UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

COHOMOLOGIA DE VARIETATS I CÀLCUL D'ÍNDEXS

Àngel Picazo Archilla

Director: Dr. Carles Casacuberta Vergés
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

The index calculation that we study is a special case of the Atiyah–Singer theorem, which relates a topological index with an analytical index. By using cohomology in manifolds we state the de Rham theorem, define orientations, and relate the signature of a manifold with characteristic classes by means of a theorem due to Hirzebruch. In the main part of the work, we prove that the signature of a Riemannian manifold is equal to the index of a differential operator closely related with the Hodge Laplacian.

Resum

El càlcul d'índexs que estudiem en aquest treball és un cas especial del teorema d'Atiyah–Singer, el qual relaciona un índex topològic amb un índex analític. Fent ús de la cohomologia en varietats enunciem el teorema de de Rham, definim orientacions i relacionem la signatura d'una varietat amb classes característiques mitjançant un teorema de Hirzebruch. En la part principal del treball demostrem que la signatura d'una varietat de Riemann és igual a l'índex d'un operador diferencial molt relacionat amb el laplacià de Hodge.

2010 Mathematics Subject Classification. 57R19, 58A12, 58J20

Agraïments

Vull agrair al Dr. Carles Casacuberta el seu suport i tota l'ajuda que m'ha donat per entendre i fer aquest treball. He après molt amb ell i m'ha motivat molt aquest tema que hem estat treballant per continuar aprenent. També vull agrair a la família i amics aquest temps que no els he pogut dedicar i que sempre m'hagin donat suport i consells.

Índex

1 Introducció

Motivació

Les equacions diferencials formulen gran part dels models matemàtics que descriuen les lleis de la naturalesa. Trobar solucions explícites a una determinada equació diferencial pot ser molt difícil o impossible. Com a conseqüència, podem reflexionar sobre quina és l'estructura de l'espai de solucions. Per a un ventall molt ampli d'equacions diferencials el teorema de l'índex d'Atiyah–Singer ens ho resol: en funció exclusivament de la topologia de l'espai en el qual el model té lloc, el teorema ens dóna una fórmula que determina el conjunt de solucions. L'objectiu d'aquest treball és demostrar amb detall un teorema d'índex que és un cas senzill però aclaridor del teorema d'Atiyah–Singer: la signatura d'una varietat diferenciable M compacta i orientable, que és un invariant topològic, és igual a l'índex d'un cert operador diferencial a M relacionat amb el laplacià de Hodge.

La motivació d'aquest treball rau en el fet que el teorema d'Atiyah–Singer és una de les grans fites de les matemàtiques del segle XX i ha influenciat els posteriors desenvolupaments de la geometria diferencial, la topologia i la teoria quàntica de camps, i ha pogut relacionar el món de les matemàtiques pures amb el món de la física teòrica de les partícules enriquint-se mútuament durant molts anys.

Antecedents històrics

Per què són topològicament diferents l'esfera S^2 i el tor $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$? Si traiem una corba tancada ens adonem que S^2 es desconnecta mentre que en el tor hi ha corbes tancades que no el desconnecten. Aquest és l'ordre de connexió introduït per E. Betti a l'any 1871. Més tard, a finals del segle XIX, H. Poincaré va posar en rigor aquesta idea i mitjançant estructures combinatòries va associar un nou invariant a les varietats, l'homologia, que va anar evolucionant i aïllant-se del seu origen combinatori al llarg del començament del segle XX. Alguns resultats, per exemple de J. W. Alexander i G. de Rham, van mostrar que el grups de cohomologia eren encara més rellevants. El teorema de de Rham va ser provat per de Rham l'any 1931. La teoria de Hodge va ser desenvolupada per W. V. D. Hodge durant la dècada de 1930 com una extensió de la teoria de de Rham.

La teoria de classes característiques va començar l'any 1935 amb el treball gairebé simultani fet per H. Whitney als Estats Units i E. Stiefel a Suïssa. L'any 1942, L. Pontrjagin, de la Universitat de Moscou, va començar a estudiar l'homologia de les varietats de Grassmann. Això va fer que pogués construir unes noves i importants classes característiques. L'any 1946, S. Chern va definir classes característiques per a fibrats complexos. A l'any 1954, F. Hirzebruch va demostrar un teorema que va ser utilitzat després en la demostració del teorema de Hirzebruch-–Riemann-–Roch.

El problema de l'índex per als operadors diferencials el·líptics va ser plantejat per I. Gel'fand el 1960. Es va adonar de la invariància homotòpica de l'índex i va preguntar per una fórmula que involucrés invariants topològics. Hirzebruch i Borel havien demostrat la integralitat del gènere d'una varietat spin, i Atiyah va suggerir que aquesta integralitat es podria explicar si era l'índex de l'operador de Dirac (que va ser redescobert per Atiyah i Singer el 1961). El teorema d'Atiyah–Singer va ser demostrat l'any 1963. El maig de 2004 es va celebrar la segona edició del lliurament del premi Abel de l'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres, on van ser guardonats M. Atiyah i I. Singer.

Desenvolupament del treball

El propòsit inicial d'aquest treball era entendre un cas senzill del teorema d'Atiyah–Singer i veure'n alguns exemples. Vam escollir la signatura d'una varietat compacta orientable com a objecte central d'estudi. Ha resultat un tasca difícil, perquè ha calgut aprendre en primer lloc les tècniques de cohomologia de varietats, que són prou extenses i profundes, però alhora molt motivadores. Vam començar parlant de complexos de cadenes i a partir d'aquí vam anar desenvolupant el treball. Setmana rere setmana anàvem quedant i jo feia preguntes basades en l'extensa recerca bibliogràfica que ha calgut.

Per una part hi ha hagut una tasca de documentació i síntesi de fets ben coneguts, amb l'ajuda del tutor. En aquesta part s'inclouen els temes d'homologia i cohomologia singular, on hem utilitzat els llibres de Bredon [3], Greenberg–Harper [6] i apunts del tutor en un curs de màster [5]. En aquesta part no vam entrar amb detall en la demostració del teorema de de Rham i n'hem donat només una referència. També s'inclouen els temes d'orientabilitat i classes característiques, on hem utilitzat principalment el llibre de Milnor–Stasheff [7]. Cal dir que el teorema de l'existència de la classe d'orientació per a varietats compactes i orientables també només està referenciat. En la part de la signatura d'una varietat hem utilitzat els llibres anteriors i hem enunciat el teorema de Hirzebruch.

Per altra banda, hem anat elaborant petites demostracions i hem anat seguint l'exemple concret dels tors $S^1 \times \cdots \times S^1$, cosa que ha sigut clau en l'última part del treball. Cal destacar el tema de la signatura com a índex d'un operador diferencial com a material menys conegut. Ens hem centrat en entendre la demostració d'aquest fet, que es troba indicada a l'article original d'Atiyah–Singer però sense detalls. Ha sigut gràcies a l'exemple del tor que ho hem entès, a més d'haver treballat l'operador estrella de Hodge i el laplacià de Hodge en varietats de Riemann.

Estructura de la memòria

A la primera secció parlarem d'homologia i cohomologia partint de la definició de complexos de cadenes i cocadenes. Aleshores veurem com es relacionen mitjançant el producte de Kronecker i enunciarem el teorema de de Rham. La secció següent secció conté orientabilitat i classes característiques, on veurem què és una classe d'orientació d'una varietat, la classe d'Euler d'un fibrat i les classes de Chern, que es defineixen a partir de la classe d'Euler. En la secció següent definirem què és la signatura d'una varietat orientable i compacta mitjançant el producte cup i veurem com es relaciona amb les classes característiques a través del teorema de la signatura de Hirzebruch. En aquesta secció es veu la igualtat entre la signatura i el producte de Kronecker entre la classe d'orientació i una classe de cohomologia que es construeix a partir de les classes de Pontrjagin, les quals es defineixen a partir de les classes de Chern. Finalment, veurem la signatura com a índex d'un operador diferencial, per a la qual cosa estudiarem el laplacià de Hodge. La conclusió de tot plegat és que un índex topològic és igual a un índex analític.

2 Homologia i cohomologia

2.1 Complexos de cadenes i de cocadenes

Per poder parlar de cohomologia i homologia primer hem de definir què són els complexos de cadenes i els complexos de cocadenes graduats sobre $\mathbb{Z}$ en una categoria abeliana. Un complex és una successió de morfismes tals que la composició de dos morfismes consecutius és zero; el complex és de cadenes si els morfismes disminueixen el grau i és de cocadenes si l'incrementen. Les definicions precises són les següents:

Definició 2.1. Un *complex de cadenes* en una categoria abeliana $\mathcal{A}$ és una successió A_* de morfismes de $\mathcal{A}$ indexada a $\mathbb{Z}$:

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

on $d_n \circ d_{n+1} = 0$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

Els morfismes d_n es diuen *operadors vora* o bé *diferencials*. L'*homologia* associada a un complex de cadenes es defineix com

$$H_n(A_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$$

per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

Definició 2.2. Un *complex de cocadenes* en una categoria abeliana $\mathcal{A}$ és una successió A^* de morfismes de $\mathcal{A}$ indexada a $\mathbb{Z}$:

$$\cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A^n \xrightarrow{d_n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

on $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

La *cohomologia* associada a un complex de cocadenes es defineix com

$$H^n(A^*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n-1}$$

per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

Un exemple important de complex de cocadenes és el *complex de de Rham*, que es descriu a continuació.

Exemple 2.3. (Cohomologia de de Rham) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m. Sigui $\mathcal{A}$ la categoria dels espais vectorials sobre $\mathbb{R}$. Denotem per $\Omega^n(M)$ l'espai vectorial de les n-formes diferencials a M. Aleshores $\Omega^*(M)$ és un complex de cocadenes a $\mathcal{A}$:

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} \Omega^{n+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

on d_n és la diferencial exterior i es compleix $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Tenim que $\Omega^n(M) = 0$ si $n < 0$ o bé $n > m$. Una n-forma ω és *tancada* si $d_n\omega = 0$, i és *exacta* si $\omega = d_{n-1}\sigma$ per a alguna $(n-1)$-forma σ. La cohomologia de de Rham de M es defineix com

$$H^n_{\mathrm{dR}}(M) := \frac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n-1}} = \frac{\{n\text{-formes tancades}\}}{\{n\text{-formes exactes}\}}.$$

2.2 Homologia i cohomologia singular

A continuació anem a definir l'homologia singular i la cohomologia singular d'un espai topològic. Això serà important per arribar al teorema de de Rham. L'homologia singular detecta "recintes" en dimensions arbitràries. Per a cada $n \geq 0$, sigui $S_n(X)$ el grup abelià lliure generat per totes les aplicacions contínues $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$, on X és un espai topològic i $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t_i \leq 1, \Sigma\, t_i = 1\}$.

