UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

ESTUDI SOBRE LES SUPERFÍCIES DE RIEMANN COMPACTES

Autor: Marçal Gené Verdés

Director: Dr. Ricardo García López
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, Gener 2019

Abstract

The work presented is divided in three sections: the first is about covering spaces, placing the emphasize on the universal covering spaces, which are simply connected; the second describes several properties of Riemann's surfaces, which are topological manifolds with an analytic structure; the last describes an approach to the study of compact Riemann's surfaces by means of their universal covering space and, for the ones of genus 1, we classify the possible analytic structures on a topological torus.

Resum

El treball consta de tres parts diferenciades: la primera gira entorn als espais recobridors, d'entre els quals ens cetrem en l'estudi de l'espai recobridor universal, que és simplement connex; la segona descriu un seguit de propietats de les superfícies de Riemann, les quals són espais topològics dotats d'una estructura complexa; l'última part és una aproximació a l'estudi de les superfícies de Riemann compactes mitjançant el respectiu espai recobridor universal i, per les de gènere 1, classifiquem les diferents estructures complexes admissibles en un torus topològic.

2010 Mathematics Subject Classification. 30F10, 32G15, 57M10

Agraïments

Vull agrair a les companyes de la biblioteca de filosofia, perquè han fet que les hores de feina fossin més agradables.
A tots aquells que, en un moment o altre, han aguantat estoicament que els parlés d'espais recobridors.
Això sí, qui es mereix el reconeixement més especial és el Ricardo: per haver-me proposat el tema, per reconduir-me quan em perdia, pel temps que ha dedicat a aquest treball... i, sobretot, perquè les demostracions que hem construït plegats són la millor experiència matemàtica que he viscut mai.

Contents

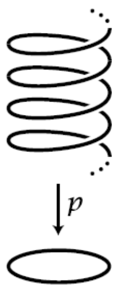
1 Recobriments

1.1 Espais Recobridors

Al llarg de tot el treball els espais són, com a mínim, topològics, arc-connexos i localment arc-connexos; i les aplicacions contínues, malgrat que en algunes ocasions no s'esmenti. En aquesta secció, donarem una primera descripció dels espais recobridors.

Definició 1.1.1. Espai recobridor.
Sigui X un espai topològic. Un espai recobridor de X és un parell $(\tilde{X}, p)$ format per un espai topològic $\tilde{X}$ i una aplicació contínua $p : \tilde{X} \to X$ tal que existeix algun entorn obert U de x, per a qualsevol $x \in X$, el qual satisfà que per tota component connexa A de $p^{-1}(U)$, l'aplicació $p_{|A} : A \to U$ és un homeomorfisme.

La següent figura representa un espai recobridor, on l'espiral juga el paper de $\tilde{X}$ i el cercle el de X.



Exemple 1.1.2.
Sigui $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ la circumferència unitat. S^1 és un espai topològic. Definim l'aplicació exponencial

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to S^1 \\ t &\mapsto exp\{2\pi i t\} \end{aligned}$$

Per veure que $(\mathbb{R}, p)$ és un espai recobridor de S^1 cal que, per a tot $x \in S^1$, existeixi un entorn obert connex U de x pel qual $p_{|A} : A \to U$ sigui un homeomorfisme, on A és qualsevol component connexa de $p^{-1}(U)$. Observem que $U \neq S^1$, ja que si ho fos no podríem, ni tan sols, definir $p^{-1}(U)$.

Al ser p exhaustiva sobre S^1, en particular, ho és sobre U; és dir, per a tot $x \in U$, existeix algun $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ tal que $p(\tilde{x}) = x$. Per definició, $p(\tilde{x}+k) = exp\{2\pi i(\tilde{x}+k)\} = x$, si $k \in \mathbb{Z}$. Com que $U \neq S^1$, podem definir l'aplicació inversa p^{-1}:

$$\begin{aligned} p^{-1} : U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto p^{-1}(x) \end{aligned}$$

Fixat un $t \in \mathbb{R}$, definim $\alpha := min_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)}\{|t - \tilde{x}|\}$. Sigui $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ el conjunt de components connexes de U. Suposem que $\alpha \in V_0$. Cadascun dels $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ es pot expressar com a $\alpha + exp\{2k\pi i\}$, per algun k enter. Així doncs, $\tilde{x}$ pertany a la component V_k. Observem que cada $\tilde{x}$ pertany a una component diferent i, per tant, cada component V_k és homoemorfa a U, mitjançant l'aplicació $p_{|V_k}$.

Proposició 1.1.3.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X. El conjunt d'antiimatges d'un punt $x \in X$ te sempre el mateix cardinal, tot i que variï x. Anomenarem al conjunt $p^{-1}(x)$ la fibra de x.

Demostració.
Per provar la proposició és suficient veure que el conjunt $B := \{x \in X \mid \#p^{-1}(x) = n\}$ és el total per algun $n \in \mathbf{N}$. Com que $\tilde{X}$ és connex, B serà el total si és obert i tancat alhora i no buit.

Sigui n la quantitat d'antiimatges de x. Automàticament, B és no buit. Per ser $(\tilde{X}, p)$ un recobriment de X, existeix un entorn elemental U de x, tal i com l'hem descrit en la *definició 1.1.1.* Observem que tenim n components connexes A que formen $p^{-1}(U)$. En conseqüència, cada $y \in U$ té un element $a_y \in A$ tal que $p(a_y) = y$, per cada $A \subset p^{-1}(U)$. Per tant, la quantitat d'antiimatges de y també és n. Hem obtingut que tot element de B és interior i, per tant, B és un obert. Anàlogament, tot punt $z \in X$ tal que $\#p^{-1}(z) = m \neq n$ és un punt interior de B^c. Així doncs, B^c és un conjunt obert i B és un tancat; B és el total.

Exercici 1.1.4. Diferència entre homeomorfisme local i espai recobridor.
Siguin X, $\tilde{X}$ espais i $p : \tilde{X} \to X$ un homeomorfisme local, aplicació tal que per qualsevol $\tilde{x} \in \tilde{X}$, existeix un entorn U de $\tilde{x}$ pel qual $p(U)$ és un obert de X i $p_{|U} : U \to p(U)$ és un homeomorfisme.

Si existeix $x_0 \in X$ tal que $\#p^{-1}(x_0) = n \in \mathbb{N}$, llavors $(\tilde{X}, p)$ és un espai recobridor de X si, i només si, p és un homeomorfisme local i per tot $x \in X$, $\#p^{-1}(x) = n$.

1.2 Elevacions d'aplicacions contínues

Siguin X, Y espais topològics i $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X. Ens plantegem quina condició ha de complir una aplicació $f : Y \to X$ per a que existeixi una aplicació contínua $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

Lema 1.2.1.
Sigui Y un espai topològic, $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X i $f, g : Y \to \tilde{X}$ dues aplicacions contínues tals que $p \circ f = p \circ g$. Aleshores, el conjunt $A := \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ és el buit o és tot Y.

Demostració.
Al ser Y connex, és suficient veure que el conjunt A és obert i tancat alhora. Suposem que $y \in Y$ és un punt de l'adherència de A. Si comprovem que $y \in A$, llavors A serà un tancat en Y.

Per enunciat, $p \circ f(y) = p \circ g(y) = x$. Sigui U un entorn elemental de x. Com que $p \circ f$ i $p \circ g$ són aplicacións contínues, l'antiimatge d'un obert és un obert. En particular, existeix algun entorn connex W de y de tal manera que $p \circ f(W) \subset U$ i $p \circ g(W) \subset U$.

Clarament, $f(W)$ i $g(W)$ han de pertanyer a components connexes de $p^{-1}(U) \subset \tilde{X}$, per continuïtat de funcions. Com que $W \cap A \neq \emptyset$, no poden pertanyer a components diferents. Efectivament, almenys un subconjunt $W' \subset W$ compleix $f(W') = g(W')$ i per connectivitat, $f(W)$ i $g(W)$ pertanyen a la mateixa component connexa de $p^{-1}(U)$, que denotarem com V. Al ser U un entorn elemental de X, $p_V : V \to U$ és un homemomorfisme; és a dir, existeix una bijecció entre els conjunts. Al ser $p \circ f(y) = p \circ g(y) = x$, obtenim que $f(y) = g(y)$, veient així que $y \in A$.

Suposem ara que y és un punt de A. Hem de veure que y és un punt interior de A; és a dir, existeix entorn W de y pel qual $f(W) = g(W)$. Reiterant el procés anterior (descrivint W de la mateixa manera que per demostrar que el conjunt A era obert), comprovem que $f(W) = f(W)$.

Proposició 1.2.2.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X. Donat un $\tilde{x} \in \tilde{X}$, definim x com a $p(\tilde{x}) \in X$. Sigui $\sigma : I \to X$ un camí arbitrari amb origen x. Aleshores, existeix un únic camí $\tilde{\sigma} : I \to \tilde{X}$ amb origen $\tilde{x}$, tal que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.

Demostració.
Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$ un recobriment d'oberts elementals de X. Per continuïtat, $\{\sigma^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ és un recobriment de I i existeix un subrecobriment $\{\sigma^{-1}(U_j)\}_{j=0}^{n}$ finit per ser I compacte. Així doncs, $\{(U_j)\}_{j=0}^{n}$ és un recobriment finit d'oberts elementals de X. Podem suposar que $x \in U_0$

Si σ estigués plenament contingut en U_0, $\tilde{\sigma}$ estaria plenament contingut en una component connexa de $p^{-1}(U_0)$, ja que $\tilde{\sigma}$ ha de ser contínua. El camí $\tilde{\sigma}$ és únic pel *lema 1.2.1*. En el cas general, on σ no esta contingut en un únic entorn elemental, expressem σ com a concatenació de camins més curts, cadascun dels quals està plenament contingut en algun entorn elemental. Reduïm així la demostracó al cas trivial anterior, on cada camí és únic i, per tant, la concatenació de tots ells també és un camí únic.

Proposició 1.2.3.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X i σ, ω dos camins en $\tilde{X}$ amb el mateix origen. Si $p \circ \sigma$ i $p \circ \omega$ són homotòpicament equivalents, aleshores també ho són σ i ω.

Demostració.
La demostració d'aquesta proposició segueix la mateixa línia que la de la *proposició 1.2.2*. No realitzem els detalls.[2]

Definició 1.2.4. Morfisme induït per un espai recobridor.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X. Considerem $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ una aplicació entre espais amb punt base; en particular, $p(\tilde{x}) = x$. Definim el morfisme induït per p, entre els respectius grups fonamentals, com a $p_*([\sigma]) = [p \circ \sigma]$, on σ és un llaç de $(\tilde{X}, \tilde{x})$. Clarament, $[p \circ \sigma] \in \pi(X, x)$.

A més a més, $p_* : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi(X, x)$ és un morfisme injectiu. Efectivament, si $[\sigma], [\omega] \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ i $p_*[\sigma] = p_*[\omega]$, aleshores $[p \circ \sigma] = [p \circ \omega]$. Aplicant la *proposició 1.2.3*, obtenim que $[\sigma] = [\omega]$.

Proposició 1.2.5.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X, $x \in X$. Els subgrups $\{p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}))\}_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)}$ de $\pi(X, x)$ formen una única classe de conjugació de subgrups de $\pi(X, x)$.

Demostració.
Siguin $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ elements de $p^{-1}(x)$ i γ una classe homotòpica de camins en $\tilde{X}$ amb origen $\tilde{x}_1$ i extrem $\tilde{x}_2$; existeix perquè $\tilde{X}$ és arc-connex. Volem veure que si $\alpha \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, aleshores $\varphi(\alpha) := \gamma^{-1}\alpha\gamma$ pertany a $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_2)$. Utilitzarem que el diagrama següent és commutatiu, per definició de morfisme induït.

$$\begin{tikzcd} \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_*"] & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_2) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi(X, x) \arrow[r, "\phi"] & \pi(X, x) \end{tikzcd}$$

A partir de la commutativitat del diagrama anterior, obtindrem que $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ i $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$ són subgrups conjugats de $\pi(X, x)$.

[2]Vegeu [5]. Capítulo 5.

Sigui β una classe arbitraria de $\pi(X,x)$. Podem definir $\phi(\beta) := (p_* \circ \varphi \circ p_*^{-1})(\beta)$, perquè el diagrama és commutatiu. Observem que al ser p_* un morfisme exhaustiu, existeix $\alpha \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ pel qual $\beta = p_*(\alpha)$. Veguem que tal i com hem definit ϕ, ens envia β a una classe de conjugació de β. Efectivament, $\phi(\beta) = (p_* \circ \varphi \circ p_*^{-1})(p \circ \alpha) = (p_* \circ \varphi)(p^{-1} \circ p \circ \alpha) = p_*(\gamma^{-1}\alpha\gamma) = (p_*\gamma)^{-1}\beta(p_*\gamma)$, ja que $(p_*\gamma)^{-1} = (p\gamma^{-1})$.

