Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES - ADE

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

ERROR DE COBERTURA EN TIEMPO DISCRETO PARA OPCIONES FINANCIERAS

Henglong Wu

Director: Dr. Josep Vives
Dr. Oriol Roch Casellas
Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, 18 de enero de 2018

Abstract

The authors Fischer Black, Myron Scholes and Robert Merton, developed a theory for the evaluation of European options, which is currently known as the Black-Scholes-Merton model. It should be noted that in 1997 the importance of the model was recognized by receiving the Nobel Prize in Economics.

The fundamental idea of the Black-Scholes model is to build a portfolio formed by the option and its underlying asset. Then with a specif hedging strategy, the portfolio can be converted into risk-free. However, the hypotheses that are assumed in the construction of the model are not entirely correct when the model is translated into practice. We emphasize that the assumption of the continuity of hedged is impossible in practice. As a result of the hedging in discrete time, the portfolio is not free of risk as the model assumes. This fenomenon was studied by Phelim P. Boyle and David Emanuel in 1980 for a European vanilla option.

In this memory we will study the process of deduction of the basic Black-Scholes model and their extension for options with several underlying assets. Afterwards, we will examine the evaluation of the Margrabe option and the Quanto option. Finally, we will analyze the discrete time hedges error for these two types of options.

Resumen

Los autores Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton, desarrollaron una teoría para la valoración de las opciones Europeas, que actualmente se la conoce como modelo de Black-Scholes-Merton. Cabe destacar que en 1997 se reconoció la importancia del modelo recibiendo el Premio Nobel de Economía.

La idea fundamental del modelo es construir una cartera formada por la opción y su activo subyacente. Luego mediante una estrategia de cobertura, es decir, comprando o vendiendo una cierta cantidad de activos, se puede convertir la cartera en libre de riesgo. Sin embargo, las hipótesis que se asumen en la construcción del modelo no son del todo correctas cuando se traslada el modelo a la práctica. Destacaremos en el trabajo que el supuesto de la continuidad de la cobertura es imposible de cumplir en la práctica, ya que esta se realiza siempre necesariamente en tiempo discreto.

A consecuencia de la cobertura en tiempo discreto, en la práctica no se consigue una cartera libre de riesgo tal como supone el modelo, sino que se generan unas pérdidas o beneficios sobre la cartera que denominamos error de cobertura. Este fenómeno fue estudiado por Phelim P. Boyle y David Emanuel en 1980 para una opción vainilla Europea.

En este trabajo estudiaremos todo el proceso de deducción del modelo básico de Black-Scholes y la extensión de este modelo para opciones con varios activos subyacentes. Posteriormente, examinaremos la valoración de dos opciones en concreto, la opción Margrabe y la opción Quanto. Finalmente, analizaremos el error de cobertura en tiempo discreto para estos dos tipos de opciones.

Agradecimientos

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a mis tutores Dr. Josep Vives y Dr. Oriol Roch Casellas, ya que ambos han sido imprescindibles para completar el trabajo.

Gracias a Dr. Oriol Roch tanto por la orientación y sugerencias al trabajo, como por la recomendación de bibliografía y indicaciones en las demostraciones. Gracias al Dr. Josep Vives tanto por la resolucin de dudas sobre variables aleatorias y cálculos estocásticos, como consejos y correcciones de escritura. Sinceramente, sin ellos no hubiera sido capaz de terminar el trabajo en un estado decente.

En segundo lugar, quiero agradecer a los profesores de la Facultat de Matemáticas y a los profesores de la Facultat d'Economia y Empresa por transmitir sus conocimientos financieros y matemáticos, y poder yo en esta ocasión aplicar estos conocimientos a este trabajo.

Por último agradezco a todos mis compañeros y familiares el apoyo que han dado durante la realización del trabajo.

Índice

1. Introducción

Desde muy pequeño ya me llamaba mucho la atención el mundo de las finanzas. Veía en las películas que hay personas que son capaces de predecir o intuir los movimientos de las acciones y gracias a ellos generar grandes beneficios. Entonces en el momento de pensar un tema sobre el TFG, lo primero que se me planteo es estudiar y investigar sobre el mundo de las finanzas con los conocimientos matemáticos y financieros adquiridos durante las dos carreras.

Durante la búsqueda he encontrado el modelo de Black-Scholes, en el que se expone que bajo unos supuestos y resolviendo una ecuación en derivadas parciales se puede obtener el precio de una opción. Me pareció muy interesante el modelo porque se requerían tanto herramientas matemáticas avanzadas como financieras para poder entenderlo.

Después de hablar con Josep Vives y Oriol Roch, acordamos también estudiar la extensión del modelo de Black-Scholes para opciones con varios activos subyacentes. Porque en el modelo básico solo se estudia el caso de una opción vainilla Europea, pero en la práctica existen muchas opciones que dependen de más de un activo subyacente. Concentraremos el estudio en dos opciones específicas que son la opción Margrabe y la opción Quanto. La opción Quanto es muy habitual en la práctica, porque sirve para cubrir el riesgo de cambio de divisas cuando se invierte en una opción donde su activo subyacente esta cotizando en una moneda extrajera. Y la opción Margrabe permite intercambiar el rendimiento de un activo por el de otro en el vencimiento de la opción.

Además el profesor Oriol Roch me comentó que uno de los supuestos del modelo de Black-Scholes es imposible de cumplir en la práctica, que es hacer la cobertura en tiempo continuo. Consecuentemente, cuando se hace la cobertura en la práctica se generan errores. Esto ya fue estudiado por Phelim P. Boyle y David Emanuel para una opción vainilla Europea publicado en 1980 en el artículo de *Discretely adjusted option hedges*. Pero para las opciones Margrabe y Quanto todavía no se ha analizado este error. Por eso pretendemos estudiar y analizar el comportamiento del error para estos dos casos.

Cabe destacar que el error que se genera en base a la cobertura en tiempo discreto es importante. Porque en el modelo de Black-Scholes se construye una cartera libre de riesgo aplicando una estrategia en concreta en tiempo continuo. Pero si en la práctica el tiempo es discreto, la cartera no será libre de riesgo y entonces la valoración teórica del precio de la opción no sería del todo correcto. Por lo tanto es muy importante saber cuantificar y analizar este error.

Estructura de la Memoria

Para poder conseguir nuestro propósito tenemos que definir previamente algunas nociones matemáticas y financieras. En la primera sección mencionamos el entorno financiero en el que trabajamos, los mercados financieros. Después definimos la noción matemática de proceso estocástico y el Lema de Itô, para realizar los cálculos bajo el modelo de Black-Scholes. Una vez que disponemos de todas las herramientas, ya podemos deducir la ecuación y la fórmula de Black-Scholes para una opción vainilla Europea. También deducimos la ecuación y la fórmula para una opción con pago de dividendos y una opción sobre divisas, ya que estos dos casos son esenciales en el caso del estudio de la opción Quanto.

Con estos preparativos ya estamos listo para llegar a nuestros objetivos. En la sección cuatro generalizamos la ecuación de Black Shocles para una opción con varios activos. Luego determinamos el precio de la opción Margrabe y la opción Quanto, transformando la dependencia de dos activos subyacentes al caso de uno con un cambio de variable en cada caso.

Finalmente, teniendo los precios de la opción Margrabe y la opción Quanto y asimilado el modelo de Black-Scholes, ya podemos analizar el error de cobertura en tiempo discreto de estos dos opciones y realizar una simulación para comprobar los resultados del análisis.

2. Introducción al mercado financiero

El mercado financiero es el lugar físico o virtual donde se realizan los intercambios de instrumentos financieros entre los agentes económicos. Dependiendo de las ofertas y demandas de los agentes se determinan los precios de los activos. Existen muchos tipos de mercados, pero los más relevantes para este trabajo son el mercado de las acciones, el mercado de divisas y el mercado de derivados.

2.1. El mercado de acciones

Tal como indica el nombre, este mercado hace referencia al lugar donde se compran y venden las acciones. Una acción es una parte alícuota en que se divide el capital social de una empresa, y proporciona a su propietario varios derechos. El derecho más importante desde de punto de vista de la valoración es el derecho a recibir dividendos. En el Capítulo 4, explicaremos como el dividendo puede hacer variar el precio de una acción.

En todo el texto, consideramos que las acciones sigue un movimiento aleatorio. Es decir, que no podemos predecir el valor de una acción de forma determinista. Por lo tanto, tendremos que modelizar la variación del precio con un proceso estocástico.

2.2. El mercado de divisas

El mercado de divisas o del tipo de cambio es el lugar donde se fijan los precios de las monedas en relación a otras. Una de las funciones más destacada de este mercado es que permite la cobertura de riesgos debido al tipo de cambio cuando se invierte con monedas extrajeras.

Es importante tener en cuenta que las relaciones de cambio entre diferentes monedas tienen que ser consistentes. En otras palabras, si tenemos la relación de cambio entre la moneda A y la moneda B, y también de B a C, entonces las relaciones A/B, B/C y C/A tienen que ser coherentes, es decir, que no existan oportunidades de arbitraje (conseguir beneficios inmediatos) entre estas.

Las fluctuaciones de los tipos de cambios son imposibles de predecir, es decir, también siguen un movimiento aleatorio. No obstante, existe un vínculo entre el tipo de cambio y el tipo de interés de los países correspondientes. Si el tipo de interés de país A esta aumentado mientras que el de país B se mantiene fijo, entonces es muy probable que el tipo de cambio de la moneda B se deprecie respecto la moneda A.

2.3. El mercado de derivados

En el mercado de derivados se negocian los instrumentos financieros cuyo valor deriva de la evolución del precio de otros activos. Denominamos estos activos como activos subyacentes. Los más comunes son las acciones, los tipos de cambios, los índices y las tasas de interés.

La contratación de un derivado es a plazo, se establecen todos los detalles de la transacción en el momento del acuerdo, mientras que el intercambio efectivo se produce en un momento futuro. Por esta característica, los derivados muchas veces son utilizados para cubrir riesgos futuros.

Los derivados más usuales son los futuros, las opciones y los swaps. Resaltamos las opciones, ya que es el instrumento financiero que estudiaremos en todo el trabajo. En la Sección 3 veremos el modelo de Black-Scholes para deducir su precio.

2.3.1. Opciones financieras

Primero de todo hay que destacar que existen dos tipos de opciones: las de compra y las de venta.

Definición 2.1. *La opción de compra ofrece al tenedor el derecho a comprar el activo subyacente en una fecha futura a un precio específico previamente pactado.*

Definición 2.2. *La opción de venta ofrece al tenedor el derecho a vender el activo subyacente en una fecha futura a un precio específico previamente pactado.*

En el mercado de derivados solemos denominar la opción de compra como call y las opción de venta como put. Y por otro lado, el precio de compra o de venta que establecemos en el contrato se conoce como precio de ejercicio (E) y la fecha futura de la operación como fecha de vencimiento (T). También se utiliza la posición larga para referirse a la compra de un instrumento financiero y la posición corta para la venta.

Además la opción puede ser de tipo Europea o Americana. Una opción Europea tan solo se puede ejercer en la fecha de vencimiento, mientras que la opción Americana se puede ejercer en cualquier momento de la vida de la opción. Como que el modelo inicial de Black-Scholes es para una opción Europea, consideraremos siempre que las opciones son de tipo Europeo.

Es importante hacer énfasis en que una opción brinda al tenedor un derecho. En otras palabras, el tenedor en el día de vencimiento, puede no ejercer la opción cuando se encuentra en una situación desfavorable para él. Por ejemplo, en el caso de una call si el precio de ejercicio es superior al precio de mercado ne el día de vencimiento, el tenedor no ejercerá la opción. Mientras que en el caso de un put, el tenedor no ejercerá la opción cuando el precio de ejercicio sea inferior al precio de mercado del activo subyacente.

Notación 2.3.

- S_t: El precio del activo subyacente en el instante t.
- E: El precio de ejercicio.
- T: La Fecha de vencimiento de la opción.
- S_T: El precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento.
- C: El valor de una opción call Europea.
- P: El valor de una opción put Europea.

Observación 2.4. El valor de una opción call Europea en el día de vencimiento es el máximo entre $S_T - E$ y 0.

$$C(S_T, T) = \max(S_T - E, 0). \tag{2.1}$$

Y el valor de una opción put Europea en el en el día de vencimiento es el máximo entre $E - S_T$ y 0.

$$P(S_T, T) = \max(E - S_T, 0). \tag{2.2}$$

En efecto, en el caso de una call, si en el instante T tenemos que $S_T > E$, el tenedor ejercerá la opción porque conseguiría un beneficio positivo de $S_T - E$. Por otro lado, si en T tenemos que $E > S_T$, el tenedor no ejercerá la opción, ya que si ejerce, obtendría una pérdida de $E - S_T$. Entonces el valor de una opción call en el vencimiento es el máximo entre $S_T - E$ y cero. Aplicando el mismo argumento para la put obtenemos la Ecuación 2.2.

Proposición 2.5. *Sea $C(S, t)$ el precio de una opción call en el momento t con un precio de ejercicio E y una fecha de vencimiento T y $P(S, t)$ una opción put en el momento t con las mismas condiciones que la call. Entonces se cumple que*

$$C(S, t) - P(S, t) = S_t - Ee^{-r(T-t)}. \tag{2.3}$$

Esta relación se denomina paridad call-put.

Demostración. Suponemos que tenemos una cartera Π compuesta por una posición larga de una acción, una posición corta de una opción call y una posición larga de una opción put con las condiciones descritas en la proposición. Tenemos

$$\Pi_t = S_t + P(S, t) - C(S, t)$$

Usando la Observación 2.4, el pago de esta cartera en el vencimiento es

$$S + \max(E - S, 0) - \max(S - E, 0).$$

Separamos la ecuación en función de las dos situaciones que se pueden dar entre el precio de ejercicio y el precio del activo en la fecha de vencimiento:

$$\begin{aligned} S_T + (E - S_T) - 0 = E \qquad &\text{si} \quad S_T \leq E, \\ S_T + 0 - (S_T - E) = E \qquad &\text{si} \quad S_T \geq E. \end{aligned}$$

Esto resulta que el pago de la cartera es E en los dos casos. Si actualizamos este importe al instante t, tendremos $Ee^{-r(T-t)}$,[1] y esto demuestra la relación de paridad call-put.

La conclusión es que comprando una opción call y vendiendo una opción put obtenemos el mismo rendimiento que comprando el activo subyacente e invirtiendo una cantidad E que recibe un interés r. □

2.4. Valor temporal del dinero

Uno de los conceptos fundamentales en finanzas es que el dinero tiene un valor diferente en el tiempo. El valor de una unidad monetaria es mayor ahora que el año siguiente, por la preferencia de liquidez, es decir es preferible tener el dinero hoy que dentro de un año. Por otro lado el poder de adquisición futura es menor por la tasa de inflación y también el propietario de la unidad monetaria puede invertir su dinero en productos financieros para incrementar su valor asumiendo ciertos riesgos.

No obstante, en la teoría se asume que hay ciertas inversiones que son libres de riesgo. Por ejemplo, inversiones en una letra del tesoro, un bono del Estado de un país sólido o depósitos en un banco consideramos que son libres de riesgo. Si consideramos que el banco o el Estado nos paga una tasa de interés r durante un periodo t con n pagos, entonces podemos calcular el valor futuro de la inversión inicial M como

$$M\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Ahora en vez de tener n pagos, tenemos infinitos pagos, es decir, n tiende hacia infinito. Entonces el valor futuro será

$$\lim_{n\to\infty} M\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} Me^{nt\log(1+\frac{r}{n})} = Me^{rt}.$$

Este proceso recibe el nombre de capitalización continua y el interés del bono o del banco se denomina interés libre de riesgo.

Otra forma de deducir la capitalización continua es utilizando ecuación diferencial. Sea $M(t)$ la cantidad de dinero de la inversión inicial. Usando el teorema de Taylor al tiempo $t + dt$, tenemos que la variación de la inversión es

$$M(t + dt) - M(t) \approx \frac{dM}{dt}dt + \ldots$$

Ignoramos los términos superiores de la serie de Taylor.

[1]Explicaremos este concepto en el apartado del valor del dinero en el tiempo.

Por otro lado, sabemos que el interés que percibimos tiene que ser proporcional a la cantidad invertida por el tipo de interés durante la variación dt. Así que igualando los dos expresiones:

$$\frac{dM(t)}{dt}dt = rM(t)dt.$$

Esto nos lleva a la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dM(t)}{dt} = rM(t).$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos

$$\int_0^t \frac{dM(s)}{M(s)} = \int_0^t rds$$

$$\log\left(\frac{M(t)}{M(0)}\right) = r(t-0).$$

Aplicamos el exponencial a los dos lados y conseguimos

$$M(t) = M(0)e^{rt}.$$

Si suponemos que en el momento inicial tenemos una cantidad M, es decir, $M(0) = M$, entonces el importe en el momento t es Me^{rt}. Fijamos que este resultado es el mismo que habíamos obtenido al tender n hacia el infinito en el proceso de capitalización continua.

