

## A la recerca de $\pi$ \*

PILAR BAYER I JORDI GUÀRDIA

### Introducció

El problema de la uniformització de corbes fou estudiat a bastament per B. Riemann (1826-1866), F. Klein (1849-1925), H. Poincaré (1854-1912) i P. Koebe (1882-1945). En les primeres dècades del segle  $xx$ , aquests autors obtingueren el teorema d'uniformització, segons el qual tota corba algebraica definida sobre el cos  $\mathbb{C}$  dels nombres complexos admet una parametrització global mitjançant funcions d'una variable complexa. Es tracta de funcions univalorades que, a l'època, s'anomenaven funcions *uniformes*. Malgrat l'atenció dedicada a aquest problema durant més d'un segle, per a molt poques corbes se'n coneix una uniformització explícita.

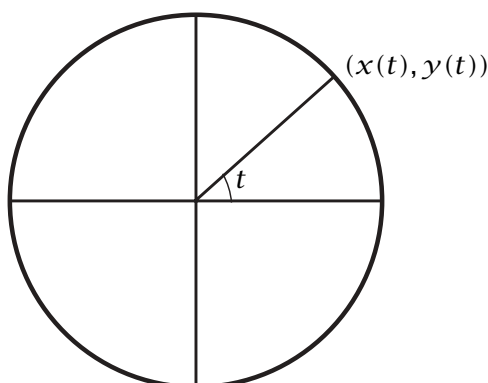
El primer exemple d'uniformització és proporcionat per la circumferència unitat, que és una corba real i, per tant, complexa. Descrivim els seus punts mitjançant les funcions coordenades sinus i cosinus, que són periòdiques de període  $2\pi$ . Altres exemples clàssics provenen de les corbes modulars, que s'uniformitzen amb les funcions modulars. Les funcions modulars són funcions meromorfs i invariants per l'acció de grups discrets de transformacions homogràfiques del pla.

En aquest article, ens proposem uniformitzar la circumferència valent-nos únicament de la seva representació gràfica. Es tracta, doncs, d'oblidar per uns instants les funcions sinus, cosinus, i el nombre  $\pi$ , per recuperar-los tot seguit a partir de propietats de simetria de  $S^1$ .

Aquesta presentació de les funcions trigonomètriques no pretén substituir les habituals. La uniformització de la circumferència ha estat un exercici portat a terme amb la finalitat de familiaritzar-nos amb recursos adaptables a la uniformització efectiva d'altres corbes (cf. [1], [2], [3], [4], [8]).

---

\*Amb finançament parcial de MCYT BFM2000-0627.

FIGURA 1:  $S^1 : X^2 + Y^2 = 1$ .

## 1 La recerca del grup d'automorfia

En el pla euclidià,  $\mathbb{R}^2$ , dibuixem-hi la circumferència unitat,  $S^1$ . Fixada una semirecta des de l'origen, a cada punt de  $S^1$  li correspon un angle concret; és a dir, una classe de parelles ordenades de semirectes. D'entrada, es tracta de construir funcions reals de variable real  $x(t), y(t)$  que, avaluades en un cert interval  $[0, 2T]$ , proporcionin les coordenades dels punts de  $S^1$ . Per ara, el valor de  $T$  no té cap importància.

La Figura 1 fa paleses relacions de periodicitat exigibles a les funcions coordenades:

$$x(0) = x(2T) = 1, \quad y(0) = y(2T) = 0.$$

Les propietats anteriors aconsellen estendre el domini de definició de les funcions  $x(t), y(t)$  a tota la recta real. A partir de la simetria axial  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ , sembla raonable exigir que  $x(t)$  sigui una funció parella i  $y(t)$  sigui una funció senar. Aquestes consideracions ens remetent a dues isometries de la recta real que seran significatives per als nostres propòsits:

- i) La translació de període  $2T$ :  $\tau(t) = t + 2T$ .
- ii) La simetria central respecte de l'origen:  $\sigma(t) = -t$ .

