (o disminueix) el risc de càncer de pulmó el fet de fumar, assumirem un estudi hipotètic en el qual tres variables X, Y, Z es van mesurar simultàniament en una mostra gran, aleatòriament seleccionada de la població. Per simplificar l'exposició, continuarem assumint que les tres variables són binaries, que poden prendre valors certs (1) o falsos (0). En la taula 3 es presenta un conjunt de dades hipotètiques a partir d'un estudi sobre les relacions entre el càncer, fumar i els diposits de quitrà. Mostra que el 95% dels fumadors i el 5% dels no fumadors han desenvolupat alts nivells de quitrà als pulmons. A més, el 81% de les persones amb dipòsits de quitrà han desenvolupat càncer de pulmó, en comparació amb només un 14% d'aquells que no tenen dipòsits de quitrà. Finalment, dins de cadascun d'aquests dos grups (amb diposits de quitrà i sense), els fumadors mostren un percentatge molt major de càncer que els no fumadors.

	Grup	P(x,z) mida del Grup	P(Y=1 |x,z)
X=0,Z=0	No fumadors, sense diposits de tar	47.5	10
X=1,Z=0	Fumadors, sense diposits de tal	2.5	90
X=0,Z=1	No fumadors, amb disposits de tar	3.5	5
X=1,Z=1	Fumadors, amb diposits de tar	47.5	85

Taula 3: Taula que reflecteix la població de l'estudi hipotètic de l'exemple, la segona columna representa la mida del grup (% de la població) i la tercra el % de casos amb càncer dins del grup

Els resultats en la taula3 demostren que fumar és perjudicial (augmenta la probabilitat) de patir càncer de pulmó, és a dir fumar és una causa de patir càncer de pulmó. Tanmateix, les indústries tabaqueres van donar una interpretació diferent a aquestes dades per argumentar el que a ells els hi interesava; argumentaven que fumar disminueix el risc de patir càncer de pulmó de la següent manera, si una persona decideix fumar, les seves possibilitats de construir dipòsits de quitrà són del 95%, en comparació amb el 5% del que decideix no fumar. Per evaluar l'efecte dels diposits de quitrà, separaven els dos grups, un els no fumadors i un els fumadors. La taula 3 mostra que els diposits de quitrà tenen un efecte protector en ambdós grups: en els fumadors, els que posseeixen diposits de quitrà redueixen la taxa de càncer del 90% al 85% mentre que en els no fumadors disminueixen la taxa del 10% al 5%.Per tant, tant si tinc un desig incontrolable per la nicotina o no el tinc hauria de buscar l'efecte protector dels dipòsits de quitrà en els meus pulmons i fumar ofereix un mitjà molt eficaç per adquirir aquests dipòsits.

Per resoldre la disputa entre aquests dos arguments aplicarem la fórmula delel criteri de la porta del davant 3.12 a les dades de la taula 3. Volem calcular la probabilitat que una persona seleccionada aleatòriament desenvolupi càncer sota cadascuna de les dues intervencions següents: fumar (fixar $X = 1$) o no fumar (fixar $X = 0$).

Substituint els valors apropiats de $P(z|x), P(y|x,z)$ i $P(x)$ tenim:

$$
\begin{aligned}
P(Y=1|do(X=1)) &= 0.05(0.10*0.50+0.90*0.50) \\
&\quad +0.95(0.05*0.50`0.85*0.50) \\
&= 0.50*0.50+0.95*0.45 = 0.4525, \\
P(Y=1|do(X=0)) &= 0.95(0.10*0.50+0.90*0.50) \\
&\quad +0.50(0.05*0.50+0.85*0.50) \\
&= 0.95*0.50+0.05^0.45 = 0.4975.
\end{aligned}
$$

Per tant, de manera sorprenent i contraria a l'expectativa, les dades mostren que fumar és beneficiós per la salut.

Les dades de la taula 3 són, evidentment, poc realistes i elaborades deliberadament, pels que els interesa recolzar la teoria del genotip. El propòsit d'aquest exercici era demostrar que les suposicions qualitatives raonables sobre el funcionament de mecanismes, juntament amb dades no experimentals, poden produir evaluacions quantitatives precises d'efectes causals. En realitat, es preveia que els estudis observacionals involucrin variables mediadores per refutar la teoria del genotip mostrant, que les conseqüències medidores del tabac (com els dipòsits de quitrà) tendeixen a augmentar, i no a disminuit el risc de patir càncer tant en els fumadors com en els no fumadors.

Per tancar aquest punt és interesant parlar sobre la següent proposició de [2]

Proposició 3.13. ***Conjunts valids per ajustar*** *Considerem un model associat a un DAG G amb dos conjunts de variables X, Y amb $Y \notin PA_X$ (cal recordar que entenem PA_X com els pares de X), les tres afirmacions següents son certes.*

1. ***Ajust pels pares*** *El conjunt $Z = PA_X$ és un conjunt d'ajust valid per la parella (X, Y)*
2. ***Criteri de la porta del darrere*** *Qualsevol $Z \not\subset \{X, Y\}$ tal que Z compleixi les condicions de la definició 3.9 és un conjunt d'ajust valid*
3. ***Cap a la necessitat*** *Qualsevol $Z \not\subset \{X, Y\}$ tal que:*
   - *(a) Z no conte cap descendent dels nodes que són part dels camins dirigits de X a Y (excepte pels descendents de X que estan en un camí no dirigit de X a Y)*
   - *(b) Z bloqueja tots els camins no dirigits de X a Y*

Tant sols el tercer item requereix alguna explicació [13] [12], el tercer item de la proposició caracteritza tots els conjunts d'ajust valids[13]

3.7 Intervencions condicionals i efectes específics de la covariació

Les intervencions de les quals s'ha parlat fins ara s'han limitat a accions en les que forcem una variable o un grup de variables X a assolir el mateix valor fixat x. En general, les intervencions no són tant senzilles, moltes vegades una intervenció en una variable X pot dependre, respondre a un conjunt Z d'altres variables, per exemple a traves d'una relació funcional $x = g(z)$ o a través d'una relació estocàstica, on X pren el valor x amb una probabilitat $P * (x|z)$. Per exemple suposem que un doctor decideix administrar un medicament als pacients els quals la seva temperatura Z excedeixi un cert valor $Z = z$, en aquest cas l'acció estarà *condicionada* pel valor de Z i podrem escriure $do(X = g(Z))$, on $g(Z)$ és igual a 1 quan $Z > z$ i 0 en els altres casos (on $X = 0$ representa que no s'administra el medicament). Ja que Z és una variable aleatoria, el valor de X escollit per aquesta acció també serà similar a una variable aleatoria, a partir de les variacions de Z. El resultat d'implementar el que s'ha explicat anteriorment és una distribució de probabilitat $P(Y = y|do(X = g(Z)))$ que depen tant sols de la funció g i el conjunt de variables Z que deriven X.