3. Aleatoriedad del activo y el cálculo estocástico

Primero de todo, suponemos que no sabemos con precisión el precio futuro de un activo financiero, dicho de otro modo, no podemos predecir con exactitud la evolución del precio. Esto es porque consideramos que existe un factor aleatorio en la evolución del precio. Y decimos que este factor aleatorio sigue un proceso de Wiener que definiremos en la primera parte de este capítulo.

Por otro lado, para poder trabajar con variables aleatorias es imprescindible emplear técnicas de cálculo estocástico, por eso en la segunda parte de este capítulo estudiaremos algunas nociones fundamentales de este campo.

3.1. El proceso de Wiener

Definición 3.1. *Un proceso de Wiener $W(t)$, o movimiento Browniano, definido en un intervalo $[0, T]$ es un proceso estocástico en tiempo continuo que cumplen las siguientes propiedades:*

1. $W(0) = 0$.
2. $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0$, $W(t+h) - W(t)$ *es independiente de* $W(t)$.
3. $\forall t \geq 0, \forall h \geq 0$, $W(t+h) - W(t)$ *sigue una distribución* $N(0, h)$.

Observación 3.2. La Propiedad 2 expresa que el valor futuro de la variable $W(t+h)$ solo depende de su valor actual $W(t)$, no siendo afectada por sus valores pasados.

Definición 3.3. *Una sucesión de variable aleatoria X_n converge en media cuadrática a una variable aleatoria X (que puede degenerar en un costante) cuando se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[(X_n - X)^2\Big] = 0.$$

Propiedad 3.4. ***Variación cuadrática***

Sea $W(t)$ un proceso de Wiener definido en un intervalo $[0, t]$. Si dividimos el intervalo en n partes iguales con $t_j = \frac{jt}{n}$ y $j = 0, 1, \ldots, n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \Big(W(t_j) - W(t_{j-1})\Big)^2 = t.$$

Demostración. Para validar este resultado, examinamos el siguiente término

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(W(t_j) - W(t_{j-1}))^2 - t\right)^2\right].$$

Expandiendo el cuadrado tenemos que

$$E\Bigg[\sum_{j=1}^{n}(W(t_j)-W(t_{j-1}))^4+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}(W(t_i)-W(t_{i-1}))^2(W(t_j)-W(t_{j-1}))^2$$
$$-2t\sum_{j=1}^{n}(W(t_j)-W(t_{j-1}))^2+t^2\Bigg]. \qquad (3.1)$$

Usando la propiedad 3 de la definición del proceso de Wiener, vemos que el término $W(t_j)-W(t_{j-1})$ sigue una distribución normal de esperanza cero y varianza $\frac{t}{n}$.[2] Por lo tanto,

$$E[(W(t_j)-W(t_{j-1}))^2]=\frac{t}{n}.$$

Utilizando la propiedad del cálculo de momento de la distribución normal se obtiene[3]

$$E[(W(t_j)-W(t_{j-1}))^4]=\frac{3t^2}{n^2}.$$

Substituyendo en la equación 3.1, obtenemos una expressión que depende de t y n:

$$n\frac{3t^2}{n^2}+n(n-1)\frac{t^2}{n^2}-2tn\frac{t}{n}+t^2=\frac{2t^2}{n}=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Como $n\to\infty$, esta expressión tiende a cero.
Esto significa que la varianza de $\left(\sum_{j=1}^{n}(W(t_j)-W(t_{j-1}))^2-t\right)$ es cero[4], y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\Big(W(t_j)-W(t_{j-1})\Big)^2=t.$$

□

3.1.1. El modelo estocástico para el precio de un activo

Consideramos que el movimiento del precio de un activo financiero contiene un proceso de Wiener $X(t)$, denotando $dX(t)$ como la variación de este proceso, y describimos la siguiente ecuación como su variación:

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dX(t). \qquad (3.2)$$

Esto es una ecuación diferencial estocástica, donde μ es la rentabilidad y σ la volatilidad. Además, como $X(t)$ es un proceso de Wiener, esto implica que $dX(t)$ sigue una distribución normal de esperanza cero y varianza dt.

---

[2] La varianza de $W(t_j)-W(t_{j-1})$ es t_j-t_{j-1}. Substituyendo $t_j=\frac{jt}{n}$ y $t_{j-1}=\frac{(j-1)t}{n}$, obtenemos que la varianza es igual a $\frac{t}{n}$.

[3] Si $X\sim N(\mu,\sigma)$, entonces $E[X^{2k}]=\frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}$. Así que $E[X^4]=3\sigma^4$.

[4] Si la varianza de una variable es cero, esto implica que todos sus valores son iguales a la esperanza de este variable. Así que $\sum_{j=1}^{n}(W(t_j)-W(t_{j-1}))^2-t$ es igual a cero.

La rentabilidad μ es el rendimiento esperado sobre un activo financiero y suponemos que es constante, porque en un intervalo corto de tiempo, su valor no varia a grandes rasgos. Sean $S_0, \ldots, S_n$ los precios de un activo durante un periodo de tiempo tal que el rendimiento R_i entre S_i y S_{i+1} es

$$R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}\delta t},$$

para $i = 0, \ldots, n$ y δt es el tiempo que transcurre entre S_{i-1} y S_i.

Entonces, una forma simple de calcular la rentabilidad del activo es utilizando la media muestral de los rendimientos.

$$\mu = \frac{1}{n\delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i.$$

La volatilidad mide la fluctuación de los movimientos del activo respecto a su media en un periodo de tiempo. En otras palabras, este factor nos ayuda a conocer la estabilidad del activo. Una manera de medir la volatilidad es calculando la desviación típica de los rendimientos del activo,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)\delta t}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2},$$

donde $\overline{R}$ es la media de los rendimientos

$$\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i.$$

Una vez definidos estos conceptos, ya podemos interpretar la ecuación diferencial estocástica 3.2 como la variación del precio de un activo que depende de su rendimiento esperado por el periodo de tiempo más la volatilidad del activo por un factor aleatorio y todo proporcional a su precio inicial.

Observación 3.5. La ecuación diferencial estocástica de la variación del precio de un activo se escribe en tiempo discreto como

$$\delta S(t) = \mu S(t)\delta t + \sigma S(t)\phi\delta t^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

donde δt es el incremento de tiempo y ϕ una variable aleatoria que sigue una distribución normal de esperanza cero y varianza uno.

Podemos considerar que el término $\phi\delta t^{\frac{1}{2}}$ en tiempo discreto es el factor equivalente a $dX(t)$ en el proceso aleatorio en tiempo continuo, es decir,

$$dX(t) \sim \phi\delta t^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que la esperanza de los dos términos es cero y que la varianza de $dX(t)$ es dt y la de $\phi\delta t^{\frac{1}{2}}$ es δt.

3.2. La ecuación diferencial estocástica

Definición 3.6. *La integral estocástica de un proceso estocástico $f(\tau)$ en el intervalo $[0,t]$ es*

$$G(t) = \int_0^t f(\tau)dX(\tau) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(t_{j-1})(X(t_j) - X(t_{j-1})),$$

donde $t_j = \frac{jt}{n}$.

Notación 3.7. *Para simplificar, es muy común utilizar una notación más corta, escribiendo la diferencial de la integral estocástica como*

$$dG = f(t)\, dX(t).$$

Observación 3.8. La ecuación diferencial estocástica 3.2

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dX(t),$$

es la versión en notación corta de la siguiente expresión:

$$S(t) = \int_0^t \mu S(\tau)d\tau + \int_0^t \sigma S(\tau)dX(\tau).$$

Proposición 3.9. *El límite de $(dX(t))^2$ se comporta como dt cuando $dt \to 0$.*

Demostración. Utilizando la variación cuadrática, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \Big(X(t_j) - X(t_{j-1})\Big)^2 = t.$$

Reescribimos la expresión anterior como

$$\int_0^t (dX(t))^2 = t.$$

Así que cuando n tiende a ∞, es decir, dt tiende a 0, se satisface

$$(dX(t))^2 = dt.$$

□

Con la definición de la integral estocástica y la Proposición 3.9 ya podemos estudiar el Lema de Itô para calcular la diferencial de procesos estocásticos.

3.3. Lema de Itô

El Lema de Itô es una concepto fundamental en los cálculos de procesos estocásticos. Sea f una función contínua y $X(t)$ un proceso estocástico, entonces usando el Lema de Itô, la diferencial de f es

$$df(X) = \frac{df}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dX^2}dt. \tag{3.4}$$

Para simplificar la notación utilizamos $dX(t) = dX$.

Una forma heurística de deducir este lemma es utilizado el teorema de Taylor. Este método no es del todo riguroso, pero es muy intuitivo y fácil de entender. Aplicando el teorema de Taylor a $f(X)$, obtenemos

$$f(X + dX) = f(X) + \frac{df}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dX^2}dX^2 + \cdots$$

Pasando el $f(X)$ al otro lado, se obtiene $f(X + dX) - f(X)$, que es la variación de f, entonces tenemos

$$df(X) = \frac{df}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dX^2}dX^2 + \dots$$

Tenemos que $dX \sim \sqrt{dt}$ cuando dt tiende a cero, esto implica que el orden de $dX = O(\sqrt{dt})$ cuando $dt \to 0$. Consideramos que todos los términos que son más pequeño que dt son despreciables. Así que ignoramos los términos de orden superiores de la serie de Taylor, ya que son más pequeño que dt. Y aplicando la propocición 3.8, la diferencial de f es

$$df(X) = \frac{df}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dX^2}dt.$$

3.3.1. Lema de Itô para el precio de un activo

Recuperamos la ecuación 3.2 simplificando su notación, escribiendo

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX,$$

y $f(S)$ es una función continua y derivable, entonces la diferencial de $df(S)$ es

$$df(S) = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dS^2}dS^2.$$

Expandiendo el término dS^2, obtenemos

$$dS^2 = \mu^2 S^2 dt^2 + \mu\sigma S^2 dt dX + \sigma^2 S^2 dX^2.$$

Como que $dt^2 \ll dXdt \ll dt \ll dX$, cuando $dt \to 0$, entonces los dos primeros términos los despreciamos, y utilizando $dX^2 = dt$, finalmente obtenemos

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dt.$$

Entonces la diferencial del precio de un activo es

$$df(S) = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}dt.$$

En la mayoría de los casos, las funciones financieras por lo menos dependen de dos variables, una estocástica y otra determinista que es el tiempo. Representamos estas funciones como $V(S,t)$. Esto nos lleva a usar derivadas parciales. Entonces la diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt.$$

3.3.2. Lema de Itô multidimensional

En el mundo financiero, hay muchos productos que dependan de 2 o más activos. Por consiguiente, es importante conocer el Lema de Itô para una función de varias variables. Sea $V(S_1, \ldots, S_n, t)$ una función continua tal que para cada activo subyacente se cumple

$$dS_i = \mu_i S_i \, dt + \sigma_i S_i \, dX_i,$$

con μ_i, σ_i constantes y dX_i la diferencial de un proceso de Wiener y su diferencial sigue una distribución normal con esperanza cero y varianza dt.

Además, asumimos que cada par de variables estocásticas dX_i y dX_j están correlacionadas por un constate ρ_{ij}, satisfaciendo

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1.$$

Es decir que la covariación entre dX_i y dX_j es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(X_i(t_k) - X_i(t_{k-1})\Big)\Big(X_j(t_k) - X_j(t_{k-1})\Big) = \rho_{ij} t.$$

Escribiendo en notación corta, tenemos que

$$dX_i dX_j = \rho_{ij} dt.$$

Observación 3.10. Si $i = j$, la ρ es igual a uno, entonces $dX_i^2 = dt$. Podemos ver que este caso corresponde a la variación cuadrática.

Para ilustrar todas las correlaciones podemos construir la matriz siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \ldots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \ldots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es simétrica, es decir $\rho_{ij} = \rho_{ji}$.

Ahora calculando la variación de $V(S_1, \ldots, S_n, t)$, tenemos que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} dS_i dS_j.$$

Expandiendo los términos $dS_i dS_j$ y utilizando la variación cuadrática y la covariación, el Lema de Itô para múltiples variables es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} dt.$$

Con todos estos nociones previos definidos, ya podemos estudiar el desarrollo del modelo de Black-Scholes, la resolución de la ecuación de Black-Scholes y examinar la generalización del modelo de Black-Scholes para opciones con varios activos subyacentes.

4. El modelo de Black-Scholes

En este capítulo, primero definiremos las hipótesis para el modelo de Black-Scholes de una opción estándar Europea. Luego derivaremos la ecuación diferencial en derivadas parciales de Black-Scholes con la construcción de una cartera libre de riesgo utilizando un método de cobertura en concreto. Finalmente resolveremos esta ecuación mediante cambios de variables y con la solución de la ecuación del calor obtendremos el precio teórico de la opción.

4.1. Las hipótesis del modelo de Black-Scholes

Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton en la construcción del modelo para la valoración de una opción estándar habían asumido una serie de supuestos, que se les conoce como las hipótesis del modelo de Black-Scholes y las mencionaremos a continuación:

1. El precio de un activo financiero sigue un modelo log-normal con μ y σ constantes.
2. No hay costes de transacción en la compra-venta de activos.
3. El activo subyacente de la opción no paga dividendos.
4. No existen oportunidades de arbitraje en el mercado.
5. Los inversores pueden pedir préstamos al banco con el interés libre de riesgo r constante.
6. El activo es divisible, es decir, se permite la compra-venta de cualquier cantidad del activo subyacente.
7. El tiempo de las operaciones es continuo.

Entre estos supuestos, existen algunos que en la práctica no son del todo realistas. Por ejemplo, normalmente en el mercado existen costes de transacción o la volatilidad del mercado es altamente inestable.

La idea básica del modelo de Black-Scholes se basa en eliminar el término aleatorio de la opción con el término aleatorio de su activo subyacente mediante una composición concreta de una cartera. Esta cartera estará formado por una opción y una cierta cantidad del activo subyacente. Veremos que con una cantidad determinada del activo subyacente se logra obtener una cartera libre de riesgo y denominamos cobertura la cantidad del activo subyacente que se necesita para conseguir la cartera libre de riesgo.

Destacamos el supuesto de continuidad, a consecuencia de este supuesto la cobertura de la cartera también tiene que ser en tiempo continuo. Sin embargo, en la práctica es imposible hacer las coberturas en tiempo continuo. En el último capítulo analizaremos las consecuencia de la cobertura en tiempo discreto, intentando cuantificar y ver los efectos que tienen para unas opciones específicas.

Observación 4.1. En términos financieros, nunca deben existir oportunidades de arbitraje en el mercado, es decir, ningún individuo debe poder obtener beneficio inmediato sin riesgo aprovechado las oportunidades de transacción. Mejor dicho, esas oportunidades no puede existir durante un intervalo significativo de tiempo. Los movimientos de los precios eliminan esas oportunidades en un intervalo muy corto de tiempo para que nadie puedan explotarlas.

En los supuestos asumimos que el precio del activo sigue una distribución log-normal, esto es $f(S) = logS$ y por lo tanot la variación de S sigue la Ecuación 3.2

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX.$$

Entonces utilizando el Lema de Itô la diferencial de f queda como:

$$df(S) \;=\; \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}dt \;=\; \frac{1}{S}(\mu S dt + \sigma S dX) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$df(S) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dX. \tag{4.1}$$

4.1.1. Cartera libre de riesgo

Casi en todos los modelos financieros aceptamos la existencia de una inversión sin riesgo que garantiza un rendimiento sin posibilidad de pérdida. Un ejemplo sobre este tipo de inversión es la compra de un bono del Estado o un depósito en un banco. Denominamos el interés del Estado o del banco como interés libre de riesgo.

Proposición 4.2. *Sea* Π *una cartera libre de riesgo,* r *el interés libre de riesgo, entonces la variación del valor de la cartela tiene que ser igual al rendimiento del interés libre de riesgo.*

$$d\Pi = r\Pi \, dt. \tag{4.2}$$

Demostración. Un principio del mercado financiero es que el rendimiento de una cartera libre de riesgo tiene que ser igual que el rendimiento de las inversiones que consideramos libre de riesgo. Dicha de otra forma, todas las carteras libre de riesgo tienen el mismo rendimiento.

Para demostrar esto, consideramos las dos posibles situaciones. Primero, si el rendimiento de la cartera libre de riesgo es superior que el interés libre de riesgo, entonces podemos hacer un préstamo al banco[5] y luego invertir en esa cartera para obtener una ganancia. Pero como que habíamos considerado la no existencia de arbitraje, esta situación no puede suceder.
Ahora bien, la segunda situación es que el rendimiento de una cartera libre de riesgo es menor que el el pago del interés libre de riesgo que proporciona otras inversiones, entonces lógicamente no invertiremos en esa cartera. Por lo tanto los dos rendimientos tienen que coincidir para cumplir todos los hipótesis. □

[5] Por el supuesto 5, podemos hacer préstamos al banco con el interés libre de riesgo.

4.2. La ecuación de Black-Scholes

Ahora mostraremos el proceso de deducción de la ecuación de Black-Scholes mediante la construcción de una cartera libre de riesgo.