Ben mirat, podríem descriure no solament els punts de coordenades reals de  $S^1$  sinó també els punts de coordenades complexes. Per a tal fi, cercarem un grup  $\Gamma$  que operi en  $\mathbb{R}$  i en  $\mathbb{C}$ , i funcions meromorfe  $x(z), y(z)$ , periòdiques respecte de  $\Gamma$ , que satisfacin la relació algebraica

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Aleshores, obtindrem funcions

$$\Gamma \backslash \mathbb{R} \rightarrow S^1(\mathbb{R}), \quad t \mapsto (x(t), y(t)),$$

$$\Gamma \backslash \mathbb{C} \rightarrow S^1(\mathbb{C}), \quad z \mapsto (x(z), y(z)),$$

on  $\Gamma \backslash \mathbb{R}$  i  $\Gamma \backslash \mathbb{C}$  denoten els quocients de  $\mathbb{R}$  i de  $\mathbb{C}$  per l'acció de  $\Gamma$ . Compactifiquem la recta real i la recta complexa amb el punt de l'infinit:

$$\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Quan calgui, identificarem  $\hat{\mathbb{R}}$  amb  $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ , la recta projectiva real; i  $\hat{\mathbb{C}}$  amb  $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ , la recta projectiva complexa. Considerem el semiplà superior de Poincaré i el seu compactificat

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}, \quad \hat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \cup \hat{\mathbb{R}}.$$

Les homografies de coeficients complexos

$$y(z) = (az + b)/(cz + d), \quad ad - bc \neq 0,$$

actuen com a homeomorfismes de  $\hat{\mathbb{C}}$ . El conjunt d'aquestes homografies constitueix el grup projectiu lineal complex  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ , que coincideix amb el grup d'automorfismes de la recta projectiva complexa. Les homografies de coeficients  $a, b, c, d$  reals operen en  $\mathbb{R}$ ; si, a més,  $ad - bc > 0$ , aleshores operen en  $\mathcal{H}$ . El seu conjunt constitueix el grup projectiu especial lineal real  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Sigui  $\Gamma$  el subgrup de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  generat per la translació

$$\tau(z) = z + 2T.$$

Considerem el subgrup  $\Gamma^+$  de  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$  generat per la simetria central respecte de l'origen i la translació anterior

$$\sigma(z) = -z, \quad \tau(z) = z + 2T.$$

En termes de generadors i de relacions, el grup  $\Gamma^+$  admet la presentació següent:

$$\Gamma^+ = \langle \sigma, \tau; \quad \sigma^2 = 1, \sigma\tau\sigma = \tau^{-1} \rangle.$$

És clar que  $\Gamma$  és un subgrup de  $\Gamma^+$  i que  $\Gamma^+$  està inclòs en el normalitzador de  $\Gamma$  en  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ .

Començarem per determinar un domini fonamental per l'acció de  $\Gamma^+$  en  $\mathbb{C}$ . Prenguem la banda vertical d'amplada  $2T$  centrada en l'origen de  $\hat{\mathbb{C}}$ , i sigui  $\mathcal{D}$  el subespai topològic format per la seva meitat superior, relativament a l'eix real:

$$\mathcal{D} = \{z \in \hat{\mathcal{H}} : -T \leq \text{Re}(z) \leq T\} \cup \{\infty\}.$$

Identifiquem punt a punt les dues semirectes que uneixen els punts  $-T, +T$  amb el punt de l'infinit i, així mateix, els dos segments que uneixen els punts anteriors amb l'origen. Concretament,

$$-T + iy \sim T + iy, \quad y > 0; \quad -x \sim x, \quad x \in [-T, T].$$

Sigui  $\mathcal{P} = \mathcal{D} / \sim$  l'espai topològic quotient obtingut a partir de la relació anterior. En la vora de  $\mathcal{D}$  es distingeixen tres classes de vèrtexs:

$$\{P_0 = 0\}, \quad \{P_{-1} = -T, P_1 = T\}, \quad \{P_\infty = \infty\}.$$

L'espai quotient  $S^+ = \Gamma^+ \backslash \hat{\mathbb{C}}$  és una superfície compacta homeomorfa amb  $\mathcal{P}$ :

$$S^+ = \mathcal{P}.$$

De la fórmula d'Euler,  $\chi = 2 - 2g$ , deduïm que el gènere de  $S^+$  és zero.



FIGURA 2: El conjunt  $\mathcal{D}$ .