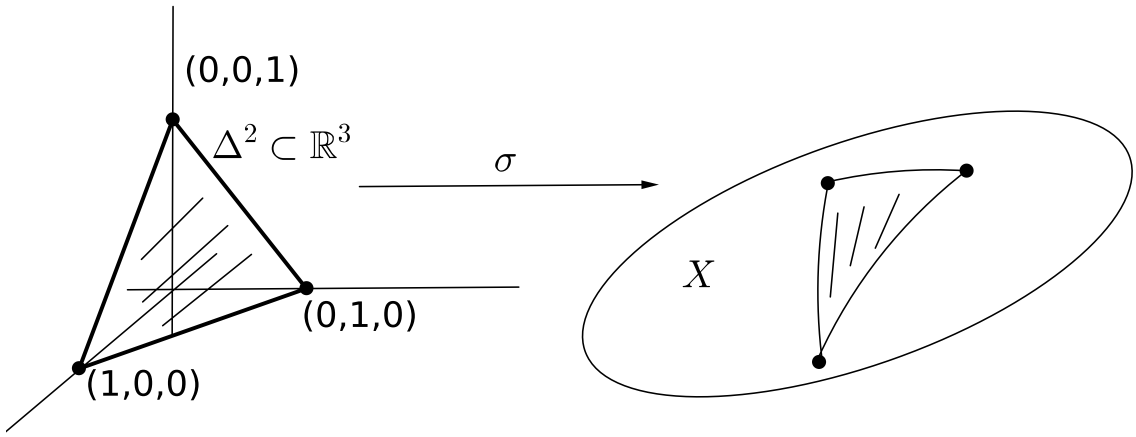


Figura 1: Aplicació contínua de Δ^2 en un espai X

Aleshores $c \in S_n(X)$ si i només si $c = \lambda_1\sigma_1 + \cdots + \lambda_k\sigma_k$ on $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ i $\sigma_i \colon \Delta^n \longrightarrow X$ és una aplicació contínua per a tot i. Cada σ_i es diu *n-símplex singular* a X i c es diu una *n-cadena singular*. A continuació definim un operador entre aquests grups abelians.

Definició 2.4. L'*operador vora* és el morfisme de grups $\partial \colon S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ per a cada n tal que $\partial c := \lambda_1\partial\sigma_1 + \cdots + \lambda_k\partial\sigma_k$ si $c = \lambda_1\sigma_1 + \cdots + \lambda_k\sigma_k$, on $\partial\sigma_j$ es defineix com $\partial\sigma_j := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i\sigma_j$ on $\partial_i\sigma_j \colon \Delta^{n-1} \longrightarrow X$ és la cara i-èsima de σ_j, que es defineix com

$$(\partial_i\sigma_j)(t_0, \dots, t_{n-1}) = \sigma_j(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}).$$

La composició de dos operadors vora consecutius és zero: $\partial\partial\sigma = 0$ per a tot $\sigma \in S_n(X)$. Per tant, $S_*(X)$ és un complex de cadenes.

Les cadenes $c \in S_n(X)$ tals que $\partial c = 0$ es diuen *n-cicles* i les cadenes $c \in S_n(X)$ de la imatge de ∂ es diuen *n-vores*.

Els grups abelians

$$H_n(X) := H_n(S_*(X)) = \frac{n\text{-cicles a } X}{n\text{-vores a } X}$$

són els *grups d'homologia singular* de l'espai X.

Si els coeficients λ_i els generalitzem a un anell R qualsevol en comptes de $\mathbb{Z}$, obtenim per a cada n un R-mòdul lliure:

$$S_n(X; R) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\sigma_i \mid \lambda_i \in R,\, \sigma_i \colon \Delta^n \longrightarrow X \right\}.$$

Llavors $S_*(X;R)$ segueix sent un complex de cadenes i, per tant, podem definir per a cada espai topològic X i cada anell commutatiu R els grups d'homologia singular amb coeficients a R:

$$H_n(X;R) := H_n(S_*(X;R))$$

per a tot n. També podem definir un complex de cocadenes $S^*(X;R)$ a partir de $S_*(X)$ d'aquesta forma:

$$S^n(X;R) = \mathrm{Hom}(S_n(X), R) = \{\varphi : S_n(X) \longrightarrow R \text{ morfisme de grups abelians}\},$$

amb l'operador covora $\delta\colon \mathrm{Hom}(S_n(X), R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_{n+1}(X), R)$ que és el morfisme de R-mòduls definit com $\delta\varphi = \varphi \circ \partial$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(S_n(X),R) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Hom}(S_{n+1}(X),R) \\
S_n(X) \xrightarrow{\varphi} R \arrow[r, mapsto] & S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_n(X) \xrightarrow{\varphi} R \\
 & \underrightarrow{\quad\quad\quad\quad} \\
 & \delta\varphi = \varphi \circ \partial
\end{tikzcd}$$

Figura 2: L'operador covora

Llavors, per a cada espai topològic X i cada anell commutatiu R, els grups de *cohomologia singular* de X amb coeficients a R són

$$H^n(X;R) := H^n(S^*(X;R))$$

per a tot n.

Tota aplicació contínua $f\colon X \to Y$ indueix morfismes de R-mòduls

$$f_*\colon H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R), \qquad f^*\colon H^n(Y;R) \longrightarrow H^n(X;R)$$

definits com $f_*([c]) = [f_\sharp(c)]$ on $f_\sharp(\sum r_i\sigma_i) = \sum r_i(f \circ \sigma_i)$ i com $f^*([\varphi]) = [\varphi \circ f_\sharp]$ respectivament.

2.3 Producte de Kronecker

Partint de l'aplicació bilineal $\langle\ ,\ \rangle\colon S^n(X) \times S_n(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ que consisteix en avaluar un morfisme $\varphi\colon S_n(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ en una cadena $c \in S_n(X)$, és a dir, $\langle \varphi, c\rangle := \varphi(c)$, obtenim el resultat següent:

Proposició 2.5. *L'aplicació $H^n(X) \times H_n(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida com $\langle[\varphi],[c]\rangle = \varphi(c)$ està ben definida.*

Demostració. Comprovem que $\varphi(c + \partial c') = \varphi(c)$ per a tot $c' \in S_{n+1}(X)$:

$$\varphi(c + \partial c') - \varphi(c) = \varphi(c + \partial c' - c) = \varphi(\partial c') = (\delta\varphi)(c') = 0,$$

ja que $\delta\varphi = 0$. De manera semblant, comprovem que $(\varphi + \delta\varphi')(c) = \varphi(c)$ per a tot $\varphi' \in S^{n-1}(X)$:

$$(\varphi + \delta\varphi')(c) - \varphi(c) = (\varphi + \delta\varphi' - \varphi)(c) = (\delta\varphi')(c) = \varphi'(\partial c) = 0,$$

ja que $\partial c = 0$. $\square$

Aquesta operació $\langle\ ,\ \rangle$ s'anomena *producte de Kronecker*. La versió amb coeficients en un anell R és anàloga a l'anterior: l'avaluació d'un morfisme $\varphi\colon S_n(X) \to R$ sobre una cadena $c \in S_n(X)$ s'estén a una acció de $S^n(X;R)$ sobre $S_n(X;R)$ com $\varphi(\sum r_i\sigma_i) = \sum r_i\varphi(\sigma_i)$. D'aquesta manera s'obté la forma següent del producte de Kronecker:

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H^n(X;R) \times H_n(X;R) \longrightarrow R. \tag{2.1}$$

Proposició 2.6. *Si R és un cos, llavors $H^n(X;R)$ és el R-espai vectorial dual de $H_n(X;R)$ per a tot n.*

Demostració. El resultat és vàlid en general, però farem la demostració només per al cas de dimensió finita. En aquest cas, és suficient veure que (2.1) és una aplicació bilineal no degenerada. Aquest fet implica que hi ha aplicacions R-lineals injectives

$$H^n(X;R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(X;R),R); \qquad H_n(X;R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H^n(X;R),R)$$

que han de ser isomorfismes perquè de la seva injectivitat es dedueix que $H_n(X;R)$ i $H^n(X;R)$ tenen la mateixa dimensió.

Suposem, doncs, que existeix $[c] \in H_n(X;R)$ tal que $\langle\varphi, c\rangle = 0$ per a tot $\varphi\colon S_n(X;R) \longrightarrow R$. Si escrivim $c = r_1\sigma_1 + \cdots + r_k\sigma_k$ amb $r_1 \neq 0$, és suficient escollir φ tal que $\varphi(\sigma_1) = 1$, $\varphi(\sigma_2) = \cdots = \varphi(\sigma_k) = 0$. Llavors $\langle\varphi, c\rangle = \varphi(c) = \varphi(r_1\sigma_1 + \cdots + r_k\sigma_k) = r_1 \neq 0$, i arribem a contradicció. De manera semblant, si existeix $[\varphi] \in H^n(X;R)$ tal que $\langle\varphi, c\rangle = 0$ per a tot $c \in S_n(X;R)$, llavors $\varphi(c) = 0$ per a tot c i això implica directament que $\varphi = 0$. $\square$

2.4 Teorema de de Rham

Anem a descriure una interpretació del producte de Kronecker en termes de cohomologia de de Rham. Per a aquest propòsit ens cal considerar integració de formes diferencials sobre cadenes diferenciables en varietats. En aquesta secció, els coeficients de l'homologia i de la cohomologia seran el cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals.

Sigui M una varietat diferenciable. Denotem per $S_n^\infty(M) \subset S_n(M;\mathbb{R})$ el subespai vectorial format per les n-cadenes $\sum r_k\sigma_k$ on $r_k \in \mathbb{R}$ per a tot k i cada σ_k és una aplicació $\mathcal{C}^\infty$ de Δ^n en M. Aleshores $S_*^\infty(M)$ és un subcomplex del complex de cadenes $S_*(M;\mathbb{R})$, ja que l'operador vora ∂ es restringeix a $S_*^\infty(M)$.

Teorema 2.7. *$H_n(S_*^\infty(M)) \cong H_n(S_*(M;\mathbb{R}))$ per a tot n.*

Aquest fet es pot demostrar, per exemple, amb el lema 9.5 del capítol V de [3].

Si denotem per $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ el grup k-èsim de cohomologia de de Rham de M, hi ha una aplicació $\mathbb{R}$-bilineal

$$\int : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \times H_k(S^\infty_*(M)) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.2}$$

definida com

$$\int_c \omega := \sum r_i \int_{\sigma_i} \omega = \sum r_i \int_{\Delta^k} (\sigma_i)^* \omega,$$

on $\omega \in \Omega^k(M)$ és una k-forma diferencial a M tal que $\delta\omega = 0$ i $c = \sum r_i \sigma_i$ és una k-cadena $\mathcal{C}^\infty$ amb $\partial c = 0$. Així doncs, cada $\sigma_i \colon \Delta^k \longrightarrow M$ és una aplicació $\mathcal{C}^\infty$. L'aplicació (2.2) està ben definida pel teorema de Stokes, ja que

$$\int_c (\omega + \delta\omega') = \int_c \omega + \int_{\partial c} \omega' = \int_c \omega,$$

degut al fet que $\partial c = 0$. Anàlogament,

$$\int_{c+\partial c'} \omega = \int_c \omega + \int_{c'} \delta\omega = \int_c \omega,$$

ja que $\delta\omega = 0$.

