

## Sobre corbes paramètriques i polígons de Newton\*

CARLOS D'ANDREA I MARTÍN SOMBRA

**Resum** Les corbes i superfícies algebraïques poden ser definides implícitament com a solucions d'equacions polinomials i, de vegades, també poden definir-se paramètricament, mitjançant funcions racionals. Plantegem el problema de la conversió d'una d'aquestes formes de representació a l'altra. A continuació, explorem la possibilitat d'obtenir, a partir de les equacions paramètriques i sense necessitat d'efectuar l'operació costosa de la implicitació, un objecte pròxim a les equacions implícites associades: el polítop de Newton d'una hipersuperfície donada paramètricament.

**Paraules clau:** corba paramètrica, implicitació, polítop de Newton, geometria tropical, teoria de la intersecció.

**Classificació MSC2000:** primària 14Q05; secundària 12Y05, 52B20, 14C17.

Proposem al lector el problema elemental següent: siguin

$$f(t) := \frac{(t+1)^2}{2t(t-1)}, \quad g(t) := \frac{4t(t-1)^3}{(t+1)^5} \quad (1)$$

dues funcions racionals. Trobeu el polinomi irreductible  $E(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  tal que  $E(f(t), g(t)) = 0$ . En altres paraules, es tracta de determinar l'equació implícita de la corba plana parametritzada per  $t \mapsto (f(t), g(t))$ .

Mentre vostè ho pensa una mica, aprofitarem per introduir algunes nocions necessàries (i una mica més) per a posar aquest problema en el seu context i discutir-ho.

### 1 Parametritzacions vs equacions en geometria algebraica

L'estudi dels sistemes d'equacions polinomials és un dels objectius centrals de la geometria algebraica. Per ser més concrets, prendrem com a cos base  $\mathbb{C}$ , el cos dels nombres complexos. En tot cas, la major part de les nostres consideracions

---

\* Aquest article va ser publicat originalment en castellà a la revista *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 11 (2008), 317-336.

continuen sent vàlides si es reemplaça  $\mathbb{C}$  per qualsevol altre cos algebraicament tancat.

Per definició, un *conjunt algebraic* de  $\mathbb{C}^n$  és el conjunt de zeros

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : f_1(\mathbf{x}) = \dots = f_s(\mathbf{x}) = 0\}$$

d'una família de polinomis multivariats  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Una *varietat algebraica afí* és un conjunt algebraic irreductible, en el sentit que no és una unió finita de subconjunts algebraics propis.

Des de la mateixa definició de varietat, la geometria algebraica privilegia la representació amb equacions dels objectes geomètrics. Per què no es representen amb parametritzacions?

Vegem com seria això: donada una família de funcions racionals  $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}(t_1, \dots, t_m)$ , considerem l'*aplicació racional*

$$\rho : \mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \mapsto (\rho_1(\mathbf{t}), \dots, \rho_n(\mathbf{t}))$$

que està ben definida fora dels punts on el denominador d'alguna de les  $\rho_i$  s'anulla. La imatge d'un tal morfisme és gairebé una varietat algebraica: precisament, existeix una (única) varietat  $V$  que conté la imatge  $\text{Im}(\rho)$ , de manera que aquesta imatge conté un obert dens de  $V$ . Aquesta varietat s'anomena la *clausura de Zariski* de la imatge de  $\rho$  i la denotarem  $\overline{\text{Im}(\rho)}$ .

Per exemple, considerem l'aplicació racional  $\mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2, t \mapsto (\frac{4t}{t^2+4}, \frac{2t^2}{t^2+4})$ . Aquesta parametrització és la inversa de la projecció estereogràfica de dimensió 1 (figura 1). Quan  $t$  recorre  $\mathbb{C}$ , l'aplicació recorre tots els punts de la circumferència definida per l'equació  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  amb l'excepció del pol nord  $N = (0, 1)$ . De fet, és conegut que una aplicació racional no constant  $\rho : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^n$  ( $n = 2, 3$ ) recorre tots els punts d'una corba algebraica, llevat, com a màxim, d'un punt [2, 14].

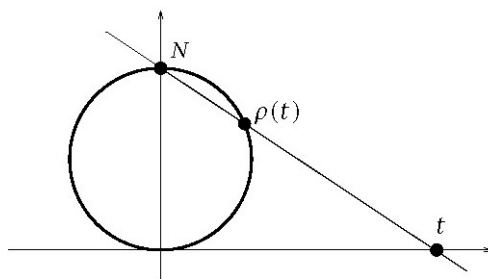


FIGURA 1: La projecció estereogràfica de dimensió 1.

Una de les preocupacions importants de la geometria algebraica computacional és el *problema de la implicitació*, consistent a calcular equacions d'una varietat  $V$  a partir d'una aplicació racional  $\rho : \mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}^n$  tal que  $V = \overline{\text{Im}(\rho)}$ . La

versió més usual del problema és per a hipersuperfícies, és a dir, per al cas en què la codimensió de  $V$  és 1. En aquest cas, l'ideal de definició de  $V$  està generat per un sol polinomi irreductible: es tracta llavors de calcular aquesta «equació implícita».

Recíprocament, és cert que tota varietat algebraica es pot parametritzar per polinomis o per funcions racionals, almenys en un obert dens? Lamentablement, la resposta és «no» fins i tot per al cas més simple: les corbes planes.

En un sentit estricte, una *parametrització* d'una varietat  $V$  de dimensió  $r$  és una aplicació racional  $\rho : \mathbb{C}^r \dashrightarrow V$  tal que  $\overline{\text{Im}(\rho)} = V$ . En diem «una» i no «la» parametrització perquè de fet n'hi ha moltes: per exemple, donada una parametrització d'una corba i una funció racional  $\varphi(t) \in \mathbb{C}(t)$  no constant, tenim que  $\rho \circ \varphi$  és una altra parametrització de la mateixa corba. Les varietats que admeten parametritzacions reben un nom especial: varietats *paramètriques* (o *uniracionals*). Si a més la parametrització és invertible sobre un obert dens, es diu que és *biracional* i que la varietat és *racional*. Les nocions de varietat paramètrica i de varietat racional coincideixen per als casos de corbes (teorema de Lüroth) i de superfícies (teorema de Castelnuovo), però per a tota dimensió  $\geq 3$  existeixen varietats paramètriques que no són racionals.

Hem vist que la circumferència és una corba paramètrica. Més generalment, tota cònica (corba plana definida per una equació irreductible de grau 2) és paramètrica. Per a graus superiors això ja no és cert. Per exemple, el *foli de Descartes* (figura 2) està definit per l'equació  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  i es pot parametritzar per

$$t \mapsto \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right). \quad (2)$$

Tanmateix la cúbica de Fermat  $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^3 + y^3 = 1\}$ , aparentment més senzilla, no admet cap parametrització.