El nostre primer objectiu és construir una funció  $F(z)$ , meromorfa en  $\mathbb{C}$  i invariant per l'acció de  $\Gamma^+$ , que apliqui bijectivament  $S^+$  en  $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ .<sup>1</sup>

Començarem per observar que el conjunt  $\mathcal{D}$  és simètric respecte de l'eix imaginari; és a dir, se satisfà que

$$z \in \mathcal{D} \iff -\bar{z} \in \mathcal{D},$$

on  $\bar{z}$  designa el conjugat complex de  $z$  i, per definició,  $\overline{\infty} = \infty$  (vegeu la figura 2).

Considerem el triangle  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(P_0, P_1, P_\infty)$ , proporcionat per la meitat dreta de  $\mathcal{D}$ . Cercarem la funció  $F(z)$  de manera que transformi bijectivament la vora de  $\mathcal{T}$  en  $\hat{\mathbb{R}}$  i l'interior de  $\mathcal{T}$  en  $\mathcal{H}$ . Un cop haurem definit  $F$  en  $\mathcal{T}$ , el principi de simetria de Schwarz en permetrà la prolongació analítica a l'altra meitat de  $\mathcal{D}$ :

$$F(-\bar{z}) := \overline{F(z)}, \quad \text{per a } z \in \mathcal{T}.$$

Finalment, estendrem la funció  $F$  a tot  $\mathbb{C}$  imposant-li la invariància pel grup  $\Gamma^+$ :

$$F(-z) = F(z), \quad F(z + 2T) = F(z), \quad \text{per a tot } z \in \mathbb{C}.$$

<sup>1</sup>  $S^+$  esdevindrà aleshores una superfície de Riemann compacta.

En procedir d'aquesta manera, tindrem que

$$F(\bar{z}) = F(-(-\bar{z})) = F(-\bar{z}) = \overline{F(z)}, \quad \text{per a tot } z \in \mathbb{C}.$$

Aleshores, la funció  $F$  aplicarà  $\mathcal{T} \cup \bar{\mathcal{T}}$ , i també  $\mathcal{T} \cup -\bar{\mathcal{T}}$ , bijectivament en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Les propietats esmentades condueixen cap a una funció  $F$  automorfa per  $\Gamma^+$ . Precisem tot seguit aquesta definició.

En general, donada una funció holomorfa  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en un obert  $U$  del pla complex, entendrem per domini d'existència,  $U^*$ , de  $f$  el subconjunt del pla on  $f$  és meromorfa.

1 DEFINICIÓ Donat un subgrup discret  $\Gamma$  de  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ , una funció  $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  s'anomena automorfa respecte de  $\Gamma$  si

- i)  $f$  és holomorfa en  $U$ .
- ii) El grup  $\Gamma$  opera en  $U^*$ .
- iii) Se satisfà que  $f(\gamma(z)) = f(z)$ , per a tot  $z \in U^*$ ,  $\gamma \in \Gamma$ .

Notem que per inversió de funcions automorfes s'obtenen funcions  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ -multivalorades; amb altres paraules, dues branques qualssevol de la correspondència inversa d'una funció automorfa són sempre projectivament equivalents.

## 2 Condicions locals

Les transformacions homogràfiques  $\gamma \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ ,  $\gamma \neq \pm \text{Id}$ , que podem suposar definides mitjançant una matriu  $M = M(\gamma)$  de determinant igual a 1, es classifiquen en hiperbòliques ( $\text{tr}(M)$  real,  $|\text{tr}(M)| > 2$ ), el·líptiques ( $\text{tr}(M)$  real,  $|\text{tr}(M)| < 2$ ), parabòliques ( $\text{tr}(M) = \pm 2$ ) i loxodròmiques ( $\text{tr}(M)$  complexa, no real).

Sigui  $\Gamma$  un subgrup discret de  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ . Un punt  $z \in \hat{\mathbb{R}}$  s'anomena parabòlic respecte de  $\Gamma$  si és l'únic punt fix d'una homografia parabòlica  $\gamma \in \Gamma$ . Un punt  $z \in \mathbb{C}$  s'anomena el·líptic respecte de  $\Gamma$  si no és parabòlic i és fix per una homografia el·líptica  $\gamma \in \Gamma$ . L'ordre d'un punt el·líptic és, per definició, l'ordre del seu grup d'isotropia:

$$n_z = \#\Gamma_z, \quad \Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(z) = z\}.$$