Aquesta aplicació (2.2) dóna una aplicació $\mathbb{R}$-lineal

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_k(S^\infty_*(M)), \mathbb{R}) \cong H^k(M; \mathbb{R}). \tag{2.3}$$

El teorema de de Rham afirma que (2.3) és un isomorfisme per a tot k. Aquest teorema va ser demostrat per Georges de Rham el 1931. La demostració es pot trobar a [3].

Teorema 2.8 (de Rham)**.** *Per a tota varietat diferenciable M i tot $k \geq 0$ hi ha un isomorfisme*

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^k(M; \mathbb{R}).$$

Observem, finalment, que l'aplicació (2.2) coincideix amb el producte de Kronecker aplicant el teorema 2.7 i el teorema 2.8. Amb més precisió, si una classe $\alpha \in H^k(M; \mathbb{R})$ es correspon amb $[\omega] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ on ω és una k-forma a M, i una classe $\beta \in H_k(M; \mathbb{R})$ està representada per $c \in S^\infty_k(M)$, aleshores

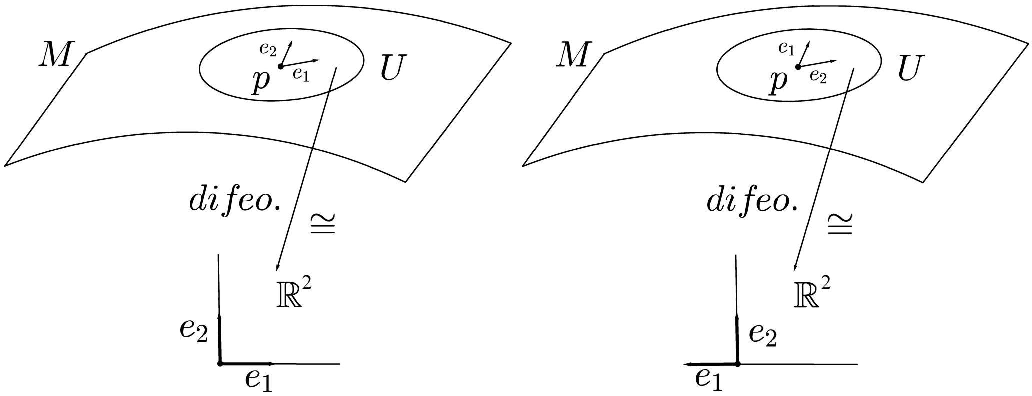
$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_c \omega.$$

3 Orientacions i classes característiques

3.1 Orientacions en varietats

El concepte d'orientabilitat es pot definir tant per a varietats topològiques com per a varietats diferenciables, i en aquest segon cas una orientació en sentit diferenciable coincideix amb una orientació en sentit topològic.

Si M és una varietat diferenciable de dimensió n, una *orientació local* en un punt $p \in M$ ve donada per una orientació a $\mathbb{R}^n$ a través de l'elecció d'una carta local que contingui el punt p, és a dir, un obert U de M amb $p \in U$ juntament amb un difeomorfisme $U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.



(a) Orientació antihorària (b) Orientació horària

Una orientació a $\mathbb{R}^n$ és l'elecció d'una base de vectors, on dues bases són equivalents si la matriu de canvi de base té determinant positiu. Una *orientació global* en una varietat diferenciable M ve donada per un *atles orientat*, que és un atles tal que en la intersecció de cada parell de cartes les aplicacions de canvi de coordenades tenen jacobià positiu. Una varietat M és *orientable* si existeix algun atles orientat a M.

Si M és una varietat topològica, l'orientabilitat es defineix mitjançant l'*homologia relativa*: si X és un espai topològic i $A \in X$ és un subespai, es defineix

$$S_n(X, A) := S_n(X)/S_n(A), \qquad H_n(X, A) := H_n(S_*(X, A)),$$

que està ben definit ja que l'operador vora de $S_*(X)$ es restringeix a $S_*(A)$ i per tant $S_*(X)/S_*(A)$ torna a ser un complex de cadenes.

Si M és una varietat topològica de dimensió n i U és un obert de M homeomorf a $\mathbb{R}^n$, llavors per a tot punt $p \in U$ el *teorema d'excisió* ens dóna que

$$H_n(M, M \setminus \{p\}) \cong H_n(U, U \setminus \{p\})$$

i a més hi ha una successió exacta llarga

$$\cdots \longrightarrow H_n(U) \longrightarrow H_n(U, U \setminus \{p\}) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(U \setminus \{p\}) \longrightarrow H_{n-1}(U) \longrightarrow \cdots$$

d'on, com que $U \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$, resulta que $H_n(M, M \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$ té dos generadors intrínsecs.

Definició 3.1. Una *orientació local* en un punt p d'una varietat topològica M de dimensió n és un generador de $H_n(M, M \setminus \{p\})$.

Una orientació en un obert $U \subseteq M$ és una classe $\alpha \in H_n(M, M \setminus U)$ tal que la seva imatge a través del morfisme de restricció

$$H_n(M, M \setminus U) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{p\})$$

és una orientació local en cada punt $p \in U$. Aleshores, igual com en el cas diferenciable, una orientació global a M ve donada per un atles orientat, que és un atles amb una orientació α_U en cada carta U i on cada parell de cartes són compatibles en el sentit que, si $U \cap V \neq \emptyset$ llavors les restriccions de α_U i α_V coincideixen en cada punt $p \in U \cap V$.

Definició 3.2. Una *classe d'orientació* en una varietat topològica M de dimensió n és un element $\zeta \in H_n(M)$ tal que per a tot $p \in M$ el morfisme de restricció $H_n(M) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{p\})$ envia ζ a una orientació local en p.

La condició necessària i suficient perquè una varietat M admeti una classe d'orientació és que M sigui orientable i compacta. Aquest fet es demostra, per exemple, a [6].

Teorema 3.3. *Si M és orientable i compacta, llavors $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ i cada generador de $H_n(M)$ és una classe d'orientació. Si M no és orientable o no és compacta, llavors $H_n(M) = 0$.*

Exemples 3.4. (a) $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

(b) $H_2(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$.

(c) $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$, ja que $\mathbb{R}P^2$ no és orientable.

(d) $H_2(\mathbb{R}^2) = 0$, ja que $\mathbb{R}^2$ no és compacte.

Si M és una varietat diferenciable orientable i compacta de dimensió n amb una mètrica de Riemann, llavors existeix un element de volum a M, que és una n-forma diferencial que genera el grup $H^n_{\mathrm{dR}}(M)$. L'isomorfisme de de Rham fa correspondre l'element de volum amb la classe dual d'una classe d'orientació a $H_n(M; \mathbb{R})$. Aquesta correspondència s'evidencia en el fet següent:

$$\int_z \mathrm{vol} = \int_M \mathrm{vol} \neq 0 \tag{3.1}$$

on $\zeta = [z]$ és una classe d'orientació i vol és l'element de volum a M. De fet, el valor de la integral (3.1) és igual al volum de M.

Exemple 3.5. En la figura 4, la 2-cadena $z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$ (amb orientacions adients en cada σ_i) satisfà que $\partial z = 0$. La classe $[z]$ és una classe d'orientació a S^2.

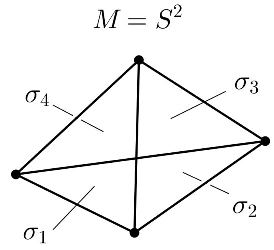


Figura 4: Triangulació de l'esfera

Si M és una varietat orientable i compacta de dimensió n i denotem per $[M]$ una classe d'orientació, llavors per a cada classe de cohomologia $\alpha \in H^n(M)$ podem calcular $\langle \alpha, [M] \rangle$ i el resultat serà un nombre enter associat a M, que tindrà interpretacions depenent de la classe α escollida. Vegem-ne dos exemples:

Exemple 3.6. Si escollim la curvatura de Gauss $\mathcal{K} \in \Omega^2(M)$ on M és una superfície diferenciable orientable i compacta amb una mètrica de Riemann, llavors

$$\langle [\mathcal{K}], [M] \rangle = \int_M \mathcal{K} = 2\pi\, \chi(M)$$

on $\chi(M)$ denota la característica d'Euler de M.

Exemple 3.7. Si M és una varietat diferenciable de dimensió n orientable i compacta, llavors

$$\langle e(M), [M] \rangle = \chi(M)$$

on $e(M)$ és la *classe d'Euler* del fibrat tangent de M i $\chi(M)$ és la característica d'Euler de M.

En la secció següent definirem la classe d'Euler d'un fibrat, i a partir d'ella definirem les classes de Chern. Necessitem les classes de Chern per tal de definir les classes de Pontrjagin, les quals s'utilitzen per definir els polinomis de Hirzebruch.

3.2 Orientabilitat de fibrats

Donat un fibrat vectorial

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow E \xrightarrow{p} B,$$

un *obert trivialitzant* és un subespai obert $U \subseteq B$ tal que $p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ amb un homeomorfisme $h\colon U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ que sigui $\mathbb{R}$-lineal en cada fibra i tal que $p \circ h$ coincideixi amb la projecció $U \times \mathbb{R}^n \to U$. Si el fibrat és diferenciable, cal imposar que h sigui un difeomorfisme.

Definició 3.8. Un fibrat vectorial $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ és *orientable* si podem escollir una orientació en cada fibra $p^{-1}(b) \cong \mathbb{R}^n$ de manera que aquestes orientacions siguin compatibles en cada obert trivialitzant U de ξ.

Si M és una varietat diferenciable de dimensió n, llavors el fibrat tangent

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow TM \longrightarrow M$$

és orientable si i només si M és orientable. En aquest cas, els espais vectorials T_xM per a tot $x \in M$ admeten orientacions compatibles.

Cal observar que, si $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \longrightarrow M$ és un fibrat vectorial sobre una varietat M, sempre podem escollir un recobriment de M per oberts que siguin alhora cartes locals de M i oberts trivialitzants del fibrat ξ.

Observem també que, donat un fibrat vectorial $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \longrightarrow B$, l'espai E és homotòpicament equivalent a B, ja que $\mathbb{R}^n$ és contràctil. Aleshores l'aplicació $p\colon E \longrightarrow B$ indueix isomorfismes $H_k(E) \cong H_k(B)$ i $H^k(B) \cong H^k(E)$ per a tot k.

3.3 Classes d'orientació en fibrats

Una orientació en un espai vectorial V és una elecció d'una base $e_1, \ldots, e_n$. De manera equivalent, podem pensar una orientació a V com una classe a $H_n(V, V_0)$ on $V_0 = V \setminus \{0\}$.