Per tal d'estimar l'efecte del mencionat anteriorment, aprofundirem en un altre concepte, "l'efecte $z-$específic"sobre X, que vam mencionar breument quan parlavem de l'equació 3.12, aquest que denotem per $P(Y = y|do(X = x), Z = z)$ mesura la distribució de Y en un subconjunt de la població en el qual Z pren el valor z despres de la intervenció. Per exemple, potser estem interesats en com un tractament afecta a un grup d'edad concret, $Z = z$.

L'efecte $z-$específic el podem identificar mitjançant un procediment similar al de l'ajust per la porta del derrer. El raonament és el següent, quan volem estimar $P(Y = y|do(X = x))$, un ajust per un conjunt S és correcte si S bloqueja tots els camins de la porta del darrere de X a Y. Ara però si volem estimar $P(Y = y|do(X = x), Z = z)$ necessitem assegurar-nos que els camins per la porta del darrere segueixen bloquejats quan afeguim una nova variable Z, al conjunt de condicionament. Això ens entrega un senzill criteri pel qual podem identificar l'efecte $z-$específic.

Regla 2 L'efecte $z-$específic $P(Y = y|do(X = x), Z = z)$ el podem identificar sempre que poguem mesurar un conjut de variables S tal que $S \cap Z$ satisfaci el criteri de la porta del darrere. A més a més l'efecte $z-$específic ve donat per la següent fórmula d'ajust:

$$\begin{gathered} P(Y = y|do(X = x), Z = z) \\ = \sum_s P(Y = y|X = x, S = s, Z = z)P(S = s|Z = z) \end{gathered}$$

Aquesta modificació de la fórmula d'ajust és similar a l'equació 3.6 excepte en dos aspectes. El primer de tots, el conjunt d'ajustament és $S \cup Z$, no tant sols S i el segon, el sumatori és mou tant sols sobre S, no inclou Z. El simbol $\cup$ en l'expressió $S \cup Z$ senyala la unió, el qual significa que si Z és un subconjunt de S, tenim $S \cup Z = S$, i S tant sols necesita satisfer el criteri de la porta del darrere.

Cal veure que el criteri per identificar el l'efecte $z-$específic és més estricte que el criteri per identificar l'efecte causal no especific. Afegint Z el conjunt de condicionament possiblement creem dependencies que haurem de prevenir bloquejant tots els camins de la porta del darrere. Un exemple simple el tenim quan Z és una col·lisió, condicionar en Z crea noves dependencies entre els pares de Z, llavors hem de bloquejar aquest camí ja que sinó violariem les condicions del criteri de la porta del darrere.

Ara ja podem atacar la tasca original, estimar el valor de les intervencions condicionals. Suposem que un fabricant de medicaments contempla implementar que un conjunt de medicament es puguin administrar als pacients depenent de la seva edat Z. Escrivim $do(X = g(Z))$ per conèixer el resultat de la distribució Y es busca estimar el valor $P(Y = y|do(X = g(z)))$.

Seguidament mostrarem com identificar aquest efecte $P(Y = y|do(X = g(z)))$ és equivalent a identificar l'expressió per l'efecte $z-$específic $P(Y = y|do(X = x), Z = z)$.

Per calcular $P(Y = y|do(X = g(Z)))$ condicionem en $Z = z$ i escribim:

$$P(Y = y|do(X = g(Z)))$$
$$= \sum_z P(Y = y|do(X = g(z)), Z = z)P(Z = z|do(X = g(Z)))$$

$$\sum_z P(Y = y|do(X = g(Z)), Z = z)P(Z = z) \tag{3.21}$$

La igualtat $P(Z = z|do(X = g(z)) = P(Z = z)$ surt del fet que Z es produeix abans que X i pertant qualsevol control sobre X no pot tenir cap efecte sobre la distribució de Z podem escriure 3.21 com següeix:

$$\sum_z P(Y = y|do(X = x), z)|_{x=g(z)}P(Z = z) \tag{3.22}$$

Que ens diu que l'efecte causal d'un condicionament $do(X = g(Z))$ pot ser evaluat directament des de l'expressió $P(Y = y|do(X = x, Z = z)$ simplement substituint $g(z)$ per x i prenent l'expectativa sobre Z (utlitzant la distribució observada $P(Z = z)$

3.8 Mediació

Normalment quan una variable X és causa d'una altre variable Y, pot ser-ho directament, indirectament, a través d'un conjunt de variables mediadores o d'ambdues maneres (el més habitual és el cas en que ho és d'ambdues maneres), en la majoria d'aquests casos és molt útil poder distinguir quina quantitat d'aquesta causalitat és directa i quina indirecta, però a la pràctica habitualment la separació entre els dos tipos de causalitat és complicada.

Suposem, per exemple que volem saber si i amb quin grau una empresa discrimina per gènere (X) quan ha de contractar personal (Y). Aquesta discriminació seria un efecte directe en la contractació, que en els temps que viviem és il·legal en molts casos. Tanmateix el gènere també afecta en la contractació d'altres maneres, els dos sexes tenen diferentes probabilitats de treballar en diferents camps i per tant obtenir així experiència en aquests camps (Z). Així, el gènere també pot tenir un efecte indirecte en la contractació a traves d'una variable mediadora com l'experiència (Z).

Per tal de trobar l'efecte directe del gènere en la contractació, hem de mantenir d'alguna manera l'experiència constant i mesurar la relació restant entre el gènere i la contractació, amb l'experiència constant, qualsevol canvi en la contractació hauria de ser atribuit tant sols al gènere. Tradicionalment, això es feia condicionant la variable mediadora, així que si $P(Y = 1|X = 1, Z = z)$ que es refereix a la probabilitat de ser contractada sent dona amb experiència és diferent a $P(Y = 1|X = 0, Z = z)$ que es refereix a la probabilitat de ser contractat sent home i amb experiència (la mateixa experiència que en l'expressio anterior) és diferent llavors el raonament deia que el gènere es una causa directe en la contractació.