Sea $V(S,t)$ una opción estándar Europea tal que S es el activo subyacente y su comportamiento está descrito por la Ecuación 3.2

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX.$$

Ahora componemos una cartera Π que consiste en una opción $V(S,t)$ y una cantidad $-\Delta$ del activo subyacente. Así que el valor de esta cartera es

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S.$$

Con el paso del tiempo, la variación de la cartera es dada por la siguiente ecuación:

$$d\Pi = dV - \Delta dS.$$

El valor dV lo habíamos calculado utilizando el Lema de Itô y era igual a

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Substituyendo los valores de dS y dV, y sacando factor común de los terminos dt y dX, obtenemos

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dX.$$

Una vez agrupados los términos que dependan del factor aleatorio dX, se puede ver que escogiendo un determinado valor de la Δ, podemos eliminar el término aleatorio dX. La elección de esta Δ le denominamos cobertura.

Claramente la cobertura debe ser

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \tag{4.3}$$

para eliminar el movimiento aleatorio dX. Esto es una cobertura dinámica, es decir, la cobertura se lleva a cabo en tiempo continuo. Una vez obtenido una cartera libre de riesgo, se aplica la Proposición 4.2. El rendimiento tiene que ser igual al interés libre de riesgo. Entonces tenemos dos expresiones para la variación de la cartera:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

$$d\Pi = r\Pi dt = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right) dt.$$

Igualando las dos ecuaciones logramos obtener la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{4.4}$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales, que resolveremos más adelante.

4.2.1. El significado de los términos de la ecuación de Black-Scholes

El primer término de la ecuación de Black-Scholes es la derivada parcial del valor de la opción respecto al tiempo, y se denomina theta:

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{4.5}$$

Theta es el gradiente de la opción respecto al tiempo. Dicho de otro modo, mide la velocidad de cambio del valor de la opción respecto a la variación del tiempo con el precio del activo subyacente fijo.

La primera derivada del valor de la opción respecto al precio del activo subyacente se denomina delta,

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{4.6}$$

Notemos que la delta es igual a la cobertura para conseguir la cartela libre de riesgo y por esta razón llamamos a Δ la cobertura delta. Esta derivada mide la variación relativa de la opción cuando existe una variación del activo subyacente con el tiempo fijo.

La segunda derivada de la opción respecto al activo subyacente es la gamma.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \tag{4.7}$$

Esta derivada indica que si la fluctuación del activo subyacente es dS, entonces la fluctuación de la delta será ΓdS. Es decir, mide la variación de la cobertura ante variación del precio del activo subyacente.

Theta, delta y gamma, estas tres derivadas parciales las denominamos Griegas. Escribiendo la ecuación Black-Scholes en términos de las Griegas tenemos

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta - rV = 0. \tag{4.8}$$

Reordenando la expresión obtenemos

$$\Theta = rV - rS\Delta - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r(V - \Delta S) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma.$$

Dicho de otra manera

$$\text{Theta} = \text{El valor de la cartera inicial por el interés} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma,$$

la variación del valor de la opción con el paso del tiempo es igual al interés libre de riesgo por el valor de la cartera menos $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma$.

4.3. La fórmula de Black-Scholes

En esta sección resolvemos paso a paso la ecuación de Black-Scholes para una opción call Europea y así obtener su valoración. Para una opción put, el proceso de resolución es el mismo que el call pero cambiando la función de pago en su vencimiento.

Sea $C(S,t)$ el valor de una opción call Europea, donde S sigue un modelo lognormal. Entonces podemos obtener fácilmente la ecuación de Black-Scholes para una opción call remplazando $V(S,t)$ de la ecuación 4.4 por $C(S,t)$.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \tag{4.9}$$

Además con estas condiciones:

$$\begin{aligned} C(0,t) &= 0 & t &\in [0,\infty) & (4.10)\\ C(S,T) &= \max(S-E,0) & S &\in (0,\infty) & (4.11)\\ \lim_{S\to\infty} C(S,t) &\sim S & t &\in [0,\infty) & (4.12) \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación diferencial parcial,empleamos los siguientes cambios de variables:

$$S = Ee^x, \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad C(S,t) = EV(x,\tau).$$

Calculamos las derivadas parciales de $V(x,\tau)$ para después substituirla en la ecuación inicial.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial C}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{1}{E} = -\frac{2}{E\sigma^2}\frac{\partial C}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{1}{E} = \frac{S}{E}\frac{\partial C}{\partial S}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{1}{E} + \frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{1}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial C}{\partial S}S\right)$$

Con el cambio, reescribimos la ecuación inicial y las condiciones de contorno:

$$V(x,0)^6 = \frac{1}{E}C(S,T) = \frac{1}{E}\max(S-E,0) = \max(e^x-1,0)$$

$$\lim_{x\to\ -\infty} V(x,\tau)^7 = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{C(Ee^x,t)}{E} = \frac{C(0,t)}{E} = 0$$

[6]Cuando $t \to T$, entonces $\tau \to 0$.

[7]Cuando $S \to 0$, then $x \to -\infty$.

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{1}{2}E\sigma^2 + \frac{1}{2}E\sigma^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + rE\frac{\partial V}{\partial x} - rEV = 0 \tag{4.13}$$

Ordenando y multiplicando por $\frac{2}{E\sigma^2}$ la equación 4.13, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) - \frac{2rV}{\sigma^2}. \tag{4.14}$$

Ahora hacemos otro cambio de variable. Sea

$$V(x,\tau) = e^{ax+b\tau}u(x,\tau),$$

con a y b constantes. Posteriormente les daremos unos valores específicos.

Calculamos las derivadas parciales de la nueva variable.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = e^{ax+b\tau}b\ u(x,\tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau}e^{ax+b\tau}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^{ax+b\tau}a\ u(x,\tau) + \frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+b\tau}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = e^{ax+b\tau}a^2\ u(x,\tau) + a\ e^{ax+b\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{ax+b\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\ e^{ax+b\tau}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Para simplificar consideramos

$$\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Y substituyendo estas derivadas parciales en la Ecuación 4.14, obtenemos que

$$b\ u(x,\tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2u(x,\tau) + 2a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + a\ u(x,\tau)\right) - \lambda u(x,\tau). \tag{4.15}$$

Observamos que con una elección concreta de a y b podemos eliminar todos los términos $u(x,\tau)$ y sus primeras derivadas parciales respecto x. Para encontrar los valores de a y b con la característica descrita, debe cumplirse que

$$b = a^2 + (\lambda-1) - \lambda \qquad y \qquad 2a + \lambda - 1 = 0.$$

Resolviendo, obtenemos

$$a = \frac{1-\lambda}{2} \qquad y \qquad b = -\frac{(\lambda+1)^2}{4}.$$

Substituyendo los valores de a y b en el cambio, tenemos que el cambio era

$$V(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)x-\frac{1}{4}(\lambda+1)^2}u(x,\tau).$$

Así que, con este cambio, convertimos la Ecuación 4.15 en

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.16}$$

con $-\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad \tau > 0$.

Además, las nuevas condiciones de contorno son:

$$u(x,0) = \text{máx}(e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x}, 0),$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,\tau) = 0.$$

La ecuación 4.16 es conocida como ecuación del calor, y la solución de esta ecuación es

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds. \tag{4.17}$$

La resolución de esta ecuación es bastante compleja, se requieren conocimientos sobre la transformación de Fourier que no hemos explicado en este trabajo. Sin embargo, el procedimiento de resolución es muy conocido y para no alargar el trabajo utilizamos el resultado directamente.

Una vez que tengamos la solución de la ecuación del calor, hacemos el cambio

$$w = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}},$$

y substituyendo la condición inicial en la solución, obtenemos

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(w\sqrt{2\tau}+x) e^{-\frac{(w\sqrt{2\tau})^2}{4\tau}} \sqrt{2\tau} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} max(e^{\frac{\lambda+1}{2}(w\sqrt{2\tau}+x)} - e^{\frac{\lambda-1}{2}(w\sqrt{2\tau}+x}, 0) e^{-\frac{w^2}{2}} dw \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda+1}{2}(w\sqrt{2\tau}+x)-\frac{w^2}{2}} dw}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda-1}{2}(w\sqrt{2\tau}+x)-\frac{w^2}{2}} dw}_{I_2}.
\end{aligned}$$

Observación 4.3. En el último paso hemos usado que

$$e^{\frac{\lambda+1}{2}s} - e^{\frac{\lambda-1}{2}s} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad s \geq 0$$

y entonces

$$w\sqrt{2\tau} + x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad w \geq -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}.$$

Y en caso contrario

$$s < 0 \quad \Rightarrow \quad u_0(s) = 0.$$

Ahora considerando I_1 y I_2 por separado, calculamos sus valores.

$$I_1 = \frac{e^{\frac{\lambda+1}{2}x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda+1}{2}w\sqrt{2\tau}-\frac{w^2}{2}} dw$$

$$= \frac{e^{\frac{\lambda+1}{2}x}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}w-\frac{w^2}{2}-\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2} dw$$

$$= \frac{e^{\frac{\lambda+1}{2}x}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w-\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau})^2} dw.$$

Haciendo el último cambio, sea

$$\rho = w - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau} \qquad\qquad d\rho = dw,$$

logramos llegar a [8]

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho}_{N(d_1)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2} N(d_1)^9$$

con

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}.$$

El cálculo para I_2 es idéntico al de I_1, excepto que $(k+1)$ es remplazado por $(k-1)$. Entonces I_2 es

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x+\frac{1}{4}\tau(\lambda-1)^2} N(d_2)$$

con

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau}.$$

[8] $w = \rho + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau} \geq -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}$, entonces $\rho \geq -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau}$.

Por lo tanto el cambio $u(x,\tau)$ era

$$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2}N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x+\frac{1}{4}\tau(\lambda-1)^2}N(d_2).$$

Deshaciendo todos los cambios

$$V(x,\tau) = e^{ax+b\tau}, \quad x = \log(\frac{S}{E}), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad C = EV(x,\tau),$$

obtenemos que el valor de una opción call Europea es

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{4.18}$$

con

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\log(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

Para una opción put Europea, se puede deducir su precio de la misma forma, pero en este caso el pago es

$$u(x,0) = \text{máx}(e^{(\frac{\lambda-1}{2})x} - e^{(\frac{\lambda+1}{2})x}, 0). \tag{4.19}$$

Pero la forma más sencilla de deducir su valoración es utilizando la relación de paridad call-put. Tenemos que

$$C - P = S - Ee^{-r(T-t)},$$

entonces substituyendo el precio de call, obtenemos que

$$\begin{aligned} P(S,t) &= SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) - S + Ee^{-r(T-t)} \\ &= S(N(d_1) - 1) - Ee^{-r(T-t)}(-N(d_2) + 1). \end{aligned}$$

Para la distribución Normal, tenemos que

$$N(d_1) - 1 = N(-d_1) \qquad y \qquad -N(d_2) + 1 = N(-d_2).$$

Entonces el precio de una opción put Europea es

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \tag{4.20}$$

4.4. Dividendos

Hasta ahora hemos supuesto que el activo subyacente no paga dividendos. Sin embargo, en la práctica, muchos activos son con pagos de dividendos y el precio del activo esta afectado por este pago. En consecuencia, el precio de la opción también se verá influido.

Ahora suponemos que el activo subyacente es con pagos de dividendos continuo y constante con una proporción D del activo. Es decir, pasado un tiempo dt, el propietario del activo recibe una cantidad $DSdt$ como pago de dividendos. A causa de esto, el valor del activo es cada vez menor con el paso del tiempo por los pagos de dividendos.

Recuperando la cartera inicial de la ecuación de Black-Scholes, pero teniendo en cuenta que ahora el activo subyacente es con pago de dividendos, la diferencial aparecerá un factor nuevo, causado por el efecto de este pago de dividendos.

Entonces la diferencial de la cartera para esta situación es

$$d\Pi = dV - \Delta dS - DS\Delta dt.$$

Substituyendo dV calculado anteriormente, tenemos que

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS - DS\Delta dt.$$

Vemos que para eliminar la variable aleatoria dX, la elección de la cobertura también tiene que ser

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

igual que en el caso del activo que no tiene pagos de dividendos.

Una vez que obtenemos una cartera sin riesgo, la igualamos al rendimiento del interés libre de riesgo. Reordenando los términos logramos obtener la ecuación de Black-Scholes para una opción Europea con pago de dividendos.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{4.21}$$

Si consideramos una opción call Europea con pagos de dividendos, entonces la condición de contorno cambia y ahora es

$$\lim_{S\to\infty} C(S,t) \sim Se^{-D(T-t)}.$$

En el límite $S \to \infty$, el valor de la opción es equivalente al activo pero descontando los efectos de los dividendos. Para resolver la ecuación diferencial parcial 4.21 se siguen los mismos pasos que para la ecuación de Black-Scholes básica, solo que el interés r es remplazado por $r-D$ y teniendo en cuenta la nueva condición de contorno.

Con la nueva condición de contorno obtenemos

$$C(S,t) = e^{-D(T-t)}C_1(S,t),$$

donde $C_1(S,t)$ satisface la ecuación de Black-Scholes básica remplazando r por $(r-D)$. Entonces el valor para la opción call Europea con pagos de dividendos continuo y constante es

$$C(S,t) = e^{-D(T-t)}SN(d_{1D}) - Ee^{-r(T-t)}N(d_{2D}), \tag{4.22}$$

con

$$d_{1D} = \frac{\log\frac{S}{E} + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad y \quad d_{2D} = d_{1D} - \sigma\sqrt{T-t}.$$

4.5. Divisas

Por la internacionalización, el comercio exterior y la facilidad de inversión en cualquier país, la importancia de las divisas es enorme, y saber cuantificar el valor de una opción sobre divisas es substancial para cubrir los riesgos ante movimientos de tipo de cambio.

Primero de todo, veamos que cuando invertimos en divisas además de los factores rendimiento y volatilidad de la divisa, existe otro factor influyente que es el interés libre de riesgo extranjero r_f. La explicación de este factor es similar a un activo con pago de dividendos. Cuando invertimos en divisas, es decir comprando una cantidad de moneda extrajera, podemos invertir esa cantidad de moneda en una inversión libre de riesgo obteniendo una rentabilidad r_f.

Entonces, conceptualmente, una opción sobre divisas esencialmente es equivalente al pago de dividendos continuo y constante, donde el dividendo D es remplazado por el pago del interés continuo y constate r_f.

Así que en la diferencial de la cartera inicial aparecerá el factor $-r_f\Delta F dt$ y la diferencial será:

$$d\Pi = dV(F,t) - \Delta dF - r_f\Delta F dt,$$

donde F es el tipo de cambio y Δ es la cantidad de moneda extranjera.

En consecuencia, la ecuación de Black-Scholes para una opción de divisas es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - r_f)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{4.23}$$

En este caso, el valor de la opción es

$$C(S,t) = e^{-r_f(T-t)}SN(d_{1f}) - Ee^{-r(T-t)}N(d_{2f}), \tag{4.24}$$

con

$$d_{1f} = \frac{\log\frac{S}{E} + (r - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad y \quad d_{2f} = d_{1D} - \sigma\sqrt{T-t}.$$

5. Opción con varios activos subyacentes

En el ámbito financiero, es muy común que un instrumento financiero dependa de varios activos. Por eso en este capítulo generalizamos la ecuación de Black-Scholes para una opción con múltiples activos.

Sea $V(S_1, \ldots, S_n, t)$ una opción Europea tal que para cada activo subyacente S_i se cumple

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dX, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Con los mismos nociones que explicamos en el apartado de Lema de Itô multidimesional, tenemos que

$$dX_i dX_j = \rho_{ij} dt \quad y \quad dX_i^2 = dt,$$

para $\forall i, j = 1, \ldots, n$.
Ahora construimos la cartera inicial con la compra de una opción y la venta de una cantidad Δ_i para cada activo subyacente S_i. Tenemos

$$\Pi = V(S_1, \ldots, S_n, t) - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i S_i.$$

Aplicando el Lema de Itô multidimensional y agrupando por dt y dS_i, tenemos que la diferencial de la cartera es

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial S_i} - \Delta_i \right) dS_i. \tag{5.1}$$

Evidentemente la elección de la cobertura es

$$\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i},$$

para cada activo subyacente y así podemos eliminar todas las variables aleatorias dX_i y obtener una cartera libre de riesgo. Posteriormente, igualando la diferencial de la cartera con el rendimiento del interés libre de riesgo, obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + r \sum_{i=1}^{n} S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0. \tag{5.2}$$

Esta es la ecuación de Black-Scholes en versión multidimensional.

La resolución de esta ecuación generalizada es bastante compleja. Por consiguiente, solo lo resolveremos para dos opciones en concretas, la opción Margrabe y la opción Quanto. Posteriormente, en el Capítulo 6, analizaremos el error que ocasiona la cobertura en tiempo discreto para estos dos opciones.

5.1. Opción de intercambio o opción Margrabe

Una opción Margrabe depende de dos activos subyacentes y consiste en que el propietario de la opción tiene el derecho a intercambiar un activo subyacente por el otro en la fecha de vencimiento.

