Sobre una llibreta d'apunts (RAMANUJAN)*

PILAR BAYER **

A la ciutat índia de Madràs, l'any 1910, hi vivia un personatge de nom Ramachandra Rao, vinculat a la societat matemàtica hindú, al qual, un bon dia, un nebot seu el tregué de les seves cabòries tot dient:

«Oncle, hi ha un visitant que parla de matemàtiques i no l'entenc, podries veure si hi ha quelcom d'interessant en el que diu?».

Ramachandra Rao qui, segons ell, es trobava en aquells moments en la plenitud del seu saber matemàtic, es mostrà condescendent, permetent que el desconegut compareixés en la seva presència. Ens diu Ramachandra Rao:

«Un tipus poc convencional, desmanegat, sense afaitar, no massa net, amb uns ulls tímids que cridaven l'atenció, comparegué davant meu amb una llibreta tota rebregada sota el braç (...). Obrí el seu quadern i començà a explicar-me algunes de les seves descobertes...

$$\begin{aligned} &7709321041217 + 32640\,\phi_{0,31}(X) = \\ &\quad = 764412173217\,Q^8 + 5323905468000\,Q^5R^2 + 1621003400000\,Q^2R^4.\text{»} \end{aligned}$$

És de suposar que de persones despenjades i sense afaitar per l'Índia, l'any 1910, en corrien força. Ara, que poguessin haver obtingut resultats semblants sense l'ajut de la més mínima màquina de calcular, ja només n'hi havia una: Srinavasa RAMANUJAN.

Quan hom intenta apropar-se a una figura com la de Ramanujan, val la pena mirar fórmules com l'anterior, a fi d'adonar-se, de bon començament, de la seva habilitat, de la seva predisposició per als nombres, que el portava a calcular hores i hores ben bé pel plaer de fer-ho.

Ramanujan, malgrat procedir d'una família de bramans, era pobre de solemni-

* Conferència inaugural del curs 85/86 de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, impartida el dia 2 d'octubre.

** Departament d'Àlgebra i Fonaments de la Universitat de Barcelona.

tat. La seva visita a R. Rao, i d'altres que en feu de semblants, tenia per objecte aconseguir una dotació econòmica suficient per viure, sense que ell per la seva part hagués de fer res i pogués, així, continuar somniant.

El que logrà, però, fou que el 1912 li fos concedida una plaça d'administratiu a les oficines de la secció comercial del port de Madràs. Evidentment, la seva afecció pels nombres havia estat mal interpretada.

Durant dos anys, Ramanujan intentà contactar amb professors europeus enviant-los cartes en les que els explicava les seves descobertes. Fou G. H. Hardy, aleshores «fellow» en el Trinity College, qui, el 1914, es preocupà del trasllat de Ramanujan a Anglaterra. Ramanujan arribà a Cambridge en el moment en què el seu clima intelectual es trobava en plena efervescència (són els anys de B. Russell, E. M. Forster, A. N. Whitehead, L. Wittgenstein, ...).

Un cop Ramanujan arribà a Anglaterra, Hardy, naturalment, va haver de sotmetre's a la prova de la llibreta. Hardy, Littlewood, Watson foren els primers en intentar de treure l'entrellat del munt de fórmules que portava Ramanujan. I hi trovaren de tot: fórmules conegudes per Laplace, per Euler o per Jacobi, redescobertes i a mig provar; afirmacions falses, afirmacions correctes sense demostració; igualtats incomprensibles que semblaven totalment noves...

Evidentment Hardy s'enfrontava amb un problema gros: com calia ensenyar matemàtiques a Ramanujan? Ens confessa el propi Hardy:

«Era impensable demanar a una persona com Ramanujan que es sotmetés a una instrucció sistemàtica a fi d'aprendre, una vegada més, les matemàtiques des del principi. Tenia por que, si insistia excessivament en matèries que Ramanujan podia trobar avorrides, podia perdre la seva confiança, podia fer malbé l'encant de la seva inspiració. Però, d'altra banda, era absolutament impossible que certs fets els continués ignorant. Alguns del seus resultats eren incorrectes; particularment els que feien referència a la distribució de primers (...). Era impossible permetre que anés pel món suposant que tots els zeros de la funció zeta eren reals. En conseqüència, calia intentar la seva instrucció i hom pot dir que me'n vaig sortir, si bé en aquest procés és obvi que va ésser molt més el que jo vaig aprendre d'ell que el que ell aprengué de mi.»