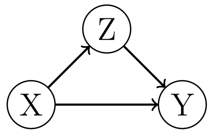


Figura 16: Graf que representa la relació causal en una empresa entre, el gènere (X), l'experiència (Z) i la contractació de personal(Y)

En l'exemple de la Figura16 això es correcte. Considerem però que passa si hi ha confusió entre la variable mediadora i la variable de resultats. Per exemple, considerem una nova variable ,els ingressos (I): les persones que provenen de families més benestats són propensos a anar a la universitat, aconseguir bones feines per agafar experiència i així ser contractats per davant dels altres, això respondrà a una estructura com la Figura 17

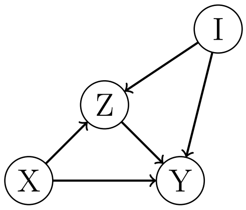


Figura 17: Graf que representa la relació causal en una empresa entre, el gènere (X), l'experiència (Z) i la contractació de personal(Y), amb l'estat socioeconomic (els ingressos (I)) com a mediador.

Ara, si condicionem en l'experiència, estem condicionant una col·lisió i llavors la dependencia indirecta pot passar del gènere a la contractació a través del camí Gènere→Experiència←Ingressos→Contractació. També sino condicionem en l'experiència la dependencia indirecta pot passar del gènere a la contractació a través del camí Gènere→Experiència→Contractació. (Per fer-nos una idea de manera intuitiva, hem de veure que condicionant en l'experiència, comparem els homes i les dones que tenen diferents fonts d'ingressos, ja que els ingressos han de canviar per mantenir l'experiència constant). No hi ha importancia de quin punt de vista li vulguem donar, no estem obtenint l'efecte directe verdader entre el gènere i la contractació. Així que tradicionalment els estadistes s'han vist obligats a abandonar una enorme conjunt de problemes de mediació, on el concepte "d'efecte causal directe"no es pot definir i molt menys estimar.

Per sort, ja coneixem una manera conceptual de mantenir una variable mediadora en un valor constant sense condicionar-la, la podem intervenir. Si, en comptes de condicionar-la, corregim l'experiència, la fletxa entre el sexe i l'experiència (i la dels ingressos i l'experiència) despareixerà, i no hi haura cap dependència "falsa". (Per descomptat, és impossible canviar literalment l'experiència de les persones, però recordem que estem en un procès teoric tant sols i podem procedir com ho feiem anteriorment). Per tant, per a tres variables X, Y i Z, on Z és un mediador entre X i Y *controlled direct efect (CDE)* o com direm nosaltres l'efecte directe controlat en Y al canviar el de valor X de x a x' es defineix com:

$$CDE = P(Y = y|do(X = x), do(Z = z)) - P(Y = y|do(X = x'), do(Z = z)) \tag{3.23}$$

L'advantatge d'aquesta definició respecte una altre que es bases en el condicionament en general es obvia, aquesta captura l'intent de mantenir Z constant fins i tot en els quan la relació $Z \to Y$ és confosa (el mateix passa per les relacions $X \to Z$ i $X \to Y$). Practicament aquesta definició assegura que en quasevol cas on les probabilitats en les variables intervingudes es poden identificar amb les probabilitats de les variables observades, podem estimar l'efecte causal directe de X sobre Y. Cal notar que l'efecte causal directe pot diferir per diferents valor de Z, per exemple la contractació de personal pot discriminar les dones en feines en que es requereix més experìencia, però també pot discriminar els homes amb feines en que es requereix menys experiència. Així per obtenir una imatge completa de l'efecte causal directe, hauriem de realitzar el càlcul per cada valor z rellevant en Z.

Com ho fem per estimar l'efecte causal directe quan l'expressió conté dos operadors *do*? El procediment és més o menys semblant al realitzat en la seccio 3.4 on tractem amb un únic operador *do* per ajust. En el nostre exemple de la Figura17 podem veure que no hi ha un camí de la porta del darrere de X en Y, per tant, podem substituir ($do(X = x)$) per un simple condicionament $X = x$ (això equival a ajustar per totes les variables que creein confusió). Això resulta en

$$P(Y = y|X = x, do(Z = z)) - P(Y = y|X = x', do(Z = z)) \tag{3.24}$$

Seguidament, intentem eliminar el terme $do(Z = z)$ i observem que existeixen dos camins de la porta del darrere de Z a Y, un a través de X i l'altre a través de I. El primer està bloquejat (ja que X està condicionada) i el segon pot ser bloquejat ajustant per I el que ens dona el següent:

$$\sum_i [P(Y = y|X = x, Z = z, I = I) - P(Y = y|X = x', Z = z, I = i)]P(I = i)$$

Aquesta darrera expressió està lliure d'operadors *do* aleshores es pot estimar facilment. En general el CDE de X sobre Y, mediat per Z és pot identificar si es mantenen les següents dues propietats:

1. Existeix un conjunt S_1 de variables que bloqueja tots els camins de la porta del darrere de Z a Y

2. Existeix un conjunt S_2 de variables que bloqueja tots els camins de la porta del darrere de X a Y despres d'eliminar totes les arestes entrants a Z

Si les dues propietats es compleixen en un model, llavors podem determinar $P(Y = y|do(X = x), do(Z = z))$ a partir de les dades ajustant en les variables apropiades i estimant les probabilitats condicionades que tenim. Cal veure que podriem caure en la trampa de pensar que si volguessim calcular l'efecte indirecte tant sols hauriem d'usar un truc molt fàcil, si l'efecte total és la suma de l'efecte directe i l'indirecte podem coneixer l'efecte total a partir de 3.2, l'efecte directe per l'explicat anteriorment i llavors al restar a l'efecte total l'efecte directe obtindriem l'efecte indirecte, això és cert en sistemes lineals, però en els sistemes no lineals les diferencies no ens diuen gaire.

Per poder estudiar l'efecte indirecte de manera que no depengui de l'efecte directe i l'efecte total necessitarem utilitzar contrafactuals, però aixó ja són figues d'un altre paner.

Però si ens centrem en els casos lineals [3] a la pàgina 130 ens entrega la manera de calcular l'efecte directe d'una variable X sobre una altre variable Y.

$$P(y|do(x), do(PA_{Y\setminus X})) \tag{3.25}$$

és a dir intervenint la variable X que volem veure quin efecte causa sobre Y i intervenint també els pares (diferents de X) de la variable Y, cal notar que aquest efecte directe varia depenent dels valors dels pares de Y, molts cops es significatiu calcular la mitjana sobre aquestes diferencies, és a dir en general la mitjana de l'efecte causal directe definida en un conjunt de probabilitats és:

$$\sum_{PA_{Y\setminus X}} P(y|do(x), do(PA_{Y\setminus X}))P(PA_{Y\setminus X}) \tag{3.26}$$

tot i que l'efecte directe és sensible als nivells als quals tenim els pares de la variable de resultat, de vegades és significatiu promoure l'efecte directe sobre aquests nivells. per exemple, si volem avaluar el grau de discriminació en una escola determinada sense fer referència a departaments específics, podem calcular la diferència i la mitjana en tots els departaments. aquesta mitjana mesura l'augment de la taxa d'ingrés en un experiment hipotètic en el qual instem a totes les dones candidates a retenir les seves preferències del departament, però canvien aquesta identificació de gènere des de famal a masculí.