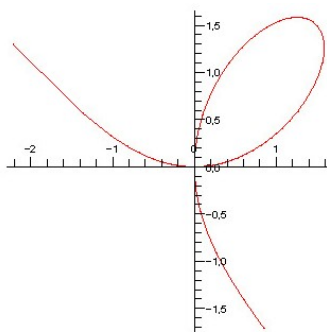


FIGURA 2: El foli de Descartes.

Aquesta situació contrasta molt amb el que passa en geometria lineal, diferencial i analítica, on les varietats corresponents es poden definir tant per

equacions com en forma paramètrica, almenys localment. Hi ha raons profundes perquè sigui així, i en part es deu a la rigidesa dels objectes de la geometria algebraica. Per exemple, es pot veure que la cúbica de Fermat és topològicament isomorfa a un tor menys tres punts. Una aplicació biracional no constant  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{F}$  necessàriament és un isomorfisme entre  $\mathbb{C}$  menys un conjunt finit i  $\mathcal{F}$  menys un conjunt finit. Si tal aplicació existís, induiria un homeomorfisme entre el pla menys un conjunt finit i el tor menys un conjunt finit, el qual és impossible. Així, la cúbica de Fermat no pot ser racional i, pel teorema de Lüroth, tampoc no pot ser paramètrica.

En qualsevol cas, la classe de les varietats paramètriques és molt rica i important, tant des del punt de vista teòric com pràctic. En disseny geomètric assistit per ordinador (CAGD per les sigles en anglès: *Computer Aided Geometric Design*), les corbes i superfícies paramètriques tenen un rol central, ja que proporcionen formes fàcils de dibuixar. En efecte, la parametrització permet produir molts punts en la varietat utilitzant només les operacions elementals ( $\pm$ ,  $\times$ ,  $\div$ ) del cos base. En canvi, és més difícil produir punts a partir de les seves equacions implícites.

Un petit experiment demostra el que hem dit: demaneu al programa de càlcul simbòlic Maple que dibuixi el foli de Descartes utilitzant només l'equació implícita  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

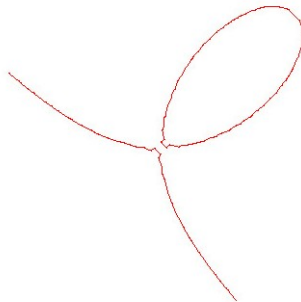


FIGURA 3: El foli de Descartes segons l'ordre implicitplot de Maple.

El resultat és pobre, especialment al voltant del punt singular  $(0, 0)$  (figura 3). Això es deu al fet que, per a obtenir punts al foli d'aquesta manera, cal resoldre cada vegada una equació cúbica i els punts produïts no són racionals, sinó que estan en una extensió de grau 3 de  $\mathbb{Q}$ .

D'altra banda, per a decidir si un punt donat és o no és a la corba és millor comptar amb l'equació implícita. Per exemple, és immediat concloure que el punt  $(-2, 1)$  no és al foli de Descartes avaluant l'equació:  $(-2)^3 + 1^3 - 3(-2) = -1 \neq 0$ . Si, en canvi, volguéssim esbrinar-ho a partir de la parametrització, hauríem de determinar si el sistema d'equacions

$$\frac{3t}{1+t^3} = -2, \quad \frac{3t^2}{1+t^3} = 1$$

té solució o no per a  $t \in \mathbb{C}$ , cosa que no solament és més difícil, sinó que fins i tot podria ocórrer que el punt sigui de la corba, però no de la imatge de la parametrització.

És per això que, segons el que es vulgui saber sobre una certa varietat paramètrica, pot ser convenient disposar de la representació paramètrica o de la implícita, i certament seria útil poder passar àgilment d'una representació a l'altra.

Des d'un punt de vista computacional, la implícitació s'obté eliminant els paràmetres d'un cert sistema d'equacions. Per exemple, per a calcular l'equació del foli a partir de la parametrització (2), cal «eliminar» la variable  $t$  del sistema d'equacions

$$(1 + t^3)x - 3t = 0, \quad (1 + t^3)y - 3t^2 = 0,$$

és a dir, trobar l'equació en  $\mathbb{C}[x, y]$  que verifica els punts  $(x, y, t)$  que satisfan aquest sistema d'equacions. Aquesta tasca d'eliminació pot fer-se tant amb bases de Gröbner com amb resultants [4].

El mateix procediment funciona en general. Per al cas de corbes planes, escriurem la parametrització com a

$$\rho(t) = \left( \frac{p(t)}{r(t)}, \frac{q(t)}{s(t)} \right)$$

per a polinomis  $p, q, r, s$  tals que  $\gcd(p, r) = 1$  i  $\gcd(q, s) = 1$ . Així, l'equació implícita s'obté eliminant  $t$  de les equacions

$$r(t)x - p(t) = 0, \quad s(t)y - q(t) = 0.$$

Si anomenem  $E(x, y)$  l'equació de la corba imatge, en termes de la resultant de Sylvester es té

$$E(x, y)^{\text{ind}(\rho)} = \text{Res}(r(t)x - p(t), s(t)y - q(t); t)$$

on  $\text{ind}(\rho) \geq 1$  és l'índex de traçat (o grau) de la parametrització en la terminologia de [14], és a dir, el nombre de vegades que  $\rho(t)$  recorre la corba quan  $t$  es mou per  $\mathbb{C}$ .

## 2 El polítop de Newton de l'equació implícita

El problema en el qual centrarem aquest article és determinar el polítop de Newton de l'equació implícita d'una hipersuperfície presentada en forma paramètrica. Treballarem amb *polinomis de Laurent*, és a dir, expressions del tipus  $x_2^{-1} + x_1^{-2}x_2$  on els exponents poden ser nombres enters qualssevol.

**1 DEFINICIÓ** El *polítop de Newton*  $N(F) \subset \mathbb{R}^n$  d'un polinomi de Laurent  $F \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  és l'envolupant convexa dels exponents en el desenvolupament monomial de  $F$ .

Per extensió, el *polítop de Newton*  $N(Z)$  d'una hipersuperfície  $Z \subset \mathbb{C}^n$  és el polítop de Newton de la seva equació de definició. Exceptuant un factor escalar, aquesta equació és única i, per tant,  $N(Z)$  està ben definit. Per al cas  $n = 2$  utilitzarem la denominació més usual de «polígon» de Newton, en lloc de «polítop». Per exemple, el polígon de Newton del foli  $x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0$  es l'envolupant convexa  $\text{Conv}((1, 1), (3, 0), (0, 3))$  (figura 4).

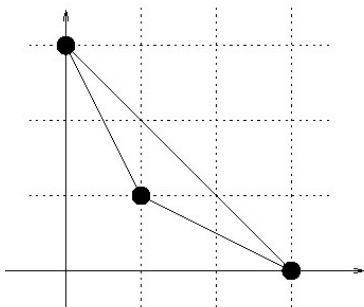


FIGURA 4: El polígon de Newton del foli de Descartes.