Ací hi trobem una imatge especialment captivadora: la de Hardy amb Ramanujan; la relació mestre-alumne aprenent mutuament l'un de l'altre.

LA FUNCIÓ τ

És aquesta una de les creacions més genuïnes de Ramanujan. Per introduir-la, començarem per considerar una corba el·líptica d'equació

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3,$$

i discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \qquad (\neq 0).$$

Ací, g_2, g_3 els podem pensar com simples nombres complexos, o bé, en forma paramètrica, com valors presos per certes funcions de variable complexa:

$$g_2 = g_2(z) = 60G_4(z),$$
$$g_3 = g_3(z) = 140G_6(z),$$

essent $G_{2k}(z)$ les anomenades sèries d'Eisenstein de pes $2k$:

$$G_{2k}(z) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz + n)^{2k}} \qquad (\text{Im } z > 0).$$

Si fem $q = e^{2\pi i z}$ i pensem Δ como una funció de q, Jacobi coneixia ja la fórmula

$$\Delta = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} \qquad (|q| < 1),$$

donant l'expressió de Δ com un producte infinit. Desenvolupant aquest obtenim

$$(2\pi)^{-12}\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n.$$

La funció τ de Ramanujan s'obté en fer correspondre a cada coeficient n el valor de $\tau(n)$.

Els trenta primers valors de τ foren calculats pel propi Ramanujan. Així tenim

$\tau(1) = 1$	$\tau(5) = 4830$	$\tau(9) = -113643$
$\tau(2) = -24$	$\tau(6) = -6048$	$\tau(10) = -115920$
$\tau(3) = 252$	$\tau(7) = -16744$	. . .
$\tau(4) = -1472$	$\tau(8) = 84480$	$\tau(30) = -29211840.$

De l'observació d'aquests resultats, Ramanujan deduí que la funció τ tindria les propietats següents:

i) Caràcter multiplicatiu:

$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$, si mcd $(m,n) = 1$,

ii) $\tau(p^{\alpha+1}) = +\tau(p)\tau(p^{\alpha}) - p^{11}\tau(p^{\alpha-1})$, si p és primer,

iii) $|\tau(n)| < n^{11/2}\sigma_0(n)$, essent $\sigma_0(n)$ el nombre de divisors de n.

D'aquestes tres propietats, la darrera, que és la més cèlebre, és la coneguda amb el nom de «Conjectura de Ramanujan».

Copçar el «sentit» de la conjectura de Ramanujan no és fàcil; hom pot preguntar-se quin interès hi pot haver en conèixer i afitar una funció definida d'una manera tan indirecta. La millor resposta a aquesta pregunta continua trobant-se, a la meva manera d'entendre, a les obres completes de Ramanujan.

Allí, a l'article titulat «On certain Arithmetical Functions», de l'any 1916, i del mig d'un grapat de fórmules, hom pot deduir la següent:

$$r_{24}(n) = \frac{16}{621}\,\sigma^*_{11}(n) + \frac{128}{691}\left\{(-1)^{n-1}259\tau(n) - 512\tau(n/2)\right\} \ ,$$

on, cal entendre, $\tau(x) = 0$ quan $x \notin N$,

$$\sigma^*_\alpha(n) := \begin{cases} \sigma_\alpha(n) = \sum\limits_{d|n} d^\alpha & \text{si } n \text{ és senar} \\ \sum\limits_{2d|n} d^\alpha - \sum\limits_{(2d+1)|n} d^\alpha & \text{si } n \text{ és parell} \end{cases}$$

i, en general,

$$r_k(n) = \# \left\{(x_i) \in Z^k \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = n\right\} .$$

Com que $\sigma^*_{11}(n) \geq Cn^{11}$, veiem doncs que el paper de la conjetura de Ramanujan és el de controlar el «terme d'error» a l'hora de comptar de quantes maneres un nombre pot ésser escrit com suma de 24 quadrats (!).

