RESUM DE FUNCIONS D'UNA VARIABLE

Gonzalo Rodríguez

Departament de Matemàtica Econòmica,

Financera i Actuarial

Graus d'ADE i ECO

Pla 2010

Facultat d'Economia i Empresa

PREFACI

L'objectiu que m'he proposat amb aquest petit manual és proporcionar a l'alumne de nova entrada dels Graus d'*Administració i Direcció d'Empreses* (ADE) i d'*Economia* (ECO) de la UB un resum acurat dels conceptes i propietats més importants relacionats amb les FUNCIONS REALS D'UNA VARIABLE. Al no contemplar el Pla Docent de *Matemàtiques I* -que és l'assignatura amb la qual els estudiants d'aquests Graus s'inicien en la formació matemàtica bàsica- un tema específic relacionat amb aquestes funcions que donés peu a treballar-les amb una certa profunditat, he cregut convenient fer accessible als nostres estudiants allò que considero el mínim que s'hauria de conèixer sobre el particular per tal d'afrontar amb garanties d'èxit les assignatures troncals de *Matemàtiques I* i *II* d'ADE i d'ECO. Si això ha estat una idea encertada, el temps ho dirà.

El manual està dividit en set epígrafs. He destinat els quatre primers a desenvolupar la temàtica pròpiament dita sobre funcions d'una variable; el cinquè conté les representacions gràfiques de les funcions més habituals i que donen lloc, per combinacions elementals, a la majoria de les funcions que hom troba en els textos estàndard al ús; en el sisè epígraf proposo a l'alumne una ressenya bibliogràfica per tal que pugui desenvolupar, sempre des d'un punt de vista pràctic, els conceptes i propietats presents en els epígrafs precedents i finalment, en l'últim, he confeccionat un índex analític que facilita la cerca de les nocions matemàtiques més importants que hom troba dins el manual.

L'autor

ÍNDEX

1. Funcions reals d'una variable

Les **funcions reals d'una variable** (a partir d'ara **funcions**) són les funcions:

$$A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$x \in A \longrightarrow y = f(x)$$

sent $A \subset \mathbb{R}$ el conjunt de punts de la recta real $\mathbb{R}$ que tenen imatge per la funció i que anomenen **domini**. Val a dir que la seva determinació és el primer pas en l'estudi d'una funció. Vegem un exemple.

<u>Exemple</u>: *Troba el domini $A \subset \mathbb{R}$ de les funcions:*

a. $f(x) = +\sqrt[3]{x}$ *b.* $f(x) = \dfrac{x-2}{x-5}$ *c.* $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ *d.* $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

SOLUCIÓ: a) En aquest cas, el domini és la recta real $A = \mathbb{R}$ ja que tot nombre real té arrel cúbica.

b) El domini de definició, ara, són els nombres reals llevat del 5 ja que no podem dividir per zero. Per tant $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 5\} = \left]-\infty, 5\right[\cup \left]5, +\infty\right[$.[1]

c) El domini ara estarà format pels nombres reals x que admeten logaritme neperià, és a dir, els estrictament positius $x > 0$ i diferents de 1, $x \neq 1$, ja que, en cas contrari, tindríem $\ln 1 = 0$ i no podem dividir per 0. Per tant:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ i } x \neq 1\} = \left]0,1\right[\cup \left]1, +\infty\right[.$$

d) Ja que $y = \ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ el domini està format pels x tal que:

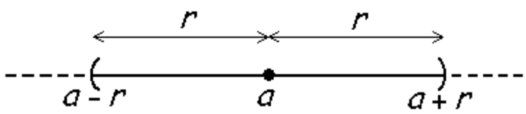
$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \text{ equivalent a } \left\{\begin{matrix} x-1>0 \text{ i } x+1>0 \\ \text{ó} \\ x-1<0 \text{ i } x+1<0 \end{matrix}\right\} \text{ equivalent a } \left\{\begin{matrix} x>1 \text{ i } x>-1 \\ \text{ó} \\ x<1 \text{ i } x<-1 \end{matrix}\right\}.$$

Així doncs $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \text{ ó } x < -1\} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

[1] El símbol $]\ [$ indica **interval obert**. En concret, $]a,b[$ està format pels punts de la recta real compresos estrictament entre a i b.

2. Límit i continuïtat d'una funció

Una funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ té **límit** $L \in \mathbb{R}$ en un punt $a \in \mathbb{R}$ si els valors $f(x)$ de la funció s'aproximen a L a mesura que els valors de la variable $x \in A$ s'aproximen a $a \in \mathbb{R}$. Tenint en compte que un **entorn** de radi $r > 0$ del punt $a \in \mathbb{R}$ és el interval obert d'extrems $a - r$ i $a + r$:

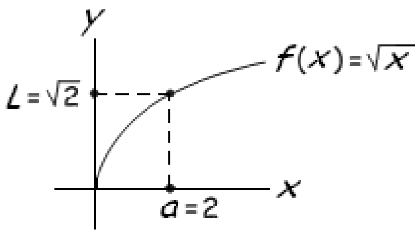


es pot definir formalment el concepte de límit:

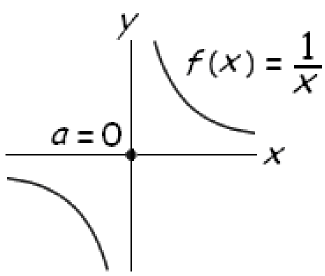
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

dient que per a tot entorn del punt L ha d'existir un entorn del punt a de manera que les imatges $f(x)$ dels punts x d'aquest entorn, diferents eventualment del punt a, han de pertànyer al primer entorn.

Com a exemple de límit d'una funció tenim $\lim_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$.[2] Gràficament:



Un cas on no existeix límit seria la funció $f(x) = 1/x$ en 0:



[2] En aquest cas la funció és, a més, contínua en 2.

Exemple: *Calcula els límits següents:*[3]

a. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$. b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. c. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x^2}{x}$. d. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$.

SOLUCIÓ:

a) En aquest cas:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

b) Com que $\cos 0=1$ tenim que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

c) En aquest cas:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x^2}{x}=2\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=2\lim_{x\to +\infty}\frac{(1/x)}{1}=2\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=\frac{2}{+\infty}=0.$$

d) Com que el límit és indeterminat de la forma 1^∞, el calcularem a partir del límit L del seu logaritme neperià:[4]

$$L=\lim_{x\to 2}\ln\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)\left(\frac{2x(2x+1)-(x^2+1)2}{(2x+1)^2}\right)}{2x}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+2x-2}{2x(x^2+1)(2x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)(2x+1)}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}.$$

Per tant:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}=e^L=e^{\frac{1}{10}}.$$

---

[3] Malgrat que encara no hem introduït el concepte de derivada, donarem per suposat que es coneixen les regles de L'Hôpital que hom pot trobar en qualsevol manual al ús.

[4] Així doncs el límit que busquem serà igual, aplicant les propietats dels logaritmes, a e^L.

Cal recordar ara que la definició de funció contínua en un punt es desprenia directament de la definició de límit en el sentit que calia que existís el límit de la funció en el punt i que, a més, aquest límit fos igual a la imatge de la funció en ell. Formalment, doncs, diem que $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és **contínua** en $a \in A$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Notem que per a que una funció sigui contínua en un punt, aquest punt ha de pertànyer al domini de la funció. Per exemple, la funció:

$$y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

no pot ser contínua en 0 ja que no té imatge però, en canvi, té límit:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Recordem ara que existeixen tres tipus de discontinuïtats en l'àmbit de les funcions reals d'una variable com són la:

- **Discontinuïtat evitable**, com la del cas que acabo de comentar, que és quan existeix el límit de la funció en el punt però no coincideix amb la seva imatge.
- **Discontinuïtat de 1ª espècie** o de **salt** que és quan existeixen els dos límits laterals de la funció en el punt però no coincideixen.[5]
- **Discontinuïtat de 2ª espècie** que sorgeix quan no existeix algun dels dos límits laterals, com en el cas de $f(x) = 1/x$ en 0.

