Facultat d'Economia
i Empresa

APUNTES DE MATEMÁTICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

González-Vila Puchades, Laura
Ortí Celma, Francesc J.
Sáez Madrid, José B.

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Universitat de Barcelona

PRÓLOGO

En general, se es consciente del diferente valor que tiene el dinero según el momento en que se disponga de él, de forma que es preferible cobrar 1.000€ al final de cada mes que 12.000€ al final del año. Sin embargo, muchas veces, en la práctica y de forma inconsciente, se suman cantidades monetarias situadas en distintos momentos del tiempo (lo habitual es que se diga que se percibe un sueldo anual de 12.000€). En general, se hace poco hincapié en el momento concreto de la percepción del dinero y se centra la atención únicamente en las cantidades monetarias.

Justamente uno de los objetivos que nos hemos propuesto los autores de este manual es que los alumnos de los grados relacionados con la economía y la empresa, que en el futuro participarán en los mercados financieros, traten con cierta profundidad el mundo de la matemática financiera y aprendan a valorar cantidades monetarias disponibles en diferentes instantes temporales y, con ello, productos financieros.

A partir de la idea básica del *valor temporal del dinero*, se estará en disposición de entender el significado de términos como capitalizar, actualizar, tipo de interés nominal, TAE, TIR, etc., y se habrá adquirido la capacidad de analizar distintos productos financieros, negociar con entidades financieras sobre las condiciones de una determinada operación, plantearse las mejores opciones de financiación para un particular o una empresa, analizar la viabilidad de distintos proyectos de inversión, etc.

Por otra parte, el deseo de los autores no es, simplemente, transmitir un conjunto de conceptos financieros, sino que se pretende que el alumno sea el centro del proceso de aprendizaje. Para ello, consideramos imprescindible que los estudiantes puedan disponer de este material con antelación a las sesiones presenciales. Esto debe permitir el abandono de las tradicionales exposiciones magistrales con el fin de dinamizar las clases, hacer participar en ellas a los alumnos, fomentar un aprendizaje activo de los mismos y promover su trabajo autónomo.

En cada tema se realiza una exposición, sencilla pero rigurosa, de los conocimientos teóricos necesarios. Esta teoría siempre se acompaña de ejemplos resueltos, que han de servir de guía para poder afrontar con mayor garantía de éxito los ejercicios que en el transcurso de la clase se propondrán para que sean analizados, resueltos y discutidos entre alumnado y profesor. Por un lado, se enuncian ejercicios de perfil académico que ayudarán al estudiante a comprender los fundamentos teóricos y, por otro lado, se complementan con ejercicios extraídos del mercado financiero para que el alumno entienda su aplicación práctica y profesional. La discusión y debate formarán parte del proceso de aprendizaje, pues en matemática financiera no basta con la obtención de un resultado numérico, sino que es necesario la correcta interpretación de éste.

La redacción de los temas que se especifican a continuación es el resultado de años de experiencia de los autores impartiendo docencia en la materia de matemática de las operaciones financieras, tanto en el ámbito universitario como en el ámbito profesional de los mercados financieros. El material se divide en dos bloques temáticos:

1) **Fundamentos del equilibrio financiero**: Incluye los conceptos básicos de la matemática financiera imprescindibles para comprender el funcionamiento de una operación. Entre otros, destacamos los de capital financiero, equivalencia financiera, precios financieros, regímenes

financieros de interés simple vencido, descuento comercial e interés compuesto, suma financiera y clasificación y valoración de rentas financieras constantes, geométricas y aritméticas.

2) **Operaciones financieras**: En base a los fundamentos adquiridos en el primer bloque, se explican y valoran diferentes tipologías de préstamos financieros y también se detallan las características de algunos empréstitos de deuda pública y privada.

Evidentemente, no todo el proceso de aprendizaje debe realizarse en el aula. Para que los conceptos vistos en clase puedan ser asimilados adecuadamente se requiere un periodo de análisis, reflexión y refuerzo. Para conseguirlo, tras cada tema se propone un listado de ejercicios a resolver de forma autónoma y personal por cada alumno. Para comprobar la correcta resolución de dichos ejercicios, al final del manual se recoge la solución de cada uno de ellos. De esta forma, el alumno será consciente de sus progresos y sus deficiencias en la materia, que deberá resolver con ayuda de otros compañeros o del profesor.

A pesar de toda la información suministrada, creemos conveniente complementar este material con otros textos específicos del campo de la matemática financiera como los que exponemos en la bibliografía, así como orientar al alumno sobre páginas web donde pueda encontrar información actualizada sobre distintos productos del mercado financiero que se estén estudiando en cada momento.

Esperamos que este material pueda ser útil a los alumnos universitarios que actualmente cursan estudios de matemática financiera e, incluso, para personas que puedan estar interesadas en este tema.

LOS AUTORES
Diciembre de 2019

ÍNDICE

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros

1. **Operación financiera: definición, elementos y clasificación**
2. **Equilibrio de la operación financiera**
3. **Definición y clasificación de los regímenes financieros**
4. **Regímenes financieros simples**
5. **Regímenes financieros compuestos**
6. **Suma financiera**

Tema 2. Rentas financieras

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

1. Operación financiera. Regímenes financieros

1. Operación financiera: definición, elementos y clasificación

1.1. Capital financiero

1.2. Definición de operación financiera

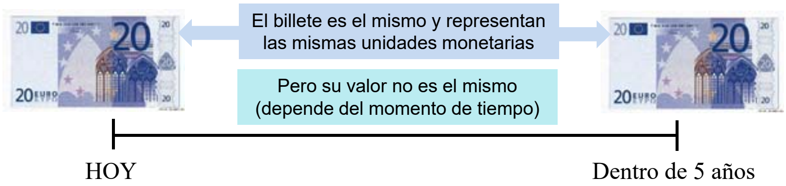
1.3. Elementos de una operación financiera

1.4. Clasificación de las operaciones financieras

1.1. Capital financiero

Antes de definir el concepto de operación financiera es necesario indicar que, especialmente en un contexto financiero, no es suficiente con simplemente hablar de una determinada cantidad de dinero sino que también es necesario indicar el momento del tiempo en el que esta cantidad está disponible.

Ejemplo: ¿Cuándo prefiere recibir un billete de 20€?



Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
1. Operación financiera: definición, elementos y clasificación

Por tanto, cualquier cantidad de dinero tiene un **valor** intrínseco derivado del número de unidades monetarias que representa (10, 200, 5.000, …), y otro **valor** como consecuencia del momento del tiempo en que esté situada (hace 6 meses, hoy, dentro de 4 años, …) y **sólo podremos comparar directamente cantidades monetarias que se encuentren en el mismo momento de tiempo**.

Este segundo valor es el que se conoce como

valor temporal del dinero.

Uno de los principios fundamentales en financiera afirma que toda cantidad de dinero hoy es preferible a la misma cantidad en el futuro, debido a su potencial capacidad de generar más dinero.

Este principio se denomina

preferencia por la liquidez.

En resumen: **El TIEMPO afecta el VALOR del DINERO.**

NOTA: Uno de los objetivos en esta asignatura será poder comparar cantidades monetarias situadas en distintos instantes temporales. Para ello se explicará cómo "trasladar" dichas cantidades en el tiempo.

Definición: **Capital financiero** es cualquier **cantidad monetaria** disponible en un **instante temporal**, y lo representaremos:

$$(C,T) \qquad C \geq 0,\ T \geq 0$$

C se denomina **cuantía** y representa cualquier cantidad monetaria expresada en euros, dólares, libras, etc. (Por defecto, en euros).

T se denomina **diferimiento** y representa el instante temporal en que se sitúa la cuantía, expresado en años respecto a un determinado origen $T=0$.

Ejemplo: $\left(6.000, \frac{3}{12}\right)$ Representan 6.000€ disponibles dentro de 3 meses.

Ejercicio: ¿Qué representan los siguientes capitales financieros?

$(2.500, 4)$ Representan 2.500€ disponibles dentro de 4 años.

$\left(15.000, \frac{3}{4}\right)$ Representan 15.000€ disponibles al cabo de 3 trimestres.

$\left(827, \frac{142}{365}\right)$ Representan 827€ disponibles de aquí a 142 días.

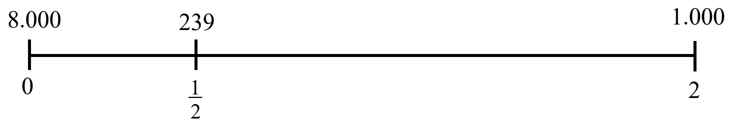
Cualquier capital financiero puede representarse gráficamente sobre la recta real, a partir del origen $T = 0$. Para ello, situaremos las cuantías en la parte superior del eje y los instantes temporales en la parte inferior del mismo:

En esta zona representaremos las cuantías

En esta zona representaremos los instantes

Ejemplo: Representad en el mismo eje temporal los siguientes capitales financieros.

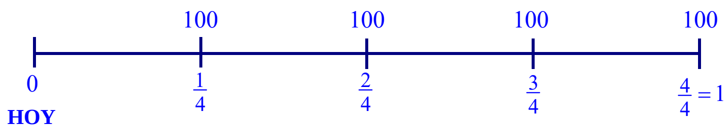
$$(1.000, 2) \qquad (8.000, 0) \qquad \left(239, \tfrac{1}{2}\right)$$



Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
1. Operación financiera: definición, elementos y clasificación

Ejercicio: A partir de hoy y durante un año se prevé cobrar 100€ al final de cada trimestre. Indicad y representad en el mismo eje temporal los capitales financieros.

$$\left\{\left(100, \frac{1}{4}\right), \left(100, \frac{2}{4}\right), \left(100, \frac{3}{4}\right), \left(100, \frac{4}{4}\right)\right\} \quad \text{o} \quad \left\{\left(100, \frac{r}{4}\right)\right\}_{r=1,2,3,4}$$



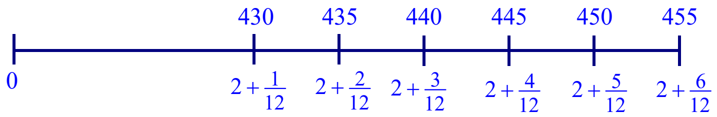
Ejercicio: Escribid y representad gráficamente los capitales financieros especificados en el siguiente conjunto:

$$\left\{\left(430+5\cdot(r-1),2+\tfrac{r}{12}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,6}$$

$$r=1\rightarrow\left(430,\ 2+\frac{1}{12}\right) \qquad r=4\rightarrow\left(445,\ 2+\frac{4}{12}\right)$$

$$r=2\rightarrow\left(435,\ 2+\frac{2}{12}\right) \qquad r=5\rightarrow\left(450,\ 2+\frac{5}{12}\right)$$

$$r=3\rightarrow\left(440,\ 2+\frac{3}{12}\right) \qquad r=6\rightarrow\left(455,\ 2+\frac{6}{12}\right)$$



Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
1. Operación financiera: definición, elementos y clasificación

1.2. Definición de operación financiera

Definición: Operación financiera es el acuerdo entre personas (físicas o jurídicas), para el **intercambio** de capitales financieros, en **diferentes momentos de tiempo**.

Ejercicio: Indicad cuáles de las siguientes situaciones pueden considerarse como operación financiera.

a) Depositar en una entidad financiera 5.000€ a cambio de que en 1 año nos devuelva 5.200€. **SI**

b) Ir a un Banco y pedir cambio de 500€ en billetes de 20€. **NO**

c) Ir a un concesionario de coches y comprar al contado un coche por 15.400€. **NO**

d) Conseguir un préstamo de un Banco para poder comprar el coche anterior, que se devolverá durante 4 años en pagos mensuales. **SI**

Operación Financiera

1.3. Elementos de una operación financiera

Toda operación financiera tiene tres elementos:

1) Elemento personal:

Son las personas físicas o jurídicas que intervienen en la operación.

SUJETO ACTIVO: Persona que posee los capitales financieros y decide cederlos durante un plazo a cambio del cobro de una retribución.

SUJETO PASIVO: Persona que recibe los capitales financieros y se compromete a su devolución futura y al pago de una retribución.

2) Elemento objetivo, material o real:

Son las capitales financieros que se intercambian. Los capitales que cede el sujeto activo se denominan **prestación**, mientras que los que retorna el sujeto pasivo se denominan **contraprestación**.

3) Elemento convencional o formal:

Es el conjunto de acuerdos o pactos que realizan los sujetos para llevar a cabo el intercambio. Habitualmente se refleja en un contrato mercantil que se firma.

NOTA: Toda operación financiera tiene prestación y contraprestación (cobros y pagos). Por eso, al representar en un mismo eje temporal todos los capitales de una operación financiera es necesario diferenciar bien los que corresponden a la prestación o a la contraprestación.

Ejemplo: Juan invierte hoy en un Plan de Pensiones del Banco Z la cantidad de 8.000€. A cambio, en el momento de su jubilación, dentro de 15 años, el Banco pagará a Juan la cantidad de 13.402,80€. Indicad los distintos elementos de la operación.

Elemento personal: Sujeto activo: Juan.
Sujeto pasivo: Banco Z.

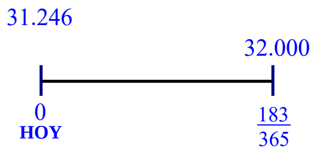
Elemento objetivo, material o real:
Prestación: 8.000€ hoy o $(8.000,0)$.
Contraprestación: 13.402,80€ dentro de 15 años o $(13.402,80\ ,\ 15)$.

Elemento convencional o formal:
Contrato del Plan de Pensiones, firmado por ambas partes, en el que se establecen las condiciones de esa operación financiera.

Ejercicio: Indicad y representad en el eje temporal los capitales financieros de las siguientes operaciones financieras:

a) Una empresa compra hoy por 31.246€ un activo financiero cuyo valor al cabo de 183 días será de 32.000€.

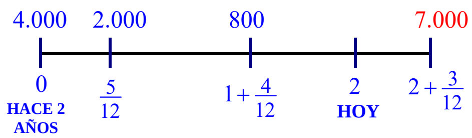
$$(31.246, 0) \quad \left(32.000, \frac{183}{365}\right)$$



b) Una cuenta se abrió hace 2 años con una imposición inicial de 4.000€. A los 5 meses de su apertura se realizó un ingreso de 2.000€ y hace 8 meses se realizó una nueva imposición de 800€. Dentro 3 meses se retirarán de la cuenta 7.000€.

$$(4.000, 0) \quad \left(2.000, \frac{5}{12}\right)$$

$$\left(800,\ 1+\frac{4}{12}\right) \quad \left(7.000,\ 2+\frac{3}{12}\right)$$



Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
1. Operación financiera: definición, elementos y clasificación

1.4. Clasificación de las operaciones financieras

Según el número de capitales financieros existentes, una operación financiera se puede clasificar en:

1) Operación elemental:

Aquella en que tanto la prestación como la contraprestación tienen un único capital financiero.

2) Operación parcialmente compleja:

Aquella en que la prestación o la contraprestación tienen un único capital financiero, estando la otra formada por un conjunto de capitales financieros.

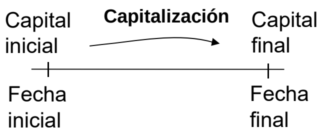
3) Operación totalmente compleja:

Aquella en que tanto la prestación como la contraprestación están formadas por un conjunto de capitales financieros.

Según el sujeto en el que se centra el estudio de la operación:

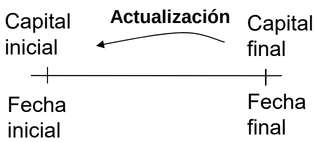
1) Operación de capitalización o de interés:

El sujeto activo cede un capital en un determinado momento para recuperarlo en un instante posterior, junto con una remuneración o precio, que se denomina **interés**.



2) Operación de actualización o de descuento:

Al sujeto pasivo se le anticipa un capital disponible en el futuro a un momento anterior. Por esta anticipación paga un precio llamado **descuento**.



En muchas operaciones financieras, la fecha final se denomina **vencimiento**.

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
1. Operación financiera: definición, elementos y clasificación

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Capital financiero
- Cuantía
- Diferimiento
- Operación financiera
- Sujeto activo
- Sujeto pasivo
- Prestación
- Contraprestación
- Capitalización
- Actualización
- Interés
- Descuento

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

1. Operación financiera. Regímenes financieros

2. Equilibrio de la operación financiera
- 2.1. Equivalencia financiera
- 2.2. Representación de la equivalencia financiera
- 2.3. Precios financieros de interés

2.1. Equivalencia financiera

Los sujetos que intervienen en una operación financiera de financiación (sujeto activo y sujeto pasivo) acuerdan, según unas determinadas condiciones o pactos, los capitales financieros (prestación y contraprestación) que van a intercambiarse.

Por tanto, los sujetos de la operación consideran que dichos capitales son financieramente equivalentes, es decir, se ha establecido una **equivalencia financiera** entre capitales financieros, lo que representaremos mediante el símbolo ≈.

2.2. Representación de la equivalencia financiera

La equivalencia financiera entre capitales financieros se representa de las siguientes maneras:

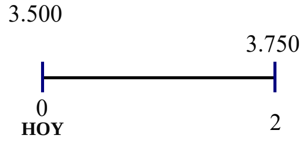
1) Operación elemental:

Prestación: (C,T)

Contraprestación: (C',T')

Equivalencia financiera: $(C,T) \approx (C',T')$

Ejemplo: Una empresa invierte hoy 3.500€ y prevé cobrar dentro de 2 años 3.750€. Indicad la prestación, la contraprestación y representad la equivalencia financiera.



Prestación: $(3.500, 0)$

Contraprestación: $(3.750, 2)$

Equivalencia financiera:

$$(3.500, 0) \approx (3.750, 2)$$

2) Operación parcialmente compleja:

Prestación: (C,T)

Contraprestación: $\left\{(C_1',T_1'),(C_2',T_2'),\ldots,(C_n',T_n')\right\}$

Equivalencia financiera:

$$(C,T) \approx \left\{(C_1',T_1'),(C_2',T_2'),\ldots,(C_n',T_n')\right\}$$

O bien:

Prestación: $\left\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\right\}$

Contraprestación: (C',T')

Equivalencia financiera:

$$\left\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\right\} \approx (C',T')$$

Ejemplo: Una empresa financiera presta hoy 800€ y prevé cobrar 250€ al final de cada uno de los próximos 4 meses. Indicad la prestación, la contraprestación y representad la equivalencia financiera.

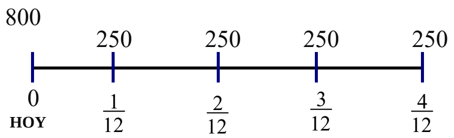
Prestación: $(800,0)$

Contraprestación:

$$\left\{\left(250,\frac{1}{12}\right),\left(250,\frac{2}{12}\right),\left(250,\frac{3}{12}\right),\left(250,\frac{4}{12}\right)\right\}$$

Equivalencia financiera:

$$(800,0)\approx\left\{\left(250,\frac{1}{12}\right),\left(250,\frac{2}{12}\right),\left(250,\frac{3}{12}\right),\left(250,\frac{4}{12}\right)\right\}$$



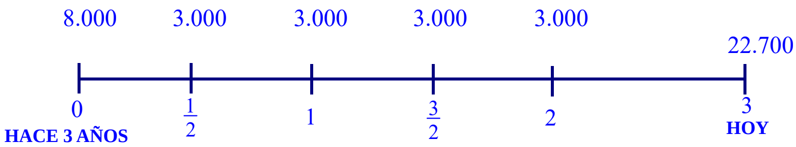
Ejercicio: Una persona abrió hace 3 años una cuenta vivienda con 8.000€. Durante los 2 años siguientes ha ido realizando al final de cada semestre aportaciones constantes de 3.000€ y hoy retira el saldo acumulado en la cuenta por importe de 22.700€. Indicad la prestación, la contraprestación y representad la equivalencia financiera.

Prestación: $\left\{(8.000,0),\left(3.000,\frac{1}{2}\right),(3.000,1),\left(3.000,\frac{3}{2}\right),(3.000,2)\right\}$

Contraprestación: $(22.700,3)$

Equivalencia financiera:

$$\left\{(8.000,0),\left(3.000,\frac{1}{2}\right),(3.000,1),\left(3.000,\frac{3}{2}\right),(3.000,2)\right\}\approx(22.700,3)$$



3) Operación totalmente compleja:

Prestación:

$$\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\}$$

Contraprestación:

$$\{(C_1',T_1'),(C_2',T_2'),\ldots,(C_n',T_m')\}$$

Equivalencia financiera:

$$\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\}\approx\{(C_1',T_1'),(C_2',T_2'),\ldots,(C_n',T_m')\}$$

2.3. Precios financieros de interés

Dada la operación financiera elemental:

$$(C,T)\approx(C',T') \quad \text{con} \quad T'>T$$

se definen los tres precios financieros de interés siguientes:

1) Precio (interés) total:

Es el beneficio total de la operación en términos monetarios.

$$Y=C'-C$$

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental:

$$(1.000,0)\approx(1.120,2)$$

calculad el precio total.

$$Y=1.120-1.000=120€$$

Esto significa que por los 1.000€ iniciales, el sujeto activo recibe al final de los 2 años una retribución (interés total) de 120€.

2) Precio unitario o interés efectivo:

Es el beneficio de la operación por cada unidad monetaria invertida.

$$I = \frac{Y}{C} = \frac{C' - C}{C}$$

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental:

$$(1.000, 0) \approx (1.120, 2)$$

calculad el precio unitario o interés efectivo.

$$I = \frac{Y}{C} = \frac{C' - C}{C} = \frac{1.120 - 1.000}{1.000} = \frac{120}{1.000} = 0,12 \equiv 12\%$$

Esto significa que por cada euro inicial, el sujeto activo recibe al final de los 2 años una remuneración de 0,12 € (o bien, que por cada 100€ iniciales percibe 12€. Por ello se habla del 12% bienal).

3) Precio unitario y medio o interés nominal:

Es el beneficio de la operación por unidad monetaria inicial y por año.

$$i = \frac{I}{T' - T} = \frac{C' - C}{C \cdot (T' - T)} = \frac{C' - C}{C \cdot t}$$

siendo $T' - T = t$ el plazo de la operación expresado en años.

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental:

$$(1.000, 0) \approx (1.120, 2)$$

calculad el precio unitario y medio o interés nominal (también conocido como TIN).

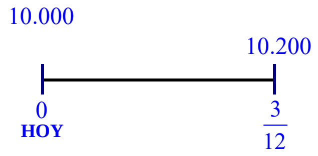
$$i = \frac{I}{T' - T} = \frac{C' - C}{C \cdot (T' - T)} = \frac{1.120 - 1.000}{1.000 \cdot (2 - 0)} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \equiv 6\%$$

Esto significa que por cada 100€ iniciales y por cada año, el sujeto activo recibe una retribución de 6€.

Ejercicio: En una operación financiera, invirtiendo hoy 10.000€ se obtienen al cabo de 3 meses 10.200€. Se pide:

a) Representad la equivalencia financiera de dicha operación.

$$(10.000, 0) \approx \left(10.200, \frac{3}{12}\right)$$



b) Calculad los precios financieros de interés de dicha operación.

Precio total = $Y = \; 10.200 - 10.000 = 200€$

Precio unitario (Interés efectivo) $= I = \dfrac{200}{10.000} = 0,02 \equiv 2\%$ trimestral

Precio unitario y medio (Interés nominal) $= i = \dfrac{200}{10.000 \cdot \frac{3}{12}} = \dfrac{0,02}{\frac{3}{12}} = 0,08 \equiv 8\%$ anual

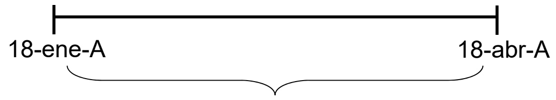
IMPORTANTE: Cuando el plazo temporal de una operación financiera se expresa en días o en fechas de calendario, el valor de t (en años) dependerá del criterio o base que se utilice. En general hay 4 bases:

• Si el plazo es inferior a 1 año:

Criterio o Base	Significado
Base $\frac{30}{360}$	Numerador: Todos los meses tienen 30 días Denominador: Siempre 360
Base $\frac{Act}{360}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: Siempre 360
Base $\frac{Act}{365}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: Siempre 365
Base $\frac{Act}{Act}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: 365 o 366 (si es bisiesto)

• Si el plazo es superior a 1 año, al número de años enteros se le añade la fracción de año restante calculada según alguna de las bases anteriores.

Ejemplo: ¿Qué plazo temporal *t* hay entre el 18 de enero y el 18 de abril de un año bisiesto?



$$T'-T=t$$

Criterio o Base	Valor de t
Base $\frac{30}{360}$	$t=\frac{12+30+30+18}{360}=\frac{90}{360}=\frac{1}{4}=0{,}25$
Base $\frac{\text{Act}}{360}$	$t=\frac{13+29+31+18}{360}=\frac{91}{360}=0{,}252\overline{7}$
Base $\frac{\text{Act}}{365}$	$t=\frac{13+29+31+18}{365}=\frac{91}{365}=0{,}249315$
Base $\frac{\text{Act}}{\text{Act}}$	$t=\frac{13+29+31+18}{366}=\frac{91}{366}=0{,}248634$

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Equivalencia financiera
- Operación simple
- Operación parcialmente compleja
- Operación totalmente compleja
- Precios financieros
- Precio total de interés
- Interés efectivo
- Interés nominal o TIN
- Criterios o bases de cálculo del plazo

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

1. Operación financiera. Regímenes financieros

3.1 Definición

Régimen financiero (R.F.) es la expresión formal del conjunto de características, pactos o acuerdos, que establecen los sujetos de una operación financiera. Estos pactos hacen referencia a cómo se calcula el precio de la operación y cuándo se hace efectivo.

3.2 Clasificación

Los regímenes financieros se pueden clasificar:

1) Según la forma de cálculo del precio:

R.F simples:
Son aquellos en que el plazo de la operación se considera como un único periodo, y el precio se calcula una sola vez. Se acostumbran a utilizar en operaciones a corto plazo.

R.F. compuestos:
Son aquellos en que el plazo de la operación se subdivide en periodos, y el precio se calcula para cada uno de ellos.

2) <u>Según el punto de vista del sujeto económico</u>:

R.F. de INTERÉS o CAPITALIZACIÓN:

Son aquéllos que aparecen cuando se estudia la operación financiera desde el punto de vista del sujeto activo.

R.F. de DESCUENTO o ACTUALIZACIÓN:

Son aquéllos que aparecen cuando se estudia la operación financiera desde el punto de vista del sujeto pasivo.

Como consecuencia de estas clasificaciones desarrollaremos los siguientes regímenes financieros:

	R.F. INTERÉS o CAPITALIZACIÓN	R.F. DESCUENTO o ACTUALIZACIÓN
R.F. SIMPLES	**R.F. INTERÉS SIMPLE VENCIDO**	**R.F. DESCUENTO SIMPLE O COMERCIAL**
R.F. COMPUESTOS	**R.F. INTERÉS COMPUESTO A TANTO CONSTANTE**	
	R.F. INTERÉS COMPUESTO A TANTO VARIABLE	

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- R.F. simple
- R.F. compuesto
- R. F. de interés
- R.F. de descuento

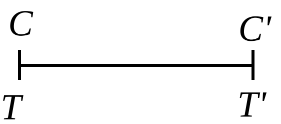
Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

1. Operación financiera. Regímenes financieros

4. Regímenes financieros simples
- 4.1. Régimen financiero de interés simple vencido
- 4.2. Régimen financiero de descuento comercial

4.1 R.F. interés simple vencido

En el R.F. de interés simple vencido, los sujetos de la operación financiera elemental



acuerdan los siguientes **pactos**:

1) El precio total de la operación, $\boldsymbol{Y}$**,** es proporcional a la cuantía inicial, $\boldsymbol{C}$**,** y al plazo de la operación, $\boldsymbol{T'-T = t}$, mediante un tanto de proporcionalidad $\boldsymbol{i > 0}$ (en tanto por uno).

$$Y = C \cdot i \cdot (T' - T) = C \cdot i \cdot t$$

2) Dicho precio total se recibe al final de la operación $\boldsymbol{T'}$ junto con la cuantía inicial, obteniéndose en total $\boldsymbol{C'}$**.**

$$C' = C + Y$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas con los dos pactos, y desarrollando, deducimos su **expresión formal**:

$$C' = C + Y = C + \underbrace{C \cdot i \cdot (T' - T)}_{Y} = C \cdot \left(1 + i \cdot (T' - T)\right)$$

$$\boxed{C' = C \cdot (1 + i \cdot t)}$$

Precio (interés) total: $Y = C' - C = C \cdot i \cdot t$

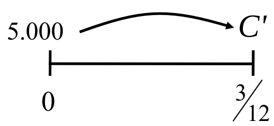
Precio unitario o Interés efectivo: $I = \frac{Y}{C} = \frac{C \cdot i \cdot t}{C} = i \cdot t$

Precio unitario y medio o Interés nominal: $i = \frac{I}{t} = \frac{i \cdot t}{t} = i$

Este R.F. suele utilizarse en productos como cuentas corrientes, imposiciones a plazo fijo, libretas de ahorro, Letras del Tesoro, …

Ejemplo: En la cuenta corriente de un Banco, un cliente ha tenido la cantidad de 5.000€ durante 3 meses. Si esta cuenta ha liquidado los intereses en régimen financiero de interés simple vencido a un interés del 2% anual. Calculad:

a) Los intereses que al vencimiento habrá obtenido dicho cliente.
b) El capital final que tendrá en la cuenta corriente.
c) Los precios financieros.



a) Los intereses (precio total) en R.F. de interés simple vencido son:

$$Y = Intereses = C \cdot i \cdot t = 5.000 \cdot 0,02 \cdot \frac{3}{12} = 25€$$

NOTA: En el mercado estos intereses son brutos porque se les aplica una retención fiscal (actualmente del 19%), por lo que, realmente, lo que ingresa el cliente es menos. Este aspecto fiscal NO lo tendremos en cuenta.

b) El capital final que tendrá el cliente en la cuenta corriente será:

$$C' = \begin{cases} C + Y = 5.000 + 25 = 5.025€ \\ C \cdot (1 + i \cdot t) = 5.000 \cdot \left(1 + 0,02 \cdot \dfrac{3}{12}\right) = 5.025€ \end{cases}$$

c) Los precios financieros son:

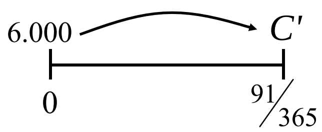
$$Y = C' - C = 5.025 - 5.000 = 25€$$

$$I = \frac{Y}{C} = \frac{25}{5.000} = 0,005 \equiv 0,5\% \quad \text{en 3 meses}$$

$$i = \frac{I}{t} = \frac{0,005}{\frac{3}{12}} = 0,02 \equiv 2\%$$

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
4. Regímenes financieros simples

Ejercicio: Calculad el capital final y los precios financieros que se obtienen al colocar 6.000€ en un plazo fijo con vencimiento dentro de 91 días (Base Act/365) a un interés simple vencido del 1,75% anual.



El capital final es: $C' = 6.000 \cdot \left(1 + 0,0175 \cdot \dfrac{91}{365}\right) = 6.026,18€$

Los precios financieros son:

$$Y = C' - C = 6.026,18 - 6.000 = 26,18€$$

$$I = \frac{Y}{C} = \frac{26,18}{6.000} = 0,004363\widehat{3} \equiv 0,4363\widehat{3}\% \quad \text{en 91 días}$$

$$i = \frac{I}{t} = \frac{0,004363\widehat{3}}{91/365} = 0,0175 \equiv 1,75\%$$

Ejercicio: En un anuncio de prensa ofrecen una inversión en R.F. de interés simple vencido según la cual, colocando hoy un capital de 50.000€ se reciben al cabo de 9 meses 51.687,50€. Calculad el tipo de interés nominal al que resulta dicha inversión.

$$\begin{array}{ccc} 50.000 & \longrightarrow & 51.687,50 \\ \vdash & \text{———————} & \dashv \\ 0 & & 9/12 \end{array}$$

Sustituyendo todos los datos conocidos en la expresión formal del R.F. de interés simple vencido:

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$51.687,50 = 50.000 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{9}{12}\right)$$

Despejando se obtiene i: $i = 0,045 \equiv 4,50\%$

4.2 R.F. descuento comercial

En el R.F. de descuento comercial, los sujetos de la operación financiera elemental

$$\begin{array}{ccc} C & & C' \\ \vdash & \text{———————} & \dashv \\ T & & T' \end{array}$$

acuerdan los siguientes **pactos**:

1) Se anticipa una cuantía disponible en el futuro a un momento anterior. El precio total de la operación, $\boldsymbol{Y}$**,** es proporcional a la cuantía final, $\boldsymbol{C'}$**,** también llamada **valor nominal**, y al plazo de la operación, $\boldsymbol{T'-T} = \boldsymbol{t}$, mediante un tanto de proporcionalidad expresado en tanto por uno $\boldsymbol{d} > \mathbf{0}$ (denominado **tasa de descuento**).

$$Y = C' \cdot d \cdot (T' - T) = C' \cdot d \cdot t$$

2) Dicho precio total se paga al inicio de la operación $\boldsymbol{T}$ deduciéndose de la cuantía final, recibiéndose la cuantía $\boldsymbol{C}$**,** también llamada **valor líquido o efectivo**.

$$C = C' - Y$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas con los dos pactos, y desarrollando, deduciremos su **expresión formal**:

$$C = C' - Y = C' - \underbrace{C' \cdot d \cdot (T' - T)}_{Y} = C' \cdot \left(1 - d \cdot (T' - T)\right)$$

$$\boxed{C = C' \cdot (1 - d \cdot t)}$$

Precio (descuento) total: $Y = C' - C = C' \cdot d \cdot t$

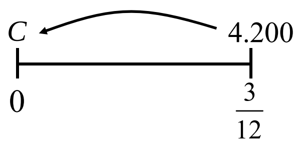
Precio unitario o Descuento efectivo: $D = \dfrac{Y}{C'} = \dfrac{C' \cdot d \cdot t}{C'} = d \cdot t$

Precio unitario y medio o Descuento nominal: $d = \dfrac{D}{t} = \dfrac{d \cdot t}{t} = d$

Este R.F. se utiliza en productos financieros como efectos comerciales, letras de cambio, confirming, …

Ejercicio: Una empresa descuenta en régimen financiero de descuento comercial un efecto comercial de nominal 4.200€ y vencimiento dentro de 3 meses. Si la entidad financiera lo descuenta a una tasa del 4,50% anual, se pide:

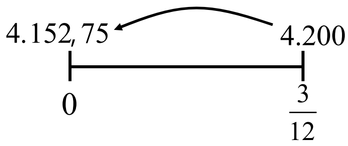
a) Obtened el valor líquido o efectivo $\boldsymbol{C}$ que percibirá la empresa.



$$C = C' \cdot (1 - d \cdot t) = 4.200 \cdot \left(1 - 0,0450 \cdot \frac{3}{12}\right) = 4.152,75€$$

NOTA: Si el efecto comercial estuviera expresado en días o fechas de calendario, para el cálculo del plazo $\boldsymbol{t}$, siempre que no se diga lo contrario, se utilizará el criterio Act/360.

b) Calculad los precios financieros de descuento.



Precio (descuento) total:

$$Y = C' - C = 4.200 - 4.152,75 = 47,25€$$

Precio unitario o Descuento efectivo:

$$D = \frac{Y}{C'} = \frac{47,25}{4.200} = 0,01125 \equiv 1,125\% \quad \text{en 3 meses}$$

Precio unitario y medio o Descuento nominal:

$$d = \frac{D}{t} = \frac{0,01125}{\frac{3}{12}} = 0,045 \equiv 4,50\%$$

Mientras que en el R.F. de interés simple vencido se paga el precio de la operación al final a un tanto de interés i, en el R.F. de descuento comercial se paga el precio de la operación al inicio a un tanto de descuento d.

Vamos a encontrar la equivalencia entre ambos tantos.

Del R.F. de interés simple vencido: $C' = C \cdot (1 + i \cdot t)$

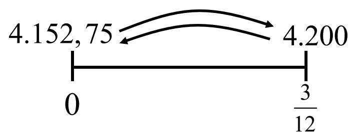
Del R.F. de descuento comercial: $C = C' \cdot (1 - d \cdot t)$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera:

$$C' = C' \cdot (1 - d \cdot t)(1 + i \cdot t) \Leftrightarrow (1 - d \cdot t)(1 + i \cdot t) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(1 + i \cdot t) = \frac{1}{1 - d \cdot t} \Leftrightarrow i \cdot t = \frac{1}{1 - d \cdot t} - 1 = \frac{d \cdot t}{1 - d \cdot t} \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{d}{1 - d \cdot t}}$$

Ejemplo: En el ejercicio anterior una empresa había recibido de la entidad financiera un valor efectivo de 4.152,75€ por descontar un efecto de valor nominal 4.200€ con vencimiento al cabo de 3 meses. Calculad el tanto nominal de interés simple vencido al que le ha resultado la operación a la entidad financiera.



Aplicando la expresión obtenida:

$$i = \frac{d}{1-d\cdot t} = \frac{0,045}{1-0,045\cdot\frac{3}{12}} = 0,0455 \equiv 4,55\%$$

Este tipo de interés también se podría haber obtenido a partir de la expresión del interés simple vencido:

$$4.200 = 4.152,75\cdot\left(1+i\cdot\frac{3}{12}\right) \text{ de donde: } i = 0,0455 \equiv 4,55\%$$

Incidencia de las comisiones y gastos en el descuento comercial:

A veces, las entidades financieras cobran en el descuento comercial, además de un interés, un porcentaje de comisión g. Esta comisión se aplica **siempre** sobre el **valor nominal** del efecto, de tal forma que, para obtener el valor líquido o efectivo $\boldsymbol{C}$ que finalmente recibirá la empresa se calculará:

$$C = \underbrace{C'}_{\text{Valor nominal}} - \underbrace{C'\cdot d\cdot t}_{\text{Descuento}} - \underbrace{g\cdot C'}_{\text{Comisiones}} = C'\cdot\left(1-d\cdot t-g\right)$$

Importante: Si una operación de descuento comercial tiene comisiones, para calcular el tipo nominal de interés simple vencido equivalente $\boldsymbol{i}$ al que ha resultado la operación, es necesario utilizar la expresión conocida del R.F. de interés simple vencido y despejar el valor de $\boldsymbol{i}$.

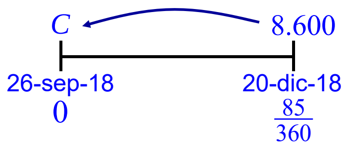
Ejercicio: Una empresa tiene la siguiente letra de cambio de valor nominal 8.600€ y vencimiento el 20 de diciembre de 2018:


Barcelona
euros
8.600,00€
CLASE 3ª
21-7-2018
20 de diciembre de 2018
134,63€
Ocho mil seiscientos euros --
0 A 0250067
BANCO SEISMIL
Oficina Principal
08034 Barcelona
6000-0000-77-1234567890
Librador/Lliurador/a:
EMPRESA COMPRADORA
Avgda. Diagonal, 690
08034 Barcelona
EMPRESA VENDEDORA
Domicilio

Si hoy, día 26 de septiembre de 2018, la empresa lo lleva al Banco, que se lo descuenta en R.F. de descuento comercial a una tasa del 6% anual y le cobra una comisión del 0,7% sobre el nominal, se pide:

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
4. Regímenes financieros simples

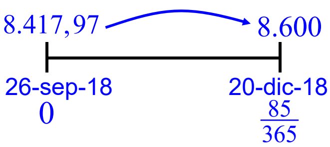
a) Calculad el valor líquido o efectivo C que hoy percibirá la empresa.



$$C = 8.600\left(1 - 0,06 \cdot \frac{85}{360} - 0,007\right) = 8.417,97€$$

Valor nominal:	8.600€
Descuento:	- 121,83€
Comisiones:	- 60,20€
Valor efectivo:	8.417,97€

b) Obtened la tasa anual de interés simple vencido al que ha resultado la operación anterior (usar criterio Act/365).