4 Cas aplicat: Càlcul de l'efecte causal de la saturació d'oxigen en el mal d'alçada.

El 9 d'abril de 2017 l'alpinista Ferran Latorre iniciava una expedició que el va portar a coronar el seu darrer 8.000, l'Everest, intentant així unir-se al selecte grup d'alpinistes que han escalat els catorze 8000 sense oxigen, fins avui només 15 persones en tota la història de l'alpinisme han superat aquest repte.

L'alpinista va escollir la ruta clàssica del vessant napalès, per seguir les passes dels primers escaladors que van possar els peus al cim de l'Everest, amb el motiu d'aquesta expedició, es va dur a terme un estudi científic pioner a escala internacional sobre la manca d'oxigen, el **Sherpa-Everest 2017 Project**, impulsat per la Fundació Bancària 'La Caixa' i que va ser desenvolupat per un equip de l'Hospital de la Santa Creu i Sant Pau, de l'Institut de Recerca de Sant Pau i de l'Hospital Germans Trias i Pujol.

La investigació va analitzar l'impacte genètic, fisiològic i biomèdic de la manca d'oxigen (hipòxia) en *trekkers*, alpinistes europeus i xerpes durant l'aporximació i ascenció a l'Everest (8.848 m). Per elaborar aquest estudi, es van analitzar mostres biòlogiques de 15 alpinistes, liderats per Ferran Latorre, 15 *trekkers* i 15 xerpes (persones acostumades a viure sempre a aquestes altures). Les mostres es van prendre *in situ* durant les diferents etapes de l'ascensió per veure com el cos s'aclimatava a l'altura, i poder així identificar els mecanismes genètics d'adaptació a la hipòxia. Les etapes amb les quals es va separar la presa de mostres es la següent, la primera etapa és van prendre mostres dels *trekkers* i dels alpinistes a Barcelona(20 m) i a Katmandú(1400m) com a situació basal; la segona etapa que incia a Lukla (2860m) on és comença a realitzar el *trekking* d'aclimatació que acaba al camp base de l'Everest (5368m), en aquesta etapa s'evalua el procès d'aclimatació i l'impacte de la hipòxia moderada, i una tercera etapa on es van estudiar els alpinistes i els xerpes que van tornar del cim, ja a Barcelona i Katmandú per determinar la recuperació d'estar sotmesos a l'efecte de la hipòxia extrema un cop es torna a la situació basal.

Treballarem amb aquestes dades, cada mostra esta formada per un conjunt de paràmetres biomèdics (alçada de la persona, pes, index de massa corporal, pressió sistolica, pressió diàstolica, saturació d'oxgien, freqüencia cardiaca i uns factors que ens permetran identificar si te mal d'alçada o no) i també uns altres com l'alçada sobre el nivell del mar, el desnivell positiu acumulat i el desnivell negatiu acumulat.

La pregunta que intentarem respondre és més complexa del que sembla, intentarem esbrinar quines son les causes del mal d'alçada, obviament l'alçada n'és una però el que volem saber és si la saturació d'oxigen també és una causa o tant sols és un mediador de l'alçada.

Per fer-ho començarem amb el primer experiment treballant amb el model més basic, on suposarem que tant sols l'alçada (A) i la saturació d'oxigen (SO) causen el mal d'alçada (MA), com en la figura 18.

La saturació d'oxigen podria pensar-se com una variable continua però en aquest cas discreta perquè pren un nombre finit de valors, per simplificar càlculs la transfor-

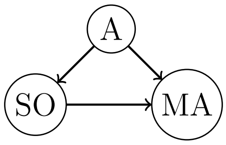


Figura 18: Graf que representa el model Alçada (A), Saturació d'Oxigen (SO) i Mal d'Alçada(MA)

marem en una variable binària, mèdicament es considera que una saturació d'oxigen normal es troba entre 95 i 100, per sota de 90 és anormal i per sota de 80 severa. Així, totes les dades que tinguin la satuació per sota de 90 els hi donarem un valor de saturació baixa (0) i totes les que siguin 90 o més els hi donarem un valor de saturació alta (1). Per altra banda, si tenim mal d'alçada ho indicarem amb $MA = 1$, si no en tenim $MA = 0$ i per acabar l'alçada prendra valors discrets els quals seran l'altitut en el moment de prendre les dades A={20, 1400, 2835, 2860, 3450, 3867, 3985, 4380, 4930, 5164}

Així comencem realitzant dos ajusts per comparar l'efecte causal de la saturació sobre el mal d'alçada, el primer per saturacions altes i el segon per saturacions baixes. És a dir,

$$P(MA = 1|do(SO = 1)) = \sum_z P(MA = 1|SO = 1, A = z)P(A = z) = 0.085604 \tag{4.1}$$

on el sumatori opera sobre tots els valors que pot prendre z és a dir per totes les alçades.

$$P(MA = 1|do(SO = 0)) = \sum_z P(MA = 1|SO = 0, A = z)P(A = z) = 0.123915 \tag{4.2}$$

també per tots els valors que pot prendre z, totes les alçades. Llavors comparem l'efecte de tenir saturació alta ($SO = 1$) amb l'efecte de tenir la saturació baixa ($SO = 0$) sobre el mal d'alçada, controlant per l'altura

$$ACE = P(MA = 1|do(SO = 1)) - P(MA = 1|do(SO = 0))$$

$$0 = .085604 - 0.123915 = -0.038311 \tag{4.3}$$

Que ens ve a dir el que esperavem, que és més possible tenir mal d'altura amb baixa saturació d'oxigen que amb alta quan controlem per l'altura. Això no aporta cap informació nova de la que ja sabiem, així el que ara volem fer és afergir un identificador característic de cada persona, aquest identificador recau en el fet que cada persona és diferent (està més o menys en forma, té més o menys anys etc) i això afecta (i es pot veure com una causa) del nivell de saturació d'oxigen i també del mal d'alçada. Per així poder veure l'efecte directe d'un canvi d'alçada sobre el mal d'alçada on la saturació d'oxigen actuarà de mediador.