A més a més, qualsevol subgrup conjugat de $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ és pot obtenir com a $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{y})$, per algun $\tilde{y} \in p^{-1}(x)$. Sigui $\beta \in \pi(X,x)$ i sigui ω un representant de β. Per la *preposició A.2*, existeix un únic $\tilde{\omega}$ amb origen $\tilde{x}_1$. Sense pèrdua de generalitat, anomenem $\tilde{y}$ al final d'aquesta elevació, ja que $p \circ \tilde{\omega} = \omega$ i, per tant, $\tilde{\omega}(1)$ ha de pertanyer a $p^{-1}(x)$. Observem que per qualsevol camí tancat σ representant d'una classe de $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, $[\omega^{-1} * \sigma * \omega] \in \pi(\tilde{X}, \tilde{y})$. Clarament doncs, $\beta^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)]\beta = p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{y})$.

Teorema 1.2.6. Existència d'elevació de funcions.
Siguin X, Y espais, $(\tilde{X}, p)$ un recobriment de X i $f : Y \to X$ una aplicació contínua. Existirà una única aplicació $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tal que $\tilde{f} \circ p = f$ i $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ sí, i només sí, $f_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. L'aplicació $\tilde{f}$ s'anomena elevació de f.

Demostració.
Suposem que, efectivament, existeix una aplicació $\tilde{f}$ tal que fa commutatiu el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \ni \tilde{x}_0 \arrow[d, "p"] \\ y_0 \in Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \ni x_0 \end{tikzcd}$$

Aleshores, podem traslladar l'estudi dels espais als grups fonamentals i de les aplicacions als morfismes induïts. Obtenim així un diagrama que també ha de ser commutatiu.

$$\begin{tikzcd} & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi(Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"] & \pi(X, x_0) \end{tikzcd}$$

És a dir, que $\tilde{f}_* = p_*^{-1} \circ f_*$. Com que p_* és un morfisme injectiu, és suficient imposar que $f_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ per tal de poder definir $p_*^{-1} : \pi(X, x_0) \to \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ i verificar així la necessària commutativitat del diagrama anterior. Per tant, la condició $f_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ és necessària per a l'existència de l'aplicació f.

A contínuació, demostrarem que la condició també és suficient per a l'existència de $\tilde{f}$. Veurem que en cas d'existir $\tilde{f}$, només és pot definir d'una manera. Suposant que existeix $\tilde{f}$, la definim.

Donat $y \in Y$, existeix un camí $\sigma : I \to Y$ amb $\sigma(0) = y_0$ i $\sigma(1) = y$. També tenim definits $f \circ \sigma$ i $\tilde{f} \circ \sigma$ camins en X i $\tilde{X}$, amb orígens respectius x_0 i $\tilde{x_0}$. Per definició, $\tilde{f} \circ \sigma$ és una elevació del camí $f \circ \sigma$. Per la *proposició 1.2.2*, existeix un únic camí ω de $\tilde{X}$ amb origen $\tilde{x_0}$, tal que $p \circ \omega = f \circ \sigma$. Anomenem a ω l'elevació de $f \circ \sigma$. Al ser $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x_0}$, podem definir $\tilde{y}$ com l'extrem d'ω. Independentment del camí σ escollit, $\tilde{f}(y) = g(1)$. Efectivament, per la *proposició 1.2.3*, si $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$ és homotòpicament equivalent a un altre camí σ', amb elevació $\tilde{\sigma'}$; obtenim que $\tilde{\sigma}$ i $\tilde{\sigma'}$ són homotòpicament equivalents. En particular, tenen el mateix extrem.

Hem vist que la definició de $\tilde{f}(y)$, només depèn de la classe d'equivalència d'un camí σ donat, tal que σ té per extrem y. Efectivament, α i β són dues classes d'equivalència de camins de Y diferents, que connecten y_0 amb y. Aleshores, $\alpha * \beta^{-1} \in \pi(Y, y_0)$. Per hipòtesis, $f_*(\alpha * \beta^{-1})$ pertany al grup $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x_0})$. Així doncs, existeix una classe $\tilde{\gamma} \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x_0})$, tal que $p_*(\tilde{\gamma}) = f_*(\alpha * \beta^{-1}) = (f_*\alpha)(f_*\beta)^{-1}$. Obtenim que $\tilde{\gamma}$ pertany al grup fonamental $\pi(\tilde{X}, \tilde{x_0})$, perquè $f_*\alpha$ i $f_*\beta$ s'eleven a camins respectius en $\tilde{X}$ amb un mateix origen, $\tilde{x_0} = \tilde{f}(y_0)$ i, clarament, l'elevació de $(f_*\alpha)(f_*\beta)^{-1}$ té origen i final en $\tilde{x_0}$.

Comprovarem que $\tilde{f}$ és contínua, utilitzant que f ho és. Necessitem veure que la antiimatge de qualsevol obert $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ és un obert en Y. Equivalentment, podem veure que per tot $y \in Y$, existeix algun entorn V, tal que $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$, per qualsevol entorn obert $\tilde{U}$ de $\tilde{f}(y)$; això és que tots els punts de l'antiimatge d'un obert de $\tilde{U}$ són interiors.

Suposem fixats $y \in Y$ i un entorn $\tilde{U}$ de $\tilde{f}(y)$. Com que l'aplicació p és un homeomorfisme de $\tilde{U}$ amb la seva imatge, podem escollir un entorn $A \subset U = p(\tilde{U})$ de $p(\tilde{f}(y)) = f(y)$. Existeix una component connexa $\tilde{A}$ de $p^{-1}(A)$, que conté $\tilde{y}$ i, novament per ser p un homeomorfisme, $\tilde{A} \subset \tilde{U}$. Com que f és contínua, $V = f^{-1}(A)$ és un obert, que conté y i, clarament, $\tilde{f}(V) = \tilde{A} \subset \tilde{U}$, ja que $\tilde{f}(y) \in \tilde{U}$.

1.3 Automorfismes d'un espai recobridor

Definirem què és i quan existeix un isomorfisme entre espais recobridors. Demostrarem que, en certa manera, el grup fonamental $\pi(X, x)$ ens determina l'espai recobridor.

Definició 1.3.1. Morfismes entre espais recobridors.
Siguin $(\tilde{X}_1, p_1)$ i $(\tilde{X}_2, p_2)$ dos espais recobridors de X. Un morfisme φ de $(\tilde{X}_1, p_1)$ en $(\tilde{X}_2, p_2)$ és una aplicació contínua $p : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ que fa commutatiu el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & {\scriptstyle p_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_2} & \\ & X & \end{array}$$

És a dir, $p_1 = p_2 \circ \varphi$.

Definició 1.3.2. Isomorfismes entre espais recobridors.
Donat un morfisme φ, entre $(\tilde{X}_1, p_1)$ i $(\tilde{X}_2, p_2)$, serà un isomorfisme si existeix el morfisme invers; és a dir, si existeix ϕ de $(\tilde{X}_2, p_2)$ en $(\tilde{X}_1, p_1)$, de tal manera que $\phi \circ \varphi = Id_{|\tilde{X}_1}$ i $\varphi \circ \phi = Id_{|\tilde{X}_2}$.

En particular, és compleix que $p_2 \circ \varphi(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_1)$ i $p_1 \circ \varphi^{-1}(\tilde{x}_2) = p_1(\tilde{x}_2)$. Per tot x de X, φ envia, necessàriament, $\{p_1^{-1}(x)\}$ a $\{p_2^{-1}(x)\}$.

Proposició 1.3.3. Existència de morfismes entre espais recobridors.
Siguin $(\tilde{X}_1, p_1)$ i $(\tilde{X}_2, p_2)$ espais recobridors de X. Siguin $\tilde{x}_1$,$\tilde{x}_2$ elements de la fibra de x en $\tilde{X}_1$ i $\tilde{X}_2$. Aleshores, existeix un morfisme $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, tal que $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ si, i només si, $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subset p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. Conseqüentment, φ serà un isomorfisme si, i només si, $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.

Demostració.
Obtenim el resultat com a conseqüència del *teorema 1.2.6* i de la *definició 1.3.1.*

Pel cas de l'isomorfisme, el diagrama que ha de ser commutatiu és el que és despren de la *definició 1.3.2.*; és a dir, $p_1 = p_2 \circ \varphi$ i $p_1 \circ \phi = p_2$.

Definició 1.3.4. Automorfismes d'un espai recobridor.
Un automorfisme és un isomorfisme d'un espai recobridor $(\tilde{X}, p)$ en ell mateix. El conjunt dels automorfismes amb la composició d'aplicacions és un grup. El denotarem per $Aut(\tilde{X}, p)$.

Proposició 1.3.5.
Sigui $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$ *tal que* $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$*, per algun* $\tilde{x} \in \tilde{X}$*. Aleshores,* φ *només pot ser la identitat. Direm que* φ *opera sense punts fixos.*

Demostració.
En virtut del *lema 1.3.1*, si tenim dues aplicacions $f_1, f_2 : Y \to \tilde{X}$ tals que $p \circ f_1 = p \circ f_2$, aleshores $f_1 = f_2$ o bé $f_1(y) \neq f_2(y)$, per tot $y \in Y$. Considerant el nostre cas, on $Y = \tilde{X}$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Si existeix algun $\tilde{x} \in \tilde{X}$, pel qual $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$, per força $\varphi = Id_{|\tilde{X}}$, ja que el diagrama ens indica que $p \circ \varphi = p = p \circ Id_{|\tilde{X}}$.

Teorema 1.3.6. El grup fonamental determina l'espai recobridor.
Dos espais recobridors $(\tilde{X}_1, p_1)$*,* $(\tilde{X}_2, p_2)$ *de* X *seran isomorfs sí, i només sí, per a tot parell de punts* $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$*,* $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ *tals que* $p_1(\tilde{x}_1) = x = p_2(\tilde{x}_2)$*, existeix una* $\alpha \in \pi(X, x)$ *per la qual* $\alpha^{-1}[p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)]\alpha = p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$*.*

És a dir, cal que $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ *i* $p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ *pertanyin a la mateixa classe de conjugació de* $\pi(X, x)$*. Si passa això, voldrà dir que el conjunt de subgrups* $\{p_*(\tilde{X}, \tilde{x})\}_{\tilde{x} \in \tilde{X}}$ *ens determinen, llevat d'isomorfismes, l'espai recobridor* $(\tilde{X}, p)$*.*

Demostració.
Degut a la *Preposició 1.3.3*, $(\tilde{X}_1, p_1)$ i $(\tilde{X}_2, p_2)$ són isomorfs si, i només si, $p_1(\tilde{x}_1) = x = p_2(\tilde{x}_2)$, per a qualssevol $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ tals que $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$.

En general, si $p_1(\tilde{x}_1) = x = p_2(\tilde{x}_2)$, aleshores $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ i $p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ pertanyen a la mateixa classe de conjugació, per la injectivitat de p_*, conseqüència immediata de la *proposició 1.2.3.*

Proposició 1.3.7. Transitivitat en els espais recobridors.
Siguin $(\tilde{X}_1, p_1)$ i $(\tilde{X}_2, p_2)$ espais recobridors de X. Si existeix un morfisme del primer espai en el segon, llavors $(\tilde{X}_1, \varphi)$ és un espai recobridor de $\tilde{X}_2$.

Demostració.
Com que φ és morfisme entre espais recobridors, el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "p_1"'] & \\ & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Triem arbitràriament un $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$. Per ser φ un morfisme entre espai recobridors i el diagrama anterior commutatiu, tenim definit $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$, amb $p_1(\tilde{x}_1) = x = p_2(\tilde{x}_2)$. Per veure que $(\tilde{X}_1, \varphi)$ és un recobridor de $\tilde{X}_2$, cal que per a qualsevol $\tilde{x}'_2 \in \tilde{X}_2$, existeixi algun $\tilde{x}'_1 \in \tilde{X}_1$ pel qual $\varphi(\tilde{x}'_1) = \tilde{x}'_2$.

Per comprovar-ho es suficient escollir un camí σ_2 a $\tilde{X}_2$ tal que $\sigma_2(0) = \tilde{x}_2$ i $\sigma_2(1) = \tilde{x}'_2$. Si apliquem p_2 a σ_2 obtenim σ, un camí a X, amb origen x. Per la *proposició A.2*, existeix una única elevació contínua de σ a $\tilde{X}_1$, amb origen $\tilde{x}_1$, que denotarem per σ_1. Aleshores, podem definir $\tilde{x}'_1 := \sigma_1(1)$.

Tenim que $p_1(\sigma_1) = (p_2 \circ \varphi)(\sigma_1) = \sigma = p_2(\sigma_2)$ i, a més a més, $p_1(\sigma_1(0)) = p_1(\tilde{x}_1) = x$ i ,per tant, $\varphi \circ \sigma_1(0) = \sigma_2(0)$. Per la unicitat d'elevacions de camins amb un mateix orígen, *proposició 1.2.3*, obtenim que $\varphi \circ \sigma_1 = \sigma_2$. En particular, $\varphi \circ \sigma_1(1) = \tilde{x}'_1 = \tilde{x}'_2 = \sigma_2(1)$.

Cal comprovar, però, que el σ_2 a partir de qual hem construït tota la demostració existeix. És a dir, que podem donar un entorn arc-connex de $\tilde{x}'_2$, en el qual pertanyi $\tilde{x}_2$. Per fer-ho, escollim un entorn U, arc-connex, de $x = p_2(\tilde{x}'_2)$, el qual sigui elemental pels dos espais recobridors.