El polítop de Newton ens diu quins són els possibles exponents dels monomis en un polinomi de Laurent donat: si el polítop és petit llavors el polinomi és esclarissat (*sparse*), en el sentit que té pocs monomis. És un refinament de la noció de grau: si anomenem  $S := \text{Conv}(\mathbf{0}, e_1, \dots, e_n)$  el simplex estàndard de  $\mathbb{R}^n$ , llavors el grau d'un polinomi és el menor enter  $d$  tal que  $N(F) \subset dS$ . Notem també que el polítop de Newton d'un polinomi (i *a fortiori* el d'una hipersuperfície afí) està sempre contingut en el primer octant  $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ .

De manera general, el problema que ens interessa és el següent: siguin  $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}(t_1, \dots, t_{n-1})$  i considerem l'aplicació racional

$$\rho : \mathbb{C}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{C}^n \quad , \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (\rho_1(\mathbf{t}), \dots, \rho_n(\mathbf{t})).$$

Suposarem que  $\overline{\text{Im}(\rho)}$  és una hipersuperfície o, equivalentment, que la matriu jacobiana  $(\frac{\partial \rho_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}))_{i,j}$  és de rang  $n - 1$  per a  $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^{n-1}$  genèric. Volem determinar el polítop de Newton d'aquesta hipersuperfície.

El polítop de Newton no determina l'hipersuperfície, però reté molta informació rellevant. D'altra banda, calcular-lo resulta sorprenentment més senzill, en una gran quantitat de situacions, que obtenir les equacions implícites. A continuació descriurem alguns d'aquests fets.

El polítop de Newton de l'equació implícita ha despertat molt interès en els darrers anys a causa de la seva connexió amb la geometria tropical, la combinatòria, la teoria de la intersecció i l'àlgebra lineal numèrica. Una versió d'aquest problema va ser plantejada per primera vegada per B. Sturmfels i J.-T. Yu ([17]). En l'esperit de la teoria de l'eliminació esclarissada (*sparse elimination*

theory), la pregunta de Sturmfels i Yu pot resumir-se en: puc conèixer el polítop de l'equació implícita a partir dels polítops de la parametrització? De manera més formal:

2 PROBLEMA Siguin  $P_1, \dots, P_n \subset \mathbb{R}^{n-1}$  polítops enters amb interior no buit i considerem la família de  $n$  polinomis de Laurent en  $n - 1$  variables

$$\rho_i = \sum_{a \in P_i \cap \mathbb{Z}^{n-1}} \lambda_{i,a} t^a \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}]$$

per a  $1 \leq i \leq n$  i  $\lambda_{i,a} \in \mathbb{C}$  genèrics. Determineu el polítop de Newton de la imatge de la parametrització  $t \mapsto (\rho_1(t), \dots, \rho_n(t))$ .

Un polítop  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$  és *enter* si els seus vèrtexs són a  $\mathbb{Z}^{n-1}$ . La hipòtesi que els  $P_i$ 's tenen interior no buit garanteix que la imatge de la parametrització és una hipersuperfície. En aquest problema, l'elecció genèrica dels coeficients  $\lambda_{i,a}$  (és a dir, dins d'un obert dens de l'espai de tots els coeficients possibles) garanteix que el polítop de Newton de l'equació no depèn d'aquests coeficients, encara que l'equació mateixa sí que en depèn.

Com a exemple del problema que ens interessa, considerem la parametrització proposada per A. Dickenstein i R. Fröberg [8]:

$$\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad t \mapsto (t^{48} - t^{56} - t^{60} - t^{62} - t^{63}, t^{32}). \quad (3)$$

Els polítops de Newton dels polinomis que la defineixen són relativament petits: l'interval [48, 63] i el punt {32}. Els exponents són una mica grans però de tota manera l'equació implícita es pot calcular utilitzant la resultant de Sylvester corresponent; és interessant notar que l'algoritme de bases de Gröbner no acaba en temps raonable en aquest cas. Amb l'equació a la mà (o, millor dit, a l'ordinador!), vegem què passa amb el seu polígon de Newton (figura 5). És justament el triangle amb vèrtexs (32, 0), (0, 48), (0, 63)!

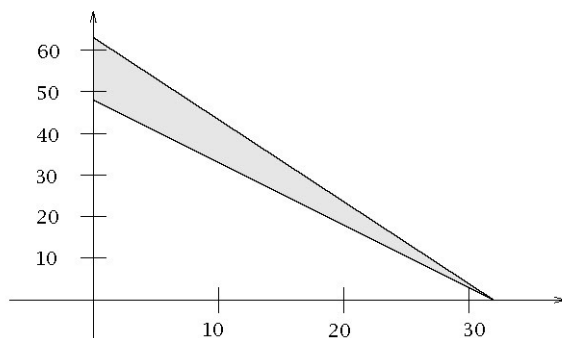


FIGURA 5: El polígon de Newton de l'equació implícita de (3).

Per què passa això? El problema va ser estudiat per I. Emiris i I. Kotsireas, els quals van aconseguir calcular aquest polígon per mitjà d'especialitzacions

de la resultant, i van mostrar així que és possible accedir al polítop de Newton sense haver de passar pel càlcul complet de l'equació implícita [8].

El problema va rebre un veritable impuls amb la irrupció de la geometria tropical. La varietat tropical associada a una hipersuperfície afí és un objecte polièdric, equivalent al polítop de Newton en el sentit que es pot recuperar l'un a partir de l'altre. Aquesta interpretació permet tractar el problema amb noves eines geomètriques i d'aquesta manera B. Sturmfels, J. Tevelev i J. Yu van aconseguir explicitar la varietat tropical associada a les parametritzacions genèriques del problema exposat més amunt [15, 16] i fins i tot han implementat en ordinador el càlcul d'aquesta varietat tropical i la construcció del polítop de Newton a partir d'aquesta [18, 19]. Aquesta implementació funciona satisfactòriament en dimensió baixa.

Des d'una altra direcció, A. Esterov i A. Khovanskiï han mostrat que el polítop de l'equació implícita d'una parametrització genèrica s'identifica amb el «polítop-fibra mixt» en el sentit de P. McMullen, la qual cosa dóna una caracterització diferent d'aquest objecte [9].

## 2.1 El polígon de Newton d'una corba paramètrica

Malgrat l'interès evident del cas genèric, és clar que per a poder determinar el polítop de l'equació implícita en tots els casos caldrà considerar invariants més fins que els polítops de Newton de la parametrització. A continuació ens centrarem en el cas de corbes paramètriques planes, resolt recentment en els articles [6, 5, 15, 21].