Donat un fibrat vectorial $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$, si escrivim $F = p^{-1}(b)$ i denotem per $\iota\colon F \hookrightarrow E$ la inclusió, llavors tenim morfismes de grups $\iota^*\colon H^k(E) \longrightarrow H^k(F)$ i també $\iota^*\colon H^k(E, E_0) \longrightarrow H^k(F, F_0)$ per a tot k, on $E_0 = E \setminus s_0$ i s_0 és la secció zero, és a dir, $(E \setminus s_0)_b = p^{-1}(b) \setminus \{0\}$ per a tot $b \in B$ (suprimim el zero de cada fibra).

Definició 3.9. Una *classe de Thom* en un fibrat vectorial $\xi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow E \longrightarrow B$ és una classe $u \in H^n(E, E_0)$ tal que $\iota^*(u)$ és un generador de $H^n(F, F_0)$ on $F = p^{-1}(b)$, per a tot $b \in B$.

Una classe de Thom u existeix si el fibrat ξ és orientable [7].

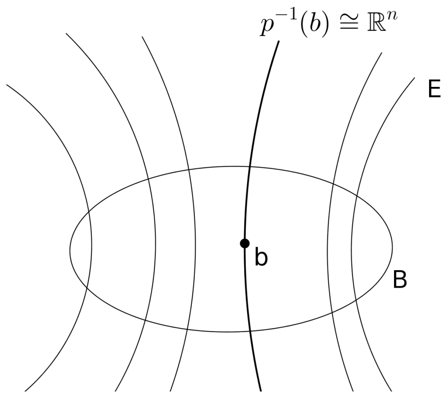


Figura 5: Fibrat vectorial real

La classe d'Euler d'un fibrat vectorial real orientable es defineix de la manera següent:

Definició 3.10. La classe d'Euler $e(\xi) \in H^n(B)$ d'un fibrat vectorial orientable $\xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ és la restricció de la classe de Thom $u \in H^n(E, E_0)$ per l'isomorfisme $p^*\colon H^n(B) \longrightarrow H^n(E)$.

En altres paraules, $p^*(e(\xi)) = u_{|E}$ on $u_{|E}$ és la imatge de u per l'aplicació $H^n(E, E_0) \longrightarrow H^n(E)$ en la successió exacta llarga del parell (E, E_0).

Com a cas particular, si $\tau : \mathbb{R}^n \longrightarrow TM \longrightarrow M$ és el fibrat tangent d'una varietat diferenciable orientable M de dimensió n, llavors la classe d'Euler $e(M) := e(\tau)$ pertany a $H^n(M)$.

Exemples 3.11. (a) Si $M = \mathbb{R}^n$ aleshores $e(\mathbb{R}^n) = 0$, ja que $H^n(\mathbb{R}^n) = 0$.

(b) Si $M = S^1$, tenim que $e(S^1) \in H^1(S^1)$ i $\langle e(S^1), [S^1]\rangle = \chi(S^1) = 0$. Per tant, $e(S^1) = 0$.

(c) Si $M = S^2$, es compleix que $\langle e(S^2), [S^2]\rangle = \chi(S^2) = 2$. Aleshores $e(S^2) = 2\alpha$, on α és un generador de $H^2(S^2)$.

3.4 Classes de Chern

Per a tot fibrat vectorial complex $\xi\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow E \longrightarrow X$ es defineixen unes classes de cohomologia $c_k(\xi) \in H^{2k}(X)$ per a tot $k \in \mathbb{N}$, anomenades *classes de Chern*.

Una construcció de les classes de Chern es pot trobar a [7]. La construcció és inductiva: per a $i > n$ es defineix $c_i(\xi) = 0$; la classe $c_n(\xi)$ és igual a la classe d'Euler $e(\xi_{\mathbb{R}})$, on $\xi_{\mathbb{R}}$ denota el fibrat ξ pensat com un fibrat vectorial real de dimensió $2n$. Les altres classes $c_i(\xi)$ amb $i < n$ es defineixen com

$$c_i(\xi) := (\pi_0^*)^{-1} c_i(\xi_0)$$

on ξ_0 és el fibrat vectorial complex de dimensió $n-1$ sobre E_0 que té com a fibra en cada punt $(b, v) \in E_0$ amb $b \in X$ i $v \in p^{-1}(b)$ el subespai quocient $p^{-1}(b)/\langle v\rangle$. L'aplicació $\pi_0^*\colon H^{2i}(X) \to H^{2i}(E_0)$ prové de l'isomorfisme $H^{2i}(X) \cong H^{2i}(E)$ i ella mateixa és un isomorfisme per la successió exacta de Gysin [7, teorema 12.2]:

$$\cdots \longrightarrow H^{2i-2n}(X) \longrightarrow H^{2i}(X) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{2i}(E_0) \longrightarrow H^{2i-2n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

ja que estem suposant que $i < n$ i per tant $H^{2i-2n}(X) = 0$ i $H^{2i-2n+1}(X) = 0$.

Les classes de Chern són l'única família de classes de cohomologia que compleixen les condicions següents:

- $c_0(\xi) = 1 \in H^0(X)$;
- $c_k(\xi) = 0$ si $k > n$ on $n = \dim_{\mathbb{C}}(\xi) = 2\dim_{\mathbb{R}}(\xi)$;
- c_k és natural per a tot k, és a dir $c_k(f^*\xi) = f^*(c_k(\xi))$ per a tota aplicació contínua $f\colon Y \longrightarrow X$, on $f^*\xi$ és el pull-back de ξ per f;

- les classes c_k satisfan la *fórmula de Whitney*: $c_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} c_i(\xi) \smile c_{k-i}(\eta)$ per a tot k, on el *producte cup* $\smile$ es defineix en la secció següent;
- $c_1(\gamma)$ és un generador de $H^2(\mathbb{C}P^\infty)$, on γ és el fibrat tautològic sobre $\mathbb{C}P^\infty$.

La *unitat* $1 \in H^0(X)$ és la classe de l'aplicació $\eta_X \colon S_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida com $\eta_X(p) = 1$ per a tot $p \in X$. Aquesta aplicació η_X compleix

$$(\delta\eta_X)(\sigma) = \eta_X(\partial\sigma) = \eta_X(\sigma(1) - \sigma(0)) = 1 - 1 = 0$$

per a tot 1-símplex singular $\sigma \colon \Delta^1 \longrightarrow X$, i per tant η_X representa una classe de cohomologia. Si $f \colon X \longrightarrow Y$ és qualsevol aplicació contínua, el morfisme $f^* \colon H^0(Y) \longrightarrow H^0(X)$ satisfà $f^*(1) = 1$. Per aquest motiu, la classe c_0 és natural.

Per a tota varietat diferenciable M de dimensió $2n$ amb una estructura complexa en el seu fibrat tangent, les classes de Chern de M són les classes $c_k(M) \in H^{2k}(M)$ associades al fibrat tangent de M,

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow TM \longrightarrow M.$$

4 Signatura d'una varietat

Anem a definir la signatura d'una varietat compacta i orientable M per a després relacionar-la amb l'índex d'un operador diferencial a M i amb el producte de Kronecker de polinomis de Hirzebruch avaluats en classes de Pontrjagin de M i la classe d'orientació de M. Tenen signatura possiblement no nul·la les varietats topològiques M orientables i compactes de dimensió $4k$.

4.1 Producte cup

El *producte cup* $\alpha \smile \beta$ de dues classes de cohomologia $\alpha \in H^p(X)$ i $\beta \in H^q(X)$ d'un espai topològic X es defineix de la manera següent. Escrivim $\alpha = [\varphi_\alpha]$ i $\beta = [\varphi_\beta]$ on $\varphi_\alpha \in S^p(M)$, $\delta\varphi_\alpha = 0$, $\varphi_\beta \in S^q(M)$ i $\delta\varphi_\beta = 0$. Llavors $\alpha \smile \beta := [\varphi]$ on $\varphi \in S^{p+q}(M)$ es defineix com

$$\varphi(\sigma) = \varphi_\alpha(\sigma_p) \cdot \varphi_\beta({}_q\sigma)$$

per a tota $\sigma \colon \Delta^{p+q} \longrightarrow M$, on

$$\sigma_p(t_0, \ldots, t_p) = \sigma(t_0, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0); \quad {}_q\sigma(t_0, \ldots, t_q) = \sigma(0, \ldots, 0, t_0, \ldots, t_q).$$

El producte cup no és commutatiu, sinó anticommutatiu, és a dir,

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq}\, \beta \smile \alpha.$$

Exemple 4.1. En un tor $S^1 \times S^1$, el producte $\alpha \smile \beta$ és la classe dual de la classe d'homologia representada per una triangulació de la cara $a \times b$, on a és l'aresta del primer factor i b és l'aresta del segon factor. El producte $\beta \smile \alpha$ és la classe dual de $b \times a$. En un tor, l'homeomorfisme $h \colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ donat per $h(x, y) = (y, x)$ inverteix l'orientació. Per aquest motiu, $b \times a$ representa la classe oposada de la classe representada per $a \times b$, que és la classe d'orientació estàndard.

La cohomologia $H^*(X) = \oplus_{i=0}^{\infty} H^i(X)$ de qualsevol espai X esdevé un anell graduat amb el producte cup:

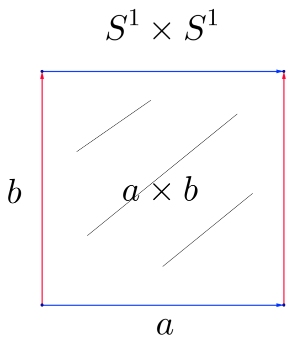
$$H^p(X) \times H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X)$$

on $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \smile \beta$.

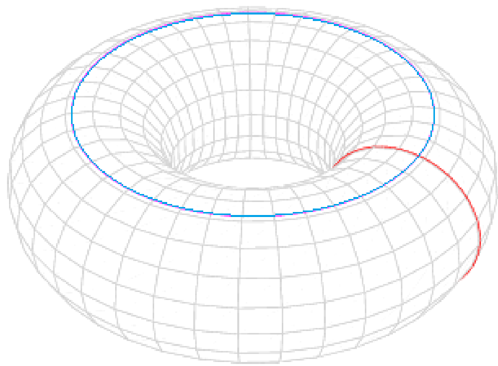
Exemple 4.2. Si $M = S^1 \times \cdots \times S^1$ (amb n factors), llavors $H^*(M)$ és una àlgebra exterior amb generadors $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ de $H^1(M)$, on $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ és la base dual de la base de $H_1(M)$ formada per les classes $a_1, \ldots, a_n$ representades per les arestes de cadascun dels factors; és a dir,

$$\langle \alpha_i, a_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j \text{ i } \langle \alpha_i, a_i \rangle = 1 \text{ per a tot } i.$$

La condició que $\alpha_i \smile \alpha_j = -\alpha_j \smile \alpha_i$ per a i, j arbitraris imposa que $\alpha_i \smile \alpha_i = 0$ per a tot i.