Cal comprovar que, efectivament, $(\tilde{X}_1, \varphi)$ és un espai recobridor de $\tilde{X}_2$. Escollim un entorn U de x. Sigui $W \subset p_2^{-1}(U)$ la component connexa de l'antiimatge de U que conté $\tilde{x}'_2$. Com que p_2 és un homeomorfisme entre W i U, $p_1^{-1} \circ p_2(W) = p_1^{-1}(U)$. Sabem que, per a qualsevol punt de $w \in W$, $p_1^{-1} \circ p_2(w) = \varphi^{-1}(w)$, però φ no és bijectiva, per tant, no podem assegurar que $p_1^{-1} \circ p_2(W) = \varphi^{-1}(W)$, però almenys, $\varphi^{-1}(W) \subset p_1^{-1}(U)$. Si veiem que $\varphi^{-1}(W)$ és exactament igual a algunes components connexes de $p_1^{-1}(U)$, per definició, $(\tilde{X}_1, \varphi)$ serà un espai recobridor de $\tilde{X}_2$

Fixada una component connexa A de $p_1^{-1}(U)$, cal veure que si $\varphi^{-1}(W) \subset A$, aleshores $\varphi^{-1}(W)$ és tot A. Suposem que no és així: siguin $a, b \in A$, on $a \in \varphi^{-1}(W)$ i $b \notin \varphi^{-1}(W)$. Tenim que $\varphi(a)$ i $\varphi(b)$ pertanyen a $p^{-1}(U)$, però $\varphi(a) \notin W$. La imatge d'una única component connexa de $p_1^{-1}(U)$, pertany a dues components connexes diferents de $p_2^{-1}(U)$, cosa impossible per a aplicacions contínues, com és el cas de φ.

1.4 Acció del grup fonamental sobre la fibra

Definirem una acció del grup fonamental sobre la fibra d'un punt arbitrari. Per mitjà d'aquesta acció, establirem una bijecció entre el grup d'automrfismes d'un espai recobridor i la fibra d'un punt qualsevol.

Definició 1.4.1.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ espai recobridor de X i $x_0 \in X$. Definim l'acció de $\pi(X, x_0)$ sobre $\{p^{-1}(x_0)\}$ com

$$\begin{gathered} \varphi : p^{-1}(x_0) \text{ x } \pi(X, x_0) \to p^{-1}(x_0) \\ (\tilde{x}\ ,\ \alpha) \longmapsto \tilde{\alpha}(1) \end{gathered}$$

on $\tilde{\alpha}$ és l'unica elevació de α tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$.

Definició 1.4.2. G-espai per la dreta (homogeni).
Sigui G un grup per una operació $*$. Un conjunt A és un G-espai per la dreta si el producte A x G va a parar a A i es satisfan les condicions següents:

1. $ae = a$, $\forall a \in A$, on e és el neutre de G
2. $(ag)h = a(g * h)$, $\forall a \in A$, $g, h \in G$

Direm que A és un G-espai homogeni per la dreta si compleix, a més a més, que per tot parell $a, b \in A$, existeix algun $g \in G$ tal que $a * g = b$.

Lema 1.4.3.
Sigui E un G-espai homogeni i $Aut(E)$ el seu grup d'automorfismes. Un grup A d'automorfismes de E és tot $Aut(E)$ si, i només si, per a qualssevol dos punts $x, y \in E$ amb el mateix subgrup d'isotropia, existeix un automorfisme $\varphi \in A$ tal que $\varphi(x) = y$.

Demostració.
Malgrat ser un resultat interessant, la seva demostració és extensa i s'allunyade l'objectiu principal d'aquesta secció. Per tant, no realitzarem la demostració.[3]

[3]Vegeu [5]. Apéndice B.2.

Proposició 1.4.4.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X. La fibra d'un punt $x_0 \in X$ és un $\pi(X, x_0)$-espai homogeni per la dreta. Fixat un element qualsevol de la fibra, $\tilde{x} \in p^{-1}$, el seu subgrup d'isotropia és $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$.

Demostració.
L'acció de $\pi(X, x_0)$ sobre $p^{-1}(x_0)$ de la *definició 1.4.1*, ens permet assegurar que $\pi(X, x_0)$ és un grup d'operadors per la dreta de $p^{-1}(x_0)$. És a dir, compleix les igualtats següents:

$$1.\ \tilde{x}e = \tilde{x}$$
$$2.\ (\tilde{x}\alpha)\beta = \tilde{x}(\alpha * \beta)$$

Per a tot $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ i tota $\alpha, \beta \in \pi(X, x_0)$.

La primera és clara, ja que l'elevació de la classe constant és la classe constant a $\tilde{X}$. Per a la segona, comprovarem que les dues bandes de la igualtat són equivalents:

$(\tilde{x}\alpha)\beta = (\tilde{\alpha}(1))\beta = \tilde{\beta}(1)$, on $\tilde{\beta}$ es l'elevació de β tal que $\beta(0) = \alpha(1)$. Per altra banda, $\tilde{x}(\alpha * \beta) = (\widetilde{\alpha * \beta})(1)$. Per ser $(\widetilde{\alpha * \beta})$ l'elevació contínua de $(\alpha * \beta)$ tal que $(\alpha * \beta)(0) = \tilde{x}$, compleix que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. En conseqüècia, $(\tilde{x}\alpha)\beta = \tilde{x}(\alpha * \beta)$.

Volem veure també que $p^{-1}(x_0)$ és un $\pi(X, x_0)$-espai homogeni: suposem que $\tilde{x}_1$ i $\tilde{x}_2$ pertanyen a la fibra d'x_0, per ser $\tilde{X}$ arc-connex, existeix $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{x}_1$ i $\tilde{x}_2$. Si $\alpha := p_*(\tilde{\alpha})$, aleshores pertany a $\pi(X, x_0)$, per ser $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$. Per tant, existeix un α pel qual $\tilde{x}_1\alpha = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_2$.

Tenint en compte que el subgrup d'isotropia d'un punt $\tilde{x}$ es descriu com $H : \{\alpha \in \pi(\tilde{X}, x_0) \mid \tilde{x}\alpha = \tilde{x}\}$ i que per definició $\tilde{x}\alpha = \tilde{\alpha}(1)$, cal que $\tilde{\alpha} \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x})$. Clarament doncs, $H = p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$.

Proposició 1.4.5.
Sigui $x \in X$ i $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$. Per a tot punt $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ i tota classe $\alpha \in \pi(X, x)$, és compleix que:

$$\varphi(\tilde{x}\alpha) = (\varphi(\tilde{x}))\alpha$$

Demostració.
Sigui $\tilde{\alpha}$ l'elevació d'α amb origen $\tilde{x}$. Per definició, $\tilde{x}\alpha = \tilde{\alpha}(1)$. Podem considerar el camí $\varphi_*(\tilde{\alpha})$, que té per orgien $\varphi(\tilde{x})$ i per extrem $\varphi(\tilde{x}\alpha)$, ambdós elements de la fibra de x, ja que $Aut(\tilde{X}, p)$ deixa fix $p^{-1}(x)$. Utilitzant aquesta mateixa invariància, tenim que $(p \circ \varphi)_*(\tilde{\alpha}) = p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$. Com que $p_*[\varphi_*(\tilde{\alpha})] = (p \circ \varphi)_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\varphi_*(\tilde{\alpha})$ és també una elevació d'α, amb el mateix origen que $\tilde{\alpha}$. Pel lema d'unicitat d'elevacions, les dues són la mateixa classe i, en particular, tenen el mateix extrem; és a dir, $\varphi_*(\tilde{\alpha}) = (\varphi(\tilde{x}))\tilde{\alpha}$.

Teorema 1.4.6.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ *un espai recobridor de* X *i* x *un element arbitari de* X*. Llavors,* $Aut(\tilde{X}, p)$ *és isomorf al grup d'automorfismes de* $p^{-1}(x)$ *com a* $\pi(X, x)$*-espai per la dreta.*

Demostració.
Donat un automorfisme $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$, podem restringir-lo a $p^{-1}(x)$. De la igualtat $\varphi(\tilde{x}\alpha) = (\varphi(\tilde{x}))\alpha$ de la *proposició 1.4.5* se'n despren que $\varphi_{p^{-1}(x)}$ és un automorfisme de $p^{-1}(x)$ com a $\pi(X, x)$-espai per la dreta. Volem comprovar que l'aplicació

$$\begin{aligned} \Phi : Aut(\tilde{X}, p) &\to Aut(p^{-1}(x)) \\ \varphi &\mapsto \varphi_{|p^{-1}} \end{aligned}$$

és bijectiva. Es suficient veure-ho per un punt arbitrari ja que, tal i com hem vist en la *proposició 1.1.3*, el cardinal de la fibra és invariant. Així doncs, si és dona la bijecció per un punt es dona per tots.

Sabem, per la *proposició 1.3.5*, que el grup d'automorfismes de l'espai recpbridor actua sense punts fixos. Cosa que implica la injectivitat de Φ. Necessitem veure que $\Phi(Aut(\tilde{X}, p))$ és tot $Aut(p^{-1}(x))$, per provar l'exhaustivitat.

Pel *lema 1.4.3*, es suficient veure que per qualssevol dos punts $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ de $\Phi(Aut(\tilde{X}, p))$ amb el mateix subgrup d'isotropia, existeix un automorfisme de $\Phi(Aut(\tilde{X}, p))$ que envia l'un a l'altre. Gràcies a la *proposició 1.4.4*, sabem que el subgrup d'isotropia d'un punt $\tilde{z}$ de la fibra d'x és $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{z})$. Així doncs,sabem que $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ donats pertanyen a la mateixa classe de conjugació de $\pi(X, x)$. Finalment i per la *proposició 1.3.3*, existeix un automorfisme $\gamma \in \Phi(Aut(\tilde{X}, p))$ que compleix $\gamma(\tilde{x}) = \tilde{y}$, tal i com volíem veure.

1.5 Espai recobridor universal

L'objectiu principal d'aquest apartat és veure que per a qualsevol espai topològic semilocalment simplement connex, existeix un espai recobridor simplement connex. Aquest és únic llevat d'homeomorfismes i se'l denomina com a recobridor universal de X. Veurem també que el grup d'automorfismes del recobridor universal de X és homeomorf al grup fonamental de X.

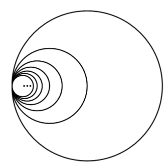
Definició 1.5.1. Espai recobridor universal.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ un espai recobridor de X. Direm que és el recobridor universal de X si $\tilde{X}$ és simplement connex. És únic llevat d'isomorfismes entre espais recobridors, en virtut de la *proposició 1.3.3*.

Per la injectivitat de p_*, conseqüència de la *proposició 1.2.3*, si $p_*\pi(\tilde{X}, x)$ pertany a la classe de conjugació del camí constant, per a tot $x \in X$, aleshores $(\tilde{X}, p)$.

Observem que si $(\tilde{X}, p)$ és un recobridor universal de X i (Y, g) és un recobridor qualsevol de X, $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}) = [e]$, per tot $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Novament per la *proposició 1.3.3*, existeix un homeomorfisme de $(\tilde{X}, p)$ en (Y, g). Gràcies a la *proposició 1.3.7*, $(\tilde{X}, p)$ és un recobridor de (Y, g). Precisament per ser $(\tilde{X}, p)$ recobridor de qualsevol altre espai recobridor de X, se l'anomena recobridor universal.

Definició 1.5.2. Espai semilocalment simplement connex.
Sigui X un espai topològic. Si per qualsevol punt de X, existeix un entorn U de tal manera que qualsevol llaç en U és pot contraure en un únic punt de X, aleshores X és semilocalment simplement connex. Això no significa , necessàriament, que U sigui contràctil; en tal cas, X seria localment simplement connex.

Exemple 1.5.3. Arrecada hawaiana.
Considerem l'espai $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_{1/n}(1/n, 0)$, format pels cercles de centre $(1/n, 0)$ i radi $1/n$.



L'espai quocient $X = (Y \text{ x } I)/(Y \text{ x } \{0\})$, que colapsa l'espai Y en un únic punt describint una successió de cons, és semilocalment simplement connex. Efectivament, qualsevol punt es pot contraure en la cuspide comuna dels cons.

En canvi, no és localment simplement connex. Cadascuna de les seccions horitzonatals de X dona lloc a cercles concèntrics $C_{t/n}(t/n, 0)$, per algun $t \in I$ fixat. Clarament, les seccions no són contractils i, per tant, X no pot ser localment simplement connex.

Teorema 1.5.4. Existència de l'espai recobridor.
Sigui X un espai semi-localment simplement connex. Aleshores, existeix un recobridor universal de X.

Demostració.
Volem comprobar que existeix un espai $\tilde{X}$ simplement connex i una aplicació $p : \tilde{X} \to X$ tals que $(\tilde{X}, p)$ és un espai recobridor de X. Suposem que existeixen, si aconseguim descriure'ls haurem acabat la demostració.