Suponiendo que tenemos el activo S_2, cuando llegue la fecha de vencimiento existe dos situaciones. Primero si el rendimiento del activo S_1 es menor que S_2, no realizamos el intercambio, es decir no ejercer la opción. En cambio si el rendimiento de S_1 es mayor que el de S_2, entonces, lógicamente realizamos el intercambio para obtener mayor rentabilidad. Por lo tanto el pago de la opción Margrabe en $t = T$ es

$$C(S_1, S_2, T) = máx(S_1 - S_2, 0),$$

donde S_1 y S_2 satisfacen

$$\begin{aligned} dS_1 &= \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dX_1, \\ dS_2 &= \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dX_2. \end{aligned}$$

Con los mismos supuestos del apartado anterior sobre la covariación y variación cuádraticas, tenemos

$$dX_1 dX_2 = \rho dt, \quad (dX_1)^2 = dt \quad y \quad (dX_2)^2 = dt.$$

Con todo esto, ya podemos construir la cartera inicial consistiendo en la compra de una opción Margrabe, una venta del activo S_1 con una cantidad Δ_1 y otra venta del activo S_2 con una cantidad Δ_2. Entonces la cartera inicial es

$$\Pi = C(S_1, S_2, t) - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2.$$

Aplicando el Lema de Itô y la estrategia de cobertura del apartado anterior

$$\Delta_1 = \frac{\partial C}{\partial S_1} \qquad y \qquad \Delta_2 = \frac{\partial C}{\partial S_2},$$

conseguimos la diferencial de una cartela sin riesgo. Igualando al rendimiento de una cartera libre de riesgo, obtenemos la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} + \sigma_1 \sigma_2 \rho S_1 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} + r S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + r S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} - rC = 0.$$

Para resolver esta ecuación podemos hacer un cambio de variable y transformarla para que se asimile a la ecuación básica de Black-Scholes. Sea

$$C(S_1, S_2, t) = S_2 U(x, t),$$

con

$$x = \frac{S_1}{S_2}.$$

Expresamos las derivadas parciales para la nueva variable:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = S_2 \frac{\partial U}{\partial t}; \qquad \frac{\partial C}{\partial S_1} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S_2} = U - x\frac{\partial U}{\partial x}; \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} = \frac{1}{S_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} = xS_1\frac{\partial U}{\partial x} + x\frac{1}{S_2}\frac{\partial U}{\partial x} + x^2\frac{1}{S_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial C}{\partial S_1 \partial S_2} = -x\frac{1}{S_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Substituyendo y dividiendo por S_2, convertimos la ecuación diferencial parcial inicial en

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}x^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) = 0.$$

Para facilitar la notación, denotamos $\sigma_M = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$.

Esta nueva ecuación es muy similar a la ecuación básica de Black-Scholes, pero en este caso el interés es cero y la volatilidad es σ_M. Entonces, siguiendo los pasos de resolución de la ecuación básica, obtenemos que el precio de una opción call Magrabe es

$$C(S_1, S_2, t) = S_1 N(d_{1M}) - S_2 N(d_{2M}),$$

con

$$d_{1M} = \frac{\log(\frac{S_1}{S_2}) + \frac{1}{2}\sigma_M^2(T-t)}{\sigma_M^2\sqrt{T-t}} \quad y \quad d_{2M} = d_{1M} - \sigma_M\sqrt{T-t}.$$

5.2. Opción Quanto

Una opción Quanto es una opción en la cual su activo subyacente esta cotizado en una moneda extrajera y consecuentemente, su pago también es en moneda extrajera. Por lo tanto, esta opción depende del activo subyacente y del tipo de cambio.

Este tipo de opción, en la práctica la utilizamos para aislar riesgos asociados al tipo de cambio cuando invertimos en activos que cotizan en moneda extrajera. Existen diferentes tipo de opciones Quanto:

- Opción Quanto con el tipo de cambio variable: son opciones Quanto en las que el valor del subyacente y el precio de ejercicio están denominados en una divisa extranjera, pero el pago final de la opción en la fecha de vencimiento, se realiza en una moneda doméstica al tipo de cambio vigente en ese momento.

- Opción Quanto con tipo de cambio fijo: el tipo de cambio aplicable al vencimiento de la opción se fija desde su emisión.

Sea F el tipo de cambio, expresando el tipo de cambio de la moneda nacional con una unidad de moneda extrajera y S el activo subyacente en el que su precio esta cotizado en moneda extrajera. Asumimos que satisfacen

$$dF = \mu_F F dt + \sigma_F F dX_F \qquad y \qquad dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dX_S,$$

con

$$dX_F^2 = dt, \qquad dX_S^2 = dt \qquad dX_F dX_S = \rho dt.$$

Observación 5.1. Recordemos que

$$\begin{aligned}
dS^2 &= \mu_S^2 S^2 dt^2 + \sigma_S^2 S^2 dX_S^2 + 2\mu_S S \sigma_S dt dX_S = \sigma_S^2 S^2 dt^2 + O(dt^{\frac{3}{2}}) \\
dF^2 &= \mu_F^2 F^2 dt^2 + \sigma_F^2 F^2 dX_F^2 + 2\mu_F F \sigma_F dt dX_F = \sigma_F^2 F^2 dt^2 + O(dt^{\frac{3}{2}}) \\
dF dS &= \sigma_S \mu_F F dt^2 + \sigma_S \mu_S S dt dX_S + \sigma_F \mu_S F dX_F dt + \sigma_F \sigma_S S F dX_F dX_S \\
&= \rho \sigma_F \sigma_S S F dt + O(dt^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}$$

Construimos la cartera inicial como

$$\Pi = V(F, S, t) - \Delta_F F - \Delta_S F S. \tag{5.3}$$

Podemos ver que esta cartera es diferente a los casos anteriores. El primer término es el valor de la opción Quanto. El segundo es la venta de una cantidad Δ_F de la moneda extrajera por el tipo de cambio para tenerlo en moneda nacional. Tengamos en cuenta de que cuando hacemos la diferencial sobre F, aparecerá el término $-r_f \Delta_f F dt$. La explicación de este factor está en la Sección 4.5. Pero brevemente, este término indica el tipo de interés extrajero r_f que se recibe durante la vida de la opción.

Y el tercer término es la venta de una cantidad Δ_S del activo subyacente que se cotiza en moneda extrajera, por el tipo de cambio para tenerlo en moneda nacional. Así que utilizando el Lema de Itô y teniendo en cuenta el tipo de interés extrajero, obtenemos que la diferencial de la cartera es

$$\begin{aligned}
d\Pi = &\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial F} dF + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} dt + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 dt V}{\partial S^2} dt + \rho \sigma_F \sigma_S F S \frac{\partial^2 V}{\partial F \partial S} dt \\
&- \Delta_F dF - r_f \Delta_F F dt - \Delta_S S dF - \Delta_S F dS - \Delta_S dS dF.
\end{aligned}$$

Sacando factor comun de dt, dS y dF, obtenemos que

$$\begin{aligned}
d\Pi = &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma_F \sigma_S S F \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial F} - \rho \sigma_F \sigma_S \Delta_S F S - r_f \Delta_F F \right) dt \\
&+ \left(\frac{\partial V}{\partial F} - \Delta_F - \Delta_s S \right) dF + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_S F \right) dS.
\end{aligned}$$

Ahora para obtener una cartera libre de riesgo, imponemos que

$$\frac{\partial V}{\partial F} - \Delta_F - \Delta_S S = 0 \quad y \quad \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_S F = 0.$$

Resolviendo esto, logramos obtener las cobertura libre de riesgo

$$\Delta_S = \frac{\partial V}{\partial S}\frac{1}{F} \qquad y \qquad \Delta_F = \frac{\partial V}{\partial F} - \frac{\partial V}{\partial S}\frac{S}{F}. \tag{5.4}$$

Una vez eliminado los movimientos aleatorios de la cartera, lo igualamos al rendimiento del interés libre de riesgo nacional r_s.

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_F^2\sigma_S^2 SF\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial F} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \rho\sigma_F\sigma_S\Delta_S FS - r_f\Delta_F F\right)dt = r_S\Pi dt.$$

Substituyendo $\Pi = V - \Delta_F F - \Delta_S FS$ y la estrategia de cobertura, obtenemos que la ecuación para una opción Quanto es

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_F^2F^2\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}+\rho\sigma_F\sigma_S FS\frac{\partial^2 V}{\partial F\partial S}+\frac{1}{2}\sigma_S^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+F\frac{\partial V}{\partial F}(r_S-r_f)+S\frac{\partial V}{\partial S}(r_f-\rho\sigma_F\sigma_S)-r_SV = 0. \tag{5.5}$$

En principio la opción Quanto como previamente hemos definido depende del activo subyacente y de la divisa. Sin embargo, la dependencia de la divisa es un factor constante. Entonces la podemos sacar fuera de la función.Supongamos que tenemos una opción Quanto con tipo de cambio fijo, estableciendo el tipo de cambio el valor inicial en el momento de la compra. Entonces el valor de la opción Quanto reuslta ser

$$V(F,S,t) = F_0V(S,t),$$

donde F_0 es el tipo de cambio en $t = 0$.

Vemos que el valor de la opción Quanto no esta directamente influido por la divisa, la afectación de la divisa solo está en la estrategia de cobertura y en la composición de la cartera. Así que podemos escribir

$$V(F,S,t) = F_0V(S,t) = W(S,t).$$

Reescribiendo la Ecuación 5.5 con este cambio obtenemos una ecuación más sencilla

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2S^2\frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + S\frac{\partial W}{\partial S}(r_f - \rho\sigma_F\sigma_S) - r_SW = 0. \tag{5.6}$$

Esta ecuación es muy similar a la ecuación de Black-Scholes con dividendos. Pero en este caso es como si tuviéramos un dividendo de $r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F$, una rentabilidad r_s y una volatilidad σ_S.

Podemos decir que la consecuencia de la relación entre la divisa y el activo sobre el precio de la opción solo es un ajuste en el pago. Ahora el pago depende de la volatilidad, del tipo de cambio y de la correlación entre la divisa y el activo subyacente.

Considerando una opción call Quanto, entonces el pago a fecha de vencimiento es

$$C(F, S, T) = F_0 C(S, T) = F_0(\text{máx}(S - E, 0)).$$

Resolviendo la ecuación (5.6) para una opción call Quanto, obtenemos que es igual a

$$C = F_0 \left(e^{-(r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)} S N(d_{1Q}) - E e^{-r_S(T-t)} N(d_{2Q}) \right), \tag{5.7}$$

con

$$d_{1Q} = \frac{\log \frac{S}{E} + (r_F - \rho\sigma_S\sigma_F + \frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}} \quad y \quad d_{2Q} = d_{1Q} - \sigma_S\sqrt{T-t}.$$

Observación 5.2. La Ecuación 5.5 es válida para cualquier tipo de producto financiero en el cual el activo subyacente esta cotizado en una moneda y su pago en otra. En el caso particular de Quanto, como que la influencia del factor divisa es constante, la podemos simplificar a la Ecuación 5.6 y resolverla más fácilmente.

6. Error de cobertura delta en tiempo discreto

En el Capítulo 3, habíamos considerado varios supuestos para construir el modelo de Black-Scholes. Pero no todos eran realistas. Uno de ellos, era suponer el cálculo estocático en tiempo continuo y esto implicaba que la cobertura delta también era en tiempo continuo. Sin embargo, en la práctica este supuesto es imposible de cumplir, solo podemos hacer la cobertura en tiempo discreto, es decir, no podemos cubrir la cartera de una forma infinitesimal.

Consecuentemente, en la práctica, cuando hacemos la cobertura para obtener una cartela libre de riesgo se genera un error, es decir, en la práctica no tenemos una cartera libre de riesgo tal como sucede en la teoría, sino que tenemos pérdidas o beneficios. Este fenómeno fue estudiado por Phelim P. Boyle y David Emanuel en 1980 para una opción estándar Europea. Sin embargo, en el ámbito financiero existe muchas opciones que dependen de más de un activo subyacente, como la opción Margrabe cuyo valor depende de dos activos subyacentes o la opción Quanto, que depende del activo subyacentes y de una divisa.

En este último capítulo del trabajo estudiamos el error que generan las opciones Margrabe y Quanto cuando se realiza la cobertura en la práctica, es decir, en tiempo discreto. El motivo por el que estudiamos el error que genera la opción Quanto porque es muy útil en la práctica. Es muy frecuente en el mundo financiero, que una persona invierta en varias bolsas como la bolsa de Nueva York, la de Tokio, la de Londres, la de Hong Kong, etc. Todas cotizan en monedas diferentes, por lo tanto es imprescindible tener cuenta de las divisas.

Por otro lado, para la opción de Margrabe también es interesante porque por su característica de pago, podemos cálcular el valor de la opción con un cambio de variables en el modelo de Black-Scholes. Si hubiéramos elegido una opción genérica multidimensional, para cálcular el valor de la opción tendríamos que estudiar otros nociones más complejas, como integrales múltiples de procesos estocáticos o la función de Green.

Con los estudios de los capítulos previos ya podemos calcular estos errores. Primero analizaremos el error para una opción estándar Europea con pago de dividendos, después para la opción Margrabe y finalmente para la opción Quanto.

Primero analizamos el error de la opción con pago de dividendos para ver el proceso de cálculo del error de cobertura en el caso de un activo subyacente. Otro motivo es porque el proceso de resolución de la opción Quanto es similar al de dividendo. Posteriormente, analizaremos el error para una opción Margrabe y finalmente para la opción Quanto.

6.1. Error de cobertura delta para una opción con pago de dividendos

Sea $C(S,t)$ el valor de una opción call Europea con pago de dividendos tal que no existen costes de transacción y la cobertura es la delta.[10] En la práctica se suele hacer la cobertura por periodo regular de tiempos, por lo tanto asumimos que hacemos la cobertura en intervalos constantes de tiempo, denotando este intervalo como δt.[11] Además suponemos que cada pago de dividendos también tiene lugar en intervalos constante δt.

Recuperando el valor de la opción con pago de dividendo que calculamos en la Sección 4.4

$$C(S,t) = e^{-D(T-t)}SN(d_{1D}) - Ee^{-r(T-t)}N(d_{2D}), \tag{6.1}$$

donde

$$d_{1D} = \frac{\log\frac{S}{E} + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_{2D} = d_{1D} - \sigma\sqrt{T-t},$$

construimos la cartera inicial en el momento t con la compra de una opción y la venta de una cantidad Δ_S del activo subyacente.

$$\Pi = C(S,t) - \Delta_S S. \tag{6.2}$$

Proposición 6.1. *La derivada parcial de una opción call con pago de dividendos D respecto al activo subyacente S, es decir la delta, es igual a*

$$\Delta_s = \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-D(T-t)}N(d_{1D}).$$[12]

Demostración. Tomando la expresión 6.1, calculamos su derivada respecto S,

$$\frac{\partial C}{\partial S} = e^{-D(T-t)}N(d_{1D}) + Se^{-D(T-t)}\frac{\partial N(d_{1D})}{\partial d_{1D}}\frac{\partial d_{1D}}{\partial S} - Ee^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_{2D})}{\partial d_{2D}}\frac{\partial d_{2D}}{\partial S}.$$

Primero vemos que la derivada de $N(x)$ respecto x es su función de densidad, es decir

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} = Z(x),$$

denotando $Z(x)$ como su función de densidad.

Entonces substituyendo $\frac{\partial N(d_{1D})}{\partial d_{1D}} = Z(d_{1D})$ y $d_{2D} = d_{1D} - \sigma\sqrt{T-t}$, tenemos

$$\frac{\partial C}{\partial S} = e^{-D(T-t)}N(d_{1D}) + Se^{-D(T-t)}Z(d_{1D})\frac{d_{1D}}{\partial S} - Ee^{-r(T-t)}Z(d_{2D})\frac{\partial d_{1D}}{\partial S}.$$

[10] $\Delta_S = \frac{\partial C}{\partial S}$

[11] El intervalo δt puede ser una hora, un día, un mes, etc.