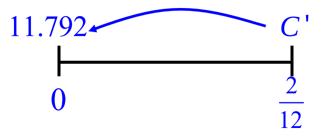


$$8.417,97 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{85}{365}\right) = 8.600$$

De donde: $i = 0,09286 \equiv 9,286\%$

Ejercicio: De un efecto que vence dentro de 2 meses, al descontarlo en R.F. de descuento comercial al 8% anual con una comisión del 0,4% sobre el nominal, se ha percibido una cuantía de 11.792€, se pide:

a) Obtened el valor nominal del efecto.



Planteamos la ecuación y despejamos C':

$$11.792 = C' \cdot \left(1 - 0,08 \cdot \frac{2}{12} - 0,004\right) \Rightarrow C' = 12.000€$$

b) Obtened el tipo de interés simple al que ha resultado la operación.

$$11.792 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{2}{12}\right) = 12.000 \quad \Rightarrow i = 0,1058 \equiv 10,58\%$$

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
4. Regímenes financieros simples

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Pactos del R.F. de interés simple vencido
- Expresión formal del R.F. de interés simple vencido
- Precios del R.F. de interés simple vencido
- Pactos del R.F. de descuento simple comercial
- Expresión formal del R.F. de descuento simple comercial
- Precios del R.F. de descuento simple comercial
- Valor nominal
- Valor líquido o efectivo
- Relación entre tanto anual de interés simple vencido y tanto anual de descuento simple

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

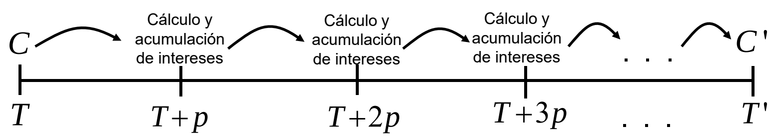
1. Operación financiera. Regímenes financieros

5.1 R.F. interés compuesto a tanto constante

Antes de explicar los pactos y deducir la fórmula del R.F. de interés compuesto a tanto constante, vamos a realizar algunas aclaraciones previas sobre la notación que se va a utilizar.

1) El plazo total de la operación $t=T'-T$, se va a dividir en periodos de duración p años, denominados **periodos de capitalización.** Por ejemplo, si los intereses se calculan mensualmente, $p=\frac{1}{12}$, si los intereses se calculan trimestralmente, $p=\frac{1}{4}$, si los intereses se calculan semestralmente, $p=\frac{1}{2}$ y así sucesivamente.

   Al final de **cada** período se calcularán y acumularán, al capital inicial del periodo, los intereses generados en ese periodo, es decir, existirá reinversión de los intereses.



2) Por simplificar la notación, en lugar de usar el periodo de capitalización p, se utiliza la **frecuencia de capitalización, m,** es decir, m representa el número de veces que se van a calcular intereses en un año, siendo por tanto: $m = \frac{1}{p}$

Por ejemplo, si los intereses se calculan mensualmente, $p = \frac{1}{12}$ y $m=12$, si los intereses se calculan trimestralmente, $p = \frac{1}{4}$ y $m = 4$, si los intereses se calculan semestralmente, $p = \frac{1}{2}$ y $m = 2$, etc.

3) A veces, se utiliza n para indicar el **número total de periodos** en que se divide el plazo de la operación. En este sentido, $n = m \cdot t$.

Por ejemplo, si los intereses de la operación se van a calcular semestralmente ($m=2$) y la operación dura 5 años y medio ($t=5,5$), entonces $n=2 \cdot 5,5=11$. Y si los intereses de la operación se van a calcular mensualmente ($m=12$) y la operación dura 8 meses ($t=8/12$), entonces $n=12 \cdot 8/12=8$.

4) En interés compuesto, al existir capitalización periódica de los intereses, el **tipo de interés nominal o anual** se suele expresar de la siguiente manera:

$$i\% \left\{ \begin{matrix} \text{nominal} \\ \text{anual} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{capitalizable} \\ \text{acumulable} \\ \text{pagadero} \\ \text{liquidable} \\ \text{con devengo} \\ \text{periodificable, ...} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{anualmente} \\ \text{semestralmente} \\ \text{trimestralmente} \\ \text{mensualmente, ...} \end{matrix} \right\}$$

En general, este tanto de interés nominal que va acompañado de la información de la frecuencia de capitalización se representa por i_m.

5) El cociente entre el interés nominal y la frecuencia de capitalización $\boldsymbol{m}$ se denomina **tanto de interés efectivo** y se representa por $\boldsymbol{I_m}$:

$$\boxed{I_m = \frac{i_m}{m}}$$

Este tanto representa el interés que se cobra (o paga) por unidad monetaria en cada periodo de capitalización. En este caso, se enuncia:

$$I\%(\text{efectivo})\left\{\begin{array}{c}\text{anual}\\ \text{semestral}\\ \text{trimestral}\\ \text{mensual, ...}\end{array}\right\}$$

Cualquier tipo de interés existente en el mercado, o es un interés nominal o es un interés efectivo.

Ejercicio: Especificad a qué tipo de interés se refieren cada una de las siguientes expresiones indicando la correspondiente frecuencia:

a) Una cuenta que rinde el 3% de interés nominal acumulable semestralmente.

$$i_2 = 0{,}03 \equiv 3\%$$

b) Préstamo pactado al 6% de interés anual pagadero mensualmente.

$$i_{12} = 0{,}06 \equiv 6\%$$

c) Plazo fijo que se ha pactado a un 0,8% efectivo trimestral.

$$I_4 = 0{,}008 \equiv 0{,}8\%$$

d) Depósito que ofrece un 2,75% anual.

$$i_1 = I_1 = 0{,}0275 \equiv 2{,}75\%$$

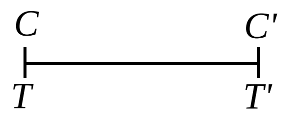
e) Cuenta corriente que rinde a un 1,20% anual liquidable bimestralmente.

$$i_6 = 0{,}012 \equiv 1{,}20\%$$

f) Producto financiero que remunera un 0,75% cuatrimestral.

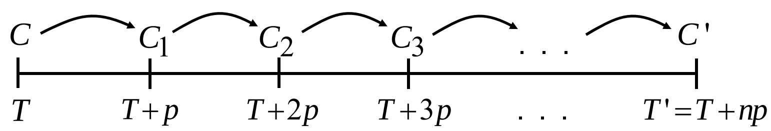
$$I_3 = 0{,}0075 \equiv 0{,}75\%$$

Ahora ya estamos en condiciones de definir los **pactos** que realizan los sujetos de la siguiente operación financiera elemental en el R.F. de interés compuesto a tanto constante:



1) El plazo de la operación ***t*=*T'*-*T***, se fracciona en periodos de capitalización de duración ***p*** años.
2) Al final de <u>cada</u> período se calcularán los intereses generados en el mismo multiplicando la cuantía existente al inicio del periodo por el tanto de interés efectivo de la operación I_m expresado en tanto por uno.
3) La cuantía acumulada al final de cada periodo coincide con la cuantía inicial del siguiente periodo, o dicho de otra forma, los intereses generados se reinvierten o acumulan.
4) El precio total de la operación **sólo** se recibe al final del plazo de la misma, en el momento ***T'***.

A continuación vamos a deducir la expresión formal del R.F. de interés compuesto a tanto constante, suponiendo que se fracciona el plazo de la operación ***T'*-*T*** = ***t*** en ***n*** periodos enteros de duración ***p*** años.



Las cuantías acumuladas en la operación al final de cada periodo serán:

Diferimiento	Cuantía acumulada
T	C
$T+p$	$C_1 = C + C \cdot I_m = C \cdot (1+I_m)$
$T+2p$	$C_2 = C_1 + C_1 \cdot I_m = C_1 \cdot (1+I_m) = C \cdot (1+I_m)^2$
$T+3p$	$C_3 = C_2 + C_2 \cdot I_m = C_2 \cdot (1+I_m) = C \cdot (1+I_m)^3$
...	...
$T' = T+np$	$C' = C \cdot (1+I_m)^n$

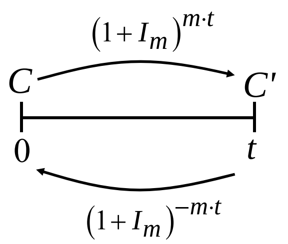
Y puesto que sabemos con anterioridad que ***n=m·t,*** obtendremos la expresión formal que más utilizaremos en la resolución de los ejercicios prácticos del interés compuesto a tanto constante.

$$\boxed{C' = C \cdot (1+I_m)^{m \cdot t}}$$

Además de para **capitalizar**, la expresión del R.F. de interés compuesto a tanto constante se puede utilizar también para **actualizar** capitales.

$$C = C' \cdot (1+I_m)^{-m \cdot t}$$

Actualización

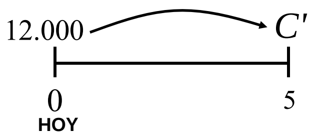


$$C' = C \cdot (1+I_m)^{m \cdot t}$$

Capitalización

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
5. Regímenes financieros compuestos

Ejemplo: Calculad el capital final que se obtendrá al invertir 12.000€ durante 5 años en una cuenta que rinde el 3% de interés nominal acumulable trimestralmente.



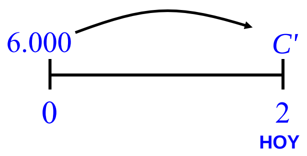
$C = 12.000$

$t = 5$

$$\left.\begin{array}{l} i_m = 0{,}03 \\ m = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Por tanto,} \quad i_4 = 0{,}03 \qquad I_4 = \frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075$$

$$C' = 12.000 \cdot (1+0{,}0075)^{4 \cdot 5} = 13.934{,}21€$$

Ejercicio: Hace 2 años se invirtieron 6.000€ en un plazo fijo que ofrece un interés del 3,60% anual pagadero mensualmente. Calculad el importe que se habrá retirado hoy del plazo fijo.



$C = 6.000$

$t = 2$

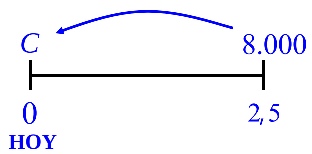
$i_{12} = 0{,}0360 \Rightarrow I_{12} = \dfrac{0{,}0360}{12} = 0{,}003$

$$C' = 6.000 \cdot (1 + 0{,}003)^{2 \cdot 12} = 6.447{,}24€$$

NOTA: Hay que destacar que en muchas operaciones del mercado financiero existe devengo pero no acumulación de intereses.

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
5. Regímenes financieros compuestos

Ejercicio: Una persona desea tener un capital de 8.000 € dentro de 2 años y medio para comprarse una moto. Calculad el capital que debe ingresar hoy en una cuenta que ofrece el 2% de interés anual capitalizable bimestralmente para cumplir el objetivo.



$C' = 8.000$

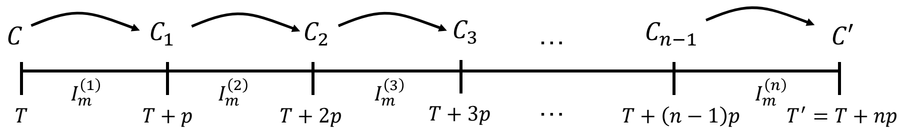
$t = 2{,}5$

$i_6 = 0{,}02 \Rightarrow I_6 = \dfrac{0{,}02}{6} = 0{,}00\widehat{3}$

$$C = 8.000 \cdot (1 + 0{,}00\widehat{3})^{-6 \cdot 2{,}5} = 7.610{,}47€$$

5.2 R.F. Interés compuesto a tanto variable

A lo largo del plazo de una operación, el tipo de interés puede ir variando debido a las distintas condiciones que van apareciendo en los mercados financieros. Llamando $I_m^{(s)}$ al tanto efectivo de cada uno de los $\boldsymbol{n}$ periodos en que se ha fraccionado el plazo de la operación, gráficamente tendríamos:

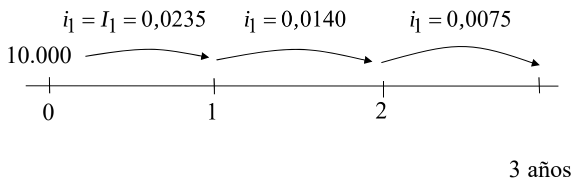


Sabiendo que las cuantías devengadas se van acumulando al capital al final de cada periodo, obtendremos la expresión formal del R.F. de interés compuesto a tanto variable:

$$C' = C \cdot \prod_{s=1}^{n} \left[1 + I_m^{(s)}\right]$$

Ejemplo: La entidad Z ofrece un depósito de 10.000€ durante 3 años a un interés liquidable anualmente y variable cada año. Si los tipos de interés nominales son del 2,35%, 1,40% y 0,75% respectivamente, ¿cuál será la cuantía final acumulada?

Esquema:



Cuantía acumulada a los tres años:

$$C' = \underbrace{\underbrace{10.000 \cdot (1+0{,}0235)^1}_{10.235} \cdot (1+0{,}0140)^1}_{10.378{,}29} \cdot (1+0{,}0075)^1 = 10.456{,}13€$$

Ejercicio: Una entidad financiera ofrece el siguiente depósito a plazo de 3 años:

DEPÓSITO CRECIENTE 0,75 – 1,40 – 2,35

Rentabilidad a 3 años con interés creciente

Liquidación de intereses a elección: anual o al vencimiento
Disponibilidad inmediata, sin penalización
Tipo de interés creciente año tras año:

- ✓ **Primer año: 0,75%**
- ✓ **Segundo año: 1,40%**
- ✓ **Tercer año: 2,35%**

En el caso de **liquidación de intereses a vencimiento**, ¿obtendremos mayor capital final con este depósito o con el ofrecido por la entidad Z del ejercicio anterior?

El capital final a los 3 años será el mismo en ambos depósitos.

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
5. Regímenes financieros compuestos

Ejemplo: Si en el depósito creciente del ejercicio anterior, la **liquidación de intereses se realizara anualmente y NO se acumularan,** un cliente que invirtiera 10.000€ recibiría anualmente y durante cada uno de los 3 años, respectivamente:

Al final del primer año: $10.000 \cdot 0,0075 \cdot 1 = 75€$

Al final del segundo año: $10.000 \cdot 0,0140 \cdot 1 = 140€$

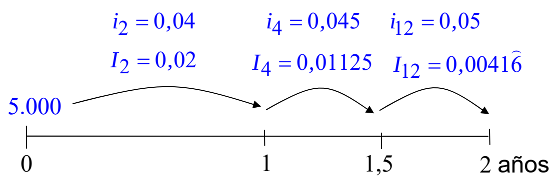
Al final del tercer año: $10.000 \cdot 0,0235 \cdot 1 = 235€$

Si esos intereses los ingresa en una cuenta vinculada que ofrece un interés del 0%, al final de los 3 años sólo dispondrá de:

$$10.000 + 75 + 140 + 235 = 10.450€$$

Obsérvese que este capital es inferior al obtenido en los ejercicios anteriores como consecuencia de la reinversión o acumulación de los intereses que provoca el interés compuesto.

Ejercicio: Calculad la cuantía final que se obtendrá al invertir 5.000€ en un depósito a 2 años que rinde un 4% anual acumulable semestralmente el primer año, un 4,5% anual pagadero trimestralmente durante el primer semestre del segundo año y un 5% anual acumulable mensualmente durante el segundo semestre del segundo año.



Cuantía acumulada a los dos años:

$$C' = 5.000 \cdot (1+0{,}02)^{2\cdot 1} \cdot (1+0{,}01125)^{4\cdot\frac{1}{2}} \cdot \left(1+0{,}0041\widehat{6}\right)^{12\cdot\frac{1}{2}} = 5.454{,}09€$$

5.3 Tantos de interés efectivos equivalentes

Supongamos que en R.F. de interés compuesto tenemos una operación financiera de duración t años en la que, invirtiendo una cuantía inicial C al tanto efectivo de frecuencia m, I_m, se obtiene una cuantía final igual a C'. Es decir:

$$C' = C \cdot \left(1+I_m\right)^{m\cdot t}$$

Ahora queremos saber qué tanto efectivo de frecuencia k, I_k, debería aplicarse a la misma cuantía inicial C durante el mismo plazo de t años para obtener la misma cuantía final C', es decir:

$$C' = C \cdot \left(1+I_k\right)^{k\cdot t}$$

Si igualamos ambas expresiones obtendremos la relación existente entre tantos efectivos de interés de diferentes frecuencias en R.F. de interés compuesto, también denominados **tantos efectivos equivalentes**:

$$\boxed{(1+I_k)^k = (1+I_m)^m} \quad \text{o bien} \quad \boxed{I_k = (1+I_m)^{m/k} - 1}$$

Esto significa que **toda cuantía monetaria** valorada en R.F. de interés compuesto a cualquiera de los dos tantos efectivos generará el mismo capital final con independencia del **plazo temporal** de la operación y del **capital inicial**.

Por ello se dice que I_m e I_k son **equivalentes**.

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
5. Regímenes financieros compuestos

Ejemplo: Calculad el tanto efectivo de interés semestral equivalente al 4% de interés nominal capitalizable mensualmente.

$$i_{12} = 0{,}04 \Rightarrow I_{12} = \frac{0{,}04}{12} \Rightarrow I_{12} = 0{,}00\widehat{3}$$

$$(1+I_2)^2 = (1+I_{12})^{12}$$

$$I_2 = \left(1+0{,}00\widehat{3}\right)^{12/2} - 1 = 0{,}02017 \equiv 2{,}017\%$$

Esto significa que cualquier cuantía monetaria invertida al 4% de interés nominal capitalizable mensualmente generará el mismo capital final que si se invirtiera al 2,017% efectivo semestral cualquiera que sea el plazo de la operación.

Ejercicio: Calculad el tanto efectivo de interés bimestral equivalente al 5% de interés anual pagadero trimestralmente.

$$i_4 = 0{,}05 \Rightarrow I_4 = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125 \equiv 1{,}25\%$$

$$(1+I_6)^6 = (1+I_4)^4$$

$$I_6 = (1+0{,}0125)^{4/6} - 1 = 0{,}008316 \equiv 0{,}8316\%$$

Ejercicio: Calculad el tanto efectivo de interés trimestral equivalente al 1% mensual.

$$(1+I_4)^4 = (1+I_{12})^{12}$$

$$I_4 = (1+0{,}01)^{12/4} - 1 = 0{,}030301 \equiv 3{,}0301\%$$

5.4 Interés efectivo anual y TAE

Uno de los tantos de interés efectivo más utilizado en el mercado es el de frecuencia anual, es decir, el **tanto efectivo anual, I_1**.

Utilizando la metodología anterior, podemos conocer el tanto efectivo anual equivalente a cualquier interés efectivo o nominal:

$$I_k = (1+I_m)^{m/k} - 1 \xrightarrow{si\ k=1} \boxed{I_1 = (1+I_m)^m - 1}$$

El interés efectivo anual de una operación representa la tasa de interés que se habría obtenido a final de año en una operación, si todos los intereses periódicos percibidos se hubieran reinvertido o acumulado dentro de la propia operación.

Ejercicio: Calculad el tanto efectivo anual equivalente al 2% de interés efectivo cuatrimestral.

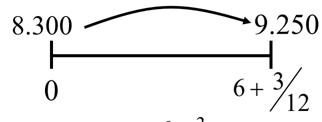
$$I_3 = 0{,}02$$

$$I_1 = (1+0{,}02)^3 - 1 = 0{,}061208 \equiv 6{,}121\%$$

También se puede obtener el **tanto efectivo anual, I_1,** de cualquier operación a partir de la fórmula del R.F. de interés compuesto, una vez conocidas las cuantías inicial, final y el plazo de la operación.

$$C' = C \cdot (1+I_1)^t \Rightarrow \boxed{I_1 = \sqrt[t]{\left(\frac{C'}{C}\right)} - 1 = \left(\frac{C'}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1}$$

Ejemplo: Obtened el interés efectivo anual de una operación por la que invirtiendo hoy 8.300€ se obtienen al cabo de 6 años y 3 meses 9.250€.



$$8.300 \cdot (1+I_1)^{6+\frac{3}{12}} = 9.250€$$

$$I_1 = \sqrt[6+\frac{3}{12}]{\frac{9.250}{8.300}} - 1 = \left(\frac{9.250}{8.300}\right)^{\frac{1}{6+\frac{3}{12}}} - 1 = 0{,}01749 \equiv 1{,}749\%$$

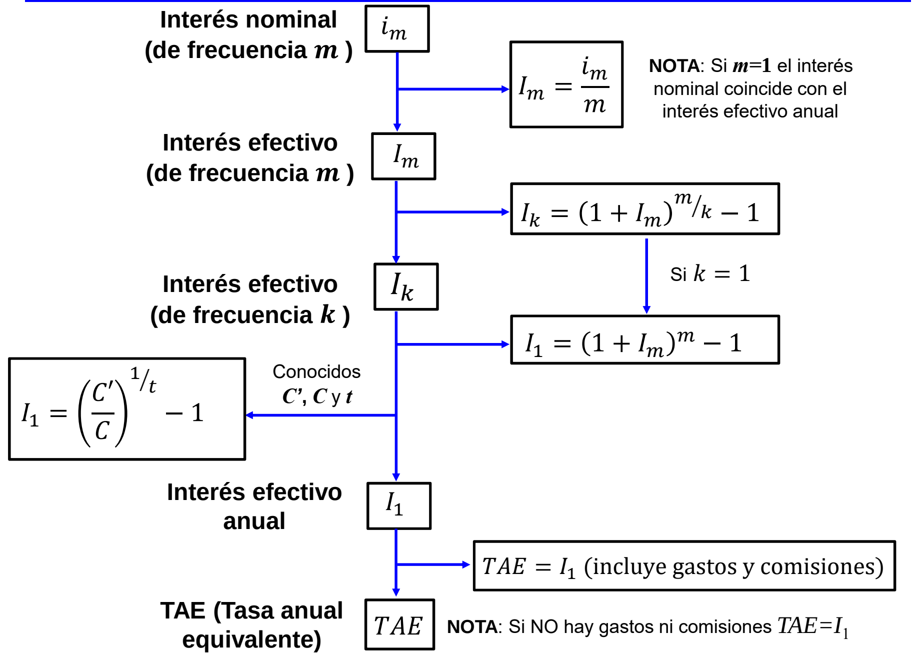
Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
5. Regímenes financieros compuestos

Desde el año 1990 el Banco de España obliga a que se publique la **TAE** de cualquier operación financiera. La TAE es el tanto efectivo anual de una operación una vez que se han tenido en cuenta en la misma los gastos y comisiones que indica el Banco de España.

Los gastos y comisiones que deben formar parte de la TAE han ido cambiando desde 1990 hasta hoy.

Si una operación no tiene comisiones ni gastos, la TAE será igual que el tanto efectivo anual.

Al ser la TAE un interés efectivo anual y obtenerse a partir de la expresión del interés compuesto, su valor **presupone también** que los intereses se reinvierten o acumulan dentro de la propia operación, aunque pueda ser que esto no sea así.



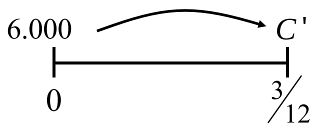
Ejemplo: Un banco concede hoy un préstamo de 6.000€ a devolver dentro de 3 meses a un interés del 8% nominal acumulable mensualmente. Si el Banco cobra una comisión de apertura de 100€, se pide:

a) Calculad la cuantía a devolver al Banco dentro de 3 meses.

b) Calculad el tanto efectivo anual del préstamo.

c) Calculad la TAE de esta operación de préstamo.

a) La cuantía a devolver al Banco dentro de 3 meses será:



$$i_{12} = 0{,}08$$

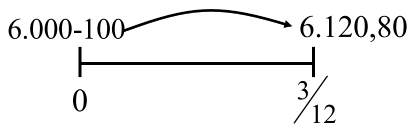
$$I_{12} = \frac{0{,}08}{12} = 0{,}00\widehat{6}$$

$$C' = 6.000 \cdot \left(1 + 0{,}00\widehat{6}\right)^3 = 6.120{,}80€$$

b) El tanto efectivo anual del préstamo es:

$$I_1 = \left(1+0{,}00\widehat{6}\right)^{12} - 1 = 0{,}0830 \equiv 8{,}30\%$$

c) La TAE de esta operación de préstamo es:



$$6.120{,}80 = 5.900 \cdot \left(1+TAE\right)^{3/12} \Rightarrow TAE = 0{,}15831 \equiv 15{,}831\%$$

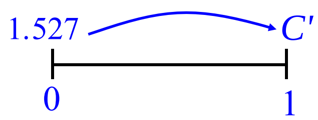
Ejercicio: Una cuenta de ahorro ha mantenido un saldo constante de 1.527€ durante 1 año. Dicha cuenta abona un interés anual del 1,25% y tiene una comisión de mantenimiento de 10€ que se liquida a final de año. Calculad:

a) La cuantía acumulada en la cuenta al cabo de un año antes de pagar la comisión y después de haberla pagado.

b) El tipo de interés efectivo anual de la cuenta.

c) La TAE de la cuenta.

a) La cuantía acumulada en la cuenta al año, antes de pagar la comisión será:



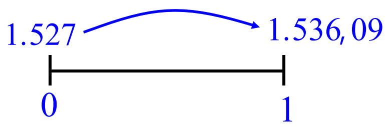
$$C' = 1.527 \cdot \left(1+0{,}0125\right)^{1} = 1.546{,}09€$$

La cuantía después de haber pagado la comisión será:

$$1.546,09 - 10 = 1.536,09€$$

b) El tanto efectivo anual es del $1,25\%$

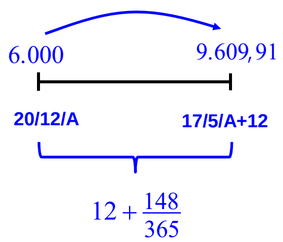
c) Para calcular la TAE debe considerarse la comisión de mantenimiento. Luego:



$$1.536,09 = 1.527 \cdot (1 + TAE)^1 \Rightarrow TAE = 0,00595 \equiv 0,595\%$$

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
5. Regímenes financieros compuestos

Ejercicio: Calculad la TAE de un plan de pensiones que, por una aportación de 6.000€ el 20 de diciembre del año A garantiza, el día 17 de mayo de A+12, un capital de 9.609,91€.



Al no existir comisiones, la TAE coincide con el interés efectivo anual.

$$9.609,91 = 6.000 \cdot (1 + I_1)^{12+\frac{148}{365}}$$

$$I_1 = TAE = \sqrt[12+\frac{148}{365}]{\left(\frac{9.609,91}{6.000}\right)} - 1 = 0,0387 \equiv 3,87\%$$

Ejercicio: Una entidad financiera ofrece un depósito sin comisiones a una TAE del 1,50%. Si los intereses se pagan una sola vez al vencimiento de 6 meses, se pide:

a) Calculad los intereses que pagará la entidad al vencimiento por un depósito de 50.000€.

$$C' = 50.000 \cdot (1+0,015)^{0,5} = 50.373,60€$$

$$Intereses = Y = C' - C = 50.373,60 - 50.000 = 373,60€$$

b) Calculad el tanto de interés nominal capitalizable semestralmente equivalente a la TAE del depósito.

Como no hay comisiones: $TAE = I_1 = 1,50\%$

$$(1+I_2)^2 = (1+I_1)^1 \Rightarrow I_2 = (1+0,015)^{1/2} - 1 = 0,007472$$

$$i_2 = 2 \cdot I_2 = 2 \cdot 0,007472 = 0,014944 \equiv 1,494\%$$

Ejemplo: Suponga que usted desea invertir 30.000€ en el siguiente depósito a 1 año ofrecido por el banco Z.

DEPÓSITO A 1 AÑO

2,50 % TAE [1]	✓ **Recibirás intereses cada 3 meses**
	✓ **Sin comisiones**

¿Necesito contratar algún otro producto aparte del depósito bancario?
Si eres cliente nuevo, solo tendrás que abrir una cuenta AA que no tiene ningún tipo de gastos o comisiones.

¿Se reinvierten los intereses en el depósito bancario a plazo fijo?
No, los intereses serán abonados en tu cuenta AA trimestralmente.

[1] Tipo de interés nominal 2,48% (TAE 2,50%) aplicable durante 12 meses.
Ejemplo: Para una imposición de 30.000€, con liquidación trimestral de intereses, al vencimiento del depósito el cliente habrá recibido 744.00€ brutos.

- Verificación de la TAE publicada:

$$m = 4, \qquad i_4 = 0{,}0248 \iff I_4 = \frac{0{,}0248}{4} = 0{,}0062$$

$$TAE = I_1 = (1 + 0{,}0062)^4 - 1 = 0{,}02503 \equiv 2{,}50\%$$

- Calculo de los intereses totales que se supone que usted tendría al vencimiento del depósito según la TAE:

$$C' = 30.000 \cdot (1 + 0{,}0062)^4 = 30.000 \cdot (1 + 0{,}025\,)^1 = 30.750€$$

$$Y = 30.750 - 30.000 = 750€$$

- Obsérvese que la cuantía calculada en el apartado anterior no coincide con la que se publica en el anuncio.

  Ello es debido a que los intereses recibidos cada trimestre no son reinvertidos en el propio depósito, sino que se colocan en la cuenta AA:

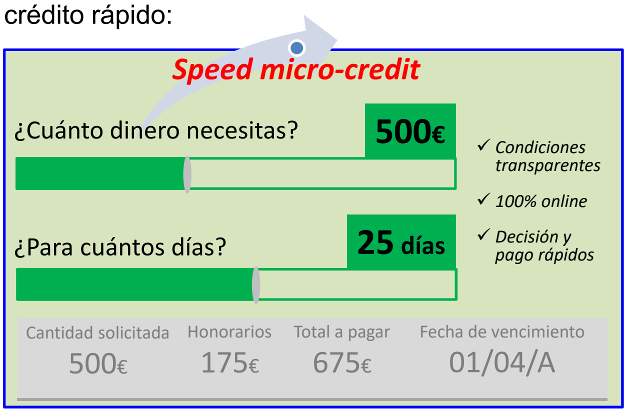
  Intereses del 1r. trimestre: $30.000 \cdot \frac{0{,}0248}{4} = 186€$

  Intereses del 2º trimestre: $30.000 \cdot 0{,}0062 = 186€$

  Así sucesivamente, al vencimiento de 1 año, el capital acumulado por el cliente si la cuenta AA ofrece un interés del 0% será:

$$186 \cdot 4 = 744€$$

Ejercicio: Hoy 07/03/A un familiar suyo ha solicitado por Internet el siguiente crédito rápido:



Calculad la TAE (Act/365):

$$TAE = \left(\frac{675}{500}\right)^{\frac{365}{25}} - 1 = 78{,}96 = 7.896\%$$

Ejemplo: Una entidad financiera ofrece un depósito retribuido en especie a un plazo de 14 meses. Colocando un capital de 8.500€ la entidad entrega una cámara de fotos digital en el momento de realizar el depósito. Sabiendo que la TAE de esta operación es del 1,10%, calculad el importe de los intereses brutos del depósito (valor de la cámara digital).

El importe de los intereses brutos del depósito (valor de la cámara) es:

8.500
Intereses (Cámara) — 8.500

0 ———— $^{14}\!/_{12}$

$$8.500 = \text{Intereses} + 8.500\cdot(1+0{,}0110)^{-14/12}$$

$$\text{Intereses} = 8.500 - 8.500\cdot(1+0{,}0110)^{-14/12}$$

$$\text{Intereses (Cámara)} = 107{,}80€$$

Ejercicio: Una persona se plantea invertir en el siguiente producto de ahorro con retribución en especie. Calculad los intereses de este depósito y realizad un análisis de la decisión a tomar.

https://www.pexels.com/

IPF
Condiciones financieras
- Importe: 90.000€
- Plazo: 6 meses
- TAE: 1,40%

El portátil tiene la consideración de retribución en especie a efectos del IRPF. No existe remuneración en efectivo.

90.000
Intereses (Portátil) — 90.000

0 ———— $^{6}\!/_{12}$

$$90.000 = \text{Intereses} + 90.000\cdot(1+0{,}014)^{-6/12}$$

$$\text{Intereses} = 907.000 - 90.000\cdot(1+0{,}014)^{-6/12}$$

$$\text{Intereses(Portátil)} = 623{,}46€$$

Decisión: Sólo debería realizar esta imposición a plazo fijo si realmente desea tener este portátil y si vale en el mercado más de 623,46€.

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Pactos del R.F. de interés compuesto a tanto constante
- Expresión formal del R.F. de interés compuesto a tanto constante
- Periodo de capitalización
- Frecuencia de capitalización
- Relación entre tantos de interés efectivo y nominal de la misma frecuencia
- Relación o equivalencia entre tantos de interés efectivos de distinta frecuencia
- R.F. de interés compuesto a tanto variable
- Tanto de interés efectivo anual
- Tasa anual equivalente (TAE)

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

1. Operación financiera. Regímenes financieros

6. Suma financiera

6.1. Definición

6.2. Valor actual y valor final

6.3. Suma financiera versus Suma aritmética

6.1 Definición

Hasta ahora se ha estado trabajando con operaciones financieras elementales en las que aparece un solo capital en la prestación y contraprestación.

Para las operaciones financieras complejas (parcial o totalmente) en las que aparecen conjuntos de capitales puede ser conveniente **valorar dicho conjunto en un instante** determinado. Es decir, sustituir el conjunto de capitales por un único capital que lo represente.

Dicho capital es **equivalente** al conjunto de capitales y se denomina **suma financiera** (o valor financiero).

Es evidente que para sumar capitales financieros, hay que tener en cuenta la idea del valor temporal del dinero. En adelante, y salvo que se indique lo contrario, utilizaremos para valorar el **R.F. de interés compuesto**.

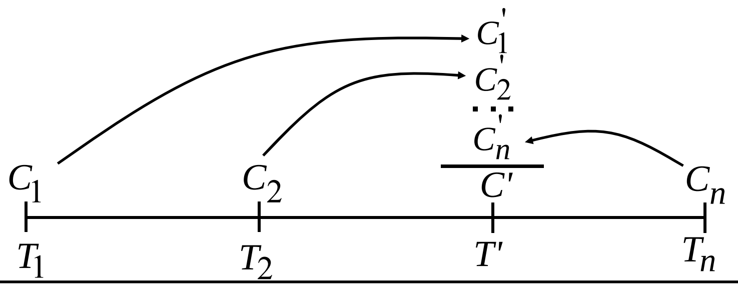
Dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y el tipo de interés efectivo de valoración I_m.

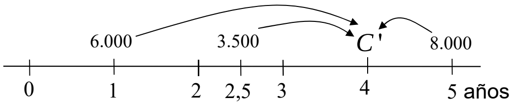
Definición: **Suma financiera** en ***T'*,** según el tipo de interés dado, es el capital financiero **(*C'*,*T'*)** donde:

$$C' = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(T'-T_r)}$$



Ejemplo: Calculad la suma financiera en T'=4 de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés.

$$\{(6.000,\ 1),(3.500,\ 2{,}5),(8.000,\ 5)\}$$



$$i_1 = I_1 = 0{,}05$$

$$C' = 6.000\cdot(1+0{,}05)^3 + 3.500\cdot(1+0{,}05)^{1{,}5} + 8.000\cdot(1+0{,}05)^{-1}$$

$$C' = 18.330{,}55€$$

La suma financiera en T'=4 de los pagos anteriores será el capital financiero:

$$(C',T') = (18.330{,}55\ ,\ 4)$$

6.2 Valor actual y valor final

Cuando se realiza la suma financiera de un conjunto de capitales financieros en un origen considerado, que generalmente se expresa como $\mathbf{0}$, la cuantía resultante se denomina **VALOR ACTUAL,** y se representa por V_0 .

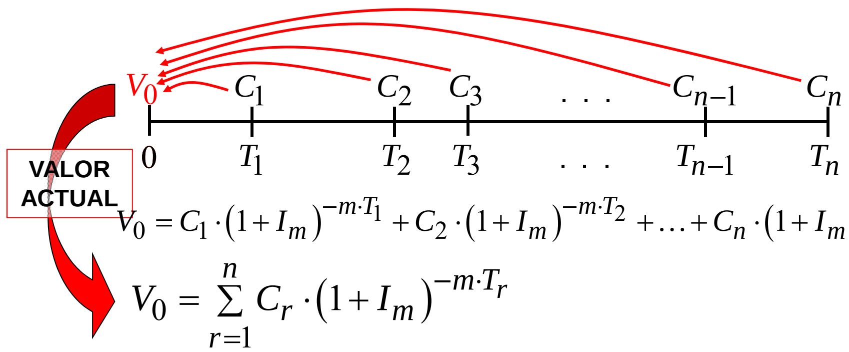
Análogamente, cuando se realiza la suma financiera de un conjunto de capitales financieros en un instante final, que generalmente se expresa como T_n, la cuantía resultante se denomina **VALOR FINAL,** y se representa por V_f.

Es decir, dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y el tipo de interés efectivo de valoración I_m.

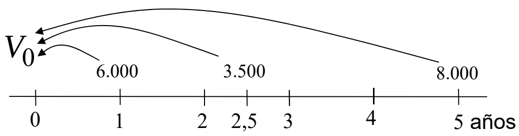
Suma financiera de capitales en **0**



$$V_0 = C_1 \cdot (1+I_m)^{-m \cdot T_1} + C_2 \cdot (1+I_m)^{-m \cdot T_2} + \ldots + C_n \cdot (1+I_m)^{-m \cdot T_n}$$

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{-m \cdot T_r}$$

Ejemplo: Para la compra de un coche se pacta pagar 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años. Si el tipo de interés pactado en la compra es del 5% anual, calculad el valor al contado del coche (valor actual).



$$i_1 = I_1 = 0{,}05$$

$$V_0 = 6.000 \cdot (1+0{,}05)^{-1} + 3.500 \cdot (1+0{,}05)^{-2{,}5} + 8.000 \cdot (1+0{,}05)^{-5}$$

$$V_0 = 15.080{,}59€$$

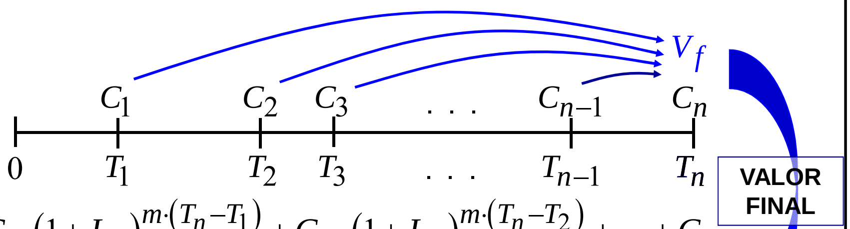
Esta cuantía representa el valor actual de dichos pagos futuros, es decir, lo que hay que abonar hoy para cancelar la deuda al tipo de interés considerado.

Análogamente, dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y el tipo de interés efectivo de valoración I_m .