2 PROPOSICIÓ Considerem el triangle  $\mathcal{T}(P_0, P_1, P_\infty)$ . Sota l'acció de  $\Gamma^+ = \langle \sigma, \tau \rangle$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ , es té que

- i) El vèrtex  $P_0$  és un punt el·líptic d'ordre 2 i el seu grup d'isotropia és

$$\Gamma_0^+ = \langle \sigma \rangle.$$

ii) El vèrtex  $P_1$  és un punt el·líptic d'ordre 2 i el seu grup d'isotropia és

$$\Gamma_1^+ = \langle \tau\sigma \rangle.$$

iii) El vèrtex  $P_\infty$  és un punt parabòlic. El seu grup d'isotropia és

$$\Gamma_\infty^+ = \langle \tau \rangle,$$

que és cíclic d'ordre infinit.

DEMOSTRACIÓ: L'homografia  $\gamma(z) = \pm z + 2Tm$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , és genèrica per al grup  $\Gamma^+$ . Per tant, per calcular el grup d'isotropia en el punt  $P_1$  cal resoldre l'equació en  $m$

$$\pm T + 2Tm = T,$$

les solucions de la qual són  $m=0$  amb  $\gamma = \text{Id}$ ; o bé  $m=1$  amb  $\gamma = -z + 2T = \tau\sigma$ . Això prova ii). Les altres afirmacions es conclouen de manera similar.  $\square$

Atès que si  $F$  és una funció invariant per  $\Gamma^+$ , tota altra funció de la forma

$$\frac{aF(z) + b}{cF(z) + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

també ho és, i que tres punts de  $\hat{\mathbb{C}}$  són sempre projectivament equivalents, podem escollir el valor de  $F$  en els vèrtexs de  $\mathcal{T}$ . Imposem les condicions

$$F(P_0) = 1, \quad F(P_1) = -1.$$

L'elecció del valor  $F(P_\infty)$  mereix un moment de reflexió. La invariància per  $\tau$  imposada a aquesta funció,  $F(\tau(z)) = F(z)$ , comporta que el límit de  $F(z)$  quan  $z \rightarrow \infty$  no pot existir. De fet, la funció  $F$  està obligada a tenir una singularitat essencial en  $P_\infty$ , ja que cada valor que prengui en un entorn d'aquest punt tindrà infinites antiimatges. És clar, doncs, que per definir  $F(P_\infty)$  hem de considerar el límit quan  $z$  tendeix a  $P_\infty$  en una determinada direcció; la tria més natural és la direcció vertical. Així, escollim

$$F(P_\infty) := \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x + iy), \quad x \in \mathbb{R},$$

i ara imposem com a valor d'aquest límit  $F(P_\infty) = \infty$ . Sota aquestes condicions, és d'esperar que la funció  $F(z)$  transformi els costats de  $\mathcal{T}$  en  $\hat{\mathbb{R}}$  i tingui una única singularitat, situada en  $P_\infty$ .

Els grups d'isotropia proporcionen una informació valuosa sobre el comportament local de la funció  $F$  que cerquem. Sigui  $\alpha_k = 1/n_k$  l'invers de l'ordre del grup d'isotropia en el vèrtex  $P_k$  per l'acció de  $\Gamma^+$ . Així,<sup>2</sup>

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_\infty = 0.$$

<sup>2</sup> Observem que els índexs introduïts, multiplicats per  $T$ , proporcionen la mesura dels angles en els vèrtexs del triangle  $\mathcal{T}$ , en l'escala escollida.

Com que en un entorn de  $P_0$  la funció  $F(z)$  ha de ser 2 : 1 i parella, ha de satisfer

$$F(z) = 1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + O(z^6), \quad |z| < r_0,$$

amb  $a_2 \neq 0$  i  $r_0 > 0$ .

Semblantment, en un entorn de  $P_1$ , caldrà que se satisfaci

$$F(z) = -1 + b_2(z - T)^2 + b_4(z - T)^4 + O((z - T)^6), \quad |z - T| < r_1,$$

amb  $b_2 \neq 0$  i  $r_1 > 0$ .