En el cas de corbes, el polígon de Newton està unívocament determinat per les multiplicitats de la parametrització. Sigui  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  una parametrització racional donada per funcions no constants  $f, g \in \mathbb{C}(t) \setminus \mathbb{C}$ . Donat un punt  $v \in \mathbb{P}^1$ , la *multiplicitat* de  $\rho$  en  $v$  es defineix com

$$\text{ord}_v(\rho(t)) := (\text{ord}_v(f(t)), \text{ord}_v(g(t))) \in \mathbb{Z}^2,$$

on  $\text{ord}_v(f)$  designa l'ordre d'anul·lació de la funció  $f$  en el punt  $v$ . Recordem que  $\mathbb{P}^1$  és la recta projectiva i que s'identifica amb  $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ . L'ordre d'anul·lació en  $v = \infty$  d'una funció racional  $\frac{p}{q} \in \mathbb{C}(t)$ , escrita com a quocient de dos polinomis, és  $\text{ord}_\infty(f) = \deg(q) - \deg(p)$ .

Les propietats bàsiques d'aquestes multiplicitats són:

- $\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$  per a tot  $v \in \mathbb{P}^1$ , llevat d'un nombre finit, i
- $\sum_{v \in \mathbb{P}^1} \text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$ .

Definim una operació auxiliar que produeix un polígon convex a partir d'una família de vectors del pla la suma dels quals és zero. Sigui  $B \subset \mathbb{Z}^2$  una família de vectors que són nuls llevat d'un nombre finit i tals que la seva suma és  $(0, 0)$ . Denotarem per  $\mathcal{P}(B) \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$  el (únic) polígon convex que s'obté en: 1) rotar  $-90$  graus els vectors no nuls de  $B$ , 2) concatenar-los seguint les seves direccions en el sentit contrari a les agulles del rellotge i 3) traslladar-los al quadrant  $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$  de manera que toquin els eixos coordenats (figura 6). La



condició que la suma dels vectors en  $B$  sigui zero és equivalent al fet que el polígon es «tanqui» en finalitzar el procés de concatenació.

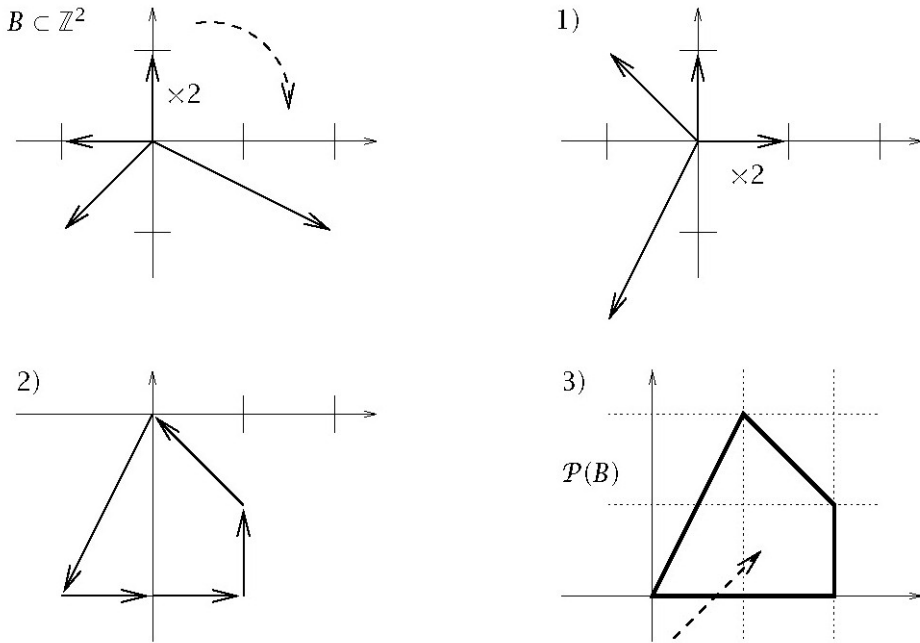


FIGURA 6: L'operació  $\mathcal{P}(B)$ .

Recordem que l'índex de traçat  $\text{ind}(\rho) \geq 1$  de la parametrització és el nombre de punts en la preimatge d'un punt genèric de  $\text{Im}(\rho)$ ; és a dir, el nombre de vegades que  $\rho(t)$  «traça» o recorre la corba. En particular, la parametrització és biracional si i només si  $\text{ind}(\rho) = 1$ .

La resposta al problema del càlcul del polígon de Newton d'una corba plana paramètrica pot trobar-se en els treballs de Dickenstein, E.-M. Feichtner, Sturmfels i Tevelev [6, 15, 21] i també al nostre article [5].

3 TEOREMA Sigui  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  una parametrització racional i  $C := \overline{\text{Im}(\rho)}$ . Llavors

$$\text{ind}(\rho) N(C) = \mathcal{P}((\text{ord}_v(\rho))_{v \in \mathbb{P}^1}). \quad (4)$$

La multiplicació  $\text{ind}(\rho) N(C)$  en aquest enunciat és l'homotècia de raó  $\text{ind}(\rho)$  del polígon de Newton de  $C$ .

EXEMPLE Considerem la parametrització

$$\rho : t \mapsto \left( \frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2 - 5t + 2}{t} \right).$$

Les multiplicitats d'aquesta parametrització són

$$\text{ord}_0(\rho) = (-1, -1), \quad \text{ord}_1(\rho) = (-1, 0), \quad \text{ord}_\infty(\rho) = (2, -1),$$

i  $\text{ord}_{v_i}(\rho) = (0, 1)$  per a cada un dels dos zeros simples  $v_1, v_2$  de  $t^2 - 5t + 2$ , mentre que  $\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$  per a  $v \neq 0, 1, \infty, v_1, v_2$ . La figura 6 il·lustra aquesta família  $B$  de vectors i el polígon  $\mathcal{P}(B)$  que es construeix a partir d'aquesta.

Gràcies al teorema 3, sabem que aquest polígon és l'homotècia de raó  $\text{ind}(\rho)$  del polígon  $N(C)$ . Més encara, veiem que aquest polígon és no-contràctil, en el sentit que no és un múltiple per un enter  $\geq 2$  d'un altre polígon enter. Concloem així que  $\text{ind}(\rho) = 1$  i que  $\mathcal{P}(B)$  és el polígon de Newton de la corba  $C$ .

Podem verificar aquest resultat comparant amb l'equació implícita corresponent:

$$E(x, y) = 1 - 16x - 4x^2 - 9xy - 2x^2y - xy^2. \quad (5)$$

## 2.2 Relació amb la geometria tropical i amb la teoria d'intersecció

Ja hem vist i provat el plat principal; ara toca aprendre una mica de la cuina. Hi ha dos mètodes per a demostrar aquest resultat: geometria tropical i teoria d'intersecció.

En geometria tropical, la base és el semianell  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ , en el qual les operacions són

$$x \oplus y = \min(x, y), \quad x \odot y = x + y.$$

Per a simplificar l'exposició, parlarem només del cas de polinomis en  $\mathbb{C}[x, y]$ , encara que la teoria s'estén a polinomis multivariats amb coeficients en un cos proveït d'una valoració.