Vegem un exemple.

[5] Els dos **límits laterals** d'una funció apareixen quan la variable x s'aproxima, o bé per l'esquerra o bé per la dreta, al punt on es calcula el límit. En aquest cas, el **salt** de la funció en el punt seria la diferència en positiu entre els dos límits laterals.

Exemple: *Estudia la continuïtat de la funció:*

$$f(x)=\begin{cases}-x, \ x\le -1\\ 2x^2-1, \ \ -1<x<3\\ \ln(x+9), \ x\ge 3\end{cases}$$

en els punts -1 *i* 3.[6]

SOLUCIÓ:

Es tracta ara d'una funció definida a "trossos". Així doncs, el que cal és analitzar el comportament dels límits laterals en aquests dos punts per a veure si la funció és contínua. Comencem pel punt -1. Com que:

$$f(-1)=-(-1)=1$$

i el límit per l'esquerra és:

$$L_1=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\{x<-1\}=\lim_{x\to -1}(-x)=-(-1)=1$$

i el límit per la dreta és igual a:

$$L_2=\lim_{x\to -1^+} f(x)=\{x>-1\}=\lim_{x\to -1}\left(2x^2-1\right)=2(-1)^2-1=1$$

podem afirmar que la funció és contínua en el punt -1. Per una altra banda, com que:

$$f(3)=\ln(3+9)=\ln 12$$

i els límits laterals són:

$$L_1=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\{x<3\}=\lim_{x\to 3}\left(2x^2-1\right)=2\cdot 3^2-1=17$$

i:

$$L_2=\lim_{x\to 3^+} f(x)=\{x>3\}=\lim_{x\to 3}\ln(x+9)=\ln(3+9)=\ln 12$$

la funció presenta un discontinuïtat de 1ª espècie en 3 amb un salt igual a:[7]

$$|L_1-L_2|=|17-\ln 12|\simeq 14.515 .^8$$

---

[6] Fora d'aquests punts, i per la seva pròpia definició, la funció és sempre contínua.

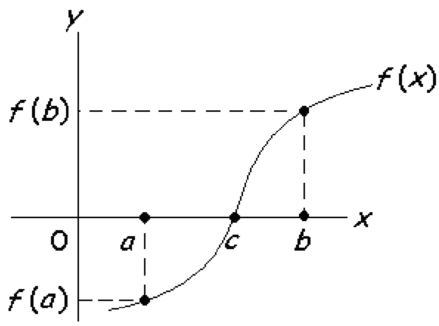
[7] El símbol $|\ |$ denota **valor absolut**. El valor absolut d'un número és la seva determinació positiva i, per tant, $|a-b|$ és la distància entre a i b.

[8] $\simeq$ denota aproximadament igual.

Anem a veure ara un dels teoremes més importants relatius a les funcions contínues. Es tracta del **teorema de Bolzano** que ens diu que tota funció contínua que pren valors positius i negatius té, com a mínim, una arrel real.

Teorema de Bolzano. *Si* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *és una funció contínua en* $[a,b]$[9] *tal que el signe de* $f(a)$ *és diferent al de* $f(b)$*, existeix un punt* $c \in [a,b]$ *de manera que* $f(c) = 0$*.*

Gràficament:



<u>Exemple</u>: *Prova que l'equació* $x^3 - 3x - 1 = 0$ *té una arrel entre 0 i 2.*

SOLUCIÓ: Si fem:

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

cal provar tant sols que els signes de $f(0)$ i $f(2)$ són diferents ja que la funció $f(x)$ és contínua sobre $[0,2]$. En efecte, com que:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \quad \text{i} \quad f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 1 = 1 > 0$$

hom dedueix que existeix un punt $0 < c < 2$ tal que $f(c) = 0$. En altres paraules, $0 < c < 2$ és una arrel de l'equació $x^3 - 3x - 1 = 0$.[10]

[9] $[a,b]$ denota el **interval tancat** d'extrems a i b format pels punts de la recta real compresos entre a i b, amb a i b.

[10] Es pot provar que aquesta arrel és aproximadament igual a 1.879385242.

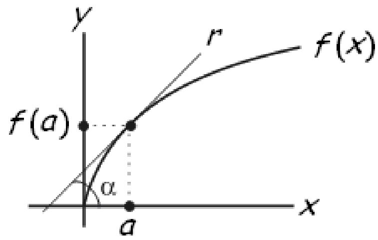
3. Derivada d'una funció

Recordarem tot seguit la definició de derivada d'una funció en un punt. Diem que $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és **derivable** en $a \in A$ si existeix el límit del quocient incremental:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}.$$

El número real $f'(a)$ s'anomena **derivada** de la funció $f(x)$ en a.

Des d'un punt de vista geomètric, la derivada de $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ en $a \in A$ és la pendent de la **recta tangent** r a la funció en el punt. Gràficament:



Així doncs, $f'(a) = \tan\alpha$ i l'equació d'aquesta recta serà doncs:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a).$$

<u>Exemple</u>: *Troba la recta tangent a la funció:*

$$f(x) = \frac{x - 3}{x}$$

en el punt $a = 1$.

SOLUCIÓ: Com que:

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} \quad \text{i} \quad f'(1) = 3$$

la recta tangent serà:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = -2 + 3(x - 1) = 3x - 5.$$

Cal introduir ara el concepte de **funció derivada** de $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Es tracta de la funció que assigna a cada punt $x \in A$ on és derivable el valor d'aquesta derivada i es denota per $f'(x)$ (o y'). En el càlcul de les funcions derivada caldrà tenir present la següent taula:

$f(x) =$	$f'(x) =$
c, amb $c \in \mathbb{R}$	0
x^a, amb $a \neq 0$	$a \cdot x^{a-1}$
$\ln x$	$1/x$
a^x, amb $a > 0$	$a^x \cdot \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x \ \left(= 1/\cos^2 x\right)$
$\arctan x$	$1/\left(1 + x^2\right)$

Aplicant aquesta taula i les regles elementals de derivació podem trobar les funcions derivada de moltes funcions.[11]

<u>Exemple</u>: *Calcula la funció derivada de $f(x) = x^x$.*

SOLUCIÓ: En el nostre cas, i aplicant logaritmes, tenim que:

$$\ln f(x) = x \cdot \ln x .$$

Així doncs, derivant tot aplicant la regla de la cadena, s'arriba a que:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad \text{i} \quad f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

[11] Donarem per conegudes aquestes regles que hom pot trobar en la majoria dels manuals de la bibliografia.

Vegem ara uns altres exemples de càlcul de funcions derivada (o derivades si no hi ha ambigüitat).

Exemple: *Calcula les derivades de les funcions:*

a. $y = \dfrac{x^2 + 3x}{e^{x^2}}$.

b. $y = \ln\left(\ln\sqrt{1-x}\right)$.

c. $y = \sin\sqrt{x^2+1}$.

d. $y = \tan\left(2x^2\right)$.

e. $y = \left(x^2-1\right)^{\sin x}$.

SOLUCIÓ: a) En aquest cas:

$$y' = \frac{(2x+3)\cdot e^{x^2} - \left(x^2+3x\right)\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{e^{x^2}\left((2x+3) - 2x\cdot\left(x^2+3x\right)\right)}{e^{2x^2}} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 6x^2 + 2x + 3}{e^{x^2}}.$$

b) Aplicant la regla de la cadena tenim que:

$$y' = \frac{1}{\ln\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) = \frac{-1}{2(1-x)\ln\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

c) Com en el cas anterior $y' = \cos\sqrt{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \dfrac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

d) En aquest cas: $y' = \left(1+\tan^2\left(2x^2\right)\right)\cdot 4x = \dfrac{4x}{\cos^2\left(2x^2\right)}$.

e) Aplicant logaritme neperià tenim $\ln y = \ln\left(x^2-1\right)^{\sin x} = \sin x\cdot\ln\left(x^2-1\right)$ i, per tant:

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = \cos x\cdot\ln\left(x^2-1\right) + \sin x\cdot\frac{2x}{x^2-1}$$

i $y' = \left(x^2-1\right)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\left(x^2-1\right) + \dfrac{2x\sin x}{x^2-1}\right)$.