Al mateix temps, considerem una branca qualsevol  $F^{(-1)}(w)$  de la correspondència inversa de  $F(z) = w$ . De les simetries de  $F$  se'n dedueix que la derivada  $D(F^{(-1)}, w)$  ha de ser una funció senar. Cercarem la funció  $F$  de manera que se satisfaci

$$D(F^{(-1)}, w) = \frac{c_1}{w} + \frac{c_3}{w^3} + O\left(\frac{1}{w^5}\right), \quad |w| > r_\infty,$$

amb  $c_1 \neq 0$  i  $r_\infty > 0$ .

És clar que, de moment, tots els coeficients dels desenvolupaments anteriors són indeterminats. El bon comportament de la funció  $F$  respecte de la conjugació complexa comportarà que aquests coeficients siguin reals.

### 3 Derivades automorfes

La informació que donem en aquesta secció és de caràcter general. Començarem per observar que la propietat d'automorfia d'una funció no es transmet a la seva derivada. Donada  $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$ , la fórmula

$$(ad - bc)Df(\gamma(z)) = D(f \circ \gamma)(z) \cdot (cz + d)^2$$

posa de manifest que la derivada habitual només és invariant per  $\gamma$  quan  $c = 0, a = d$ ; és a dir, quan  $\gamma$  és una translació. Per paliar aquest inconvenient, cercarem un operador diferencial que preservi l'automorfia. Com que es tracta d'aconseguir una invariància respecte de tres paràmetres, s'imposa la cerca d'un operador de tercer ordre.<sup>3</sup>

3 DEFINICIÓ *Sigui  $f(z)$  una funció meromorfa no constant.*

i) *La derivada schwarziana  $D_s(f, z)$  de  $f$  es defineix per la fórmula*

$$D_s(f, z) = \frac{2D(f, z)D^3(f, z) - 3D^2(f, z)^2}{D(f, z)^2}.$$

---

<sup>3</sup> Operadors diferencials invariants per homografies foren ja considerats per J. L. Lagrange (1736-1813), H. A. Schwarz (1843-1921) i R. Dedekind (1831-1916). El seu origen es remunta a recerques sobre geodèsia.

ii) La derivada automorfa  $D_a(f, z)$  de  $f$  es defineix per la fórmula

$$D_a(f, z) = \frac{D_s(f, z)}{D(f, z)^2}.$$

Per a tot  $\gamma \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ , es té que  $D_a(\gamma(z), z) = 0$ . De fet, en la derivació automorfa les homografies substitueixen el paper de les constants en la derivació habitual.

És immediat comprovar que la derivada automorfa d'una composició de funcions satisfà la regla de la cadena següent.

4 PROPOSICIÓ *Siguin  $f(z), g(z)$  funcions meromorfes no constants tal que la composició  $g \circ f$  estigui definida. Aleshores,*

$$D_a(g \circ f, z) = D_a(g, f(z)) + \frac{D_a(f, z)}{D(g, f(z))^2}.$$

5 PROPOSICIÓ *Sigui  $f(z) = w$  una funció meromorfa no constant de correspondència inversa  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ -multivalorada. Aleshores,*

i) La derivada schwarziana  $D_s(f^{(-1)}, w)$  és una funció (univalorada) que satisfà

$$D_s(f^{(-1)}, w) = -D_a(f, z), \quad \text{per a } w = f(z).$$

ii) Si  $f$  és  $\Gamma$ -automorfa, la derivada automorfa  $D_a(f, z)$  és, també,  $\Gamma$ -automorfa. És a dir,

$$D_a(f, \gamma(z)) = D_a(f, z), \quad \text{per a tot } \gamma \text{ de } \Gamma.$$

## 4 El càlcul de la derivada automorfa

En aquest punt, reprenem les notacions de les dues primeres seccions. Si bé la informació aplegada fins ara no és suficient per al càlcul de la funció  $F$ , veurem que ja permet l'obtenció de la seva derivada automorfa.

Com que els vèrtexs del triangle  $\mathcal{T}$  són els únics punts en què es preveu que la funció  $F$  deixi de ser localment injectiva, les singularitats de  $D_a(F, z)$  s'han de localitzar precisament en aquests vèrtexs.

Gràcies als desenvolupaments locals de  $F$  que hem deduït en la secció 2, podem calcular els primers termes del desenvolupament en sèrie de Taylor de  $D_a(F, z)$ , a l'entorn de cada vèrtex de  $\mathcal{T}$ . Ho fem tot seguit.