La *tropicalització* d'un polinomi  $F = \sum_{j=0}^N \lambda_j x^{a_j} y^{b_j} \in \mathbb{C}[x, y]$   $\lambda_j \neq 0$  és la funció còncaua i lineal a trossos

$$t_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \bigoplus_{j=0}^N x^{\odot a_j} y^{\odot b_j} = \min_j \langle (a_j, b_j), (x, y) \rangle, \quad (6)$$

on  $\bigoplus$  és la sumatòria tropical i  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producte escalar usual de  $\mathbb{R}^2$ .

La *varietat tropical*  $\mathcal{T}_F \subset \mathbb{R}^2$  es defineix com el conjunt de punts de  $\mathbb{R}^2$  en els quals aquesta funció no és diferenciable. Es dedueix de (6) que  $\mathcal{T}_F$  consisteix exactament en la reunió de les direccions normals interiors als costats del polígon  $N(F)$ . A cada una d'aquestes direccions se li assigna una *multiplicitat*  $m_\delta \geq 1$  que, en el cas d'un polinomi de  $\mathbb{C}[x, y]$ , coincideix amb la longitud entera de l'aresta de  $N(F)$  normal a aquesta direcció. La *longitud entera*  $\ell(S)$  d'un segment enter  $S \subset \mathbb{Z}^2$  és la quantitat de punts de  $\mathbb{Z}^2$  que hi ha en el segment (incloent-hi els extrems) menys 1.

La figura 7 mostra la varietat tropical associada a la corba definida per l'equació (5). Com veiem, la varietat tropical amb les multiplicitats corresponents s'identifica amb els vectors a la figura 6, per la qual cosa el teorema 3 pot reformular-se fàcilment en termes de geometria tropical.

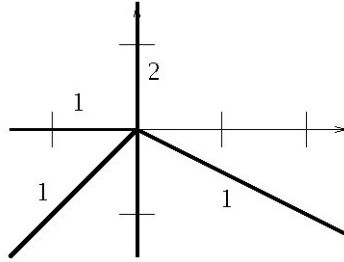


FIGURA 7: La corba tropical associada a (5).

Aquesta reinterpretació permet veure el polígon de Newton com una certa degeneració de la corba paramètrica original i estudiar-lo amb les eines de la geometria tropical. La demostració del teorema 3 en [6, 15, 21] es basa principalment en l’anomenat «teorema de Kapranov» [7]. Més encara, aquest mètode els ha permès tractar hipersuperfícies de dimensió arbitrària parametritzades per productes de formes lineals [6, 15], generalitzant així el cas de corbes planes.

D’altra banda, al nostre article [5] proposem un mètode que redueix la determinació del polítop de Newton a un problema de teoria de la intersecció i, més concretament, al càlcul del nombre de solucions de certs sistemes d’equacions polinomials.

La *funció suport* d’un polítop  $Q \subset \mathbb{R}^n$  es defineix com

$$h_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{\langle u, x \rangle : u \in Q\}$$

és una funció convexa i afi a trossos que caracteritza  $Q$ . Siguin  $\rho = (f, g) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  una parametrització racional i  $C = \overline{\text{Im}(\rho)}$ , llavors per a  $\sigma \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$  es té

$$h_{N(C)}(\sigma) = \frac{1}{\text{ind}(\rho)} \#\{(t, x, y) \in \mathbb{C}^3 : x^{\sigma_1} = f(t), y^{\sigma_2} = g(t), \ell_0 + \ell_1 x + \ell_2 y = 0\} \tag{7}$$

per a  $\ell_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{C}$  genèrics. La demostració del teorema 3 es redueix així al càlcul d’aquest nombre de solucions, que, alhora, s’obté via el refinament del teorema de Bernštein-Kušnirenko-Khovanskiĭ recentment obtingut per P. Philippon i el segon autor [13].

La igualtat (7) s’estén a qualsevol dimensió. Tanmateix, això no ha servit encara per a calcular el polítop de Newton d’altres hipersuperfícies a causa de l’absència d’un anàleg dels resultats de [13] en dimensió superior.

### 3 Alguns càlculs i aplicacions

Potser vostè ja ha arribat (o no) a la solució del problema que li hem proposat al principi d’aquest article. En qualsevol cas, és instructiu veure com es resol

a la llum del teorema 3. Per a la parametrització  $\rho = (f, g)$  associada a les funcions en (1) es té

$$\text{ord}_{-1}(\rho) = (2, -5) \quad \text{ord}_0(\rho) = (-1, 1) \quad \text{ord}_1(\rho) = (-1, 3), \quad \text{ord}_\infty(\rho) = (0, 1),$$

i  $\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$  per a  $v \neq 0, \pm 1, \infty$ . Gràcies al teorema 3 sabem que  $\text{ind}(\rho) N(C)$  s'obté girant  $-90^\circ$  aquests vectors i concatenant-los; el polígon produït és el quadrilàter  $\text{Conv}((0, 0), (1, 0), (4, 1), (5, 2))$ . Una vegada més observem que el polígon és no-contràctil, llavors  $\text{ind}(\rho) = 1$  i, per tant, aquest quadrilàter és el polígon de Newton de l'equació implícita  $E(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  (figura 8).

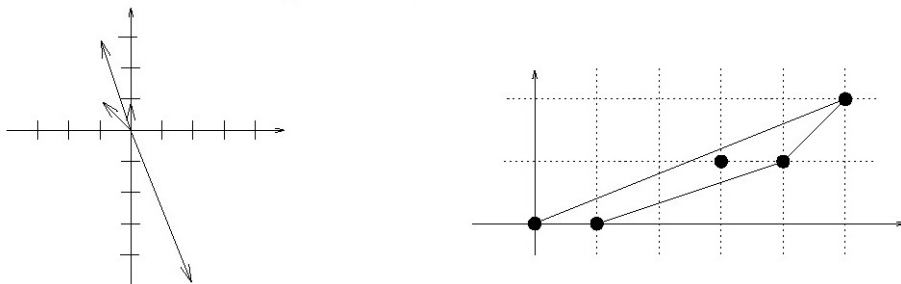


FIGURA 8: Les multiplicitats i el polígon de Newton de la parametrització (1).

Aquesta equació és una combinació lineal dels monomis  $1, x, x^4y, x^5y^2$  i  $x^3y$  corresponents als punts enters dins del quadrilàter, i d'aquí es dedueix fàcilment

$$E(x, y) = 1 - 2x + 2x^4y - x^5y^2 + 5x^3y.$$

A manera d'exercici, convidem el lector a aplicar el teorema 3 per calcular el polígon de Newton de la circumferència i del foli de Descartes a partir de les seves respectives parametritzacions. Així mateix, es verifica fàcilment que el polígon de Newton de l'equació de la corba parametritzada per (3) és el triangle amb vèrtexs  $(32, 0)$ ,  $(0, 48)$  i  $(0, 63)$  que es veu a la figura 5. Una vegada més, la dada addicional  $\text{ind}(\rho) = 1$  és conseqüència del fet que el polígon és no-contràctil.