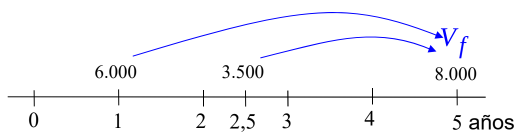
Suma financiera de capitales en T_n



$$V_f = C_1 \cdot (1+I_m)^{m\cdot(T_n - T_1)} + C_2 \cdot (1+I_m)^{m\cdot(T_n - T_2)} + \ldots + C_n$$

$$V_f = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(T_n - T_r)}$$

Ejercicio: Para la compra de un coche se pactó pagar, a un interés del 5% anual, las cantidades de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años. Si el comprador desea cancelar la deuda por la compra del coche pagando un único capital a los 5 años, calculad la cuantía de dicho capital (valor final).



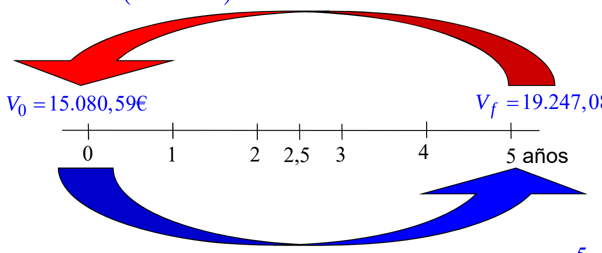
$$i_1 = I_1 = 0,05$$

$$V_f = 6.000 \cdot (1+0,05)^4 + 3.500 \cdot (1+0,05)^{2,5} + 8.000$$

$$V_5 = 19.247,08€$$

Ejercicio: Demostrad que la cuantía del valor actual y la del valor final obtenidas en los ejemplos anteriores para la compra del coche son equivalentes si se valoran a un interés del 5% anual.

$$V_0 = 19.247{,}08 \cdot (1+0{,}05)^{-5} = 15.080{,}59€$$

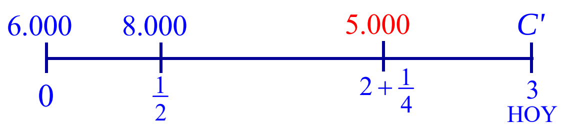


$$V_f = 15.080{,}59 \cdot (1+0{,}05)^{5} = 19.247{,}08€$$

CONCLUSIÓN: Una vez se ha obtenido el valor actual (o el valor final) de un conjunto de capitales, podemos conocer su suma financiera en cualquier diferimiento.

Ejemplo: Una persona abrió hace 3 años una cuenta con 6.000€. Al cabo de 6 meses hizo otro ingreso de 8.000€. Si hace 9 meses retiró de la cuenta 5.000€, calculad el saldo que a fecha de hoy existe en la cuenta si ésta ha ofrecido un interés anual del 4% capitalizable trimestralmente.

En primer lugar vamos a colocar gráficamente todos los capitales financieros de la operación:

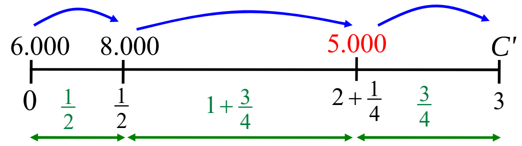


Vamos a resolver este ejemplo de 2 formas distintas.

Primera forma:

$$i_4 = 0{,}04$$

$$I_4 = \frac{0{,}04}{4} = 0{,}01$$



$$C' = \underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{6.000\cdot(1+0{,}01)^{4\cdot\frac{1}{2}}}_{6.120,60} + 8.000}_{14.120,60}\right)\cdot(1+0{,}01)^{4\cdot\left(1+\frac{3}{4}\right)}}_{15.139,19} - 5.000\right)}_{10.139,19}\cdot(1+0{,}01)^{4\cdot\frac{3}{4}} = 10.446{,}42€$$

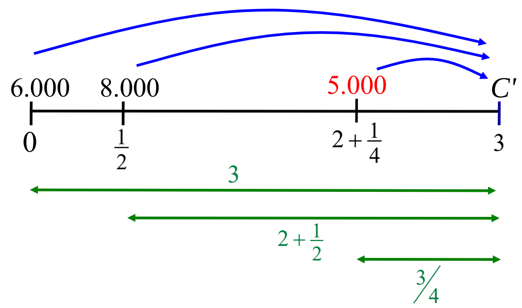
$$\text{(total)} = 10.446{,}42$$

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
6. Suma financiera

Segunda forma:

$$i_4 = 0{,}04$$

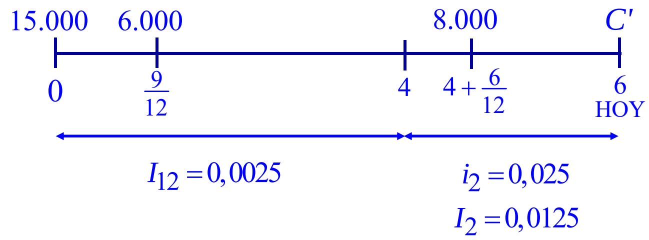
$$I_4 = \frac{0{,}04}{4} = 0{,}01$$



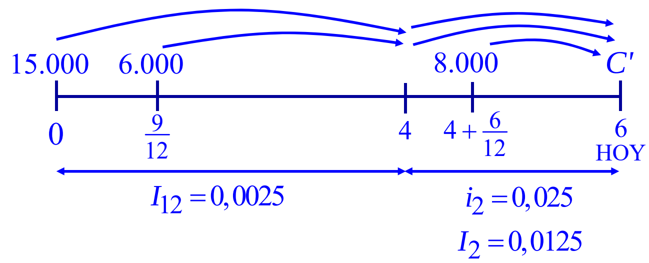
$$C' = \underbrace{6.000\cdot(1+0{,}01)^{4\cdot 3}}_{6.760,95} + \underbrace{8.000\cdot(1+0{,}01)^{4\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)}}_{8.836,98} - \underbrace{5.000\cdot(1+0{,}01)^{4\cdot\frac{3}{4}}}_{5.151,51} = 10.446{,}42€$$

Ejercicio: Calculad hoy el saldo de una cuenta abierta hace 6 años con una imposición inicial de 15.000€. A los 9 meses de su apertura se ingresaron 6.000€ y hace un año y medio 8.000€. Esta cuenta ha proporcionado un interés del 0,25% mensual los 4 primeros años y un 2,5% anual capitalizable semestralmente hasta hoy.

En primer lugar vamos a colocar gráficamente todos los capitales y tipos de interés de la operación:



Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros
6. Suma financiera



$$C' = 15.000\cdot(1+0,0025)^{12\cdot 4}\cdot(1+0,0125)^{2\cdot 2} + 6.000\cdot(1+0,0025)^{12\cdot\left(3+\frac{3}{12}\right)}\cdot(1+0,0125)^{2\cdot 2} +$$
$$+ 8.000\cdot(1+0,0125)^{2\cdot 1,5} = \quad 33.025,77€$$

Planteamos la ecuación que permite obtener el tanto efectivo anual al que ha resultado la operación anterior.

$$15.000\cdot(1+I_1)^{6} + 6.000\cdot(1+I_1)^{5+\frac{3}{12}} + 8.000\cdot(1+I_1)^{1+\frac{6}{12}} = 33.025,77$$

Utilizando hoja de cálculo Excel® se obtiene: $I_1 = 0,0283 \equiv 2,83\%$

6.3 Suma financiera versus Suma aritmética

En finanzas es muy importante no confundir la suma financiera con la suma aritmética de capitales.

Ejemplo: Supongamos que usted puede comprar un coche a plazos y le ofrecen dos opciones:
a) Pagar dentro de 6 meses 5.000€, dentro de 2 años 6.000€ y dentro de 3 años 9.000€.
b) Pagar dentro de 6 meses 9.000€, dentro de 1 año 7.000€ y dentro de 3 años 3.000€.
¿Qué opción le interesa más como comprador si el tipo de interés de la operación fuese de un 6% anual?

En términos de suma aritmética parece mejor la opción b) pues si sumamos aritméticamente sus cuantías obtenemos:

$$9.000 + 7.000 + 3.000 = 19.000€$$

Por el contrario, con la opción a) la suma de sus cuantías es:

$$5.000 + 6.000 + 9.000 = 20.000€$$

En términos de suma financiera, lo que debemos hacer es calcular el valor actual (o el valor final o en cualquier otro diferimiento) de los capitales de ambas opciones a un interés del 6% anual y ver cuál es menor (ya que somos los compradores).

El valor actual de la opción a) sería:

$$V_0 = 5.000 \cdot (1+0,06)^{-1/2} + 6.000 \cdot (1+0,06)^{-2} + 9.000 \cdot (1+0,06)^{-3}$$

$$V_0 = 17.752,98€$$

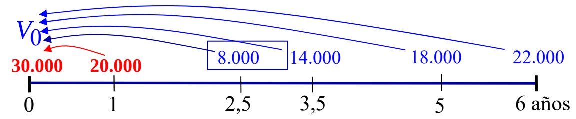
El valor actual de la opción b) sería:

$$V_0 = 9.000 \cdot (1+0,06)^{-1/2} + 7.000 \cdot (1+0,06)^{-1} + 3.000 \cdot (1+0,06)^{-3}$$

$$V_0 = 17.864,20€$$

En consecuencia, **al tipo de interés considerado**, le interesaría más realizar los pagos según la opción a).

Ejercicio: Para un negocio se han de invertir hoy 30.000€ y dentro de 1 año 20.000€. Los ingresos que se prevén obtener son de 8.000€ al cabo de 2 años y medio, 14.000€ dentro de 3 años y medio, 18.000€ de aquí a 5 años y, finalmente, 22.000 al cabo de 6 años. Si por el riesgo asumido se exige un interés del 8% anual, ¿interesa invertir en dicho negocio?



$$i_1 = I_1 = 0,08$$

Aunque la suma aritmética de los ingresos (62.000€) es bastante superior a la suma aritmética de los gastos (50.000€), para tomar la decisión correcta calcularemos el valor actual de ingresos y gastos al tipo de interés dado y veremos cuál es mayor.

$$V_{GAS} = 30.000 + 20.000 \cdot (1+0,08)^{-1} = 48.518,52€$$

$$V_{ING} = 8.000 \cdot 1,08^{-2,5} + 14.000 \cdot 1,08^{-3,5} + 18.000 \cdot 1,08^{-5} + 22.000 \cdot 1,08^{-6} = 43.408,14€$$

Conclusión: A un interés del **8% anual**, NO interesa este negocio a pesar de que la suma aritmética de ingresos es superior a la de gastos.

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Suma financiera
- Valor actual
- Valor final
- Diferencia entre suma aritmética y suma financiera

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sabiendo que la unidad monetaria está expresada en euros y la unidad temporal en años, explicar qué representan los siguientes capitales financieros:

   a) $(65.000,\ 0)$

   b) $\left(54.300,\ \frac{17}{12}\right)$

   c) $\left(397{,}12,\ \frac{14}{365}\right)$

   d) $\left(3.800,\ \frac{3}{2}\right)$

   e) $\left(2.000.000,\ \frac{5}{6}\right)$

2. Representar en un esquema temporal los capitales financieros del ejercicio anterior.

3. Sabiendo que la unidad monetaria está expresada en dólares y la unidad temporal en años, explicar qué representan los siguientes capitales financieros:

   a) $\left(85.700,\ \frac{5}{4}\right)$

   b) $\left(12.000,\ \frac{8}{12}\right)$

   c) $\left(815,\ \frac{200}{365}\right)$

   d) $\left\{\left(500,\ r\cdot\frac{1}{2}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,10}$

4. Representar en un esquema temporal todos los capitales financieros del ejercicio anterior.

5. Representar en un esquema temporal todos los capitales financieros del ejercicio 3 si las cuantías estuvieran representadas en euros en lugar de dólares.

6. Indicar cuál de las siguientes situaciones puede considerarse operación financiera. De las situaciones que sean una operación financiera indicar sus elementos (personal, material y convencional):

   a) Con 4.000€ que has ahorrado, abres en Bankia un plazo fijo con vencimiento dentro de 6 meses y por el que recibirás 4.120€.

b) Acabo de invitar a mis amigos a desayunar. He pagado al camarero con un billete de 50€ y me ha devuelto 38,45€.

c) Hace 3 años Manuel compró en Bolsa 10.000 acciones de la empresa Zeltia a 3,31€ cada una y hoy las ha vendido todas por 20.200€.

d) Acabo de comprar en una tienda de telefonía móvil un *smartphone* de última generación que me ha costado 499€.

e) He ido a una sucursal del BBVA a pedir cambio de un billete de 200€ en billetes de 50€.

f) Mi padre ha decidido ir colocando cada año 5.000€ en un Plan de Pensiones de Banc Sabadell para que en el momento de su jubilación a los 67 años tenga un capital suficiente para mantener su nivel de vida actual.

g) La empresa Cementos S.A. ha vendido a un cliente 20.000€ en sacos de cemento que paga mediante un efecto comercial con vencimiento dentro de 60 días. La empresa lleva hoy mismo el efecto al Banco de Santander que se lo descuenta ingresando en la cuenta de la empresa la cantidad de 18.935€.

h) Para comprarse un ordenador portátil Maria ha solicitado en Bankinter un préstamo personal de 899€ por el que tendrá que pagar mensualmente una cuota de 121,85€ durante 10 meses.

i) El 3 de enero compré con la tarjeta VISA un regalo de 420€ que me lo cargarán en mi cuenta corriente el próximo 25 de enero.

j) Manuel ha encontrado un trabajo de contable en una empresa constructora y abre en Caixabank con 200€ una cuenta corriente donde ingresará mensualmente el sueldo de 1.400€ y otros cobros. De esta cuenta irá sacando dinero para comer, vestirse, pagar facturas, etc.

7. De las situaciones del ejercicio anterior que sean una operación financiera indicar si se trata de operaciones elementales, parcialmente complejas o totalmente complejas.

8. Calcular todos los precios financieros de interés de las operaciones financieras de los apartados a), c), i) del ejercicio 6.

9. Se compra un activo financiero el 14 de marzo, por un valor de 12.000€, que tiene vencimiento el 18 de octubre del mismo año, por un importe de 12.450€. Se pide:

   a) Obtener el plazo de la operación según los criterios Act/365, Act/360 y 30/360.

   b) Obtener todos los precios financieros de interés de la operación según los 3 criterios mencionados.

10. Una persona compró por 850€, el día 8 de marzo de un determinado año, un producto financiero que vence el día 19 de mayo del siguiente año, por un valor de 1.000€. Se pide:

    a) Obtener el plazo de la operación según los criterios Act/365, Act/360 y 30/360.

    b) Obtener todos los precios financieros de interés de la operación según los 3 criterios mencionados.

11. Calcular los intereses brutos de una cuenta corriente que ofrece un interés del 1,80% nominal si su saldo medio, durante los 91 días de liquidación, ha sido de 14.560€.

12. En una cuenta corriente que remunera un interés nominal del 1,60% se han ingresado el 2 de enero de este año 12.524,68€. Calcular el capital y los intereses brutos a fecha 31 de enero.

13. Una imposición a plazo fijo (IPF) ha pagado 36,90€ de intereses por un capital de 8.000€ durante el primer trimestre (91 días). Calcular el interés nominal al que está contratada dicha IPF.

14. De dos productos se ha extraído hoy la siguiente información sobre sus precios y vencimientos:

	Precio actual	Precio a vencimiento
Vencimiento a 3 meses	992,30€	1.000€
Vencimiento a 9 meses	976,34€	1.000€

Calcular el tipo de interés nominal de cada producto.

15. En una operación financiera se descuenta una letra de cambio de nominal 4.000€ y vencimiento a los 90 días, a una tasa de descuento comercial del 6% anual. Calcular el valor efectivo obtenido.

16. Calcular la cuantía pagada por descontar un efecto comercial de valor nominal 4.800€ y vencimiento a 64 días a una tasa de descuento anual del 6,5% simple comercial.

17. Al descontar al 7,25% anual de descuento comercial una letra de cambio con vencimiento al cabo de 115 días se ha obtenido un líquido de 32.549€. Se pide:

a) Calcular el valor nominal de la letra de cambio.

b) ¿Cuál será el valor nominal de la letra de cambio en el caso de que se haya pagado, además, una comisión del 0,3% sobre el valor nominal?

18. Por un efecto comercial de nominal 37.000€ y vencimiento al cabo de 130 días se ha obtenido un importe de 35.997,92€. Se pide:

a) ¿Cuál es la tasa de descuento simple comercial anual aplicada a la operación?

b) ¿Cuál sería la tasa de descuento simple comercial anual aplicada al efecto comercial si, además, se ha aplicado una comisión del 0,50% sobre el valor nominal?

19. Responder las siguientes cuestiones:

a) ¿A qué tasa de interés simple anual vencido resulta una operación de descuento simple comercial al 8% anual con vencimiento a los 3 meses?

b) ¿A qué tasa de interés anual simple vencido resulta si, además, hay una comisión del 0,6% sobre el nominal?

20. Una empresa desea comprar al contado dentro de 2 meses un coche valorado en 29.750€. Para hacer frente a dicho pago, hoy cancelará un plazo fijo que se abrió con 10.000€ hace 9 meses y que viene ofreciendo un interés simple vencido del 3,50% anual. También a fecha de hoy llevará a descontar a una tasa del 6% anual un efecto comercial de valor nominal 20.000€ que vence dentro de 6 meses y por el que pagará una comisión del 0,4%. Se pide:

    a) Cuantía obtenida hoy por la empresa al cancelar el plazo fijo.

    b) Cuantía obtenida hoy por la empresa al descontar el efecto comercial.

    c) ¿Tiene la empresa, a fecha de hoy, dinero suficiente para comprar el coche? En caso negativo, la empresa se plantea colocar hoy todo el dinero obtenido en una cuenta corriente hasta el momento de la compra del coche. ¿A qué tipo de interés simple anual debería, como mínimo, negociar la empresa la cuenta corriente para poder adquirir el coche?

21. Hoy se invierten 6.320€ al 3,20% anual capitalizable trimestralmente. Se pide:

    a) Calcular el capital final que se obtiene al cabo de 3 años y medio.

    b) ¿Durante cuántos años se deberían haber colocado los 6.320€ para obtener un capital final de 7.471,16€?

22. Calcular el precio que hay que pagar hoy por un activo de nominal 2.000€ que vence dentro de 5 años y 2 meses, si se valora a un interés del 2,75% nominal acumulable mensualmente.

23. Calcular el capital final que se obtiene al invertir 8.430€ durante 1 año y medio al 2,80% anual capitalizable semestralmente.

24. Actualizar a interés compuesto y criterio Actual/365 la cantidad de 1.042€ durante 28 días a un interés del 5,34% anual.

25. Calcular el capital final que se habrá obtenido al cabo de 1 año y 4 meses si se han invertido 7.500€ al 3,60% anual acumulable bimestralmente.

26. Calcular el interés efectivo anual al que resulta un activo de nominal 1.000€ y vencimiento a los 24 meses, que ha sido comprado por un precio de 945,73€.

27. Obtener el precio de adquisición de un título de nominal 1.000€ con vencimiento a los 2 años y 3 meses, si se valora a un interés del 2,53% anual:

28. Hallar el interés efectivo anual de una inversión de 40.000€ que rinde un 4,50% anual capitalizable mensualmente.

29. Calcular el interés efectivo anual de una operación a 25 meses que se ha pactado a un interés nominal del 6,75% anual capitalizable trimestralmente.

30. Calcular el tanto efectivo bimestral y el tanto efectivo semestral equivalentes a un 6% nominal pagadero semestralmente.

31. Si por una inversión de 20.000€ al cabo de 3 meses se obtienen 20.350€, calcular:

a) El interés efectivo trimestral.

b) El interés nominal con abono trimestral de intereses.

c) El interés efectivo anual.

32. Determinar el precio que hay que pagar por un activo de nominal 1.000€ y vencimiento dentro de 840 días, si se valora con criterio Actual/365 a un interés del 2,40% anual.

33. Se invierte, durante un año, un capital de 9.000€. La operación ofrece durante el primer semestre un interés del 1,40% nominal acumulable mensualmente y durante el segundo semestre un 1,50% anual acumulable trimestralmente. Obtener:

a) El capital final obtenido.

b) ¿Qué tipo de interés efectivo anual debería haberse aplicado durante todo el plazo de la operación para obtener el mismo capital acumulado?

34. Calcular el interés efectivo mensual, el interés efectivo anual y la TAE de una operación que rinde un 4,50% anual capitalizable mensualmente.

35. Calcular el interés efectivo anual y la TAE de una operación que ofrece en 6 años y medio una rentabilidad acumulada del 25%.

36. Calcular el interés efectivo anual y la TAE de un préstamo de 3.000€ a devolver en un solo pago dentro de 3 meses si se ha pactado un interés nominal del 6,75% acumulable mensualmente y existe una comisión de apertura del 2% sobre el nominal del préstamo.

37. Calcular el interés efectivo anual y la TAE de una inversión en la que al colocar 8.250€ el 8 de octubre de un determinado año se obtienen 9.156€ al 21 de octubre de dos años después. Considerar que en el momento de realizar la inversión se paga, además, una comisión de apertura del 3%. (Usar criterio Act/365).

38. Calcular el interés efectivo trimestral, el interés efectivo anual y la TAE de una operación a 3 años que se ha pactado a un interés nominal del 6,75% anual capitalizable trimestralmente.

39. Calcular el interés efectivo anual y la TAE de una operación que por un capital de 10.000€ ofrece en 4 años y medio una rentabilidad acumulada del 15% si al vencimiento hay que pagar a la entidad financiera que la ofrece una comisión de gestión del 1% sobre el capital invertido.

40. Se realiza una imposición de 15.342€ en un depósito a 2 años que acumula intereses trimestralmente. Si durante el primer año el interés nominal ha sido del 1,25% y durante el segundo año del 0,85%, se pide:

a) Calcular el saldo final del depósito.

b) Calcular el interés efectivo anual y la TAE al que resulta el depósito.

c) Calcular el interés efectivo anual y la TAE al que resulta el depósito si al vencimiento se ha de pagar una comisión de mantenimiento de 50€.

41. Un capital de 6.000€ se coloca en un depósito A que rinde el 6% nominal acumulable por bimestres, y otro capital de 3.000€ se coloca en un depósito B que ofrece un interés del 0,6% efectivo mensual. Se pide:

a) ¿Qué capital debería invertirse en otro depósito C al 8% anual pagadero cuatrimestralmente para obtener al cabo de 5 años la misma cuantía que con los depósitos A y B juntos?

b) Calcular el interés efectivo anual de los 3 depósitos.

42. Una persona, al nacimiento de su hijo, deposita 10.000€ en un Fondo de Inversión que garantiza un interés efectivo del 8% anual. Al cabo de 7 años tiene otro hijo y decide dividir la cantidad acumulada en el Fondo hasta entonces en dos partes, asignando al recién nacido el 40% y el resto al hijo mayor. ¿Qué cantidad retirará cada hermano del Fondo al cumplir respectivamente 25 años?

43. Una persona deposita 30.000€ en un Fondo que rinde el 4% nominal capitalizable mensualmente. Se pide:

a) Sabiendo que no existen comisiones, obtener la TAE del Fondo.

b) ¿Cuántos años deben transcurrir para que el fondo tenga un saldo de 50.000€?

c) ¿Qué tipo de interés nominal de capitalización semestral debería ofrecer el Fondo para duplicar el capital en 15 años?

44. Una persona ha ahorrado 20.000€ y una entidad financiera le ofrece 3 alternativas:

1) Colocar el capital en un depósito a plazo fijo que rinde el 4% nominal acumulable mensualmente.
2) Adquirir un efecto comercial de valor nominal 20.500€ y vencimiento dentro de 8 meses.
3) Invertirlo en una cuenta corriente que ofrece un interés anual simple vencido del 7%, pero donde los primeros 8.000€ están sin remunerar.

Se pide:

a) Obtener la cuantía acumulada a los 8 meses según las 3 alternativas.

b) Calcular la TAE de las 3 alternativas si ninguna tiene comisiones.

45. Una persona debe pagar 6.000€ dentro de 1 año y 5.000€ dentro de 4 años y medio. Calcular el capital que deberá pagar dentro de 2 años a un interés del 5% anual para cancelar ambas deudas.

46. Una persona compra una finca y abona al contado el 50% de su valor. Para el pago del resto, el vendedor ofrece dos opciones:

Opción A): Pagar 12.000€ dentro de 2 años y 6 meses y 50.000€ al cabo de 5 años.

Opción B): Pagar 60.000€ dentro de 3 años.

Si el tipo de interés se fija en el 6% anual, indicar cuál es el precio de la finca en cada una de las opciones y qué opción es más conveniente para el comprador.

47. Hace 3 años se abrió una cuenta con 3.000€. Al cabo de 9 meses se ingresaron 2.000€ y hace 6 meses se ingresaron 5.500€. Se pide:

a) Calcular el saldo acumulado hoy en la cuenta si el tipo de interés es del 6% nominal acumulable semestralmente.

b) Plantear la ecuación que permitiría obtener el interés efectivo anual para el inversor en el apartado anterior.

c) Calcular el saldo acumulado hoy en la cuenta si el tipo de interés es del 4% anual durante un año y medio y del 0,5% mensual durante el resto del plazo.

d) Plantear la ecuación que permitiría obtener el interés efectivo anual para el inversor en el apartado anterior.

48. Hace 4 años se abrió un depósito con 6.000€. Pasados 18 meses se ingresaron 5.200€ y hace 9 meses se retiraron 1.500€. Los tipos de interés aplicados han sido del 4% anual capitalizable trimestralmente durante el primer año, el 1,90% efectivo semestral el segundo año y el 2,4% anual capitalizable mensualmente los dos últimos años. Calcular:

a) El saldo del depósito a día de hoy.

b) Plantear la ecuación que permitiría obtener al inversor el interés efectivo anual al que le resulta el depósito.

49. Una persona abrió una cuenta bancaria **A** hace 3 años con un ingreso inicial de 5.000€ en la que ingresó al año de su apertura 2.000€ más. Dicha cuenta ha rendido un interés del 5% anual pagadero mensualmente el primer año y un 4% anual capitalizable semestralmente el resto del plazo.

Además, hoy dispone de una cartera de efectos comerciales de 30.000€ de nominal, que vence a los 90 días la cuarta parte y a 270 días el resto.

Hoy, con el saldo acumulado en la cuenta bancaria **A**, más el líquido obtenido de descontar la cartera de efectos comerciales, en régimen financiero de descuento comercial al 6% anual para los efectos con vencimiento a 90 días, y al 8% anual para los efectos con vencimiento superior, abre una cuenta bancaria **B** que rinde un 3,5% anual pagadero trimestralmente.

Se pide:

a) Calcular el saldo acumulado hoy en la cuenta bancaria **A**.

b) Calcular el líquido obtenido con el descuento de la cartera de efectos comerciales.

c) Calcular el saldo acumulado en la cuenta bancaria **B** dentro de 2 años.

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

Tema 1. Operación financiera. Regímenes financieros

Tema 2. Rentas financieras

1. **Definición y clasificación**
2. **Rentas constantes**
3. **Rentas geométricas**
4. **Rentas aritméticas**

Bloque temático 1.
Rentas financieras

2. Rentas financieras

1. Definición y clasificación

1.1. Definición

1.2. Clasificación

1.1. Definición

Un conjunto de capitales financieros

$$\left\{(C_r, T_r)\right\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

es una **renta financiera** si

$$\forall r > 1, \quad T_r - T_{r-1} = P \quad \text{constante,}$$

donde:

P es el periodo de renta

$M = \dfrac{1}{P}$ es la frecuencia de renta

C_r es la cuantía o término de la renta correspondiente al periodo r

n es el número de términos de la renta

1.2. Clasificación

1) Según el número de términos:
- **Renta temporal**: Cuando n es finito.
- **Renta perpetua**: Cuando tiene infinitos términos.

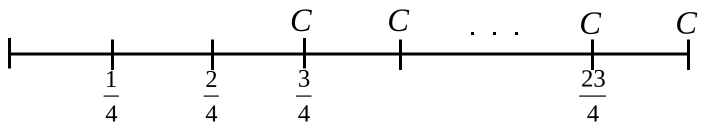
2) Según las cuantías (o términos):
- **Renta constante**: Cuando $\forall r, \quad C_r = C$ constante .
- **Renta variable**: Cuando C_r NO constante .

3) Según el origen considerado de valoración:
- **Renta inmediata**: El origen considerado es igual al origen de la renta.
- **Renta diferida**: El origen considerado es anterior al origen de la renta.

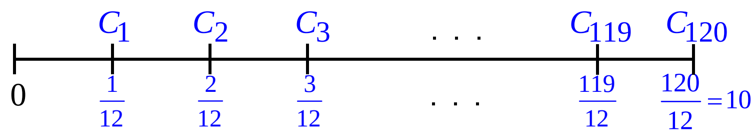
4) Según el periodo de la renta:
- **Renta mensual**: Cuando M=12 .
- **Renta trimestral**: Cuando M=4 .
- **Renta anual**: Cuando M=1, …

5) Según el vencimiento de la cuantía dentro de cada periodo:
- **Renta vencida** o **postpagable**: Cuando el término se sitúa al final.
- **Renta anticipada** o **prepagable**: Cuando el término se sitúa al inicio.

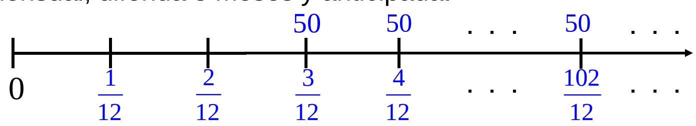
Ejemplo: Representad gráficamente una renta temporal de 22 términos constantes ***C***, trimestral, diferida 6 meses y vencida.



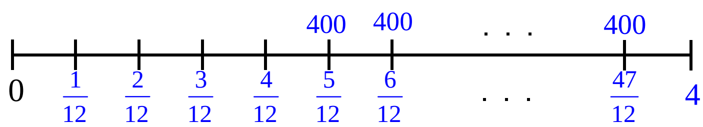
Ejercicio: Representad gráficamente una renta temporal de 120 términos variables, mensual, inmediata y vencida.



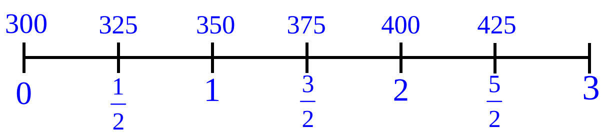
Ejercicio: Representad gráficamente una renta perpetua, constante de 50€, mensual, diferida 3 meses y anticipada.



Ejercicio: Representad gráficamente las cuotas constantes y anticipadas de 400€, a devolver mensualmente, de un préstamo solicitado hoy, por un plazo de 4 años, si existe un diferimiento de 5 meses.



Ejercicio: Representad gráficamente los ingresos semestrales que, desde hoy y por anticipado, proporciona un activo financiero durante los próximos 3 años, si el primer ingreso es de 300€ y aumenta 25€ semestrales.



Conceptos de este apartado que debe recordar:

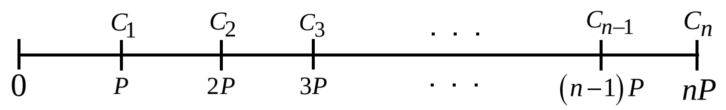
- Renta financiera
- Periodo de la renta
- Frecuencia de la renta
- Cuantías o términos de la renta
- Número de términos de la renta
- Renta temporal
- Renta perpetua
- Renta mensual, trimestral, anual, etc.
- Renta inmediata
- Renta diferida
- Renta vencida o postpagable
- Renta anticipada o prepagable
- Renta constante
- Renta variable

Bloque temático 1.
Rentas financieras

2. Rentas financieras

2.1. Definición

Dada una renta financiera con estructura temporal:



diremos que una renta es **constante** si todas las cuantías C_r son del mismo importe. Es decir:

$$\boxed{\forall r, \quad C_r = C \quad \text{constante}}$$

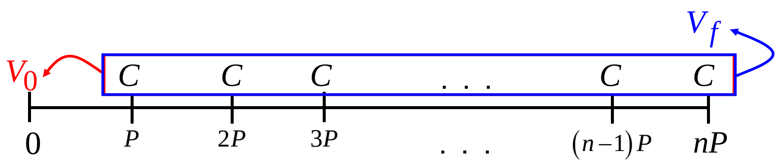
2.2. Valoración de una renta temporal, inmediata y vencida de periodo *P*

Valorar una renta consiste en calcular la suma financiera de todos los términos de la renta en un instante determinado. Normalmente, se acostumbra a calcular el valor actual o el valor final de la renta.

Estructura de los capitales financieros:

$$\{(C,P),(C,2P),(C,3P),\ldots,(C,nP)\} \quad \text{o bien} \quad \{(C,r\cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

Esquema:



A la hora de valorar cualquier renta financiera, es MUY IMPORTANTE tener en cuenta que el tipo de interés efectivo que aparecerá en las fórmulas ha de tener la misma frecuencia que tenga la renta, es decir, M.

En el caso de que el tipo de interés efectivo de la operación tuviera una frecuencia diferente, por ejemplo k, debería transformarse este tanto efectivo I_k en I_M, a partir de la expresión ya conocida:

$$(1+I_k)^k = (1+I_M)^M \qquad \text{es decir:} \quad I_M = (1+I_k)^{k/M} - 1$$

Se demuestra que el **valor actual** de la renta de cuantía constante C, temporal de n términos, inmediata y vencida de frecuencia M es:

$$\boxed{V_0 = C \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}}$$

Explicación de la fórmula del valor actual de la renta constante, de periodo P (frecuencia M), temporal de n términos, inmediata y vencida:

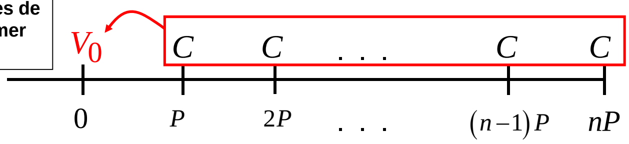
Importe del término constante

Interés efectivo de valoración de frecuencia M (igual a la de la renta)

$$V_0 = C \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$$

Número de términos constantes (debe ser un número natural, es decir, no puede tener decimales)

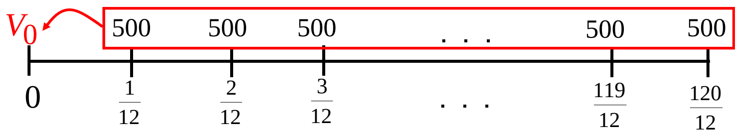
El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta



La expresión $\dfrac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$ también se representa como $a_{\overline{n}|I_M}$.

Por tanto, en general $V_0 = C \cdot a_{\overline{n}|I_M}$.

Ejemplo: Calculad el valor actual de una renta inmediata y vencida de 500€ mensuales durante 10 años a un interés del 6% anual capitalizable semestralmente.



Puesto que la renta es mensual, lo primero que debe hacerse es buscar el tanto efectivo mensual:

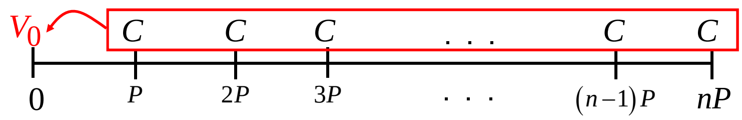
$$\left.\begin{array}{l} i_2 = 0,06 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{0,06}{2} = 0,03 \\ (1+I_{12})^{12} = (1+0,03)^2 \\ I_{12} = (1+0,03)^{2/12} - 1 = 0,0049386 \end{array}\right\}$$

$$V_0 = 500 \cdot \frac{1-(1+0,0049386)^{-120}}{0,0049386}$$

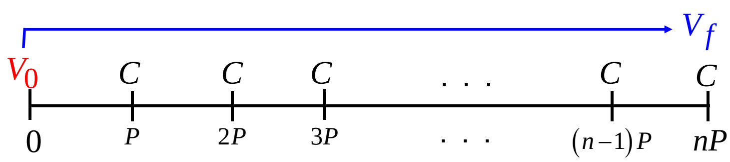
$$V_0 = 500 \cdot a_{\overline{120}|0,0049386}$$

$$V_0 = 45.187,12€$$

Para calcular el **valor final** de la renta de cuantía constante C, temporal de n términos, inmediata y vencida de frecuencia M se puede calcular el valor actual de esa renta:

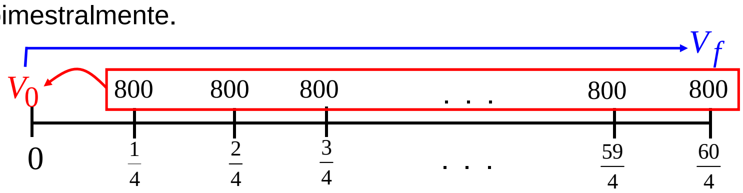


Y posteriormente capitalizar dicho valor actual V_0 hasta el instante final:



$$\boxed{V_f = V_0 \cdot (1+I_M)^n}$$ o, equivalentemente: $$\boxed{V_f = C \cdot \frac{(1+I_M)^n - 1}{I_M}}$$

Ejemplo: Calculad el valor final de una renta inmediata y vencida de 800€ trimestrales durante 15 años a un interés del 5% anual capitalizable bimestralmente.



Puesto que la renta es trimestral, lo primero que debe hacerse es buscar el tanto efectivo trimestral:

$$i_6 = 0{,}05 \Leftrightarrow I_6 = \frac{0{,}05}{6} = 0{,}008\widehat{3} \quad \Rightarrow I_4 = \left(1+0{,}008\widehat{3}\right)^{6/4} - 1 = 0{,}012526$$

Calculamos el valor actual: $V_0 = 800 \cdot \dfrac{1-\left(1+0{,}012526\right)^{-60}}{0{,}012526} = 33.604{,}54€$

Capitalizamos este valor hasta el año 15 (o 60 trimestres):

$$V_f = 33.604{,}54 \cdot \left(1+0{,}012526\right)^{60} = 70.920{,}04€$$

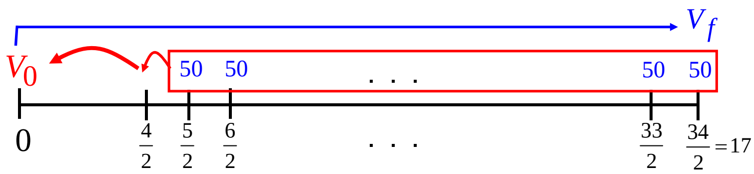
Hasta ahora hemos obtenido el valor actual y final de la renta temporal, inmediata y vencida. Para obtener el valor actual y el valor final del resto de rentas temporales:

- Diferidas y vencidas
- Inmediatas y anticipadas
- Diferidas y anticipadas

capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese. Por tanto, para valorar **cualquier** renta financiera constante es aconsejable seguir los 5 pasos siguientes:

1) Representar gráficamente la operación.
2) Obtener el interés efectivo de frecuencia de la renta .
3) Aplicar la fórmula del valor actual de la renta.
4) Decidir en qué instante temporal se encuentra el valor actual calculado en el paso anterior.
5) Trasladar dicho valor al instante temporal que nos interese de la operación usando interés compuesto.

Ejercicio: Calculad el valor actual y el valor final de una renta de 50€ semestrales pagadera durante 15 años, diferida 2 años y vencida, con un interés del 1% efectivo mensual.



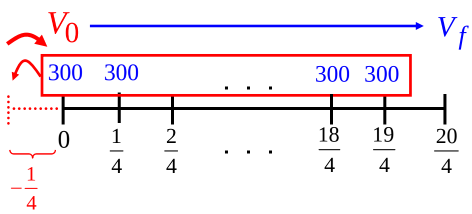
Calculamos el tanto efectivo semestral:

$$I_{12}=0{,}01 \Rightarrow I_2=(1+0{,}01)^{12/2}-1=0{,}06152$$

Valor actual: $$V_0 = \underbrace{50\cdot\frac{1-(1+0{,}06152)^{-30}}{0{,}06152}}_{\text{Valor en } T=\frac{4}{2}:\ 677{,}19}\cdot(1+0{,}06152)^{-4}=533{,}33€$$

Valor final: $$V_f = 533{,}33\cdot(1+0{,}06152)^{34}=4.060{,}29€$$

Ejercicio: Calculad el valor actual y el valor final de una renta trimestral, inmediata y anticipada de 300€ cada término, pagadera durante 5 años a un interés del 4% anual liquidable trimestralmente.