Escollim un punt base $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ i definim $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Per tot $\tilde{y} \in \tilde{X}$, existeix una única classe de camins α que uneix $\tilde{x}_0$ amb $\tilde{y}$, per ser $\tilde{X}$ simplement connex. Al punt $\tilde{y}$ volem assignar-li una classe de camins $p_*(\alpha)$ en X. Per la *proposició 1.2.3*, aquesta assignació és injectiva: si α i α', amb origen en $\tilde{x}_o$ tals que $p_*(\alpha)$ i $p_*(\alpha')$ són homotòpicament equivalents, per força han de ser hompotòpicament equivalents i, per tant, tenir el mateix extrem. A més a més, és exhaustiva, gràcies a la *proposició 1.2.2*.

Així doncs, podem definir $\tilde{X}$ com el conjunt de totes les classes d'equivalència d'homotopia entre camins en X, amb origen en x_0. Per tant, l'aplicació:

$$\begin{aligned} p : \tilde{X} &\to X \\ \alpha &\mapsto \alpha(1) \end{aligned}$$

Està ben definida i és bijectiva. Cal, però, dotar a $\tilde{X}$ d'una estructura d'espai topològic (és a dir, d'una base d'oberts) que el faci simplement connex i per la qual $(\tilde{X}, p)$ sigui un espai recobridor de X.

Per hipòtesis, existeix una família d'obert $\{U_i\}_{i \in I}$ en X tal que $\cup_{i \in I} U_i = X$. A més a més, cada obert U_i és arc-connex i tota classe de camins en U_i és homotòpicament equivalent a un camí constant en X; podem definir el morfisme $\varphi : \pi(U_i, u_{i0}) \to \pi(X, x_{i0})$ trivial. Per tant, $\{U_i\}_{i \in I}$ és una base d'oberts de X i anomenarem als U_i oberts bàsics de X. Suposem donats $x_i, y_i \in U_i$, observem que si dos camins $\sigma, \omega \in U_i$ tenen origen x_i i extrem y_i, aleshores són homotops en X.

Sigui $\alpha \in \tilde{X}$ i U_i un obert bàsic que conté $p(\alpha) = \alpha(1)$. Podem definir la classe d'equivalència $[\alpha, U_i] := \{\beta \in \tilde{X} \mid \alpha * \gamma = \beta\}$, on $\gamma \in U_i$. Si totes les possibles classes d'equivalència són oberts i per a dues classes arbitraries tals que $[\alpha, U_i] \cap [\beta, U, j] \neq \emptyset$, exiteix una $[\gamma, U_k] \subset [\alpha, U_i] \cap [\beta, U, j]$. Aleshores, tenim una base d'oberts d'un topologia en $\tilde{X}$.

Les classes d'equivalència són oberts, ja que ho són els U_i. Com que els $\{U_i\}$ són una base d'oberts d'una topologia en X, existeix el U_k esmentat. A més a més, $p(\gamma) \in U_k \subset U_i \cap U_j$. Per tant, $\gamma \in [\alpha, U_i]$ i $\gamma \in [\beta, U, j]$; és a dir, $[\gamma, U_k] \subset [\alpha, U_i] \cap [\beta, U, j]$.

Per veure que $\tilde{X}$ és arc-connexa, és suficient trobar un camí que uneixi la classe d'equivalència del camí constant $\tilde{x}_0$, que denotarem per $\alpha_0 \in \tilde{X}$ amb qualsevol altre punt α de $\tilde{X}$. Hem vist que tota $\alpha \in \tilde{X}$, és la classe d'equivalència d'un camí $\sigma : I \to X$ amb orígen en x_0 i extrem $\alpha(1)$. Per ser σ un camí en X és continu. Podem, doncs, podem definir els camins

$$\begin{aligned} \sigma_s : I &\to X \\ t &\mapsto \sigma(st) \end{aligned}$$

Que uneix els punts x_0 i $\sigma(s)$ i són continus per a qualsevol $s \in I$. Sigui $\alpha_s = [\sigma_s]$, aleshores obtenim que $[\sigma_0] = \alpha_0$ i $[\sigma_1] = \alpha$. Ara sí, l'aplicació següent:

$$\begin{aligned} C : I &\to \tilde{X} \\ s &\mapsto \alpha_s \end{aligned}$$

És un camí en $\tilde{X}$ que connecta α_0 i α, tal i com volíem veure.

Finalment, comprovem que $\tilde{X}$ és simplement connex; és a dir, tot llaç en $\tilde{X}$ és homotop a $\tilde{x}_0$. Un llaç arbitrari en $\tilde{X}$ comença i acaba a $\tilde{x}_0$ i, contínuament, recorre un seguit de classes d'equivalència de camins de X amb origen $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Clarament, si $\sigma : I \to X$ és un llaç amb punt base $\tilde{x}_0$, la següent aplicació descriu un llaç a $\tilde{X}$:

$$\begin{aligned} C : I &\to \tilde{X} \\ s &\mapsto [\sigma(s)] \end{aligned}$$

Observem que, per tot $s \in I$, $[\sigma(s)]$ és un aixecament del camí $\sigma(s)$ i que $[\sigma(1)] = \tilde{\alpha}$ és un llaç arbitrari de $\tilde{X}$ amb punt base $\tilde{x}_0$. Per la definició de l'acció de $\pi(X, x_0)$ sobre $p^{-1}(x_0)$, sabem que $\tilde{x}_0\alpha = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0$, on $\alpha = p_*(\tilde{\alpha})$. Per la *proposició 1.4.3*, el grup d'isotropia de $\tilde{x}_0$, $\{\alpha \in \pi(X, x_0) \mid \tilde{x}_0\alpha = \tilde{x}_0\}$, és igual que el subgrup $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ de $\pi(X, x_0)$. Així doncs, per tota $\tilde{\alpha} \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, $p_*(\tilde{\alpha}) = x_0 = p_*(\tilde{x}_0)$. En virtut de la *proposició 1.2.4*, el morfisme $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi(X, x_0)$ és injectiu. Per tant, $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ i $\tilde{X}$ és simplement connex, per ser $\tilde{x}_0$ la classe d'equivalència del camí constant x_0.

Proposició 1.5.5.
Sigui $(\tilde{X}, p)$ el recobridor universal de X. Aleshores, el grup d'automorfismes de $(\tilde{X}, p)$ és isomorf al grup fonamental de X.

Demostració.
Sigui $x_0 \in X$, volem veure que el conjunt de $\alpha \in \pi(X, x_0)$ estan en bijecció amb els automorfismes de $Aut(\tilde{X}, p)$. Observem que l'elecció de $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ es pot fer sense pèrdua de generalitat: per ser $\tilde{X}$ contràctil i per la *proposició 1.3.3*, sabem que existiran automorfismes entre tots els elements de la fibra de x_o. Per tant, els isomorfismes que obtinguem no dependran de l'element de $p^{-1}(x_0)$ escollit.

Utilitzant que $\pi(X, x_0)$ és un grup d'operadors per la dreta de $p^{-1}(x_0)$, tal i com hem vist en la *secció 1.4*, sabem que $\tilde{x}\alpha = \tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$, on $\tilde{\alpha}$ és l'única elevació d'α tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ i $\alpha(0) = \tilde{x}$.

Suposem $\beta \in \pi(X, x_0)$, $\beta \neq \alpha$. Sigui $\tilde{\beta}$ l'elevació de β tal que $\tilde{\beta}(0) = \tilde{x}$. Aleshores, $\tilde{\beta}(1) \neq \tilde{\alpha}(1)$, ja que si $\tilde{\beta}$ i $\tilde{\alpha}$ tinguessin el mateix origen i final en un espai simplement connex, serien la mateixa classe i, per la unicitat d'elevacions de camins, $\alpha = \beta$. Contradiccó. Així doncs, l'aplicació $\phi : \pi(X, x_o) \to Aut(\tilde{X}, p)$, definida com $\phi(\alpha) = \tilde{x}\alpha = \tilde{\alpha}(1)$, és injectiva.

Vegem que també és exhaustiva. Sigui $\tilde{y}$ un element arbitrari de la fibra d'x_0. Per ser $\tilde{X}$ arc-connex, existeix un camí $\tilde{\omega}$ que uneix $\tilde{x}$ amb $\tilde{y}$. Clarament, $\omega = p(\tilde{\omega})$ és un ω llaç de X amb punt base x_0 i $\tilde{\omega}$ és l'unica elevació d'ω amb origen $\tilde{x}$. Així doncs, $[\omega]$ és una classe de $\pi(X, x_o)$, tal que $\phi([\omega]) = \tilde{\omega}(1) = \tilde{y}$.

Hem obtingut un isomorfisme entre el grup d'atomorfismes del recobridor universal de X i el grup fonamental de X. Així doncs, si coneixem el grup fonamental d'un espai, podem determinar la fibra de tot punt, ja que la fibra és invariant per l'acció d'automorfismes, *teorema 1.4.6*.

2 Superfícies de Riemann

2.1 Varietats complexes

Per tal de poder definir les superfícies de Rieman, cal descriure què és una estructura complexa i, més concretament, què és una varietat complexa.

Definició 2.1.1. Carta holomorfa.
Sigui M un espai topològic. Un parell (U, φ), format per un obert $U \subset M$ i una aplicació $\varphi : M \to \mathbb{C}^n$, serà una carta en M si, i només si, l'aplicació φ és un homeomorfisme.

Siguin (U_i, φ_i) i (U_j, φ_j) dues cartes de M. Es diu que són analíticament compatibles si l'aplicació de canvi de carta, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, és biholomorfa i fa commutatiu el diagrama següent:

$$\begin{tikzcd} & U_i \cap U_j \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ \mathbb{C}^n \supset \varphi_i(U_i \cap U_j) \arrow[rr, leftrightarrow, "\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}"] & & \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

Definició 2.1.2. Atles holomorf.
Un atles holomorf en M és un conjunt de cartes $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ analíticament compatibles dos a dos, tals que la unió dels oberts U_i genera M.

Definició 2.1.3. Estructura complexa.
Una estructura complexa en un espai topològic M és una classe d'equivalència d'atles holomorfs, on dos atles estan relacionats si la unió dels dos genera un nou atles holomorf a M. Dit d'una altra manera, estaran relacionats si les seves cartes són analíticament compatibles dos a dos. Una estructura complexa és pot donar com un únic atles maximal.

Definició 2.1.4. Varietat complexa.
Una varietat complexa és un espai topològic M, que és Hausdorff, compleix el segon axioma de numerabilitat i està dotat d'una estructura complexa.

Si M és connex, aleshores l'exponent n de $\mathbb{C}$ de la *definició 2.1.1* està unívocament determinat i s'anomena dimensió complexa de M. Observem que M és també una varietat topològica i, com a tal, la seva dimensió és $2n$.

Definició 2.1.5. Aplicació holomorfa entre varietats complexes.
Siguin M i N varietats complexes de dimensions complexes m i n amb atles respectius $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ i $\{V_j, \phi_j\}_{j\in J}$. Direm que una aplicació $h : M \to N$ és holomorfa si, i només si, l'aplicació $\phi_j \circ h \circ \varphi_i^{-1}{}_{|\varphi_i(W_{i,j})} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ és holomorfa, per a qualssevol $i \in I$, $j \in J$. Cal també que $\phi_j \circ h \circ \varphi_i^{-1}{}_{|\varphi_i(W_{i,j})}$ faci commutatiu el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \supset W_{i,j} & \xrightarrow{h} & h(W_{i,j}) \subset N \\ {\scriptstyle \varphi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_j} \\ \varphi_i(W_{i,j}) & \xrightarrow{\phi_j \circ h \circ \varphi_i^{-1}} & \phi_j(W_{i,j}) \end{array}$$

On $W_{i,j} = U_i \cap h^{-1}V_j$. En el diagrama, entenem per h, φ i ϕ, les restriccions respectives: $h_{|W_{i,j}}$, $\varphi_{|W_{i,j}}$ i $\phi_{h(|W_{i,j})}$.

2.2 Superfícies de Riemann

Definirem les superfícies de Riemman i descriurem quan dues superfícies de Riemann són equivalents.

Definició 2.2.1. Superfície de Riemann.
Les varietats complexes de dimensió 2, com a espai topològic, les anomenarem superfícies de Riemann i les denotarem per R. Observem que les superfícies de Riemann són en el fons un parell (M, ϵ), on M és un espai l'espai topològic corresponent i ϵ és l'estructura complexa que li associem. Per tant, si $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ són atles de M no compatibles analíticament, donaran lloc a superfícies de Riemann diferents.