[12] Recordemos que $N(x)$ es la función de distribución normal de esperanza cero y varianza uno.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$

Ahora vemos que $Se^{-D(T-t)}Z(d_{1D})\frac{d_{1D}}{\partial S} = Ee^{-r(T-t)}Z(d_{2D})\frac{\partial d_{1D}}{\partial S}$. Substituyendo la función de densidad, tenemos

$$\begin{aligned}
Ee^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_{2D}^2} &= Se^{-D(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_{1D}^2} \\
Ee^{-r(T-t)-\frac{1}{2}d_{1D}^2+d_{1D}\sigma\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{T-t}} &= Se^{-D(T-t)}e^{-\frac{d_{1D}^2}{2}} \\
Ee^{log\left(\frac{S}{E}\right)-D(T-t)-\frac{d_{1D}^2}{2}} &= Se^{-D(T-t)}e^{-\frac{d_{1D}^2}{2}} \\
Se^{-D(T-t)}e^{-\frac{d_{1D}^2}{2}} &= Se^{-D(T-t)}e^{-\frac{d_{1D}^2}{2}}
\end{aligned}$$

Entonces obtenemos el resultado deseado

$$\frac{\partial C}{\partial S} = e^{-D(T-t)}N(d_{1D}).$$

□

Así que la inversión inicial era $C(S,t) - e^{-D(T-t)}N(d_{1D})S$. Pasado el periodo δt, calculamos el valor de la cartera en el tiempo $t + \delta t$, que es

$$C + \delta C - \Delta_S(S + \delta S) - D\Delta_S S\delta t.^{13} \tag{6.3}$$

Podemos ver que el rendimiento en $t + \delta t$ es $\delta C + \Delta_S\delta S - D\Delta_S S\delta t$. Si ahora suponemos que la inversión inicial era prestada por el banco con el interés libre de riesgo r, entonces teniendo en cuenta el préstamo, el rendimiento se convierte en

$$R = \delta C - \Delta_S\delta S - D\Delta_S S\delta t - r(C - \Delta_S S)\delta t.$$

Usando el Lema de Itô calculamos la δC:

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial t}\delta t + \frac{\partial C}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\delta S^2 + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Como que ahora estamos en tiempo discreto la variación del activo será

$$\delta S = \mu S\delta t + \sigma S\phi\delta t^{\frac{1}{2}},$$

su cuadrado será

$$\delta S^2 = \sigma^2 S^2\phi^2\delta t + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Substituyendo y simplificando, obtenemos que el rendimiento es

$$R = \frac{\partial C}{\partial t}\delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\phi^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\delta t - D\frac{\partial C}{\partial S}S\delta t + rEe^{-r(T-t)}N(d_{D2})\delta t + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right)$$

[13] Los términos δS y δC son la variación del precio del activo y de la opción durante el periodo de tiempo δt.

Calculamos las derivadas parciales que nos faltan.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = e^{-D(T-t)} \frac{\partial N(d_{1D})}{\partial d_{1D}} \frac{\partial d_{1D}}{\partial S} = e^{-D(T-t)} Z(d_{1D}) \frac{1}{\sigma S \sqrt{T-t}},$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\sigma S e^{-D(t-t)} Z(d_{1D})}{2\sqrt{T-t}} + DSN(d_{1D}) e^{-D(T-t)} - rEe^{-r(T-t)} N(d_{2D}).$$

Ponemos las derivadas parciales en la ecuación de rendimiento,

$$R = \left(-\frac{\sigma S e^{-D(T-t)} Z(d_{1D})}{2\sqrt{T-t}} + DSN(d_{1D}) e^{-D(T-t)} - rEe^{-r(T-t)} N(d_{D2}) \right) \delta t$$
$$+ \frac{1}{2} e^{D(T-t)} Z(d_{1D}) \frac{\sigma^2 S^2 \phi^2}{\sigma S \sqrt{T-t}} - D \frac{\partial C}{\partial S} S \delta t - + rEe^{-r(T-t)} N(d_{2D}) \delta t + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Simplificando y despreciando los términos superiores de δt, el rendimiento es

$$R = \frac{\sigma S e^{-D(T-t)} Z(d_{1D})}{2\sqrt{T-t}} (\phi^2 - 1) \delta t. \tag{6.4}$$

Si la cartera es libre de riesgo, es decir, si la cobertura es a tiempo continuo, el rendimiento debería ser cero. Así que la ecuación 6.4 es el error que se ha generado cuando hacemos la cobertura a tiempo discreto.

Se puede ver que en la ecuación del rendimiento las variables $\sigma, S, D, T, t, Z(d_{1D})$ son todas deterministas. Sin embargo, ϕ^2 es una variable aleatoria que sigue una distribución chi-cuadrado[14]con un grado de libertad. Así que el error de cobertura también sigue una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad.
Analizamos la esperanza y la varianza del error, sabemos que

$$E(\phi^2) = 1 \qquad y \qquad Var(\phi^2) = 2.$$

Así que la esperanza de $\phi^2 - 1$ es cero y su varianza es uno. Entonces

$$E(R) = 0 \qquad y \qquad Var(R) = \Big(\frac{2\sigma S e^{-D(T-t)} Z(d_{1D}) \delta t}{\sqrt{T-t}}\Big)^2.$$

Y observamos que el término R lo podemos expresar como un múltiplo de Γ, concretamente como

$$R = \frac{\sigma S e^{-D(T-t)} Z(d_{1D})}{2\sqrt{T-t}} (\phi^2 - 1) \delta t = \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\phi^2 - 1) \delta t = \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \Gamma (\phi^2 - 1) \delta t.$$

Observación 6.2. La distribución chi-cuadrado es asimétrica respecto su esperanza. Como el valor medio es uno, por lo tanto existe un 32 % de probabilidad de que el valor este encima de uno y un 68 % de que el valor este por debajo. Como que la variable que tenemos es $\phi^2 - 1$, entonces para el error de cobertura existe un 68 % de los casos que perdemos dinero y un 32 % de los casos obtener beneficios.
De los 68 % de los casos corresponde a pequeños movimientos del precio del activo y los 32 % restante corresponde a movimientos más bruscos. Es decir que la cantidad de los beneficios en promedio es más grande que las pérdidas. Y que al final el valor neto de la cartera es cero.

[14]Sea $\phi \sim N(0,1)$, entonces ϕ^2 tiene una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad.

6.2. Error de cobertura delta para una opción Margrabe

Sea $C(S_1, S_2.t)$ una opción call de Margrabe con las mismas características de la Sección 5.1, y suponemos que el intervalo de cobertura es δt. Recordemos que el valor de la opción Margrabe es

$$C(S_1, S_2, t) = S_1 N(d_{1M}) - S_2 N(d_{2M}), \tag{6.5}$$

con

$$d_{1M} = \frac{\log(\frac{S_1}{S_2}) + \frac{1}{2}\sigma_M^2(T-t)}{\sigma_M\sqrt{T-t}} \quad y \quad d_{2M} = d_{1M} - \sigma_M\sqrt{T-t},$$

donde

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Construimos nuestra cartera inicial para una opción Margrabe que es

$$\Pi = C(S_1, S_2, t) - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2.$$

Proposición 6.3. *Sea $C(S_1, S_2, t)$ una opción call de Margrabe, entonces las derivada parciales de C respecto a S_1 y S_2 son*

$$\Delta_1 = \frac{\partial C}{\partial S_1} = N(d_{1M}) \quad y \quad \Delta_2 = \frac{\partial C}{\partial S_2} = -N(d_{2M}).$$

Demostración. Calculamos las derivadas parciales con la ecuación (6.5):

$$\Delta_1 = \frac{\partial C}{\partial S_1} = N(d_{1M}) + S_1 Z(d_{1M})\frac{\partial d_{1M}}{\partial S_1} - S_2 Z(d_{2M})\frac{\partial d_{2M}}{\partial S_1}.$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial C}{\partial S_2} = S_1 Z(d_{1M})\frac{\partial d_{1M}}{\partial S_2} - N(d_{2M}) - S_2 Z(d_{2M})\frac{\partial d_{2M}}{\partial S_2}.$$

Como que $d_{2M} = d_{1M} - \sigma_M\sqrt{T-t}$, entonces cuando derivamos d_{2M} respecto S_1 o S_2, el resultado es lo mismo que derivar d_{1M}.

$$\frac{\partial d_{2M}}{\partial S_2} = \frac{\partial d_{1M}}{\partial S_2} \quad y \quad \frac{\partial d_{1M}}{\partial S_1} = \frac{\partial d_{2M}}{\partial S_1}.$$

Y ahora vemos que $S_1 Z(d_{1M}) = S_2 Z(d_{2M})$:

$$\begin{aligned}
S_2 Z(d_{2M}) &= S_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{2M}^2}{2}} = S_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{1M}^2 + \sigma_M^2(T-t) - 2d_{1M}\sigma_M\sqrt{T-t}}{2}} \\
&= S_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{1M}^2}{2} - \log\left(\frac{S_1}{S_2}\right)} = S_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{1M}2}{2}} \\
&= S_1 Z(d_{1M}).
\end{aligned}$$

Así que sacando factor común de $\frac{\partial d_{1M}}{\partial S_1}$ de la primera ecuación y $\frac{\partial d_{1M}}{\partial S_2}$ de la segunda ecuación y utilizando que $S_1 Z(d_{1M}) = S_2 Z(d_{2M})$, obtenemos que

$$\frac{\partial C}{\partial S_1} = N(d_{1M}) \quad y \quad \frac{\partial C}{\partial S_2} = -N(d_{2M}).$$

□

En tiempo $t + \delta t$, el valor de la cartera es

$$\delta\Pi = C + \delta C - N(d_{1M})(S_1 + \delta S_1) + N(d_{2M})(S_2 + \delta S_2),$$

donde

$$\delta S_1 = \mu_1 S_1 \delta t + \sigma_1 S_1 \phi \delta t^{\frac{1}{2}} \quad y \quad \delta S_2 = \mu_2 S_2 \delta t + \sigma_2 S_2 \psi \delta t^{\frac{1}{2}}.$$

Una vez que tenemos las coberturas, vemos que valor tiene la cartera inicial,

$$\Pi = C - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2 = S_1 N(d_{1M}) - S_2 N(d_{2M}) - S_1 N(d_{1M}) + S_2 N(d_{2M}) = 0.$$

Como que la inversión inicial es cero, no tenemos que solicitar un préstamo al banco. Entonces la ecuación de rendimiento es

$$R = \delta C - N(d_{1M})\delta S_1 + N(d_{2M})\delta S_2.$$

Usando el Lema de Itô, sabemos que

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial t}\delta t + \frac{\partial C}{\partial S_1}\delta S_1 + \frac{\partial C}{\partial S_2}\delta S_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2}\delta S_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_2}\delta S_2^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2}\delta S_1 \delta S_2 + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Calculamos las derivadas parciales que nos faltan. [15]

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= S_1 Z(d_{1M})\frac{\partial d_{1M}}{\partial t} - S_2 Z(d_{2M})\frac{\partial d_{2M}}{\partial t} \\ &= S_1 Z(d_{1M})\left(\frac{\partial d_{1M}}{\partial t} - \frac{\partial d_{1M}}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma_M\sqrt{T-t})}{\partial t}\right) = \frac{-\sigma_M S_1 Z(d_{1M})}{2\sqrt{T-t}}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} = \frac{Z(d_{1M})}{S_1\sigma_M\sqrt{T-t}}; \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} = \frac{Z(d_{2M})}{S_2\sigma_M\sqrt{T-t}}; \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial S_1\partial S_2} = -\frac{Z(d_{1M})}{S_2\sigma_M\sqrt{T-t}},$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\delta S_1 \delta S_2 &= \mu_1 S_1 \sigma_2 S_2 \delta t^2 + \mu_1 S_1 \sigma_2 S_2 \phi \delta t^{\frac{3}{2}} + \sigma_1 S_1 \mu_2 S_2 \psi \delta t^{\frac{3}{2}} + \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \phi\psi\delta t \\ &= \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \phi\psi\delta t + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right),\end{aligned}$$

tenemos

$$(\delta S_1)^2 = \sigma_1^2 S_1^2 \phi^2 \delta t, \qquad (\delta S_2)^2 = \sigma_2^2 S_2^2 \psi^2 \delta t \quad y \quad \delta S_1 \delta S_2 = \sigma_1 S_1 \sigma_2 S_2 \phi\psi\delta t.$$

[15] Substituimos $d_{2M} = d_{1M} - \sigma_M\sqrt{T-t}$ y usamos que $S_1 Z(d_{1M}) = S_2 Z(d_{2M})$.

Substituyendo todo, el rendimiento se convierte en

$$R = -\frac{S_1\sigma_M Z(d_{1M})}{2\sqrt{T-t}}\delta t + N(d_{1M})\delta S_1 - N(d_{2M})\delta S_2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2 S_1^2 Z(d_{1M})\phi^2}{S_1\sigma_M\sqrt{T-t}}\delta t +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\sigma_2^2 S_2^2 Z(d_{2M})\psi^2}{S_2\sigma_M\sqrt{T-t}}\delta t - \frac{\sigma_1 S_1\sigma_2 S_2 Z(d_{1M})\phi\psi}{S_2\sigma_M\sqrt{T-t}}\delta t - N(d_{1M})\delta S_1 + N(d_{2M})\delta S_2 =$$

$$= \left(-\frac{S_1\sigma_M Z(d_{1M})}{2\sqrt{T-t}}\delta t + \frac{S_1 Z(d_{1M})}{2\sigma_M\sqrt{T-t}}(\sigma_1^2\phi^2 + \sigma_2^2\psi^2 - 2\sigma_1\sigma_2\phi\psi)\right)\delta t$$

$$= \frac{S_1 Z(d_{1M})}{2\sigma_M\sqrt{T-t}}\left((\sigma_1\phi - \sigma_2\psi)^2 - \sigma_M^2\right)\delta t.$$

La única variable aleatoria de la ecuación de rendimiento es $(\sigma_1\phi - \sigma_2\psi)^2$, el resto todo son variables deterministas. Por lo tanto solo tenemos que analizar este término para conocer el comportamiento aleatorio del error.

Primero vemos que $\sigma_1\phi - \sigma_2\psi$ sigue una distribución normal. No es difícil de observar que ϕ y ψ siguen una distribución normal multivariante, es decir,

$$(\phi, \psi) \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Usando la siguiente propiedad de la distribución normal multivariante podemos deducir la distribución que sigue el término $(\sigma_1\phi - \sigma_2\psi)^2$.

Propiedad 6.4. *Si (X, Y) sigue una distribución normal multivariante, entonces la suma $X+Y$ también sigue una distribución normal.*

Entonces sabemos que $\sigma_1\phi - \sigma_2\psi$ sigue una distribución normal. Calculando su esperanza y varianza:

$$\begin{aligned} E(\sigma_1\phi - \sigma_2\psi) &= \sigma_1 E(\phi) - \sigma_2 E(\psi) = 0. \\ Var(\sigma_1\phi - \sigma_2\psi) &= Var(\sigma_1\phi) + Var(\sigma_2\psi) - 2Cov(\sigma_1\phi, \sigma_2\psi) \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = \sigma_M^2. \end{aligned}$$

Así que $\sigma_1\phi - \sigma_2\psi$ sigue una distribución normal de esperanza cero y varianza σ_M^2.

$$\sigma_1\phi - \sigma_2\psi \sim N(0, \sigma_M^2) \sim \sigma_M N(0,1)^{16}$$

Entonces el término $(\sigma_1\phi - \sigma_2\psi)^2$ sigue una distrinución chi-cuadrado con un grado de libertad multiplicado por σ_M^2. Reescribiendo el rendimiento, tenemos que

$$R = \frac{S_1\sigma_M Z(d_{1M})}{2\sqrt{T-t}}\left(\chi^2 - 1\right)\delta t.^{17}$$

[16] Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $aX \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

[17] Denotamos χ^2 como una variable que sigue una distribución chi-cuadrada con un grado de libertad.

