# Les sèries en Newton

Josep Pla i Carrera

## 1. Aproximació al concepte de funció

Des que Descartes a la *Geométrie* (1637) introdueix la diferència entre *corbes geomètriques i corbes mecàniques*, essent les primeres aquelles que poden expressar-se per mitjà d'equacions *purament algèbriques*, fins que Euler al capítol V de la seva *Introductio* (1748) identifica *funció amb desenvolupament en sèrie de potències*, unificant així el tractament de les funcions algèbriques i transcendents, han passat exactament cent onze anys.

En aquest període tots els matemàtics s'han anat convencent de la necessitat de disposar d'*expressions analítiques* per a les corbes —és a dir, han anat *oblidant les corbes per atansar-se a les funcions*, que admeten un millor tractament algorítmic.

Será, però, Newton qui, com diu Morris Kline:

> *considerarà les sèries com* quelcom inseparable *del seu mètode de fluxions perquè és l'única forma que posseix per tractar les funcions algèbriques complicades i àdhuc les transcendents a l'hora de diferenciar-les i d'integrar-les.*[1]

El mateix Newton és conscient del fet que *a la base del seu nou mètode* hi ha les sèries —la *nova anàlisi*— i així ho exposa ben clarament en les cartes *Prior* i *Posterior*, adreçades a Leibniz, a través d'Oldenburg, i datades en 1676. Han passat quaranta anys des de l'aparició de la *Geomètrie* de Descartes.

Constitueixen uns documents importants —i els farem servir de pauta en aquesta exposició, tot barrejant-los i canviant-ne l'ordre— perquè són els únics documents de Newton que tingueren una certa difusió, pel fet d'arribar fins a Leibniz (juntament amb el *The October 1666 Tract on Fluxions* que era conegut pels íntims de Newton), ja que els tractats *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas (1669), De Methodis Serierum et Fluxionum (1671),* no foren publicats fins l'any 1771, el primer, i 1736, el segon.

Aquests dos tractats, però, ens serviran per completar les llacunes i per evidenciar les insinuacions de les cartes a Olbenburg. Fixem-nos, de passada, que ambdós contenen el mot *sèrie* en el títol, l'un implícitament, explícitament l'altre. Finalment

[1] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* 436, Oxford University Press, Oxford, 1972.

farem ús d'una col·lecció de *manuscrits* de Newton que Whiteside, en *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, ha agrupat amb el títol d'*Annotations to Wallis* i que són de 1664-1665.

## 2. La primera declaració

Newton en la carta del 13 de juny de 1676 (*carta prior*) diu que

> *envia alguns resultats que se li van ocórrer en relació a les* sèries infinites[2]

en resposta a Leibniz que afirmava

> *haver trobat un mètode per reduir quantitats a* sèries[3]

i, tot seguit, Newton afegeix

> Les fraccions es converteixen en sèries infinites per divisió. Les quantitats irracionals per extracció d'arrels *si fem les operacions amb símbols de la mateixa manera que es fan numèricament*[4]

i, a continuació, dóna *«el fonament d'aquestes reduccions»* que no és altre que el famós teorema del binomi.

Aquest text és important ja que, amb la *carta posterior*, vincula la *seva àlgebra de l'infinit* amb el *teorema del binomi*. Els seus tractats *De Analysi* i *De Methodis*, basats ambdós en el mètode de les sèries, no fan cap referència al teorema del binomi: es basen en la *nova àlgebra.*[5]

El *De Analysi* és ben clar:

> *Tot allò que l'anàlisi comuna (l'àlgebra) realitza per mitjà d'equacions d'un cert nombre* finit *de termes (polinomis)* aquest nou mètode *(nova anàlisi)* pot fer-ho amb equacions infinites, *rao per la qual li he posat el mateix nom d'anàlisi. Perquè el raonament no és pas menys cert en aquest cas que en l'altre, ni les equacions menys exactes... Podem considerar tot això, amb tota justícia, com part de l'*art analítica *amb l'ajut de la qual podem determinar d'una manera exacta i* geomètrica *les àreas, les longituds, etc... de les corbes.*[6]