6 PROPOSICIÓ *Sigui  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(P_0, P_1, P_\infty)$ .*

i) *En un entorn de  $P_0$ , se satisfà que*

$$\begin{aligned} D_a(F, z) &= -\frac{3}{4a_2^2} \frac{1}{z^4} + \frac{3a_4}{a_2^3} \frac{1}{z^2} + O(1) \\ &= \frac{\alpha_0^2 - 1}{(F(z) - 1)^2} - \frac{A_0}{F(z) - 1} + O(1), \end{aligned}$$



on  $A_0 = -3a_4/2a_2^2$  és una constant.

ii) En un entorn de  $P_1$ , se satisfà que

$$\begin{aligned} D_a(F, z) &= -\frac{3}{4b_2^2} \frac{1}{(z-T)^4} + \frac{3b_4}{b_2^3} \frac{1}{(z-T)^2} + O(1), \\ &= \frac{\alpha_1^2 - 1}{(F(z) + 1)^2} - \frac{A_1}{F(z) + 1} + O(1), \end{aligned}$$

on  $A_1 = 9b_4/2b_2^2$  és una constant.

iii) En un entorn de  $w = \infty$ , se satisfà que

$$D_s(F^{(-1)}, w) = \frac{1}{w^2} + O\left(\frac{1}{w^4}\right).$$

La proposició anterior motiva la introducció de la funció racional

$$\begin{aligned} R(w) &:= \frac{1 - \alpha_0^2}{(w-1)^2} + \frac{A_0}{w-1} + \frac{1 - \alpha_1^2}{(w+1)^2} + \frac{A_1}{w+1} \\ &= \frac{3}{4(w-1)^2} + \frac{A_0}{w-1} + \frac{3}{4(w+1)^2} + \frac{A_1}{w+1}. \end{aligned}$$

Observem que no coneixem les constants  $A_0, A_1$ , perquè els coeficients de  $F$  són indeterminats.

Deduïm que la funció

$$H(F, z) := D_a(F, z) + R(F(z))$$

és holomorfa en tot  $z \in \mathbb{C}$ . Per estudiar-ne el comportament a l'infinit, ens valdrem de  $F^{(-1)}$ . Com que la funció

$$\begin{aligned} H(w, F^{(-1)}) &= -D_s(F^{-1}, w) + R(w) \\ &= \frac{A_0 + A_1}{w} + \left(\frac{1}{2} + A_0 - A_1\right) \frac{1}{w^2} + O\left(\frac{1}{w^3}\right) \end{aligned}$$

resta afitada en un entorn de l'infinit, imposarem que  $H(F, z)$  sigui una funció constant; de fet, igual a zero.<sup>4</sup> Aleshores, s'ha de satisfer el sistema d'equacions

$$\begin{cases} A_0 + A_1 &= 0 \\ 2A_0 - 2A_1 &= -1. \end{cases}$$

Cal prendre, doncs,  $A_0 = -\frac{1}{4}, A_1 = \frac{1}{4}$ , amb la qual cosa

$$R(w) = \frac{w^2 + 2}{(w^2 - 1)^2}.$$

<sup>4</sup> Si disposéssim de la funció exponencial, del principi del màxim i, en definitiva, del teorema de Liouville, no caldria imposar que  $H$  fos constant; ho seria automàticament.

## 5 La recerca del cosinus

Un cop calculada la derivada automorfa de  $F$ , intentarem el càlcul de  $F(z) = w$  integrant formalment l'equació diferencial ordinària de tercer ordre

$$D_a(w, z) + R(w) = 0.$$

En calcular la solució a l'entorn de  $P_0$  sotmesa a la condició inicial  $F(P_0) = 1$ , obtenim una funció que depèn, aparentment, d'un paràmetre  $\lambda$  (tal que  $\lambda^2 = a_2$ ):

$$\begin{aligned} F(z) = & 1 + \lambda^2 z^2 + \frac{\lambda^4 z^4}{6} + \frac{\lambda^6 z^6}{90} + \frac{\lambda^8 z^8}{2520} + \frac{\lambda^{10} z^{10}}{113400} + \frac{\lambda^{12} z^{12}}{7484400} + \\ & \frac{\lambda^{14} z^{14}}{681080400} + \frac{\lambda^{16} z^{16}}{81729648000} + \frac{\lambda^{18} z^{18}}{12504636144000} + \\ & \frac{\lambda^{20} z^{20}}{2375880867360000} + O(z^{22}). \end{aligned}$$

Notem que, per a  $n \leq 10$ , el coeficient de  $z^{2n}$  és  $\frac{2^n \lambda^{2n}}{(2n)!}$ . Provarem més endavant que aquest és un fet general.