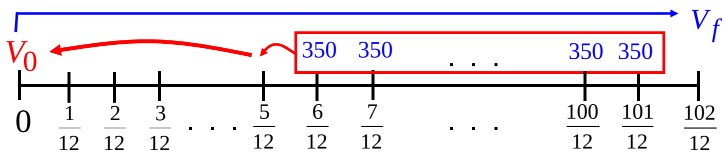


El tanto efectivo trimestral es: $i_4=0{,}04 \Leftrightarrow I_4=\frac{0{,}04}{4}=0{,}01$

Valor actual: $$V_0 = \underbrace{300\cdot\frac{1-(1+0{,}01)^{-20}}{0{,}01}}_{\text{Valor en } T=-\frac{1}{4}:\ 5.413{,}67}\cdot(1+0{,}01)^{1}=5.467{,}80€$$

Valor final: $$V_f = 5.467{,}80\cdot(1+0{,}01)^{20}=6.671{,}76€$$

Ejercicio: Calculad el valor actual y el valor final de una renta anticipada de 350€ mensuales pagadera durante 8 años y diferida 6 meses a un interés del 4% anual liquidable mensualmente.

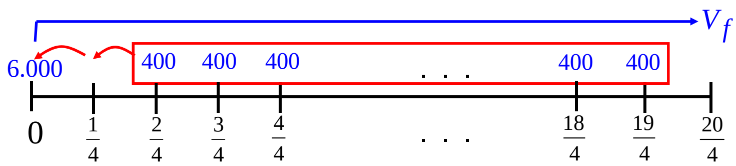


El tanto efectivo mensual es: $i_{12} = 0{,}04 \Leftrightarrow I_{12} = \frac{0{,}04}{12} = 0{,}00\widehat{3}$

Valor actual: $$V_0 = \underbrace{350 \cdot \frac{1-\left(1+0{,}00\widehat{3}\right)^{-96}}{0{,}00\widehat{3}}}_{\text{Valor en } T=\frac{5}{12}:\ 28.713{,}77} \cdot \left(1+0{,}00\widehat{3}\right)^{-5} = 28.239{,}95€$$

Valor final: $$V_f = 28.239{,}95 \cdot \left(1+0{,}00\widehat{3}\right)^{102} = 39.653{,}23€$$

Ejercicio: Un depósito bancario se abrió hace 5 años con 6.000€ y en él se han ido realizando imposiciones trimestrales constantes de 400€. La primera imposición se hizo a los 6 meses de abrir el depósito, y la última hace 3 meses. Si el tipo de interés aplicado al depósito ha sido del 0,75% bimestral, calculad el saldo que hoy tiene el depósito.

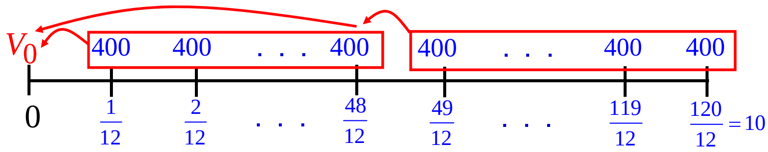


El tanto efectivo trimestral es:

$$I_6 = 0{,}0075 \Rightarrow I_4 = \left(1+0{,}0075\right)^{6/4} - 1 = 0{,}01127$$

$$V_f = \underbrace{\left(\underbrace{400 \cdot \frac{1-\left(1+0{,}01127\right)^{-18}}{0{,}01127}}_{\text{Valor en } T=\frac{1}{4}:\ 6.483{,}72} \cdot \left(1+0{,}01127\right)^{-1} + 6.000\right)}_{\text{Valor en } T=0:\ 12.411{,}46} \cdot \left(1+0{,}01127\right)^{20} = 15.530{,}11€$$

Ejercicio: Calculad el valor actual de una renta inmediata y vencida de 400€ mensuales durante 10 años si durante los 4 primeros años ha ofrecido un interés del 0,7% mensual y durante el resto del plazo el interés es del 6% anual capitalizable semestralmente.



$$I_{12} = 0,007 \qquad i_2 = 0,06 \Leftrightarrow I_2 = 0,03$$

$$I_{12} = (1+0,03)^{2/12} - 1 = 0,0049386$$

$$V_0 = \underbrace{400 \cdot \frac{1-(1+0,007)^{-48}}{0,007}}_{16.259,42} + \underbrace{400 \cdot \frac{1-(1+0,0049386)^{-72}}{0,0049386}}_{24.186,51} \cdot (1+0,007)^{-48}$$

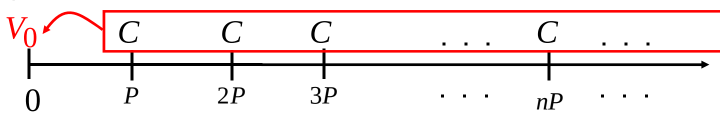
$$V_0 = 16.259,42 + 24.186,51 \cdot (1+0,007)^{-48} = 33.563,90€$$

Tema 2. Rentas financieras
2. Rentas constantes

2.3. Valoración de una renta perpetua, inmediata y vencida de periodo P

Estructura de los capitales financieros: $\{(C, r \cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

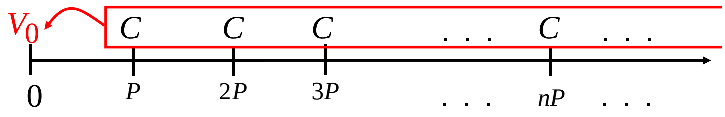
Esquema:



En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su **valor actual**.

Para su cálculo se partirá del mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cdot (1+I_M)^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} C \cdot (1+I_M)^{-r}$$

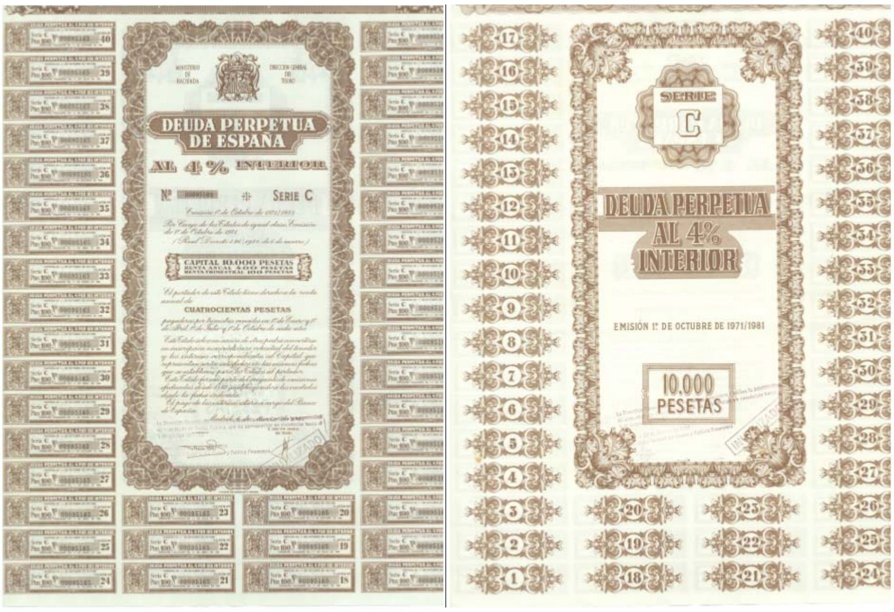


Cálculo del **valor actual**:

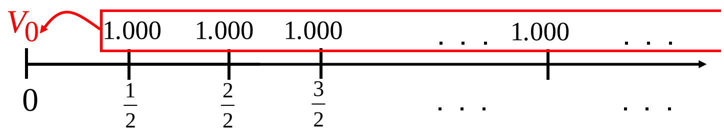
$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C \cdot (1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} C \cdot (1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} C \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$$

Por tanto: $$\boxed{V_0 = \frac{C}{I_M}}$$

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta.



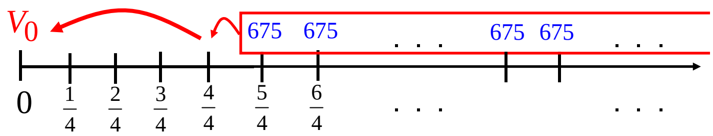
Ejemplo: Calculad el valor actual de una renta inmediata, vencida y perpetua de 1.000€ semestrales a un interés del 8% anual capitalizable mensualmente.



Buscamos el tanto efectivo semestral:

$$\left.\begin{array}{l} i_{12}=0,08 \Leftrightarrow I_{12}=\dfrac{0,08}{12}=0,00\widehat{6} \\ I_2=\left(1+0,00\widehat{6}\right)^{12/2}-1=0,0406726 \end{array}\right\} V_0=\frac{1.000}{0,0406726}=24.586,56€$$

Ejercicio: Calculad el valor actual de una renta diferida 1 año, vencida y perpetua de 675€ trimestrales a un interés del 3% anual pagadero semestralmente.



El tanto efectivo trimestral es: $i_2=0,03 \Leftrightarrow I_2=\dfrac{0,03}{2}=0,015$

$$(1+I_4)^4=(1+I_2)^2 \Rightarrow I_4=(1+0,015)^{2/4}-1=0,007472$$

$$V_0=\underbrace{\frac{675}{0,007472}}_{\text{Valor en } T=\frac{4}{4}:\ 90.336,24}\cdot(1+0,007472)^{-4}=87.685,94€$$

Existen bastantes aplicaciones financieras de las rentas constantes. Veremos dos de las más habituales:

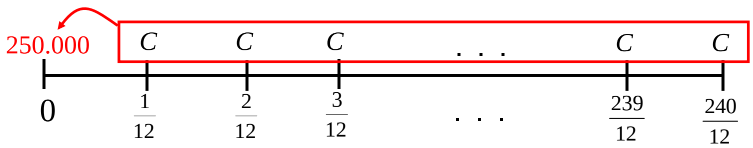
- **Amortización periódica de un capital.** Es decir, obtención de la cuota constante C que debe pagarse periódicamente por la concesión de un capital (se aplicará en la concesión de préstamos que veremos en el tema siguiente)

  En este caso se trata de despejar C en la fórmula del valor actual de la renta correspondiente

- **Constitución periódica de un capital.** Es decir, obtención de la cantidad constante C que debe aportarse periódicamente a una cuenta para alcanzar un capital determinado en un futuro

  En este caso se trata de despejar C en la fórmula del valor actual capitalizado de la renta correspondiente

Ejemplo: Una persona solicita un préstamo hipotecario de 250.000€ a devolver en cuotas mensuales inmediatas y vencidas durante 20 años a un interés del 3% nominal pagadero mensualmente. Calculad el importe de la cuota mensual constante que amortiza el préstamo.



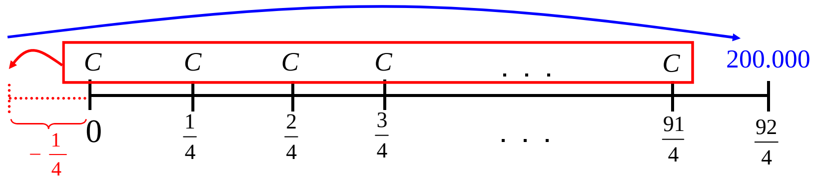
El tanto efectivo mensual será: $i_{12} = 0,03$ $\quad I_{12} = \dfrac{0,03}{12} = 0,0025$

La mensualidad será:

$$250.000 = C \cdot \frac{1-(1+0,0025)^{-240}}{0,0025} \qquad 250.000 = C \cdot a_{\overline{240|}0,0025}$$

$$C = 1.386,49€$$

Ejemplo: Una persona querría obtener el día de su jubilación, dentro de 23 años, una cantidad de 200.000€. Para ello realizará desde hoy aportaciones constantes, trimestrales y anticipadas en un plan que rinde el 4% anual. Calculad la aportación trimestral necesaria.



El tanto efectivo trimestral será: $I_1 = 0,04$

$$I_4 = (1+0,04)^{1/4} - 1 = 0,0098534$$

$$\underbrace{C\cdot\frac{1-(1+0,0098534)^{-92}}{0,0098534}}_{\text{Valor en } T=-\frac{1}{4}}\cdot(1+0,0098534)^{93} = 200.000$$

$$C = 1.332,31€$$

Conceptos de este apartado que debe recordar:

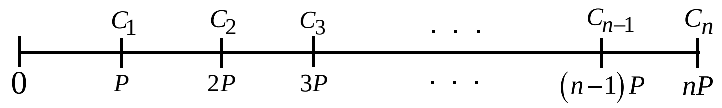
- Renta constante
- Valor actual y final de la renta temporal
- Valor actual de la renta perpetua
- Amortización periódica de un capital
- Constitución periódica de un capital

Bloque temático 1.
Rentas financieras

2. Rentas financieras

3.1. Definición

Dada una renta financiera con estructura temporal:



es una renta variable en progresión geométrica (o acumulativa) si cada cuantía C_r se obtiene multiplicando la cuantía anterior $C_{r\text{-}1}$ por una constante q>0 denominada razón de la progresión, es decir:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_{r-1} \cdot q \quad \text{con } q > 0$$

Por recurrencia: $C_r = C_{r-1} \cdot q = \left(C_{r-2} \cdot q\right) \cdot q = C_{r-2} \cdot q^2 = \ldots = C_1 \cdot q^{r-1}$

Por tanto, otra forma de expresar las cuantías de una renta geométrica en función de su primera cuantía C_1 y su razón q es:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_1 \cdot q^{r-1} \quad \text{con } q > 0$$

Si $q > 1$ la renta geométrica es creciente

Si $0 < q < 1$ la renta geométrica es decreciente

Ejemplo: Una persona inicia hoy con 1.000€ un plan de pensiones en el que, durante los próximos 10 años, realizará aportaciones trimestrales anticipadas y crecientes un 2% trimestral acumulativo. Determinad la estructura de las aportaciones al plan.

La primera aportación es de 1.000€: $C_1 = 1.000$

La segunda aportación es de:

$$C_2 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02) = 1.000 \cdot 1{,}02$$

La tercera aportación es de: $C_3 = (1.000 \cdot 1{,}02) \cdot 1{,}02 = 1.000 \cdot 1{,}02^2$

Y así sucesivamente.

Por tanto, las aportaciones forman una renta variable en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$ y primer término $C_1 = 1.000$. Es decir,

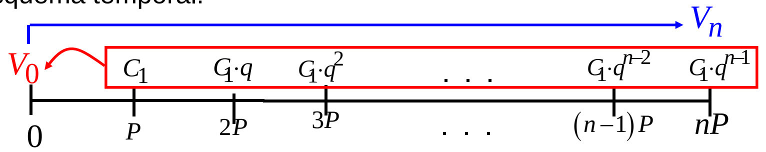
$$C_r = 1.000 \cdot 1{,}02^{r-1} \quad \text{con} \quad r = 1, 2, \ldots, 40$$

Y la última aportación será de: $C_{40} = 1.000 \cdot 1{,}02^{40-1} = 2.164{,}74$

3. 2. Valoración de una renta temporal, inmediata y vencida de periodo *P*

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_1 \cdot q^{r-1}, r \cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema temporal:



Cálculo del **valor actual**: $V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1 + I_M)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot (1 + I_M)^{-r}$

Desarrollando resulta:

$$\boxed{V_0 = \begin{cases} C_1 \cdot \dfrac{1 - q^n \cdot (1 + I_M)^{-n}}{1 + I_M - q} & \text{si} \quad q \neq 1 + I_M \\ C_1 \cdot n \cdot (1 + I_M)^{-1} & \text{si} \quad q = 1 + I_M \end{cases}}$$

Cálculo del **valor final**: $\boxed{V_f = V_0 \cdot (1 + I_M)^n}$

Explicación de la fórmula del valor actual de la renta geométrica, de periodo P (frecuencia M), temporal de n términos, inmediata y vencida:

$$V_0 = C_1 \cdot \frac{1 - q^n \cdot (1+I_M)^{-n}}{1+I_M-q}$$

Razón de la progresión geométrica

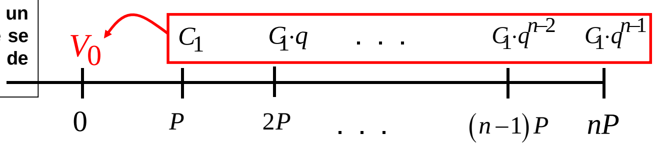
Número de términos (debe ser un número natural, es decir, no puede tener decimales)

Importe del primer término

Interés efectivo de valoración de frecuencia M (igual a la de la renta)

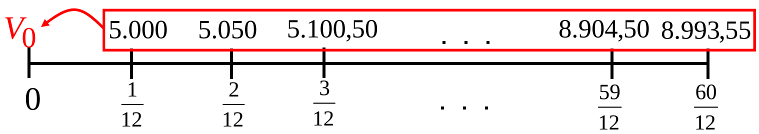
$$V_0 = C_1 \cdot n \cdot (1+I_M)^{-1}$$

El valor actual obtenido SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta



Ejemplo: Calculad el valor actual de una renta temporal de 5 años, inmediata y vencida cuyo primer término es 5.000€ y aumenta un 1% mensual acumulativo en los dos casos siguientes:

a) A un interés del 10% anual.



El tanto efectivo mensual es: $I_1 = 0{,}10 \Rightarrow I_{12} = (1+0{,}10)^{1/12} - 1 = 0{,}007974$

como $q = 1{,}01 \neq 1{,}007974 = 1 + I_M$

$$V_0 = 5.000 \cdot \frac{1-1{,}01^{60} \cdot (1+0{,}007974)^{-60}}{1+0{,}007974-1{,}01} = 315.978{,}76€$$

b) A un interés del 12% anual capitalizable mensualmente.

$$i_{12} = 0{,}12 \Rightarrow I_{12} = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01 \quad \text{y como} \quad q = 1{,}01 = 1 + I_M$$

$$V_0 = 5.000 \cdot 60 \cdot (1+0{,}01)^{-1} = 297.029{,}70€$$

Al igual que hicimos con las rentas constantes, para obtener el valor actual y el valor final del resto de rentas temporales:

- Diferidas y vencidas
- Inmediatas y anticipadas
- Diferidas y anticipadas

capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese. Por tanto, para valorar **cualquier** renta financiera geométrica es aconsejable seguir los 5 pasos siguientes:

1) Representar gráficamente la operación.
2) Obtener el interés efectivo de frecuencia de la renta I_M .
3) Aplicar la fórmula del valor actual de la renta.
4) Decidir en qué instante temporal se encuentra el valor actual calculado en el paso anterior.
5) Trasladar dicho valor al instante temporal que nos interese de la operación usando interés compuesto.

Ejercicio: Una persona inicia hoy, al cumplir 45 años, un plan de ahorro en el que realizará aportaciones mensuales, crecientes un 0,5% mensual acumulativo, con el objetivo de disponer de un capital al cumplir los 65. Si la primera imposición es de 100€ y el plan de ahorro rinde un interés del 3% efectivo anual. Se pide:

a) Determinad la expresión general de las cuantías de los ingresos.

Los ingresos forman una renta variable en progresión geométrica de razón $q = 1{,}005$ y primer término $C_1 = 100$. Es decir,

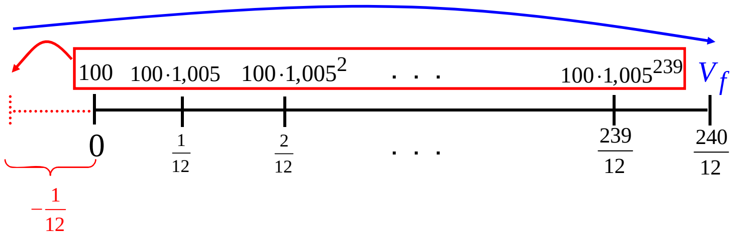
$$C_r = 100 \cdot 1{,}005^{r-1}$$

b) Calculad el importe de la última aportación que se realizará (considerar que al cumplir los 65 años no se realiza ingreso).

Dado que se realizarán aportaciones mensuales durante 20 años la renta tendrá 240 términos, el importe del último será:

$$C_{240} = 100 \cdot 1{,}005^{240-1} = 329{,}37€$$

c) Calculad el capital acumulado cuando la persona cumpla los 65 años.



El tanto efectivo mensual es: $I_1 = 0{,}03 \Rightarrow I_{12} = (1+0{,}03)^{1/12} - 1 = 0{,}002466$

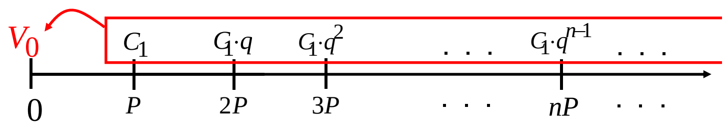
Como: $q = 1{,}005 \neq 1{,}002466 = 1 + I_M$

$$V_f = \underbrace{100 \cdot \frac{1-1{,}005^{240} \cdot (1+0{,}002466)^{-240}}{1+0{,}002466-1{,}005}}_{\text{Valor en } T=-\frac{1}{12}:\ 32.867{,}74} \cdot (1+0{,}002466)^{241} = 59.509{,}20€$$

3.3. Valoración de una renta perpetua, inmediata y vencida de periodo *P*

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_1 \cdot q^{r-1}, r \cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

Esquema:



En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual.

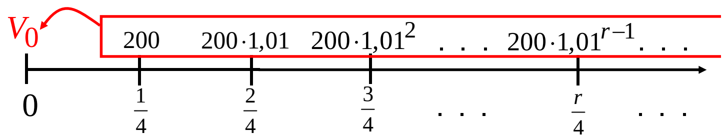
Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot (1+I_M)^{-r} = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot (1+I_M)^{-r}$$

De donde se obtiene: $\boxed{V_0 = \dfrac{C_1}{1+I_M-q} \quad \text{si} \quad q<1+I_M}$

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta.

Ejemplo: Calculad el valor actual de una renta trimestral, inmediata, vencida y perpetua cuyos términos crecen trimestralmente un 1% acumulativo siendo el primer término de 200€ a un tipo de interés del 6% anual capitalizable trimestralmente.

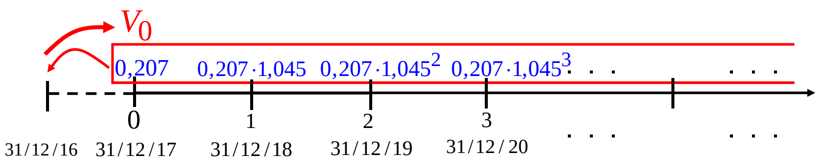


$$\left.\begin{array}{l} i_4 = 0{,}06 \Rightarrow I_4 = \dfrac{0{,}06}{4} = 0{,}015 \\ q = 1{,}01 \end{array}\right\}$$

Como: $q = 1{,}01 < 1{,}015 = 1 + I_4$

$$V_0 = \frac{200}{1+0{,}015-1{,}01} = 40.000€$$

Ejercicio: A final del año 2017, Banco Santander (SAN) había pagado un dividendo de 0,207€ por acción. El consejo de Administración piensa incrementar cada año dicho dividendo un 4,5% acumulativo. Si para comprar acciones de SAN unos inversores exigen un interés del 8,20% anual y suponiendo que SAN tendrá una vida ilimitada, calculad el valor actual (final del año 2017) de los futuros dividendos de SAN.



Puesto que: $q = 1{,}045 < 1 + 0{,}082 = 1 + I_1$

$$V_0 = \underbrace{\frac{0{,}207}{1+0{,}082-1{,}045}}_{5{,}595} \cdot (1+0{,}082) = 6{,}053€$$

Las acciones de SAN cerraron el año 2017 al precio de 5,479€
¿Caras o baratas?

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Renta geométrica
- Valor actual y final de la renta temporal
- Valor actual de la renta perpetua

Bloque temático 1.
Rentas financieras

2. Rentas financieras

4. Rentas aritméticas

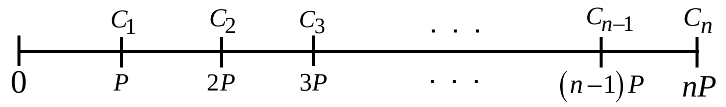
4.1. Definición

4.2. Valoración de una renta temporal, inmediata y vencida de periodo P

4.3. Valoración de una renta perpetua, inmediata y vencida de periodo P

4.1. Definición

Dada una renta financiera con estructura temporal:



es una renta variable en progresión aritmética (o lineal) si cada cuantía C_r se obtiene sumando a la cuantía anterior C_{r-1} una constante h denominada razón de la progresión, es decir:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_{r-1} + h$$

Por recurrencia:

$$C_r = C_{r-1} + h = (C_{r-2} + h) + h = C_{r-2} + 2 \cdot h = \ldots = C_1 + (r-1) \cdot h$$

Por tanto, otra forma de expresar las cuantías de una renta aritmética en función de su primera cuantía C_1 y su razón h es:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_1 + (r-1) \cdot h$$

Si $h > 0$ la renta aritmética es creciente

Si $h < 0$ la renta aritmética es decreciente

Ejemplo: Una pequeña empresa prevé, para los próximos 5 años, unos gastos trimestrales y vencidos que crecerán linealmente a razón de 350€ cada trimestre. Si para el primer trimestre los gastos ascienden a 6.000€, ¿cuál es la estructura de los gastos trimestrales previstos?

El primer gasto es de 6.000€: $C_1 = 6.000$

El segundo gasto es de: $C_2 = 6.000 + 350 = 6.350$

El tercer gasto es de:

$$C_3 = 6.350 + 350 = (6.000 + 350) + 350 = 6.000 + 2 \cdot 350 = 6.700$$

Y así sucesivamente.

Por tanto, los gastos forman una renta variable en progresión aritmética de razón h =350 y primer término $C_1 = 6.000$. Es decir,

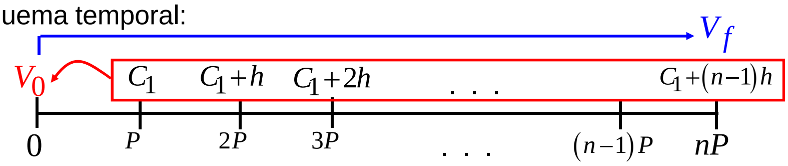
$$C_r = 6.000 + 350 \cdot (r-1) \quad con \quad r = 1, 2, \ldots, 20$$

Y la última aportación será de: $C_{20} = 6.000 + 350 \cdot (20-1) = 12.650$

4.2. Valoración de una renta temporal, inmediata y vencida de periodo *P*

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_1+(r-1)\cdot h, r\cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema temporal:



Cálculo del **valor actual**:

$$V_0=\sum_{r=1}^{n} C_r\cdot(1+I_M)^{-r}=\sum_{r=1}^{n}\left(C_1+(r-1)\cdot h\right)\cdot(1+I_M)^{-r}$$

Desarrollando resulta: $$\boxed{V_0=\left(C_1+\frac{h}{I_M}+nh\right)\cdot a_{\overline{n}|I_M}-\frac{nh}{I_M}}$$

Cálculo del **valor final**: $$\boxed{V_f=V_0\cdot(1+I_M)^n}$$

Explicación de la fórmula del valor actual de la renta aritmética, de periodo P (frecuencia M), temporal de n términos, inmediata y vencida:

Razón de la progresión aritmética

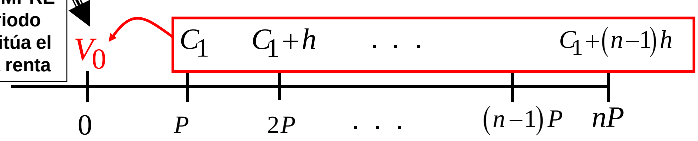
Número de términos (debe ser un número natural, es decir, no puede tener decimales)

$$V_0=\left(C_1+\frac{h}{I_M}+nh\right)\cdot a_{\overline{n}|I_M}-\frac{nh}{I_M}$$

Importe del primer término

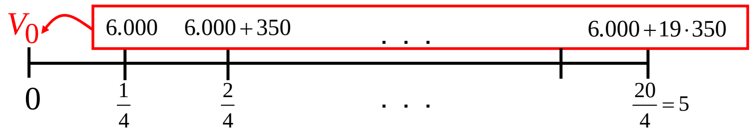
Interés efectivo de valoración de frecuencia M (igual a la de la renta)

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta



Ejemplo: En una demanda de divorcio se pacta que el marido debe pagar a la mujer, durante los próximos 5 años, una pensión compensatoria trimestral y vencida que crecerá linealmente a razón de 350€ cada trimestre, pagándose el primer trimestre una pensión de 6.000€. Si la mujer desea cobrar hoy toda la pensión en un único capital, y el juez considera que para ello se debe aplicar un tipo de interés del 4% nominal pagadero trimestralmente, calculad el capital que hoy debería cobrar la mujer.

La pensión compensatoria sigue una renta variable en progresión aritmética de razón h =350 y primer término $C_1 = 6.000$.



El tanto efectivo trimestral es: $i_4 = 0{,}04 \Leftrightarrow I_4 = \dfrac{0{,}04}{4} = 0{,}01$

$$V_0 = \left(6.000 + \frac{350}{0{,}01} + 20 \cdot 350\right) \cdot a_{\overline{20}|0{,}01} - \frac{20 \cdot 350}{0{,}01} = 166.186{,}54€$$

Al igual que hicimos con las rentas constantes y geométricas, para obtener el valor actual y el valor final del resto de rentas temporales:

- Diferidas y vencidas
- Inmediatas y anticipadas
- Diferidas y anticipadas

capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese. Por tanto, para valorar **cualquier** renta financiera aritmética es aconsejable seguir los 5 pasos siguientes:

1) Representar gráficamente la operación.
2) Obtener el interés efectivo de frecuencia de la renta I_M .
3) Aplicar la fórmula del valor actual de la renta.
4) Decidir en qué instante temporal se encuentra el valor actual calculado en el paso anterior.
5) Trasladar dicho valor al instante temporal que nos interese de la operación usando interés compuesto.

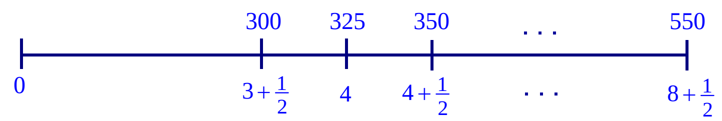
Ejercicio: Dado el conjunto de capitales financieros:

$$\left\{\left(300+25\cdot(r-1),3+\frac{r}{2}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,11}$$

Se pide:

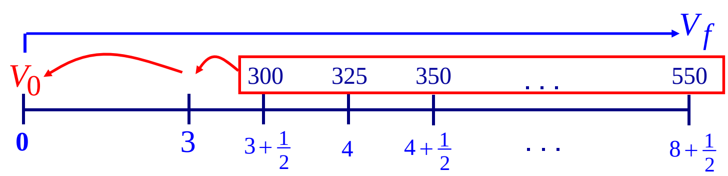
a) Representadlo gráficamente.

$$r=1\rightarrow\left(300,\ 3+\frac{1}{2}\right)\qquad r=2\rightarrow(325,4)\qquad \ldots\qquad r=11\rightarrow\left(550,\ 8+\frac{1}{2}\right)$$



Se trata de una renta temporal variable en progresión aritmética de primer término C_1=300 y razón h=25.

b) A un interés del 3% anual pagadero semestralmente, calculad su valor actual (en T=0) y su valor final.



El tanto efectivo semestral es: $i_2=0{,}03 \Leftrightarrow I_2=\dfrac{0{,}03}{2}=0{,}015$

El valor actual en T=0 es:

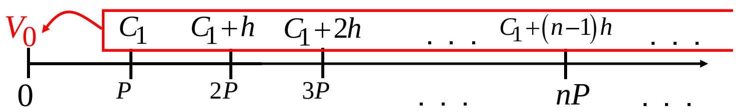
$$V_0=\underbrace{\left(\left(300+\frac{25}{0{,}015}+11\cdot 25\right)\cdot a_{\overline{11}|0{,}015}-\frac{11\cdot 25}{0{,}015}\right)}_{\text{Valor en } T=3:\ 4.242{,}76}\cdot(1+0{,}015)^{-6}=3.880{,}18€$$

El valor final es: $V_f=3.880{,}18\cdot(1+0{,}015)^{17}=4.997{,}75€$

4.3. Valoración de una renta perpetua, inmediata y vencida de periodo *P*

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_1+(r-1)\cdot h, r\cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

Esquema temporal:



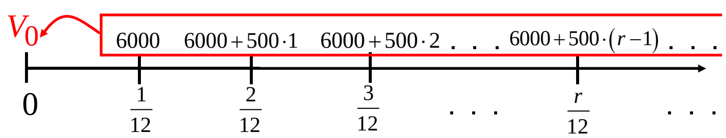
En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual.
Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0=\sum_{r=1}^{\infty}\left(C_1+(r-1)\cdot h\right)\cdot(1+I_M)^{-r}=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(C_1+(r-1)\cdot h\right)\cdot(1+I_M)^{-r}$$

De donde: $$\boxed{V_0=\frac{C_1}{I_M}+\frac{h}{I_M^2}}$$

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta.

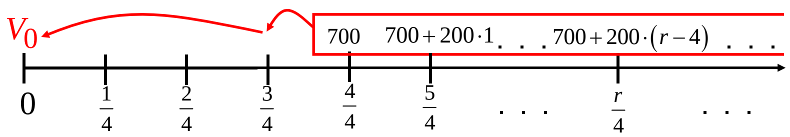
Ejemplo: Calculad el valor actual de una renta mensual, inmediata, vencida y perpetua cuyos términos crecen linealmente 500€ mensuales siendo el primer término de 6.000€ a un tipo de interés del 8% anual.



$$I_1=0{,}08\Rightarrow I_{12}=(1+0{,}08)^{1/12}-1=0{,}006434 \qquad h=500$$

$$V_0=\frac{6.000}{0{,}006434}+\frac{500}{0{,}006434^2}=13.010.786{,}25€$$

Ejercicio: Contablemente, un inmueble destinado al alquiler debe figurar en el balance por el valor actual de todos los ingresos futuros. Si de un local se espera obtener una renta trimestral, diferida 1 año, anticipada y perpetua cuyos términos crecen linealmente 200€ trimestrales siendo el primer término de 700€, calculad el valor contable del local a un interés del 6% anual liquidable trimestralmente.



$i_4 = 0{,}06 \Rightarrow I_4 = \frac{0{,}06}{4} = 0{,}015$ $\qquad h = 200$

$$V_0 = \underbrace{\left(\frac{700}{0{,}015} + \frac{200}{0{,}015^2}\right)}_{\text{Valor en } T=\frac{3}{4}:\ 935.555{,}56} \cdot (1+0{,}015)^{-3} = 894.687{,}68€$$

A modo de RESUMEN, se puede valorar cualquier renta financiera siguiendo los cinco pasos siguientes:

1) **Representar gráficamente la renta financiera.**
2) **Calcular el interés efectivo de frecuencia de la renta equivalente al tipo de interés de la operación.**
3) **Aplicar la correspondiente fórmula del valor actual de la renta inmediata y vencida (temporal o perpetua, constante o variable).**
4) **Decidir en qué instante temporal se sitúa el valor actual calculado en el paso anterior.**
5) **Trasladar dicho valor actual al momento temporal que interese de la operación a interés compuesto.**

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Renta aritmética
- Valor actual y final de la renta temporal
- Valor actual de la renta perpetua

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el valor actual y el valor final, en régimen financiero de interés compuesto, de las siguientes rentas constantes:

   a) Renta anual de 2.500€ inmediata, vencida y de 10 años de duración. Tanto de interés 5% anual.

   b) Renta mensual, vencida, de 50€ pagadera durante 5 años tras un diferimiento de 6 meses. Tanto de interés 1% efectivo mensual.

   c) Renta inmediata y anticipada de 100€ trimestrales y de 15 años de duración. Tanto de interés 8% anual pagadero trimestralmente.

   d) Renta diferida 2 años y anticipada de 35€ semestrales pagadera durante 5 años. Tanto de interés 2% efectivo semestral los 4 primeros años de la operación financiera y 4% anual el resto del plazo.

   e) Renta perpetua, vencida, anual y diferida 2 años de 100€ cada término. Tanto de interés 3% efectivo anual.

2. Calcular el capital final que tendrá una cuenta vivienda que se ha abierto con una aportación inicial de 3.500€ y en la que se realizarán aportaciones vencidas cada 2 meses de 800€ durante 4 años a un interés anual del 3,40%.

3. Se ha abierto un plan de jubilación con 3.000€ que pagará un interés del 2% nominal acumulable mensualmente con el objetivo de alcanzar al cabo de 18 años un capital de 50.000€. Si durante dicho plazo se piensan realizar aportaciones mensuales, constantes y vencidas, calcular el importe de la mensualidad que permite alcanzar el objetivo.

4. Una persona solicita un préstamo por el que deberá pagar durante 40 años mensualidades constantes y vencidas de 823,15€. Sabiendo que se ha pactado a un interés efectivo anual del 6%, calcular la cantidad solicitada en préstamo.

5. Para la financiación de la compra de un televisor cuyo precio es de 2.000€, una cadena de electrodomésticos ofrece el producto denominado "Fórmula 10". Consiste en pagar 10 cuotas mensuales y vencidas por un importe igual a la décima parte del precio del producto más una comisión inicial del 10% sobre dicho precio. Plantear la ecuación que permite determinar el tanto efectivo mensual al que resulta la financiación.

6. Se abre hoy con 4.000€ un plan de jubilación en el que a final de cada trimestre se aportarán 1.000€. Si el plan ofrece un interés del 3% anual. Determinar:

   a) Capital que se habrá acumulado al cabo de 22 años.

   b) Capital acumulado a los 22 años en el plan si a los 10 años de haberse iniciado el plan, el tipo de interés hubiera aumentado al 4% nominal capitalizable mensualmente.

7. Calcular el valor actual y el valor final de las siguientes rentas variables en progresión geométrica, valorando en régimen financiero de interés compuesto:

a) Renta inmediata y vencida de 10 términos anuales crecientes anualmente un 8% acumulativo. Primer término 500€. Tanto de interés 10% nominal capitalizable trimestralmente.

b) Renta semestral, inmediata y anticipada de 12 términos decrecientes en un 3% semestral acumulativo. La cuantía del tercer término es de 7.000€. Tanto de interés 9,5% anual pagadero mensualmente.

c) Renta mensual de términos crecientes en un 2% mensual acumulativo, pagadera por vencido durante 5 años tras un diferimiento de 5 meses. Primer término 700€.

c.1) Tanto de interés 6% efectivo semestral.

c.2) Tanto de interés 2% mensual.

d) Renta perpetua trimestral, diferida un año, anticipada y creciente un 1,20% trimestral acumulativo, con primer término de 1.000€ y a un interés del 6% anual acumulable trimestralmente.

8. Dado el conjunto de capitales financieros $\left\{\left(800\cdot 1,05^{r-1}, \frac{5+r}{4}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,15}$ se pide:

a) Indicar qué tipo de renta representa.

b) Calcular su valor actual a un interés del 5% anual.

9. En un plan de ahorro se harán aportaciones a final de cada año que se incrementarán un 4% anual durante 15 años. Si el primer año se aportan 2.000€, calcular:

a) Capital final acumulado si el plan ofrece un interés del 5% anual.

b) Capital final acumulado en el plan si el interés fuese del 4% anual.