### 3.1 Per a què ens pot servir conèixer el polítop de Newton?

A més del seu interès intrínsec, el polítop de Newton ens pot servir per a resoldre altres problemes computacionals sobre les hipersuperfícies paramètriques. Assenyallem dues d'aquestes aplicacions.

Conèixer el polítop de Newton ens permet calcular l'equació implícita via un algorisme d'interpolació. Suposem que ens han donat una parametrització  $\rho = (f, g) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  i volem conèixer la seva equació implícita. Si apliquem el teorema 3 obtenim immediatament el polígon de Newton  $Q \subset \mathbb{R}^2$  de l'equació que estem buscant.

I després? Doncs bé, l'equació ha de ser de la forma

$$E(x, y) = \sum_{j=0}^N \lambda_j x^{a_j} y^{b_j}$$

on  $(a_j, b_j)$  són els punts enters en  $Q$  i els  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  són desconeguts. Després avaluem la parametrització a  $N + 1$  punts  $\tau_0, \dots, \tau_N \in \mathbb{C}$  per als quals  $\rho(\tau_i)$  estigui definit, i obtenim un sistema lineal en els  $\lambda_j$ 's, homogeni de mida  $(N + 1) \times (N + 1)$ :

$$E(\rho(\tau_i)) = \sum_{j=0}^N \lambda_j f(\tau_i)^{a_j} g(\tau_i)^{b_j} = 0 \quad \text{per a } 0 \leq i \leq N.$$

Si hem triat els punts d'interpolació  $\tau_k$  de manera prou general, el nucli d'aquest sistema serà de dimensió 1 i l'equació  $E$  estarà unívocament determinada com un generador d'aquest nucli. Aquest algorisme és particularment avantatjós quan la quantitat de punts enters en el polítop és petita.

Un problema que es presenta sovint en CAGD és determinar com es tallen les corbes o les superfícies paramètriques que es volen modelar. Usualment aquest problema es resol implícitant una de les dues varietats. Si, en lloc de conèixer l'equació implícita, tenim només el polítop de Newton, no podem calcular aquesta intersecció, però sí que podem estimar quants punts hi ha (si la intersecció és de dimensió 0) o quin és el grau de la corba que resulta d'aquesta intersecció (si la intersecció és de dimensió 1).

En el cas de dues corbes planes diferents  $C, D \subset \mathbb{C}^2$ , el teorema de Bernšteïn-Kušnirenko-Khovanskiï diu que el nombre de punts de  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  en comú és, típicament, igual al *volum mixt*

$$\text{Àrea}(N(C) + N(D)) - \text{Àrea}(N(C)) - \text{Àrea}(N(D)) \quad (8)$$

on el "+" és la suma puntual dels polígons (*suma de Minkowski*). Per exemple, considerem les corbes  $C, D \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  parametritzades respectivament per

$$t \mapsto \left( \frac{(t+1)^2}{2t(t-1)}, \frac{4t(t-1)^3}{(t+1)^5} \right), \quad t \mapsto \left( t, \frac{10}{t^3} \right).$$

La corba  $C$  és la del problema al principi de l'article. En la part esquerra de la figura 9 veiem els polígons corresponents juntament amb la seva suma de Minkowski. El volum mixt és l'àrea de la zona ratllada i és per tant igual a 2.

Com a conseqüència, aquestes corbes  $C$  i  $D$  tenen com a màxim dos punts en comú, que són els punts  $(1, 33, 4, 22)$  i  $(4, 17, 0, 14)$  (figura 9).

### 3.2 Parametritzacions genèriques

Amb el que ja sabem, podem calcular fàcilment el polígon de Newton de qualsevol corba paramètrica plana que se'ns creui pel camí. En particular, podem respondre el problema 2 per al cas de corbes planes.

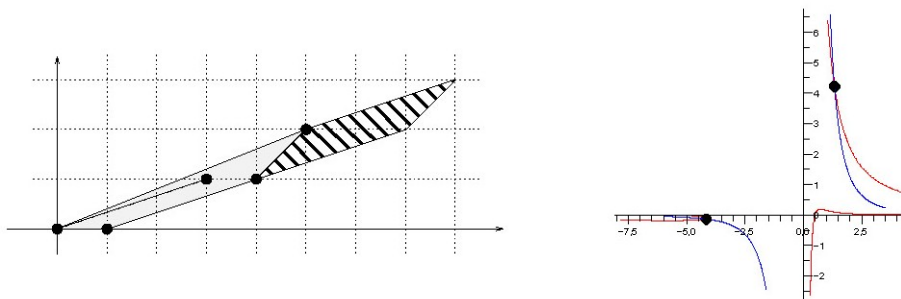


FIGURA 9: La intersecció de dues corbes paramètriques.

4 COROLLARI (POLINOMIS DE LAURENT GENÈRICS) Donats  $D \geq d, E \geq e$ , siguin

$$p(t) = \alpha_d t^d + \dots + \alpha_D t^D, \quad q(t) = \beta_e t^e + \dots + \beta_E t^E \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \quad (9)$$

tals que  $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E \neq 0$  i  $\gcd(t^{-d}p(t), t^{-e}q(t)) = 1$ . Sigui  $\rho = (p, q)$  i  $C = \overline{\text{Im}}(\rho)$ . Llavors

$$N(C) = \frac{1}{\text{ind}(\rho)} \mathcal{P}((D-d, 0), (0, E-e), (-D, -E), (d, e)).$$

Així, doncs, les parametritzacions definides per polinomis de Laurent genèrics produeixen, típicament, equacions el polígon de les quals és un quadrilàter (figura 10).

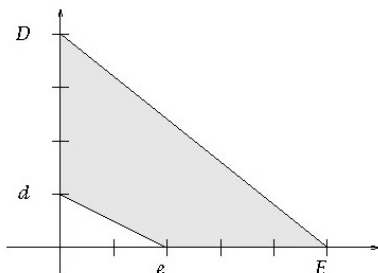


FIGURA 10: El polígon de Newton d'una parametrització de Laurent genèrica.

La demostració d'aquest corollari és senzilla: d'una banda es té  $\text{ord}_0(\rho) = (d, e)$  i  $\text{ord}_\infty(\rho) = (-D, -E)$ . D'altra banda, si anomenem  $v_1, \dots, v_r \neq 0$  les diferents arrels de  $t^{-d}p(t)$  i denotem per  $m_i \geq 1$  la multiplicitat de  $v_i$  en  $p$ , es té

$$\text{ord}_{v_i}(\rho) = (m_i, 0) \quad \text{per a } 1 \leq i \leq r$$

ja que  $p$  i  $q$  no tenen arrels  $\neq 0$  en comú. De manera similar, siguin  $w_1, \dots, w_s \neq 0$  les arrels de  $t^{-e}q(t)$  i  $n_j \geq 1$  la seva respectiva multiplicitat. Llavors,

$$\text{ord}_{w_j}(\rho) = (0, n_j).$$

El teorema 3 mostra que el polígon  $\text{ind}(\rho) N(C)$  s'obté girant  $-90^\circ$  i concatenant els vectors  $(d, e)$ ,  $(-D, -E)$ ,  $(m_i, 0)$  i  $(0, n_j)$  per a  $1 \leq i \leq r$  i  $1 \leq j \leq s$ . Però els  $(m_i, 0)$  estan tots en la mateixa direcció i per tant es concatenen junts en el vector  $\sum_i (m_i, 0) = (D - d, 0)$ . De manera similar, els  $(0, n_j)$  es concatenen en el vector  $\sum_j (0, n_j) = (0, E - e)$ , el qual conclou la demostració.