Així doncs volem calcular l'efecte directe controlat (CDE) sobre Y en un canvi de X de x a x' tal com hem definit anteriorment tenim

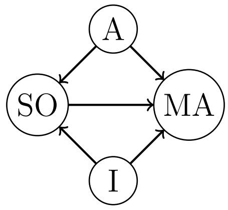


Figura 19: Graf que representa el model Alçada (A), Saturació d'Oxigen (SO), Mal d'Alçada(MA) i un identificador(I)

$$CDE = P(MA = 1|do(A = 1), do(SO = 1)) - P(MA = 1|do(A = 0), do(SO = 1))$$

que treballant per eliminar els dos operadors *do* queda:

$$\sum_i [P(MA = 1|A = a, SO = 1, I = i) - P(MA = 1|A = a', SO = 1, I = i)]P(I = i) \tag{4.4}$$

Realitzarem els càlculs per la saturació baixa ja que per saturacions altes les dades no són representatives (tant sols tenim un cas de mal d'alçada amb saturació alta).

-	3867	3985	4380	4930	5164
3867	0.138889	0.020833	0.069444	0.069444	-0.069444
3985	-0.020833	0.118056	0.048611	0.048611	-0.090278
4380	-0.069444	-0.048611	0.069444	0.000000	-0.138889
4930	-0.069444	-0.048611	0.000000	0.069444	-0.138889
5164	0.069444	0.090278	0.138889	0.138889	0.208333

Taula 4: Taula on s'aprecien les diferencies en els canvis d'alçada de l'equació 4.4 per saturació alta

Les files enmarcades en la taula 4 representen les diferentes alçades, hem eliminat les alçades més petites ja que no teniem casos de mal d'alçada i no ens entregaven informació, així doncs en cada posició de la diagonal tenim el valor de:

$$P(MA = 1|A = a, SO = 1, I = i)P(I = i)$$

on el valor $A = a$ és el valor de l'alçada de la fila en que es troba (al estar parlant de la diagonal la fila és la mateixa que la columna), llavors podem observar que és una matriu antisimètrica, ja que les caselles que no es troben en la diagonal representen les diferencies, de l'equació 4.4 per cada variació d'alçada. Les caselles sempre són el valor de la diagonal de la fila en que estan menys el valor de la diagonal de la columna on es troben, per exemple la casella de la fila 1, columna dos representa la diferencia entre 0.138889-0.118056 (el valor de la diagonal de la fila on es troba menys el valor de la diagonal de la columna on es troba).

Podem observar que per diferencies d'alçades importants també tenim diferencia en les probabilitats de tenir mal d'alçada, que per altre banda és una cosa que també s'esperava d'inici, que l'alçada és un causant del mal d'alçada ja era sabut, però bé podiem haver arribat a un resultat absurd.

Realitzem un segon experiment simplificant encara més el model per tal de poder arribar a alguna conclusió. Mèdicament és considera alçada gran dels 1500 als 3500 metres i molt gran alçada dels 3500 als 5500 per tant realitzarem la simplificació de transformar la variable alçada a binaria, prendra el valor de 0 quan no arribi a 3500 i prendra el valor 1 quan sobrepassi aquests 3500, també **suposarem que la relació entre les nostres variables és lineal**, i per acabar treballarem uns grups de control, que serà el mateix que a l'experiment 1, el model continua sent el mateix que en la figura 18. Comencem ara calculant la mateixa intervenció que en l'experiment 1, comparem l'efecte de tenir saturació alta ($SO = 1$) amb l'efecte de tenir la saturació baixa ($SO = 0$) sobre el mal d'alçada, controlant per l'altura

$$\begin{gathered}P(MA = 1|do(SO = 1)) = \\ P(MA = 1|SO = 1, A = 1)P(A = 1) + P(MA = 1|SO = 1, A = 0)P(A = 0) = \\ = 0.137931 * 0.50 + 0.028986 * 0.5 = 0.0834585\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}P(MA = 1|do(SO = 0)) = \\ P(MA = 1|SO = 0, A = 1)P(A = 1) + P(MA = 1|SO = 0, A = 0)P(A = 0) = \\ = 0.20932 * 0.5 + 0 = 0.10466\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}ACE = P(MA = 1|do(SO = 1)) - P(MA = 1|do(SO = 0)) \\ = 0.0834585 - 0.10466 = -0.0212205 \qquad (4.5)\end{aligned}$$

S'observa que amb la simplificació del mòdel el valor obtingut a 4.5 és una mica més petit que el que ha estat obtingut a 4.3.

Ara bé amb la suposició de que les nostres relacions són lineals podem intentar calcular l'efecte directe de l'alçada sobre el mal d'alçada, primer de tot calcularem el que hauria de ser l'efecte total de l'alçada sobre el mal d'alçada, calculant $P(MA = 1|do(A = 1))$ i també $P(MA = 1|do(A = 0))$ realitzant la diferencia obtindriem l'efecte total, observem doncs el primer càlcul:

$$P(MA = 1|do(A = 1)) = P(MA = 1|A = 1) = 0.180556 \qquad (4.6)$$

ja que recordem que realitzar una intervenció era equivalent a eliminar totes les arestes entrants a la variable que intervenim, així al no tenir cap aresta entrant el graf resultant és el mateix que el de preintervenció , per tant la fórmula d'ajust es redueix a condicionar pel conjunt buït i ens entrega l'igualtat 4.6, de la mateixa manera podem calcular l'altre efecte $P(MA = 1|do(A = 0))$.

$$P(MA = 1|do(A = 0)) = P(MA = 1|A = 0) = 0.027778 \tag{4.7}$$

Així ara calculant la diferencia tenim:

$$\begin{gathered} ACE_1 = P(MA = 1|do(A = 1)) - P(MA = 1|do(A = 0)) = \\ 0.180556 - 0.027778 = 0.152778 \end{gathered}$$

ara anem a utilitzar la suposició de que la relació entre les nostres variables és lineal per poder utilitzar l'equació 3.26 per tal de calcular l'efecte directe de l'alçada sobre el mal d'alçada:

$$\sum_{SO} P(MA = 1|do(A = 1), do(SO))P(SO) \tag{4.8}$$

ja que la saturació d'oxigen tant sols te dos valors aquest sumatori quedara reduït a:

$$\begin{gathered} P(MA = 1|do(A = 1), do(S0 = 1))P(SO = 1)+ \\ +P(MA = 1|do(A = 1), do(S0 = 0))P(SO = 0) \end{gathered}$$

llavors calcularem també $\sum_{SO} P(MA = 1|do(A = 0), do(S0))P(SO)$ i al fer la seva diferencia trobarem l'efecte causal directe de l'alçada sobre el mal d'alçada.