Definició 2.2.2. Superfícies de Riemann equivalents.
Siguin R_1 i R_2 dues superfícies de Riemann amb atles respectius $\{(U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ i $\{(V_j, \phi_j\}_{j\in J}$. Direm que són holomòrficament equivalents si existeix una aplicació $h : R_1 \to R_2$ holomorfa, bijectiva i amb inversa holomorfa. Per com hem definit aplicació holomorfa entre varietats a la *definició 2.1.4*, caldrà que $\phi \circ h \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U_i \cap h^{-1}(V_j)) \to \phi(h(U_i) \cap V_j)$ sigui holomorfa, bijectiva i amb inversa holomorfa, per a tots els $i \in I$, $j \in J$ amb $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Exemple 2.2.3. Esfera de Riemann.
Anem a veure un exemple de superfície de Riemann. Per fer-ho, hem de definir una estructura complexa en un espai topològic de dimensió 2. Escollim com a espai topològic de dimensió 2 l'esfera unitat $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. En la qual, considerem els oberts $U_1 := S^2\backslash\{(0, 0, 1)\}$, $U_{-1} := S^2\backslash\{(0, 0, -1\}$ i les aplicación $\varphi_j(x, y, z) = \frac{x+(j)y\sqrt{-1}}{1-(j)z}$, que definides en l'obert U_j corresponent, són holomorfes. Les cartes $\{(U_1, \varphi_1)\}$ i $\{(U_{-1}, \varphi_{-1})\}$ són analíticament compatibles:

$$\begin{aligned} h : \varphi(U_1 \cap U_{-1}) &\longrightarrow \phi(U_1 \cap \phi U_{-1}) \\ \tfrac{x+y\sqrt{-1}}{1-z} &\longmapsto \tfrac{x-y\sqrt{-1}}{1+z} \end{aligned}$$

Com que $U_1 \cap U_{-1} := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \neq \pm 1\}$, l'aplicació h és clarament holomorfa. Per tant, l'atles $\{(U_1, \varphi_1), (U_{-1}, \varphi_{-1})\}$ és complexe i dóna lloc a una estructura complexa que denotarem per ϵ. El parell (S^2, ϵ) forma una superfície de Riemann, coneguda com a esfera de Riemann.

2.3 Recobridor universal d'una superfície de Riemann

Veurem que el recobriment universal de tota superfície de Riemann també és una superfície de Riemann. De manera més o menys recíproca, demostrarem que tota superfície de Riemann es pot expressar com a quocient del seu recobridor universal pel grup d'automorfismes d'aquest.

Teorema 2.3.1. L'espai recobridor universal d'una superfície de Riemann també és una superfície de Riemann.
Sigui R és una superfície de Riemann, el seu recobriment universal també té una estructura complexa i l'aplicació de recobriment és holomorfa.

Demostració.
Es convenient començar la demostració constatant que existeix un recobridor universal per a qualsevol superfície de Riemann. Això és degut a que, localment, tota superfície de Riemann és homehomorfa a $\mathbb{C}$ i, per tant, localment simplement connexa. En general, un espai topològic localment simplement connex és semilocalment simplement connex. Pel *teorema 1.5.4*, existeix l'espai recobridor universal. Així doncs, donada una superfície de Riemann R, podem descriure el seu espai recobridor universal $\tilde{R}$ de forma anàloga al *teorema 1.5.4*. Per evitar confusions de notació, descrivim explícitament $\tilde{R}$.

Comencem fixant un punt base x_0 d'R. Sigui $x \in R$ i γ un camí arbitrari que uneix x_0 i x; podem fer-ho perquè R és arc-connexa. Considerem tots els possibles parells (γ, x) i definim una classe d'equivalència entre ells: $[(\gamma, x)] = \{(\gamma', x') \mid x' = x$ i γ' és homotòpicament equivalent a $\gamma\}$. El denotarem per $[\gamma, x]$. Definim $\tilde{R}$ com el conjunt de totes aquestes classes d'equivalència.

Sigui $[\gamma, x] \in \tilde{R}$, escollim un entorn U_x de x, simplement connex. Per qualsevol $y \in U_x$, existeix algun camí γ_y que uneix x amb y. Aleshores, $\gamma * \gamma_y$ uneix x_o amb y i cada $y \in U_x$ correspon unívocament a $[\gamma * \gamma_y, y] \in \tilde{R}$. Unívocament, perquè qualsevol altre camí que unís x i y seria homotòpicament equivalent a γ_y. Al conjunt $\{[\gamma * \gamma_y, y] \mid y \in U_x\}$ el denotem per $\tilde{U}_x$, que és un entorn obert de $[\gamma, x]$. Si $\{U_{x_i}\}_{i\in I}$ és un recobriment d'R, aleshores $\{\tilde{U}_{x_i}\}_{i\in I}$ és un rcobriment d'$\tilde{R}$.

Definim p com la projecció de $\tilde{R}$ sobre R, que envia $[\gamma, x]$ a x. L'aplicació p és contínua i holomorfa. A més a més, $(\tilde{R}, p)$ és un recobriment d'R. Així doncs, tenim en $\tilde{R}$ una estructura complexa determinada per l'atles $\{(U_{\tilde{x}_i}, \varphi_{\tilde{x}_i})\}_{i\in I}$, on $\varphi_{\tilde{x}_i}(U_{\tilde{x}_i}) = (\varphi_{x_i} \circ p)(U_{\tilde{x}_i})$. Per ser φ_{x_i} i p holomorfes per tot $i \in I$, ho és també $\varphi_{\tilde{x}_i}$. En la definició de l'atles a $\tilde{R}$, hem suposat que tenim un atles $\{(U_{x_i}, \varphi_{x_i})\}_{i\in I}$ en R, que hi determina la corresponent estructura complexa. Hem vist, doncs, que $\tilde{R}$ és una superfície de Riemann.

Proposició 2.3.2. Elevació de superfícies de Riemann.
Siguin R_1 i R_2 superfícies de Riemann i $(\tilde{R}_1, p_1)$ i $(\tilde{R}_2, p_2)$ els seus espais recobridors universals. Si $h : R_1 \to R_2$ és una aplicació holomorfa, llavors existeix una aplicació holomorfa $\tilde{h} : \tilde{R}_1 \to \tilde{R}_2$, que satisfà la condició de commutativitat $h \circ p_1 = p_2 \circ \tilde{h}$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}_1 & \xrightarrow{\tilde{h}} & \tilde{R}_2 \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_2} \\ R_1 & \xrightarrow{h} & R_2 \end{array}$$

L'aplicació $\tilde{h}$ queda determinada per l'assignació $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Demostració.
Definim $\tilde{R}_1$ i $\tilde{R}_2$ com en el *teorema 2.3.1*: sigui $\tilde{x}_1 = [\gamma_1, x_1]$, on $x_1, x_0 \in R_1$ i γ_1 és un camí que els uneix. Anàlogament, $\tilde{x}_2 = [\gamma_2, x_2] = [\gamma_2, h(x_1)]$.

Podem descriure $\tilde{h}([\gamma, x]) = [\gamma_2 * h(\gamma_1)^{-1} * h(\gamma), h(x)]$, per a qualsevol $[\gamma, x] \in \tilde{R}_1$. Observem que $\tilde{h}(\tilde{x}_1) = \tilde{f}([\gamma_1, x_1]) = [\gamma_2 * h(\gamma_1)^{-1} * h(\gamma_1), h(x_1)] = [\gamma_2, x_2] = \tilde{x}_2$. Clarament, es safisfà la condició de commutativitat. La unicitat de $\tilde{h}$ és única gràcies a *A.2*, el lema d'unicitat d'elevació de camins. Efectivament, $\tilde{h}$ és holomorfa per ser-ho h, així com p_1 i p_2, tal i com hem vist en el *teorema 2.3.1*.

El lema que anunciarem a continuació és fonamental per a poder construir la classificació de les superfícies de Riemann compactes i, sobretot, per a la classificació dels seus espais recobridors. En aquest lema entendrem per $\tilde{R}$ el recobridor universal d'una superfície de Riemann R tal i com l'hem construït en el *teorema 2.3.1*.

Lema 2.3.3. Propietats del grup d'automorfismes.
Sigui $(\tilde{R}, p)$ el recobrior universal d'una superfície de Riemann R. Aleshores, $Aut(\tilde{R}, p)$ compleix les següents propietats:

i. *Donat $x \in R$ i $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ dos elements de la fibra, existeix un automorfisme $\gamma \in Aut(\tilde{R}, p)$ tal que $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.*

ii. *Sigui $\gamma \in Aut(\tilde{R}, p) \backslash \{Id\}$. Per a tot punt $\tilde{x} \in \tilde{R}$, existeix un entorn $\tilde{U}$ tal que $\gamma(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$.*

iii. *El $Aut(\tilde{R}, p)$ actua de manera pròpiament discontinua. Això significa que per a qualsevol subconjunt compacte $K \subset \tilde{R}$, hi ha com a màxim una quantitat finita d'automorfismes de $Aut(\tilde{R}, p)$ pels quals $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$.*

Demostració.

i. Podem expressar $\tilde{x}_1 = [\sigma_1, x]$ i $\tilde{x}_2 = [\sigma_2, x]$, per pertanyer a $\tilde{R}$ i ser elements de la fibra de x. El llaç $\sigma = \sigma_1 * (\sigma_2)^{-1}$ a (R, x) és tal que la seva elevació a $\tilde{R}$ ens envia $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$. Considerem, doncs, $\gamma \in Aut(\tilde{R}, p)$ tal que $p_*\gamma = [\sigma]$ i obtenim que $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

ii. Sigui $x \in \tilde{R}$ i $\tilde{x} = [\sigma, x] \in \tilde{R}$ un element de la seva fibra. Escollim un entorn U de x, que sigui simplement connex, i definim $\tilde{U}$ com la component connexa de $p^{-1}(U)$ que conté $\tilde{x}$.

   Suposem que existeix un $\gamma \in Aut(\tilde{R}, p)$ tal que $\gamma(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Per tant, existiran $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{R}$ tals que $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Pel *teorema 1.4.5*, sabem que el grup d'automorfismes d'un espai recobridor deixa invariants les fibres; és a dir, $p \circ \gamma = p$. En particular, $p(\tilde{x}_2) = p(\gamma(\tilde{x}_1)) = p(\tilde{x}_1)$, que suposarem igual a x_0. Al haver escollit U simplement connex, $\tilde{x}_1 = [\sigma_1, x] = [\sigma_2, x] = \tilde{x}_2$, ja que σ_1 i σ_2 són camins de x en x_0 homotòpicament equivalents. Així doncs, hem trobat un obert de $\tilde{R}$ el qual té un punt fix, $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}$. Aplicant la *preposició 1.3.5*, per mitja de la qual sabem $Aut(\tilde{R}, p)$ actua sense punts fixos, γ ha de ser per força la identitat.

iii. Suposem que existeix una família $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Aut(\tilde{R}, p)$ tal que $\gamma_n(K) \cap K \neq \emptyset$, on tot automorfisme és diferent de la resta. Existeixen doncs, successions respectives $\{\tilde{x}_n\}$ i $\{\tilde{y}_n\}$ tals que per cada $n \in \mathbb{N}$ es compleix que $\gamma_n(\tilde{x}_n) = \tilde{y}_n$. Com que per a tota succesió continguda en un conjunt compacte, existeix una subsuccesió amb límit en el compacte, i K és un compacte: existeixen $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in K$ i $\gamma \in Aut(\tilde{R}, p)$, tals que $lim_{n\to}\tilde{x}_n = \tilde{x}$, $lim_{n\to}\tilde{y}_n = \tilde{y}$, $lim_{n\to}\gamma_n = \gamma$ i $\gamma(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

   Apliquem, novament, el *teorema 1.4.5* i obtenim que $p(\tilde{y}) = p(\gamma(\tilde{x})) = p(\tilde{x})$. Agafem un entorn U de $p(\tilde{x})$ prou petit, de tal manera que $(p^{-1}(U), p)$ sigui un espai recobridor de U. Anomenem a les components connexes de $p^{-1}(U)$ que content $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$, $\tilde{U}_x$ i $\tilde{U}_y$, respectivament. Existirà, doncs, un $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del qual $\gamma_n(U) \cap U = \emptyset$, perquè la successió de $\tilde{x}_n$ convergeixen a $\tilde{x}$.

   A més a més, $p \circ \gamma(\tilde{U}_x) = U$, per ser $(p^{-1}(U), p)$ un espai recobridor de U. Per tant, no només $\gamma(\tilde{x}_n) \in \tilde{U}_y$, per tot $n \geq n_0$, sinó que $\gamma(\tilde{U}_x) \subset \tilde{U}_y$ i els dos entorns són iguals pel *lema 1.1.3*, que ens assegura la uniformitat entre els elements de la fibra. En particular, si $n \geq n_0$, $(\gamma_{n+1})^{-1} \circ (\gamma_n)(\tilde{U}_x) = \tilde{U}_x$. Per la propietat *ii)*, que acabem de veure, $(\gamma_{n+1})^{-1} \circ (\gamma_n) = Id$.Per tant, la quantitat d'automorfismes que donat un compacte K, compleixen $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$, és finita; ja que $\gamma_n = \gamma_{n_0}$.

Proposició 2.3.4.
Sigui $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un subgrup discret, $\Lambda \neq \{0\}$. Aleshores, $\Lambda =< w_1 >$, amb $w_1 \in \mathbb{C}^*$, o $\Lambda =< w_1, w_2 >$, amb $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$ i $\mathbb{R}$-linealment independents.

Demostració.
Per ser Λ disctret, existeix un element $w_1 \in \Lambda$ tal que $|w_1| = min\{w \mid w \in \Lambda - \{0\}\}$. Si $\lambda =< w_1 >$ ja hem acabat. Si no, escollim l'element $w_2 \in \Lambda$ com compleixi $|w_2| = min\{|w| \mid w \in \Lambda - \{w_1\}\}$.