Així, doncs, el mateix Newton ens ofereix una exposició de la seva evolució:

(1) la *base* del seu nou mètode és el teorema del binomi;

[2] H. W. Turnbull, *The Correspondence of Isaac Newton* (CN), vol. II, 32. Cambridge University Press, Cambridge, 1959-1977.
[3] H. W. Turnbull, CN, vol. II, 17.
[4] H. W. Turnbull, CN, vol. II, 32.
[5] Newton no publicà mai res que fes referència al teorema del binomi, ni sembla tampoc que tingués cap intenció de fer-ho.
[6] D. T. Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton* (PN), vol. II, 241. Cambridge University Press, Cambridge, 1967-1976.

(2) *elaboració* del nou mètode: una nova anàlisi;
(3) una àlgebra *útil* en qüestions de càlcul (sobretot *integral*).

Ara ens toca a nosaltres de seguir aquest esquema i veure l'evolució del pensament de Newton en relació amb el mètode de les sèries infinites i la seva relació amb el càlcul de les corbes.

## 3. El binomi de Newton

Com aconsegueix Newton establir el teorema del binomi, ens ho explica ben clarament ell mateix en la carta *posterior* (de 24 d'octubre de 1676 a Oldenburg) i podem constatar-ho perfectament seguint, a més, les *Annotations to Wallis.*

Tot començà quan Newton analitzà l'obra de Wallis i, en particular, l'*Arithmetica Infinitorum* (1655). Aquesta anàlisi Newton la féu en 1664-1665.

Wallis, després d'haver *quadrat totes les potències* d'exponent arbitrari, llevat del cas en què l'exponent era −1, es *proposà de quadrar el cercle*

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2}\, dx$$

i ho fa seguint el mètode d'*interpolació*, propi de la seva obra. Diu

*... a la progressió*

$$(1 - x^2)^0, \quad (1 - x^2)^1, \quad (1 - x^2)^2, \quad (1 - x^2)^3, \quad \ldots$$

*li correspon la* successió *(d'*àrees*)*

$$1, \quad 2/3, \quad 8/15, \quad 48/105, \quad \ldots$$

*i la qüestió que cal resoldre consisteix en determinar la llei de formació de la segona successió a fi de poder-hi interpolar el valor mitjà.*[7]

Wallis, però, no és prou hàbil per fer-ho i es veu obligat a recòrrer a la successió d'inversos

$$\left[\int_0^1 (1 - x^{1/p})^q\, dx\right]^{-1}$$

que tabula per $0 < p, q \leq 10$ i és de l'anàlisi d'aquesta taula de valors que Wallis aconsegueix d'establir una llei de formació de les files, llei que *és universalment vàli-*

[7] H. W. Turnbull, CN, vol. II, 130.

*da* i, per tant, val també per a $p$, $q = 1/2$. Així és com Wallis aconsegueix el que busca.

Wallis solament pretenia de quadrar el cercle.[8]

Newton reprén el problema de Wallis i el reprén allí on Wallis el deixà:

> ... *al començament mateix de les meves recerques matemàtiques, quan vaig entrar en contacte amb l'obra del nostre cèlebre Wallis,* vaig considerar les sèries, la interpolació de les quals *m'havia de permetre d'aconseguir les* àrees del cercle i de la hipèrbola.[9]

i retorna al punt que Wallis no sabé resoldre. Considera, de bell nou, la successió

$$\ldots,\ (1-x^2)^{-1},\ (1-x^2)^{-1/2},\ (1-x^2)^0,\ (1-x^2)^{1/2},\ (1-x^2)^1,\ (1-x^2)^{3/2},\ (1-x^2)^2,\ \ldots$$

i, per tal d'aconseguir la llei de formació de la progressió d'*arees* considera d'antuvi els exponents sencers $\geq 0$:

$$1, \quad 1-x^2, \quad 1-2x^2+x^4, \quad 1-3x^2+3x^4-x^6, \quad \ldots$$

i llurs àrees:

$$x, \quad x-\frac{1}{3}x^3, \quad x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5, \quad x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7, \quad \ldots$$