Pel que fa a la relació entre la continuïtat i la derivabilitat d'una funció, tenim que tota funció derivable en un punt és sempre contínua. Com indico explícitament, el recíproc d'aquest resultat no sempre és cert.

Teorema. *Si* $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *és derivable en* $a \in A$ *també és contínua.*

És interessant destacar el contrarecíproc[12] d'aquest teorema que diu que una funció que no sigui contínua en un punt tampoc pot ser derivable. En canvi, no tota funció contínua és necessàriament derivable. Vegem-ho.

<u>Exemple</u>: *Prova que la funció valor absolut* $f(x) = |x|$*, que és contínua en 0, no és derivable.*

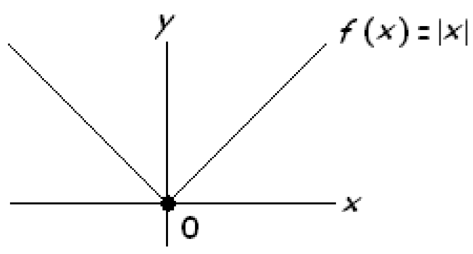
SOLUCIÓ: Com que les derivades laterals[13] són:

$$f'(0-0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \{x < 0\} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

i:

$$f'(0+0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \{x > 0\} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

deduïm que la funció no és derivable encara que admeti derivades laterals. Gràficament:



[12] Des d'un punt de vista lògic, el contrarecíproc d'un teorema de la forma "*A* implica *B*" és "no *B* implica no *A*" i ambdós són equivalents.

[13] Al ser la derivada un límit té sentit, com en el cas de la continuïtat, considerar lles **derivades laterals** per l'esquerra i per la dreta. Evidentment, una funció $f(x)$ és derivable en un punt $a \in A$ si les dues derivades laterals, $f'(a-0)$ i $f'(a+0)$, coincideixen.

L'exemple següent ens mostra com es pot estudiar la continuïtat i la derivabilitat d'una funció definida a trossos tenint en compte la relació entre aquestes dues nocions.

Exemple: *Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció:*

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x<0 \\ x-2, & 0\le x<3 \\ \left(x^2-x\right)/6, & 3\le x. \end{cases}$$

SOLUCIÓ:

Per construcció, la funció és contínua i derivable en tot punt llevat de 0 i 3. Anem a veure si la funció és contínua en 0. Com que:

$$L_1=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} 3x^2=0 \;\text{ i }\; L_2=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(x-2)=-2,$$

la funció presenta una discontinuïtat en 0 de salt $|L_1-L_2|=2$. Així doncs, tampoc pot ser derivable en 0. Vegem ara si és contínua en 3. Com que:

$$L_1=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}(x-2)=1 \;\text{ i }\; L_2=\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x}{6}=1$$

i la imatge de la funció en 3 és:

$$f(3)=\frac{3^2-3}{6}=1$$

la funció és contínua i, per tant, pot ser derivable. Com que les derivades laterals són:

$$f'(3-0)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\{x<3\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3}=1$$

i:

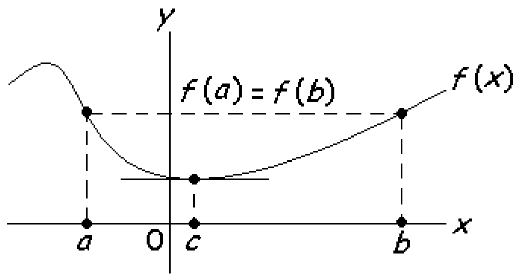
$$f'(3+0)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\{x>3\}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\left(x^2-x\right)/6\right)-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{6(x-3)}=$$

$$=\{\text{L'Hôpital}\}=\lim_{x\to 3}(2x-1)/6=5/6$$

la funció no és derivable en 3 ja que les derivades laterals són diferents.

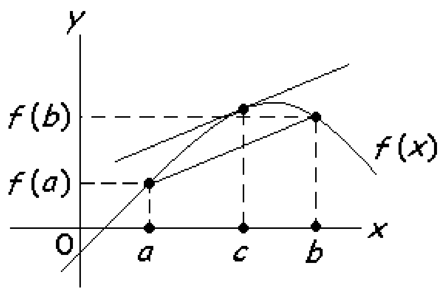
Enuncio tot seguit dos teoremes importants sobre funcions derivables: el teorema de Rolle i el del Valor Mig. El primer ens diu que la derivada d'una funció $[a,b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ contínua i derivable que pren valors iguals en els extrems a i b s'anul·la en un punt intermedi.

Teorema de Rolle. *Si* $[a,b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *és contínua en* $[a,b]$ *i derivable en* $]a,b[$ *, amb* $f(a) = f(b)$*, existeix un punt* $c \in]a,b[$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*



El segon afirma que si $[a,b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és contínua i derivable, existeix un punt intermedi entre a i b on la recta tangent a la funció és paral·lela al segment d'extrems $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Aquest resultat té conseqüències importants pel que fa al càlcul d'integrals indefinides.[14]

Teorema del Valor Mig. *Si* $[a,b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *és contínua en* $[a,b]$ *i derivable en* $]a,b[$ *, existeix* $c \in]a,b[$ *tal que* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$*.*



[14] Tema aquest que s'estudia a *Matemàtiques II.*

Una aplicació econòmica molt important del concepte de derivada és el d'elasticitat. Pensem que els economistes solen treballar més aviat amb increments relatius que no pas amb increments absoluts (hom diu, per exemple, que la inflació ha pujat un 0.5% o bé que el PIB ha baixat un 1%, etc.). Doncs bé, si en la definició formal de derivada de $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ canviem el increment absolut de la variable independent en $a \in A$:

$$\Delta a = x - a$$

i el de la variable dependent:

$$\Delta f(a) = f(x) - f(a)$$

pels corresponents increments relatius:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{x-a}{a} \quad \text{i} \quad \frac{\Delta f(a)}{f(a)} = \frac{f(x)-f(a)}{f(a)}$$

obtenim la **derivada elàstica** o **elasticitat** de $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ en $a \in A$ si existeix el límit del quocient incremental relatiu:

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\left(\dfrac{\Delta f(a)}{f(a)}\right)}{\left(\dfrac{\Delta a}{a}\right)} = \lim_{x \to a} \frac{\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{f(a)}\right)}{\left(\dfrac{x-a}{a}\right)} \in \mathbb{R}.$$

Aquest límit s'anomena derivada elàstica o elasticitat de $f(x)$ en a i es sol denotar per $E_x f(a)$.

L'elasticitat i la derivada d'una funció en un punt estan relacionades a través de la igualtat:

$$E_x f(a) = \frac{a}{f(a)} \cdot f'(a).$$

Fixem-nos doncs que tota funció que admet derivada elàstica ha d'admetre, en particular, derivada.[15]

[15] Veurem tot seguit que al inrevés això no passa.

En l'exemple següent es mostra que cal conèixer la derivada d'una funció per a calcular la seva derivada elàstica.

Exemple: *Donada la funció:*

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

calcula:

a. La funció derivada elàstica de $f(x)$.

b. L'elasticitat de $f(x)$ en $a = e$. Existeix derivada elàstica en el punt $a = 1$? Raona la resposta.

SOLUCIÓ:

a) Com que la funció derivada és:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

la funció derivada elàstica serà igual a:

$$E_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) = \frac{1 - \ln x}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} - 1.$$

b) Així doncs, podem calcular l'elasticitat en el punt $a = e$:

$$E_x f(e) = \frac{1}{\ln e} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Per tant, la funció té elasticitat nul·la en $a = e$. En canvi, en el punt $a = 1$, no hi ha ja que:

$$E_x f(1) = \frac{1}{\ln 1} - 1 = \frac{1}{0} - 1 = \nexists.$$

Notem que encara que la funció existeixi i sigui derivable en 1, tanmateix no té derivada elàstica. De fet, aquesta derivada no pot existir mai en els punts que anul·len la funció.