Centrem-nos en intentar deixar 4.8 lliure d'operadors *do* i per així poder obtenir aquest efecte.

$$\begin{gathered} \sum_{SO} P(MA = 1|do(A = 1), do(SO))P(SO) = \\ = \sum_{SO} P(MA = 1|A = 1, do(SO))P(SO) \end{gathered}$$

ja que com abans no al intervenir A no és remou cap aresta entrant perquè no en te i el graf postintervingut és el mateix que el preintervingut, ja hem eliminat un operador *do*, i tenim el valor fixat, en les equacions corresponents a la saturació d'oxigen i del mal d'alçada, l'alçada ha estat substituida per aquest valor. Ara bé, seguim amb el segon operador *do*, aplicant la formula d'ajust tindriem que:

$$\begin{gathered} \sum_{SO} P(MA = 1|A = 1, do(SO))P(SO) = \\ \sum_{SO} \sum_{A} P(MA = 1|A = 1, A = a, SO = so)P(A = a)P(SO = so) \end{gathered}$$

però no podem oblidar que A ja ha estat intervingut i només pren un valor així que podem eliminar el segon sumatori i també $P(A = a)$ ja que sempre serà 1, així doncs tenim:

$$\sum_{SO}\sum_{A} P(MA=1|A=1, A=a, SO=SO)P(A=a)P(SO=SO) =$$
$$\sum_{SO} P(MA=1|A=1, SO=so)P(SO=so)$$

ens hem lliurat dels dos operadors *do*, així ja podem calcular aquesta suma que és tant sols:

$$\sum_{SO} P(MA=1|A=1, SO=so)P(SO=so) =$$
$$P(MA=1|A=1, SO=1)P(SO=1) + P(MA=1|A=1, SO=0)P(SO=0)$$
$$= 0.093870 + 0.066860 = 0.160730 \tag{4.9}$$

per un raonament anàleg al anterior en el cas d'altura baixa arribariem a l'equació:

$$\sum_{SO} P(MA=1|A=0, SO=so)P(SO=so) =$$
$$P(MA=1|A=0, SO=1)P(SO=1) + P(MA=1|A=0, SO=0)P(SO=0)$$
$$= 0.019726 + 0.000000 = 0.019726 \tag{4.10}$$

Així calculant la diferencia tenim:

$$ACE_2 = \sum_{SO} P(MA|do(A=1), do(SO))P(SO) - \sum_{SO} P(MA|do(A=0), do(SO)P(SO) =$$
$$= 0.160730 - 0.019726 = 0.141004 \tag{4.11}$$

Finalment comparant l'efecte total i l'efecte directe de l'alçada sobre el mal d'alçada (són valors molt similars, 0.152778 vs 0.141004) podem arribar dues conclusions diferents.

La primera si el model escollit per representar el problema 18 és el correcte arribem a la conclusió que la saturació d'oxigen juga un paper poc important mediant també l'efecte indirecte de l'alçada 0.011774 amb totes les simplificacions que hem realitzat al model i a les dades.

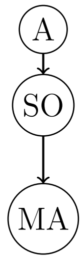


Figura 20: Graf que representa el model Alçada (A), Saturació d'Oxigen (SO) i Mal d'Alçada(MA)

La segona, que potser el nostre model és erroni i realment el model que representa el problema és el de la Figura 20 i que per tant, l'alçada causa el mal d'alçada tant sols via saturació d'oxigen, no hi ha cap més causa.

Sería necessari en un futur seguir amb aquest estudi per tal de corroborar quin dels dos models es el correcte per representar el problema, el paper de la saturació d'oxigen en el mal d'alçada es testimonial? o bé el pes de la saturació d'oxigen és total? hem obtingut aquests resultats per totes les grans simplificacions que hem fet, també seria interessant treballar amb menys simplificacions.

5 Conclusions

Del desenvolupament del treball podem concluir, en primer lloc, que les idees estudiades de causalitat per determinar efectes causals, els criteris per realitzar intervencions, la fórmula d'ajust o el *do*-calculus són coses molt intuitives, fins i tot podriem dir fàcils d'entendre, amb l'ajuda dels grafs per representar-ho tot. Però també s'ha vist que per poder aplicar totes aquestes idees de manera fàcil necessitem fer moltes simplificacions, és a dir quan volem afrontar problemes on les variables poden prendre valors discrets o bé continuus els càlculs és compliquen molt i possiblement en alguns casos hauriem d'utilitzar mecanismes que no s'han explicat en aquest treball. Sense anar més lluny per tal de poder aplicar els coneixements en l'experiment no s'han usat molts dels paràmetres que teniem en la base de dades i els que s'han usat s'han simplificat al màxim per tal de poder arribar a alguna conclusió.

Per altra banda s'ha pogut explicar amb claredat una introducció a la causalitat gràcies a tota la bibliografia que hi ha en anglès i la facilitat que té el camp en si mateix per motivar a qualsevol persona a seguir treballant en ell. Jo era una persona que no m'havia portat mai bé amb l'estadística, però dins d'aquest camp he pogut observar desde molt d'hora exemples i casos molt interesants on es pot aplicar aquest coneixement que m'han fet avançar sense que es transformes en una cosa molt rutinaria i pesada.

Finalment hem pogut arribar a dues conclusió pel problema plantejat, una en que hem observat que la saturació d'oxigen gairebé no juga cap paper en el mal d'alçada, cosa sorprenent, que s'hauria de corroborar i l'altre que el model de representació no és el correcte sinó que la representació és una cadena i l'efecte de la saturació és total . Hem quedo amb més ganes de seguir investigant sobre aquest problema, afegint al model algun paràmetre més o fent una simplificació menys forta.

6 Annex

Programa que s'ha utilitzat per realitzar els càlculs de les probabilitats pertinents.