Veguem que $\frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}$. Si $\frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{R}$, existiria algun $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < \frac{w_2}{w_1} < n + 1$. Restant n i aplicant valor absolut, obtenim $0 < |\frac{w_2}{w_1} - n| < 1$ i, per tant, $|w_2 - nw_1| < |w_1|$. Com que $w_2 - nw_1 \in \Lambda - < w_1 >$ i $|w_2 - nw_1| < |w_1| < |w_2|$, obtenim una contradicció per la definició de w_2.

Per a la segona part ultilitzarem que $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$ i, per tant, $\{w_1, w_2\}$ són una base de $\mathbb{C}$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial. Per qualsevol $w \in \Lambda$, existeixen λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$. Podem definir també $w' = w - n_1 w_1 - n_2 w_2$, on n_1 i n_2 són enters tals que $|\lambda_1 - n_1| \leq \frac{1}{2}$, $|\lambda_2 - n_2| \leq \frac{1}{2}$. Llavors, $|w'| = |(\lambda - n_1)w_1 + (\lambda_2 - n_2)w_2| < |\lambda_1 - n_1||w_1| + |\lambda_2 - n_2||w_2| \leq \frac{1}{2}(|w_1| + |w_2|) \leq |w_2|$; la desigualtat triangular anterior és esticte ja que w_1 i w_2 són linealment independents. Obtenim que $|w'| < |w_2|$. Per definició d'w_2, $w' \in < w_1 >$. Obtenim així que $w = w' + n_1 w_1 + n_2 w_2$, que clarament pertany a l'espai generat per w_1 i w_2. Com que w era un element qualsevol de λ, $\Lambda =< w_1, w_2 >$

Definició 2.3.5. Xarxes en $\mathbb{C}$.
Una xarxa a $\mathbb{C}$ és un conjunt discret de punts $\Lambda := \{\gamma \in \mathbb{C} \mid \gamma = n w_1 + m w_2,$ on $n, m \in \mathbb{Z}\}$, amb $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Hem vist a la *proposició 2.3.4*, que w_1 i w_2 han de ser $\mathbb{R}$-linealment independents. Direm que dos punts z, z' de $\mathbb{C}$ són equivalents respecte a la xarxa si existeix algun $\gamma \in \Lambda$ tal que $z + \gamma = z'$. Denotarem per $[z]$ a la classe d'equivalència respecte a Λ.

Tota xarxa Λ es pot reescriure com a $\Lambda_\tau := \{n\tau + m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, ja que $\frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}$ i, clarament, generen la mateixa xarxa. A més a més, si τ pertany a l'hiperpla inferior ($Im(\tau) < 0$), podem reedefinir τ com a $-\tau$. Clarament la xarxa generada per τ i per $-\tau$ són la mateixa. D'aquesta manera, tota xarxa en $\mathbb{C}$ és pot expressar com a Λ_τ, on $\tau \in \mathbb{H}$. Direm que $\{1, \tau\}$ és una base de la xarxa.

Proposició 2.3.6.
Sigui $\Lambda \subset Aut(\tilde{R}, p)$, el grup d'automorfismes biholomorfs de $\tilde{R}$. Aleshores, el quocient $\tilde{R}/\Lambda$ és també una superfície de Riemann.

Si Λ és exactament $Aut(\tilde{R}, p)$, llavors el quocient $\tilde{R}/\Lambda$ és biholomorf a R.

Demostració.
Fixat $\tilde{x} \in \tilde{R}$, definim la classe d'equivalència respecte Λ com $[\tilde{x}] := \{\tilde{y} \in \tilde{R} \mid \gamma(\tilde{x}) = \tilde{y}$, per algun $\gamma \in \Lambda\}$, que dona lloc a l'aplicació de pas al quocient $\pi : \tilde{R} \to \tilde{R}/\Lambda$, on $\pi(\tilde{x}) = [\tilde{x}]$. La topologia quocient en $\tilde{R}/\Lambda$ ve donada per la següent caracterització dels seus oberts: U és un obert en $\tilde{R}/\Lambda$ sí, i només sí, $\pi^{-1}(U)$ és un obert de $\tilde{R}$. Volem veure que $\tilde{R}/\Lambda$ és una superfície de Riemann.

Tal i com hem definit $\tilde{R}/\Lambda$, és un espai de Hausdorff. És a dir, que donats $[\tilde{x}]$, $[\tilde{y}]$ dos punts diferents de $\tilde{R}/\Lambda$, existeixen entorns $U_{\tilde{x}}$, $U_{\tilde{y}}$ disjunts. Donada $\gamma_i \in \Lambda$, $\tilde{x}' = \gamma_i(\tilde{x})$ no pot pertanyer a $[\tilde{y}]$; si hi pertenyés, existiria un $\gamma_j \in \Lambda$ tal que $\gamma_j(\tilde{y}) = \tilde{x}'$ i, en conseqüència, $(\gamma_j^{-1} \circ \gamma_i)(\tilde{x}) = \tilde{y}$ obtenint, per tant, una contradicció.

Existeixen entorns U i V prou petits de $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$, respectivament, pels quals $\gamma_i(U) \cap \gamma_j(V) = \emptyset$, per tot γ_i, $\gamma_j \in \Lambda$, ja que $\tilde{R}$ és Hausdorff. Per l'apartat tres del *lema 2.3.2*, ens quedem només amb una quantitat finita de $\gamma_i \in \Lambda$. Com que existeixen entorns disjunts per a qualssevol dos punts de $\tilde{R}$, agafant la intersecció de tots els entorns de $\gamma_i(\tilde{x})$ que són disjunts amb els entorns dels $\gamma_j(\tilde{y})$, obtenim un obert que serà l'entorn U_i. Finalment, definim l'entorn $U := \cup U_i$ de $[\tilde{x}]$.

Procedim anàlogament per $[\tilde{y}]$. Obtenim així $\pi(U)$ i $\pi(V)$, entorns disjunts de

$[\tilde{x}]$ i $[\tilde{y}]$. Si $\Lambda = Aut(\tilde{R}, p)$, per tot $x \in R$, $[\tilde{x}] = \{\gamma(\tilde{x})$, on $\gamma \in Aut(\tilde{R}, p)\}$, que per definició és la fibra de x. En conseqüència, $\tilde{R}/\Lambda$ és isomorf a R. Com que p és biholomorfa i π també, $\frac{\tilde{R}}{\Lambda}$ i R són biholomorfs. Pel *teorema 2.3.1*, sabem que el recobriment universal d'una superfície de Riemann és una superfície de Riemann i l'aplicació de recobriment és holomorfa.

Definició 2.3.8. Transformacions de Möbius.
Sigui $\tau \in \mathbb{C}$. Les transformoacions del tipus:

$$\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

On $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $ad - bc = 1$, s'anomenen transformacions de Möbius. N'hi ha de tres tipus:

1. Parabòlica. Si l'aplicació γ és conjugada a una translació $\gamma_0(z) = z + \alpha$ no trivial, amb $\alpha \in \mathbb{C}$.
2. El·líptica. Si l'aplicació γ és conjugada a una rotació $\gamma_0(z) = ze^{i\theta}$ no trivial, amb $\theta \in \mathbb{C}$.
3. Hiperbòlica. Si l'aplicació γ és conjugada a una homotècia $\gamma_0(z) = \tau z$ no trivial, amb $\tau \in \mathbb{C}$.

Es pot comprovar que no n'hi ha cap més.

Lema 2.3.9.
Sigui $\gamma \neq Id$ una transformació de Möbius en R i $(\tilde{R}, p)$ el seu recobridor universal. Aleshores:

1. γ és parabòlica si, i només si, te un únic punt fix a $\tilde{R}$.
2. γ és el·líptica si, i només si, te dos punts fixos conjugats.
3. γ és hiperbòlica si, i només si, te dos punts fixos a $\tilde{R}$.

Demostració.
El lema anterior és necessari per a l'estudi de les superfícies de Riemann compactes de gènere més gran o igual que 2 que realitzarem a la *Secció 3.1.* Tot i això, l'estudi de les transformacions de Möbius s'escapa de l'objectiu del treball i és per això que no el demostrem .[4]

[4] Vegeu [2]. Chapter 2, section 3.

3 Estudi de les superfícies de Riemann compactes

3.1 Categorització en funció del gènere

Aquesta secció es basa en el teorema d'uniformització de Riemann, que presentem sense demostració degut a la seva dificultat. Gràcies a ell, podem classificar les diferents superfícies de Riemann compactes en tres grups: les de gènere 0 seran biholomorfes a l'esfera de Riemann; les de gènere 1, biholomorfes a un quocient de $\mathbb{C}$; i les de gènere igual o superior a 2, biholomorfes a un quocient de $\mathbb{H}$.

Teorema 3.1.1. Teorema d'uniformització.
Sigui R una superfície de Riemann simplement connexa. Aleshores R és biholomorfa a $\tilde{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ o bé a $\mathbb{H}$.

Nota històrica.
La teoria de superfícies de Riemann estableix un seguit de connexions entre l'aritmètica i la geometria i és un camp de recerca actiu en l'actualitat. El teorema d'uniformització és el germen d'aquesta branca de les matemàtiques. Va ser demostrat, quasi simultàniament, per Paul Koebe i Henri Poincaré l'any 1907, després de diverses temptatives al llarg de tot un segle.

Malauradament, la demostració del teorema està lluny de l'abast d'aquest treball. És per això que no presentem una demostració.[5]

Corol·lari 3.1.2.
Tota superfície de Riemann es pot expressar com a $\tilde{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$ o com a quocient d'alguna d'elles per Λ, on Λ és una xarxa en $\mathbb{C}$ o la seva restricció a $\mathbb{H}$.

Demostració.
Sigui R una superfície de Riemann que no és simplement connexa. Pel *teorema 2.3.1*, existeix un recobridor universal d'aquesta que és una superfície de Riemann i, pel *teorema 3.1.1*, aquest és biholomorf a $\tilde{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ o bé a $\mathbb{H}$.

Finalment i per la *proposició 2.3.6*, $\tilde{R}/Aut(\tilde{R},p)$ és biholomorfa a R. Com veurem en la *proposició 3.1.4*, $Aut(\tilde{R},p)$ és una xarxa de $\mathbb{C}$.

[5] Vegeu [D.4].

Lema 3.1.3.
Sigui R una superfície de Riemann simplement connexa. Podem descriure els elements de $Aut(R)$ en funció de si R és biholomorfa a $\tilde{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$.

Si R és biholomorfa a $\tilde{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{H}$, aleshores tot element de $Aut(R)$ és una transformació de Möbius. Si R és biholomorfa a $\mathbb{C}$, aleshores els $\gamma \in Aut(R)$ són del tipus $\gamma(z) = \alpha z + \beta$, amb α, $\beta \in \mathbb{C}$ i $\alpha \neq 0$.

Demostració.
Aquest lema només és important, dins del marc del treball, per a poder fer un pas en la *proposició 3.1.4*. És per aixo que el mostrem sense demostració. [6]

Proposició 3.1.4.
Sigui $\Lambda \subset Aut(\mathbb{H}, p)$, tal que $\Lambda - \{Id\}$ no te punts fixos a $\mathbb{H}$ i Λ actua de manera pròpiament discontínua. Si Λ és abelià, aleshores és cíclic.

Demostració.
Sigui $\gamma_0 \in \Lambda$, $\gamma_0 \neq Id$. Pel *lema 2.3.9*, γ_0 no pot ser el·líptica, ja que γ_0 no te punts fixos a $\mathbb{H}$.

Si γ_0 fos parabòlica, aleshores podem descriure-la com $\gamma_0(z) = z + b_0$, per algun $b_0 \in \mathbb{R}$, $b_0 \neq 0$. La *definició 2.3.8*, ens diu que $\gamma_0(z) = z + \alpha$ amb $\alpha \in \mathbb{C}$, però si $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ iterant proutes vegades γ_0, o $-\gamma_0$, sortiríem de l'hiperplà superior. En tal cas, $\gamma_0 \notin Aut(\mathbb{H}, p)$ i obtenim una contradicció.

Com que Λ és abelià, cal que $\gamma_0(\gamma) = \gamma(\gamma_0)$, per a tot $\gamma \in \Lambda$. Pel *lema 3.1.3*, $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+b}$ és una transformació de Möbius. Ajuntant aquestes dues condicions obtenim que $\gamma(z) = z + b$, amb $b \in \mathbb{R}$. Efectivament,

$$\begin{gathered}
\gamma_0(\gamma(z)) = \tfrac{a(z+b_0)+b}{c(z+b_0)+d} = \tfrac{az+b}{cz+d} + b_0 = \gamma(\gamma_0(z)) \\
(az + ab_0 + b)(cz + d) = (az + b + b_0cz + b_0d)(cz + cb_0 + d) \\
acz^2 + [ad + (ab_0 + b)c]z + (ab_0 + b)d = \\
(a + b_0c)cz^2 + [(a + b_0c)(cb_0 + d) + (b + b_0d)c]z + (b + b_0d)(cb_0 + d)
\end{gathered}$$

Igualant component a component la darrera igualtat obtenim les restriccions següents: en la de x^2 obtenim $b_0c = 0$ i per ser$b_0 \neq 0$, $c = 0$; de la de x no n'obtenim cap informació, ja que ens queda $ad = ad$; en la de 1 tenim $(ab_0 + b)d = (b + b_0d)(d)$, que es tradueix en que $a = d$ i al ser γ una transformació de Möbius, cal que $ad - bc = ad = 1$ i $a = d = \pm 1$. Així doncs, $\Lambda := \{\gamma \in Aut(\mathbb{H}, p) \mid \gamma(z) = z + b, b \in \mathbb{R}\}$.