Vegem a continuació una aplicació econòmica del concepte d'elasticitat.[16]

<u>Exemple:</u> *Si* $q = f(p) = 650 - 5p - p^2$ *és la funció de demanda d'un bé:*

a. *Calcula la seva elasticitat al preu de venda de* $p = 10$ *u.m.*[17]

b. *Si aquest preu experimenta un increment del 2% determina, de forma aproximada, el percentatge de canvi en la quantitat demandada.*

SOLUCIÓ: a) En aquest cas, l'elasticitat $E_p f(10)$ serà:

$$E_p f(10) = \frac{10}{f(10)} \cdot f'(10) = \{f'(p) = -5 - 2p\} = \frac{10}{500} \cdot (-25) = -0.5 .$$

Així doncs, la funció de demanda té elasticitat rígida en $p = 10$.[18]

b) Si el preu $p = 10$ té un increment relatiu del 2% :

$$\Delta p / p = 2\% = 0.02$$

i tot considerant que aquest increment relatiu és petit, podem estimar el percentatge de canvi en la quantitat $q = f(p)$ demandada a partir de l'elasticitat si tenim en compte l'aproximació:

$$\frac{\left(\dfrac{\Delta f(p)}{f(p)}\right)}{\left(\dfrac{\Delta p}{p}\right)} \simeq E_p f(p).^{19}$$

En conseqüència, hom té que:

$$\frac{\Delta f(p)}{f(p)} \simeq \frac{\Delta p}{p} \cdot E_p f(p) = \left\{\frac{\Delta p}{p} = 0.02,\ E_p f(p) = -0.5\right\} = 0.02 \cdot (-0.5) = -0.01 = -1\%$$

Per tant, la quantitat demandada de $q = 500$ unitats al preu de $p = 10$ u.m. experimenta un decrement aproximat del 1% quan el preu puja un 2%.

[16] "Elasticitat de preus".
[17] u.m. denota unitats monetàries.
[18] Es dóna una situació d'**elasticitat rígida** (**unitària**, **elàstica**) quan la derivada elàstica, en valor absolut, és més petita (igual, més gran) que 1.
[19] Aquesta aproximació s'obté directament de la definició d'elasticitat.

4. Aplicacions de la derivada

La primera de les aplicacions té a veure amb l'estudi del creixement i decreixement d'una funció. Comprovarem com la 1ª derivada ens permet decidir si una funció derivable creix o decreix en un punt sempre i quan no s'anul·li. Per definició, la funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ en $a \in A$ és:

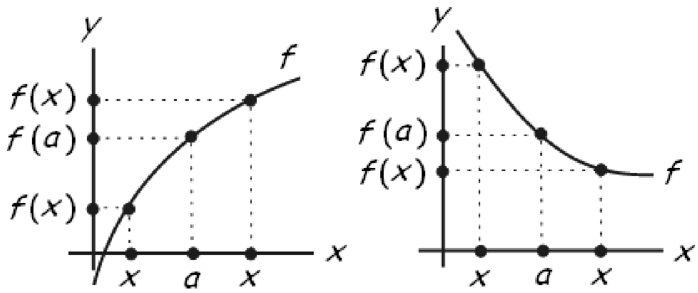
1. **Creixent** si existeix un entorn de $a \in A$ tal que, per a tot punt $x \in A$ de l'entorn:

$$\text{Si } \begin{Bmatrix} x \le a \\ x \ge a \end{Bmatrix} \text{ llavors } \begin{Bmatrix} f(x) \le f(a) \\ f(x) \ge f(a) \end{Bmatrix}.$$

2. **Decreixent** si existeix un entorn de $a \in A$ tal que, per a tot punt $x \in A$ de l'entorn:

$$\text{Si } \begin{Bmatrix} x \le a \\ x \ge a \end{Bmatrix} \text{ llavors } \begin{Bmatrix} f(x) \ge f(a) \\ f(x) \le f(a) \end{Bmatrix}.$$

Gràficament:



En el primer cas la funció és creixent en el punt a i decreixent en el segon. El concepte de creixement i decreixement en un punt dóna lloc al de **creixement** i/o **decreixement globals** ja que hom diu que $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és creixent o decreixent en $A \subset \mathbb{R}$ si ho és en tot punt de A.

La relació entre la derivada i el creixement d'una funció derivable ve donada pel teorema següent.

Teorema. *Sigui $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ derivable en $A \subset \mathbb{R}$. Aleshores:*

1. *Si, per a tot $x \in A$, $f'(x) > 0$ llavors $f(x)$ és creixent en A.*
2. *Si, per a tot $x \in A$, $f'(x) < 0$ llavors $f(x)$ és decreixent en A.*
3. *Si $f(x)$ és creixent en A llavors, per a tot $x \in A$, $f'(x) \geq 0$.*
4. *Si $f(x)$ és decreixent en A llavors, per a tot $x \in A$, $f'(x) \leq 0$.*

Notem que 3 i 4 no són el recíproc de 1 i 2. Com podem veure, el problema del creixement i/o decreixement d'una funció derivable està resolt si la seva derivada és diferent de zero.

<u>Exemple</u>: *Estudia el creixement i decreixement de les funcions:*

a. $f(x) = x^2$ *b.* $f(x) = x^3$ *c.* $f(x) = 1/\left(1 + x^2\right)$

SOLUCIÓ: a) En aquest cas, com que $f'(x) = 2x$, tenim que la funció és creixent per a tot $x > 0$ i és decreixent si $x < 0$. En $a = 0$, el teorema anterior no decideix (val a dir que en el punt 0 hi ha un mínim).

b) En aquest cas, ja que $f'(x) = 3x^2$, deduïm que la funció serà creixent per a tot $x \neq 0$. Per la mateixa raó que abans, en $a = 0$ el teorema tampoc decideix (0 és un punt d'inflexió).

c) Com que:

$$f'(x) = -\frac{2x}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

la funció és creixent pels punts $x < 0$ i decreixent pels $x > 0$ (en 0 la funció té un màxim).

Així doncs, si la derivada d'una funció en un punt s'anul·la, el creixement i el decreixement està indeterminat. Aquests punts són els anomenats punts crítics o estacionaris de la funció.[20] En concret, diem que la funció derivable $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ té un **punt crític** en $a \in A$ si:

$$f'(a) = 0.$$

L'exemple següent ens mostra com es pot estudiar en la pràctica el creixement i el decreixement d'una funció.

<u>Exemple</u>: *Estudia el creixement i la existència de punts crítics de:*

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$

SOLUCIÓ: El domini d'aquesta funció és:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}.$$

Com que:

$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

els punts crítics són el 0 i el 2. Així doncs, els intervals de creixement i/o decreixement seran:

$$]-\infty,0[\,,\ ]0,1[\,,\ ]1,2[\ \text{ i }\ ]2,+\infty[\,.^{21}$$

Tenint en compte que el signe de la derivada no canvia dins d'aquests intervals i que, per exemple:

$$f'(-1) = \frac{-3}{4} < 0\,,\ f'(0.5) = 3 > 0\,,\ f'(1.5) = 3 > 0\ \text{ i }\ f'(3) = \frac{-3}{4} < 0$$

podem deduir que la funció és decreixent en $]-\infty,0[$ i $]2,+\infty[$, i creixent en els intervals $]0,1[$ i $]1,2[$.

[20] Un punt crític sols pot ser un màxim, o un mínim o un punt d'inflexió.
[21] Els punts que no pertanyen al domini són també extrems d'intervals de creixement.