A partir de las propiedades de la distribución chi-cuadrado, tenemos que la esperanza del rendimiento y su varianza son

$$E(R) = 0 \qquad y \qquad Var(R) = 2\Big(\frac{S_1 \sigma_M Z(d_{1M})\delta t}{2\sqrt{T-t}}\Big)^2.$$

Observamos que el R se puede expresar en función de Gamma o Theta:

$$R = \frac{S_1 \sigma_M Z(d_{1M})}{2\sqrt{T-t}} \left(X - 1\right) \delta t = \frac{1}{2} S_1^2 \sigma_1^2 \Gamma_1 (\chi^2 - 1)\delta t = -\Theta(\chi^2 - 1)\delta t.$$

6.3. Error de cobertura para una opción Quanto

Sea $C(F, S, t)$ el valor de una opción call Quanto con las mismas características que describimos en la Sección 5.2, y suponemos que el intervalo de cobertura es δt. Recordemos que el valor de la opción Quanto es

$$C = F_0 \left(e^{-(r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)} S N(d_{1Q}) - E e^{-r_S(T-t)} N(d_{2Q}) \right),$$

con

$$d_{1Q} = \frac{\log \frac{S}{E} + (r_F - \rho\sigma_S\sigma_F + \frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}}, \qquad d_{2Q} = d_{1Q} - \sigma_S\sqrt{T-t}.$$

La cartera inicial para la opción Quanto es

$$\Pi = C(F, S, t) - \Delta_F F - \Delta_S F S, \tag{6.6}$$

y la estrategia de cobertura era

$$\Delta_S = \frac{\partial C}{\partial S}\frac{1}{F} \qquad y \qquad \Delta_F = -\frac{\partial C}{\partial S}\frac{S}{F}.$$

En el instante $t + \delta t$, el valor de la cartera es

$$C + \delta C - \Delta_F (F + \delta F) - \Delta_F r_F F \delta t - \Delta_S (SF + F\delta S + S\delta F + \delta S \delta F).$$

Tengamos en cuenta de que para el precio de la opción habíamos supuesto que solo dependía de S y de t, entonces la variación de C usando el Lema de Itô es

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial t}\delta t + \frac{\partial C}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\delta S^2 + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Y las derivadas parciales son fáciles de calcular, ya que son las mismas que en el caso de una opción con pago de dividendos, solo cambiando la D por $r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F$.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial S} &= F_0 (e^{-(r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)} N(d_{1D})) \\
\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= F_0 \left(e^{-(r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)} \frac{Z(d_{1Q})}{\sigma_S S\sqrt{T-t}} \right) \\
\frac{\partial C}{\partial t} &= F_0 \Big(- \frac{\sigma_S S e^{-(r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)} Z(d_{1Q})}{2\sqrt{T-t}} + e^{-(r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)} S (r_S - r_f + \rho\sigma_S\sigma_F) N(d_{1Q}) \\
&\quad - r_S E e^{-r_s(T-t)} N(d_{2Q}) \Big).
\end{aligned}$$

Substituyendo las estrategias de coberturas a la ecuación de la cartera inicial, tenemos

$$\Pi = C+F_0\left(e^{-(r_S-r_f+\rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)}N(d_{1D})\frac{S}{F}F\right)-F_0\left(e^{-(r_S-r_f+\rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)}N(d_{1D})\frac{1}{F}FS\right)=C.$$

También recordemos que

$$\begin{aligned}\delta_S^2 &= \sigma_S^2 S^2\phi^2\delta t + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right)\\ \delta_F^2 &= \sigma_F^2 F^2\psi^2\delta t + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right)\\ \delta_S\delta_F &= \sigma_F\sigma_S SF\phi\psi\delta t + O\left(\delta t^{\frac{3}{2}}\right).\end{aligned}$$

Entonces la ecuación del rendimiento es

$$R = \delta C - \Delta_F\delta F - \Delta_F r_F F\delta t - \Delta_S(F\delta S + S\delta F + \delta S\delta F) - r_s C\delta t$$

Para simplificar la notación, ponemos

$$\lambda = e^{-(r_S-r_f+\rho\sigma_S\sigma_F)(T-t)}.$$

Ahora substituyendo todos los valores, calculamos el rendimiento

$$\begin{aligned}R = F_0\Big(\Big(&-\frac{\lambda\sigma_S SZ(d_{1Q})}{2\sqrt{T-t}} + (r_S - r_F + \rho\sigma_S\sigma_F)\lambda SN(d_{1Q}) - r_S Ee^{-r_S(T-t)}N(d_{2Q})\Big)\delta t+\\ &+\lambda N(d_{1Q})\delta S + \frac{1}{2}\frac{\lambda Z(d_{1Q})}{\sigma_S S\sqrt{T-t}}\sigma_S^2 S^2\phi^2\delta t + \lambda N(d_{1Q})\frac{S}{F}\delta F + \lambda N(d_{1Q})\frac{S}{F}r_F F\delta t-\\ &-\lambda N(d_{1Q})\frac{1}{F}\Big(F\delta S + S\delta F + \sigma_F\sigma_S SF\phi\psi\delta t\Big) - r_S(S\lambda N(d_{1Q}) - Ee^{-r_F(T-t)}N(d_{2Q}))\delta t\Big).\end{aligned}$$

Sacando factor común y simplificando obtenemos que la ecuación de rendimiento es

$$R = F_0\Big(\frac{\sigma_S\lambda SZ(d_{1Q})}{2\sqrt{T-t}}(\phi^2-1) + \sigma_S\sigma_F\lambda SN(d_{1Q})(\rho-\phi\psi)\Big)\delta t.$$

Analizando la esperanza del rendimiento, obtenemos

$$E(\phi^2-1)=0 \qquad y \qquad E(\rho-\phi\psi)=0,$$

entonces la esperanza del rendimiento es cero.

Para calcular la varianza del rendimiento, primero escribimos la siguiente proposición.

Proposición 6.5. *Sea (X,Y) un vector normal multivariante, entonces el producto de XY es una combinación lineal de dos variables aleatorias chi-cuadrado con un grado de libertad.*

Demostración. Observamos que el término XY se puede escribir como

$$XY = \frac{1}{4}(X+Y)^2 - \frac{1}{4}(X-Y)^2.$$

Ahora por la propiedad 6.4, tenemos que $X+Y$ y $X-Y$ siguen una distribución normal cada una. Entonces $(X+Y)^2$ y $(X-Y)^2$ siguen una distribución chi-cuadrada con un grado de libertad cada una. $\square$

Segundo, calculamos

1. $$\begin{aligned} Var(\rho - \phi\psi) = Var(\phi\psi) &= Var\Big(\frac{1}{4}(\phi+\psi)^2 - \frac{1}{4}(\phi-\psi)^2\Big) \\ &= \frac{1}{16}\Big(Var(\phi+\psi)^2 + Var(\phi-\psi)^2 - 2Cov\Big((\phi+\psi)^2, (\phi-\psi)^2\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{16}\Big(8(1+\rho)^2 - 8(1-\rho)^2\Big) = \frac{1}{2}(2\rho^2) = \rho^2. \end{aligned}$$

Notemos que la covarianza de $(\phi+\psi)^2$ y $(\phi-\psi)^2$ es cero[18], y la varianza de $(\phi+\psi)^2$ es $8(1+\rho^2)$.[19]

2. $$Cov(\phi^2 - 1, \rho - \phi\psi) = Cov(\phi^2, \phi\psi) = E(\phi^3\psi) - E(\phi^2)E(\phi\psi) = 3\rho - \rho = 2\rho.$$

Hemos usado el cálculo del momento de la distribución normal multivariante, en el que $E(X^3Y) = 3\sigma_{11}\sigma_{12}$.

Finalmente, ya podemos calcular el rendimiento de la varianza como

$$Var(R) = 2\Big(\frac{F_0\sigma_S\lambda SZ(d_{1Q})\delta t}{2\sqrt{T-t}}\Big)^2 + \Big(F_0\sigma_S\sigma_F\lambda N(d_{1Q})\delta t\Big)^2 2\rho + \frac{F_0^2\sigma_S^2\lambda^2S^2\sigma_F Z(d_{1Q})N(d_{1Q})\delta t}{\sqrt{T-t}}\rho^2.$$

Observación 6.6. Teniendo en cuenta la Proposición 6.5, podemos decir que los componentes aleatorios del rendimiento son la suma de tres variables aleatorias que siguen una distribución chi-cuadrada con un grado de libertad.

[18]Usando la propiedad de la covarianza, tenemos que

$$Cov\Big((\phi+\psi)^2, (\phi-\psi)^2\Big) = E\Big((\phi+\psi)^2(\phi-\psi)^2\Big) - E(\phi+\psi)^2E(\phi-\psi)^2 = 4(1-\rho^2) - 4(1-\rho^2) = 0.$$

[19]Sabemos que $Var(\phi+\psi) = Var(\phi) + Var(\psi) + 2Cov(\phi,\psi) = 2(1+\rho)$ y $(\phi+\psi)$ sigue una distribución normal, entonces tenemos que $Var(\phi+\psi)^2 = 8(1+\rho)^2$.

6.4. Simulación

Para comprobar que los errores que hemos calculado en las secciones anteriores encajan en la práctica, vamos a realizar una simulación de cobertura en tiempo discreto. Veremos que los rendimientos que se generan en la práctica de la opción con pago de dividendos, la Margrabe y la Quanto se asimilan al resultado de la ecuación del rendimiento calculado en cada sección.

6.4.1. Opción con pagos de dividendos

Primero de todo, consideramos que tenemos una opción call y definimos las variables que necesitamos para empezar con la simulación, con sus valores:

S	El precio del activo subyacente en el instante cero	100
E	El precio de ejercicio	100
r	El interés libre de riesgo	0.01
T	La fecha de vencimiento	1
δt	El intervalo de tiempo en hacer la cobertura	$1/n$
D	El dividendo a pagar durante δt	0.015
μ	La rentabilidad del activo subyacente	0.05
σ	La volatilidad del activo subyacente	0.3

En la simulación consideramos que la fecha de vencimiento T siempre es uno. Es decir, trasladamos cualquier intervalo de tiempo al intervalo $[0, 1]$ y después calculamos δt. Por ejemplo, sea una opción a 6 meses[20] y queremos hacer la cobertura cada día. Entonces tenemos que hacer 180 coberturas durante la vida de la opción y calculando el intervalo de cobertura es $\delta t = \frac{1}{180}$.
O otra forma de hacer la cobertura sería que durante la vida de la opción queremos hacer n coberturas, entonces $\delta t = \frac{1}{n}$.

En segundo lugar, definimos una función con el programa R para calcular los rendimientos teóricos y prácticos de la cobertura en tiempo discreto. Sea la función

$$\text{Dividendo}(S, E, r, D, \mu, \sigma, \delta t),$$

con los parámetros necesarios para comenzar la simulación. En el apéndice esta escrito el código de esta función con los detalles, aquí explicaremos a grandes rasgos la idea del procedimiento y el análisis del resultado.

En el momento cero calculamos el precio de la opción call $C(S, 0)$, d_{1D}, d_{2D} y la cobertura delta $N(d_{1D})$. Así obtenemos el valor de la inversión inicial $C(S, 0) - SN(d_{1D})$, que es la cantidad inicial que pedimos al banco con el interés r.

Observación 6.7. Recordemos que el precio del activo sigue una distribución log-normal por hipótesis, es decir $f(S) = logS$ y su diferencial era

$$df(S) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dX.$$

[20] Consideramos que todos los meses tienen 30 días hábiles

Así resolviendo esta ecuación diferencial estocástica en el intervalo $[0, t]$, tenemos

$$F(S(t)) - F(S(0)) = log\Big(\frac{S(t)}{S(0)}\Big) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(dX(t) - dX(0))$$

$$S(t) = S(0)e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma(dX(t)-dX(0))}.$$

En términos discretos es

$$S(t) = S(0)e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma t^{\frac{1}{2}}\phi}. \tag{6.7}$$

Definimos cada intervalo de cobertura como $\delta t = [t_{i-1}, t_i]$ para todo $i = 0, \ldots, n$, con $t_0 = 0$ y $t_n = 1$. Otra forma de escribirlo es $t_i = t_{i-1} + \delta t$. Entonces calculamos el precio del activo en t_i con el precio del activo t_{i-1} usando la Ecuación 6.7 teniendo en cuenta el dividendo. Luego con el precio del activo en t_i, calculamos $d_{1D}(t_i)$, $d_{2D}(t_i)$, la nueva cobertura $N(d_{1D}(t_i))$ y el nuevo valor de la call $C(S(t_i), t_i)$.

Tengamos en cuenta que en la práctica durante el intervalo de tiempo $[t_{i-1}, t_i]$ la cobertura de la cartera es constante. Por consiguiente, llegado a t_i y efectuamos la nueva cobertura, esto nos generan una diferencia. A esta diferencia la denominamos error o rendimiento práctico y se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Error_j = {} & Call(S(t_j), t_j) - Call(S(t_{j-1}), t_{j-1}) - N(d_{1D}(t_{j-1}))\Big(S(t_j) - S(t_{j-1}) - DS(t_{j-1})\delta t\Big) \\ & - r\delta t\Big(Call(S(t_{j-1}), t_{j-1}) - N(d_{1D}(t_{j-1}))S(t_{j-1})\Big), \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, n$. Dicho de otro modo, el error que se generan durante el intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ es la variación del valor de la call en ese intervalo, menos la variación del precio del activo por la cobertura en t_{j-1} y menos el interés libre de riesgo por el valor de la cartela en t_{j-1}.

Por último, calculamos el rendimiento teórico de cada cobertura con la Ecuación 6.4 que habíamos deducido anteriormente.

$$R_j = \frac{\sigma S(t_{j-1})e^{-D(T-t_{j-1})}Z(d_{1D}(t_{j-1}))}{2\sqrt{T - t_{j-1}}}(\phi^2 - 1)\delta t.$$

Tengamos en cuenta que para calcular el valor determinista del rendimiento teórico en t_j solo necesitamos los dados de t_{j-1}. Es decir, podemos calcular el término determinista del rendimiento teórico de t_j que tendremos en t_{j-1} solo con saber el intervalo de cobertura δt.

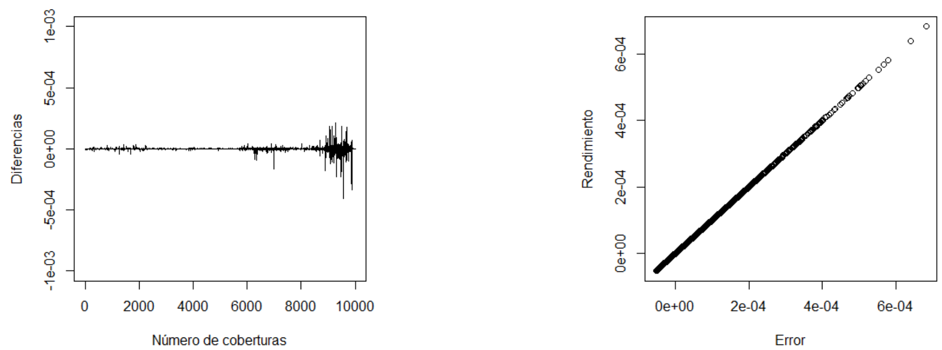
Suponemos que para la simulación definimos $\delta t = 1 \times 10^{-5}$, es decir en el intervalo $[0, 1]$ haremos 10000 coberturas.

Para mostrar los resultados de la simulación, agrupamos todos los datos en la siguiente tabla:

t	S	d_{1D}	d_{2D}	Δ	Call	Error	R
0	100	0.13333	-0.16667	0.54480	11.53019	0	0
0.0001	99.8971	0.1299	-0.1701	0.5435	11.4736	0.000515	0.000516
0.0002	100.4130	0.1471	-0.1529	0.5501	11.7552	0.001141	0.001140

...

Para verificar que el error calculado y el rendimiento teórico se asimilan y que tienen la misma función de distribución en cada cobertura dibujamos las siguientes gráficas:



(a) Diferencias entre rendimiento y error. (b) Gráfica QQ-Plot del rendimiento y error.

La gráfica (a) representa el vector diferencia entre el rendimiento teórico y el error. Podemos ver que las diferencias entre los dos conjuntos en cada cobertura son cercanos a cero. La diferencia máxima en valor absoluto es 4.04×10^{-5}, podemos ver que la diferencia es prácticamente nulo.

Para ver que los dos conjuntos siguen la misma función de distribución definimos la función

$$\text{RepDividendo}(S, E, r, D, \mu, \sigma, \delta t),$$

que consiste en repetir el primer paso de la simulación anterior, es decir esta función repite el cálculo del rendimiento y del error para el intervalo $[t_0, t_1]$. Con todos los posibles rendimientos y errorer que salen en la primera cobertura dibujamos su gráfica QQ-plot (b). Observamos que en la gráfica muestra un conjunto de puntos que tienden a ser una función lineal, esto implica que los dos conjuntos de datos siguen la misma distribución. En este caso es la chi-cuadrado con un grado de libertad menos uno.

6.4.2. Opción Margrabe

Siguiendo la misma metodología que antes, definimos la función para calcular el rendimiento y el error de la opción Margrabe. Sea

$$\text{Margrabe}(S_1, S_2, r, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho, \delta t),$$

la función que definimos y los valores de los parámetros son:

S_1	El precio del activo subyacente 1 en el instante cero	100
S_2	El precio del activo subyacente 2 en el instante cero	100
r	El interés libre de riesgo	0.01
μ_1	La rentabilidad del activo subyacente 1	0.02
μ_2	La rentabilidad del activo subyacente 2	0.04
σ_1	La volatilidad del activo subyacente 1	0.2
σ_2	La volatilidad del activo subyacente 2	0.4
ρ	Coeficiente de correlación entre S_1 y S_2	0.15
δt	El intervalo de tiempo en hacer la cobertura	$1/n$

A diferencia de la sección anterior, ahora tenemos un vector normal multivariante de dimensión 2. Por lo tanto no podremos generar variables aleatorias normales de forma independientes. Usaremos la función "*rmvnorm*" del programa R con la esperanza y la matriz de covarianza del nuestro vector normal para generar correctamente los datos y realizar la simulación. Para el resto del procedimiento de la función *Margrabe* es muy similar que el de *Dividendo*, también está explicado en el apéndice. Solo resaltamos el cálculo del rendimiento y del error.

El error en t_j lo calculamos como la variación de call en el intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ menos la cobertura en t_{j-1} de cada activo por la variación de su precio.

$$\begin{aligned} Error(t_j) &= Call(S_1(t_j), S_2(t_j), t_j) - Call(S_1(t_{j-1}), S_2(t_{j-1}), t_{j-1}) \\ &\quad - N(d_{1M}(t_{j-1}))(S_1(t_j) - S_1(t_{j-1})) - N(d_{2M}(t_{j-1}))(S_2(t_j) - S_2(t_{j-1})), \end{aligned}$$

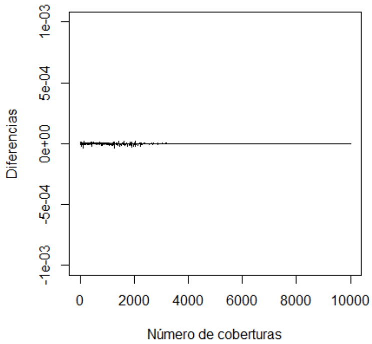
para $j = 1, \ldots, n$.