(a) Generadors en un tor


(b) Generadors en un tor

L'isomorfisme de de Rham fa correspondre el producte cup en cohomologia singular amb el producte exterior de formes diferencials:

$$h\colon H^k_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{\cong} H^k(M;\mathbb{R}); \qquad h([\omega \wedge \eta]) = h([\omega]) \smile h([\eta]).$$

El producte cup
$$H^p(M) \times H^{n-p} \xrightarrow{\smile} H^n(M)$$
té un adjunt
$$H^p(M) \times H_n(M) \xrightarrow{\frown} H_{n-p}(M)$$
que s'anomena *producte cap* i satisfà
$$\langle \alpha \smile \beta, a\rangle = \langle \beta, \alpha \frown a\rangle$$
per a tota $a \in H_n(M)$, on $\langle\ ,\ \rangle$ és el producte de Kronecker.

El *teorema de dualitat de Poincaré* estableix que, si M és una varietat orientable i compacta, llavors l'aplicació

$$D\colon H^p(M) \longrightarrow H_{n-p}(M), \qquad D(\alpha) = \alpha \frown \zeta$$

és un isomorfisme per a tot p, on $\zeta \in H_n(M)$ és una classe d'orientació. La demostració es pot trobar a [3] o [6].

4.2 Signatura d'una varietat compacta i orientable

Sigui M una varietat topològica orientable i compacta de dimensió $4k$ i sigui

$$\Phi\colon H^{2k}(M;\mathbb{R}) \times H^{2k}(M;\mathbb{R}) \longrightarrow H^{4k}(M;\mathbb{R})$$

l'aplicació $\Phi(\alpha, \beta) = \alpha \smile \beta$. Aleshores:

(i) Φ és bilineal.

(ii) Φ és simètrica, ja que $\alpha \smile \beta = \beta \smile \alpha$ en dimensió parella.

(iii) Φ és no degenerada. La demostració es basa en la dualitat de Poincaré:

Demostració. Sigui $\alpha \in H^{2k}(M)$ tal que $\Phi(\alpha, \beta) = 0$ per a tota $\beta \in H^{2k}(M)$, és a dir, $\alpha \smile \beta = 0$ per a tota $\beta \in H^{2k}(M)$. Com que $H_{4k}(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, podem escollir una classe d'orientació $\zeta \in H_{4k}(M; \mathbb{R})$ i tenim

$$0 = \langle \alpha \smile \beta, \zeta \rangle = \langle \beta, \alpha \frown \zeta \rangle$$

per a tota $\beta \in H^{2k}(M)$. Aleshores $\alpha \frown \zeta = 0$. Com que, pel teorema de dualitat de Poincaré, l'aplicació $\alpha \longmapsto \alpha \frown \zeta$ és un isomorfisme, concloem que $\alpha = 0$. $\square$

Definim la *signatura* d'una varietat topològica M compacta i orientable de dimensió $4k$ com l'índex de la forma bilineal Φ, és a dir, el nombre de valors propis positius menys el nombre de valors propis negatius de la matriu de Φ en una base qualsevol. La denotarem per $\operatorname{sig}(M)$, i la definirem com a zero si la dimensió de M no és múltiple de 4.

Si diagonalitzem la matriu de Φ en una base adient,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots^{(n} & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots^{(m} & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

aleshores $\operatorname{sig}(M) = \operatorname{ind}(\Phi) = n - m$.

Exemples 4.3. Alguns índexs de formes bilineals:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ té índex 4;} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ té índex 2;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ té índex 0.}$$

Exemple 4.4. Sigui $M = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ on els generadors de cada $H^1(S^1)$ són α, β, γ i ε respectivament. Considerem l'aplicació

$$\Phi \colon H^2(M; \mathbb{R}) \times H^2(M; \mathbb{R}) \longrightarrow H^4(M; \mathbb{R})$$

on $H^2(M;\mathbb{R})$ té dimensió 6 i està generat per $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\varepsilon$, $\beta\gamma$, $\beta\varepsilon$ i $\gamma\varepsilon$, i $H^4(M;\mathbb{R})$ està generat per $\alpha\beta\gamma\varepsilon$. La matriu de Φ en aquestes bases és

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} \alpha\beta & \alpha\gamma & \alpha\varepsilon & \beta\gamma & \beta\varepsilon & \gamma\varepsilon \end{array} \\
\begin{array}{c} \alpha\beta \\ \alpha\gamma \\ \alpha\varepsilon \\ \beta\gamma \\ \beta\varepsilon \\ \gamma\varepsilon \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

ja que $\alpha\beta\alpha\beta = -\alpha\alpha\beta\beta = 0$; $\alpha\beta\alpha\gamma = -\alpha\alpha\beta\gamma = 0$; $\alpha\gamma\beta\varepsilon = -\alpha\beta\gamma\varepsilon$, etc.

Diagonalitzant aquesta matriu obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Llavors $\mathrm{sig}(S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1) = \mathrm{ind}(\Phi) = 0$.

Exemple 4.5. L'anell de cohomologia $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R})$ d'un espai projectiu complex és una àlgebra de polinomis truncada $\mathbb{R}[x]/(x^{n+1})$ on el generador x té grau 2. Per tant, quan n és parell, el producte cup

$$\Phi\colon H^n(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R}) \times H^n(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R}) \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{R})$$

ve donat per $x^{n/2} \smile x^{n/2} = x^n$, que és dual de la classe d'orientació. Per tant, la matriu de Φ és (1) i d'aquí resulta que

$$\mathrm{sig}(\mathbb{C}P^n) = 1$$

si n és parell (i zero si n és senar).

Ara anem a relacionar la signatura d'una varietat topològica compacta i orientable amb les classes característiques a través del teorema de Hirzebruch.

4.3 Teorema de la signatura de Hirzebruch

Teorema 4.6 (Hirzebruch)**.** *Sigui M una varietat diferenciable orientable i compacta de dimensió $4k$. Aleshores existeix una classe de cohomologia $\mathcal{L}(M) \in H^{4k}(M;\mathbb{Q})$ tal que*

$$\langle \mathcal{L}(M), [M] \rangle = \mathrm{sig}(M)$$

on $[M] \in H_{4k}(M;\mathbb{Q})$ és una classe d'orientació de M.

La classe de cohomologia $\mathcal{L}(M)$ es construeix mitjançant les classes de Pontrjagin $p_i(M) \in H^{4i}(M)$, de la manera següent.

Definició 4.7. Sigui M una varietat de dimensió n. Per a $i \in \{0, \ldots, n\}$, la *classe de Pontrjagin i-èsima* de M es defineix com

$$p_i(M) = (-1)^i \, c_{2i}(TM \otimes \mathbb{C}),$$

on c_{2i} és la classe de Chern en dimensió $4i$ i denotem per $TM \otimes \mathbb{C}$ el complexificat del fibrat tangent de M.

Els *polinomis de Hirzebruch* són definits a [7]. Els quatre primers són:

- $\mathcal{L}_1(p_1) = \frac{1}{3}p_1$;
- $\mathcal{L}_2(p_1, p_2) = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$;
- $\mathcal{L}_3(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3)$;
- $\mathcal{L}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{14175}(381p_4 - 71p_3p_1 - 19p_2^2 + 22p_2p_1^2 - 3p_1^4)$.

En general, $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}_k(p_1, \ldots, p_k)$ on $p_1, \ldots, p_k$ són classes de Pontrjagin de M i el grau és el mateix en tots els sumands. Per tant, $\mathcal{L}(M) \in H^{4k}(M; \mathbb{Q})$. La demostració del teorema 4.6 es pot trobar a [7]. Vegem-ne un exemple:

Exemple 4.8. Sigui $M = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$. Llavors $\operatorname{sig}(M) = \langle \mathcal{L}(M), [M] \rangle$ on $\mathcal{L}(M) \in H^4(M; \mathbb{Q})$. En aquest cas, com que $\dim M = 4$, tenim

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}_1(p_1) = \tfrac{1}{3}p_1 = -\tfrac{1}{3}c_2(TM \otimes \mathbb{C}).$$

Tenim que

$$TM = \pi_1^*(TS^1) \oplus \pi_2^*(TS^1) \oplus \pi_3^*(TS^1) \oplus \pi_4^*(TS^1),$$

on $\pi_i : \mathrm{S}^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1$ és la projecció i-èsima i π_i^* és el pull-back per π_i.

La fórmula de Whitney dóna, per a c_2,

$$c_2(\xi \oplus \eta) = c_0(\xi)c_2(\eta) + c_1(\xi)c_1(\eta) + c_2(\xi)c_0(\eta) = c_2(\eta) + c_1(\xi)c_1(\eta) + c_2(\xi).$$

Si escrivim $T_i = \pi_i^*(TS^1 \otimes \mathbb{C})$, tenim que $c_2(T_i) = 0$ perquè $\dim_{\mathbb{C}} T_i = 1$ i també $c_1(T_i) = 0$, ja que

$$c_1(TS^1 \otimes \mathbb{C}) = e((TS^1 \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) = e(TS^1 \oplus TS^1) = e(TS^1) \smile e(TS^1) = 0.$$

Per tant,

$$c_2(TM \otimes \mathbb{C}) = c_2(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = c_2(T_3 \oplus T_4) + c_1(T_1 \oplus T_2)c_1(T_3 \oplus T_4) + c_2(T_1 \oplus T_2) =$$

$$= c_1(T_3)c_1(T_4) + [c_1(T_1) + c_1(T_2)][c_1(T_3) + c_1(T_4)] + c_1(T_1)c_1(T_2) = 0.$$

En conclusió, $p_1(M) = 0$ i, com ja havíem obtingut directament, $\operatorname{sig}(M) = 0$.

Anem a veure la relació que hi ha entre la signatura d'una varietat topològica compacta i orientable i l'índex d'un operador diferencial D a M, on necessitarem la teoria de Hodge. Relacionarem l'anàlisi en varietats on apareix la cohomologia de de Rham amb la signatura d'una varietat.

5 La signatura com a índex d'un operador diferencial

5.1 El laplacià

En aquesta secció es respon la pregunta següent: si M és una varietat diferenciable compacta i orientable, hi ha algun operador diferencial a M tal que la signatura de M sigui igual a l'índex d'aquest operador?

Per a una varietat diferenciable M, denotem per $\mathcal{F}(M)$ l'espai vectorial de les funcions $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Considerem, en particular, $\mathbb{R}^n$ amb l'estructura diferenciable canònica.

El *laplacià* a $\mathbb{R}^n$ és l'aplicació $\mathbb{R}$-lineal $\Delta\colon \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ definida com

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Si M és una varietat diferenciable de dimensió n, podem considerar el laplacià en cada carta local. Tanmateix, ens interessa definir un operador laplacià global $\Delta\colon \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$.