El concepte d'òptim (màxim o mínim) és un dels conceptes clau a tenir en compte en l'estudi d'una funció. Començarem recordant la seva definició formal. Diem que $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ té en el punt $a \in A$ un:

1. **Màxim absolut** o **global** si:

$$f(x) \leq f(a) \text{, per a tot } x \in A.$$

2. **Mínim absolut** o **global** si:

$$f(a) \leq f(x) \text{, per a tot } x \in A.$$

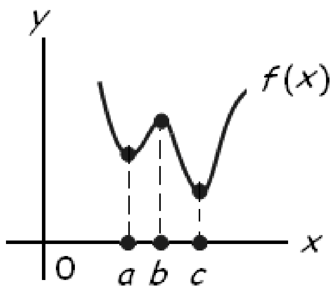
3. **Màxim relatiu** o **local** si existeix un entorn de $a \in A$ tal que:

$$f(x) \leq f(a) \text{, per a tot punt } x \in A \text{ de l'entorn.}$$

4. **Mínim relatiu** o **local** si existeix un entorn de $a \in A$ tal que:

$$f(a) \leq f(x) \text{, per a tot punt } x \in A \text{ de l'entorn.}$$

Gràficament:



En aquest cas, el punt a és un mínim relatiu de la funció, el punt b és un màxim relatiu i c és un mínim absolut.

En Economia, a tot punt que satisfaci alguna de les quatre definicions anteriors se l'anomena **òptim** de la funció. Com veurem, el coneixement de les derivades d'una funció ens permetrà trobar els seus òptims relatius.[22]

[22] En el cas que existeixin.

Un primer resultat important sobre òptims és el conegut teorema de Weierstrass que ens diu que tota funció contínua sobre un interval tancat té sempre màxim i mínim absoluts.

Teorema de Weierstrass. *Tota funció* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *contínua en* $[a,b]$ *té un mínim i un màxim absoluts sobre* $[a,b]$*, és a dir, que existeixen dos punts del interval* $\alpha, \beta \in [a,b]$ *tal que:*

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta), \text{ per a tot } x \in [a,b].$$

<u>Exemple</u>: *Prova que la funció:*

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

té un màxim i un mínim absoluts en el interval $[-1,0]$*.*

SOLUCIÓ:

Degut a que el domini d'aquesta funció està format per tots els nombres reals llevat del 1, i que és contínua en tots ells, deduïm que la funció:

$$[-1,0] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

satisfà el teorema de Weierstrass i que, per tant, existeixen mínim i màxim absoluts en $[-1,0]$.[23] Fixem-nos que si el interval de definició hagués estat, per exemple, el $[0,1[$ la funció, encara que contínua i derivable, no satisfaria el teorema de Weierstrass ja que no tindria màxim absolut (la funció creix indefinidament a l'esquerra del 1).[24] Com veiem, és important que el interval sobre el que està definida la funció sigui tancat.

[23] Com que ja sabem que en aquest interval la funció és decreixent tindrem que el màxim és el -1 i el mínim és el 0.
[24] Però sí mínim absolut en el 0.

El teorema que enuncio a continuació resumeix les condicions necessària i suficient d'existència d'òptims d'una funció. Recordem que un punt crític d'una funció és tot aquell punt que anul·la la seva derivada. Notarem per $f^{(n)}(x)$ la funció derivada d'ordre n de $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Teorema. *Sigui* $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funció derivable successivament en un entorn d'un punt crític* $a \in A$ *i sigui* $n > 1$ *tal que* $f^{(n)}(a) \neq 0$*, sent les derivades anteriors nul·les. Aleshores, si* $n > 1$ *és parell i si:*[25]

1. $f^{(n)}(a) > 0$*, llavors* $f(x)$ *té un mínim relatiu en* $a \in A$*.*
2. $f^{(n)}(a) < 0$*, llavors* $f(x)$ *té un màxim relatiu en* $a \in A$*.*

Exemple: *Estudia si la funció:*

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

té òptims relatius.

SOLUCIÓ: Com que els punts crítics d'aquesta funció són el 0 i el 2 ja que:

$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

i com que la segona derivada és:

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

i que:

$$f''(0) = 2 > 0 \text{ i } f''(2) = -2 < 0$$

deduïm que $n = 2$ i que, per tant, 0 és un mínim relatiu de $f(x)$ i 2 un màxim relatiu.

[25] Si n és imparell no hi han òptims sinó punts d'inflexió.

El teorema general que acabem de veure està pensat per a trobar els òptims d'una funció derivable coneixent tant sols el seu domini i les seves derivades. Vegem un exemple.

Exemple: *Estudia els òptims de la funció* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$.

SOLUCIÓ: El domini d'aquesta funció polinòmica és tota la recta real $\mathbb{R}$.[26] Com que:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$$

deduïm que els únics punts crítics de la funció són el 0 i el 3. Passem a analitzar el valor de la derivada segona en aquests dos punts. Com que:

$$f''(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

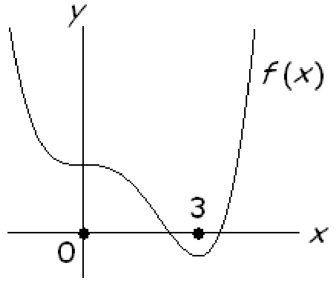
deduïm que:

$$f''(0) = 0 \text{ i } f''(2) = 9 > 0.$$

Per tant, i segons el teorema anterior, 3 és un mínim relatiu de $f(x)$. Pel punt 0 cal anar a derivades d'ordre superior a 2. Ja que:

$$f'''(x) = 6x - 6 \quad \text{i} \quad f'''(0) = -6 < 0$$

llavors, de nou segons el teorema anterior, podem assegurar que la funció no presenta un òptim en 0 ja que l'índex $n = 3$ és imparell.[27] Gràficament:



[26] Una funció **polinòmica** és una funció del tipus $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, amb coeficients reals $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

[27] Aquest punt és un punt d'inflexió ja que, en particular, és un punt crític.

Vegem una aplicació econòmica de l'optimització de funcions.

<u>Exemple</u>: *Una empresa dedicada a l'explotació comercial d'una autopista cobra 700 u.m. per cada vehicle que hi circula. Tenint en compte que les despeses de personal són de 6000 u.m. per dia i que els costos de manteniment i amortització per vehicle venen donats per la funció:*

$$2+\frac{x}{40} \text{ u.m.}$$

on x denota el nombre de vehicles diaris que hi circulen, determina:

a. *Les funcions de costos, ingressos i beneficis diaris de l'empresa.*
b. *Els vehicles que haurien de circular cada dia per l'autopista per a maximitzar els beneficis diaris, així com el seu valor.*
c. *El interval de rendibilitat diària.*

SOLUCIÓ: a) Ja que les funcions d'ingrés i costos totals són:

$$IT(x)=700x \quad \text{i} \quad CT(x)=\left(2+\frac{x}{40}\right)x+6000$$

hom dedueix que la funció de beneficis serà:

$$BT(x)=IT(x)-CT(x)=-\frac{x^2}{40}+698x-6000\,.$$

b) Com que:

$$BT'(x)=-\frac{x}{20}+698 \quad \text{i} \quad BT''(x)=-\frac{1}{20}<0$$

tenim que $x_0=13960$ vehicles maximitzen el benefici diari de l'empresa que és de $BT(13960)=4866040$ u.m.

c) Els extrems de l' interval de rendibilitat diària són les arrels de l'equació:

$$0=BT(x)=-\frac{x^2}{40}+698x-6000$$

que són aproximadament $x_1 \simeq 8.60$ i $x_2 \simeq 27911.4$. Per tant, l'empresa tindrà beneficis si circulen diàriament entre 9 i 27911 vehicles.