JUSTIFICACIÓ DE LES FÓRMULES RECURRENTS PER AL CÀLCUL DE τ

Posem, d'acord amb Jacobi,

$$\theta(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i m^2 z} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i m^2 z} = \sum_{n=0}^{\infty} r_1(n) q^n .$$

(Im $z > 0$). Si elevem la funció theta a la seva potència k-èssima, obtenim

$$\theta^k(z) = \sum_{m_i \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i (m_1^2 + \ldots + m_k^2)z} = \sum_{n=0}^{\infty} r_k(n) q^n .$$

És a dir, la funció θ^k és la funció «generadora» del nombre de representacions d'un sencer n com suma de k quadrats.

És un fet clàssic que la funció theta satisfà, per a cada k, l'equació funcional

$$\theta^{4k}(\gamma z) = (cz + d)^{2k} \theta^{4k}(z) \qquad (\text{Im } z > 0)$$

i per a tota matriu $\gamma \in \Gamma_0(4)$. Ací

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod 4 \right\}.$$

L'acció de $SL_2(\mathbf{Z})$ sobre el semiplà superior H ve donada, com d'habitud, per

$$z \to \gamma z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Els grups $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, $\Gamma_0(4)$ són exemples de «grups fucsians», ben coneguts per Poincaré. L'acció d'aquests grups sobre el semiplà superior dóna lloc a espais quocients $\Gamma\backslash H$, compactificables mitjançant l'adjunció d'un nombre finit de punts, anomenats «puntes» o «punts parabòlics» de Γ. Així $SL_2(\mathbf{Z})$ té un únic punt parabòlic, $\Gamma_0(4)$ en té tres, etc.

Hom sol agrupar totes les funcions que es comporten com θ^{4k} (i. e., són holomorfes a H, satisfan el mateix tipus d'equació funcional i «són holomorfes» a l'entorn de cada punta) en un espai vectorial complex $M_{2k}(\Gamma)$, anomenat l'espai de formes automorfes de pes $2k$ respecte de Γ. Així, per exemple, $\theta^{4k} \in M_{2k}(\Gamma_0(4))$, $G_{2k} \in M_{2k}(SL_2(\mathbf{Z}))$, $\Delta \in M_{12}(SL_2(\mathbf{Z}))$.

Especialment interessant és el subespai de $M_{2k}(\Gamma)$ format per les formes automorfes que s'anul·len a totes les puntes. L'espai en qüestió es representa per $S_{2k}(\Gamma)$ i els seus elements són les anomenades formes parabòliques. Observem que $\Delta \in S_{12}(SL_2(\mathbf{Z}))$.

Hecke, l'any 1927, provà un teorema general segons el qual

$$M_{2k}(\Gamma) = E_{2k}(\Gamma) \oplus S_{2k}(\Gamma),$$

essent $E_{2k}(\Gamma)$ el subespai de l'espai de formes automorfes generat per les sèries d'Eisenstein. El subespais de formes parabòliques s'interpreten bé en termes de la geometria de la superfície de Riemann compacta $\Gamma\backslash H$, car

$$\begin{aligned} S_{2k}(\Gamma) &\simeq H^0(\overline{\Gamma/H}, \Omega^{\otimes k}) \\ f &\to f(dz)^k. \end{aligned}$$

En particular, $\dim_{\mathbf{C}} S_2(\Gamma) = g$, essent g el gènere de $\overline{\Gamma\backslash H}$. La dimensió d'aquests espais es calcula via el teorema de Reimann-Roch.

Com que $\dim S_{12}(SL_2(\mathbf{Z})) = 1$, veiem que $(2\pi)^{-12}\Delta$, la funció generadora de la τ de Ramanujan és una base de l'espai de formes parabòliques de pes 12 per $SL_2(\mathbf{Z})$.