Considerem el complex de de Rham, on $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M).$$

Si escollim una mètrica de Riemann g a M, podem considerar l'operador d^* adjunt de la diferencial exterior d. Serà una aplicació $\mathbb{R}$-lineal $d^*\colon \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$ amb la propietat que $\langle d\omega, \sigma\rangle = \langle \omega, d^*\sigma\rangle$ sempre que $\omega \in \Omega^k(M)$ i $\sigma \in \Omega^{k+1}(M)$, on $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producte escalar de formes diferencials induït per la mètrica g.

El producte escalar de dues 1-formes s'expressa en coordenades locals mitjançant la matriu inversa de la matriu de g. Denotarem per (g_{ij}) la matriu de g en una carta local $U \subseteq M$ i per (g^{ij}) la matriu inversa. El producte escalar de

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n \qquad \text{i} \qquad \sigma = \sigma_1\, dx^1 + \cdots + \sigma_n\, dx^n$$

és

$$\langle df, \sigma\rangle = g^{ij}\, \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \sigma_j. \tag{5.1}$$

Com que $\langle df, \sigma\rangle = \langle f, d^*\sigma\rangle = f\, d^*\sigma$, s'obté una expressió de d^* en coordenades locals per a $k = 0$.

En l'expressió (5.1) hem utilitzat la notació d'Einstein, on si hi ha índexs repetits se sumen les components encara que no hi hagi explícitament un sumatori; és a dir:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i =: \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i.$$

A partir d'ara farem servir aquesta notació.

Per a formes diferencials de grau superior, si $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ i $\mu = \mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_k$ on ω_i i μ_j són 1-formes, es defineix $\langle \omega, \mu \rangle = \det(\langle \omega_i, \mu_j \rangle)$. El producte escalar de dues formes diferencials de graus diferents és zero per definició.

Ara ja estem en disposició de definir el laplacià en funció de d i d^*. Observem que la igualtat $d \circ d = 0$ implica que $d^* \circ d^* = 0$.

Definició 5.1. El *laplacià de Hodge* en una varietat diferenciable M amb una mètrica de Riemann és l'aplicació $\mathbb{R}$-lineal $\Delta \colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$ definida com

$$\Delta = (d + d^*)^2 = dd^* + d^*d.$$

A continuació veurem que el laplacià de Hodge d'una funció $f \in \mathcal{F}(M)$ també es pot expressar com

$$\Delta f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f),$$

on el *gradient* d'una funció en una varietat diferenciable M amb una mètrica de Riemann es defineix com $\langle \operatorname{grad} f, X \rangle = X(f)$ per a tot camp vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ i tota funció $f \in \mathcal{F}(M)$, i la *divergència* d'un camp vectorial es defineix com $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(\nabla X)$ on $\nabla X \colon \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ ve donada per $Y \mapsto \nabla_Y X$, on ∇ és la connexió de Levi-Civita.

Comencem escrivint l'expressió de $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ en coordenades locals, seguint [9]. Tenim que

$$\operatorname{grad} f = g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k}; \qquad \operatorname{div} X = \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, dx^i \Big\rangle.$$

Si denotem $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, aleshores:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Per tant,

$$\operatorname{div} X = \Big\langle \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j\, \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k},\ dx^i \Big\rangle = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma^i_{ij}.$$

En particular,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big(g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big) + g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k} \Gamma^i_{ij}.$$

Podem expressar els símbols de Christoffel en coordenades locals:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ik} \Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Big).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ij} &= \frac{1}{2} g^{ii} \Big(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} \Big) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\Big((g^{mn}) \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{mn}) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\Big((g_{mn})^{-1} \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{mn}) \Big) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\det g}\ \frac{\partial \det g}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

on hem utilitzat que, per a tota matriu M,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \det M = \det M \cdot \operatorname{tr}\Big(M^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} M \Big).$$

Finalment, tenim:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma^i_{ij} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sqrt{\det g}\, \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \frac{1}{2\sqrt{\det g}}\, \frac{\partial \det g}{\partial x^j}\, X^j \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{\det g}\, X^j\Big).
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$
\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{\det g}\, g^{ij}\, \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big).
$$

Definició 5.2. L'*estrella de Hodge* en una varietat de Riemann M de dimensió n és l'únic isomorfisme $*\colon \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$ tal que per a tot parell $\omega, \eta \in \Omega^p(M)$ es compleix

$$
\omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta \rangle \operatorname{vol}
$$

on vol és la forma de volum a M.

La forma de volum s'expressa en coordenades com $\operatorname{vol} = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

L'estrella de Hodge és $\mathcal{F}(M)$-lineal i es pot calcular explícitament amb l'expressió següent:

$$
*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \frac{\sqrt{\det g}}{(n-k)!}\, g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k}\, \varepsilon_{j_1 \dots j_n}\, dx^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n}, \tag{5.2}
$$

on $\varepsilon_{j_1 \dots j_n}$ és el *símbol de Levi-Civita*, que es defineix de la manera següent:

$$
\varepsilon_{j_1 \dots j_n} = \begin{cases} 1 \text{ si } (j_1, \dots, j_n) \text{ és una permutació parella de } (1, \dots, n) \\ -1 \text{ si } (j_1, \dots, j_n) \text{ és una permutació senar de } (1, \dots, n) \\ 0 \text{ si hi ha algun índex repetit.} \end{cases}
$$

El símbol de Levi-Civita es pot pensar com un tensor covariant a M:

$$
E_{j_1 \dots j_n} = \sqrt{\det g}\, \varepsilon_{j_1 \dots j_n}.
$$

Per passar la seva forma contravariant [4], escrivim

$$
E^{i_1 \dots i_n} = E_{j_1 \dots j_n}\, g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_n j_n}
$$

i aleshores

$$
\varepsilon^{i_1 \dots i_n} = \sqrt{\det g}\, E^{i_1 \dots i_n} = \varepsilon_{j_1 \dots j_n}\, (\det g)\, g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_n j_n}.
$$

Llavors l'expressió (5.2) es dedueix del fet que

$$
\langle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k,\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \rangle = \frac{1}{(n-k)!}\, g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k}\, \varepsilon_{j_1 \dots j_n}\, \varepsilon^{1 \dots k j_{k+1} \dots j_n}.
$$

Per exemple, l'estrella de Hodge a $\mathbb{R}^n$ ve donada per

$$
*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \varepsilon\, dx^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n},
$$

on ε és el signe de la permutació $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$.

Exemple 5.3. En dimensió 4 tenim a $\mathbb{R}^4$ que

$$* \, dx = dy \wedge dz \wedge dt; \qquad *(dy \wedge dz \wedge dt) = -dx.$$

En general, si $\omega \in \Omega^p(M)$, llavors

$$* * \omega = (-1)^{p(n-p)} \omega.$$

Per tant, l'operador invers $*^{-1} \colon \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$ ve donat per

$$*^{-1}\omega = (-1)^{p(n-p)} * \omega.$$

Amb l'estrella de Hodge podem expressar l'adjunt d^* com

$$d^*\omega = (-1)^p *^{-1} (d(*\omega)) = (-1)^{p+(n-p+1)(p-1)} * (d(*\omega)).$$

Com que es pot expressar d^* a partir de d i $*$, també podem escriure Δ a partir de $*$. Per a tota funció f, tenim que $\Delta f = d^* df$, ja que $d^* f = 0$. Aleshores $\Delta f = - * d(* \, df)$. Cal esmentar que en geometria diferencial el laplacià de Hodge d'una funció té el signe canviat respecte al laplacià en anàlisi.

Ara, en primer lloc, sabem que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

i aplicant la definició de l'estrella de Hodge obtenim

$$* \, dx^{i_1} = \frac{\sqrt{\det g}}{(n-1)!} \, g^{i_1 j_1} \, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \, dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n}.$$

Per tant,

$$* \, df = \frac{\partial f}{\partial x^{i_1}} \frac{\sqrt{\det g}}{(n-1)!} \, g^{i_1 j_1} \, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \, dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n}.$$

El següent pas és tornar a aplicar la diferencial exterior, és a dir,

$$d(*df) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^{i_1}} \frac{\sqrt{\det g}}{(n-1)!} \, g^{i_1 j_1} \Big) \, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \, dx^j \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n}.$$

Ara necessitem la definició de l'estrella de Hodge altra vegada:

$$*(dx^j \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n}) = \sqrt{\det g} \; g^{j i'_1} g^{j_2 i'_2} \cdots g^{j_n i'_n} \, \varepsilon_{i'_1 \dots i'_n}.$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
*(d(*df)) &= \frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^{i}{}_1} \frac{\sqrt{\det g}}{(n-1)!} \, g^{i_1 j_1} \Big) \, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \, \sqrt{\det g} \; g^{j i'_1} g^{j_2 i'_2} \cdots g^{j_n i'_n} \, \varepsilon_{i'_1 \dots i'_n} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^{i_1}} \frac{\sqrt{\det g}}{(n-1)!} \, g^{i_1 j_1} \Big) \frac{1}{\sqrt{\det g}} \, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \, \varepsilon^{j j_2 \dots j_n} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^{i_1}} \frac{\sqrt{\det g}}{(n-1)!} \, g^{i_1 j_1} \Big) \frac{1}{\sqrt{\det g}} (n-1)! \; \delta^j_{j_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^{i_1}} \sqrt{\det g} \; g^{i_1 j_1} \Big) \frac{1}{\sqrt{\det g}},
\end{aligned}$$

on hem retrobat el laplacià en coordenades en una carta local.

A partir d'ara només considerarem varietats de dimensió parella. En el cas que la dimensió de M sigui parella, es compleix que $**\omega = (-1)^p\omega$ si $\omega \in \Omega^p(M)$.

A continuació definirem l'operador τ per a una varietat M de dimensió parella, una variant amb signe de l'estrella de Hodge que és una involució de $\Omega^*(M)$. Ens caldrà treballar amb coeficients a $\mathbb{C}$ per tal que $\tau \circ \tau$ sigui la identitat. En les expressions següents, i denota la unitat imaginària complexa.

Definició 5.4. L'operador $\tau\colon \Omega^p(M;\mathbb{C}) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M;\mathbb{C})$ en una varietat de Riemann M de dimensió n parella es defineix com

$$\tau\omega = i^{(p-1)p+n/2}(*\,\omega).$$

Si denotem $\lambda(p) = (p-1)p + n/2$, llavors per a $\omega \in \Omega^p(M)$ tenim

$$\tau\tau\omega = i^{\lambda(p)}\tau(*\omega) = i^{\lambda(p)+\lambda(n-p)} **\omega = i^{2p} **\omega = i^{2p}(-1)^p\omega = \omega.$$

Tenim que $\tau\colon \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$ satisfà $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$ i per tant només pot tenir els valors propis 1 i -1. Separem $\Omega^*(M)$ en dues parts segons els valors propis de τ:

$$\begin{aligned}\Omega^+(M) &:= \{\omega \in \Omega^*(M) \mid \tau\omega = \omega\},\\ \Omega^-(M) &:= \{\omega \in \Omega^*(M) \mid \tau\omega = -\omega\}.\end{aligned}$$

Ara anem a restringir l'operador $D = d + d^*$ a Ω^+ i veurem que si $\omega \in \Omega^+(M)$ aleshores $D\omega \in \Omega^-(M)$, i recíprocament.