Una altra aplicació important del concepte de derivada està relacionada amb l'estudi de la **curvatura** (convexitat i concavitat) d'una funció. La idea de convexitat (concavitat) d'una funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ derivable en un punt $a \in A$ té a veure amb el fet que la recta tangent per aquest punt:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

estigui per damunt (per sota) de la funció en qüestió.[28] Resumint, diem que la funció derivable $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ en $a \in A$ és:

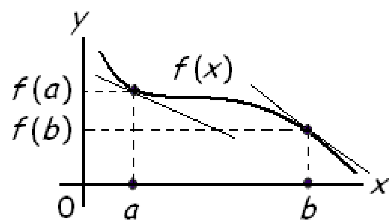
1. **Convexa** si existeix un entorn de $a \in A$ tal que, per a tot punt $x \in A$ de l'entorn:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

2. **Còncava** si existeix un entorn de $a \in A$ tal que, per a tot punt $x \in A$ de l'entorn:

$$f(x) \leq f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Gràficament:



En el punt a la funció és convexa i en el b còncava. Veurem tot seguit que la 2ª derivada ens permet decidir si la funció és convexa o còncava en un punt sempre i quan no s'anul·li (en els punts on s'anul·la, la funció pot presentar un punt d'inflexió).

[28] Pels economistes, els conceptes de convexitat i concavitat són els simètrics als dels matemàtics ja que s'ho miren tot des de l'origen de coordenades.

Anàlogament a com passava amb el creixement i decreixement locals, la curvatura d'una funció en un punt dóna lloc, de manera totalment natural, als conceptes de **convexitat** i **concavitat globals**. Diem que $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és convexa (o còncava) en $A \subset \mathbb{R}$ si ho és en tots els punts de A. La relació entre les derivades i la convexitat o concavitat d'una funció ve donada pel teorema següent. Notem que és necessari que la funció objecte d'estudi tingui, com a mínim, 2ª derivada.

Teorema. *Si $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ té derivades segones en $A \subset \mathbb{R}$ hom té que:*

1. *Si, per a tot $x \in A$, $f''(x) > 0$ llavors $f(x)$ és convexa en A.*
2. *Si, per a tot $x \in A$, $f''(x) < 0$ llavors $f(x)$ és còncava en A.*
3. *Si $f(x)$ és convexa en A llavors, per a tot $x \in A$, $f''(x) \geq 0$.*
4. *Si $f(x)$ és còncava en A llavors, per a tot $x \in A$, $f''(x) \leq 0$.*

Fixem-nos que 3 i 4 no són tampoc el recíproc de 1 i 2. Com podem veure, l'anàlisi de la curvatura d'una funció està resolt si la 2ª derivada és diferent de zero.[29]

Exemple: *Estudia la curvatura de $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ en tot el seu domini.*

SOLUCIÓ: En aquest cas, com que:

$$f''(x) = \frac{2(3-x)}{x^4}$$

tenim que la funció és convexa per a tot $x < 3$ del domini i còncava si $x > 3$. En el punt 3 el teorema no decideix.

[29] És una situació anàloga a la del creixement i/o decreixement però, ara, amb la segona derivada.

Acabem de veure que en el punt $a = 3$ la funció:

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

canvia de curvatura, és a dir, passa de còncava a convexa. Doncs bé, els punts on succeeix això són anomenats punts d'inflexió de la funció. Així doncs, diem que la funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ té un **punt d'inflexió** en $a \in A$ si en aquest punt passa de convexa a còncava o viceversa. Per tant, la funció anterior té un punt d'inflexió en 3.

Enuncio ara una condició necessària d'existència de punts d'inflexió per a una funció amb derivades segones que és de gran utilitat en la pràctica.

Teorema. *Si $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, amb derivades segones, té un punt d'inflexió en $a \in A$ llavors:*

$$f''(a) = 0.$$ [30]

Val a dir que aquesta condició necessària no té per què ser suficient, és a dir, que no tot punt que anul·la la segona derivada ha de ser sempre un punt d'inflexió. Per exemple, la segona derivada de la funció:

$$f(x) = x^4$$

s'anul·la en 0 i, en canvi, la funció sempre és convexa ja que:

$$f''(x) = 12x^2 > 0, \text{ per a tot } x \neq 0.$$

El que sí es pot assegurar és el contrarecíproc del teorema, és a dir, que un punt que no anul·la la segona derivada no pot ser mai un punt d'inflexió.

[30] Notem que el punt *a* no té perquè ser necessàriament un punt crític de la funció.

Un raonament anàleg al dut a terme pel cas dels intervals de creixement i decreixement pot fer-se ara per a estudiar la curvatura d'una funció a partir de la 2ª derivada. Vegem un exemple il·lustratiu.

<u>Exemple</u>: *Estudia la curvatura de la funció:*

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x}$$

en tot el seu domini.

SOLUCIÓ:

Ja sabem que el domini de la funció és:

$$A=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 1\}.$$

Com que:

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$$

tenim que la funció no té punts d'inflexió ja que aquesta segona derivada no s'anul·la mai. Per tant, els intervals de convexitat i concavitat seran:

$$]-\infty,1[\ \text{ i }\ ]1,+\infty[$$ [31]

ja que no hi ha punts que facin zero la 2ª derivada. En conseqüència, com que:

$$f''(0)=2>0\ \text{ i }\ f''(2)=-2<0$$

deduïm que la funció és convexa en $]-\infty,1[$ i còncava en $]1,+\infty[$. És evident que el punt 1 no és un punt d'inflexió ja que, malgrat que la funció canvia de curvatura al seu voltant, no pertany al seu domini.[32]

---

[31] Anàlogament al cas del creixement, els punts que no estan en el domini són també extrems d'intervals de curvatura.

[32] Cal tenir present sempre que els òptims i els punts d'inflexió d'una funció han de pertànyer al seu domini.

Arribats en aquest punt podem utilitzar tot lo vist per a **representar gràficament** una funció derivable $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Per això, cal conèixer:

a. El domini $A \subset \mathbb{R}$.

b. Els **punts de tall** amb els eixos:

   b.1. Si $f(a) = 0$, $(a,0)$ és un punt de tall amb l'eix OX.

   b.2. Si $0 \in A$, $(0, f(0))$ és un punt de tall amb l'eix OY.

c. Les **asímptotes**:

   c.1. Si $a \notin A$ i $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $x = a$ és asímptota vertical.

   c.2. Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ i $\lim_{x \to \infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$, $y = \alpha x + \beta$ és asímptota no vertical (horitzontal si $\alpha = 0$, i obliqua si $\alpha \neq 0$).

d. El **creixement** i els **òptims.** Cal determinar:

   d.1. Els punts crítics de la funció.

   d.2. Els intervals $]a,b[$, amb a,b punts crítics o bé que algun d'ells no pertany al domini. Si per un cert punt $c \in]a,b[$ tenim $f'(c) > 0$ $(f'(c) < 0)$ llavors, en $]a,b[$, la funció $f(x)$ creix (decreix).

   d.3. Els òptims $a \in A$ que són els extrems dels intervals anteriors on la funció passa de creixent a decreixent (màxim) o de decreixent a creixent (mínim).

e. La **curvatura** i els **punts d'inflexió**. Cal determinar:

   e.1. Els punts $a \in A$ tal que $f''(a) = 0$.

   e.2. Els intervals $]a,b[$, amb a,b solucions de l'equació anterior o bé que algun d'ells no pertany al domini. Si per un cert $c \in]a,b[$ tenim $f''(c) > 0$ $(f''(c) < 0)$ llavors, en $]a,b[$, $f(x)$ és convexa (còncava).

   e.3. Els punts d'inflexió $a \in A$ que són els extrems dels intervals anteriors on la funció canvia de curvatura.