Para el rendimiento teórico lo calculamos como

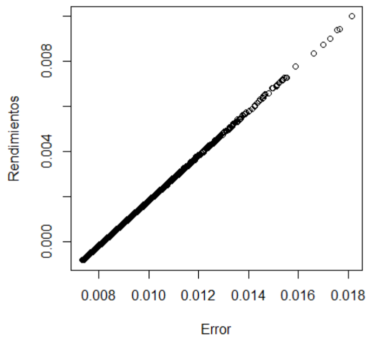
$$R(t_j) = \frac{S_1(t_{j-1}) Z(d_{1M}(t_{j-1}))}{2\sigma_M \sqrt{T - t_{j-1}}} \Big((\sigma_1 \phi - \sigma_2 \psi)^2 - \sigma_M \Big) \delta t.$$

Una vez obtenido los dos grupos de datos, igual que antes dibujamos los dos gráficos para ver que la diferencia entre ellos son prácticamente nulo y siguen la misma función de distribución en cada cobertura.

En este caso la diferencia máxima en valor absoluto es 3.31×10^{-5} y vemos que en la gráfica (a) todas las diferencias oscilan alrededor de cero.



(a) Diferencias entre rendimiento y error.



(b) Gráfica QQ-Plot del rendimiento y error.

Para la comparación de la función de distribución en cada intervalo definimos

$$\text{RepMargrabe}(S_1, S_2, r, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho, \delta t),$$

para crear un bucle de cálculo del rendimiento y del error en el intervalo $[t_0, t_1]$ y comparamos sus distribuciones. El resultado de la función es la gráfica (b), vemos que tiende a ser una función lineal, es decir que el rendimiento y el error para cada intervalo sigue la misma función de distribución. En este caso es un chi-cuadrado con un grado menos uno.

6.4.3. Opción Quanto

Por último vemos la relación entre el rendimiento y el error para el caso de una opción Quanto siguiendo el mismo procedimiento que los dos casos anteriores. Primero definimos la función

$$\text{Quanto}(S, F, E, r_S.r_F, \mu_S, \mu_F, \sigma_S, \sigma_F, \rho, \delta t)$$

para procesar la cobertura con los valores siguientes en los parámetros:

S	El precio del activo subyacente en el instante cero	100
F	El tipo de cambio en el instante cero	1.2
E	Precio de ejercicio	100
r_S	El interés libre de riesgo nacional	0.01
r_F	El interés libre de riesgo extranjera	0.02
μ_S	La rentabilidad del activo subyacente	0.03
μ_F	La rentabilidad del tipo de cambio	0.05
σ_S	La volatilidad del activo subyacente	0.25
σ_F	La volatilidad del tipo de cambio	0.35
ρ	El coeficiente de correlación entre el activo y el tipo de cambio	0.05
δt	El intervalo de tiempo en hacer la cobertura	$1/n$

Igual que el caso de Margrabe, para generar las variables aleatorias tenemos que usar la función *rmvnorm* poniendo la matriz de covarianza de las dos normales. Sin embargo, en el caso de Quanto para calcular el error en t_j primero definimos

1. $\lambda(t_j) = e^{-(r_S - r_F + \rho\sigma_S\sigma_F)(T-t_j)}$.
2. $\Delta_S(t_j) = F_0\lambda(t_j)N(d_{1Q}(t_j))\frac{1}{F(t_j)}$.
3. $\Delta_F(t_j) = -F_0\lambda(t_j)N(d_{1Q}(t_j))\frac{S(t_j)}{F(t_j)}$.

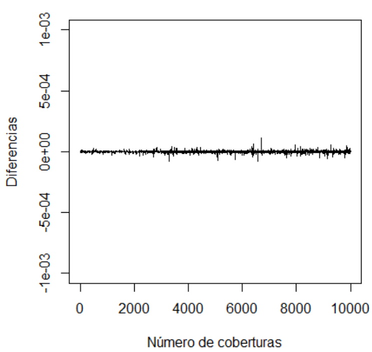
El error en t_j se calcula como la variación del Quanto durante $[t_{j-1}, t_j]$ menos la cobertura de la moneda extranjera en t_{j-1} por la variación del tipo de cambio, menos la cobertura del activo por la relación de variación de activo junto con el tipo de cambio y finalmente menos el interés que se genera de la cartera en t_{j-1} durante δt. Formalmente,

$$\begin{aligned}Error(t_j) = {} & Call(S(t_j), F(t_j), t_j) - Call(S(t_{j-1}), F(t_{j-1}), t_{j-1}) - \Delta_F(t_{j-1})(F(t_j) - F(t_{j-1})) \\ & - \Delta_F(t_{j-1})r_F F(t_{j-1})\delta t - \Delta_S(t_{j-1})\Big(F(t_{j-1})(S(t_j) - S(t_{j-1})) + S(t_{j-1})(F(t_j) - F(t_{j-1})) \\ & + (S(t_j) - S(t_{j-1}))(F(t_j) - F(t_{j-1}))\Big) - r_S Call(S(t_{j-1}), F(t_{j-1}), t_{j-1})\delta t.\end{aligned}$$

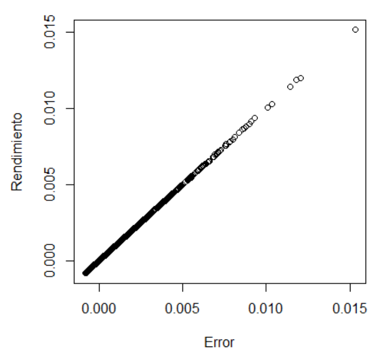
Por otro lado, calculamos el rendimiento en t_j como

$$R(t_j) = F_0\Big(\frac{\sigma_S\lambda(t_{j-1})S(t_{j-1})Z(d_{1Q}(t_{j-1}))}{2\sqrt{T-t_j}}(\phi^2 - 1) + \sigma_S\sigma_F\lambda(t_{j-1})S(t_{j-1})N(d_{1Q}(t_{j-1}))(\rho - \phi\psi)\Big)\delta t.$$

Con el propósito de verificar que el rendimiento calculado refleja el error que se genera en la practica calculamos el vector diferencia entre estos dos valores y lo representamos en la gráfica (a). Vemos que los valores fluctúan alrededor de $x = 0$ y el valor máximo en valor absoluto es 1.14×10^{-5}. Como que todos los valores son muy cercano a cero, es factible decir el rendimiento es una buena aproximación del error.



(a) Diferencias entre rendimiento y error.



(b) Gráfica QQ-Plot del rendimiento y error.

Para comprobar que el rendimiento y el error siguen la misma función de distribución definimos la función

$$\text{RepQuanto}(S, F, E, r_S.r_F, \mu_S, \mu_F, \sigma_S, \sigma_F, \rho, \delta t),$$

para iterar repetidamente la cobertura en el intervalo $[t_0, t_1]$ cada vez con un valor aleatorio diferente y obtener el rendimiento y el error de cada cobertura.

Con los resultados de la función dibujamos la gráfica QQ-plot (b). Vemos que la gráfica se asimila a una función lineal que quiere decir el rendimiento y el error tienen la misma función de distribución.

Para concluir la parte de simulación, llegamos a la conclusión de que los cálculos de rendimientos del Capítulo 6 para los tres tipos de opciones refleja correctamente el error que se generan cuando hacemos la cobertura en tiempo discreto.

7. Conclusiones

Para muchos autores las fluctuaciones de los mercados financieros son imposibles de predecir con exactitud ya que se considera que en su variación existe un factor aleatorio. Sin embargo, podemos construir modelos estocásticos con estrategias de compraventa de productos financieros para determinar el valor teórico de los activos financieros, tal como hemos hecho con el modelo de Black-Scholes.

Primero de todo observamos que mediante una estrategia de cobertura en concreto podemos construir una cartera libre de riesgo y después obtener la valoración de la opción gracias a la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales.

En un segundo paso, con la importancia de las opciones que depende de varios activos, hemos estudiado el modelo de Black-Scholes en dimensiones superiores. Construimos la ecuación de Black-Scholes para opciones con varios activos pero no lo hemos resuelto, ya que solucionar este problema requiere de herramientas matemáticas más avanzadas. Por lo tanto hemos concentrado el estudio en dos opciones en concretas, la opción Margrabe y la opción Quanto.

La peculiaridad de estas dos opciones es que mediante un cambio de variable en cada caso podemos simplificar un problema bidimensional al unidimensional y resolverlo con el procedimiento del modelo de Black-Scholes inicial. Y hasta aquí hemos conseguido nuestro primer objetivo.

En tercer lugar, estas valoraciones teóricas de las opciones no son del todo exacto, ya que en la práctica no se cumplen las hipótesis del modelo. Nuestro segundo propósito es investigar el comportamiento de la asunción de continuidad en la práctica, es decir en tiempo discreto. Cabe destacar que este campo de investigación ya fue estudiado para el caso de una opción estándar. Nosotros trasladamos el problema a la opción Margrabe y la opción Quanto, casos en los que todavía no estaba hecho el estudio. Después del análisis y de los cálculos, hemos observado que cuando hacemos la cobertura en tiempo discreto se generan unos errores o rendimientos (en tiempo continuo el rendimiento de cada cobertura es cero). Adicionalmente hemos deducido que el rendimiento que se genera en cada cobertura sigue una función de distribución en concreta.

Para entender y tener comodidad en el tratamiento de las opciones bidimensionales, estudiadomos primero el rendimiento que se genera para una opción con pago de dividendos. Luego estudiamos los casos de la opción Margrabe y la opción Quanto.

- El resultado del análisis para una opción con pago de dividendo es que su rendimiento se puede dividir en dos componentes. Una parte es determinista y hemos visto que se puede expresar como un múltiplo de la Γ. Y por otro lado tenemos una componente aleatoria que sigue una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad. Y por la característica de esta distribución concluimos que con el aumento de la frecuencia de cobertura, los rendimientos tienden a compensarse unos con los otros y finalmente obtener un valor neto cero. Además hemos calculado que el valor esperado del rendimiento es cero.

- Para la opción Margrabe, el rendimiento también depende de dos componentes. Igual que antes la parte determinista se puede expresar como un múltiplo de Γ_1. Y para la parte aleatoria, usando una propiedad del vector normal multivariante, hemos verificando que esta parte también sigue una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad igual que en el caso anterior. Entonces los rendimientos también tenderán a contrarrestarse unos con los otros para obtener un valor cero con el aumento de la frecuencia de cobertura.

- Finalmente, la opción Quanto es algo diferente que los casos anteriores. En este caso el rendimiento depende de dos componentes aleatorios. La primera es una chi-cuadrada y la segunda es un producto de dos normales. Como que estas dos normales forman un vector normal bidimensional, hemos podido ver que el producto de estos normales es una combinación lineal de dos distribución chi-cuadrado con un grado de libertad. Entonces podemos decir que el rendimiento de una opción Quanto esta formada por la suma de tres distribución chi-cuadrado con un grado de libertad. Y por último observamos también que el valor esperado del rendimiento es cero.

Una vez examinado los rendimientos en la teoría, verificamos que los resultados son coherente cuando hacemos la cobertura en la práctica. Tras analizar la simulación de los tres casos con la ayuda de R, hemos observado que la diferencia del error y del rendimiento va disminuyendo si aumentamos la frecuencia de cobertura. Y con la ayuda del análisis descriptivo y la gráfica QQ-Plot validamos que el error práctico y el rendimiento tienen la misma función de distribución.

Durante la realización del trabajo he aprendido mucho sobre el mundo de las finanzas y también como aplicar las matemáticas para realizar valoración y análisis de productos financieros. Sin embargo, también me han surgido preguntas nuevas como

1. Si hay un error de cobertura en la práctica, ¿existe alguna forma de corregirlo?

2. ¿Con una estrategia de cobertura diferente podemos disminuir o eliminar este error?

3. Si solo se quiere hacer una cobertura durante toda la vida de la opción, ¿que valor será el óptimo?

Creo que todas estas preguntas son muy interesantes de estudiar en un futuro. Y también la generalización de la resolución de la ecuación de Black-Scholes para activos multivariables.

A. Opción con pago de dividendos

```
Dividendo<-function(S,E,r,D,mu,sigma,timestep){
"
S: Precio del activo subyacente en el instante 0.
E: Precio de ejercicio.
r: Interes libre de riesgo.
D: Dividendo a paga.
mu: Rendimiento del activo subyacente.
sigma: Volatilidad del activo subyacente.
"
T<-1
t<-0
#Denificion del rendimiento practico.
Error<-0
#Denificion del rendimiento teorcio.
R<-0
#Definicion d1 y d2.
d1<-(log(S/E)+(r-D+sigma^2/2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t))
d2<-(log(S/E)+(r-D-sigma^2/2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t))
#Definicion del precio del activo subyacente.
precio<-S
#Definicion del valor de Call.
Call<-exp(-D*(T-t))*S*pnorm(d1,0,1)-E*exp(-r*(T-t))*pnorm(d2,0,1)
#Definicion de la cobertura delta.
delta<-exp(-D*(T-t))*pnorm(d1,0,1)
#Proceso de cobertura
for(i in 2:(T/timestep)){
  aux=rnorm(1,0,1)
  R[i]=sigma*precio[i-1]*exp(-D*(T-t[i-1]))*dnorm(d1[i-1],0,1)*(aux^2-1)*timestep/(2*sqrt(T-t[i-1]))
  t[i]<-t[i-1]+timestep
  precio[i]<-precio[i-1]*exp((mu-sigma^2/2-D)*timestep+sigma*sqrt(timestep)*aux)
  d1[i]<-(log(precio[i]/E)+(r-D+sigma^2/2)*(T-t[i]))/(sigma*sqrt(T-t[i]))
  d2[i]<-(log(precio[i]/E)+(r-D-sigma^2/2)*(T-t[i]))/(sigma*sqrt(T-t[i]))
  Call[i]<-exp(-D*(T-t[i]))*precio[i]*pnorm(d1[i],0,1)-E*exp(-r*(T-t[i]))*pnorm(d2[i],0,1)
  Error[i]=(Call[i]-Call[i-1])-delta[i-1]*(precio[i]-precio[i-1])-r*timestep*(Call[i-1]-precio[i-1]*delta[i-1])-D*delta[i-1]*precio[i-1]*timestep
  delta[i]<-exp(-D*(T-t[i]))*pnorm(d1[i],0,1)
}
i=i+1
t[i]=t[i-1]+timestep
aux=rnorm(1,0,1)
R[i]=sigma*precio[i-1]*exp(-D*(T-t[i-1]))*dnorm(d1[i-1],0,1)*(aux^2-1)*timestep/(2*sqrt(T-t[i-1]))
precio[i]<-precio[i-1]*exp((mu-sigma^2/2-D)*timestep+sigma*sqrt(timestep)*aux)
Call[i]<-max(precio[i]-E,0)
if(Call[i]== 0){
  delta[i]<-0
```

```
}else{
  delta[i]<-1
}
Error[i]=(Call[i]-Call[i-1])-delta[i-1]*(precio[i]-precio[i-1])-r*timestep*(Call[i-1]-precio[i-1]*delta[i-1])-D*delta[i-1]*precio[i-1]*timestep
d1[i]=0
d2[i]=0
qqplot(Error,R)

Tabla=data.frame(cbind(t,precio,d1,d2,delta,Call,Error,R))
return(Tabla)
}
D.10000=Dividendo(100,100,0.01,0.015,0.02,0.3,0.0001)
write.csv(D.10000, file="D_10000.txt")
z=D.10000[7]-D.10000[8]
plot(z,type="l",xlab="N mero de coberturas", ylab="Diferencias",ylim=c(-0.001,0.001))

-------------------------------------------------------------------------------


RepDividendo<-function(S,E,r,D,mu,sigma,timestep){
  T<-1
  t<-0
  Error<-0
  R<-0
  d1<-(log(S/E)+(r-D+sigma^2/2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t))
  d2<-(log(S/E)+(r-D-sigma^2/2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t))
  precio<-0
  Call<-exp(-D*(T-t))*S*pnorm(d1,0,1)-E*exp(-r*(T-t))*pnorm(d2,0,1)
  delta<-exp(-D*(T-t))*pnorm(d1,0,1)
  for(i in 1:10000){
    t<-0
    aux<-rnorm(1,0,1)
    R[i]<-sigma*S*exp(-D*(T-t))*dnorm(d1,0,1)*(aux^2-1)*timestep/(2*sqrt(T-t))
    t<-t+timestep
    precio<-S*exp((mu-sigma^2/2-D)*timestep+sigma*sqrt(timestep)*aux)
    d1<-(log(precio/E)+(r-D+sigma^2/2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t))
    d2<-(log(precio/E)+(r-D-sigma^2/2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t))
    Call1<-exp(-D*(T-t))*precio*pnorm(d1,0,1)-E*exp(-r*(T-t))*pnorm(d2,0,1)
    Error[i]<-(Call1-Call)-delta*(precio-S1)-r*timestep*(Call-S*delta)-D*delta*S*timestep
  }
  qqplot(Error,R, ylab='Rendimiento')
}
RepDividendo(100,100,0.1,0.015,0.05,0.3,0.00001)
```