i obté:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+x$ | 1 | **1** | 1 | **1** | 1 | **1** | 1 | **1** ... |
| $-x^3/3$ | 0 | **1/2** | 1 | * | 2 | * | 3 | * ... |
| $+x^5/5$ | 0 | **–1/8** | 0 | * | 1 | * | 3 | * ... |
| $-x^7/7$ | 0 | **1/16** | 0 | * | 0 | * | 1 | * ... |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . ... |
| . | . | . | . | . | . | | . | . ... |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . ... |

que cal *completar en la columna segona* si volem l'àrea del cercle. Newton sap completar-la en 1664-1665.

Per calcular l'àrea de la hipèrbola $\int_0^x (1+t)^{-1}\,dt$, cal recórrer a la taula de coeficients de les integrals

[8] Hom pot trobar una excel·lent exposició de l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis en l'article de T. P. Nunn del *Math., Gaz.*, 5 (1910-1911).

[9] H. V. Turnbull, CN, vol. II, 130.

$$\int_0^x (1+t)^r\,dt,\ r \geq 0,$$

i completar-la. També aconsegueix de fer-ho.

Així doncs, Newton, *per interpolació*, ha aconseguit

$$\ln(1+x) = \int_0^x dt/(1+t),$$

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,dt,$$

però Newton *no disposa pas encara de la llei del binomi.*

El teorema del binomi, però, no es fa pas esperar: el trobem en un treball de 1665,[10] on Newton estudia directament

$$a^2/(b+x)$$

interpolant

$$\begin{array}{llllll} a^2/(b+x) & a^2(b+x)^0, & a^2(b+x)^1, & a^2(b+x)^2, & a^2(b+x)^3, \ldots \\ & a^2\cdot 1, & a^2\cdot(b+x), & a^2\cdot(b^2+2bx+x^2), & \ldots \end{array}$$

i obté la *llei del binomi*, llei que dóna per mitjà de les *diferències finites*. Segons Newton, la *taula dels coeficients segueix la llei:*

$$\begin{array}{ccccccc} x^0 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \ldots \\ x^1 & \beta & \beta+\gamma & \beta+2\gamma & \beta+3\gamma & \beta+4\gamma & \ldots \\ x^2 & \delta & \delta+\epsilon & \delta+2\epsilon+\psi & \delta+3\epsilon+3\psi & \delta+4\epsilon+6\psi & \ldots \\ x^3 & \pi & \pi+\rho & \pi+2\rho+\sigma & \pi+3\rho+3\sigma+\tau & \pi+4\rho+6\sigma+4\tau & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Si ara volem conèixer $(b+x)^{-1}$ en la *fila tres de la taula,* caldrà

$$\begin{array}{ccccc} \delta & \delta+\epsilon & \delta+2\epsilon+\psi & \delta+3\epsilon+3\psi & \delta+4\epsilon+6\psi \\ * & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

on * denota el terme del desenvolupament de $a^2/(b+x)$ que s'està cercant; si volem conèixer $(b+x)^{1/2}$ en la *fila tres de la taula,* caldrà

$$\begin{array}{cccccc} \delta & \delta+\epsilon & \delta+2\epsilon+\psi & \delta+3\epsilon+3\psi & \delta+4\epsilon+6\psi & \\ 0 & * & 0 & * & 1 & ; \end{array}$$

[10] Meravellosament comentat per D. T. Whiteside en *Mat. Gaz.*, 45 (1965).

si volem conèixer $(b + x)^{1/3}$ en la *fila tres de la taula,* caldrà

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $\delta + \epsilon$ | $\delta + 2\epsilon + \psi$ | $\delta + 3\epsilon + 3\psi$ | $\delta + 4\epsilon + 6\psi$ | $\delta + 5\epsilon + 10\psi$ | $\delta + 6\epsilon + 15\psi$ |
| 0 | * | * | 0 | * | * | 1 |

De l'anàlisi d'aquestes interpolacions, Newton n'obté l'expressió de l'i-èssim número combinatori

$$\binom{x/y}{i} = \frac{1 \times x \times x-y \times x-2y \times x-3y \times x-4y \times x-5y \times \ldots}{1 \times y \times\ 2y\ \times\ 3y\ \times\ 4y\ \times\ 5y\ \times\ 6y\ \times \ldots}$$

amb $i$ factors al numerador i al denominador.