Proposició 5.5. *Sigui M una varietat de Riemann compacta i orientable de dimensió $n = 4k$. Si τ és l'aplicació definida anteriorment i $D = d + d^*$, aleshores se satisfà $D \circ \tau = -\tau \circ D$.*

Demostració. Com que $*(d^*\omega) = (-1)^p d(*\omega)$ tenim per una banda

$$\tau(D\omega) = i^{p^2+p+n/2} * (d\omega) + i^{(p-1)(p-2)+n/2}(-1)^p d(*\omega)$$
$$= i^{p^2+p+n/2} * (d\omega) + i^{p^2-3p+2+n/2+2p} d(*\omega) = i^{p^2+p+n/2} * (d\omega) - i^{p^2-p+n/2} d(*\omega)$$

i per altra banda

$$D(\tau\omega) = i^{p(p-1)+n/2} d(*\omega) + i^{(p-1)p+n/2} d^*(*\omega) =$$
$$= i^{p^2-p+n/2} d(*\omega) + i^{p^2-p+n/2}(-1)^{p+1} * (d\omega) = i^{p^2-p+n/2} d(*\omega) - i^{p^2+p+n/2} * (d\omega).$$

Per tant, $\tau(D\omega) = -D(\tau\omega)$, tal com volíem comprovar. □

Aleshores tenim que

$$D\colon \Omega^+(M) \longrightarrow \Omega^-(M) \qquad \text{i} \qquad D\colon \Omega^-(M) \longrightarrow \Omega^+(M),$$

ja que si $\omega \in \Omega^+(M)$ aleshores $D\omega \in \Omega^-(M)$:

$$\tau(D\omega) = (\tau \circ D)(\omega) = (-D \circ \tau)(\omega) = -D(\tau\omega) = -D\omega$$

i recíprocament.

Denotarem per D^+ la restricció $D\colon \Omega^+(M) \longrightarrow \Omega^-(M)$ i per D^- la restricció $D\colon \Omega^-(M) \longrightarrow \Omega^+(M)$.

5.2 Índex de D^+

En aquesta secció calcularem l'índex de l'operador D^+:

$$\operatorname{ind}(D^+) = \dim\ker D^+ - \dim\operatorname{coker} D^+.$$

Necessitarem el següent resultat general:

Lema 5.6. *Si $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ i $T^*\colon E_2 \longrightarrow E_1$ són operadors adjunts en espais vectorials amb productes escalars, llavors*

$$\dim\ker T^* = \dim\operatorname{coker} T.$$

Demostració. Per hipòtesi tenim que $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle$. Observem que $v \in \ker T^*$ si i només si $\langle u, T^*v\rangle = 0$ per a tot u, i això equival a afirmar que $\langle Tu, v\rangle = 0$ per a tot u; és a dir $v \in (Tu)^\perp$ per a tot $u \in E_1$. Per tant, $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$.

Si $\dim E_2$ és finita, llavors

$$\dim\ker T^* = \dim(\operatorname{im} T)^\perp = \dim E_2 - \dim\operatorname{im} T = \dim\operatorname{coker} T.$$

Si $\dim E_2$ és infinita, però sabem que $\dim\ker T^*$ és finita, llavors podem utilitzar el fet que $E_2 = \operatorname{im} T \oplus (\operatorname{im} T)^\perp$ per deduir que $\operatorname{coker} T \cong (\operatorname{im} T)^\perp$ i arribar a la mateixa conclusió. □

A continuació observem que l'adjunt de D^+ és D^-:

Proposició 5.7. *Si denotem per D^+ i D^- les restriccions de D a $\Omega^+(M)$ i $\Omega^-(M)$ respectivament, on M és una varietat de Riemann compacta i orientable de dimensió $4k$, aleshores D^- és adjunt de D^+.*

Demostració. Com que l'operador $D = d + d^*$ és autoadjunt, es compleix que $\langle D^+\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, D^-\beta\rangle$ si $\alpha \in \Omega^+(M)$ i $\beta \in \Omega^-(M)$. □

Per demostrar que $\dim\ker D^+$ té dimensió finita, necessitem el teorema de Hodge:

Teorema 5.8 (Hodge)**.** *Sigui Δ_p el laplacià de Hodge aplicat a p-formes. Aleshores*

$$\dim\ker\Delta_p = \dim H^p_{\mathrm{dR}}(M).$$

La demostració d'aquest fet es troba, per exemple, a [11].

Les p-formes ω tals que $\Delta_p\,\omega = 0$ s'anomenen *harmòniques.* El teorema de Hodge estableix que cada classe de cohomologia de de Rham conté un únic representant que és una forma harmònica.

La condició que $\Delta\omega = 0$ equival a la condició que $d\omega = d^*\omega = 0$, ja que

$$\langle \omega, \Delta\omega\rangle = \langle D\omega, D\omega\rangle = \langle d\omega, d\omega\rangle + \langle d^*\omega, d^*\omega\rangle,$$

tenint en compte que $\Delta = D^2$ on $D = d + d^*$ amb $d^2 = 0$ i $(d^*)^2 = 0$.

Del teorema de Hodge es dedueix que, si M és una varietat de Riemann compacta, llavors $\ker D^+$ té dimensió finita, ja que la cohomologia de de Rham de M té dimensió finita. Una demostració del fet que la cohomologia de de Rham de qualsevol varietat diferenciable *compacta* té dimensió finita es pot trobar a [2]; un argument alternatiu es basa en el teorema de de Rham i en el fet que la cohomologia singular de qualsevol varietat diferenciable compacta té dimensió finita.

No obstant, la dimensió de $\Omega^+(M)$ és infinita i, com que la dimensió del nucli de D^+ és finita, la dimensió de la imatge de D^+ és infinita.

Proposició 5.9. *La cohomologia $H^*_{\mathrm{dR}}(M)$ es descompon com $H^+ \oplus H^-$ on*

$$H^+ := \{[\omega] \mid \omega \in \Omega^+\} \qquad i \qquad H^- = \{[\omega] \mid \omega \in \Omega^-\}.$$

Demostració. Donada una classe $\alpha \in H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ qualsevol, pel teorema de Hodge existeix una p-forma $\omega \in \Omega^p(M)$ amb $\Delta\omega = 0$ tal que $[\omega] = \alpha$. Ara, com que $\Omega^*(M) = \Omega^+(M) \oplus \Omega^-(M)$, podem escriure $\omega = \omega_+ + \omega_-$ de manera única on $\omega_+ \in \Omega^+(M)$ i $\omega_- \in \Omega^-(M)$. Observem que Δ aplica Ω^+ a Ω^+ i Ω^- a Ω^-. Per tant, $0 = \Delta\omega = \Delta\omega_+ + \Delta\omega_-$ implica que $\Delta\omega_+ = 0$ i que $\Delta\omega_- = 0$. Aleshores ω_+ i ω_- representen classes de cohomologia a H^+ i H^- respectivament. $\square$

Donada $\alpha \in H^+$, podem posar $\alpha = [\omega]$ amb $\Delta\omega = 0$ i $\tau\omega = \omega$. Llavors $D^+\omega = 0$ i, per tant, tota classe $\alpha \in H^+$ té un representant $\omega \in \ker D^+$. És a dir, $\dim\ker D^+ = \dim H^+$. Anàlogament, tota classe $\beta \in H^-$ té un representant a $\ker D^-$ i en deduïm que

$$\mathrm{ind}(D^+) = \dim H^+ - \dim H^-.$$

Denotarem $h_+ := \dim H^+$ i $h_- := \dim H^-$.

Anem a demostrar que $h_+ - h_-$ és igual a la signatura de M. Aquest raonament es troba, en forma molt resumida, a l'article d'Atiyah–Singer [1] i amb un xic més de detall a [8].

Considerem els espais $I^p := H^p(M;\mathbb{C}) \oplus H^{n-p}(M;\mathbb{C})$ on $0 \le p < n/2$ i $n = 4k$ és la dimensió de la varietat M. Pel teorema de dualitat de Poincaré, $H^p(M;\mathbb{C})$ i $H^{n-p}(M;\mathbb{C})$ tenen la mateixa dimensió. L'espai I^p és invariant per τ i per tant I^p també es descompon en subespais propis I^p_+ i I^p_-.

Proposició 5.10. *Si $p \neq n/2$, els subespais I^p_+ i I^p_- tenen la mateixa dimensió.*

Demostració. Escollim una base $e_1, \dots, e_d$ de $H^p(M;\mathbb{C})$ i prenem $\tau e_1, \dots, \tau e_d$ com a base de $H^{n-p}(M;\mathbb{C})$. La matriu de τ en la base $e_1, \dots, e_d, \tau e_1 \dots, \tau e_d$ de I^p és:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_d \\ \mathrm{Id}_d & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic d'aquesta matriu és $(x-1)^d(x+1)^d$, on veiem que hi ha tants valors propis positius com negatius i, per tant, $\dim I^p_+ = \dim I^p_-$. $\square$

En el cas que $p = n/2$, l'espai $H^{n/2}(M;\mathbb{C})$ també es descompon en dos subespais propis de τ:

$$H^{n/2}(M;\mathbb{C}) = H_+^{n/2}(M;\mathbb{C}) \oplus H_-^{n/2}(M;\mathbb{C}).$$

Denotem $h_+^{n/2} = \dim H_+^{n/2}(M;\mathbb{C})$ i $h_-^{n/2} = \dim H_-^{n/2}(M;\mathbb{C})$. Només ens queda comprovar que $h_+^{n/2} - h_-^{n/2}$ és igual a la signatura de la varietat M.

La signatura de M és la signatura del producte cup pensat com una forma bilineal simètrica

$$\Phi\colon H^{n/2}(M;\mathbb{R}) \times H^{n/2}(M;\mathbb{R}) \longrightarrow H^n(M;\mathbb{R}).$$

Aquesta forma bilineal pren valors a $\mathbb{R}$ gràcies a l'isomorfisme $H^n(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ donat pel producte de Kronecker $\alpha \longmapsto \langle \alpha, [M] \rangle$ per a tota classe $\alpha \in H^n(M;\mathbb{R})$. L'isomorfisme de de Rham fa correspondre el producte cup amb el producte exterior de formes diferencials i el producte de Kronecker $\langle \alpha, [M] \rangle$ amb la integració $\int_M \nu$ on $\alpha = [\nu]$. Per tant, en termes de cohomologia de de Rham tenim que

$$\Phi([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Ara convé esmentar que l'estrella de Hodge dóna lloc a un producte escalar a $H^*(M;\mathbb{R})$ com

$$([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge (*\eta)$$

i també cal tenir en compte que τ és igual a l'estrella de Hodge, ja que $n = 4k$. Per tant, deduïm el següent.