Més encara, es pot mostrar que per a una parametrització associada a polinomis de Laurent  $p, q$  com a (9), el polígon de Newton de l'equació és

$$\frac{1}{\text{ind}(\rho)} \mathcal{P}((D - d, 0), (0, E - e), (-D, -E), (d, e))$$

si i només si  $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E \neq 0$  i  $\text{gcd}(t^{-d}p(t), t^{-e}q(t)) = 1$ . A més, si els vectors  $(D - d, 0)$ ,  $(0, E - e)$ ,  $(d, e)$  no són col·lineals i  $p, q$  són genèrics, llavors  $\rho$  és biracional.

La demostració anterior il·lustra un aspecte important del càlcul del polígon de Newton en situacions concretes. El polígon no depèn de les arrels de  $p$  i de  $q$  ni de les seves multiplicitats, sinó només del fet que són disjunctes i que coneixem quant és la suma de les multiplicitats. Aquest és un principi general que permet calcular el polígon de Newton d'una parametrització  $\rho = (f, g)$  a partir de factoritzacions parcials de la forma

$$f(t) = \alpha \prod_{p \in P} p(t)^{d_p}, \quad g(t) = \beta \prod_{p \in P} p(t)^{e_p}$$

on  $P \subset \mathbb{C}[t]$  és un conjunt finit de polinomis primers entre ells,  $d_p, e_p \in \mathbb{N}$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Tals factoritzacions es poden obtenir utilitzant només l'operació de màxim comú divisor de dos polinomis en una variable i sense necessitat d'accedir als zeros i pols de  $f$  i  $g$ , la qual cosa seria massa costosa des d'un punt de vista computacional.

Tornant a les parametritzacions genèriques, el següent cas que cal considerar és el de dues funcions racionals amb el mateix denominador. El polígon de Newton que en resulta té, com a molt, cinc costats (figura 11).

5 COROLLARI Donats  $D \geq d, E \geq e$  y  $F \geq 0$ , siguin

$$p(t) = \alpha_d t^d + \dots + \alpha_D t^D, \quad q(t) = \beta_e t^e + \dots + \beta_E t^E, \quad r(t) = \gamma_0 + \dots + \gamma_F t^F.$$

Siguin  $\rho = (\frac{p}{r}, \frac{q}{r}) \in \mathbb{C}(t)^2$  i  $C = \overline{\text{Im}(\rho)}$ . Llavors,

$$N(C) = \frac{1}{\text{ind}(\rho)} \mathcal{P}((D - d, 0), (0, E - e), (F - D, F - E), (d, e), (-F, -F))$$

si i només si  $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E, \gamma_0, \gamma_F \neq 0$  i  $t^{-d}p(t), t^{-e}q(t), r(t)$  són primers entre ells.

L'últim cas que considerarem és el de parametritzacions genèriques per a funcions racionals amb denominador diferent. El polígon que en resulta té, com a molt, sis costats (figura 12).

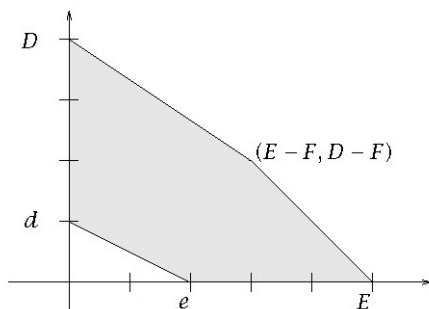


FIGURA 11: El polígon d'una parametrització genèrica per a funcions racionals amb el mateix denominador.

6 COROLLARI Donats  $D \geq d$ ,  $E \geq e$ ,  $F, G \geq 0$ , siguin

$$p(t) = \alpha_d t^d + \cdots + \alpha_D t^D, \quad q(t) = \beta_e t^e + \cdots + \beta_E t^E \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$$

i

$$r(t) = \gamma_0 + \cdots + \gamma_F t^F, \quad s(t) = \delta_0 + \cdots + \delta_G t^G \in \mathbb{C}[t].$$

Siguin  $\rho = \left(\frac{p}{r}, \frac{q}{s}\right)$  i  $C = \overline{\text{Im}(\rho)}$ . Llavors,

$$N(C) = \frac{1}{\text{ind}(\rho)} \mathcal{P}((D-d, 0), (0, E-e), (F-D, G-E), (d, e), (-F, 0), (0, -G))$$

si i només si  $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E, \gamma_0, \gamma_F, \delta_0, \delta_G \neq 0$  i  $t^{-d}p(t), t^{-e}q(t), r(t), s(t)$  són primers entre ells.

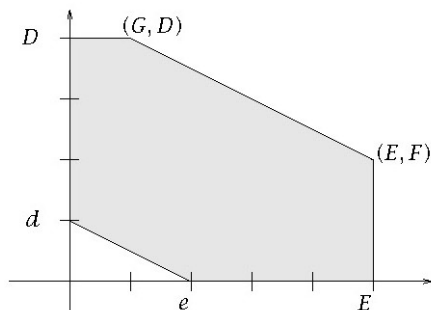


FIGURA 12: El polígon d'una parametrització genèrica per a funcions racionals amb denominadors diferents.

#### 4 El cas general vs el cas genèric

Ara li proposem que miri en l'altra direcció: suposem que tenim un polinomi  $E(x, y)$  del qual sospitem que defineix una corba paramètrica. Com podríem saber quin és a partir del seu polígon de Newton?



Una primera pregunta natural és quines són les formes possibles per al polígon de Newton d'una corba paramètrica. Com acabem de veure, els polígons que produeixen les parametritzacions genèriques són molt especials: tenen com a molt sis costats, alguns dels quals estan en direccions prefixades.

Per a poder respondre a aquesta pregunta, fixem un polígon enter  $Q \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ , amb interior no buit i recolzat en els eixos coordenats. Identifiquem amb  $\mathbb{C}^{\#(Q \cap \mathbb{Z}^2)}$  l'espai dels polinomis amb polígon de Newton contingut en  $Q$ . Considerem llavors el conjunt

$$M_Q^\circ := \{F : N(F) = Q, F \text{ defineix una corba paramètrica de } \mathbb{C}^2\} \subset \mathbb{C}^{\#(Q \cap \mathbb{Z}^2)}$$

i sigui  $M_Q$  la seva clausura de Zariski. Recordem que  $\partial Q$  designa la vora del polígon  $Q$ .