B. Opción Margrabe

```
Margrabe<-function(S1,S2,r,mu1,mu2,sigma1,sigma2,rho,timestep){
"
S1: Precio del activo subyacente 1 en el instante 0.
S2: Precio del activo subyacente 2 en el instante 0.
r: Interes libre de riesgo.
mu1: Rendimiento del activo subyacente 1.
mu2: Rendimiento del activo subyacente 2.
sigma1: Volatilidad del activo subyacente 1.
sigma2: Volatilidad del activo subyacente 2.
rho: coeficiente de correlacion entre S1 y S2.
"
T<-1
t<-0
#Denifici n del error pr ctico.
Error<-0
#Denifici n del rendimiento te rcio.
R<-0
#Definicion de sigmaM
sigmaM<-sqrt(sigma1^2+sigma2^2-2*rho*sigma1*sigma2)
#Definicion de d1 y d2.
d1<-(log(S1/S2)+(sigmaM^2/2)*(T-t))/(sigmaM*sqrt(T-t))
d2<-(log(S1/S2)-(sigmaM^2/2)*(T-t))/(sigmaM*sqrt(T-t))
#Definici n del precio del activo subyacente 1 y 2.
precio1<-S1
precio2<-S2
#Definicion del valor de Call
Call<-S1*pnorm(d1,0,1)-S2*pnorm(d2,0,1)
#Definicion de la cobertura delta 1 y 2.
delta1=pnorm(d1,0,1)
delta2=-pnorm(d2,0,1)
#Definicion de los componenetes para generar el vector normal multivariante.
a<-c(mu1,mu2)
b<-matrix(c(1,rho,rho,1),2,2)
#Proceso de cobertura.
for(i in 2:(T/timestep)){
  c<-rmvnorm(1,mean=a,sigma=b)
  R[i]=precio1[i-1]*dnorm(d1[i-1],0,1)*timestep*((sigma1*c[1]-sigma2*c[2])^2-sigmaM^2)/(2*sigmaM*sqrt(T-t[i-1]))
  precio1[i]<-precio1[i-1]*exp((mu1-sigma1^2)*timestep+sigma1*sqrt(timestep)*c[1])
  t[i]<-t[i-1]+timestep
  precio1[i]<-precio1[i-1]*exp((mu1-sigma1^2)*timestep+sigma1*sqrt(timestep)*c[1])
  precio2[i]<-precio2[i-1]*exp((mu2-sigma2^2)*timestep+sigma2*sqrt(timestep)*c[2])
  d1[i]<-(log(precio1[i]/precio2[i])+(sigmaM^2/2)*(T-t[i]))/(sigmaM*sqrt(T-t[i]))
  d2[i]<-(log(precio1[i]/precio2[i])-(sigmaM^2/2)*(T-t[i]))/(sigmaM*sqrt(T-t[i]))
  Call[i]<-precio1[i]*pnorm(d1[i],0,1)-precio2[i]*pnorm(d2[i],0,1)
  Error[i]=(Call[i]-Call[i-1])-delta1[i-1]*(precio1[i]-precio1[i-1])-delta2[i-1]*(precio2[i]-precio2[i-1])
```

```
    delta1[i]=pnorm(d1[i],0,1)
    delta2[i]=-pnorm(d2[i],0,1)
}
i=i+1
t[i]=t[i-1]+timestep
c<-rmvnorm(1,mean=a,sigma=b)
R[i]=precio1[i-1]*dnorm(d1[i-1],0,1)*timestep*((sigma1*c[1]-sigma2*c[2])^2-sigmaM^2)/(2*sigmaM*sqrt(T-t[i-1]))
precio1[i]<-precio1[i-1]*exp((mu1-sigma1^2)*timestep+sigma1*sqrt(timestep)*c[1])
precio2[i]<-precio2[i-1]*exp((mu2-sigma2^2)*timestep+sigma2*sqrt(timestep)*c[2])
Call[i]=max(precio1[i]-precio2[i],0)
if(Call[i]== 0){
    delta1[i]<-0
    delta2[i]<-0
}else{
    delta1[i]<-1
    delta2[i]<--1
}
Error[i]=(Call[i]-Call[i-1])-delta1[i-1]*(precio1[i]-precio1[i-1])-delta2[i-1]*(precio2[i]-precio2[i-1])
d1[i]=0
d2[i]=0
qqplot(Error,R)
Tabla=data.frame(cbind(t,precio1,precio2,d1,d2,delta1,delta2,Call,Error,R))
return(Tabla)
}

M.10000=Margrabe(100,100,0.01,0.02,0.04,0.2,0.4,0.15,0.0001)
write.csv(M.10000, file="M_10000.txt")
z=D.10000[9]-D.10000[10]
plot(z,type="l",xlab="Numero de coberturas", ylab="Diferencias",ylim=c(-0.001,0.001))

--------------------------------------------------------------------------------

RepMargrabe<-function(S1,S2,r,mu1,mu2,sigma1,sigma2,rho,timestep){
    t<-0
    T<-1
    sigmaM<-sqrt(sigma1^2+sigma2^2-2*rho*sigma1*sigma2)
    d1<-(log(S1/S2)+(sigmaM^2/2)*(T-t))/(sigmaM*sqrt(T-t))
    d2<-(log(S1/S2)-(sigmaM^2/2)*(T-t))/(sigmaM*sqrt(T-t))
    Call<-S1*pnorm(d1,0,1)-S2*pnorm(d2,0,1)
    delta1=pnorm(d1,0,1)
    delta2=-pnorm(d2,0,1)
    a<-c(mu1,mu2)
    b<-matrix(c(1,rho,rho,1),2,2)
    Error<-c(0)
    R<-c(0)
    for(i in 1:10000){
        t<-0
        c<-rmvnorm(1,mean=a,sigma=b)
```

```
    R[i]=S1*dnorm(d1,0,1)*timestep*((sigma1*c[1]-sigma2*c[2])^2-sigmaM
        ^2)/(2*sigmaM*sqrt(T-t))
    t<-t+timestep
    precio1<-S1*exp((mu1-sigma1^2/2)*timestep+sigma1*sqrt(timestep)*c
        [1])
    precio2<-S2*exp((mu2-sigma2^2/2)*timestep+sigma2*sqrt(timestep)*c
        [2])
    d1<-(log(precio1/precio2)+(sigmaM^2/2)*(T-t))/(sigmaM*sqrt(T-t))
    d2<-(log(precio1/precio2)-(sigmaM^2/2)*(T-t))/(sigmaM*sqrt(T-t))
    Call1<-precio1*pnorm(d1,0,1)-precio2*pnorm(d2,0,1)
    Error[i]=(Call1-Call)-delta1*(precio1-S1)-delta2*(precio2-S2)
  }

  qqplot(Error, R ,ylab='Rendimiento')
}
RepMargrabe(100,100,0.01,0.02,0.04,0.2,0.4,0.15,0.0001)
```

C. Opción Quanto

```
Quanto<-function(S,F,E,rS,rF,muS,muF,sigmaS,sigmaF,rho,timestep){
"
S: Precio del activo subyacente en el instante 0.
F: Tipo de cambio en el instante 0.
E: Precio de ejercicio.
rs: Interes libre de riesgo nacional.
rF: Interes libre de riesgo extranjera.
muS: Rendimiento del activo subyacente.
muF: Rendimiento del tipo de cambio.
sigmaS: Volabilidad del activo subyacente.
sigmaF: Volabilidad del tipo de cambio.
rho: coeficiente de correlaci n entre S y F.
"
T<-1
t<-0
F0<-F
#Denificion del rendimiento pr ctico.
Error<-0
#Denificion del rendimiento te rcio.
R<-0
#Definicion de d1 y d2.
d1<-(log(S/E)+(rF-rho*sigmaS*sigmaF+sigmaS^2/2)*(T-t))/(sigmaS*sqrt(T-
    t))
d2<-(log(S/E)+(rF-rho*sigmaS*sigmaF-sigmaS^2/2)*(T-t))/(sigmaS*sqrt(T-
    t))
#Definicion del precio del activo subyacente y el tipo de cambio.
precio<-S
Tipo<-F
#Definicion de un coeficiente lambda
lambda=exp(-(rS-rF+rho*sigmaS*sigmaF)*(T-t))
#Definicion del valor de Call
Call<-F0*(lambda*S*pnorm(d1,0,1)-E*exp(-rS*(T-t))*pnorm(d2,0,1))
```

```
#Definicion de la cobertura delta pasa S y F.
deltaS=F0*lambda*pnorm(d1,0,1)/F
deltaF=-F0*lambda*pnorm(d1,0,1)*S/F
#Definici n de los componenetes para generar el vector normal multivariante.
a<-c(muS,muF)
b<-matrix(c(1,rho,rho,1),2,2)
#Proceso de cobertura.
for(i in 2:(T/timestep)){
  c<-rmvnorm(1,mean=a,sigma=b)
  R[i]=F0*(sigmaS*precio[i-1]*lambda[i-1]*dnorm(d1[i-1],0,1)*(c[1]^2-1)/(2*sqrt(T-t[i-1]))+sigmaS*sigmaF*precio[i-1]*lambda[i-1]*pnorm(d1[i-1],0,1)*(rho-c[1]*c[2]))*timestep
  t[i]<-t[i-1]+timestep
  lambda[i]=exp(-(rS-rF+rho*sigmaS*sigmaF)*(T-t[i]))
  precio[i]<-precio[i-1]*exp((muS-sigmaS^2-rf)*timestep+sigmaS*sqrt(timestep)*c[1])
  Tipo[i]<-Tipo[i-1]*exp((muF-sigmaF^2)*timestep+sigmaF*sqrt(timestep)*c[2])
  d1[i]<-(log(precio[i]/E)+(rF-rho*sigmaS*sigmaF+sigmaS^2/2)*(T-t[i]))/(sigmaS*sqrt(T-t[i]))
  d2[i]<-(log(precio[i]/E)+(rF-rho*sigmaS*sigmaF-sigmaS^2/2)*(T-t[i]))/(sigmaS*sqrt(T-t[i]))
  Call[i]<-F0*(lambda[i]*precio[i]*pnorm(d1[i],0,1)-E*exp(-rS*(T-t[i]))*pnorm(d2[i],0,1))
  Error[i]=(Call[i]-Call[i-1])-deltaF[i-1]*(Tipo[i]-Tipo[i-1])-deltaF[i-1]*rF*Tipo[i-1]*timestep-deltaS[i-1]*(Tipo[i-1]*(precio[i]-precio[i-1])+precio[i-1]*(Tipo[i]-Tipo[i-1])+(precio[i]-precio[i-1])*(Tipo[i]-Tipo[i-1]))-rS*Call[i-1]*timestep
  deltaS[i]=F0*(lambda[i]*pnorm(d1[i],0,1))/Tipo[i]
  deltaF[i]=-F0*(lambda[i]*pnorm(d1[i],0,1))*precio[i]/Tipo[i]
}
i=i+1
t[i]<-t[i-1]+timestep
c<-rmvnorm(1,mean=a,sigma=b)
R[i]=F0*(sigmaS*precio[i-1]*lambda[i-1]*dnorm(d1[i-1],0,1)*(c[1]^2-1)/(2*sqrt(T-t[i-1]))+sigmaS*sigmaF*precio[i-1]*lambda[i-1]*pnorm(d1[i-1],0,1)*(rho-c[1]*c[2]))*timestep
precio[i]<-precio[i-1]*exp((muS-sigmaS^2-rf)*timestep+sigmaS*sqrt(timestep)*c[1])
Tipo[i]<-Tipo[i-1]*exp((muF-sigmaF^2)*timestep+sigmaF*sqrt(timestep)*c[2])
Call[i]=F0*max(precio[i]-E,0)
if(Call[i]== 0){
  deltaS[i]<-0
  deltaF[i]<-0
}else{
  deltaS[i]<-F0/Tipo[i]
  deltaF[i]<--F0*precio[i]/Tipo[i]
}
Error[i]=(Call[i]-Call[i-1])-deltaF[i-1]*(Tipo[i]-Tipo[i-1])-deltaF[i-1]*rF*Tipo[i-1]*timestep-deltaS[i-1]*(Tipo[i-1]*(precio[i]-precio[i-1])+precio[i-1]*(Tipo[i]-Tipo[i-1])+(precio[i]-precio[i-1])*(Tipo[i]-Tipo[i-1]))-rS*Call[i-1]*timestep
d1[i]=0
```

```
d2[i]=0
qqplot(Error,R)
Tabla=data.frame(cbind(t,precio,Tipo,d1,d2,deltaS,deltaF,Call,Error,R))
return(Tabla)
}
Q.10000=Quanto(100,1.2,100,0.01,0.02,0.03,0.05,0.25,0.35,0.05,0.0001)
write.csv(Q.10000, file="Q_10000.txt")
z=D.10000[9]-D.10000[10]
plot(z,type="l",xlab="Numero de coberturas", ylab="Diferencias",ylim=c(-0.001,0.001))

-----------------------------------------------------------------------------------
RepQuanto<-function(S,F,E,rS,rF,muS,muF,sigmaS,sigmaF,rho,timestep){
  T<-1
  t<-0
  F0<-F
  Error<-0
  R<-0
  d1<-(log(S/E)+(rF-rho*sigmaS*sigmaF+sigmaS^2/2)*(T-t))/(sigmaS*sqrt(T-t))
  d2<-(log(S/E)+(rF-rho*sigmaS*sigmaF-sigmaS^2/2)*(T-t))/(sigmaS*sqrt(T-t))
  precio<-S
  Tipo<-F
  lambda=exp(-(rS-rF+rho*sigmaS*sigmaF)*(T-t))
  Call<-F0*(lambda*S*pnorm(d1,0,1)-E*exp(-rS*(T-t))*pnorm(d2,0,1))
  deltaS=F0*lambda*pnorm(d1,0,1)/F
  deltaF=-F0*lambda*pnorm(d1,0,1)*S/F
  a<-c(muS,muF)
  b<-matrix(c(1,rho,rho,1),2,2)
  for(i in 1:10000){
    t=0
    c<-rmvnorm(1,mean=a,sigma=b)
    R[i]=F0*(sigmaS*S*lambda*dnorm(d1,0,1)*(c[1]^2-1)/(2*sqrt(T-t))+sigmaS*sigmaF*S*lambda*pnorm(d1,0,1)*(rho-c[1]*c[2]))*timestep
    t<-t+timestep
    lambda=exp(-(rS-rF+rho*sigmaS*sigmaF)*(T-t))
    precio<-S*exp((muS-sigmaS^2)*timestep+sigmaS*sqrt(timestep)*c[1])
    Tipo<-F*exp((muF-sigmaF^2-rF)*timestep+sigmaF*sqrt(timestep)*c[2])
    d1<-(log(precio/E)+(rF-rho*sigmaS*sigmaF+sigmaS^2/2)*(T-t))/(sigmaS*sqrt(T-t))
    d2<-(log(precio/E)+(rF-rho*sigmaS*sigmaF-sigmaS^2/2)*(T-t))/(sigmaS*sqrt(T-t))
    Call1<-F0*(lambda*precio*pnorm(d1,0,1)-E*exp(-rS*(T-t))*pnorm(d2,0,1))
    Error[i]=(Call1-Call)-deltaF*(Tipo-F)-deltaF*rF*F*timestep-deltaS*(F*(precio-S)+S*(Tipo-F)+(precio-S)*(Tipo-F))-rS*Call*timestep
  }
  qqplot(Error,R)

}
RepQuanto(100,1.2,100,0.01,0.02,0.03,0.05,0.25,0.35,0.05,0.0001)
```

Referencias

[1] Fisher Black and Mryon Scholes, *The pricing of options and corporate liabities,* Journal Political Economy 81 (1973) 637-654.

[2] W. Margrabe, *The value of an option to exchange one asset for another,* Journal of Finance 33 (1978) 177-186.

[3] Philim P. Boyle and David Emanuel, *Discretely adjusted option hedges*, Journal of Financial Economics 8 (1980) 259-282.

[4] John C. Hull, *Introducción a los mercados de futuros y opciones*, octavo edición, Pearson Educación, 2014.

[5] Paul Willmott, Sam Howison and Jeff Dewynne, *The mathematics of financial derivatives*, Cambridge University Press, 2005.

[6] Paul Willmott, *On quantitative finance,* published by John Wiley Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester, West Sussex PO19 1UD, England.

[7] Mark H.A.Davis *Mathematical option pricing*, MSc Course in Mathematics and Finance Imperial College London, 2006.

[8] Juan José García Machado, M. Pilar Sancha Dionisio, Concepción Tejero Rioja y David Toscano Pardo, *Opciones Exóticas*, Boletín ECI Económico.

[9] Olga Juliá de Ferran, David Márquez-Carreras, Carles Rovira Escofet y Mònica Sarrà Rovira, *Probabiltats: Problemes i més problemes.*, Universitat de Barcelona, 2005.