Aquesta troballa de Newton, com ja hem dit abans, solament la farà pública en les cartes a Oldenburg, on afegeix

> Abans no vaig conèixer *el mètode d'extracció d'arrels,* vaig conèixer *el mètode general de resolució de radicals per sèries.*[11]

A continuació observa que, si *elevem al quadrat* $(1 - x^2)^{1/2}$, obtenim $1 - x^2$ i, si elevem $(1 - x^2)^{1/3}$ al cub, obtenim $1 - x^2$ i, tot seguit, es planteja

> *... si era possible d'emprar les tècniques aritmètiques.*[12]

## 4. L'anàlisi de l'infinit

Així és com Newton arriba a la seva *àlgebra de les sèries:*

— $1/(1 \pm x)$ s'obté *dividint* com si fossin nombres;
— $(1 \pm x)^{1/2}$ s'obté *fent l'arrel quadrada* com si fossin nombres.

Així, precisament, comencen el *De Analysi* i el *De Methodis.*[13] Hi afegeix el mètode de Viète i Oughtred de *resolució d'equacions* millorat. La seva exposició la trobem insinuada en les cartes a Oldenburg i completament explicitada en els dos tractats esmentats. És el *mètode d'aproximació d'arrels de Newton.*

En primer lloc ofereix un exemple numèric: $y^3 - 2y - 5 = 0$. La primera aproximació és $y_0 = 2$; ara fem $y_1 = 2 + p$, i obtenim:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y^3$ | 8 | $+12p$ | $+6p^2$ | $+p^3$ |
| $-2y$ | $-4$ | $-\ 2p$ | | |
| $-5$ | $-5$ | | | |
| 0 | $-1$ | $+10p$ | $+6p^2$ | $+p^3$ |

[11] H. W. Turnbull, CN., vol. II, 130.
[12] H. W: Turnbull, CN., vol. II, 132.
[13] D. T. Whiteside, PN., vol. III, 32-33.

Eliminem els termes *no lineals* en $p$ i obtenim $p \sim +1/10$; ara fem $p = 0.1 + q$, i obtenim:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $p^3$ | $0.001$ | $0.03q$ | $0.3q^2$ | $q^3$ |
| $6p^2$ | $0.06$ | $1.2\ q$ | $6\ q^2$ | |
| $10p$ | $1$ | $10\ q$ | | |
| $-1$ | $-1$ | | | |
| $0$ | $0.61$ | $11.23q$ | $6.3q^2$ | $q^3$ |

Eliminem els termes *no lineals en $q$* i obtenim $q \sim -0.0054$; etc...

A continuació ho aplica a l'equació: $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$. Fa $x = 0$ i obté el primer valor aproximat d'$y$: $y_0 = a$. Així doncs: $y_0 = a$, i a continuació, fent $y_1 = a + p$, obtenim