Proposició 5.11. *Els subespais $H_+^{n/2}(M;\mathbb{R})$ i $H_-^{n/2}(M;\mathbb{R})$ són ortogonals per Φ.*

Demostració. Si $\omega \in \Omega_+^{n/2}(M;\mathbb{R})$ i $\eta \in \Omega_-^{n/2}(M;\mathbb{R})$, llavors

$$\begin{aligned}
\Phi([\omega], [\eta]) &= \int_M \omega \wedge \eta = -\int_M \omega \wedge (*\eta) = -\int_M \eta \wedge (*\omega) \\
&= -\int_M \eta \wedge \omega = -\int_M \omega \wedge \eta = -\Phi([\omega], [\eta]).
\end{aligned}$$

Per tant, $\Phi([\omega], [\eta]) = 0$. □

Observem també que, si $\omega \in \Omega_+^{n/2}(M)$ i $\eta \in \Omega_-^{n/2}(M)$, llavors

$$\begin{aligned}
\int_M \omega \wedge \omega &= \int_M \omega \wedge (*\omega) = ([\omega], [\omega]) > 0, \\
\int_M \eta \wedge \eta &= \int_M -\eta \wedge (*\eta) = -([\eta], [\eta]) < 0.
\end{aligned}$$

En definitiva, tenim $H^{n/2}(M;\mathbb{R}) = H_+^{n/2}(M;\mathbb{R}) \oplus H_-^{n/2}(M;\mathbb{R})$ on $H_+^{n/2}(M;\mathbb{R})$ i $H_-^{n/2}(M;\mathbb{R})$ són ortogonals per Φ i, a més, la restricció de Φ a $H_+^{n/2}(M;\mathbb{R})$ és definida positiva i la restricció de Φ a $H_-^{n/2}(M)$ és definida negativa. Això implica que

$$\operatorname{sig}(M) = h_+^{n/2} - h_-^{n/2}$$

tal com volíem demostrar.

Ara observem que:

$$\begin{aligned} H^*(M;\mathbb{C}) &= H^0(M;\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus H^n(M;\mathbb{C}) = I^0 \oplus \cdots \oplus I^{n/2-1} \oplus H^{n/2}(M;\mathbb{C}) \\ &= I_+^0 \oplus I_-^0 \oplus \cdots \oplus I_+^{n/2-1} \oplus I_-^{n/2-1} \oplus H_+^{n/2}(M;\mathbb{C}) \oplus H_-^{n/2}(M;\mathbb{C}). \end{aligned}$$

D'aquí s'obté que

$$h_+ = \dim H^+ = h_+^{n/2} + \sum_{p=0}^{n/2-1} \dim I_+^p$$

i també

$$h_- = \dim H^- = h_-^{n/2} + \sum_{p=0}^{n/2-1} \dim I_-^p.$$

Com que $\dim I_+^p = \dim I_-^p$ per a tot p, arribem a la conclusió que

$$\operatorname{ind}(D^+) = h_+ - h_- = h_+^{n/2} - h_-^{n/2} = \operatorname{sig}(M).$$

Anem a discutir l'exemple concret del tor de dimensió 4, on escollirem la mètrica de Riemann induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^4$.

Exemple 5.12. Sigui $M = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ amb la mètrica plana. Tenim que $H_{\mathrm{dR}}^*(M)$ és una àlgebra exterior $\Lambda(e_1, e_2, e_3, e_4)$ on $e_i = [d\theta_i]$ amb θ_i la funció angle de la circumferència i-èsima. En altres paraules,

$$\begin{aligned} &H_{\mathrm{dR}}^0(M) = \langle 1 \rangle, \\ &H_{\mathrm{dR}}^1(M) = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle, \\ &H_{\mathrm{dR}}^2(M) = \langle e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_2e_3, e_2e_4, e_3e_4 \rangle, \\ &H_{\mathrm{dR}}^3(M) = \langle e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, e_1e_3e_4, e_2e_3e_4 \rangle, \\ &H_{\mathrm{dR}}^4(M) = \langle e_1e_2e_3e_4 \rangle. \end{aligned}$$

En aquest cas la funció $\tau\colon \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$, és

$$\tau\omega = i^{p(p-1)+2}(*\,\omega) = -i^{p(p-1)}(*\,\omega).$$

Si la factoritzem a la cohomologia, $\tau\colon H_{\mathrm{dR}}^p(M) \longrightarrow H_{\mathrm{dR}}^{n-p}(M)$, obtenim:

- $p = 1$: $\tau e_1 = -e_2e_3e_4$; $\tau e_2 = e_1e_3e_4$; $\tau e_3 = -e_1e_2e_4$; $\tau e_4 = e_1e_2e_3$.
- $p = 2$: $\tau e_1e_2 = e_3e_4$; $\tau e_1e_3 = -e_2e_4$; $\tau e_1e_4 = e_2e_3$; $\tau e_2e_3 = e_1e_4$; $\tau e_2e_4 = -e_1e_3$; $\tau e_3e_4 = e_1e_2$. Observem que, per exemple, $\tau(e_1e_2 + e_3e_4) = e_1e_2 + e_3e_4$ i que $\tau(e_1e_3 + e_2e_4) = -e_1e_3 - e_2e_4$. Aquests són, per tant, vectors propis de τ, entre d'altres.

- $p = 3$: $\tau e_1e_2e_3 = e_4$; $\tau e_1e_2e_4 = -e_3$; $\tau e_1e_3e_4 = e_2$; $\tau e_2e_3e_4 = -e_1$.
- $p = 4$: $\tau e_1e_2e_3e_4 = -1$.
- $p = 0$: $\tau 1 = -e_1e_2e_3e_4$.

Si considerem $I^p = H^p \oplus H^{4-p}$ on $0 \leq p \leq 1$ com en la demostració anterior, tenim que

$$
\begin{aligned}
I^0 &= H^0 \oplus H^4 = \langle 1 \rangle \oplus \langle e_1e_2e_3e_4 \rangle \\
I^1 &= H^1 \oplus H^3 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle \oplus \langle e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, e_1e_3e_4, e_2e_3e_4 \rangle \\
H^2 &= \langle e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_2e_3, e_2e_4, e_3e_4 \rangle.
\end{aligned}
$$

Escrivim la matriu de τ en cadascun d'aquests espais:

(a) Cas $p = 0$. La matriu de la restricció de τ a I^0 és

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que té la forma diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on veiem que $\dim I^0_+ = \dim I^0_- = 1$.

(b) Cas $p = 1$. La matriu de la restricció de τ a I^1 és

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

i si la diagonalitzem ens queda

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}.$$

Per tant, $\dim I^1_+ = \dim I^1_- = 4$.

(c) La matriu de la restricció de τ a H^2 és

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i si la diagonalitzem resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\operatorname{sig}(M) = h^2_+ - h^2_- = 3 - 3 = 0$.

Amb el resultat principal d'aquesta secció, juntament amb el teorema de Hirzebruch, arribem a la conclusió que

$$\operatorname{ind}(D^+) = \langle \mathcal{L}(M), [M] \rangle$$

per a tota varietat de Riemann M compacta i orientable de dimensió $4k$. Aquest és un teorema d'índex topològic que és un cas especial del teorema d'Atiyah–Singer [1] en la seva forma més general.

6 Conclusions

Finalment hem arribat a la conclusió que l'índex d'un cert operador diferencial en una varietat de Riemann és el producte de Kronecker d'una classe característica amb la classe d'orientació. Ho hem fet mitjançant la signatura d'una varietat i ha quedat de manifest la relació entre un invariant topològic i un invariant analític. Una conseqüència prou rellevant és el fet que l'índex d'aquest operador diferencial, que es deriva del laplacià de Hodge, no depèn de l'elecció que haguem fet d'una mètrica de Riemann a la varietat.

Cal esmentar el fet que en l'article original [1] es dedueix el teorema de la signatura de Hirzebruch precisament a partir d'haver identificat la signatura com l'índex d'un operador diferencial.

El teorema que hem demostrat és un cas molt particular del teorema d'Atiyah–Singer, que s'aplica a operadors més generals que el laplacià i que actuen en fibrats vectorials de naturalesa molt variada. Una continuació natural d'aquest treball seria entendre les estructures spin en varietats i en quins espais actua l'operador de Dirac que apareix en la versió més coneguda del teorema d'Atiyah–Singer.

Una de les seves aplicacions en física [12] és la resolució per 't Hooft del problema $U(1)$. Hi ha també importants aplicacions a la S-dualitat de $N = 4$ SYM el qual involucra el teorema d'índex per a l'operador de Dirac sobre espais mòdul monopolars.

Relacionant aquest treball amb el treball final de grau de física que vaig fer, puc dir que a partir dels índexs topològics es pot deduir que existeix un mode d'energia zero en les solucions de l'equació de Dirac quan en el lagrangià hi ha acoplats els fermions amb solitons, els quals fan de massa efectiva de l'equació. Com que vaig fer aquest treball final de grau de física abans que el de matemàtiques, vaig voler entendre què són els teoremes d'índexs topològics i així poder relacionar-los amb la física. M'he quedat satisfet del resultat i amb ganes de saber més.

Referències

[1] M. F. Atiyah; I. M. Singer: *The index of elliptic operators III*, Ann. of Math. 87 (1968), 546–604.

[2] Raoul Bott; Loring W. Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Math. 82, Springer, New York, 1982.

[3] Glen E. Bredon: *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Math. 139, Springer, New York, 1993.

[4] Sean M. Carroll: *Spacetime and Geometry*, Addison-Wesley, Boston, 2004.

[5] Carles Casacuberta: *Geometry and Topology of Manifolds*, curs de màster, Universitat de Barcelona, 2018.

[6] Marvin J. Greenberg; John R. Harper: *Algebraic Topology. A First Course*, Math. Lecture Note Series 58, Benjamin/Cummings, Reading, 1981.

[7] John W. Milnor; James D. Stasheff: *Characteristic Classes*, Annals of Math. Studies 76, Princeton, 1974.

[8] Charles Nash: *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press, Boston, 1991.

[9] Ngô Quc Anh: *R-G: Laplace–Beltrami operator*, https://anhngq.wordpress.com/2009/12/05/r-g-laplace-beltrami-operator/

[10] Zuoqin Wang: *Lecture 25: The Hodge Laplacian*, http://staff.ustc.edu.cn/∼wangzuoq/Courses/16S-RiemGeom/

[11] Frank W. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Math. 94, Springer, 1983.

[12] https://physics.stackexchange.com/questions/1858/where-is-the-atiyah-singer-index-theorem-used-in-physics