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include<time.h>
#include<stdint.h>
#include<unistd.h>

struct sherpa {/*declaració de l'estructura on guardarem les dades*/
int Altura;
double SO;
int HD;
int GS;
int FN;
int DZ;
int DSL;
int id;
int MA;
};
double ajust(int , struct sherpa *, int *, double *, double *, int *, int);
double CDE_(int , struct sherpa *, int , int , double *, double *);
void CalcCDE(int , struct sherpa *, int *, int so, double *, double *, double **);


int main(int argc, char *argv[]){/*indicar que llegirem per consola*/
if(argc!=2) {
printf("Ha olvidado ingresr el fichero.\n");
exit(1);
}

int i, j, mal=0, n=144, total=0, bons=0;
double   sum=0, sum2=0, ACE, prob=0;
int *altura, *alcada, *iden;
double *probalt, *suma, **CDE, *probiden, *suma2;
FILE *fich;

CDE=(double **)malloc(10*sizeof(double*));
altura=(int *)malloc(10*sizeof(int));
iden=(int *)malloc(15*sizeof(int));
alcada=(int *)malloc(10*sizeof(int));
probalt=(double *)malloc(10*sizeof(double));
probiden=(double *)malloc(15*sizeof(double));
suma=(double *)malloc(10*sizeof(double));
```

```
suma2=(double *)malloc(15*sizeof(double));

for(i=0;i<10;i++)
CDE[i]=(double *)malloc(10*sizeof(double));

if (CDE==NULL){
printf("No tenemos suficiente espacio de memòria");
exit(1);
}

fich=fopen(argv[1],"r");

struct sherpa *dades;/*vector on guardarem totes les dades*/
dades=(struct sherpa *)malloc(n*sizeof(struct sherpa));


for(i=0;i<n;i++){
fscanf(fich, "%d", &dades[i].Altura);
fscanf(fich, "%lf", &dades[i].SO);
fscanf(fich, "%d", &dades[i].HD);
fscanf(fich, "%d", &dades[i].GS);
fscanf(fich, "%d", &dades[i].FN);
fscanf(fich, "%d", &dades[i].DZ);
fscanf(fich, "%d", &dades[i].DSL);
fscanf(fich, "%d", &dades[i].id);
dades[i].MA=0;
}

for(i=0;i<10;i++){
altura[i]=0;
suma[i]=0;
}
for(i=0;i<15;i++){
iden[i]=0;
suma2[i]=0;
}

for(i=0;i<10;i++)
for(j=0;j<10;j++)
CDE[i][j]=0;

i=1;
j=0;
while(j<n && i<11){/*per canviar els identificadors per cada sherpa igual a diferen
dades[j].id=i;
if((j+1)%10==0)
```

```
i++;
j++;
}

dades[100].id=11;
dades[101].id=11;
dades[102].id=11;
dades[103].id=11;
dades[104].id=11;
dades[105].id=11;
dades[106].id=11;
j=107;
i=12;
while(j<n ){
dades[j].id=i;
if((j+1-107)%10==0)
i++;
j++;
}
dades[136].id=15;

for(i=0;i<15;i++)/* per contar quants sherpes hi ha diferents en les dades*/
for(j=0;j<n;j++)
if(dades[j].id==(i+1))
iden[i]++;


for(i=0;i<15;i++)
probiden[i]=(double)iden[i]/n;

for(i=0;i<n;i++){/*per calcular si mal d'altura o no identifiquem amb un 1 que si q
mal=dades[i].HD+dades[i].GS+dades[i].FN+dades[i].DZ+dades[i].DSL;
if(mal>=3){
dades[i].MA=1;

}

mal=0;
}

for(i=0;i<n;i++){
if(89<dades[i].SO)
dades[i].SO=1;
else dades[i].SO=0;
}
```

```
/* com que necessitarem les probabilitats d'estar a cada alçada les contarem*/

for(i=0;i<n;i++)
if(dades[i].Altura==20)
altura[0]++;
else if(dades[i].Altura==1400)
altura[1]++;
else if(dades[i].Altura==2835)
altura[2]++;
else if(dades[i].Altura==2860)
altura[3]++;
else if(dades[i].Altura==3450)
altura[4]++;
else if(dades[i].Altura==3867)
altura[5]++;
else if(dades[i].Altura==3985)
altura[6]++;
else if(dades[i].Altura==4380)
altura[7]++;
else if(dades[i].Altura==4930)
altura[8]++;
else if(dades[i].Altura==5164)
altura[9]++;


alcada[0]=20;
alcada[1]=1400;
alcada[2]=2835;
alcada[3]=2860;/*aqui es on comencen a caminar*/
alcada[4]=3450;
alcada[5]=3867;
alcada[6]=3985;
alcada[7]=4380;
alcada[8]=4930;
alcada[9]=5164;


sum=ajust(n, dades, alcada, suma, probalt, altura, 1);
sum2=ajust(n, dades, alcada, suma, probalt, altura, 0);


printf("la probabilitat de tenir mal d'alçada amb saturació alta és: %lf\n", sum);


printf("la probabilitat de tenir mal d'alçada amb saturació baixa és: %lf\n", sum2)
```

```
ACE=sum-sum2;

printf("l'average causal effect ACE és: %lf \n", ACE);

CalcCDE(n, dades, alcada, 0, suma2, probiden, CDE);

printf("EXPERIMENT 2 ---------\n");
total=0;

for(i=0;i<n;i++)
if(3500<dades[i].Altura)
dades[i].Altura=1;
else dades[i].Altura=0;

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].Altura==1 && dades[i].SO==1){
total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}

if(total!=0)
sum=(double)bons/total;
else sum=0;


total=0;
bons=0;


printf("la probabilitat de tenir mal d'alçada amb saturacio alta i altura alta es %
sum=0;

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].Altura==0 && dades[i].SO==1){
total++;
if(dades[i].MA==1){
bons++;

}
}
}
if(total!=0)
sum=(double)bons/total;
else sum=0;
```

```
total=0;
bons=0;
printf("la probabilitat de tenir mal d'alçada amb saturacio alta i altura baixa es


for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].Altura==1 && dades[i].SO==0){
total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}
if(total!=0)
sum=(double)bons/total;
else sum=0;
total=0;
bons=0;
printf("la probabilitat de tenir mal d'alçada amb saturacio baixa i altura alta es

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].Altura==0 && dades[i].SO==0){
total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}
if(total!=0)
sum=(double)bons/total;
else sum=0;
total=0;
bons=0;
printf("la probabilitat de tenir mal d'alçada amb saturacio baixa i altura baixa es

total=0;
for(i=0;i<n;i++)
if(dades[i].SO==0)
total++;

printf("el nombre de dades amb saturació baixa és %d i amb alta %d\n", total, 144-t
sum=(double)total/144;
printf("la prob sat baixa es %lf\n", sum);
sum=(double)(144-total)/144;
printf("la prob sat alta es %lf\n", sum);
sum=0;
total=0;
bons=0;
```

```
total=0;
for(i=0;i<n;i++)
if(dades[i].Altura==0)
total++;

printf("el nombre de dades amb altura baixa és %d i amb alta %d\n", total, 144-tota
sum=(double)total/144;
printf("la prob alt baixa es %lf\n", sum);
sum=(double)(144-total)/144;
printf("la prob alt alta es %lf\n", sum);
sum=0;
total=0;
bons=0;