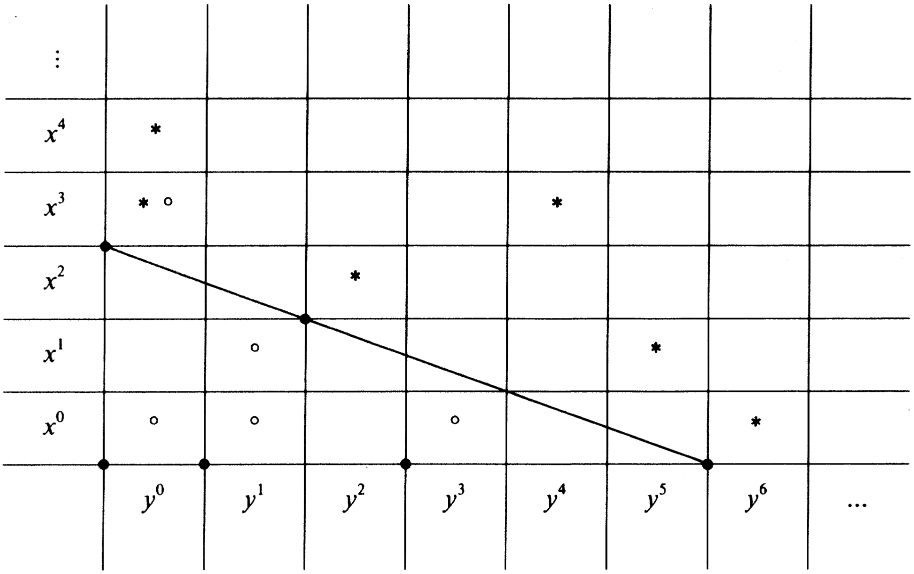
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y^3$ | $a^3$ | $3a^2p$ | $3ap^2$ | $p^3$ | | | |
| $a^2y$ | $a^3$ | $a^2p$ | | | | | |
| $-2a^3$ | $-2a^3$ | | | | | | |
| $axy$ | | | | | $a^2x$ | $apx$ | |
| $-x^3$ | | | | | | | $-x^3$ |
| $0$ | $0$ | $4a^2p$ | $3ap^2$ | $p^3$ | $a^2x$ | $apx$ | $-x^3$ |

*Ara eliminem els termes* no lineals en $p$ i en $x$ *i obtenim:*

$$4a^2x + a^2x \sim 0; \text{ d'on: } p \sim -x/4.$$

Ara fem $p = q - x/4$, repetim el procés i obtenim: $q \sim x^2/64a$, etc...

En la carta *prior* a Oldenburg, Newton adverteix que la dificultat d'aquest procediment rau en la primera aproximació i en la carta *posterior* dóna el *mètode del parallelògram* que trobem detallat en el *De Methodis* i que consisteix en el següent: considerem el pla quadriculat i considerem un dels vèrtexs com origen, i d'ell estant enumerem les quadrícules; això ens permet d'identificar una quadrícula per mitjà d'un parell de nombres naturals: el quadrat $\langle i,j \rangle$, $i,j = 0, 1, 2, \ldots$ ès el quadrat de vèrtex inferior esquerre $\langle i\text{-}1, j\text{-}1 \rangle$ i de vèrtex superior dret $\langle i, j \rangle$. [Veieu la figura que segueix.]




A continuació, donat un polinomi, com ara:

$$y^6 - 5xy^5 + 1/a\, x^3y^4 - 7a^2\, x^2y^2 + 6a^3\, x^3 + b^2\, x^4 = 0,$$

col·loquem un senyal en el quadrat <*i,j*> si, i només si, el terme $x^iy^j$ apareix en el polinomi —es a dir, el seu coeficient és no nul. Fet això, considerem el vèrtex inferior esquerre del quadrat més inferior de la columna de més a l'esquerra possible amb un senyal i el vértex inferior esquerre del quadrat més inferior possible de la columna de més a la dreta possible amb un senyal; a continuació fem una línea recta que passi per aquest dos vèrtexs; cal considerar el polinomi format pels termes, els coeficients dels quals han permès de senyalar els quadrats que la línea en qüestió toca.

En el cas del polinomi de més amunt —hem senyalat amb * els quadrats associats als monomis amb coeficient no nul— s'obté:

$$y^6 - 7a^2\, x^2y^2 + 6a^3\, x^3 = 0$$

que cal resoldre. Si aquest mètode l'apliquem a l'exemple que Newton ofereix en la carta a Oldenburg per tal de presentar el mètode d'aproximació d'arrels —hem marcat amb ° els quadrats ocupats per aquest exemple— s'obté la solució anterior.