El fet que $S_2(\Gamma_0(4)) = S_4(\Gamma_0(4)) = 0$, fa veure el perquè existeixen fórmules senzilles per al càlcul de $r_4(n)$, $r_8(n)$:

$$r_4(n) = 8\sigma(n)$$
$$r_8(n) = 16\sigma_3^*(n) \ ,$$

car no comporten «terme d'error».

Limitem-nos ara, per simplificar, al cas $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$. Hecke, l'any 1937, definí per a cada nombre natural n uns operadors $T(n)$ a M_{2k}, que deixaven invariants els subespais E_{2k} i S_{2k}. Hecke provà que els seus operadors tenien les propietats:

i) Multiplicativa:

$T(n)T(m) = T(m)$, si mcd $(n,m) = 1$,

ii) $T(p^{\alpha+1}) = +T(p)T(p^\alpha) - p^{2k-1}T(p^{\alpha-1})$, si p és primer.

iii) Si $f(q) = q + \sum_{n=2}^{\infty} a(n)q^n \in S_{2k}$ era una vector propi de tots el operadors de Hecke:

$$T(n)f = \lambda(n)$$

per a tot n, llavors $\lambda(n) = a(n)$.

Com que $(2\pi)^{-12}\,\Delta$ resulta ésser un vector propi normalitzat de tots els operadors de Hecke, car la $\dim_{\mathbf{C}} S_{12} = 1$, les fórmules recurrents predites per Ramanujan per a l'obtenció de $\tau(n)$ són ara conseqüència directa de les propietats *i*), *ii*) i *iii*) anteriors.

VERS L'EXACTITUD: DIACRONIA DE LA CONJECTURA DE RAMANUJAN

Escrivim la conjectura de Ramanujan sota la forma

$$\tau(n) = O(n^{11/2+\varepsilon}), \qquad \text{per a tot } \varepsilon > 0.$$

Fins l'any 1939 hom havia obtingut les estimacions següents de τ:

$\tau(n)$	$= O(n^7)$	Ramanujan, 1916
	$= O(n^6)$	Hardy y Littlewood, 1918
	$= O(n^{5.875+\varepsilon})$	Kloosterman, 1927
	$= O(n^{5.83+\varepsilon})$	Davenport, 1933
	$= O(n^{5.8})$	Rankin, 1939.

Les demostracions dels resultats precedents són sempre analítiques, fent ús en elles d'estimacions fines d'integrals (per mitjà del mètode del cercle, per exemple). Si hom es val únicament d'aquests recursos, la fita donada per Rankin l'any 1939 continua essent la millor.

Per rebaixar en $0.3 - \varepsilon$ l'exponent de n fou necessari un canvi de perspectiva:

A. Weil intuí en els anys 50 el camí que hauria de portar, finalment, a la demostració de la conjectura de Ramanujan. El valor de $\tau(p)$ havia de poder ésser escrit com

$$\tau(p) = \alpha_p + \overline{\alpha}_p,$$

amb α_p, $\overline{\alpha}_p$ nombres complexos conjugats, valors propis d'un endomorfisme de Frobenius operant sobre un grup onzè de cohomologia. Amb altres paraules, la conjectura de Ramanujan havia d'encaixar dins el marc general de la teoria, genuïna de Weil, relativa a la situació del zeros i dels pols de les funcions zeta de les varietats algebraiques definides sobre un cos finit, amb la cual cosa hom sabría que

$$|\alpha_p| = |\overline{\alpha}_p| = p^{11/2}.$$

Com és conegut, A. Grothendieck creà al llarg de 15 anys el llenguatge i les tècniques necessàries per portar a terme el programa de Weil.

P. Deligne fou capaç de fer-les servir provant (en dues etapes, la del 1968 i la del 1974) la validesa de la conjectura de Ramanujan.

Seixanta anys d'esforç de la comunitat matemàtica posaven de manifest que Ramanujan havia sabut crear un problema viu, un problema bell.