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].SO==1)
sum++;
if(dades[i].SO==1 && dades[i].Altura==1){
total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}
sum2=(double)sum/n;
sum=(double)bons/total;
sum*=sum2;
prob=sum;
total=0;
sum=0;
bons=0;
sum2=0;

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].SO==0)
sum++;
if(dades[i].SO==0 && dades[i].Altura==1){
total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}

sum2=(double)sum/n;
sum=(double)bons/total;
sum*=sum2;
```

```
printf("la probabilitat al realitzar la doble intervenció de tenir mal d'alçada fix
total=0;
sum=0;
bons=0;
sum2=0;
prob=0;

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].SO==1)
sum++;
if(dades[i].SO==1 && dades[i].Altura==0){
total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}
sum2=(double)sum/n;
sum=(double)bons/total;
sum*=sum2;
prob=sum;
total=0;
sum=0;
bons=0;

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].SO==0)
sum++;
if(dades[i].SO==0 && dades[i].Altura==0){
total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}

sum2=(double)sum/n;
sum=(double)bons/total;
sum*=sum2;


printf("la probabilitat al realitzar la doble intervenció de tenir mal d'alçada fix
total=0;
sum=0;
bons=0;
sum2=0;
```

```
prob=0;

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].Altura==1){
 total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}
sum2=(double)total/n;
sum=(double)bons/total;
/*sum*=sum2;*/
prob=sum;
sum=0;
sum2=0;
bons=0;
total=0;
printf("lefecte causal TOTAL de l'altura ALTA és %lf \n", prob);

for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].Altura==0){
 total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}
sum2=(double)total/n;
sum=(double)bons/total;
/*sum*=sum2;*/
prob=sum;
sum=0;
sum2=0;
bons=0;
total=0;

printf("lefecte causal TOTAL de l'altura BAIXA és %lf \n", prob);


printf("--------------------\n");


free(suma2);
free(suma);
free(iden);
free(altura);
free(alcada);
```

```
free(probiden);
free(probalt);


return 0;
}

double ajust(int n, struct sherpa *dades, int *alcada, double *suma, double *probal
int i, j, bons=0, total=0;
double sum=0;
for(j=0;j<10;j++){
for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].SO==so && dades[i].Altura==alcada[j]){
total++;
if(dades[i].MA==1)
bons++;
}
}
if(total!=0)
suma[j]=(double)bons/total;
total=0;
bons=0;
}




for(i=0;i<10;i++)/*probabilitats d'estar a cada alçada*/
probalt[i]=(double)altura[i]/n;

for(i=0;i<10;i++)
suma[i]*=probalt[i];


for(i=0;i<10;i++)
sum+=suma[i];/*inicialitzar vect suma*/

return sum;
}



double CDE_(int n, struct sherpa *dades, int a, int so, double *suma2, double *prob
int i, j, bons=0, total=0;
double sum=0;
for(j=0;j<15;j++){
```

```
for(i=0;i<n;i++){
if(dades[i].SO==so && dades[i].Altura==a && dades[i].id==(j+1)){
total++;

if(dades[i].MA==1)
bons++;
}

}
if(total!=0)
suma2[j]=(double)bons/total;
total=0;
bons=0;
}






for(i=0;i<15;i++){
suma2[i]*=probiden[i];

}



for(i=0;i<15;i++)
sum+=suma2[i];

for(i=0;i<15;i++)
suma2[i]=0;

return sum;
}

void CalcCDE(int n, struct sherpa *dades, int *alcada, int so, double *suma2, doubl
int i, j;
for(i=0;i<10;i++)
for(j=0;j<10;j++)
CDE[i][j]=0;

for(i=0;i<10;i++)
CDE[i][i]=CDE_(n, dades, alcada[i],so, suma2, probiden);

for(i=0;i<10;i++)
for(j=i+1;j<10;j++){
```

```
CDE[i][j]=CDE[i][i]-CDE[j][j];
CDE[j][i]=CDE[j][j]-CDE[i][i];
}
printf("la diagonal de la matriu amb saturació fixada i diferentes altures és:\n");
for(i=0;i<10;i++)
printf("%lf ", CDE[i][i]);

printf("\n");
for(i=0;i<10;i++)
printf("%d ", alcada[i]);
printf("\n");


if(so==0)
printf("la matriu de CDE per la saturació baixa\n");

if(so==1)
printf("la matriu de CDE per la saturació alta\n");
for(i=5;i<10;i++){
for(j=5;j<10;j++)
printf("%.6lf ", CDE[i][j]);

printf("\n");
}
}
```

Referències

[1] Pearl, J.; Glymour, M.; , Jewell N.: Causal Inference In Statistics: A Prime. John Wiley and Sons Ltd, UK, 2016

[2] Peters, J.; Janzing, D.; Schölkopf, B.: Elements of Causal Inference: Foundations and Learning Algorithms. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London England, 2017

[3] Pearl, J.: Causality: Models, Reasoning, and Inference. Cambridge University Press, NY, 2n edition, 2009

[4] Cox, D.: The Planning of Experiments. John Willey and Sons, NY, 1958

[5] Pearl, J.: *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems*. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA. 1988b

[6] Pearl, J: Causal diagrams for empirical research. *Biometrika* 82:669-710, 1995a

[7] Spirtes, P.; Glymour C.; Scheines R.:*Causation, Prediction, and Search*. Springer-Verlag, NY, 1993

[8] Huang, Y.; Valtorta, M.: Pearl's calculus of intervention is complete. *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Uncertaintly in Artificial Intelligence*, UAI, pages 217-224, 2006

[9] Shpitser, I.; Pearl, J.: Identification of joint interventional distributions in recursive semi-Markovian causal models. *Proceedings of the 21st AAAI Conference on Artificial Intelligence-Volume 2*, pages 1219-1226, 2006

[10] Tian, J: *Studies in Causal Reasoning and Learning*. PhD thesis, Department of Computer Science, University of California, Los Angeles, CA, 2002

[11] Simpson, E. H.: The interpretation of interaction in contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser.* B 13: 238-41, 1951

[12] Perkovic, E.;Textor, J.; Kalisch, M.; Maathuis, M.: A complete generalized adjustment criterion, *Proceedings of the 31st Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence* (UAI), pages 682-691, 2015

[13] Shpitser, T.; VanderWeele, J.; Robins, J., M.: On the validity of covariate adjustment for estimating causal effects. *Proceeding of the 26th Annual Conference on Unvertainty in Artificial Intelligence* (UAI), pages 527-536, 2010