En la carta *posterior*, hi trobem encara *dos mètodes d'inversió de sèries* que, de bell nou, s'inspiren en les tècniques de l'àlgebra: en concret s'inspiren en el mètode de *reducció.*[14] Newton ofereix dos *teoremes*, però els motiva amb dos exemples previs: donem un d'aquests exemples per posar de manifest la tècnica algèbrica de Newton:

*si* $z = x + 1/2x^2 + 1/3\,x^3 + 1/4\,x^4 + \ldots$, *fem:*

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + x^3 + 11/12\,x^4 + \ldots \\ z^3 &= x^3 + 3/2\,x^4 + \ldots \\ x^4 &= x^4 + \ldots \end{aligned}$$

i, reduïnt:

$$x = z - 1/2\,z^2 + 1/6\,z^3 - 1/24\,z^4 + \ldots$$ [15].

## 5. Les aplicacions

Newton, doncs, ha elaborat una *àlgebra de les sèries* i n'és *conscient*, com hem exposat —la introducción al *De Methodis* és essencial en aquest aspecte—, però el que realment interessa a Newton, com ell mateix ens ha dit, és la *utilitat* d'aquesta *nova anàlisi.*

En la carta *prior* és ben clar. Diu:

> ... *Aquest mètode (reduir quantitats a equacions infinites)* serveix *per calcular àrees i longituds de corbes, així com superfícies i volums de sòlids de revolució i llurs centres de gravetat;*[16]

i més avall:

> ... *de tot això deduïm que* els límits de l'anàlisi s'han eixamplat *gràcies a aquestes equacions infinites i* així s'arriba a tots els problemes, *amb excepció dels de Diofant i problemes anàlegs...*[17]

Nosaltres, però, completarem la presentació que de la seva *nova anàlisi* ens fa Newton, tot considerant els exemples del *De Analysi:*[18]

[14] Newton aplicarà també una tècnica semblant a la resolució de les equacions diferencials o als *problemes inversos*, els quals segons la resposta de Leibniz a la carta *prior* no poden pas ésser resolts per aquesta *nova anàlisi* de Newton.

[15] H. W. Turnbull, CN., vol. II, 39.

[16] H. W. Turnbull, CN., vol. II, 39.

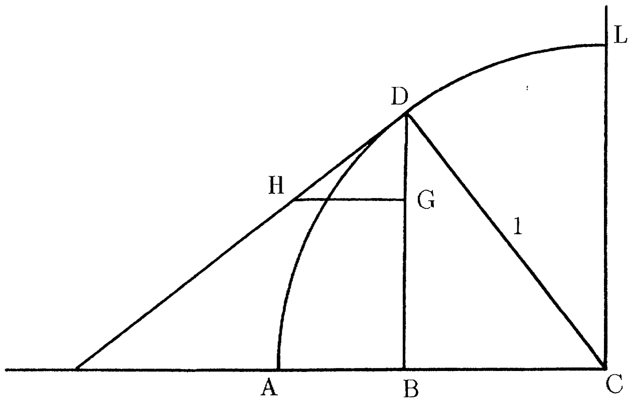
[17] És precisament aquesta afirmació tan rotunda i optimista la que posarà en qüestió Leibniz en la seva resposta de 27 d'agost; diu:

> *No sóc pas de la seva opinió que, mitjançant les sèries infinites, sigue possible de resoldre* la major part de les dificultats matemàtiques, *excepció feta de Diofant. Efectivament, entre elles se'n troben algunes de tan extraordinàries i embolicades que llur solució no depèn pas ni de les equacions ni de les quadratures com, per exemple entre molts d'altres, ho són els problemes del* mètode invers al de les tangents *que àdhuc el propi Descartes es confessa incapaç de resoldre...*

[18] D. T. Whiteside, PN., vol. II, 237-239.

**a. Càlcul del $\sin^{-1} x$.**

Cerquem el valor de l'arc *LD* (figura adjunta) que té *sinus* $BC = x$ ($CD = 1$).




Considerant l'element d'arc *DH*, obtenim:

$$DH : 1 :: GH : DB;$$

d'on, amb anotacions actuals, $ds = dx/(1 - x^2)^{-1/2}$. Per tant:

$$s = \int_0^x dx/(1 - x^2)^{-1/2} = \sin^{-1} x.$$

*Ara desenvolupem en sèrie, usant l'àlgebra de l'infinit, i integrem terme a terme.*[19]

**b. Àrea de la hipèrbola.**

Cal quadrar la hipèrbola, l'equació de la cual és: $y = 1/(1 + x)$.