10. Para la compra de un determinado bien se ha acordado pagar 10 anualidades. El primer pago es de 2500 € y se contemplan incrementos anuales del 12% acumulativo. Si el tanto de valoración es del 6% efectivo anual, calcular el valor del citado bien hoy, pagado al contado, suponiendo que:

a) La primera anualidad vence dentro de un año.

b) La primera anualidad vence hoy.

c) La primera anualidad vence dentro de 4 años.

11. Según la actual normativa contable, para valorar en el balance las construcciones de una empresa destinadas al alquiler se calcula el valor actual de todos los cobros futuros. Una empresa inmobiliaria española dedicada al alquiler de locales para oficinas cobra actualmente, y al inicio de cada mes, unos alquileres mensuales de 80.000€. Debido a la crisis, dichos alquileres se prevé que se reduzcan cada mes un 0,2% acumulativo. Si el tipo de interés que debe aplicarse para valorar las construcciones es del 15% anual, calcular el valor que hoy debe figurar de dicha partida en el balance (se supone que los alquileres se cobrarán de forma perpetua).

12. Hallar el valor actual y el valor final de las siguientes rentas variables en progresión aritmética, valorando en régimen financiero de interés compuesto:

    a) Renta inmediata y vencida de 20 términos mensuales crecientes en 50€ cada mes. Primer término 300€. Tanto de interés 6% efectivo semestral.

    b) Renta trimestral, diferida 9 meses, vencida y decreciente un 6% lineal cada trimestre, pagadera durante 3 años. La cuantía del primer término es de 5.000€. Tanto de interés 8% nominal pagadero trimestralmente.

    c) Renta inmediata, semestral y anticipada de 15 términos, crecientes en 100€ cada semestre. Importe del tercer término 2.750€. Tanto de interés 10% efectivo anual.

    d) Renta perpetua anual, diferida 6 meses, vencida y creciente 50€ cada año, con primer término de 1.000€ y a un interés del 6% anual.

13. Una empresa solicita un préstamo por el que deberá pagar durante 10 años trimestralidades vencidas. La primera será de 1.000€ e irán creciendo cada trimestre en 50€. Sabiendo que se ha pactado a un interés del 8% nominal pagadero trimestralmente, calcular:

    a) El importe de la última trimestralidad.

    b) La cantidad solicitada en préstamo.

14. Una persona abrió una cuenta hace 10 años en la que ha ingresado anualidades anticipadas. El primer ingreso fue de 700 € y cada año aumentó la anualidad en 100 €. Si el tanto pactado en la cuenta fue del 8% anual, ¿qué saldo tiene hoy la cuenta?

15. Una empresa debe decidir hoy entre dos proyectos de inversión que suponen los siguientes desembolsos:

    Proyecto 1:

- Desembolso inicial de 100.000€.
- Durante los 2 primeros años, trimestralidades de 2.500€ venciendo la primera al final del primer semestre.
- 10 pagos anuales: el primero será de 3.000€ al cabo de 5 años del inicio de la operación y los próximos irán aumentando a razón de 250 € cada año.

    Proyecto 2:

- Pago de 20 anualidades de 10.000€ venciendo la primera en el momento del contrato.
- 15 pagos anuales: el primero, de 2.500€, vence a los 3 años y los demás irán aumentando el 3% sobre la cuantía del año anterior.
- 5 pagos anuales de 3.000€ venciendo el primero de ellos al cabo de 3 años.

    Valorar hoy los desembolsos utilizando un tipo efectivo anual del 5%, y decidir qué proyecto es el más económico.

16. Una empresa liquida el saldo de una cuenta bancaria que abrió hace 5 años con una imposición inicial de 40.000€ y en la que, posteriormente, justo a los dos años de su apertura, empezó a realizar imposiciones mensuales de 1.000€. La última imposición se ha realizado un mes antes de liquidar la cuenta.

    Obtener el saldo acumulado en la cuenta bancaria si se ha retribuido en régimen financiero de interés compuesto al 3% efectivo anual los dos primeros años y al 2,4% anual capitalizable mensualmente el resto del plazo.

17. Una persona recibe hoy, de su plan de jubilación, 130.000€. Por motivos fiscales preferiría cobrar este importe mediante cuotas periódicas. La entidad financiera que gestiona el plan de jubilación le ofrece hoy las siguientes alternativas:

    a) Cobro de 48 cuotas mensuales constantes, la primera de ellas se haría efectiva dentro de 3 meses. La operación se pacta al 0,6% anual capitalizable mensualmente. Calcular la cuota mensual.

    b) Cobro de 24 cuotas trimestrales constantes de 5.500€ cada una de ellas, la primera se haría efectiva dentro de 2 meses. Plantear la ecuación que permite obtener el tanto nominal capitalizable trimestralmente que tendría que aplicar la entidad financiera.

    c) Cobro de 50 mensualidades crecientes cada mes en una cantidad constante, la primera mensualidad asciende a 2.500€ y se haría efectiva dentro de 6 meses. La operación se pacta al 0,6% anual capitalizable mensualmente. Plantear la ecuación que permite obtener el incremento mensual.

18. Un particular abre hoy una cuenta en la que se compromete a realizar imposiciones mensuales crecientes en un 1,5% mensual acumulativo, con el objetivo de conseguir un saldo acumulado de 35.000€ dentro de 5 años. La primera imposición la efectúa hoy y la última un mes antes de que finalice la cuenta. El tipo de interés pactado es del 0,9% anual capitalizable mensualmente. Se pide:

    a) Calcular el importe de la primera y de la última imposición mensual que deberá efectuar el particular.

    b) Plantear la ecuación que permite obtener el porcentaje semestral acumulativo de variación en el supuesto de que las imposiciones sean semestrales y que la primera, de 3.000€, se efectúa a los 12 meses de la apertura de la cuenta y la última 6 meses antes de su vencimiento. La cuenta se abre hoy con una imposición inicial de 8.000€. Se mantienen el resto de las condiciones iniciales de la cuenta (saldo acumulado de 35.000€ dentro de 5 años y tipo de interés pactado del 0,9% anual capitalizable mensualmente).

<u>Formulario</u>

$C_r = C$	$C \cdot a_{\overline{n}\vert I_M} = C \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$	$C \cdot \frac{1}{I_M}$
$C_r = C_1 \cdot q^{r-1}$	$\begin{cases} C_1 \cdot \frac{1-q^n \cdot (1+I_M)^{-n}}{1+I_M-q} & 1+I_M \neq q \\ C_1 \cdot n \cdot q^{-1} & 1+I_M = q \end{cases}$	$\frac{C_1}{1+I_M-q} \quad q < 1+I_M$
$C_r = C_1 + (r-1) \cdot h$	$\left(C_1 + n \cdot h + \frac{h}{I_M}\right) \cdot a_{\overline{n}\vert I_M} - \frac{n \cdot h}{I_M}$	$\frac{C_1}{I_M} + \frac{h}{I_M^2}$

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

Tema 1. Préstamos

1. **Definición, clasificación y magnitudes**
2. **Préstamos con amortización única de capital**
3. **Préstamos con amortización periódica: Préstamo francés**
4. **Cambios durante la vigencia de un préstamo**

Tema 2. Empréstitos

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

1. Préstamos

1. Definición, clasificación y magnitudes

1.1. Definición

1.2. Clasificación

1.3. Magnitudes

1.1. Definición

Un **préstamo** es una operación financiera en la que una persona, llamada **prestamista o sujeto activo**, entrega a otra persona, llamada **prestatario o sujeto pasivo**, una cuantía monetaria denominada **nominal del préstamo, *C***. A cambio el sujeto pasivo se compromete a reembolsar o amortizar en un **plazo concreto *t***, ya sea mediante un único pago o mediante desembolsos sucesivos, la cantidad prestada y unos intereses pactados a un **tipo de interés I_m**.

Por tanto, en el momento de concertarse el préstamo se establece una equivalencia financiera a interés compuesto entre el capital que cede el sujeto activo (**prestación**) y el capital o capitales que retorna el sujeto pasivo (**contraprestación**), fruto de los acuerdos que han adoptado:

$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

(Interés efectivo pactado del préstamo)

1. 2. Clasificación

De los posibles criterios de clasificación de los préstamos destacamos aquellos que se centran en la forma de amortizar el nominal del préstamo y en la forma del pago de los intereses:

a) Según la **forma de amortización del nominal** del préstamo:

- Préstamo con **AMORTIZACIÓN ÚNICA** de capital.

  El nominal C se devuelve de una sola vez al final del plazo pactado.

- Préstamo con **AMORTIZACIÓN PERIÓDICA** de capital.

  El nominal C se devuelve en diversos pagos periódicos a lo largo del plazo pactado.

b) Según la **forma de pago de los intereses** del préstamo:

- Préstamo con **PAGO ÚNICO** de intereses.

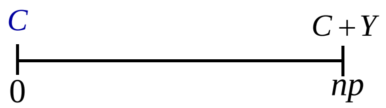
  Los intereses generados se devuelven de una sola vez, normalmente al final del plazo pactado.

- Préstamo con **PAGO PERIÓDICO** de intereses.

  Los intereses generados se devuelven de forma periódica a lo largo del plazo pactado.

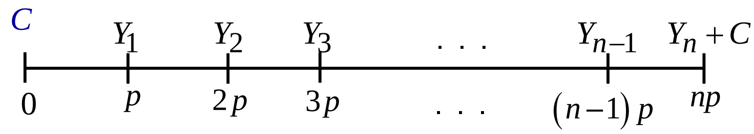
En concreto, estudiaremos los 3 préstamos siguientes:

• Préstamo con **amortización única** de capital C y **pago único** de intereses Y, cuya estructura temporal será de la forma:



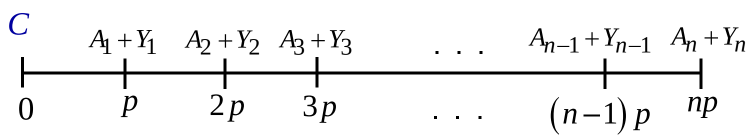
Equivalencia financiera: $$(C,0)\approx(C+Y,np)$$

• Préstamo con **amortización única** de capital C y **pago periódico** de intereses Y_r, cuya estructura temporal será de la forma:



Equivalencia financiera: $$(C,0)\approx\{(Y_r,rp),(C,np)\}_{r=1,2,\ldots n}$$

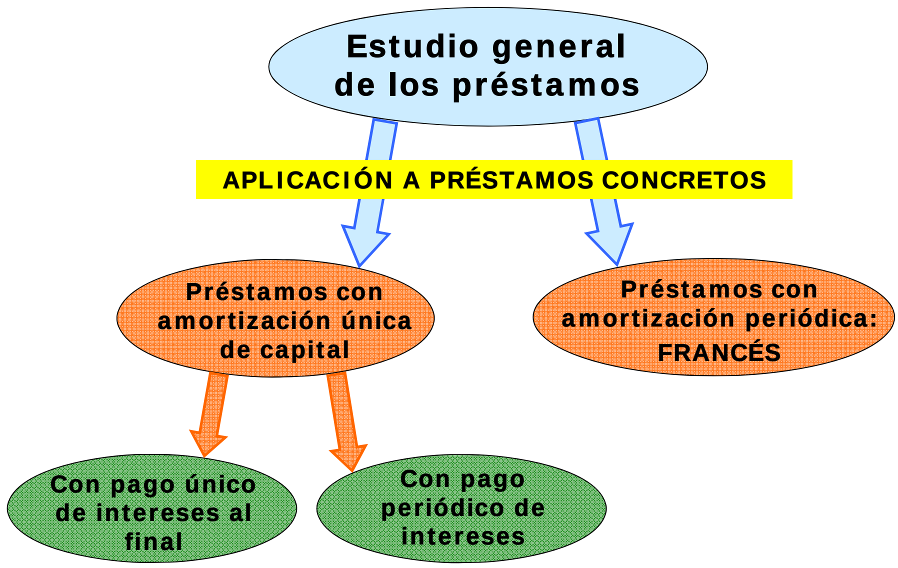
• Préstamo con **amortización periódica** de capital A_r y **pago periódico** de intereses Y_r, cuya estructura temporal será de la forma:



Equivalencia financiera: $$(C,0)\approx\{(A_r+Y_r,rp)\}_{r=1,2,\ldots n}$$

En este caso, la suma total de las amortizaciones periódicas de capital deben ser igual al nominal del préstamo, es decir:

$$\sum_{r=1}^{n} A_r = C$$



Tema 1. Préstamos
1. Definición, clasificación y magnitudes

1.3. Magnitudes

Todos los préstamos tienen una terminología propia:

1º) Definición general de las magnitudes:

1. **Término amortizativo (Cuota total)**
2. **Cuota de interés**
3. **Cuota de amortización**
4. **Total amortizado (Capital amortizado)**
5. **Capital pendiente**
6. **Reserva matemática**
7. **Valor del préstamo**
8. **Tanto efectivo prestatario**
9. **TAE del préstamo**

2º) Aplicación concreta y práctica a cada tipo de préstamo.

Término amortizativo o **cuota total** correspondiente al periodo ***r*-ésimo,** se representa por α_r , y es el importe total del pago realizado por el prestatario en el periodo *r.*

Ejemplo: Si una persona ha solicitado un préstamo de 60.000€ que debe devolver mediante el pago de cuotas mensuales durante 15 años, el termino amortizativo es la cantidad que deberá pagar cada mes.

Cuota de interés correspondiente al periodo ***r*-ésimo,** se representa por Y_r , y es la parte del término amortizativo destinada al pago de los intereses.

Cuota de amortización o **cuota de capital** correspondiente al periodo ***r*-ésimo,** se representa por A_r , y es la parte del término amortizativo destinada a amortizar o devolver parte del nominal del préstamo.

Ejemplo: En el préstamo anterior, de la cantidad que debe pagarse cada mes, una parte corresponde a los intereses del mes y otra parte se destina a devolver parte del capital prestado, es decir:

$$\alpha_r = Y_r + A_r$$

Total amortizado o **capital amortizado** en un momento τ del préstamo**,** se representa por M_τ, y es la parte del nominal del préstamo amortizada o devuelta hasta dicho instante.

Ejemplo: En el préstamo anterior, la parte del nominal del préstamo que se habrá devuelto en un momento determinado de la vida del préstamo será el total amortizado.

Capital pendiente en un momento τ del préstamo**,** se representa por CP_τ, y es la parte del nominal del préstamo pendiente de amortizar o devolver desde dicho instante.

Ejemplo: En el préstamo anterior, la parte del nominal del préstamo que aún quedará por devolver en un momento determinado de la vida del préstamo será el capital pendiente.

En cualquier momento del préstamo deberá cumplirse:

$$M_\tau + CP_\tau = C$$

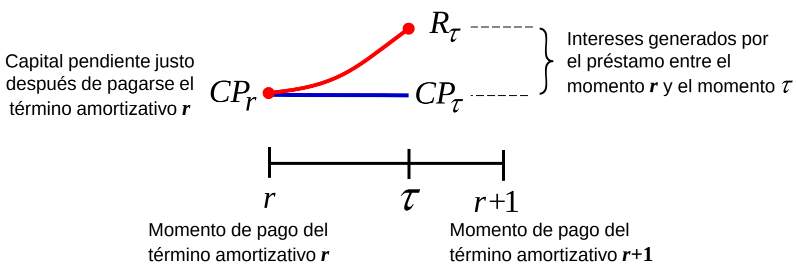
Todas estas magnitudes pueden recogerse, periodo a periodo, en el **cuadro de amortización del préstamo**.

r	α_r	Y_r	A_r	M_r	CP_r

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interés Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0				$M_0 = 0$	$CP_0 = C$
1	$\alpha_1 = Y_1 + A_1$	Y_1	A_1	$M_1 = A_1$	$CP_1 = C - M_1$
2	$\alpha_2 = Y_2 + A_2$	Y_2	A_2	$M_2 = M_1 + A_2$	$CP_2 = C - M_2$
3	$\alpha_3 = Y_3 + A_3$	Y_3	A_3	$M_3 = M_2 + A_3$	$CP_3 = C - M_3$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$\alpha_n = Y_n + A_n$	Y_n	A_n	$M_n = C$	$CP_n = 0$

Reserva matemática en un momento cualquiera τ de la vida de un préstamo, se representa por R_τ, y es el importe que el prestatario debe entregar al prestamista para cancelar el préstamo en dicho instante, considerando únicamente los capitales que intervienen en la equivalencia financiera (sin incluir comisiones ni gastos).

Aunque a veces coinciden, **no debe confundirse** la **reserva matemática** con el **capital pendiente de amortizar**. La diferencia entre ambos suele ponerse de manifiesto en un momento τ intermedio entre el pago de dos términos amortizativos consecutivos:



Ejemplo: En el préstamo que está pagando cuotas mensuales, justo después de pagar una cuota coincidirán la reserva y el capital pendiente, pero al cabo de, por ejemplo, 10 días, el capital pendiente seguirá siendo el mismo pero la reserva matemática será superior porque tendrá en cuenta los intereses de esos días.

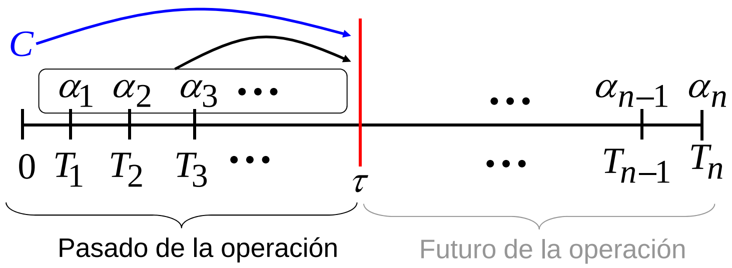
Existen dos formas de calcular la reserva matemática en un momento determinado:

- Analizando el pasado de la operación hasta ese instante (incluido):
  Reserva retrospectiva
- Analizando el futuro desde dicho instante:
  Reserva prospectiva

Vamos a estudiar la reserva matemática de un préstamo a partir de la siguiente equivalencia financiera general:

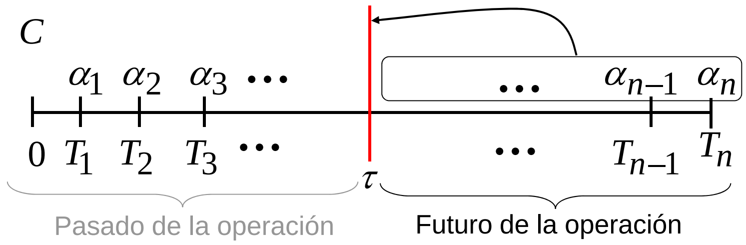
$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

Tema 1. Préstamos
1. Definición, clasificación y magnitudes



La **reserva matemática retrospectiva** en el momento τ es el valor financiero en τ del nominal del préstamo, C, menos el valor financiero en τ de los términos amortizativos que se han pagado desde el origen de la operación hasta dicho instante (incluido) utilizando el mismo tipo de interés I_m pactado en el préstamo. Es decir:

$$R_\tau^{ret} = C \cdot (1+I_m)^{m\cdot\tau} - \sum_{\forall T_r \le \tau} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(\tau - T_r)}$$



La **reserva matemática prospectiva** en el momento τ es el valor financiero en τ de los términos amortizativos que hay desde dicho instante (no incluido) hasta el final del préstamo utilizando el mismo tipo de interés I_m pactado en el préstamo. Es decir:

$$R_\tau^{pro} = \sum_{\forall T_r > \tau} \alpha_r \cdot \left(1 + I_m\right)^{-m \cdot (T_r - \tau)}$$

PROPIEDAD: La reserva matemática retrospectiva y prospectiva de un préstamo en un instante cualquiera τ son **iguales**.

Tema 1. Préstamos
1. Definición, clasificación y magnitudes

Valor en un momento cualquiera τ de la vida de un préstamo, se representa V_τ , y es el importe que **tendría** el préstamo en una posible transacción del mismo en condiciones reales del mercado financiero.

Para conocer dicho valor financiero en un momento τ , se actualizarán a interés compuesto los términos amortizativos pendientes de pagar a un tipo de interés de mercado $I^{Mercado}$, que no tiene porque coincidir con el pactado inicialmente para el préstamo I_m.

$$V_\tau = \sum_{\forall T_r > \tau} \alpha_r \cdot \left(1 + I_m^{Mercado}\right)^{-m \cdot (T_r - \tau)}$$

En el caso de que el interés del mercado coincida con el interés pactado en el préstamo, entonces y sólo entonces coincidirán el valor financiero con la reserva prospectiva.

Toda operación de préstamo puede llevar asociados, además de los intereses, una serie de gastos y comisiones como, por ejemplo:

- Comisión de apertura y gastos de estudio.
- Gastos de tasación (si se trata de un inmueble).
- Gastos de gestoría.
- Gastos de Registro y notario.
- Seguros: Hogar, vida y protección de pagos.
- Gastos de mantenimiento asociados a productos vinculados (como tarjetas de crédito, cuenta nómina, …).
- El impuesto de Actos Jurídicos Documentados (AJD).
- La comisión por reembolso o amortización total o parcial.
- Etc.

Algunos de dichos gastos y comisiones son abonados por el prestatario, otros son abonados por el prestamista y algunos son compartidos.

Como consecuencia de lo anterior, se pueden distinguir:

- **Tanto efectivo prestamista** (sujeto activo)**:** Es el tipo de interés efectivo al que resulta la operación al prestamista, teniendo en cuenta los capitales de la prestación y la contraprestación asociados a él.
- **Tanto efectivo prestatario** (sujeto pasivo)**:** Es el tipo de interés efectivo al que resulta la operación al prestatario, teniendo en cuenta los capitales de la prestación y la contraprestación para él.

Dado que, durante la vida del préstamo, pueden aparecer capitales no previstos al principio, estos dos tantos efectivos pueden variar a lo largo de la vida del préstamo.

- **Tasa anual equivalente (TAE) del préstamo:** Es el interés efectivo anual al que resulta la operación a cualquier prestatario, considerando la prestación y la contraprestación según las condiciones conocidas en el momento de concesión del préstamo. Por tanto, puede obtenerse en el origen de la operación y no varía.

  Los gastos que deben incluirse en la TAE han ido variando desde la primera Orden ministerial del 12/12/1989 que introdujo este concepto jurídico, hasta la actualidad.

La normativa actualmente vigente detalla, de una forma más concreta, aquellos gastos que deben incluirse en el cálculo de la TAE:

> *En el cálculo de la TAE se incluirán los intereses, comisiones y demás gastos que el cliente esté obligado a pagar a la entidad como contraprestación por el crédito o préstamo recibido o los servicios inherentes al mismo. También se incluirán las primas de los seguros que tengan por objeto garantizar a la entidad el reembolso del crédito en caso de fallecimiento, invalidez o desempleo de la persona física que haya recibido el crédito, siempre y cuando la entidad imponga la contratación de dicho seguro como condición para conceder el préstamo o crédito.*

Ejemplo: Un préstamo que se haya concedido a un interés del 6% anual, pero en el que se haya tenido que pagar además una comisión de apertura del 2% del nominal del préstamo, una comisión de estudio de 200€ y un seguro obligatorio de 125€, la TAE, al tener en cuenta todos estos gastos, será superior al 6% anual.

Ejemplo: Si al cabo de un año de concederse el préstamo anterior, el prestatario amortiza parte del nominal y, por ello, paga una comisión del 1%, ésta y el capital entregado se tendrán en cuenta para el cálculo del tanto efectivo prestatario, pero no en la TAE, pues dicha amortización no era conocida en el momento de la firma del préstamo.

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Nominal del préstamo
- Prestamista
- Prestatario
- Amortización única de capital
- Amortización periódica de capital
- Pago único de intereses
- Pago periódico de intereses
- Término amortizativo o Cuota total
- Cuota de interés
- Cuota de amortización o Cuota de capital
- Total amortizado o Capital amortizado
- Capital pendiente
- Cuadro de amortización

- Reserva matemática (retrospectiva y prospectiva)
- Valor del préstamo
- Tanto efectivo prestatario
- Tasa anual equivalente del préstamo (TAE)

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

1. Préstamos

2. Préstamos con amortización única de capital

2.1. Préstamos con amortización única de capital y pago único de intereses

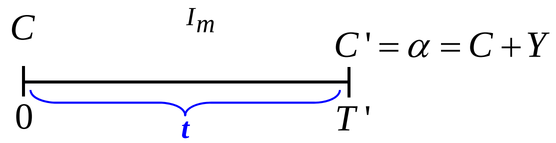
2.2. Préstamos con amortización única de capital y pago periódico de intereses

2.1. Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Características:

1. La amortización del nominal del préstamo, C, se realiza mediante un único pago al final de la operación.
2. La cuota de interés es única y también se hace efectiva al final del plazo de la operación, usando el régimen financiero de interés compuesto al tipo de interés constante del préstamo I_m .

Equivalencia financiera: $(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} (C',T')$



La cuota total o **término amortizativo** que se tendrá que pagar al final de la operación es:

$$C' = \alpha = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t}$$

donde t es el plazo de la operación en años.

Tema 1. Préstamos
2. Préstamos con amortización única de capital

La **cuota de amortización** es: $A = C$

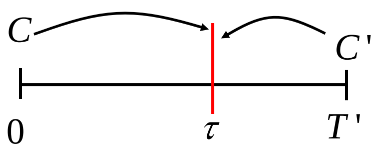
La **cuota de interés** será: $Y = \alpha - A = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t} - C$

A continuación vamos a estudiar la **reserva matemática**, el **capital pendiente** y el **total amortizado** de este préstamo en 3 momentos concretos:

- En el origen del préstamo: 0
- En un instante cualquiera dentro del plazo del préstamo:
  $$\tau \in (0, T')$$
- En el instante final del préstamo: $\boldsymbol{T'}$

Reserva matemática:

- En 0 : $R_0 = C$
- En τ : $R_\tau = \begin{cases} \overset{\text{retrosp.}}{\nearrow}\ C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau} \\ \underset{\text{prosp.}}{\searrow}\ C'\cdot(1+I_m)^{-m\cdot(T'-\tau)} \end{cases}$



- En ***T'*** : $R_{T'} = 0$

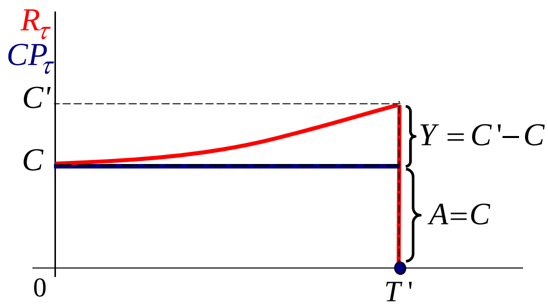
Capital pendiente:

- En 0 : $CP_0 = C$
- En τ : $CP_\tau = C$
- En ***T'*** : $CP_{T'} = 0$

Total amortizado:

- En 0 : $M_0 = 0$
- En τ : $M_\tau = 0$
- En ***T'*** : $M_{T'} = C$

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:



La reserva matemática y el capital pendiente solo coinciden en 0 y T'

En resumen:

<table>
<tr><th>Instante</th><th colspan="2">Reserva matemática</th><th>Capital pendiente</th><th>Total amortizado</th></tr>
<tr><td>0</td><td colspan="2">C</td><td>C</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">τ</td><td>Retrospectiva</td><td>$C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau}$</td><td rowspan="2">$C$</td><td rowspan="2">$0$</td></tr>
<tr><td>Prospectiva</td><td>$C'\cdot(1+I_m)^{-m\cdot(T'-\tau)}$</td></tr>
<tr><td>T'</td><td colspan="2">0</td><td>0</td><td>C</td></tr>
</table>

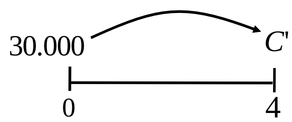
Valor del préstamo en el momento τ a un interés efectivo de mercado I_m^{Merc}:

$$V_\tau = C'\cdot\left(1+I_m^{Merc}\right)^{-m\cdot(T'-\tau)}$$

Para determinar el **tanto efectivo prestatario** y la **TAE** del préstamo procederemos de la forma ya descrita en el apartado 1.

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 30.000€ a amortizar mediante un solo pago, comprensivo de capital e intereses, a los 4 años de su concesión pactado al 7,5% efectivo anual. El prestatario paga, en el momento de la concesión, una comisión de apertura de 600€ y unos gastos obligatorios de 300€. Se pide:

a) Calculad la cantidad a devolver a los 4 años (término amortizativo).



Tipo de interés del préstamo: $I_1 = 0{,}075$

$$C' = \alpha = 30.000\cdot(1+0{,}075)^4 = 40.064{,}07€$$

b) Calculad la cuota de amortización y cuota de interés.

La cuota de amortización es: $A = C = 30.000€$

La cuota de interés es: $Y = \alpha - A = 40.064{,}07 - 30.000 = 10.064{,}07€$

c) Calculad el capital pendiente a los 2 años y medio de su concesión.

$$CP_{2,5} = 30.000€$$

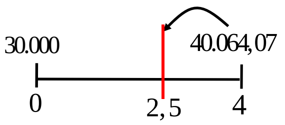
d) Calculad la reserva matemática a los 2 años y medio de su concesión.

$$R_{2,5} = \begin{cases} \text{retrosp.} & = 30.000 \cdot (1+0,075)^{2,5} = 35.945,33€ \\ \text{prosp.} & = 40.064,07 \cdot (1+0,075)^{-1,5} = 35.945,33€ \end{cases}$$

e) Construid el cuadro de amortización de este préstamo.

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interés Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0				0	30.000
n	40.064,07	10.064,07	30.000	30.000	0

f) Calculad el valor del préstamo a los 2 años y medio de su concesión si el interés del mercado ha disminuido al 6% anual.



$$V_{2,5} = 40.064,07 \cdot (1+0,06)^{-1,5} = 36.711€$$

g) Calculad la TAE del préstamo.

Para obtener la TAE, se consideran todos los gastos y comisiones conocidos en el origen del préstamo y que debe abonar obligatoriamente el prestatario:

$$\underbrace{(30.000, 0)}_{\text{Nominal del préstamo}} \underset{\downarrow \atop TAE}{\approx} \{\underbrace{(600, 0)}_{\text{Comisión de apertura}}, \underbrace{(300, 0)}_{\text{Gastos obligatorios}}, \underbrace{(40.064,07, 4)}_{\text{Término amortizativo del préstamo}}\}$$

Si valoramos en el origen de la operación:

$$30.000 = 900 + 40.064,07 \cdot (1+I_1)^{-4}$$

$$TAE = 0,08322 \equiv 8,322\%$$

h) Si a los 2 años y medio de concedido el préstamo, el prestatario realiza una amortización parcial de 8.000€, debiendo pagar por ello una comisión del 1,25% del capital amortizado, calculad el tanto efectivo prestatario en el momento de la amortización parcial.

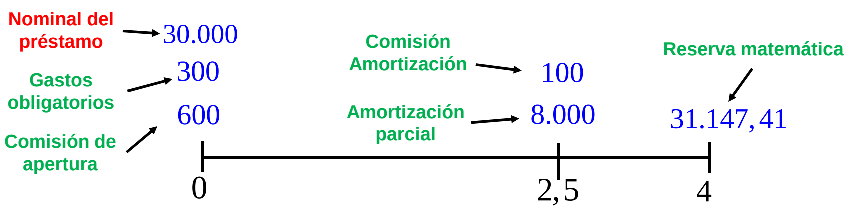
Puesto que a los 2 años y medio de concedido el préstamo, sabemos que la reserva matemática es de 35.945,33€, tras amortizar 8.000€ quedará una reserva matemática de 27.945,33 y, en consecuencia, al vencimiento (dentro de 1,5 años) la reserva matemática será:

$$R_4 = 27.945,33 \cdot (1+0,075)^{1,5} = 31.147,41€$$

Para obtener el tanto efectivo prestatario, se consideran todos los gastos y comisiones conocidos por el prestatario en el momento de realizar la amortización parcial:

$$\overset{\text{Nominal del préstamo}}{(30.000,0)} \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{Tanto efectivo prestatario}}}{\approx} \left\{ \overset{\text{Comisión de apertura}}{(600,\,0)}, \overset{\text{Gastos obligatorios}}{(300,0)}, \overset{\text{Amortización parcial}}{(8.000,\,2,5)}, \overset{\text{Comisión Amortización}}{(100,\,2,5)}, \overset{\text{Reserva matemática}}{(31.147,41,\,4)} \right\}$$

Gráficamente:



Si valoramos en el origen de la operación, la ecuación de equilibrio que nos permite obtener el tanto efectivo anual prestatario será:

$$30.000 = 900 + 8.100 \cdot (1+I_1)^{-2,5} + 31.147,41 \cdot (1+I_1)^{-4}$$

Utilizando Excel® se resuelve la ecuación:

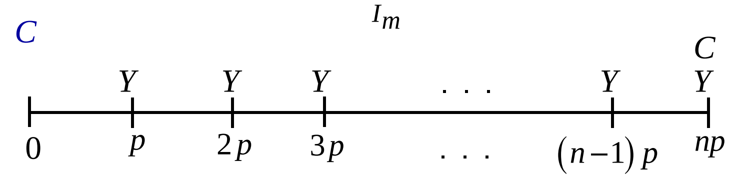
$$I_1 = 0,08480 \equiv 8,48\%$$

2.2. Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Características:

1. La amortización del nominal del préstamo, C, se realiza mediante un único pago al final de la operación.
2. Las cuotas de interés se hacen efectivas con periodicidad p, por vencido, según el tipo de interés constante del préstamo I_m .

Equivalencia financiera: $(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(Y,rp),(C,np)\}_{r=1,2,\ldots n}$



$$C = Y \cdot a_{\overline{n}|I_m} + C \cdot (1+I_m)^{-n}$$

El **término amortizativo** de cada periodo (excepto el último), al no haber amortización, coincide con la **cuota de interés** que es constante:

$$Y = C \cdot I_m$$

El último **término amortizativo,** será la suma de la cuota de interés más la **cuota de amortización** (nominal del préstamo):

$$\alpha_n = Y + A = C \cdot I_m + C$$

A continuación vamos a estudiar la **reserva matemática**, el **capital pendiente** y el **total amortizado** de este préstamo en 4 momentos concretos:

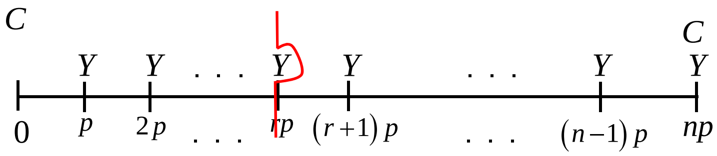
- En el origen del préstamo: 0
- Al final de cada uno de los periodos del préstamo: ***rp***
- Dentro de un periodo concreto del préstamo:

$$\tau \in (rp,(r+1)p)$$

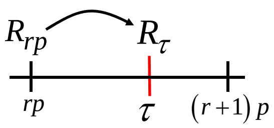
- En el instante final del préstamo: ***np***

Reserva matemática:

- En 0 : $R_0 = C$
- En ***rp*** : $R_{rp} = \begin{cases} \text{retrosp.} & C\cdot(1+I_m)^r - Y\cdot a_{\overline{r}|I_m}\cdot(1+I_m)^r = C \\ \text{prosp.} & Y\cdot a_{\overline{n-r}|I_m} + C\cdot(1+I_m)^{-(n-r)} = C \end{cases}$



- En τ :



$$R_\tau = R_{rp}\cdot(1+I_m)^{m\cdot(\tau-rp)}$$

- En ***np*** : $R_{np} = 0$

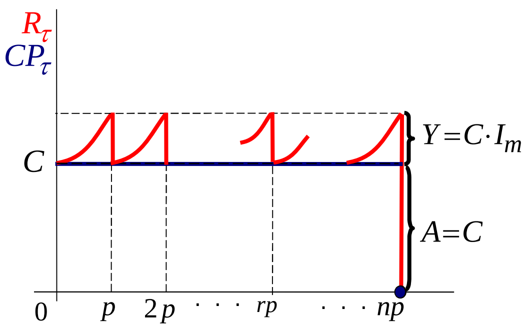
Capital pendiente:

- En 0 : $CP_0 = C$
- En ***rp*** : $CP_r = C$
- En τ : $CP_\tau = CP_r = C$
- En ***np*** : $CP_n = 0$

Total amortizado:

- En 0 : $M_0 = 0$
- En ***rp*** : $M_r = 0$
- En τ : $M_\tau = M_r = 0$
- En ***np*** : $M_n = C$

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:

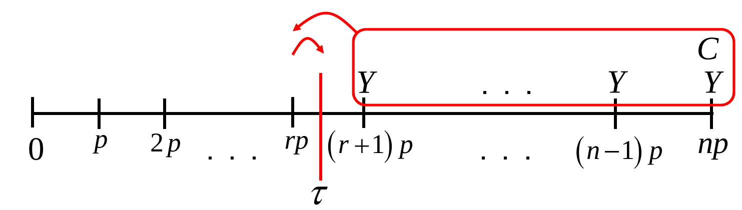


La reserva matemática y el capital pendiente coinciden en el origen, en el final de la operación y al final de cada periodo (una vez efectuado el pago de la cuota de interés)

En resumen:

Instante	Reserva matemática		Capital pendiente	Total amortizado
0	C		C	0
rp	**Retrospectiva**	C	C	0
	Prospectiva			
τ	$R_{rp} \cdot (1+I_m)^{m \cdot (\tau - rp)}$		C	0
np	0		0	C

Valor del préstamo en el momento τ a un interés efectivo de mercado I_m^{Merc}:



$$V_\tau = \left[Y \cdot a_{\overline{n-r}|I_m^{Merc}} + C \cdot \left(1+I_m^{Merc}\right)^{-(n-r)} \right] \cdot \left(1+I_m^{Merc}\right)^{m \cdot (\tau - rp)}$$

Para determinar el **tanto efectivo prestatario** y la **TAE** del préstamo procederemos de la forma ya descrita en el apartado 1.

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 5.000€ pactado al 12% anual pagadero trimestralmente con abono trimestral de intereses por vencido y amortización única de capital a los 2 años. Para su concesión el prestatario paga una comisión de apertura del 1,5%. Determinad:

a) El término amortizativo de cada periodo (trimestre) desglosado en cuota de interés y cuota de amortización.

El interés efectivo trimestral del préstamo es:

$$i_4 = 0{,}12 \Rightarrow I_4 = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03$$

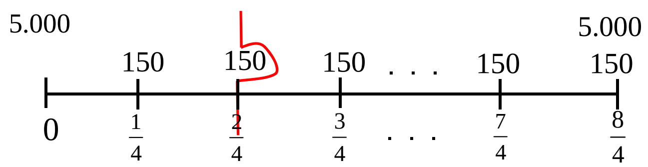
El término amortizativo de los 7 primeros trimestres coincidirá con la cuota de interés trimestral, al no existir amortización, siendo su importe:

$$\alpha = Y = C \cdot I_4 = 5.000 \cdot 0{,}03 = 150€$$

El último término amortizativo será la suma de la cuota de interés trimestral más la cuota de amortización, que es el nominal del préstamo:

$$\alpha_8 = Y + A = C \cdot I_4 + C = 150 + 5.000 = 5.150€$$

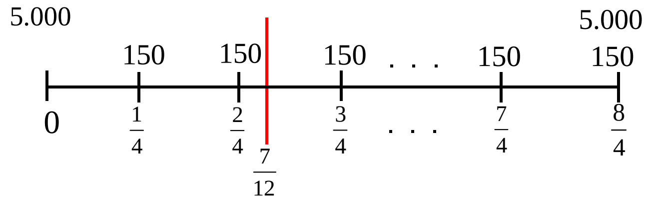
b) Reserva matemática y capital pendiente a los 6 meses (2 trimestres) de concederse el préstamo.