7 TEOREMA ([5])  $M_Q$  és una varietat paramètrica de dimensió  $\#(\partial Q \cap \mathbb{Z}^2)$ .

En particular,  $\dim(M_Q) \geq 3$ , ja que  $Q$  té almenys tres costats, perquè és un polígon d'interior no buit. Resulta així que tot polígon enter, amb interior no buit i recolzat en els eixos coordenats, és el polígon de Newton d'una corba paramètrica.

Com a conseqüència d'aquest resultat, la codimensió de  $M_Q$  és igual al nombre de punts enters en l'interior del polígon. Per exemple, el quadrilàter del problema de l'inici d'aquest article és el  $\text{Conv}((0, 0), (1, 0), (4, 1), (5, 2))$  i conté un sol punt enter en el seu interior, i per tant la varietat  $M_Q$  corresponent és una hipersuperfície.

Aquest fenomen és d'interès per al problema computacional invers a la implicació: donat  $E(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ , es tracta de decidir si defineix o no una corba paramètrica i, en el cas afirmatiu, calcular una parametrització.

Si el polígon de Newton de l'equació  $E(x, y)$  té molts punts en el seu interior, llavors la probabilitat que defineixi una corba racional és baixa. Si de totes maneres l'equació defineix una corba racional, la parametrització corresponent està definida per  $\#(\partial Q \cap \mathbb{Z}^2)$  graus de llibertat i per tant l'eficiència del càlcul d'una parametrització hauria d'estar correlacionada amb la quantitat de punts enters a la vora de  $Q$  i no tant amb la quantitat de punts enters en tot  $Q$ .

*Per a saber-ne més:*

- Corbes paramètriques en general: [1, 14, 22]
- Mètodes d'interpolació relacionats amb implicació: [3, 10, 20]
- Polítop de Newton de l'equació implícita i geometria tropical: [6, 12, 15, 16, 18]
- Polítop de Newton y polítop-fibra mixt: [9, 11]
- Polítop de Newton i teoria de la intersecció: [5, 13]

## Agraïments

Agraïm a Joaquim Ortega-Cerdà la seva invitació a publicar aquesta traducció al català del nostre article a *La Gaceta* de la RSME. Agraïm també a Teresa Cortadellas, Antonio J. Di Scala i Tomás Recio pels seus nombrosos comentaris i suggeriments sobre una primera versió d'aquest text.

D'Andrea és investigador del Programa Ramón y Cajal del Ministeri d'Educació i Ciència i participa en el projecte d'investigació MTM2007-67493. Sombra participa en el projecte d'investigació MTM2007-14234.

## Referències

- [1] ABHYANKAR, S. S. *Algebraic geometry for scientists and engineers*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1990.
- [2] ANDRADAS, C.; RECIO, T. «Plotting missing points and branches of real parametric curves». *AAECC*, 1 (2007), 107-126.
- [3] CORLESS, R. M.; GIESBRECHT, M. W.; KOTSIREAS, I. S.; WATT, S. M. «Numerical implicitization of parametric hypersurfaces with linear algebra». *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 1930 (2001), 174-183.
- [4] COX, D.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. *Using algebraic geometry*. Nova York: Springer, 2005 (Graduate Texts in Math.; 185).
- [5] D'ANDREA, C.; SOMBRA, M. «The Newton polygon of a plane rational curve». 26 pàg. E-print arXiv:0710.1103.
- [6] DICKENSTEIN, A.; FEICHTNER, E.-M.; STURMFELS B. «Tropical discriminants». *J. of the Amer. Math. Soc.*, 20 (2007), 1111-1133.
- [7] EINSIEDLER, M.; KAPRANOV, M.; LIND, D. «Non-Archimedean amoebas and tropical varieties». *J. Reine Angew. Math.*, 601 (2006), 139-157.
- [8] EMIRIS, I.; KOTSIREAS, I. «Implicitization exploiting sparseness». *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, 67 (2005), 281-298.
- [9] ESTEROV, A.; KHOVANSKIÏ, A. «Elimination theory and Newton polytopes». *Funct. Anal. Other Math.*, 2 (2008), 45-71.
- [10] MARCO, A.; MARTÍNEZ, J. J. «Implicitization of rational surfaces by means of polynomial interpolation». *Comput. Aided Geom. Design*, 19 (2002), 327-344.
- [11] MCMULLEN, P. «Mixed fibre polytopes». *Discrete Comput. Geom.*, 32 (2004), 521-532.
- [12] MIKHALKIN, G. «Tropical geometry and its applications». A: *International Congress of Mathematicians*. Vol. II. Eur. Math. Soc., 2006, 827-852.
- [13] PHILIPPON, P.; SOMBRA, M. «A refinement of the Bernštein-Kušnirenko estimate». *Adv. Math.*, 218 (2008), 1370-1418.
- [14] SENDRA, J. R.; WINKLER F.; PÉREZ-DÍAZ, S. *Rational Algebraic Curves. A Computer Algebra Approach*. Nova York: Springer, 2008.

- [15] STURMFELS, B.; TEVELEV, J. «Elimination theory for tropical varieties». *Math. Res. Let.*, 15 (2008), 543-562.
- [16] STURMFELS, B.; TEVELEV, J.; YU, J. «The Newton polytope of the implicit equation». *Mosc. Math. J.*, 7 (2007), 327-346.
- [17] STURMFELS, B.; YU, J.-T. «Minimal polynomials and sparse resultants». A: *Zero-dimensional schemes (Ravello, 1992)*. De Gruyter, 1994, 317-324, .
- [18] STURMFELS, B.; YU, J. «Tropical implicitization and mixed fiber polytopes». A: STILLMAN, M.; TAKAYAMA, N.; VERSCHELDE, J. (ed.): *Software for Algebraic Geometry*, Springer, 2008. (I.M.A. Volumes in Math. Appl. 146, ) 117-132.
- [19] STURMFELS, B.; YU, J. *TrIm: a software for tropical implicitization*. <http://www-math.mit.edu/~jyu/TrIm/>.
- [20] SUN, Y.; YU, J. «Implicitization of parametric curves via Lagrange interpolation». *Computing*, 77 (2006), 379-386.
- [21] TEVELEV, J. «Compactifications of subvarieties of tori». *Amer. J. of Math.*, 129 (2007), 1087-1104.
- [22] WALKER, R. J. *Algebraic Curves*. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1950.

CARLOS D'ANDREA  
DEPARTAMENT D'ÀLGEBRA I GEOMETRIA,  
UNIVERSITAT DE BARCELONA,  
GRAN VIA 585,  
08007 BARCELONA  
cdandrea@ub.edu

MARTÍN SOMBRA  
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX,  
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX 1,  
351 COURS DE LA LIBÉRATION,  
F-33405 TALENCE CEDEX, FRANÇA  
martin.sombra@math.u-bordeaux1.fr