Desenvolupem, per divisió, en sèrie i integrem terme a terme. Així s'obté l'expressió *analítica* de $z = \ln (1 + x)$.

[19] Calen dues observacions: (*i*) aquesta no és la presentació de Newton, és més simple, si bé respecta perfectament la línea seguida per Newton; (*ii*) en ella, hi apareix el triangle diferencial d'una forma anàloga a com l'usarà Leibniz en 1675.

**c. Donada l'àrea $z = \ln(1 + x)$, trobar $x$.**

Cal invertir la sèrie obtinguda en *b*:

$$\ln(1 + x) = x - 1/2\, x^2 + 1/3\, x^3 - 1/4\, x^4 + 1/5\, x^5 - \ldots$$

En el *De Methodis* fa

$$x - 1/2\, x^2 + 1/3\, x^3 - 1/4\, x^4 + 1/5\, x^5 - z = 0$$

i resol, usant el seu mètode de resolució d'equacions *x en funció de z*. En la carta *posterior,* com ja hem indicat, ens ofereix un mètode directe d'inversió de sèries.

**d. Càlcul de *sin z*.**

És un nou cas d'inversió, però ara de la sèrie obtinguda en **a**.

**e. Càlcul de *cos z*.**

Aplica directament la seva nova àlgebra a

$$y = \cos z = (1 - \sin^2 z)^{-1/2} = (1 - x^2)^{-1/2}.$$

Així Newton disposa d'*expressions analítiques* de les *corbes transcendents elementals* (i també d'altres com ara $x \cdot \mathrm{tg}\, x$, $x \cdot \mathrm{ct}\, x$, ...); li serveixen per estudiar les *corbes mecàniques* com ara la cicloide, la quadratiu, etc. ..., com podem veure en el *De Analysi* i en el *De Methodis.*[20]

## 6. Conclusió

S'acompleix així l'objectiu fixat i que resumim amb les paraules de Carl B. Boyer:

> *Newton havia descobert, amb aquests exemples, quelcom més important que no pas el teorema del binomi; havia descobert que l'anàlisi de les sèries infinites tenia la mateixa consistència interna que l'àlgebra de les quantitats finites i que estava regida per les mateixes lleis generals. Les sèries infinites* no s'havien pas de considerar *en endavant com a simples recursos d'aproximació, sinó que* eren formes alternatives de les funcions que representaven.[21]

[20] Hom pot consultar l'obra de C. H. Edwards, Jr., 1979, 200-222.
[21] C. B. Boyer. *A History of Mathematics,* 1968, 432.

## Bibliografia


Babini, J. *Newton-Leibniz: El cálculo infinitesimal.* Ed. Univ. de Buenos Aires, Argentina, 1972.

Boyer, C. B. *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, Nova York, 1968. (Traducció castellana a Alianza Editorial. Madrid, 1986.)

Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus.* Springer Verlag. Berlin, 1979.

Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford Univ. Press. New York, 1972.

Newman, J. R. *The World of the Mathematics.* Simon & Schuster, Inc. New York, 1956. (Traducció castellana a Ediciones Grijalbo, S. A. Barcelona, 1968, vol. IV.)

Nunn, T. P. «The arithmetic of infinites». *Math. Gaz.,* 5 (1909-1911), 345-356, 377-386.

Scriba, C. J. «The inverse method of tangents: A dialogue between Leibniz and Newton». *Arch. Hist. Exact Sci.,* 2 (1962), 113-137.

Turnbull, H. W. et alt. *The Correspondence of Isaac Newton.* Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1959-78.

Whiteside, D. T. «Newton's Discovery of the general binomial theorem». *Math. Gaz.,* 45 (1961), 175-180.

Whiteside, D. T. «Patterns of mathematical thought in the later 17th century». *Arch. Hist. Exact Sci.,* 1, (1960-1962), 179-388.

Whiteside, D. T. *The Mathematical Papers of Isaac Newton.* Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1967-1981.



*Departament de Lògica, Història i Filosofía de la Ciencia. Universitat de Barcelona*