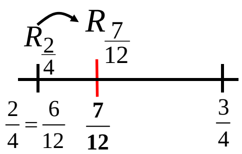
Como este instante corresponde al final del segundo trimestre, coinciden la reserva matemática y el capital pendiente y ambas son igual al nominal del préstamo:

$$R_{\frac{2}{4}} = CP_2 = 5.000€$$

c) Reserva matemática y capital pendiente a los 7 meses de concederse el préstamo.



Para calcular la reserva matemática a los 7 meses basta con tomar la reserva matemática a los 6 meses (o 2 trimestres) y capitalizarla 1 mes:



$$R_{\frac{7}{12}} = 5.000 \cdot (1+0,03)^{4\cdot\frac{1}{12}} = 5.049,51€$$

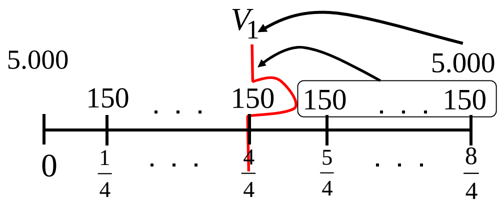
El capital pendiente a los 7 meses es igual al nominal del préstamo:

$$CP_{\frac{7}{12}} = 5.000€$$

d) Cuadro de amortización.

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interes Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0					5.000
1	150	150	0	0	5.000
2	150	150	0	0	5.000
3	150	150	0	0	5.000
4	150	150	0	0	5.000
5	150	150	0	0	5.000
6	150	150	0	0	5.000
7	150	150	0	0	5.000
8	5.150	150	5.000	5.000	0

e) Valor del préstamo al año de concederse el préstamo si el interés del mercado en ese momento es del 10% efectivo anual.



El tipo de interés de valoración es:

$$I_1 = 0{,}10 \Rightarrow I_4 = (1+0{,}10)^{1/4} - 1 = 0{,}024114$$

Luego:

$$V_1 = 150 \cdot \frac{1-(1+0{,}024114)^{-4}}{0{,}024114} + 5.000 \cdot (1+0{,}024114)^{-4} = 5.110{,}96€$$

Tema 1. Préstamos
2. Préstamos con amortización única de capital

f) La ecuación que permite determinar la TAE del préstamo.

Para obtener la TAE del préstamo, el único gasto conocido por el prestatario en el momento de la firma es la comisión de apertura del 1,50% sobre 5.000€, es decir, 75€.

Como el pago de intereses tiene frecuencia trimestral, debe valorarse con un interés efectivo trimestral. Si valoramos en el origen:

$$5.000 = 75 + 150 \cdot \frac{1-(1+I_4)^{-8}}{I_4} + 5.000 \cdot (1+I_4)^{-8}$$

A partir de esta expresión, y con software adecuado, se obtendría el tipo de interés efectivo trimestral, I_4 . Calculando el efectivo anual equivalente se obtiene la TAE del préstamo :

$$I_4 = 3{,}216\% \Rightarrow TAE = (1+I_4)^4 - 1 = 13{,}496\%$$

g) La ecuación que permite determinar el tanto efectivo prestatario.

Al no existir para el prestatario capitales adicionales a los pactados en la concesión del préstamo, la ecuación será la misma que la del apartado anterior.

Ejercicio: Por un préstamo de 50.000€ pactado al 6% de interés nominal pagadero mensualmente se está pagando una cuota mensual de 250€. Hoy, a los 20 años de su concesión y tras la cuota correspondiente, el prestatario considera que el capital pendiente ya debe ser pequeño o nulo y acude a la entidad para liquidarlo definitivamente.

Sin embargo, los ordenadores del Banco no funcionan debido a una subida de tensión. Calculad el capital pendiente del préstamo hoy.

$I_4 = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$ Obsérvese que: $C \cdot I_m = 50.000 \cdot 0{,}005 = 250€$

Por tanto, cada mes sólo se han liquidado los intereses, y se trata de un préstamo con pago periódico de intereses y amortización única de capital.

El capital pendiente hoy, que es igual a la reserva matemática, es:

$$CP_{240} = \left(50.000 - 250 \cdot \frac{1-(1+0{,}005)^{-240}}{0{,}005} \right) \cdot (1+0{,}005)^{240} = 50.000$$

Es decir, el capital pendiente es igual al nominal del préstamo.

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses
- Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

1. Préstamos

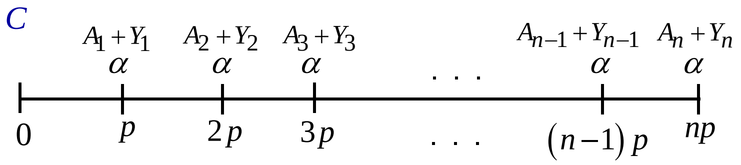
3.1. Préstamo amortizable por el sistema francés

Características:

1. La amortización del nominal del préstamo se realiza con periodicidad p, por vencido.
2. Las cuotas de interés se hacen efectivas con periodicidad p, por vencido, según el tipo de interés del préstamo I_m.
3. Los términos amortizativos, que son la suma de la cuota de interés y la cuota de amortización, son constantes y vencidos.

Equivalencia financiera:

$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha, rp)\}_{r=1,2,\ldots n}$$



El **término amortizativo** del préstamo es constante y se obtendrá:

$$C = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m} \quad \text{de donde:} \quad \alpha = \frac{C}{a_{\overline{n}|I_m}}$$

La **cuota de interés** que se hace efectiva al final de cada periodo *r* es:

$$Y_r = CP_{r-1} \cdot I_m$$

La **cuota de amortización** que se hace efectiva al final de cada periodo *r* es:

$$A_r = \alpha - Y_r$$

El **capital amortizado** al final de cada periodo *r* es:

$$M_r = \sum_{s=1}^{r} A_s = M_{r-1} + A_r$$

El **capital pendiente** al final de cada periodo *r* es:

$$CP_r = C - M_r = M_{r-1} - A_r$$

Ejercicio: Construid el cuadro de amortización de un préstamo de 1.000€ a devolver en 3 años por el sistema francés, con términos amortizativos semestrales, al 8% nominal acumulable semestralmente.

$$i_2 = 0,08 \Rightarrow I_2 = \frac{0,08}{2} = 0,04 \qquad 1.000 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0,04)^{-6}}{0,04} \Rightarrow \alpha = 190,76€$$

r	α_r	Y_r	A_r	M_r	CP_r
0					1.000
1	190,76	40,00	150,76	150,76	849,24
2	190,76	33,97	156,79	307,55	692,45
3	190,76	27,69	163,07	470,62	529,38
4	190,76	21,17	169,59	640,21	359,79
5	190,76	14,39	176,37	816,58	183,42
6	190,76	7,34	183,42	1.000,00	0

En un préstamo amortizable por el sistema francés, las **cuotas de amortización** A_r varían en progresión geométrica, es decir, $A_r = A_1 \cdot q^{r-1}$.

Ejemplo: En el cuadro de amortización del préstamo francés de nominal 1.000€ a devolver en 3 años, con términos amortizativos semestrales, al 8% nominal acumulable semestralmente se ha obtenido:

$$A_1 = 150,76 \quad A_2 = 156,79 \quad A_3 = 163,07 \quad A_4 = 169,59 \quad A_5 = 176,37 \quad A_6 = 183,42$$

Se cumple que: $A_r = A_1 \cdot (1 + I_m)^{r-1} = 150,76 \cdot 1,04^{r-1}$

Así, por ejemplo: $A_3 = 150,76 \cdot 1,04^{3-1} = 163,07$

$A_6 = 150,76 \cdot 1,04^{6-1} = 183,42$

Vamos a estudiar la reserva matemática, el capital pendiente y el total amortizado de este préstamo en 4 momentos concretos:

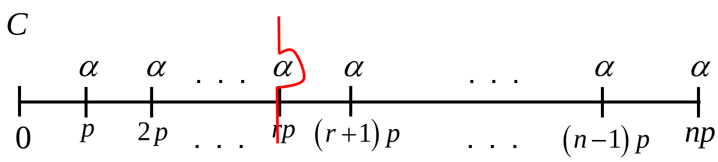
- En el origen del préstamo: **0**
- Al final de cada uno de los periodos del préstamo: ***rp***
- Dentro de un periodo concreto del préstamo:

$$\tau \in \left(rp, (r+1)\,p\right)$$

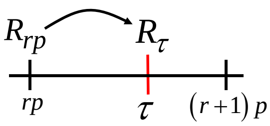
- En el instante final del préstamo: ***np***

Reserva matemática:

- En 0 : $R_0 = C$
- En ***rp*** : $R_{rp} = \begin{cases} \text{retrosp.} & C \cdot (1 + I_m)^r - \alpha \cdot a_{\overline{r}|I_m} \cdot (1 + I_m)^r \\ \text{prosp.} & \alpha \cdot a_{\overline{n-r}|I_m} \end{cases}$



- En τ :



$$R_\tau = R_{rp} \cdot (1 + I_m)^{m \cdot (\tau - rp)}$$

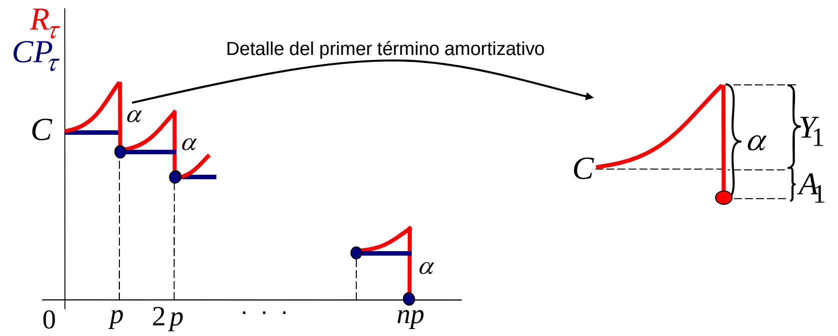
- En ***np*** : $R_{np} = 0$

Capital pendiente:

- En 0 : $CP_0 = C$
- En ***rp*** : $CP_r = R_{rp}$
- En τ : $CP_\tau = CP_r$
- En ***np*** : $CP_n = 0$

La reserva matemática y el capital pendiente coinciden en el origen, en el final de la operación y al final de cada periodo (una vez efectuado el pago del término amortizativo).

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:



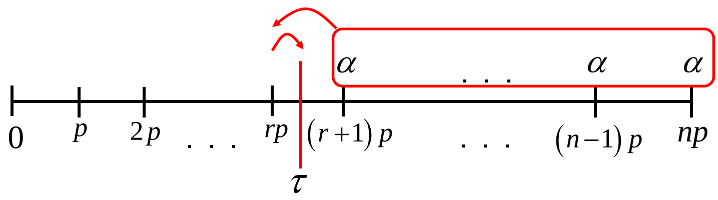
Total amortizado:

- En 0 : $M_0 = 0$
- En ***rp*** : $M_r = C - CP_r = C - R_{rp}$
- En τ : $M_\tau = M_r$
- En ***np*** : $M_n = C$

En resumen:

Instante	Reserva matemática		Capital pendiente	Total amortizado
0	C		C	0
rp	**Retrospectiva**	$C\cdot(1+I_m)^r - \alpha\cdot a_{\overline{r}\rceil I_m}\cdot(1+I_m)^r$	R_{rp}	$C - R_{rp}$
	Prospectiva	$\alpha\cdot a_{\overline{n-r}\rceil I_m}$		
τ	$R_{rp} \to R_\tau$; rp, τ, $(r+1)p$		R_{rp}	$C - R_{rp}$
np	0		0	C

Valor del préstamo en el momento τ a un interés efectivo de mercado I_m^{Merc}:



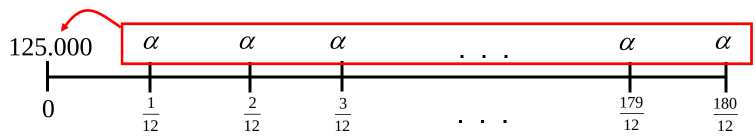
$$V_\tau = \left[\alpha \cdot a_{\overline{n-r}|I_m^{Merc}} \right] \cdot \left(1 + I_m^{Merc}\right)^{m \cdot (\tau - rp)}$$

Para determinar el **tanto efectivo prestatario** y la **TAE** del préstamo procederemos de la forma ya descrita en el apartado 1.

Ejercicio: Sea un préstamo hipotecario de nominal 125.000€, amortizable por el sistema francés, en cuotas mensuales, duración 15 años, pactado al 6% nominal acumulable mensualmente.

Si el prestatario paga una comisión de apertura del 2% sobre el nominal, y unos gastos obligatorios de 550€, cuando se concede, se pide:

a) Calculad el término amortizativo.

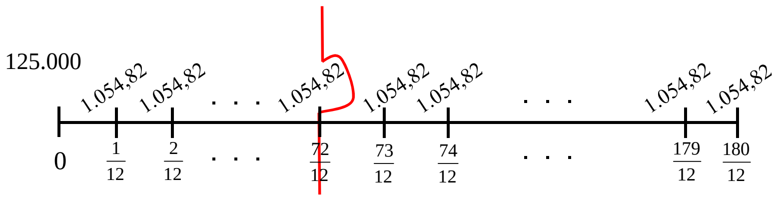


El tipo de interés del préstamo es: $i_{12} = 0,06 \Rightarrow I_{12} = \dfrac{0,06}{12} = 0,005$

Por tanto, el término amortizativo se obtendrá de:

$$125.000 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0,005)^{-180}}{0,005} \Rightarrow \alpha = 1.054,82€$$

b) Calculad la reserva matemática y el capital pendiente a los 6 años (o 72 meses) de concertado el préstamo.

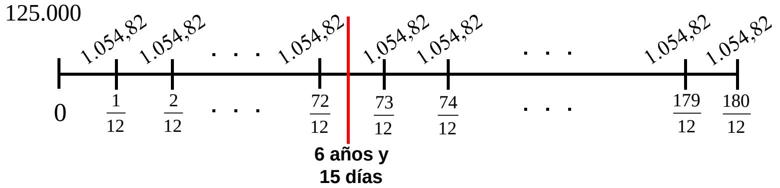


$$R_{\frac{72}{12}} = \begin{cases} \text{retrosp.} & 125.000\cdot(1+0,005)^{72} - 1.054,82\cdot a_{\overline{72}|0,005}\cdot(1+0,005)^{72} = 87.859,66€ \\ \text{prosp.} & 1.054,82\cdot a_{\overline{108}|0,005} = 87.859,66€ \end{cases}$$

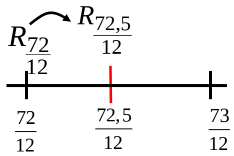
Este instante coincide con el final de un periodo, por tanto, la reserva matemática y el capital pendiente son iguales.

$$CP_{72} = R_{\frac{72}{12}} = 87.859,66€$$

c) Calculad la reserva matemática y capital pendiente a los 6 años y 15 días (o 72,5 meses) de concertado el préstamo.



Para calcular la reserva matemática a los 6 años y 15 días basta con tomar la reserva matemática a los 6 años (o 72 meses) y capitalizarla 15 días (medio mes).



$$R_{\frac{72,5}{12}} = 87.859,66€\cdot(1+0,005)^{0,5} = 88.079,04€$$

El capital pendiente a los 72,5 meses coincide con el capital pendiente a los 72 meses: $CP_{\frac{72,5}{12}} = CP_{72} = 87.859,66€$

d) Desglosad el término amortizativo que se paga a los 2 años.

A los 2 años se paga el término amortizativo número 24:

$$\alpha = 1.054,82 = Y_{24} + A_{24}$$

Vamos a obtener A_{24} a partir de:

$$A_r = A_1 \cdot (1 + I_m)^{r-1}$$
$$A_1 = \alpha - Y_1 = \alpha - C \cdot I_m$$

En este caso: $A_1 = 1.054,82 - \underbrace{125.000 \cdot 0,005}_{Y_1=625} = 429,82€$

Luego $A_r = 429,82 \cdot 1,005^{r-1}$ y, entonces:

$$A_{24} = 429,82 \cdot 1,005^{24-1} = 482,07€$$

$$Y_{24} = \alpha - A_{24} = 1.054,82 - 482,07 = 572,75€$$

Otra forma alternativa de desglosar el término amortizativo número 24 sería obtener la cuota de interés 24, Y_{24}, a partir del capital pendiente en el mes 23 según la expresión.

$$Y_r = CP_{r-1} \cdot I_m$$

En este caso: $Y_{24} = CP_{23} \cdot 0,005$

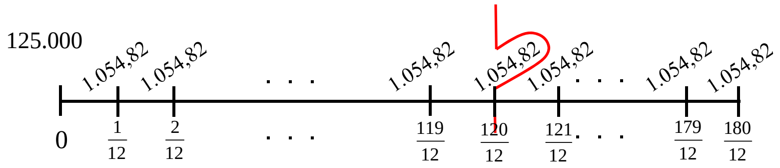
$$CP_{23} = \alpha \cdot a_{\overline{n-23}|I_m} = 1.054,82 \cdot a_{\overline{157}|0,005} = 114.550,76$$

$$Y_{24} = 114.550,76 \cdot 0,005 = 572,75€$$

Y, entonces:

$$A_{24} = 1.054,82 - 572,75 = 482,07€$$

e) Calculad el capital pendiente de amortizar y el total amortizado a los 10 años de su concesión tras el pago del término amortizativo correspondiente.



A los 10 años de la concesión del préstamo han transcurrido 120 meses y aún quedan 5 años de plazo. Por tanto:

$$CP_{120} = R_{120} = 1.054,82 \cdot \frac{1-(1+0,005)^{-60}}{0,005} = 54.561,16€$$

$$M_{120} = 125.000 - 54.561,16 = 70.438,84€$$

f) Plantead la ecuación que permite determinar la TAE del préstamo

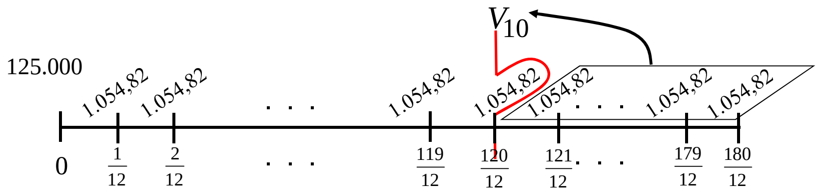
Los gastos conocidos por el prestatario en el momento de la concesión del préstamo son:

Como el pago del término amortizativo tiene frecuencia mensual, debe valorarse con un interés efectivo mensual. Si valoramos en el origen:

$$125.000 = 550 + 2.500 + 1.054,82 \cdot \frac{1-(1+I_{12})^{-180}}{I_{12}}$$

Utilizando ordenador: $I_{12} = 0,5323\% \Rightarrow TAE = (1+0,005323)^{12} - 1 = 6,578\%$

g) Si el tanto de interés del mercado a los 10 años de haberse concedido el préstamo fuese del 10% efectivo anual, calculad el valor del préstamo, tras el pago del término amortizativo correspondiente:



El tipo de interés de valoración es:

$$I_1 = 0{,}10 \quad \Rightarrow I_{12} = (1+0{,}10)^{1/12} - 1 = 0{,}007974$$

Luego:

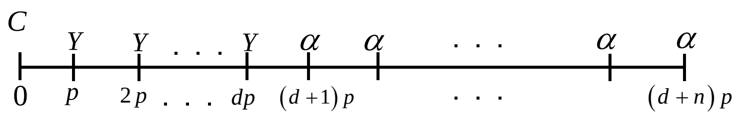
$$V_{10} = 1.054{,}82 \cdot \frac{1-(1+0{,}007974)^{-60}}{0{,}007974} = 50.144{,}56€$$

Tema 1. Préstamos
3. Préstamos con amortización periódica: Préstamo francés

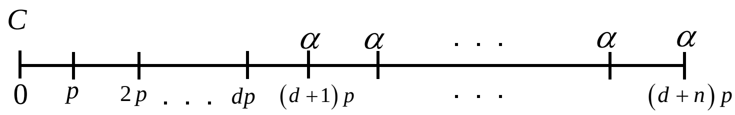
3.2. Carencia parcial y total

El préstamo francés puede pactarse con:

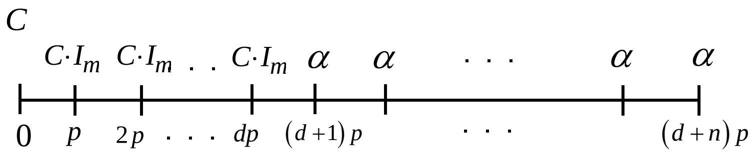
• **Carencia parcial:** Existe un plazo inicial de d periodos durante el cual solo se abona periódicamente la cuota de interés. Finalizado dicho plazo comienzan a pagarse n términos amortizativos constantes comprensivos de capital e intereses.



• **Carencia total:** Existe un plazo inicial de d periodos durante el cual no se abona ninguna cantidad (ni cuota de interés ni cuota de amortización). Finalizado dicho plazo comienzan a pagarse n términos amortizativos constantes comprensivos de capital e intereses.



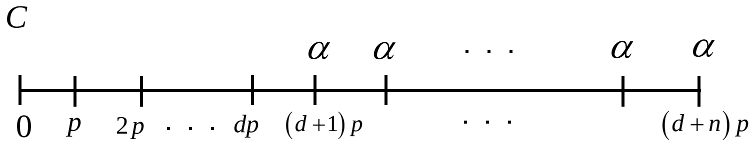
• **Carencia parcial:**



$$C = C \cdot I_m \cdot a_{\overline{d}|I_m} + \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m} \cdot (1+I_m)^{-d}$$

Y simplificando: $C = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m}$

• **Carencia total:**



$C = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m} \cdot (1+I_m)^{-d}$ o bien: $C \cdot (1+I_m)^{d} = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m}$

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 10.000€, amortizable mediante términos amortizativos semestrales, constantes y vencidos. La duración del préstamo es de 10 años siendo los 2 primeros de carencia parcial. Si el tanto de interés pactado es del 5% semestral, se pide:

a) Calculad el importe de la cuota semestral de interés a pagar durante el plazo de carencia parcial.

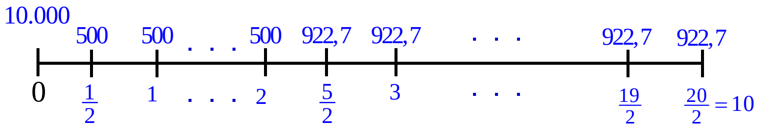
$I_2 = 0{,}05 \qquad Y = 10.000 \cdot 0{,}05 = 500€$

b) Calculad el importe del término amortizativo a partir del plazo de carencia.

Como el capital pendiente al final del plazo de carencia es de $10.000€$

$$10.000 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0{,}05)^{-16}}{0{,}05} \Rightarrow \alpha = 922{,}70€$$

c) Representad gráficamente la operación de préstamo.



Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 10.000 € a amortizar mediante el pago de 60 términos amortizativos mensuales, constantes y vencidos, tras un plazo de 2 años de carencia total. A un tipo de interés del 8% efectivo anual, se pide:

a) Calculad el importe del término amortizativo.

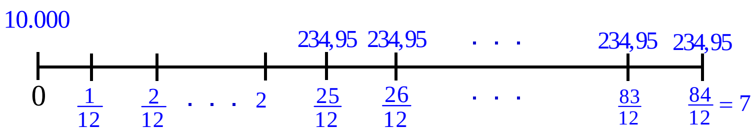
$$I_1 = 0,08 \Rightarrow I_{12} = (1+0,08)^{1/12} - 1 = 0,006434$$

$$10.000 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0,006434)^{-60}}{0,006434} \cdot (1+0,006434)^{-24} \Rightarrow \alpha = 234,95€$$

O de forma equivalente:

$$\underbrace{10.000 \cdot (1+0,006434)^{24}}_{11.664} = \alpha \cdot \frac{1-(1+0,006434)^{-60}}{0,006434} \Rightarrow \alpha = 234,95€$$

b) Representad gráficamente la operación de préstamo.



Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Préstamo amortizable por el sistema francés
- Carencia parcial
- Carencia total

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

1. Préstamos

4.1. Definición

Durante el plazo de vigencia de un préstamo es posible que se produzcan algunas modificaciones respecto a las condiciones inicialmente pactadas o algunos cambios no previstos a priori. Podemos citar, entre otros:

- Variación del importe del término amortizativo.
- Variación del plazo de la operación.
- Variación del tipo de interés.
- Amortización o cancelación parcial de capital pendiente.
- Cancelación total anticipada del préstamo.

En cualquiera de dichas situaciones se seguirán los siguientes pasos:

1) Obtener la reserva matemática del préstamo en el momento de la modificación de la condición.
2) Aplicar la condición que se desea modificar.
3) Recalcular las nuevas magnitudes del préstamo.

4.2. Ejemplos

Ejercicio: Hace 5 años se solicitó un préstamo de nominal 60.000€. El préstamo fue pactado con pago periódico bimestral de intereses y amortización única de capital a los 15 años de su concesión. El resto de condiciones fueron:

- Tipo de interés: 2,4% anual pagadero bimestralmente.
- Comisión de apertura y estudio: 1% sobre el nominal.
- Seguro obligatorio inicial de protección de pagos: 1.000€.
- Comisión por amortización anticipada (total o parcial): 0,5% sobre el capital amortizado.

Hoy, después del pago de la correspondiente cuota de interés, se realiza una amortización parcial de capital de 9.000€. Determinad:

a) Importe de la cuota bimestral de interés de los 5 primeros años.

$$i_6 = 0,024 \Rightarrow I_6 = \frac{0,024}{6} = 0,004 \Rightarrow Y = 0,004 \cdot 60.000 = 240€$$

b) Importe de la cuota bimestral de interés que se pagará a partir de hoy.

Paso 1) En el momento de la cancelación parcial del préstamo, a los 5 años de su concesión, la reserva matemática coincidirá con el capital pendiente, es decir, será de:

$$R_5 = CP_5 = 60.000€$$

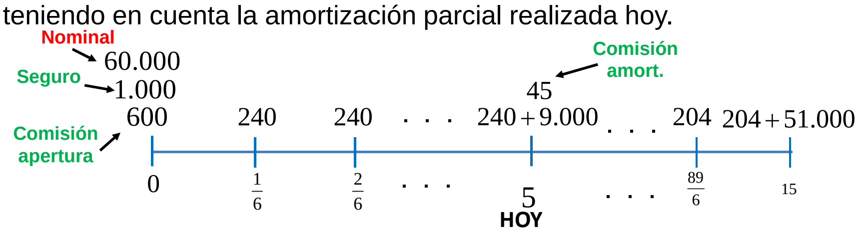
Paso 2) Tras la cancelación parcial de 9.000€, la nueva reserva matemática a los 5 años será de:

$$Nueva\ R_5 = 60.000 - 9.000 = 51.000€$$

Paso 3) Para recalcular la nueva cuota bimestral de interés se aplicará el interés efectivo bimestral del préstamo al nuevo capital pendiente, que en este caso coincidirá con la reserva matemática:

$$I_6 = \frac{0,024}{6} = 0,004 \Rightarrow Nueva\ Y = 0,004 \cdot 51.000 = 204€$$

c) Plantead la ecuación que permite calcular el tanto efectivo prestatario teniendo en cuenta la amortización parcial realizada hoy.



$$60.000 = 600 + 1.000 + 240 \cdot \frac{1-(1+I_6)^{-30}}{I_6} + 9.045 \cdot (1+I_6)^{-30} +$$

$$+ 204 \cdot \frac{1-(1+I_6)^{-60}}{I_6} \cdot (1+I_6)^{-30} + 51.000 \cdot (1+I_6)^{-90}$$

d) Plantead la ecuación que permite calcular la TAE del préstamo.

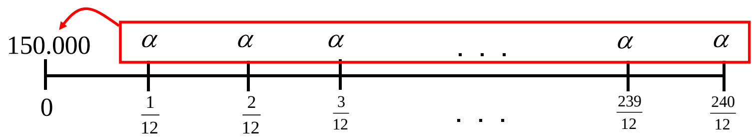
$$60.000 = 600 + 1.000 + 240 \cdot \frac{1-(1+I_6)^{-90}}{I_6} + 60.000 \cdot (1+I_6)^{-90}$$

$$TAE = (1+I_6)^6 - 1$$

Tema 1. Préstamos
4. Cambios durante la vigencia de un préstamo

Ejercicio: Sea un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente. Se pide:

a) Calculad el término amortizativo



El tipo de interés del préstamo es:

$$i_{12} = 0,0564 \Rightarrow I_{12} = \frac{0,0564}{12} = 0,0047$$

Por tanto, el término amortizativo se obtendrá de:

$$150.000 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0,0047)^{-240}}{0,0047} \quad \Rightarrow \alpha = 1.043,73€$$

b) A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, prestamista y prestatario pactan reducir el plazo de la operación en 6 años, ¿cuál será el importe del nuevo término amortizativo?

Paso 1) Se calcula la reserva matemática al cabo de 5 años (o 60 meses):

$$CP_{60} = R_{60} = 1.043,73 \cdot \frac{1-(1+0,0047)^{-180}}{0,0047} = 126.584,61€$$

Paso 2) A los 5 años de pactado el préstamo quedan aún 15 años, pero si se pacta reducir el plazo en 6 años, a partir de este momento, quedarán 9 años (108 meses).

Paso 3) Se trata de determinar el nuevo importe constante mensual que debe pagarse para amortizar el capital pendiente, es decir:

$$126.584,61 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0,0047)^{-108}}{0,0047} \Rightarrow \alpha = 1.497,31€$$

Tema 1. Préstamos
4. Cambios durante la vigencia de un préstamo

Ejercicio: En un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente, se ha visto que el término amortizativo es de 1.043,73€. A los 5 años de la concesión del préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, se pacta una revisión del tipo de interés pasando a ser el Euribor más un diferencial del 2,25%.

a) Determinad el importe del nuevo término amortizativo si en el momento de la revisión el índice Euribor es del 0,55% y si se mantienen el resto de las condiciones del préstamo.

Paso 1) Sabemos que la reserva matemática a los 5 años (o 60 meses) es:

$$R_{60} = CP_{60} = 126.584,61€$$

Paso 2) El nuevo tipo de interés a aplicar a partir del 5º año es:

$$i_{12} = 0,0055 + 0,0225 = 0,028 \Rightarrow I_{12} = \frac{0,028}{12} = 0,002\widehat{3}$$

Paso 3) El nuevo término amortizativo mensual constante que debe pagarse para amortizar el capital pendiente considerando el nuevo tipo de interés es:

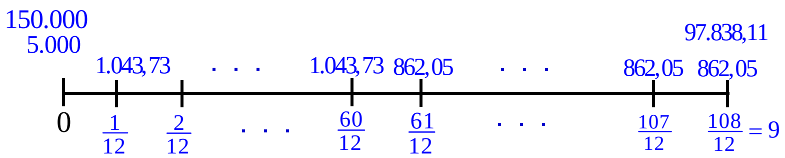
$$126.584,61 = \alpha \cdot \frac{1-(1+0,002\widehat{3})^{-180}}{0,002\widehat{3}} \Rightarrow \alpha = 862,05€$$

b) Si a los 4 años de realizada la revisión del tipo de interés, una vez pagado el término amortizativo correspondiente, el prestatario decide realizar una amortización total del préstamo, calculad la cuantía que deberá abonar el prestatario.

Como en el momento de la revisión del tipo de interés quedaban pendientes de pago 180 cuotas mensuales y se han pagado 48 cuotas correspondientes a 4 años, resulta que en el momento de la amortización total (transcurridos 9 años desde la concesión) aún quedaban pendientes 132 cuotas de 862,05€. Por tanto, la reserva matemática prospectiva, que es la cantidad que debe abonar el prestatario para amortizar totalmente el préstamo, será:

$$R_9 = CP_9 = 862{,}05 \cdot \frac{1-\left(1+0{,}002\overset{\frown}{3}\right)^{-132}}{0{,}002\overset{\frown}{3}} = 97.838{,}11€$$

c) Si para la concesión del préstamo, el prestatario tuvo que abonar unos gastos obligatorios iniciales de 5.000€, plantead la ecuación que permite obtener el tanto efectivo prestatario teniendo en cuenta la modificación del tipo de interés y la amortización total.



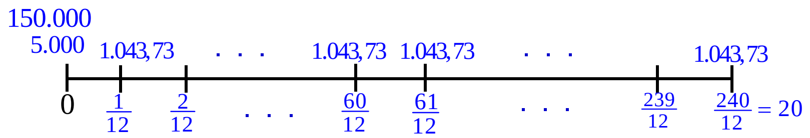
Como el término amortizativo tiene frecuencia mensual, el tanto efectivo prestatario debe valorarse con un interés efectivo mensual. Valorando en el origen:

$$150.000 = 5.000 + 1.043{,}73 \cdot \frac{1-(1+I_{12})^{-60}}{I_{12}} +$$

$$+862{,}05 \cdot \frac{1-(1+I_{12})^{-48}}{I_{12}} \cdot (1+I_{12})^{-60} + 97.838{,}11 \cdot (1+I_{12})^{-108}$$

d) Con toda la información anterior, plantead la ecuación que permite obtener la TAE del préstamo.

Para obtener la TAE del préstamo sólo hay que tener en cuenta las condiciones iniciales con las que se pactó el préstamo. Por tanto, no se tendrá en cuenta ni la modificación del tipo de interés a los 5 años ni la amortización total a los 9 años.



Como el término amortizativo tiene frecuencia mensual, debe valorarse con un interés efectivo mensual. Valorando en el origen:

$$150.000 = 3.000 + 1.043,73 \cdot \frac{1-(1+I_{12})^{-240}}{I_{12}}$$

A partir de esta expresión, y con software adecuado, se obtendría el tipo de interés efectivo mensual, I_{12}. Calculando el efectivo anual equivalente se obtiene la TAE del préstamo:

$$I_{12} = 0,4907\% \Rightarrow TAE = (1+I_{12})^{12} - 1 = 6,05\%$$

Conceptos de este apartado que debe recordar:

- Variación del importe del término amortizativo
- Variación del plazo del préstamo
- Variación del tipo de interés
- Amortización o cancelación parcial del capital pendiente
- Cancelación total anticipada del préstamo

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea un préstamo de nominal 18.000€ a devolver mediante un único pago, a los 3 años de su concesión, que comprende el capital prestado más los intereses devengados durante el plazo. El tanto de interés del préstamo es del 5,5% efectivo anual. El prestatario ha de pagar una comisión de apertura del 1,5% sobre el nominal del préstamo y unos gastos iniciales obligatorios de 150€. Se pide:

   a) Importe que se deberá pagar al final de la operación.

   b) Cuota de interés y cuota de amortización de capital.

   c) Tanto efectivo anual del préstamo, tanto efectivo anual prestatario y TAE del préstamo.

   d) Capital pendiente y total amortizado al año y 2 meses de su concesión.

   e) Cuantía que cancela anticipadamente el préstamo al año y 2 meses de su concesión.

   f) Valor financiero del préstamo al año y 2 meses de su concesión si el tipo de interés aplicable es:

      f.1) 5,5% efectivo anual.

      f.2) 6,25% anual.

2. Hace 2 años un particular solicitó un préstamo de nominal 50.000€, a amortizar mediante un solo pago comprensivo de capital e intereses a los 4 años de su concesión, a un interés del 1% efectivo mensual. Además, pagó una comisión de apertura del 2% sobre el nominal del préstamo. Determinar:

   a) Importe que debería pagar el prestatario a los 4 años de la concesión del préstamo.

   b) Desglose en cuota de interés y cuota de amortización de capital.

   c) Cantidad que cancelaría hoy el préstamo.

   d) Tanto efectivo anual y TAE del préstamo.

   e) Hoy dispone de 15.000€ y decide destinarlos a pagar los intereses generados hasta este momento y, si hay algún excedente, a amortizar parte del nominal del préstamo. Calcular la cuantía que cancelará el préstamo al vencimiento teniendo en cuenta la entrega realizada hoy.

   f) Plantear la ecuación que permite obtener el tanto efectivo anual prestatario.

   g) ¿Cambia el valor de la TAE del préstamo considerando la entrega de los 15.000€?

3. Se concede un préstamo de 90.000€ a amortizar mediante un único pago al cabo de 5 años, pero con pago trimestral de intereses. El tipo de interés pactado es del 6% nominal pagadero trimestralmente. Se pide:

   a) Importe de la cuota de interés trimestral.

   b) Importe que deberá pagar el prestatario en el último trimestre.

   c) Importe que cancela el préstamo a los 3 años de su concesión después del pago de la cuota de interés correspondiente.

   d) Importe que cancela el préstamo a los 3 años y 1 mes de su concesión.

   e) Si a los 4 años de la concesión del préstamo cambia el tipo de interés del préstamo que pasa a ser del 6,80% nominal pagadero trimestralmente, ¿cuál sería la nueva cuota de interés?

4. Hace 6 años se solicitó un préstamo de 48.000€ de nominal, al 4,5% anual pagadero mensualmente. Los intereses se pagan cada mes y debe amortizarse el nominal a los 10 años de su concesión. Hoy, después del pago de la correspondiente cuota de interés, se realiza una amortización parcial de capital de 5.000€. Determinar:

   a) Importe de la cuota mensual de interés de los 6 primeros años.

   b) Capital pendiente de amortizar y reserva matemática hace 1 mes, después del pago de la cuota de interés correspondiente.

   c) Capital pendiente de amortizar y reserva matemática a los 5 años y 11,5 meses de su concesión.

   d) Importe de la cuota mensual de interés que se pagará a partir de hoy.

   e) Plantear la ecuación que permite calcular la TAE del préstamo si existió una comisión de apertura del 1% y unos gastos iniciales obligatorios de 350€.

   f) Plantear la ecuación que permite calcular hoy el tanto efectivo prestatario sabiendo que en el momento de realizar la amortización se ha pagado una comisión (compensación por desistimiento) del 0,25% sobre los 5.000€.

5. Sea un préstamo de nominal 170.000€ a amortizar durante 20 años mediante términos amortizativos constantes, mensuales y vencidos a un interés del 3,60% nominal pagadero mensualmente. Determinar:

   a) Importe del término amortizativo.

   b) Tres primeras y tres últimas filas del cuadro de amortización.

   c) Capital pendiente de amortizar y total amortizado al año de su concesión, tras el pago del término amortizativo correspondiente.

   d) Capital pendiente de amortizar y reserva matemática al cabo de 1 año y medio mes de su concesión.

   e) Desglose del término amortizativo correspondiente al decimoquinto mes.

   f) Valor financiero del préstamo al año de su concesión para un tipo de interés de valoración del:

      f.1) 3,84% nominal pagadero mensualmente.

      f.2) 0,27% mensual.

   g) Plantear la ecuación para obtener la TAE del préstamo si existe una comisión de apertura, estudio, etc. del 3% sobre nominal del préstamo.

6. Hace 3 años se concedió un préstamo de 150.000€ de nominal, a amortizar mediante el pago de 48 trimestralidades constantes y vencidas, al 5,20% efectivo anual. La comisión de apertura a cargo del prestatario fue del 1,5% sobre el nominal. Determinar:

   a) Importe de las trimestralidades.

   b) Cuota de interés y de amortización del vigésimo término amortizativo.

   c) Ecuación que permite determinar la TAE del préstamo.

   d) Hoy el prestatario decide hacer una amortización parcial de capital de 12.000€. La entidad financiera le cobra una comisión por amortización parcial del 0,5% sobre el capital amortizado anticipadamente.

      d.1) ¿Cuál será el importe de las nuevas trimestralidades si se mantiene el plazo del préstamo?

d.2) Ecuación que permite obtener el tanto efectivo prestatario teniendo en cuenta la amortización parcial, y suponiendo que se mantiene la trimestralidad calculada en el apartado anterior hasta el final del plazo de la operación.