Exemple: *Representa gràficament la funció* $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.[33]

SOLUCIÓ:

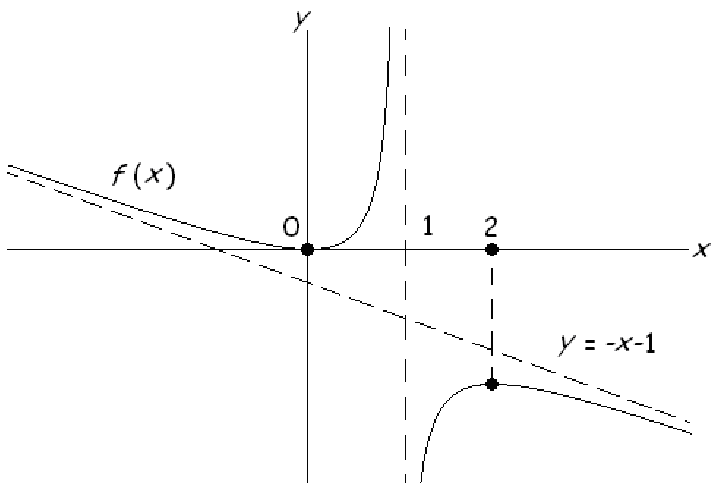
a. El domini és $A=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 1\}$.

b. Ja que $f(0)=0$, $(0,0)$ és l'únic punt de tall amb els eixos coordinats.

c. Ja que $1\notin A$ i $\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}+\infty, \text{ quan } x\to 1^- \\ -\infty, \text{ quan } x\to 1^+\end{cases}$, $x=1$ és una asímptota vertical pels dos costats. Ja que $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(-1)x\right)$, la recta $y=-x-1$ és asímptota obliqua en ambdós costats.

d. Ja que $f'(x)=x(2-x)/(1-x)^2$, els punts crítics són el 0 i el 2. Així doncs, els intervals de creixement seran $]-\infty,0[$, $]0,1[$, $]1,2[$ i $]2,+\infty[$. Com que $f'(-1)<0$, $f'(0.5)>0$, $f'(1.5)>0$ i $f'(3)<0$, deduïm que la funció és decreixent en $]-\infty,0[$ i $]2,+\infty[$, i creixent en els intervals $]0,1[$ i $]1,2[$. Per tant, 0 és un mínim i 2 és un màxim.

e. Ja que $f''(x)=2/(1-x)^3$, no hi ha punts d'inflexió. Així doncs, els intervals de curvatura seran $]-\infty,1[$ i $]1,+\infty[$. Com que $f''(0)>0$ i $f''(2)<0$, la funció és convexa a l'esquerra de 1 i còncava a la seva dreta. Gràficament:



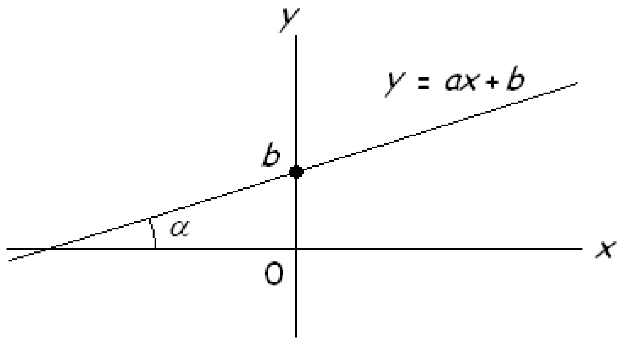
[33] El creixement i la curvatura d'aquesta funció ja s'han estudiat més amunt.

5. Funcions notables

Finalment dono en aquest epígraf la representació gràfica d'algues de les funcions bàsiques més importants.

- $y = f(x) = ax + b$.

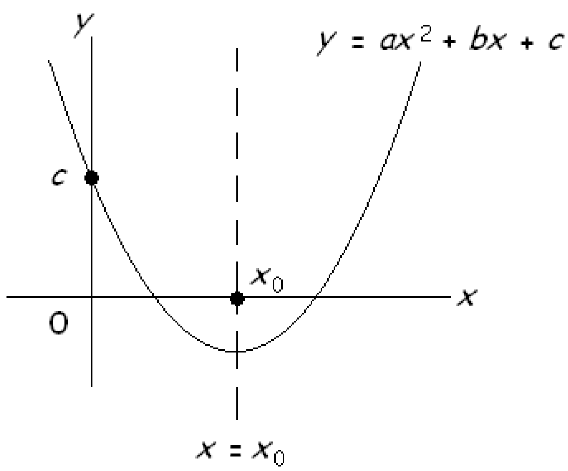
Es tracta d'una **recta** no perpendicular al eix d'abscisses *OX*. Gràficament:



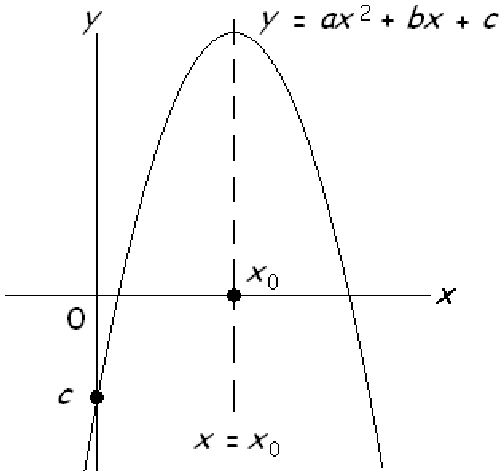
amb $\tan\alpha = a$, que és la pendent de la recta.

- $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, amb $a \neq 0$.

Es tracta d'una **paràbola**. Si $a > 0$ tenim:



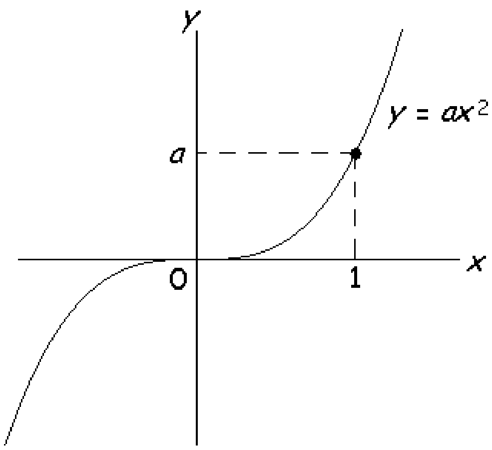
i si $a < 0$:



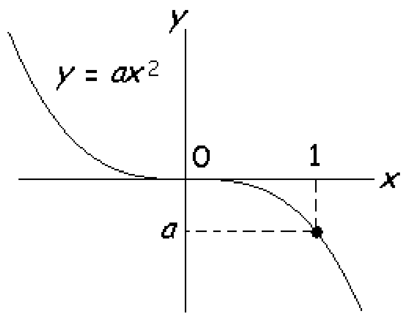
on $x_0 = -b/2a$ és el seu òptim (mínim en el primer cas i màxim en el segon) i on $x = x_0$ és eix de simetria. Si $b = 0$ aquest eix coincideix amb l'eix d'ordenades *OY*.

- $y = f(x) = ax^3$, amb $a \neq 0$.

Es tracta de la **paràbola cúbica** amb 0 com a punt d'inflexió. Si $a > 0$:

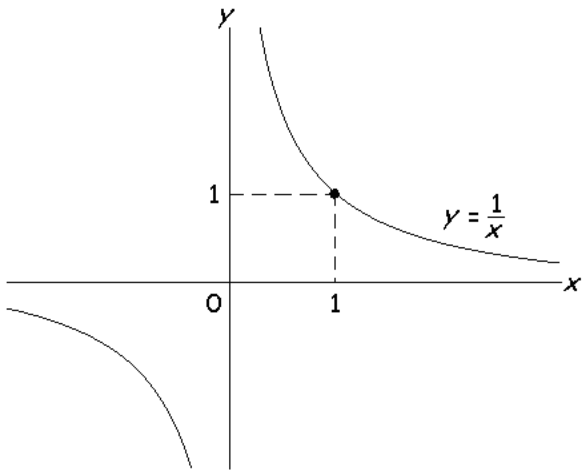


i si $a < 0$:



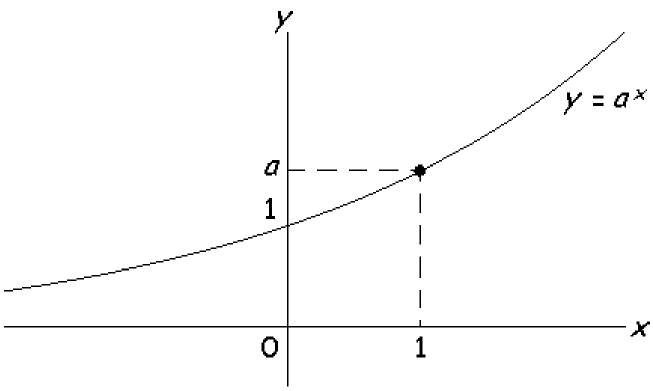
- $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Es tracta de la **hipèrbola equilàtera** amb asímptotes els eixos coordinats. Gràficament:

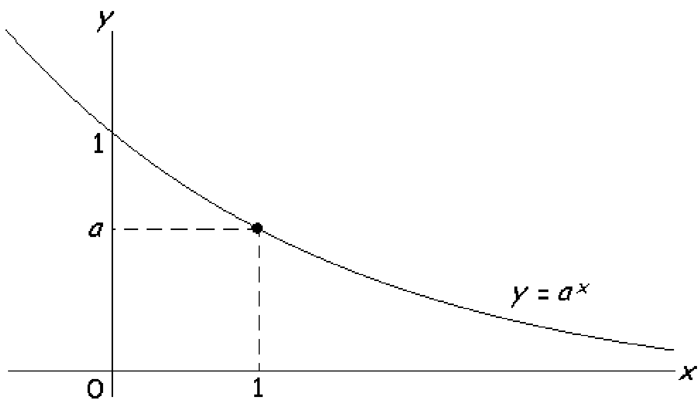


- $y = f(x) = a^x$, amb $a > 0$.

Es tracta de la funció **exponencial**. Si $a > 1$ tenim:



i si $a < 1$:



En ambdós casos l'eix d'abscisses OX és asímptota de la funció. Algunes de les propietats més importants de la funció exponencial són:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

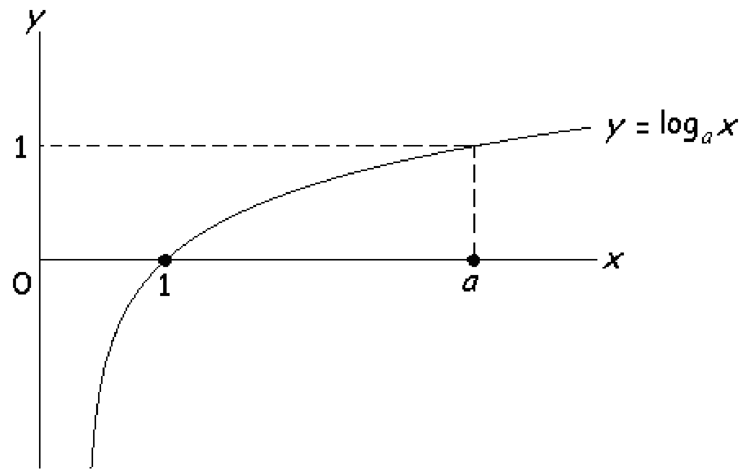
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x = a^{xy}$$

$$a^0 = 1$$

- $y = f(x) = \log_a x$.

Es tracta de la funció **logaritme** de base el número $a > 0$.[34] Gràficament:



Com veiem, l'eix d'ordenades OY és una asímptota. Algunes de les propietats més importants de la funció logaritme que cal destacar són:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

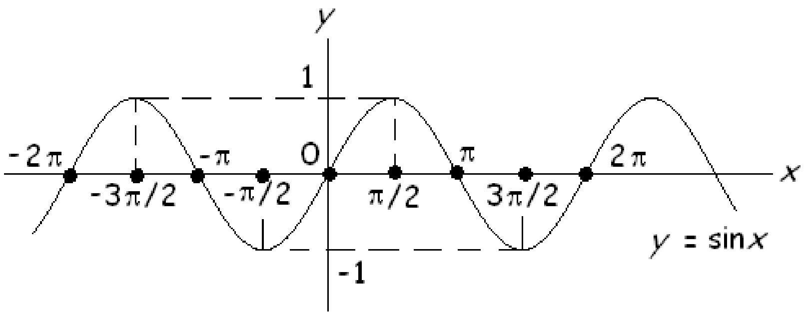
$$\log_a a^x = a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a = 1 \text{ i } \log_a 1 = 0$$

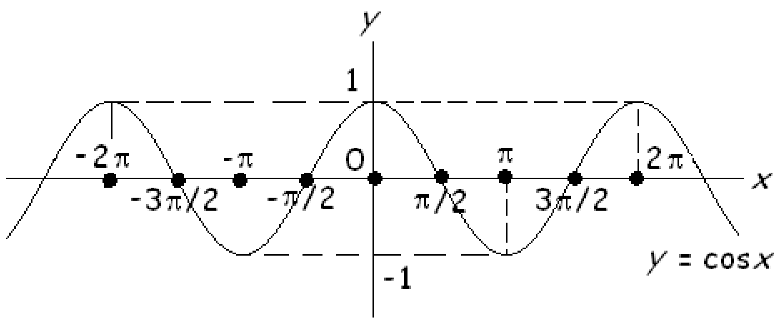
[34] Si $a = e$, es tractaria del **logaritme neperià**.

Finalment, tenim les funcions **trigonomètriques** "clàssiques". Ara la variable independent x ve expressada en radians.[35] Val a dir que les dues primeres funcions són periòdiques de període 2π, és a dir, que $f(x+2\pi)=f(x)$.

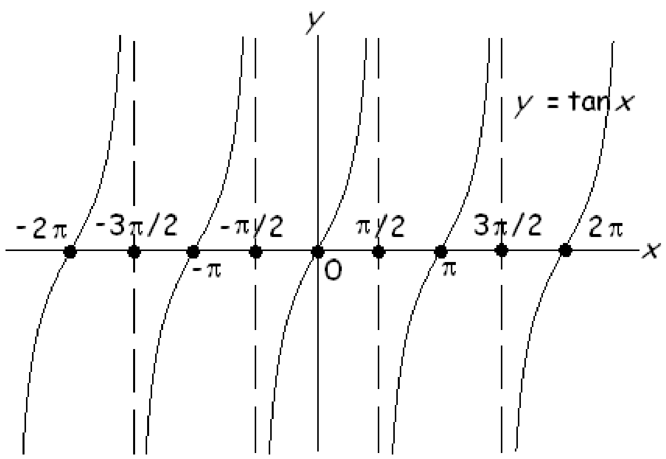
- $y=f(x)=\sin x$.



- $y=f(x)=\cos x$.



- $y=f(x)=\tan x$.[36]



[35] Un **radian** és l'angle α que comprèn un arc de circumferència igual al radi. Independentment del radi, aquest angle val una mica més de 57°.
[36] Notem que la funció tangent, per la seva banda, és periòdica de període π.

6. Bibliografia

- ADILLON, R. et al. (1995) *Lecciones de Matemáticas Básicas.* Barcelona, Gráficas Rey.

- ALEGRE, P. et al. (1990) *Ejercicios resueltos de Matemáticas empresariales I.* Madrid, AC.

- ALEGRE, P. et al. (1995) *Matemáticas empresariales*. Madrid, AC.

- ALEGRE, P. et al. (2005) *Ejercicios de autoevaluación del aprendizaje: Matemáticas Empresariales* (cod. 2004PID-UB/003). Barcelona, UB.

- BALBAS, A. et al. (1989) *Análisis matemático para la economía I: cálculo diferencial.* Madrid, AC.

- DEMIDOVICH, B. (1993) *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Madrid, Paraninfo.

- DOWLING, E. T. (1982) *Matemáticas para economistas (teoría y problemas resueltos).* México, McGraw-Hill.

- *Quadern d'exercicis de Matemàtiques Empresarials I.* Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial. Barcelona, UB. [37]

[37] Aquest manual està penjat al Campus Virtual de *Matemàtiques I.*

7. Índex analític