Utilitzant que Λ actua de manera pròpiament discontínua, obtenim que és un conjunt discret. La *proposició 2.3.4* ens indica que $\Lambda = \{Id\}$, $< w >$ o $< w_1, w_2 >$. Per com hem descrit Λ, obtenim un homeomorfisme amb $\mathbb{R}$. Així doncs, $\Lambda \neq < w_1, w_2 >$ i $\Lambda =< w >$, perquè $\gamma_0 \notin \{Id\}$ i pertany a Λ. Hem vist que Λ és cíclic, ja que tot conjunt finit generat per un únic element és cíclic.

[6] Vegeu [2]. Chapter 2, section 3. Möbius Transformations.

Si γ_0 fos hiperbòlica, podem descriure-la com $\gamma_0(z) = \lambda_0 z$ amb $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. L'argument és el mateix que en el cas parabòlic, si λ_0 no fos real acabaríem escapant de l'hiperplà superior. Anàlogament al cas parabòlic, volem que $\gamma_0(\gamma) = \gamma(\gamma_0)$ i sabem que γ és una transformació de Möbius:

$$\gamma_0(\gamma(z)) = \lambda_0 \tfrac{az+b}{cz+d} = \tfrac{a\lambda_0 z+b}{c\lambda_0 z+d} = \gamma(\gamma_0(z))$$
$$(\lambda_0 az + \lambda_0 b)(c\lambda_0 z + d) = (cz + d)(a\lambda_0 z + b)$$
$$\lambda_0^2 acz^2 + (\lambda_0 ad + \lambda_0^2 bc)z + \lambda_0 bd = \lambda_0 acz^2 + (\lambda_0 ad + bc)z + bd$$

Utilitzant que $\lambda_0 \neq 0$, obtenim que $ac = 0$, $bc = 0$, $bd = 0$. Com que γ és una transformació de Möbius, cal que $ad = 1$. De les igualtats $ac = 0$ i $ad = 1$ en treiem que $c = 0$; de $ad = 1$ i $bd = 0$ que $b = 0$. Així doncs, qualsevol $\gamma \in \Lambda$ es pot escriure com $\gamma(z) = \lambda z$, amb $\lambda = \frac{a}{d} \in \mathbb{Q}^+$.

Λ està en bijecció amb $\mathbb{Q}^+$, a on podem aplicar la funció logaritme. Això doncs, la composició morfismes:

$$\Lambda \to \mathbb{C}^* \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$
$$\gamma_\lambda \mapsto \lambda \mapsto log(\lambda) \mapsto log(\lambda)$$

Obtenim a $\mathbb{C}$ un conjunt discret generat per la suma de logaritmes, el qual està inclòs en $\mathbb{R}$. Com que Λ actua de manera pròpiament discontínua, Λ és finit i, per tant, està generada per un únic element. Tal i com volíem veure.

Proposició 3.1.5. Superfícies de Riemann compactes de gènere 0**.**
Una superfície de Riemann R té un recobridor universal $\tilde{R}$ biholomorf a l'esfera de Riemann $\tilde{\mathbb{C}}$ sí, i només sí, R te gènere 0. biholomorfa a $\tilde{\mathbb{C}}$.

Demostració.
Suposem que $\tilde{R} = \tilde{\mathbb{C}}$. En virtut de la *proposició 1.5.5*, $Aut(,p)$ és trivial; és a dir, $Aut(,p) = \{Id\}$. Pel *teorema 2.3.6*, R és biholomorf a $\tilde{R}/Aut(,p) = \tilde{\mathbb{C}}/\{Id\}$. Clarament, R te gènere 0.

Per demostrar la implicació inversa, observem que si R és és el seu propi recobridor universal, per ser de gènere 0. Tota superfície de gènere 0 compacta és homeomorfa a S^2. D'entre les superfícies de Riemann a les que R pot ser biholomorfa, pel *teorema 3.1.1*, només $\tilde{\mathbb{C}}$ és compacte. Com que la compacitat és un invariant topològic, R és biholomorfa a $\tilde{\mathbb{C}}$.

Proposició 3.1.6. Superfícies de Riemann compactes de gènere 1.
Sigui R *és una superfície de Riemann compacta de gènere* 1. *Aleshores,* R *és holomorfa a* $\mathbb{C}/\Lambda$*, on* Λ *és una xarxa de* $\mathbb{C}$.

Demostració.
Per la *proposició 3.1.5*, $\tilde{\mathbb{C}}$ no pot ser un recobridor universal de R. Suposem que $\tilde{R}$ fos biholomorf a $\mathbb{H}$. Utilitzant la *proposició 2.3.6*, R és biholomorf a $\mathbb{H}/\Lambda$, on $\Lambda = Aut(\tilde{R}, p)$ és un grup discret de $\mathbb{H}$. Per la *proposició 2.3.4*, sabem que Λ ha de ser $\{Id\}$, $< w_1 >$ o $< w_1, w_2 >$, però en els dos primers casos $\mathbb{H}/\Lambda$ no dona lloc a una superfície de Riemann compacta. Així doncs, R és biholomorf a $\mathbb{H}/\Lambda$, on Λ és una xarxa en $\mathbb{H}$.

Aplicant la *proposició 1.5.5*, Λ ha de ser isomorf al grup fonamental de R, que és un grup abelià de Rang 2. Utilitzant el *lema 2.3.10*, Λ és cíclic. Hem obtingut una contradicció, doncs un grup de rang 2 no pot ser cíclic.

Pel *teorema 3.1.1*, el grup fonamental de R és $\mathbb{C}$. Així doncs, R és holomorfa a $\mathbb{C}/Aut(\mathbb{C}, p)$.

Proposició 3.1.7. Superfícies de Riemann compactes de gènere igual o superior a 2.
Sigui R *és una superfície de Riemann compacta de gènere*$\geq$ 2. *Aleshores,* R *és holomorfa a* $\mathbb{H}/\Lambda$*, on* Λ *és una xarxa de* $\mathbb{H}$.

Demostració
Anàlogament a la proposició anterior, $\tilde{\mathbb{C}}$ no pot ser un recobridor universal de R. Suposem que $\tilde{R}$ és biholomorf a $\mathbb{C}$ i definim $\Lambda = Aut(\tilde{R}, p)$. Per la *definció 2.3.8* ,qualsevol $\gamma \in \Lambda$ es pot escriure com a $\gamma(z) = z + b$, on $b \in \mathbb{C}$. Mitjançant l'aplicació d'inclusió ϕ:

$$\begin{aligned} \phi : \Lambda &\to \mathbb{C} \\ \gamma &\mapsto \gamma(0) \end{aligned}$$

Observem que $\{\gamma(0) | \gamma \in \Lambda\}$ és un subgrup de $\mathbb{C}$, al qual denotarem per Γ. Per la *proposició 2.3.4*, si veiem que Γ és discret, aleshores $\Gamma = \{Id\}$, $< w_1 >$ o $< w_1, w_2 >$, amb w_1, w_2 $\mathbb{R}$-linealment independents..

Si Γ no fos discret, tindria un punt d'acumulació $\tilde{b}_0 = \gamma_0(0)$; és a dir, existiria una succesió de $b_n \to \tilde{x}_0$, pels quals $\gamma_n(0) = b_n$ pertanyerien al conjunt $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |\tilde{x}_0| + 1\}$, per alguna $n \in \mathbb{N}$ prou gran. El conjunt K és compacte i, pel *lema 2.3.3*, hi ha una quantitat finita de $\gamma \in \Lambda$ tals que $\gamma(K) \cap K \neq \emptyset$, però acabem de veure que n'hi ha infinits. Per tant, Γ ha de ser discret.

A continuació, apliquem la *proposició 2.3.6* per veure què $\mathbb{C}/\Lambda$ mai dona lloc a una superfície de Riemann compacta de gènere 2 i, per tant, $\tilde{R}$ ha de ser biholomorf a $\mathbb{H}$.

Si $\Lambda = \{Id\}$ o $< w_1 >$, aleshores $\mathbb{C}/\Lambda$ no és compacte. Acabem de provar en la *proposició 3.1.6* que $\mathbb{C}/ < w_1, w_2 >$ és un torus.

3.2 Espai de Moduli de les superfícies de Riemann compactes de gènere 1

Ens centrarem, ara, en la classificació de les superfícies de Riemann compactes de gènere 1. Determinarem quan dos torus són analíticament equivalents i descriurem una regió del pla complex tal que els seus punts estan en bijecció amb les possibles estructures complexes en un torus.

Teorema 3.2.1. Torus analíticament equivalents.
Per a qualssevol dos punts $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, els torus R_τ i $R_{\tau'}$ són biholomorficament equivalents sí, i només sí, és satisfà la relació següent:

$$\tau' = \tfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

on $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i, a més a més, $ad - bc = 1$.

Demostració.
Sabem, per *3.1.4* i *2.2.6*, que tot torus es pot expresar com a $\mathbb{C}/\Lambda$, on $\Lambda = Aut(\mathbb{C}, p)$ és una xarxa de $\mathbb{C}$. En la *definició 2.3.5*, hem vist que qualsevol xarxa és biholomorfa a $\Lambda_\tau := \{n\tau + m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, amb $\tau \in \mathbb{H}$.

Suposem que els torus $R_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ i $R_{\tau'} := \mathbb{C}/\Lambda'_\tau$ són biholomorficament equivalents. En virtut de la *proposició 2.3.2*, existeix una elevació $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de l'aplicació holomorfa $f : R_\tau \to R_{\tau'}$, que també és holomorfa. Aquesta fa commutatiu el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_\tau"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_{\tau'}"] \\ \mathbb{C}/\Lambda_\tau \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'} \end{tikzcd}$$

Sabem que $\pi_\tau(\tau) = \pi_\tau(1) = \pi_\tau(0)$, així doncs, $f(\pi_\tau(\tau)) = f(\pi_\tau(1)) = f(\pi_\tau(0)) = m\tau' + n$, amb m i n enters, ja que $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ i $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ són biholomorfs.

Al ser $\tilde{f}$ holomorfa, la podem escriure com $\tilde{f}(z) = \alpha z + \beta$, amb $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Per anàlisi complexa, sabem que $\alpha \neq 0$, ja que sinó $\tilde{f}$ seria constant, cosa que impedeix que sigui holomorfa. Si enlloc de escollir $\tilde{f}$, ens quedem amb una translació, $\tilde{f}$ segueix sent holomorfa i enviant Λ_τ a $\Lambda_{\tau'}$. Sense pèrdua de generalitat, podem redefinir $\tilde{f}(z) = \alpha z$ i $\tilde{f}(0) = 0$. Recordem que les elevacions d'una funció no són úniques.

Utilitzant la commutativitat del diagrama, $\pi_{\tau'} \circ \tilde{f} = f \circ \pi_\tau$, $\tilde{f}(\tau), \tilde{f}(1)$ i $\tilde{f}(0)$ són iguals en l'espai quocient $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$. Precisament per ser $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(\tau)$ i $\tilde{f}(1)$ pertanyen a $\Lambda_{\tau'}$. És a dir, $\tilde{f}(\tau) = a\tau' + b$ i $\tilde{f}(1) = c\tau' + d$, amb $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Per tant, hem obtingut una descripció explícita de $\tilde{f}$ i podem expressar-la en forma de matriu.

$$\begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau' \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriu anterior és l'associada a $\tilde{f}$.

Si el vector $(\tau, 1)$ genera Λ, també ho fa $(\bar{\tau}, 1)$; ja que $\frac{\bar{\tau}}{1} \notin \mathbb{R}$ i $|\tau| = |\bar{\tau}|$. Per ser $\tilde{f}$ holomorfa, si envia $(\tau, 1)$ a $(\tau', 1)$, enviarà $(\bar{\tau}, 1)$ a $(\bar{\tau'}, 1)$. Obtenim, doncs, la igualtat matricial següent:

$$\begin{bmatrix} \tau & \bar{\tau} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau' & \bar{\tau'} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ser $\tilde{f}$ biholomorfa, podem fer el procés a la inversa de forma anàloga. És a dir, considerar la matriu inversa $\tilde{f}^{-1}$, també holomorfa, amb coeficients a', b', c', d' enters. L'aplicació ens enviarà $(\tau, 1)$ a $(\tau', 1)$ i el conjugat de $(\tau, 1)$ al de $(\tau', 1)$. Composant $\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f}$, obtenim una nova igualtat:

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau' & \bar{\tau'} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau' & \bar{\tau'} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Clarament, la matriu $\begin{bmatrix} \tau' & \bar{\tau'} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ és de rang 2 i, per tant, invertible. Això és perquè 1 i τ són $\mathbb{R}$-linealment independents i, conseqüentment, $\tau' - \bar{\tau'} = 2\lambda i$, amb $\lambda \neq 0$. Per tant, $\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} = Id$. Aplicant determinants a les dues bandes de les matrius respectives, obtenim:

$$\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

Però els determinants de $\tilde{f}$ i de la seva inversa han de ser enters, ja que els seus coeficients ho són. Així doncs, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = \pm 1$. Si el determinant de les matrius fos -1, geomètricament implicaria que les xarxes $< 1, \tau >$ i $< 1, \tau' >$ tenen una malla equivalent, però orientades a l'inrevés. Com que el vector 1 és constant, τ o τ' hauria de pertànyer a $\mathbb{C} \backslash \mathbb{H}$, contradicció. Per tant, $ad - bc = 1$.