7. Hace 1 año se solicitó un préstamo de 95.000€ de nominal, a amortizar mediante el pago de mensualidades constantes y vencidas, durante 15 años. Tipo de interés 6% nominal capitalizable mensualmente. Se pide:

   a) Importe de la mensualidad que amortiza el préstamo.

   b) Cuota de interés y de amortización de capital de la primera y última mensualidad.

   c) Hoy se procede a una revisión del tipo de interés pasando a ser del 4,25% nominal pagadero mensualmente, calcular el importe de la nueva mensualidad si se mantiene el plazo del préstamo.

8. Hace 1 año se concedió un préstamo hipotecario de nominal 220.000€ a amortizar mediante semestralidades constantes y vencidas pagaderas durante 30 años. El tipo de interés pactado fue del 4% nominal pagadero semestralmente pero revisable anualmente. Para la revisión se acordó tomar como índice de referencia el último EURIBOR a 1 año publicado a la fecha de revisión. A dicho índice se le añade un diferencial del 2,50%. Se pide:

   a) Importe de las semestralidades correspondientes al primer año.

   b) Capital pendiente de amortizar hoy, tras el pago de la semestralidad correspondiente.

   c) Importe de la semestralidad a pagar durante el próximo año, manteniendo el plazo del préstamo, si el último EURIBOR a 1 año publicado a fecha de hoy es del 1,837%.

9. A una persona se le concede un préstamo de 180.000€ de nominal, al 6% anual, a devolver mediante pagos anuales, constantes y vencidos. Duración del préstamo 15 años, siendo los dos primeros de carencia total. Se pide:

   a) Importe de los términos amortizativos.

   b) Si el prestatario debe abonar unos gastos de apertura del 1% sobre el nominal, plantear las ecuaciones que permiten obtener la TAE del préstamo y el tanto efectivo prestatario.

   c) Importe que cancela anticipadamente el préstamo a los 7 años de su concesión, una vez pagado el término amortizativo correspondiente.

   d) Importe que cancela anticipadamente el préstamo a los 7 años y 2 meses.

10. A un particular se le concede un préstamo con las siguientes características:

   - Nominal: 60.000€.
   - Tipo de interés: 4,8% anual capitalizable bimestralmente.
   - Amortización mediante términos amortizativos bimestrales, constantes y vencidos.
   - Duración 12 años, siendo los 2 primeros de carencia parcial, pagándose sólo las cuotas de interés, también bimestralmente y por vencido.
   - Comisión de apertura: 1% sobre el nominal.
   - Comisión por cancelación anticipada: 0,25% sobre el capital amortizado anticipadamente.

Determinar:

a) El importe de las cuotas de interés a pagar durante el plazo de carencia y de los términos amortizativos.

b) Ecuación que permite determinar la TAE del préstamo.

c) Total amortizado a los 6 años de la concesión del préstamo, una vez pagado el término amortizativo correspondiente.

d) Total amortizado a los 6 años y 1 mes de la concesión del préstamo.

e) Si a los 6 años y 1 mes se decide cancelar el préstamo en su totalidad:

e.1) Calcular la reserva matemática del préstamo en ese momento.

e.2) Plantear la ecuación que permite determinar el tipo de interés al que le ha resultado la operación al prestatario.

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

Tema 1. Préstamos

Tema 2. Empréstitos

1. **Definición, magnitudes y clasificación**
2. **Empréstitos cupón cero**
3. **Empréstitos con cupón periódico**

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

2. Empréstitos

1. Definición, magnitudes y clasificación

1.1. Definición. Conceptos previos

1.2. Magnitudes de un empréstito

1.3. Clasificación de los empréstitos

1.1. Definición. Conceptos previos

Cuando se necesita "un poco" de dinero, ya sabemos que se puede obtener mediante:

Préstamo personal

Compra a crédito

Crédito rápido

Hipoteca

Familia y amigos

Pero cuando se necesita "mucho" dinero, como por ejemplo 2.000 millones de euros, ¿cómo se puede obtener?

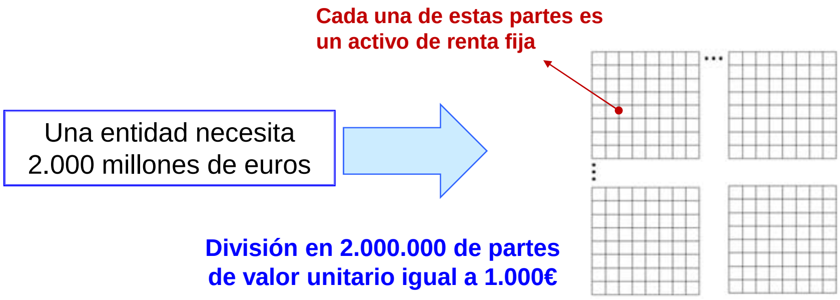
EMPRÉSTITO

¿Quién puede necesitar mucho dinero?

El Estado español a través del Tesoro Público, las Comunidades Autónomas, grandes empresas públicas y privadas, etc.

¿Qué hacen estas entidades para obtener ese dinero?

Dividen la elevada cantidad monetaria en partes alícuotas más pequeñas, representándose cada una de ellas mediante un título con el **mismo valor**. En general, estos títulos se conocen en el mercado como **activos de renta fija**, pero concretamente reciben distintas denominaciones como pagarés, letras, bonos, obligaciones, …



Emisor, sujeto pasivo o prestatario:

Entidad que recibe el dinero en el momento de la emisión del empréstito.

Suscriptor, sujeto activo o prestamista:

Cada una de las personas que entrega el dinero al emisor en el momento de la emisión del empréstito.

Título valor, activo de renta fija, bono, obligación, letra, pagaré, etc.:

Documento que el emisor entrega al suscriptor como reconocimiento de la deuda contraída. Todos los títulos de una misma emisión tienen el mismo **valor nominal** C.

Tras la emisión, estos títulos se pueden comprar y vender a los precios que coticen en los mercados organizados. Para que los títulos de cada emisión puedan ser identificados de forma inequívoca en cualquier mercado, se le asigna una referencia alfanumérica de 12 caracteres denominada Código ISIN *(International Securities Identification Number).*

Tema 2. Empréstitos
1. Definición, magnitudes y clasificación

Un empréstito **es un préstamo** donde el sujeto activo está formado por un **conjunto de prestamistas** (llamados **suscriptores)**, y donde el sujeto pasivo es un **único prestatario** que recibe el nombre de **emisor**.

Obligacionista:

Persona que **posee** un titulo del empréstito. Como un título puede haber sido comprado en el mercado después del momento de su emisión, no todo obligacionista tiene porque ser suscriptor.

Cupón del empréstito:

Importe que en concepto de interés debe pagar el emisor a los obligacionistas. Unas veces el cupón se expresa en unidades monetarias y otras veces en función de un tipo de interés (**tipo de interés de la emisión**).

1.2. Magnitudes de un empréstito

Las magnitudes de un empréstito se pueden contemplar en su totalidad (perspectiva del emisor) o para cada título valor (perspectiva del obligacionista). En primer lugar estudiaremos las magnitudes para **un solo título** del empréstito:

Valor nominal de un título: C

Es la cuantía que figura expresamente en el título valor.

Prima de emisión de un título: P_e

Es un valor monetario, o bien un porcentaje, que se suma o resta en la **fecha de emisión** al valor nominal del título para obtener el **precio de emisión** de un título (C_e), es decir:

En caso de valor monetario: $C_e = C \pm P_e$

En caso de porcentaje: $C_e = C \cdot (1 \pm P_e)$

En cualquier caso:

- Si $C_e > C$ se habla de emisión sobre la par
- Si $C_e = C$ se habla de emisión a la par
- Si $C_e < C$ se habla de emisión bajo la par

Prima de amortización de un título: P_a

Es un valor monetario, o bien un porcentaje, que se suma o resta en la **fecha de vencimiento** al valor nominal del título para obtener el **precio de amortización** de un título (C_a), es decir:

En caso de valor monetario: $C_a = C \pm P_a$

En caso de porcentaje: $C_a = C \cdot (1 \pm P_a)$

En cualquier caso:

- Si $C_a > C$ se habla de amortización sobre la par
- Si $C_a = C$ se habla de amortización a la par
- Si $C_a < C$ se habla de amortización bajo la par

Ejercicio: Obtened el precio de emisión y de amortización de los títulos de un empréstito de valor nominal 3.000€ si se emiten bajo la par con una prima de emisión de 30€ y se amortizan sobre la par con una prima de amortización del 2%.

$C_e = 3.000 - 30 = 2.970€$ **(Es como decir que se ha emitido al 99%)**

$C_a = 3.000 \cdot (1 + 0,02) = 3.060€$ **(Es como decir que se amortiza al 102%)**

Precio de mercado de un título: P_τ

Precio pagado en el mercado por un título cuando es comprado en cualquier momento τ posterior a su emisión.

Este precio se establece en el mercado por interacción entre la oferta y la demanda.

Puesto que no todos los títulos tienen el mismo valor nominal, para homogeneizar, el mercado tiende a publicar todos los precios de activos en porcentaje respecto de su valor nominal.

Ejemplo:

Los precios de dos títulos distintos, A y B, en el momento τ son:

$$P_\tau^A = 2.100€ \qquad P_\tau^B = 27.000€$$

Pero si sus valores nominales son respectivamente:

$$C^A = 2.000€ \qquad C^B = 30.000€$$

Los precios publicados en porcentaje respecto su valor nominal serían:

$$P_\tau^A = \frac{2.100}{2.000} = 1{,}05 = 105\% \qquad P_\tau^B = \frac{27.000}{30.000} = 0{,}9 = 90\%$$

Ahora estudiaremos las magnitudes del empréstito en su **totalidad**:

Número de títulos emitidos: N

Nominal del empréstito: S

Es el producto del valor nominal de un título por el número de títulos emitidos, es decir: $S = C \cdot N$

Nominal del empréstito: S	=	Valor nominal de un título: C	x	Número de títulos del empréstito: N

Efectivo del empréstito: S_e

Es el valor monetario que efectivamente percibe la entidad en la **fecha de emisión** y que se obtiene mediante el producto del precio de emisión de un título por el número de títulos emitidos, es decir:

$$S_e = C_e \cdot N$$

Amortización del empréstito: S_a

Es el valor monetario que realmente abonará la entidad en la **fecha de vencimiento** y que se obtiene mediante el producto del precio de amortización de un título por el número de títulos emitidos, es decir:

$$S_a = C_a \cdot N$$

Ejercicio: En el empréstito de un ejemplo anterior, el valor nominal de cada título era de 3.000€, se había emitido bajo la par con una prima de emisión de 30€ y se amortizaba sobre la par con una prima de amortización del 2%. Si la sociedad emitió 500.000 títulos, obtened el nominal, el efectivo y la amortización del empréstito.

Nominal del empréstito: $S = 3.000 \cdot 500.000 = 1.500.000.000€$

Efectivo del empréstito: $S_e = 2.970 \cdot 500.000 = 1.485.000.000€$

Amortización del empréstito: $S_a = 3.060 \cdot 500.000 = 1.530.000.000€$

Al intervenir tantas personas diferentes en un empréstito, y cada uno de ellos tener una situación diferente de la operación en cuanto a los momentos e importes de los cobros y pagos realizados, es lógico que, además del **tipo de interés de la emisión**, aparezcan otros tipos de interés.

Tanto emisor:

Es el tipo de interés al que resulta la operación al sujeto pasivo o emisor del empréstito teniendo en cuenta exclusivamente los capitales de la prestación y contraprestación asociados a él, conocidos en el momento de la emisión.

Tanto suscriptor:

Es el tipo de interés al que resultaría la operación a un suscriptor del empréstito en el supuesto de que:

1) Mantenga los títulos valores hasta su vencimiento.
2) Todos los suscriptores compren y amorticen sus títulos en las mismas condiciones.

Los dos tantos anteriores <u>son únicos para cada empréstito</u> y pueden obtenerse en el momento de su emisión.

Tanto obligacionista:

Es el tipo de interés al que resulta la operación a cada obligacionista concreto en función de los capitales financieros de la prestación y contraprestación asociados a él desde el momento de adquirir los títulos valores hasta el momento de venderlos.

Luego, este tanto <u>puede ser diferente para cada obligacionista</u>.

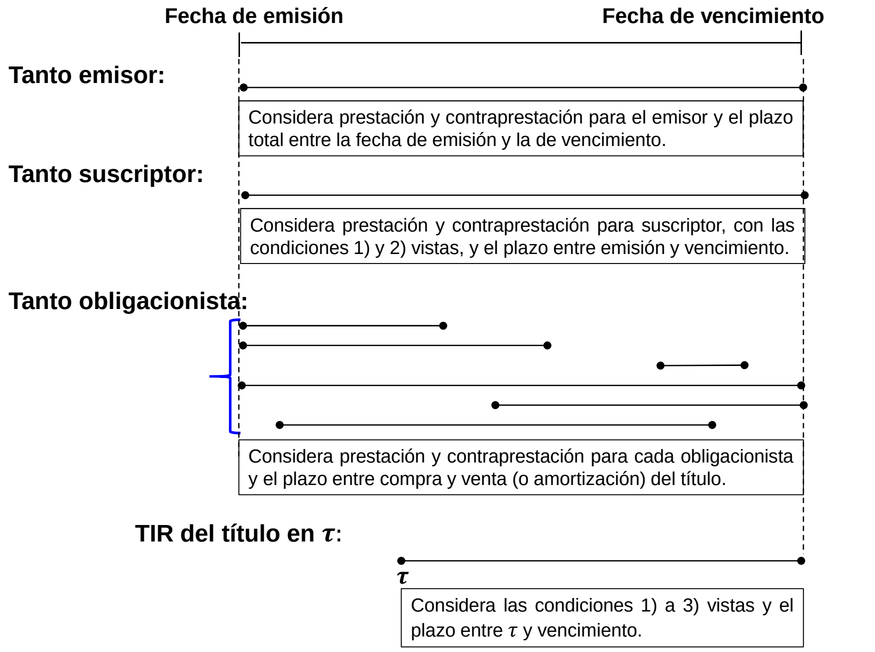
TIR del título en τ:

Tras su emisión, los títulos de un empréstito pueden venderse y comprarse continuamente en un mercado secundario organizado.

La TIR del título en τ, es el tipo de interés anual al que resulta la operación a un obligacionista que adquiere un título en el momento τ bajo las siguientes hipótesis:

1) Lo adquiere al precio P_τ.
2) Lo mantiene hasta su vencimiento (por tanto, cobra todos los cupones pendientes así como su precio de amortización).
3) No existe ningún tipo de gasto asociado.

Como en un determinado día o sesión, distintos obligacionistas pueden obtener TIR diferentes sobre títulos de una misma emisión, para tener una información de referencia en el mercado de dicha emisión, se calcula y publica una media de esas TIR. Esta TIR publicada también se conoce con el nombre de **rendimiento interno medio** o **tipo de interés medio.**



Valor en el momento τ:

Puesto que las condiciones de los mercados financieros cambian continuamente, sobre todo en lo referente a los tipos de interés, puede que al emisor le interese conocer el valor del empréstito en un momento determinado, o bien el obligacionista quiera saber por cuánto podría vender sus títulos en caso de necesitar liquidez.

Para resolver ambas cuestiones se calcula el **valor de un título** en un momento τ, lo representaremos por V_τ, y se define como el valor financiero en dicho momento de todos los cobros futuros a que da derecho el título a partir de τ y hasta su vencimiento, al tipo de interés de mercado considerado.

En el caso particular de que se utilice como tipo de interés de mercado la TIR del título en el momento τ, el valor coincide con el precio del título.

Análogamente, el **valor financiero del empréstito** se obtendrá multiplicando el valor de un título por el número de títulos del empréstito.

1.3. Clasificación de los empréstitos

➢ **Según el número de cupones del empréstito**:

• **Empréstitos cupón cero** o **empréstitos emitidos al descuento** o **empréstitos con rendimiento implícito**:

Son aquellos en que el emisor cobra un precio que dependerá de las condiciones del mercado y no remunera nada hasta el vencimiento del empréstito, momento en que paga el precio de amortización. Nosotros sólo estudiaremos dos títulos valores asociados a este tipo de empréstitos:

- **Letras del Tesoro**.
- **Pagarés de Empresa.**

• **Empréstitos con cupón periódico**:

Son aquellos en que el emisor cobra un precio que dependerá de las condiciones del mercado y paga periódicamente y por vencido los cupones del empréstito hasta el vencimiento, momento en que también paga el precio de amortización.

➢ **Según la titularidad del emisor del empréstito**:

- **Empréstitos de deuda pública**:

  Son aquellos en que el emisor del empréstito es un ente público como por ejemplo la Generalitat de Catalunya, el Tesoro Público, etc.

- **Empréstitos de deuda privada**:

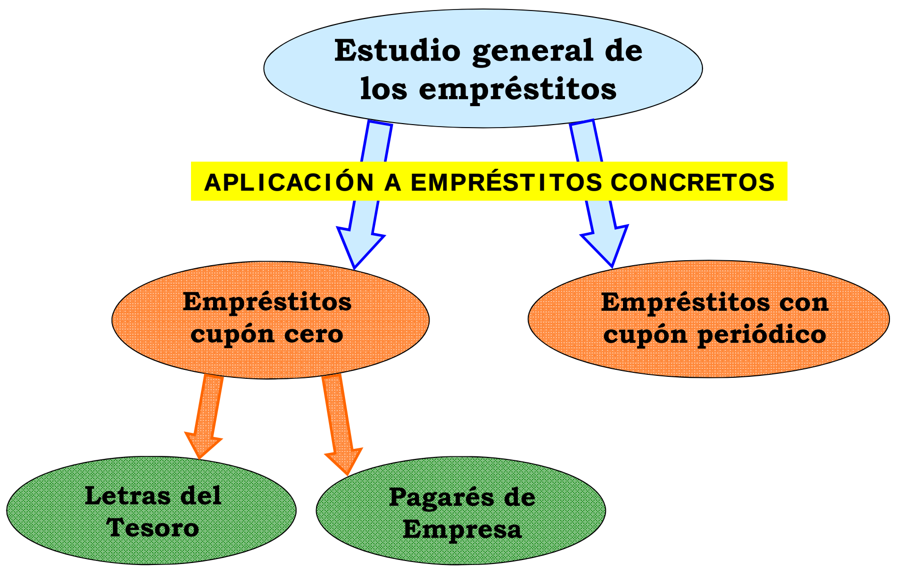
  Son aquellos en que el emisor del empréstito es una empresa o corporación privada como por ejemplo un Banco (BBVA), una empresa de energía (Iberdrola), una empresa de comunicaciones (Telefónica), etc.

También debe tenerse en cuenta que entre la fecha de negociación de un título y su fecha de liquidación pueden pasar varios días. Se habla de operaciones simples al **contado** si la diferencia entre ambas fechas es menor o igual a 5 días hábiles, mientras que se habla de operaciones simples **a plazo** si la diferencia entre ambas fechas es superior a 5 días hábiles.

Conceptos que debe recordar:

- ➢ Emisor
- ➢ Suscriptor
- ➢ Obligacionista
- ➢ Título valor, activo de renta fija, bono, obligación, letra, pagaré, cédula, …
- ➢ Código ISIN
- ➢ Cupón o tipo de interés de la emisión
- ➢ Valor nominal (del título y del empréstito)
- ➢ Prima de emisión
- ➢ Precio de emisión
- ➢ Prima de amortización
- ➢ Precio de amortización
- ➢ Precio de mercado
- ➢ Efectivo del empréstito
- ➢ Amortización del empréstito

- Fecha de emisión o subasta del empréstito
- Fecha de liquidación del empréstito
- Vencimiento o fecha de amortización del empréstito
- Tanto emisor
- Tanto suscriptor
- Tanto obligacionista
- TIR del título en τ, rendimiento interno medio, tipo de interés medio
- Valor financiero (del título y del empréstito)
- Empréstito cupón cero o empréstito emitido al descuento o empréstito con rendimiento implícito
- Empréstito con cupón periódico
- Empréstito de deuda pública
- Empréstito de deuda privada



Bloque temático 2.
Operaciones financieras

2. Empréstitos

2. Empréstitos cupón cero

2.1. Características

2.2. Letras del Tesoro

2.3. Pagarés de empresa

2.1. Características

1. El empréstito cupón cero se amortiza de una sola vez a su vencimiento ***T’*** por su valor nominal ***C.***
2. En el momento de la emisión, cada suscriptor paga por cada título un precio de emisión C_e. La diferencia entre el valor nominal C y dicho precio de emisión permite determinar el rendimiento que, de forma implícita, ofrece el empréstito. Por esta razón, este tipo de empréstitos también se conoce con la denominación de **empréstitos con rendimiento implícito**.
3. El precio de emisión del empréstito, en condiciones normales de mercado, es inferior a su nominal. Por esta razón, este tipo de empréstitos es frecuente encontrarlos con la denominación de **empréstitos emitidos al descuento**.

Para calcular:

- el tanto emisor,
- el tanto suscriptor,
- el tanto obligacionista y
- la TIR del título

se ha de considerar el plazo *t* del empréstito:

- Si ***t*** es inferior a un año se obtendrá, cada uno de ellos, valorando la prestación y la contraprestación en régimen financiero de interés simple vencido.
- Si ***t*** es superior a un año se obtendrá, cada uno de ellos, valorando la prestación y la contraprestación en régimen financiero de interés compuesto

Nosotros estudiaremos los empréstitos que se materializan, entre otros, en los siguientes títulos valores:

- **Letras del Tesoro.**
- **Pagarés de Empresa.**

2.2. Letras del Tesoro

Características principales de las **Letras del Tesoro**:

- Es un activo de deuda pública que emite el Tesoro Público.
- Su valor nominal ***C*** siempre es de 1.000€ que, además, coincide con su precio de amortización al vencimiento.
- El tipo de interés de las Letras se establece en el mercado primario mediante subasta competitiva.
- En la actualidad existen emisiones con vencimientos a 3, 6, 9 y 12 meses (aproximadamente).
- Para el cálculo del plazo de la operación ***t*** se utiliza el criterio Actual/360.
- Conocido el tipo de interés, el precio se obtiene aplicando el régimen financiero de interés simple vencido para plazos inferiores a 1 año o el régimen financiero de interés compuesto para plazos superiores a 1 año.

A continuación se explica la información extraída de la web www.tesoro.es sobre las condiciones de la subasta de Letras del Tesoro a 12 meses realizada en fecha 8-10-2019:

Plazo	12 MESES
Fecha subasta	08/10/2019
Fecha vencimiento	09/10/2020
Fecha de liquidación	11/10/2019
Nominal solicitado	7.341,13
Nominal adjudicado	3.780,51
Nominal adjudicado (2ª vuelta)	38,70
Precio mínimo aceptado	100,477
Tipo de interés marginal	-0,469
Precio medio	100,482
Tipo de interés medio	-0,474
Adjudicado al marginal	100,00
1er precio no admitido	100,476
Volumen peticiones a ese precio	450,00
Peticiones no competitivas	No aceptadas (0,55)
Efectivo solicitado	7.374,81
Efectivo adjudicado	3.798,68
Efectivo adjudicado (2ª vuelta)	38,89
Porcentaje de prorrateo	-
Ratio de cobertura	1,94
Anterior tipo marginal	-0,515

Fecha de emisión o

Fecha de amortización o

Plazo del empréstito: 364 días

Nominal del empréstito expresado en millones de euros

Los precios se expresan en tanto por cien (por cada 100€ de valor nominal)

Las Letras se adjudican mediante subasta a distintos tipos de interés. Aquí se informa del mayor interés pagado (interés marginal) y de su precio mínimo asociado

Como las Letras se adjudican por subasta a distintos precios, aquí se informa del precio medio de la subasta y de su tipo de interés asociado (interés medio)

Millones adjudicados al precio más barato (marginal)

Primer precio que se queda fuera de la subasta y millones solicitados a dicho precio

Millones que no acuden a subasta y que admiten pagar el precio medio que resulte de la subasta (siempre que el interés medio sea positivo)

Efectivo del empréstito expresado en millones de euros

Cociente entre el nominal solicitado y el adjudicado

Sirve para comparar la evolución de los tipos de interés respecto la subasta actual

Ejercicio: Comprobad el precio medio de emisión de la Letra del Tesoro a 12 meses de la diapositiva anterior.

Plazo	12 MESES
Fecha subasta	08/10/2019
Fecha vencimiento	09/10/2020
Fecha de liquidación	11/10/2019
Nominal solicitado	7.341,13
Nominal adjudicado	3.780,51
Nominal adjudicado (2ª vuelta)	38,70
Precio mínimo aceptado	100,477
Tipo de interés marginal	-0,469
??→ Precio medio	100,482
Tipo de interés medio	-0,474

C_e $\quad i = -0,474\%$ $\quad$ **1.000**

11-Oct-2019 $\quad$ ¿Número de días? $\quad$ 9-Oct-2020

364 días (inferior a 1 año)

Aplicamos la expresión del interés simple vencido:

$$C_e \cdot \left(1 + (-0,00474) \cdot \frac{364}{360}\right) = 1.000$$

$$C_e = \frac{1.000}{1 - 0,00474 \cdot \dfrac{364}{360}} = 1.004,8157€$$

Por normativa el precio se redondea siempre al alza

Una vez se encuentran circulando las Letras por el mercado secundario la información de un día en concreto se encuentra en la web www.bmemarketdata.es.

Información que sobre la Letra del Tesoro anterior se ofrece el día 18-octubre-2019 en el Boletín diario de operaciones de compraventa simple al contado de Deuda Pública (www.bmemarketdata.es):

Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento.

Descripción del valor / Security details		Nº de Ops.	Volúmenes (€) / Turnover (€)	Precio (Ex - Cupón) / Price (Ex coupon)			TIR	Anterior / Previous	
Cód. ISIN / ISIN Code	Emisión / Issue	# Trades	Nominal / Nominal	Máximo / High	Medio / Average	Mínimo / Low	IRR	Precio / Price	Fecha / Date
ES0000012932	OBL TESORO PÚBLICO- 4,200 01/2037	15	112,117	157,7433	157,4247	157,4133	0,6703	157,5659	17-10-19
ES0000012A89	OBL TESORO PÚBLICO- 1,450 10/2027	19	339,256	111,0100	110,8709	109,4581	0,0903	110,9918	17-10-19
ES0000012A97	BON TESORO PÚBLICO- 0,450 10/2022	17	272,904	102,6738	102,5466	102,1070	-0,3842	102,3087	17-10-19
ES0000012B39	OBL TESORO PÚBLICO- 1,400 04/2028	16	214,728	110,9908	110,8296	110,6488	0,1220	111,1953	17-10-19
ES0000012B47	OBL TESORO PÚBLICO- 2,700 10/2048	16	68,416	139,0200	138,0641	137,7600	1,1489	137,4313	17-10-19
ES0000012B62	BON TESORO PÚBLICO- 0,350 07/2023	24	405,153	102,4742	102,4036	102,3277	-0,2826	102,3705	17-10-19
ES0000012B70	BON TESORO PÚBLICO-IDX 0,150 11/2023	6	28,887	102,0782	102,0782	102,0782	-0,3500	104,9300	17-10-19
ES0000012B88	OBL TESORO PÚBLICO- 1,400 07/2028	29	381,619	111,0848	110,8049	110,5448	0,1593	110,9901	17-10-19
ES0000012C12	OBL TESORO PÚBLICO-IDX 0,700 11/2033	10	17,251	118,5941	118,0030	117,4195	-0,5247	117,8890	17-10-19
ES0000012C46	BON TESORO PÚBLICO- 0,050 10/2021	13	255,285	101,1900	100,9716	100,9700	-0,4256	100,9840	17-10-19
ES0000012E51	OBL TESORO PÚBLICO- 1,450 04/2029	24	426,717	112,0663	111,4460	111,1179	0,2337	111,7651	17-10-19
ES0000012E69	OBL TESORO PÚBLICO- 1,850 07/2035	25	187,391	118,0411	117,7268	117,0991	0,6620	117,9522	17-10-19
ES0000012E85	BON TESORO PÚBLICO- 0,250 07/2024	40	508,375	102,6891	102,2100	102,0662	-0,2099	102,2348	17-10-19
ES0000012F43	OBL TESORO PÚBLICO- 0,600 10/2029	42	627,347	103,8019	103,5715	103,1410	0,2389	103,5500	17-10-19
ES0L01911152	LET TESORO PÚBLICO DESC 11/2019	10	106,142	-0,4142	-0,4565	-0,4806	-0,4565	-0,4481	17-10-19
ES0L01912069	LET TESORO PÚBLICO DESC 12/2019	16	56,290	-0,5272	-0,5279	-0,5298	-0,5279	-0,5269	17-10-19
ES0L02001177	LET TESORO PÚBLICO DESC 01/2020	12	97,996	-0,5442	-0,5720	-0,5739	-0,5720	-0,5678	17-10-19
ES0L02002142	LET TESORO PÚBLICO DESC 02/2020	3	158,880	-0,5179	-0,5179	-0,5179	-0,5179	-0,5107	17-10-19
ES0L02003066	LET TESORO PÚBLICO DESC 03/2020	3	103,695	-0,5171	-0,5171	-0,5171	-0,5171	-0,5024	17-10-19
ES0L02004171	LET TESORO PÚBLICO DESC 04/2020	2	3,000	-0,5175	-0,5175	-0,5175	-0,5175	-0,5162	17-10-19
ES0L02005087	LET TESORO PÚBLICO DESC 05/2020	2	48,003	-0,5014	-0,5035	-0,5035	-0,5035	-0,4922	16-10-19
ES0L02006127	LET TESORO PÚBLICO DESC 06/2020	13	504,782	-0,4792	-0,4829	-0,4887	-0,4829	-0,4846	17-10-19
ES0L02007109	LET TESORO PÚBLICO DESC 07/2020	1	1,050					-0,4831	17-10-19
ES0L02008149	LET TESORO PÚBLICO DESC 08/2020	2	8,953	-0,4848	-0,4848	-0,4848	-0,4848	-0,4866	17-10-19
ES0L02009113	LET TESORO PÚBLICO DESC 09/2020	5	91,550	-0,4842	-0,4845	-0,4846	-0,4845	-0,4921	17-10-19
ES0L02010095	LET TESORO PÚBLICO DESC 10/2020	6	262,400	-0,4836	-0,4838	-0,4846	-0,4838	-0,4898	17-10-19

Letras Tesoro

Mes/Año de vencimiento

Tipo de interés medio
(es una media ponderada)

Tema 2. Empréstitos
2. Empréstitos cupón cero

Ejercicio: A partir de la información recogida en la diapositiva anterior, calculad el precio que ha pagado el comprador de las Letras del Tesoro, cuyo código ISIN de referencia es ES0L02010095, sabiendo que la fecha de liquidación fue el 18 de octubre de 2019:

Es el precio que hay que pagar para tener 1 Letra del Tesoro

$$i = -0,4838\%$$

Todas las Letras del Tesoro tienen este valor nominal

P_τ	**1.000€**
18-Oct-19	**9-Oct-20**
Fecha Liquidación	**Fecha Vencimiento**

Base $\frac{\text{Act}}{360} \Rightarrow 0$ $\qquad \frac{357}{360}$

$$P_\tau \cdot \left(1 + (-0,004838) \cdot \frac{357}{360}\right) = 1.000 \Rightarrow P_\tau = 1.004,82€$$

Ejercicio: Un inversor ha vendido hoy en el mercado secundario 28 Letras del Tesoro a un precio del 99,52% y que vencen dentro de 143 días. Se pide:

a) Calculad el importe total obtenido por el inversor por la venta de las Letras.

Vender a un precio del 99,52% significa que por cada Letra del Tesoro ha obtenido: $995,20€$

Por tanto, en total habrá obtenido: $995,20 \cdot 28 = 27.865,60€$

b) Calculad la TIR hoy en el mercado secundario de estas Letras del Tesoro.

Lo resolveremos para una sola Letra de valor nominal 1.000€:

995,20€ **1.000€**

Base $\frac{\text{Act}}{360} \Rightarrow 0$ $\frac{143}{360}$

$$995,20 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{143}{360}\right) = 1.000 \quad \Rightarrow i = 0,0121 \cong 1,21\%$$

Tema 2. Empréstitos
2. Empréstitos cupón cero

2.3. Pagarés de Empresa

Características de los **Pagarés de Empresa**:

- Es un activo de deuda privada que emiten grandes empresas y corporaciones del sector privado.
- Pueden tener cualquier valor nominal, según las necesidades de la empresa (aunque suele ser múltiplo de 1.000€).
- Pueden tener cualquier vencimiento (aunque lo más habitual es que sea inferior a 2 años).
- Pueden emitirse en serie o a medida.
- Suelen ofrecer un rendimiento superior al que ofrecen las Letras del Tesoro debido a los riesgos de crédito y liquidez asociados a la empresa emisora.
- Para el cálculo del plazo de la operación *t* se utiliza, normalmente, el criterio Actual/365.
- El rendimiento implícito se obtiene aplicando el régimen financiero de interés simple vencido para plazos inferiores a 1 año o el de interés compuesto para plazos superiores a 1 año.

Las condiciones de emisión de los Pagarés de Empresa se encuentran en la web www.cnmv.es, y principalmente cotizan en el Mercado secundario de Renta Fija (AIAF), en el Mercado Alternativo de Renta Fija (MARF) y otros.

Ejercicio: Los datos más significativos de una emisión de Pagarés de empresa emitidos por TRONIC S.A. son:

- Nominal del empréstito: 450.000.000€
- Nominal del título: 10.000€
- Precio al que se ha emitido un título: 98,05%
- Fecha emisión y liquidación: 28-Septiembre-2019
- Fecha amortización: 8-Mayo-2020

Se pide:

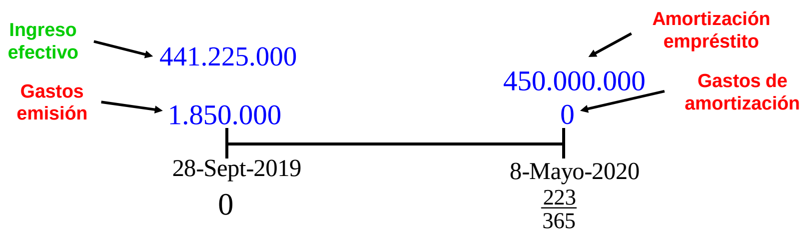
a) Calculad el número de títulos emitidos en el empréstito.

$$N=\frac{450.000.000}{10.000}=45.000$$

b) Indicad el importe efectivo que recibirá TRONIC de los suscriptores.

	Por cada título	Por todo el empréstito
Importe efectivo:	9.805€ $(98,05\%\cdot 10.000)$	441.225.000€ $(98,05\%\cdot 450.000.000)=(9.805\cdot 45.000)$

c) Obtened el tanto anual del emisor si los gastos totales de emisión del empréstito (propaganda, tasas, impuestos, registro, notario, etc.) han ascendido a 1.850.000€.



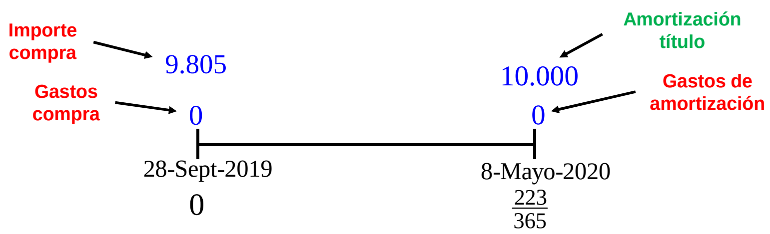
Por ser el plazo de la operación inferior a un año, el **tanto anual del emisor** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en el momento de la venta en régimen financiero de interés simple vencido:

$$(441.225.000-1.850.000)\cdot\left(1+i^{emisor}\cdot\frac{223}{365}\right)=450.000.000$$

$$i^{emisor}=3,958\%$$

d) Obtened el tanto anual del suscriptor de pagarés si no tiene ningún tipo de gastos.

Realizaremos los cálculos para 1 título:

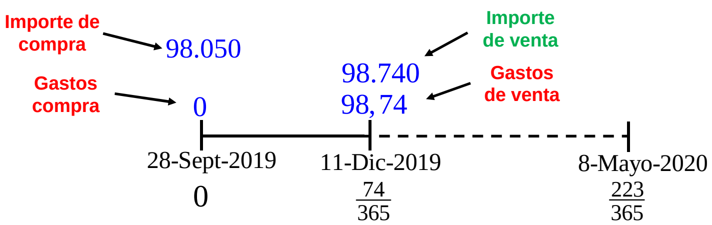


Por ser el plazo de la operación inferior a un año, el **tanto anual del suscriptor** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en el momento de la venta en régimen financiero de interés simple vencido:

$$9.805 \cdot \left(1 + i^{suscriptor} \cdot \frac{223}{365}\right) = 10.000$$

$$i^{suscriptor} = 3,255\%$$

e) Calculad el interés anual del obligacionista que adquirió 10 títulos en el momento de la emisión y los vendió el 11-Diciembre-2019 al 98,74% cada uno pagando en ese momento unos gastos del 0,1% sobre el valor de venta.

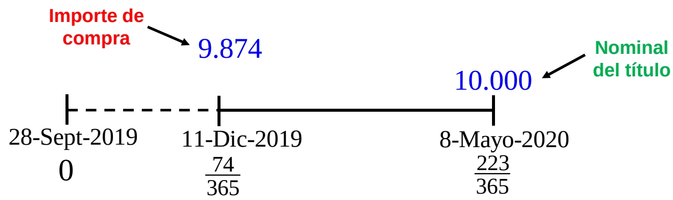


Por ser el plazo de la operación inferior a un año, el **tanto anual del obligacionista** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en el momento de la venta en régimen financiero de interés simple vencido:

$$98.050 \cdot \left(1 + i^{oblig1} \cdot \frac{74}{365}\right) = 98.740 - 98,74 \Rightarrow i^{oblig1} = 2,974\%$$

f) Calculad la TIR anual de un título a fecha 11-dic-2019.

Este tipo de interés es el que obtendría un obligacionista que adquiriese pagarés de la empresa el 11 de diciembre de 2019 al precio de mercado (ver apdo. anterior), y lo mantuviese hasta el vencimiento sin tener en cuenta ningún tipo de gastos.

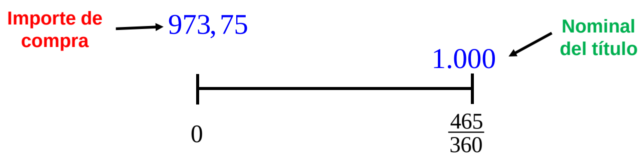


Por ser el plazo de la operación inferior a un año, la **TIR anual de un título el 11 de Diciembre de 2019** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio en régimen financiero de interés simple vencido:

$$9.874 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{149}{365}\right) = 10.000 \quad \Rightarrow i = 3{,}126\%$$

Ejercicio: Un título de un empréstito cupón cero de rendimiento implícito tiene hoy un precio de compra de 973,75€. Sabiendo que el nominal de dicho título es de 1.000€ y que vence de aquí a 465 días, calculad la TIR anual de un título hoy en los dos casos siguientes:

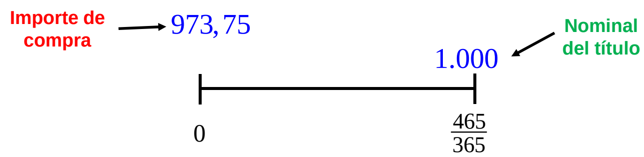
a) Si el título fuera una Letra del Tesoro.