De manera semblant, en calcular la solució a l'entorn de  $P_1 = T$  sotmesa a la condició inicial  $F(P_1) = -1$ , obtenim una funció que depèn, aparentment, d'un paràmetre  $\mu$  (tal que  $\mu^2 = b_2$ ):

$$\begin{aligned} F(z) = & -1 + \mu^2(z - T)^2 - \frac{\mu^4(z - T)^4}{6} + \frac{\mu^6(z - T)^6}{90} - \frac{\mu^8(z - T)^8}{2520} + \\ & \frac{\mu^{10}(z - T)^{10}}{113400} - \frac{\mu^{12}(z - T)^{12}}{7484400} + \frac{\mu^{14}(z - T)^{14}}{681080400} - \frac{\mu^{16}(z - T)^{16}}{81729648000} + \\ & \frac{\lambda^{18}(z - T)^{18}}{12504636144000} - \frac{\mu^{20}(z - T)^{20}}{2375880867360000} + O((z - T)^{22}). \end{aligned}$$

Pot semblar que ens resten paràmetres lliures, però això no és ben bé així. D'una banda, desconeixem la relació existent entre  $\lambda$  i  $\mu$ , i, de l'altra, tenim lliure el paràmetre  $T$ . Quan haurem fixat la mida de  $T$ , els paràmetres  $\lambda$  i  $\mu$  quedaran unívocament determinats.

Les propietats de la funció  $F = F_T(z)$  que es reflecteixen en la proposició que segueix són independents de l'elecció de  $T$ .

**7 PROPOSICIÓ** *La funció  $F(z)$  és holomorfa en  $\mathbb{C}$  i automorfa respecte de  $\Gamma^+$ .*

## 6 La recerca del sinus

A partir del grup  $\Gamma^+ = \langle \sigma, \tau \rangle$ , hem construït una funció automorfa,  $F(z)$ . A continuació, construirem noves funcions a partir del subgrup  $\Gamma = \langle \tau \rangle$  de  $\Gamma^+$ .

8 LEMA *Se satisfà que*

- i)  $D^2(F, z) = 2\lambda^2 F(z) = -2\mu^2 F(z)$  i, per tant,  $\lambda^2 = -\mu^2$ .
- ii)  $D(F, z)^2 = -2\lambda^2(1 - F^2(z)) = 2\mu^2(1 - F^2(z))$ .

DEMOSTRACIÓ: Per començar, observem que la derivada segona  $D^2(F, z)$  de  $F$  és, de nou,  $\Gamma^+$ -automorfa. Una inspecció dels primers termes del desenvolupament en sèrie de les funcions  $2\lambda^2 F(z)$  i  $D^2(F, z)$  a l'entorn de  $P_0$  posa de manifest que totes dues comencen igual. El mateix succeeix amb  $-2\mu^2 F(z)$  i  $D^2(F, z)$  quan s'observen els seus desenvolupaments a l'entorn de  $P_1$ . Per tant, aquestes funcions automorfes han de satisfer la mateixa equació diferencial. Com que, fixades les condicions inicials, es té que la solució de l'equació diferencial és única, les funcions han de coincidir. L'apartat ii) es dedueix de manera similar.  $\square$

En definir

$$G(z) := \frac{1}{i\sqrt{2}\lambda} D(F, z),$$

obtenim una funció que és automorfa pel grup  $\Gamma = \langle \tau \rangle$ .

El lema anterior fa palès que les funcions  $F$  i  $G$  són algebraicament dependents. Com que satisfan la relació algebraica

$$F(z)^2 + G(z)^2 = 1, \quad \text{per a tot } z \in \mathbb{C},$$

uniformitzen la circumferència.