Recíprocament, suposem que es compleix la relació entre τ i τ'. Aleshores, podem descriure l'aplicació $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto (c\tau' + d)z \end{aligned}$$

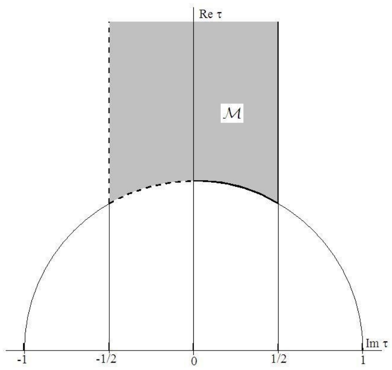
que és holomorfa. Observem que $\tilde{f}$ envia 1 a $c\tau' + d$ i $\tau = \frac{a\tau'+b}{c\tau'+d}$ a $a\tau' + b$, ambdós elements de la xarxa generada per $\{1, \tau'\}$. Per tant, $f = \tilde{f}_{|\mathbb{C}/\Lambda_{tau}} : \mathbb{C}/\Lambda_\tau \to \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ és biholomorfa. Hem provat doncs que els torus $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ i $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ són biholomorficament equivalents.

Definició 3.2.2. Espai de moduli del torus.
Definim M_1 com el conjunt de totes les classes d'equivalència del torus i l'anomenem espai de moduli del torus. Definir el grup modular $PSL(2,\mathbb{Z}) = \{\gamma \in Aut(\mathbb{H})\}$, on γ és una transformació de Möbius. Pel *teorema 3.2.1*, podem descriure M_1 com l'espai quocient $\mathbb{H}/PSL(2,\mathbb{Z})$.

Proposició 3.2.3. Domini fonamental de l'espai de moduli del torus.
Sigui $\Lambda := \{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ *un xarxa en* $\mathbb{C}$, *existeix una xarxa equivalent* Λ_τ, *on* τ *compleix els requisits següents:*

1. $Im(\tau) > 0$
2. $-\frac{1}{2} < Re(\tau) \leq \frac{1}{2}$
3. $|\tau| \geq 1$ i $Re(\tau) \geq 0$, si $|\tau| = 1$

Al domini del pla complex desrit pels tres punts anterior el denotarem per $\mathcal{M}$. *A continuació, se'n mostra una representació:*



Demostració.
Hem vist en la *3.1.2*, que sempre podem quedar-nos amb un Λ_τ, on $\tau \in \mathbb{H}$. Observem que si definim $\tau = \frac{w_2}{w_1}$ i no pertany a $\mathbb{H}$, és suficient canviar la base $\{w_1, w_2\}$ per $\{-w_1, -w_2\}$ per tal que hi pertanyi.

Podem suposar que $|w_1| \leq |w_2|$, canviant, si fes falta, $\{w_1, w_2\}$ per $\{w_2, w_1\}$. La xarxa $\Lambda_\tau := \{n + m\tau \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, amb $\tau = \frac{w_2}{w_1}$, és equivalent a Λ. Ja hem vist que és compleix que $|\tau| \geq 1$. Suposem que $\tau \in \mathbb{H}$. Si $|\tau| \geq 1$ i $Re(\tau) < 0$, pel canvi de base a $\{-w_2, w_1\}$, obtenim un $\tau' = \frac{w_1}{-w_2} = -\frac{1}{\tau} = -\tau^{-1} = -e^{-\sigma i}$, tal que $Re(\tau') \geq 0$ i $|\tau'| = 1$. Observem que $e^{-\sigma i}$ és el conjugat de τ, això implica que $Re(e^{-\sigma i}) < 0$ i $Im(e^{-\sigma i}) < 0$. Per tant, $\tau' = -e^{-\sigma i}$ te part real i imaginaria positives.

Suposem que $|Re(\tau)| > \frac{1}{2}|$, sigui n el primer natural, pel qual $|Re(\tau \pm n)| \geq \frac{1}{2}|$. Redefinim la base de Λ com a $\{w_1, w_2 \pm nw_1\}$ i obtenim que $\tau' = \frac{w_2 \pm nw_1}{w_1} = \tau \pm n$ compleix la segona condició de la proposició.

Proposició 3.2.4.
Sigun Λ_τ, Λ'_τ dos torus analíticament equivalents que pertanyen al domini fonamental $\mathcal{M}$. Aleshores, $\tau = \tau'$.

Demostració.
Donades dues xarxes equivalents amb bases respectives $\{1, \tau\}$ i $\{1, \tau'\}$, tals que $\tau, \tau' \in \mathcal{M}$, aleshores $\tau = \tau'$.

Sabem que si les xarxes són equivalents, els torus respectius $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ i $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ són biholomorfs i, per la *preposició 3.1.4*, $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, amb $ad - bc = 1$.

Per tant, $Im(\tau') = Im(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\frac{-c\tau+d}{-c\tau+d}) = \frac{Im((ad-bd)\tau - ac\tau^2+bd)}{|c\tau+d|^2} = \frac{Im(\tau)}{|c\tau+d|^2}$. Suposem que τ i τ' pertanyen els dos a la regió $\mathcal{M}$. Podem suposar que $Im(\tau') \geq Im(\tau)$. Si no fos així, invertim τ i τ' en descripció d'un respecte l'altre. Podem fer-ho perquè hem vist en *1.3.4*, que juguen un paper simètric. Aleshores, $|c\tau + d| \leq 1$. Estudiem els diferents casos i vegem que $\tau = \tau'$ en qualsevol d'ells.

Cas $c = 0$: llavors $d = \pm 1$ i, com que $ad - bd = 1$, implica que $a = d = \pm 1$. Així doncs, podem reescriure la igualtat $\tau' = \frac{a\tau+b}{a} = \tau \pm b$. Com que τ i τ' pertanyen a $\mathcal{M}$, la seva part real està continguda en $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. Així doncs, $|b| = |\tau' - \tau| < 1$ i $b = 0$, ja que b és un enter.

Cas $c \neq 0$: llavors $|\tau + \frac{d}{c}| \leq |\frac{1}{c}|$. Si $|c| \geq 2$, aleshores $|\tau + \frac{d}{c}| \leq |\frac{1}{2}|$. Utilitzant que $\tau \in \mathcal{M}$ i el més a prop que pot estar de la recta real és a una distància de $\frac{\sqrt{3}}{2}$: que és dóna quan $|\tau| = 1$ i la seva part real val $\frac{1}{2}$, obtenim una contradicció. Si $|\tau + \frac{d}{c}| \leq |\frac{1}{2}|$, tenim que τ està a una distància, com a màxim, d'$\frac{1}{2}$ de la recta real. Per tant, $|c| = \pm 1$ i $|\tau \pm d| \leq 1$. Com que $|Im(\tau)| \leq \frac{1}{2}$, necessitem que $d = 0$ o $d = \pm 1$.

Estudiem que passsa quan $d = \pm 1$: observem que $|\tau - 1| \leq 1$ sí, i només sí, $\tau = e^{\pi i/3}$; en tal cas, τ està a distància exactament 1 de 1. En canvi, $|\tau - 1| \leq 1$ mai es produeix, perquè $\tau = e^{2\pi i/3} \notin \mathcal{M}$. Per tant, tenim que $d = -c = \pm 1$ i, conseqüentment,$|c\tau + d| = |c||\tau - 1| = 1$. Havíem vist que $Im(\tau') = \frac{Im(\tau)}{|c\tau+d|^2} = Im(\tau)$, i com que $\mathcal{M} \subset \mathbb{H}$, $\tau = \tau'$.

Finalment, i encara pel cas $|c| = 1$, estudiem el cas $d = 0$: tenim la desigualtat $|c\tau| = |\tau| \leq 1$, però $|\tau| \geq 1$ per pertànyer a $\mathcal{M}$. Així doncs, $Im(\tau') = Im(\tau)$.

Corol·lari 3.2.5.
L'espai de moduli del torus és homeomorf al pla complex.

Demostració.
De les *proposicions 3.2.3* i *3.2.4* se'n desprèn que $M_1 \cong \mathcal{M}$. En el conjunt $\mathcal{M}$, podem identificar la bora dels elements amb part real$-\frac{1}{2}$ amb els de part real $\frac{1}{2}$;així com els de mòdul 1 amb part real negativa amb els de mòdul 1 amb part real positiva. de i els punts que tenen mòdul 1 i part real negativa, amb els que tenen part real negativa. Obtenint així, l'igualtat $M_1 \cong \mathbb{C}$.

4 Conclusions

Hem vist que qualsevol espai topològic semi-localment simplement connex admet un recobriment universal. En particular, per a tota superfície de Riemann R existeix un recobriment universal $\tilde{R}$, que també és una superfície de Riemann.

Tenint en compte que $\tilde{R}/Aut(\tilde{R}, p) \cong R$ i gràcies al teorema d'uniformització, hem classificat les superfícies de Riemann compactes en funció del seu espai recobridor, el qual és biholomorf a $\tilde{\mathbf{C}}$, si el gènere de R és 0; $\mathbf{C}$, si és 1; o $\mathbf{H}$, si és 2.

Pel cas de les superfícies de Riemann compactes de gènere 1, hem determinat quan dos estructures analítiques són biholomorfes en l'espai topològic d'un torus, donant lloc a l'espai de moduli del torus.

Al meu entendre, hi ha tres possibles camins a seguir després d'aquest treball. D'entre ells, el primer i el segon m'agradaria explorar-los properament:

1. Descriure amb detall les estructures analítiques equivalents en les superfícies de Riemann compactes de gènere superior a 1.
2. Estudiar les possibles aplicacions pràctiques del treball. Concretament, em centraria en l'aplicació de la proposició 2.3.6 a camps com la mobilitat urbana.
3. Entendre la demostració del teorema d'uniformització.

Referències

[1] Lars, Ahlfors. Elliptic Functions. A: Lars, Ahlfors. *Complex Analysis.* New York: McGraw-Hill, Inc., 1979, p.263-282. ISBN 0-07-000657-1.

[2] Imayoshi, Yoichi Taniguchi, Masahiko. Teichmüller Spaces of Genus g Frike Space. A: Imayoshi, Yoichi and Taniguchi, Masahiko. *Introduction to Teichmüller Theory.* Tokyo: Springer-Verlag, 1992, p.1-50. ISBN 4-431-70088-9.

[3] Jost, Jürgen. *Compact Riemann Surfaces. An Introduction to Contemporary Mathematics.* 3rd ed. Leipzig: Springer-Verlag, 2006. ISBN 3-540-33065-8.

[4] Kosniowski, Czes. Chapters 17, 18, 21 and 22. A: Kosniowski, Czes. *A First Course in Algebraic Topology.* 1st ed., Re-issued. New York: Cabridge University Press, 2008. ISBN 978-0-521-29864-3.

[5] Massey, William. Espacios Recubridores, Apéndices A y B. A: Massey, William. *Introducción a la Topología Algebraica.* Barcelona: Editorial Reverté, S.A., 1972. p.145-186.

[6] Parson, Charles. *Mathematical thought and its objects.* Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-45279-3.

[7] de Saint-Gervais, Henri Paul. *Uniformization of Riemann Surfaces: Revisiting a Hundred-year-old Theorem.* Saint-Gervais: European Mathematical Society, 2016. ISBN 3037191457.

[D.1] de Amo, Enrique. *Transormaciones de Möbius.* Almeria: Universidad de Almería, 2008. Disponible a: `<https://w3.ual.es/~edeamo/capitulo3_ac/vc0302.pdf>`.

[D.2] Departamento de Matemáticas, UAM. *Topología. ¡Qué buenos son los compactos!.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid. Disponible a: `<https://www.uam.es/otros/openmat/cursos/topo/sections/topS45.pdf>`.

[D.3] Garret, Paul. *Fundamental domains for* $SL_2(\mathbb{Z})$ *and* Γ_θ. Minnesota: Minnesota University, 2013. Disponible a: `<http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/notes_2013-14/07_fund_dmn.pdf>`.

[D.4] Timothy Chan, Kevin. *Uniformization of Riemann Surfaces.* Director: Siu, Yum-Tong. Cambridge: Harvard University, 2004. Disponible a: `<http://www.math.harvard.edu/theses/senior/chan/fulldraft7.pdf>`.