9 PROPOSICIÓ *Els desenvolupaments en sèrie de Taylor de les funcions  $F(z)$ ,  $G(z)$  a l'entorn de l'origen són*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \lambda^{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad G(z) = -i\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

DEMOSTRACIÓ: Hem vist que  $D^2(F, z) = 2\lambda^2 F(z)$ . D'aquest fet i de la definició de  $G(z)$  se segueix que, també,  $D^2(G, z) = 2\lambda^2 G(z)$ . En aplicar de manera recurrent aquestes fórmules, obtenim que

$$\begin{aligned} D^{2n}(F, z) &= 2^n \lambda^{2n} F(z), & D^{2n}(G, z) &= 2^n \lambda^{2n} G(z), \\ D^{2n+1}(F, z) &= 2^n \lambda^{2n} D(F, z), & D^{2n+1}(G, z) &= 2^n \lambda^{2n} D(G, z). \end{aligned}$$

En tenir en compte que  $F(0) = 1$  i  $G(0) = 0$ , s'obtenen els desenvolupaments en sèrie de Taylor a l'entorn de  $P_0 = 0$ .  $\square$

## 7 La recerca dels radians

Intentarem relacionar les constants que ens manquen  $\lambda$ ,  $T$  amb alguna propietat intrínseca de la corba que estem uniformitzant. Una tria raonable és la longitud d'un arc. Calculem, doncs, la longitud  $L$  de mitja circumferència.

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + G'(F)^2} dF = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1 - F^2}} dF = \int_{-1}^{+1} \frac{dF}{G} \\ &= i\sqrt{2}\lambda \int_{F^{(-1)}(-1)}^{F^{(-1)}(1)} dt = -i\sqrt{2}\lambda T. \end{aligned}$$

Com que el valor de  $L$  és un nombre real independent del període  $2T$  i de la constant  $\lambda$ , concloem que les constants  $\lambda$ ,  $T$  han de ser inversament proporcionals. Ara ens cal triar un nom per designar la constant de proporcionalitat. Definim  $\pi$  com la constant, real, tal que

$$\lambda T = i \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

En substituir en la integral, veiem que la longitud  $2L$  de la circumferència és  $2\pi$ . El semiperíode més natural per uniformitzar la circumferència és  $T = \pi$ .

Aleshores,  $\lambda = i \frac{\sqrt{2}}{2}$ , i les funcions  $F$ ,  $G$  tenen els desenvolupaments

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Ara ens cal triar un nom per designar les funcions  $F$ ,  $G$ . Definim, d'acord amb la tradició,

$$\cos(z) := F(z), \quad \sin(z) := G(z).$$

## Referències

- [1] ALSINA, M. *Aritmètica d'ordres quaternionics i uniformització hiperbòlica de corbes de Shimura*. Tesi. Publ. Universitat de Barcelona, ISBN: 84-475-2491-4, 2000.
- [2] BAYER, P. «Uniformization of certain Shimura curves». A *Differential Galois Theory*, T. Crespo i Z. Hajto (eds). Banach Center Publications, **58** (2002), 13–26.
- [3] BAYER, P.; TRAVESA, A. «Uniformization of rational Shimura curves». [En preparació]
- [4] BAYER, P.; GUÀRDIA, J. «Uniformization of Fermat curves». [Prepublicació]
- [5] FARKAS, H. M.; KRA, I. *Riemann surfaces*. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer, 1992.

- [6] FORD, L. R. *Automorphic Functions*. 2a reimp.; 1a imp. en 1929. Chelsea, 1951.
- [7] GRAY, J. *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*. 2a ed; 1a ed. en 1947. Birkhäuser, 1986.
- [8] GUÀRDIA, J. «A fundamental domain for the Fermat curves and their quotients». *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **94** (2000), 391-396.
- [9] NEHARI, Z. *Conformal mapping*. Dover Publications, 1952.
- [10] SCHWARZ, H. A. «Ueber diejenigen Fälle, in welchen die *Gaussische* hypergeometrische Reihe eine *algebraische* Function ihres vierten Elementes darstellt». *J. für die reine und angew. Mathematik* **75** (1873), 292-335.

P. BAYER  
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES  
UNIVERSITAT DE BARCELONA  
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585  
E-08007, BARCELONA  
bayer@mat.ub.es

J. GUÀRDIA  
DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA IV  
ESCOLA UNIVERSITÀRIA POLITÈCNICA  
DE VILANOVA I LA GELTRÚ  
AVINGUDA VÍCTOR BALAGUER S/N  
E-08800 VILANOVA I LA GELTRÚ  
guardia@mat.upc.es