Por ser el plazo de la operación superior a un año, la TIR anual, se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en régimen financiero de interés compuesto:

$$973{,}75 \cdot \left(1 + I_1\right)^{\frac{465}{360}} = 1.000 \Rightarrow I_1 = 2{,}081\%$$

b) Si el título fuera un Pagaré de Empresa.



Por ser el plazo de la operación superior a un año, la TIR anual, se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en régimen financiero de interés compuesto:

$$973{,}75\cdot\left(1+I_1\right)^{\frac{465}{365}}=1.000 \Rightarrow I_1=2{,}110\%$$

Conceptos que debe recordar:

- Letras del Tesoro
- Interés marginal
- Precio mínimo aceptado
- Tipo de interés medio
- Precio medio
- Pagarés de Empresa

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

2. Empréstitos

3. Empréstitos con cupón periódico

3.1. Características generales

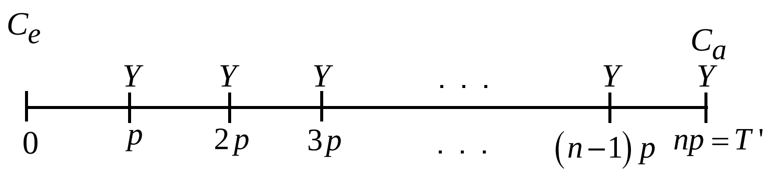
3.2. Características y valoración de Bonos y Obligaciones del Estado

3.3. Características y valoración de Bonos Obligaciones y Cédulas de Empresa

3.1. Características generales

1. El precio de emisión del empréstito puede coincidir o no con su valor nominal y dependerá de las condiciones del mercado.
2. El empréstito se amortiza de una sola vez a su vencimiento. El precio de amortización puede coincidir o no con su valor nominal .
3. El emisor abona al obligacionista por vencido y con una periodicidad $p=\frac{1}{m}$, por cada título, un cupón Y calculado sobre el valor nominal C según el interés efectivo de la emisión, I_m .

Gráficamente, considerando que $p=\frac{1}{m}$:



donde: $Y=C\cdot I_m$

Estos empréstitos con cupón periódico se materializan, entre otros, en los siguientes títulos valores:

- Bonos y Obligaciones del Estado/Tesoro para el caso de empréstitos de deuda pública (que estudiaremos en primer lugar).
- Bonos, Obligaciones, Cédulas de Empresa (y otras denominaciones) para el caso de empréstitos de deuda privada (que estudiaremos en segundo lugar).

En ambos tipos de empréstitos, para obtener:

- el tanto efectivo emisor,
- el tanto efectivo suscriptor,
- el tanto efectivo obligacionista y
- la TIR del título

bastará con considerar la prestación y la contraprestación, para cada caso, plantear la ecuación de equilibrio en régimen financiero de interés compuesto, y calcularlo (normalmente con ayuda de Excel® u otro software informático).

Si tras la emisión de un empréstito con cupón periódico, un inversor acude, en un momento τ, al mercado secundario para comprar o vender un título, ha de pagar o cobrar **su precio de mercado**, P_τ . Este precio se obtiene sumando:

- **Cupón corrido** (CC): Parte proporcional del cupón periódico del título generado desde que se pagó el último cupón hasta el momento de compra o venta.
- **Cotización o precio ex-cupón** (P^{ex}): Precio que se fija en el mercado sobre un título por la interacción de la oferta y la demanda.

$$\boxed{\text{Precio de mercado, } P_\tau} = \boxed{\text{Cupón corrido}} + \boxed{\text{Precio ex-cupón}}$$

Por otra parte, recordemos que el valor de un título en un momento determinado es el valor financiero, en dicho momento, de todos los cobros futuros a que da derecho el título partir de esa fecha y hasta su vencimiento, al tipo de interés de mercado considerado. Por tanto, para el caso de empréstitos con cupón periódico:

$$\boxed{\text{Valor financiero, } V_\tau} = \boxed{\text{Valor actual cupones pendientes}} + \boxed{\text{Valor actual valor nominal}}$$

3.2. Características y valoración de Bonos y Obligaciones del Estado

- Es un activo de deuda pública que emite el Tesoro Público.
- Su valor nominal ***C*** siempre es de 1.000€ y se abona a la fecha de vencimiento.
- El precio de emisión se establece en el mercado primario mediante subasta competitiva.
- En la actualidad existen emisiones de Bonos con vencimientos a 3 y 5 años (aproximadamente) y de Obligaciones a 10, 15, 30 y 50 años (aproximadamente).
- Los cupones se pagan anualmente y por vencido, coincidiendo el último cupón con el vencimiento de la operación.
- Para el cálculo del plazo de la operación ***t*** se calcula el número de años enteros y para el residuo se utiliza el criterio Actual/Actual.

Las condiciones de emisión de estos activos pueden consultarse en la web www.tesoro.es. Una vez se encuentran circulando por el mercado secundario (Mercado de Deuda Pública) la información de un día en concreto se encuentra en la web www.bmemarketdata.es.

Tema 2. Empréstitos
3. Empréstitos con cupón periódico

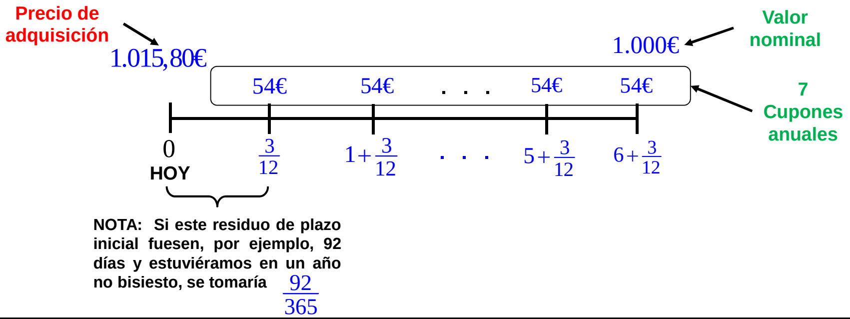
Ejercicio: Hoy se ha adquirido por 1.015,80€ una Obligación del Estado con vencimiento dentro de 6 años y 3 meses que paga un cupón anual del 5,40%. Se pide:

a) Calculad el importe del cupón anual para un solo título.

$$Y = 1.000 \cdot 0,054 = 54€$$

b) Representad gráficamente esta operación para un solo título.

Puesto que el último cupón coincide con el momento de amortización de la Obligación, contaremos años enteros hacia atrás desde el vencimiento y el periodo residual quedará al inicio de la operación



Información que sobre la Obligación del Estado con código ISIN ES00000124H4 se ofrece el día 18-octubre-2019 en el Boletín diario de operaciones de compraventa simple al contado de Deuda Pública (www.bmemarketdata.es):

Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento. — Amounts in millions (€) and prices in percentage.

OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO. DEUDA DEL ESTADO
SALE AND PURCHASE TRANSACTIONS. PUBLIC DEBT

Descripción del valor *Security details*		Nº de Ops. *# Trades*	Volúmenes (€) *Turnover (€)*	Precio (Ex - Cupón) *Price (Ex coupon)*			TIR IRR	Anterior *Previous*	
Cód. ISIN *ISIN Code*	Emisión *Issue*		Nominal *Nominal*	Máximo *High*	Medio *Average*	Mínimo *Low*		Precio *Price*	Fecha *Date*
ES0000011868	OBL TESORO PÚBLICO- 6,000 01/2029	15	77,221	154,0946	153,7476	153,1845	0,1646	153,2420	17-10-19
ES00000120N0	OBL TESORO PÚBLICO- 4,900 07/2040	9	94,679	177,4620	177,4160	177,2011	0,8282	177,3013	17-10-19
ES00000121G2	OBL TESORO PÚBLICO- 4,800 01/2024	8	311,663	121,8004	121,7587	121,7234	-0,2410	121,8408	17-10-19
ES00000121O6	OBL TESORO PÚBLICO- 4,300 10/2019	10	119,630	100,1947	100,1947	100,1947	-0,4196	100,1817	16-10-19
ES00000121S7	OBL TESORO PÚBLICO- 4,700 07/2041	18	224,573	175,5179	175,0152	174,6015	0,8920	175,1299	17-10-19
ES00000121V1	PRL TESORO PÚBLICO- DESC 10/2019	4	4,900	-0,4225	-0,4316	-0,4368	-0,4316	-0,4098	17-10-19
ES00000123U9	OBL TESORO PÚBLICO- 5,400 01/2023	8	20,122	119,0475	118,9751	118,9381	-0,3382	119,0769	17-10-19
ES00000123X3	OBL TESORO PÚBLICO- 4,400 10/2023	12	72,167	119,0000	118,9222	118,8340	-0,2661	118,9987	17-10-19
ES0000012411	OBL TESORO PÚBLICO- 5,750 07/2032	9	71,398	166,9886	165,5820	165,4896	0,4557	166,6737	17-10-19
ES00000124C5	OBL TESORO PÚBLICO- 5,150 10/2028	14	297,938	144,7675	144,6297	144,5061	0,1681	144,7405	17-10-19
ES00000124H4	OBL TESORO PÚBLICO- 5,150 10/2044	9	4,671	192,2450	191,6774	191,6160	0,9941	191,8474	17-10-19
ES00000124W3	OBL TESORO PÚBLICO- 3,800 04/2024	15	160,965	118,4174	118,2918	118,2860	-0,2112	118,2591	17-10-19

Cupón o Tanto Emisión

Mes/Año Vencimiento

Precio medio ex-cupón en la fecha anterior
(es una media ponderada)

Información que sobre la misma Obligación del Estado con código ISIN ES00000124H4 se ofrece el día 18-octubre-2019 en el Boletín diario sobre las características de los valores en circulación de Deuda Pública: Bonos y Obligaciones (www.bmemarketdata.es):

Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento. — Amounts in millions (€) and prices in percentage.

CARACTERÍSTICAS DE LOS VALORES EN CIRCULACIÓN. DEUDA DEL ESTADO. BONOS Y OBLIGACIONES
CHARACTERISTICS OF OUTSTANDING ISSUES. PUBLIC DEBT. BONDS

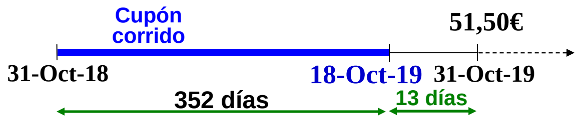
Descripción del valor *Security details*		Fecha próximo cupón Next coupon date	Número cupones año *# Coupons per year*	Cupón corrido EUR/MILLON *Accrued coupon EUR/MILLON*	Saldo en circulación *Amount outstanding*	Saldo de terceros *Third party amount*	Último *Last*	
Cód. ISIN *ISIN Code*	Emisión *Issue*						Precio *Price*	Fecha *Date*
ES0000011868	OBL TESORO PÚBLICO- 6,000 01/2029	31-01-20	1	42.739,73	25.507,53	9.856,76	153,7476	18-10-19
ES00000120N0	OBL TESORO PÚBLICO- 4,900 07/2040	30-07-20	1	10.710,38	18.802,50	10.367,97	177,4160	18-10-19
ES00000121G2	OBL TESORO PÚBLICO- 4,800 01/2024	31-01-20	1	34.191,78	17.564,70	10.025,20	121,7587	18-10-19
ES00000121O6	OBL TESORO PÚBLICO- 4,300 10/2019	31-10-19	1	41.468,49	21.161,15	14.342,72	100,1947	18-10-19
ES00000121S7	OBL TESORO PÚBLICO- 4,700 07/2041	30-07-20	1	10.273,22	20.381,58	7.530,98	175,0152	18-10-19
ES00000122D7	OBL TESORO PÚBLICO- 4,000 04/2020	30-04-20	1	18.688,52	23.365,04	15.070,43	102,3999	18-10-19
ES0000012411	OBL TESORO PÚBLICO- 5,750 07/2032	30-07-20	1	12.568,31	22.880,26	11.983,97	165,5820	18-10-19
ES00000124C5	OBL TESORO PÚBLICO- 5,150 10/2028	31-10-19	1	49.665,75	18.769,07	9.995,57	144,6297	18-10-19
ES00000124H4	OBL TESORO PÚBLICO- 5,150 10/2044	31-10-19	1	49.665,75	14.254,58	8.526,74	191,6774	18-10-19
ES00000124W3	OBL TESORO PÚBLICO- 3,800 04/2024	30-04-20	1	17.754,10	21.185,84	14.240,15	118,2918	18-10-19
ES00000126A4	OBL TESORO PÚBLICO-IDX 1,800 11/2024	30-11-19	1	15.879,45	13.170,58	4.885,10	114,9170	18-10-19

Mes/Año Vencimiento

Último precio ex-cupón negociado en el día

Ejercicio: Como sabemos, la Obligación del Estado con código ISIN ES00000124H4 tiene vencimiento el 31 de octubre de 2044. Ello significa que el 31 de octubre de cada año paga un cupón anual del 5,15%. Comprobad el importe del cupón corrido de dicha Obligación a fecha 18 de octubre de 2019 para un solo título.

Cupón anual de la Obligación: $Cupón = 5{,}15\% \cdot 1.000 = 51{,}50€$



$$CC = 51{,}50 \cdot \frac{352}{365} = 49{,}666€$$

Para un millón de euros invertidos: $Cupón = 5{,}15\% \cdot 1.000.000 = 51.500€$

$$CC = 51.500 \cdot \frac{352}{365} = 49.665{,}75€$$

NOTA: Si entre el pago de 2 cupones hubiese 366 días por encontrarse el 29 de febrero, para el cálculo del cupón corrido se dividiría entre 366.

Ejercicio: De la Obligación del Estado con código ISIN ES00000124H4 y vencimiento el 31 de octubre de 2044, obtened para un título, su precio a fecha 18 de octubre de 2019 a partir del precio medio ex-cupón y del cupón corrido (obtenido en el ejercicio anterior).

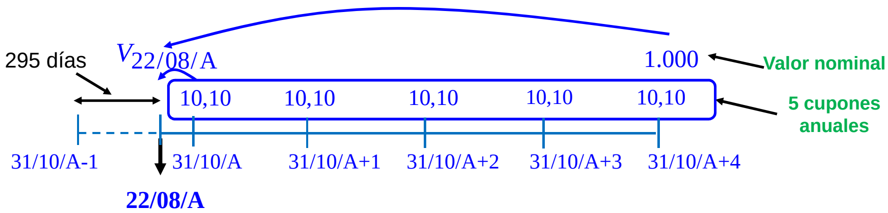
Precio de mercado, P_τ = **Cupón corrido** + **Precio ex-cupón**

Precio de mercado	Cupón corrido	Precio ex-cupón
$P_{18/10/19} = 1.966{,}44€$	$CC = 49{,}666€$	$P^{ex} = 1.916{,}774€$
Sumando cupón corrido más precio ex-cupón	Calculado anteriormente	Ver información en página web

Ejemplo: Para un título de una determinada emisión de Bonos del Estado, se tiene la siguiente información hoy, 22 de agosto del año A, en el mercado secundario:

Cupón	Vencimiento	Precio ex-cupón
1,01%	31/10/A+4	98,723%

Calculad el valor del título a dicha fecha para un tipo de interés del mercado del 1,325% anual.



$$V_{22/08/A}=\left(10{,}10\cdot a_{\overline{5}|0{,}01325}+1.000\cdot(1+0{,}01325)^{-5}\right)\cdot(1+0{,}01325)^{\frac{295}{365}}$$

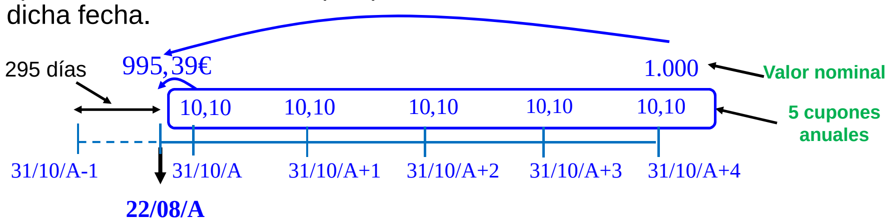
$$V_{22/08/A}=995{,}39€$$

Tema 2. Empréstitos
3. Empréstitos con cupón periódico

Ejemplo: Suponed que para el mismo título de la emisión del ejercicio anterior la información que se tiene hoy, 22 de agosto del año A, en el mercado secundario es la siguiente:

Cupón	Vencimiento	Precio total
1,01%	31/10/A+4	995,39€

a) Plantead la ecuación que permite obtener la TIR anual del título a dicha fecha.

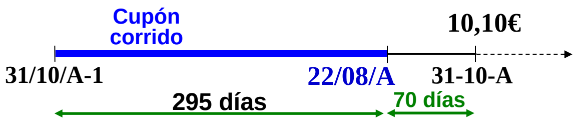


$$995{,}39=\left(10{,}10\cdot a_{\overline{5}|TIR}+1.000\cdot(1+TIR)^{-5}\right)\cdot(1+TIR)^{\frac{295}{365}}$$

Mediante Excel® se obtiene que la TIR anual es del 1,325%.

Obsérvese que el valor del título a fecha 22/08/A, calculado en la diapositiva anterior, coincide con su precio total si como interés de mercado se utiliza su TIR.

b) Calculad el cupón corrido hoy, 22 de agosto del año A.



$$CC = 10{,}10 \cdot \frac{295}{365} = 8{,}16€$$

Alternativamente, sabiendo que los precios total y ex-cupón hoy son, respectivamente (ver ejercicio anterior), 995,39€ y 987,23€, se tiene:

$$\boxed{\text{Precio de mercado, } P_\tau} = \boxed{\text{Cupón corrido}} + \boxed{\text{Cotización ex-cupón}}$$

$$P_{22/08/A} = 995{,}39€$$

$$P^{ex} = 987{,}23$$

$$CC = 995{,}39 - 987{,}23 = 8{,}16€$$

3.3. Características y valoración de Bonos, Obligaciones y Cédulas de Empresa

- Son activos de deuda privada que emiten grandes empresas del sector privado.
- Pueden tener cualquier valor nominal, según las necesidades de la empresa.
- Pueden tener cualquier vencimiento superior a 2 años.
- Los cupones se pagan periódicamente y por vencido, coincidiendo el último cupón con el vencimiento de la operación.
- Pueden llevar asociados alguna garantía colateral.
- Para el cálculo del plazo de la operación ***t*** se calcula el número de años enteros y para el residuo se utiliza el criterio Actual/Actual.

Las condiciones de emisión de estos activos pueden consultarse en la página web www.cnmv.es, y principalmente cotizan en el Mercado secundario de Renta Fija (AIAF)

Ejercicio: Para financiar una obra, la empresa de construcción FONSA emitió hace 4 años y 3 meses un empréstito con títulos de renta fija privada de las siguientes características:

- Nominal de cada título (Obligación): 200€
- Número de títulos emitidos: 40 millones
- Gastos de emisión del empréstito para FONSA: 0,32% del nominal
- El empréstito se emitió bajo la par con una prima de emisión del 3%
- Fecha de amortización del empréstito: A los 8 años de su emisión
- El empréstito tiene una prima de amortización sobre la par de 2€ por cada Obligación
- Cupón periódico semestral
- Tipo de interés nominal de la emisión: 5,40%
- Los suscriptores de títulos de este empréstito pagarán al intermediario financiero una comisión del 0,2% del efectivo de los títulos adquiridos
- Al vencimiento, no existen gastos de amortización del empréstito ni para el emisor ni para los obligacionistas

Con toda la información anterior, se pide:

a) Calculad el importe nominal del empréstito y efectivo recibido por FONSA:

Nominal del empréstito: $S = 40M \cdot 200 = 8.000M$ €

Efectivo del empréstito: $S_e = 8.000M \cdot (1-0,03) = 7.760M$ €

b) Plantead la ecuación que permite obtener el interés efectivo emisor:

PRESTACIÓN (Cobros) del emisor:

Efectivo del empréstito: $S_e = 7.760M$ €

CONTRAPRESTACIÓN (Pagos) del emisor:

Gastos de emisión: $0,32\% \cdot 8.000M = 25,6M$ €

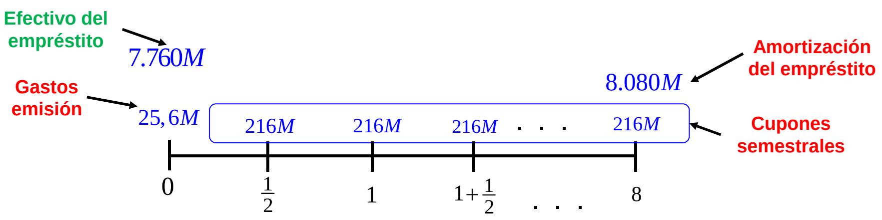
Cupón semestral que se paga al final de cada semestre natural:

$$\frac{0,054}{2} \cdot 8.000M = 216M \text{ €}$$

Amortización empréstito:

$$S_a = (200+2) \cdot 40M = 8.080M \text{ €}$$

Gráficamente, la ubicación de la prestación y contraprestación para calcular el tanto efectivo del emisor sería:



Como el pago de cupones tiene frecuencia semestral, plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen utilizando como incógnita el interés efectivo semestral I_2:

$$7.760M = 25,6M + 216M \cdot a_{\overline{16}|I_2} + 8.080M \cdot (1+I_2)^{-16}$$

Resolviendo, con ayuda de ordenador, se obtendría como **tanto efectivo emisor**:

$$I_2^{emisor} = 3,014\%$$

Tema 2. Empréstitos
3. Empréstitos con cupón periódico

c) Plantead la ecuación que permite obtener el tanto efectivo suscriptor (realizar los cálculos para un solo título):

PRESTACIÓN (Pagos) del suscriptor:

Precio de emisión: $C_e = 200 \cdot (1-0,03) = 194€$

Comisión de suscripción: $0,20\% \cdot 194 = 0,388€$

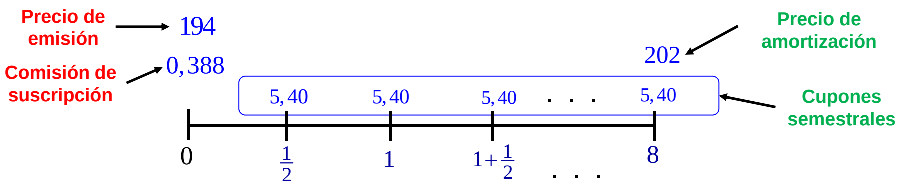
CONTRAPRESTACIÓN (Cobros) del suscriptor:

Cupón semestral: $\frac{0,054}{2} \cdot 200 = 5,40€$

Gastos amortización: $0€$

Precio de amortización: $C_a = 200 + 2 = 202€$

Gráficamente sería:



Como el pago de cupones tiene frecuencia semestral, plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen utilizando como incógnita el interés efectivo semestral I_2:

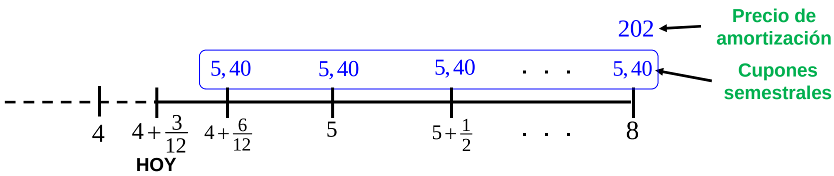
$$194+0,388=5,40\cdot a_{\overline{16}|I_2}+202\cdot(1+I_2)^{-16}$$

Resolviendo, con ayuda de ordenador, se obtendría como **tanto efectivo suscriptor**:

$$I_2^{suscriptor}=2,973\%$$

d) Calculad el valor de las Obligaciones de este empréstito hoy si el tipo de interés efectivo anual vigente en el mercado en este momento es del 5,20%.

Un inversor que adquiriese Obligaciones de FONSA hoy (4 años y 3 meses después de la emisión) y las mantuviese hasta el vencimiento tendría los siguientes ingresos (cálculo para un título):



El interés efectivo semestral equivalente al 5,20% anual es:

$$I_2=(1+0,0520)^{\frac{1}{2}}-1=0,02567\equiv2,567\%$$

El **valor hoy de una Obligación** de FONSA en el mercado será:

$$V=5,40\cdot a_{\overline{8}|0,02567}\cdot(1+0,02567)^{\frac{1}{2}}+202\cdot(1+0,02567)^{-2\cdot\left(3+\frac{9}{12}\right)}=206,13€$$

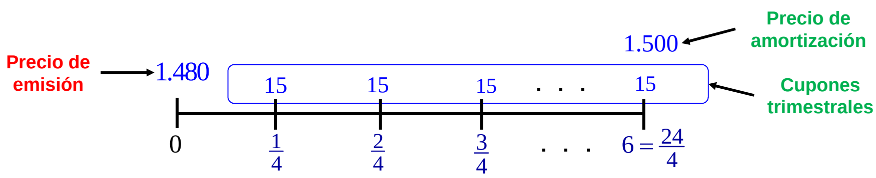
Ejercicio: Juan vende hoy en el mercado secundario 10 cédulas de una emisión de renta fija de la empresa privada ZANIO a un precio unitario de 1.568,35€, que adquirió en el momento de su emisión hace 2 años y medio. Las características de la emisión fueron:

- Valor nominal de cada cédula: 1.500€.
- Prima de emisión bajo la par de 20€ por título.
- En el momento de la emisión, los suscriptores no tuvieron ningún tipo de gastos.
- Amortización de los títulos a la par y libre de gastos.
- Pago trimestral del cupón.
- Tipo de interés nominal de la emisión: 4%.
- Vencimiento: Dentro de 3 años y medio (a partir de hoy).

Con toda la información anterior, se pide:

Tema 2. Empréstitos
3. Empréstitos con cupón periódico

a) Representad gráficamente la operación y plantead la ecuación que permite obtener el tanto efectivo suscriptor (realizar los cálculos para un solo título).



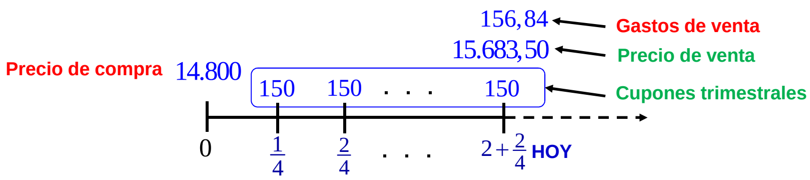
Como el pago de cupones tiene frecuencia trimestral, plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen utilizando como incógnita el interés efectivo trimestral I_4:

$$1.480 = 15 \cdot a_{\overline{24}|I_4} + 1.500 \cdot (1+I_4)^{-24}$$

Resolviendo, con ayuda de ordenador, se obtendría como **tanto efectivo suscriptor**:

$$I_4^{suscriptor} = 1,063\%$$

b) Plantead la ecuación que permite obtener el tanto efectivo de interés que hoy, justo después de haber cobrado el cupón correspondiente, ha obtenido Juan en la operación de compra-venta de las cédulas, si en el momento de la venta ha pagado unos gastos del 1% sobre el valor de venta.



Plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen utilizando como incógnita el interés efectivo trimestral I_4:

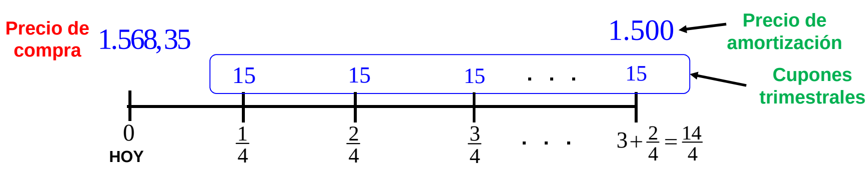
$$14.800 + 156,84 \cdot (1+I_4)^{-4\cdot\left(2+\frac{2}{4}\right)} = 150 \cdot a_{\overline{10}|I_4} + 15.683,50 \cdot (1+I_4)^{-4\cdot\left(2+\frac{2}{4}\right)}$$

$$14.800 = 150 \cdot a_{\overline{10}|I_4} + 15.526,66 \cdot (1+I_4)^{-10}$$

Resolviendo, con Excel®, se obtendría como **tanto efectivo de este obligacionista** (Juan):

$$I_4^{oblig} = 1,473\%$$

c) Plantead la ecuación que permite obtener la TIR anual del empréstito a fecha de hoy.



Planteamiento de la ecuación de equilibrio a día de hoy para obtener el interés efectivo trimestral I_4:

$$1.568,35 = 15 \cdot a_{\overline{14}|I_4} + 1.500 \cdot (1+I_4)^{-14}$$

Con Excel®, obtendríamos el valor de I_4 y, a partir de éste, la **TIR anual de este empréstito** a fecha de hoy:

$$I_4 = 0,658\% \Rightarrow TIR = I_1 = (1+0,00658)^4 - 1 = 0,02658 \equiv 2,658\%$$

Conceptos que debe recordar:

- Bonos y Obligaciones del Estado
- Cupón corrido
- Precio o cotización ex-cupón
- Bonos, Obligaciones, Cédulas de Empresa

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El precio medio de una emisión de Letras del Tesoro, con vencimiento dentro de 184 días, es del 99,142%, ¿cuál es el interés medio anual resultante de la emisión?

2. En una emisión de Pagarés de empresa de valor nominal 2.000€, con vencimiento al cabo de 546 días, el tipo de interés es del 2,265% anual, ¿cuál es el precio de compra de cada Pagaré?

3. Una empresa vende hoy 10 Letras del Tesoro de una emisión que vence dentro de 235 días. Si la TIR de una Letra de dicha emisión es del 2,40% anual, se pide:

   a) Importe que obtendrá la empresa por la venta de las Letras.

   b) Obtener la cotización de una Letra de dicha emisión en el mercado secundario.

4. Un inversor dispone de 15 Pagarés de empresa de 1.000€ de nominal cada uno. Hoy, cuando faltan 435 días para su vencimiento, decide venderlos. Si la cotización en el momento de la venta es del 95,60%, determinar:

   a) TIR hoy para los pagarés de esta emisión.

   b) Interés anual al que resulta la operación al obligacionista que hoy compra los pagarés, suponiendo que los mantiene hasta su vencimiento, si hoy paga una comisión del 0,60% sobre el nominal de los títulos.

5. Una empresa privada realizó una emisión de Pagarés de empresa con las siguientes características:

   - Nominal del empréstito: 300.000.000€.
   - Nominal del título: 3.000€.
   - Precio de emisión de cada título: 98,75%.
   - Fecha emisión y desembolso: 4 de mayo.
   - Fecha de amortización: 15 de febrero del año siguiente.

   Determinar:

   a) Número de títulos emitidos en el empréstito.

   b) Interés anual de un obligacionista que adquiere 15 títulos en el momento de la emisión, sin ningún tipo de gastos, y los vende a los 213 días al 99,72% pagando una comisión por la venta del 0,1% sobre el nominal de los títulos.

   c) Si en fecha 10 de octubre del año de emisión un pagaré cotizaba en el mercado secundario al 99,45%, ¿qué precio debía pagarse por él?, ¿cuál era el tipo de interés anual (TIR) en ese momento?

   d) Si el 14 de enero del año siguiente al de su emisión la TIR para este empréstito era del 1,59%, ¿qué valor, en porcentaje sobre el nominal, tenía un pagaré en esa fecha?

6. Una persona vende hoy 75 Bonos del Estado y 24 Letras del Tesoro cuyas características son:

- Los Bonos del Estado pagan cupones anuales del 4,35% y tienen su vencimiento dentro de 4 años y medio.
- Las Letras del Tesoro vencen al cabo de 117 días y cotizan en el mercado secundario a un precio del 98,86%.

Se pide:

a) Valor de 1 Bono del Estado si el tipo de interés de mercado es del 1,82% anual.

b) Rendimiento interno (TIR) a fecha de hoy de las Letras del Tesoro.

c) Importe total obtenido con la venta de los Bonos y las Letras.

7. Una empresa tiene invertido parte de sus ahorros en los siguientes activos:

- 16 Letras del Tesoro que hoy cotizan en el mercado a un precio del 99,37% y que vencen dentro a 164 días.
- 84 Obligaciones del Estado que están pagando un cupón anual del 3,25% y cuyo vencimiento será dentro de 6 años y 195 días.

Se pide:

a) Rendimiento interno (TIR) a fecha de hoy de las Letras del Tesoro.

b) Si la empresa adquirió todas las Letras del Tesoro hace 110 días por un importe total de 15.800€, calcular el rendimiento que obtendrá si hoy vendiese las Letras (utilizar criterio Act/360).

c) Calcular el cupón corrido de 1 Obligación del Estado a fecha de hoy si hace 170 días que se cobró el último cupón.

d) Si hoy el precio ex-cupón de 1 Obligación del Estado es del 102,45%, calcular el importe total que obtendría la empresa si hoy vendiese todas sus Obligaciones.

e) Plantear la ecuación que permitiría obtener a fecha de hoy la TIR anual de la Obligación del Estado.

8. Sea una emisión de Obligaciones del Estado con vencimiento el 30 de abril de dentro de 11 años, cupón anual del 4,75% y fecha de pago del cupón cada 30 de abril. Se pide:

a) Determinar el precio ex-cupón de la Obligación, en el mercado secundario, el 30 de abril de este año (justo después de haberse hecho efectivo el cupón correspondiente) si el rendimiento interno negociado en esa fecha es del 4,56%.

b) Determinar el cupón corrido y el precio ex-cupón de la Obligación en el mercado secundario, a fecha 20 de febrero de este año, si la TIR anual en dicha fecha era del 4,42%.

9. Un particular dispone de 5 obligaciones de una emisión de renta fija privada, adquiridas hace 2 años en el momento de la emisión y que vencen dentro de 3 años, con las siguientes características:

- Nominal: 2.500€/título.
- Prima de emisión bajo la par: 50€/título.
- Prima de amortización sobre la par: 25€/título.
- Pago semestral del cupón.

- Tipo de interés efectivo de la emisión: 2,20% semestral.

Se pide (para un título):

a) Ecuación de la que se deduce el tanto efectivo suscriptor sabiendo que, en el momento de la emisión, tuvo unos gastos del 0,5% sobre el valor efectivo.

b) Si hoy, tras el cobro del cupón correspondiente, vende las obligaciones por 2.473,82€ cada una, sin ningún tipo de gastos, ecuación de la que se deduce el tanto efectivo obligacionista.

10. Un inversor dispone de una cartera formada por 200 Bonos de deuda privada de nominal 1.000€/título, emitidos con un vencimiento de 5 años, con pago anual de cupones al 4%, que compró en la fecha de emisión, al 98,5%, hace 3 años y 130 días.

Se pide:

a) Plantear la ecuación que permite determinar la rentabilidad anual obtenida por el inversor por la venta de los Bonos, si hoy los vende a un precio de 970,05€ por título.

b) Plantear la ecuación que permite calcular el coste anual al que le resulta al emisor el empréstito, sabiendo que puso en circulación 15.000 títulos, que se amortizan por su nominal, y tuvo unos gastos totales de emisión de 12.000€.

11. Hace 2 años una empresa emitió un empréstito con las siguientes características:

- Nominal: 1.000€/título.
- Número de títulos emitidos: 40.000.
- Gastos de emisión del empréstito: 0,32% del nominal.
- Emisión bajo la par con una prima de emisión del 3%.
- Pago trimestral de cupones.
- Tipo de interés nominal de la emisión: 5,40%.
- Vencimiento: a los 10 años de la emisión.
- Amortización sobre la par con una prima de amortización del 1%.
- Los suscriptores de títulos de este empréstito pagarán al intermediario financiero, en el momento de la emisión, una comisión del 0,2% del efectivo de los títulos adquiridos.
- Al vencimiento, no existen gastos de amortización del empréstito ni para el emisor ni para los obligacionistas.

Se pide:

a) Importe nominal y efectivo del empréstito recibido por la empresa emisora.

b) Ecuación que permite obtener el interés efectivo emisor.

c) Ecuación de la que se obtiene el interés efectivo suscriptor.

d) Ecuación para determinar el tanto efectivo de un obligacionista que adquirió títulos en el momento de la emisión y los vende hoy, tras el cobro del cupón correspondiente y sin ningún tipo de gasto, por 978,35€.

e) Ecuación para determinar el tanto efectivo de un obligacionista que adquiere hoy títulos, al precio indicado, los mantiene hasta su vencimiento y tiene unos gastos de compra del 0,45% sobre su valor nominal.

SOLUCIÓN EJERCICIOS PROPUESTOS

BLOQUE TEMÁTICO 1. TEMA 1

1. a) Representan 65.000€ hoy

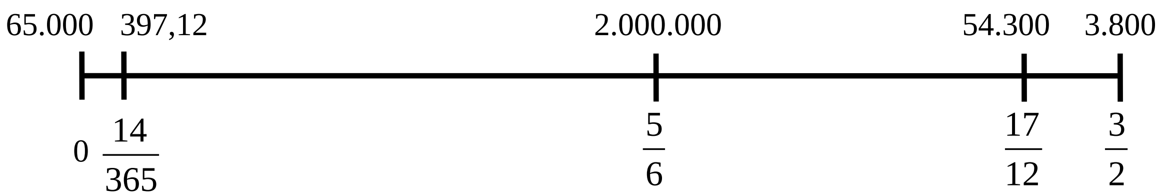
   b) Representan 54.300€ al cabo de 17 meses

   c) Representan 397,12€ dentro de 14 días

   d) Representan 3.800€ al cabo de 3 semestres

   e) Representan 2.000.000€ dentro de 5 bimestres

2.



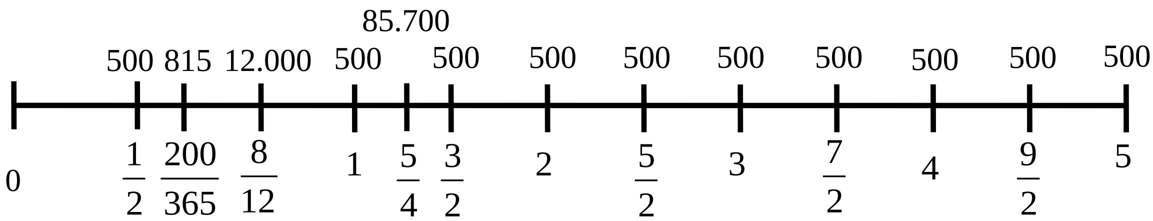
3. a) Representan 85.700$ dentro de 5 trimestres

   b) Representan 12.000$ al cabo de 8 meses

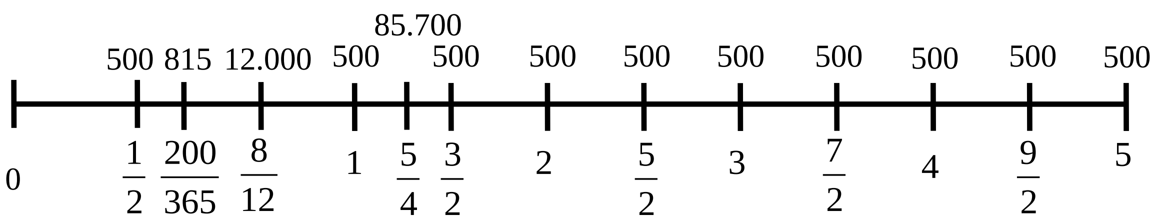
   c) Representan 815$ dentro de 200 días

   d) Representan 500$ al final de cada semestre durante 5 años

4.



5.



6.

Situación	Elemento personal		Elemento objetivo		Elemento formal
	Sujeto Activo	Sujeto Pasivo	Prestación	Contraprestación	
a)	Yo	Bankia	$(4.000, 0)$	$\left(4.120, \frac{1}{2}\right)$	Condiciones firmadas en el plazo fijo
b)	NO es operación financiera				
c)	Manuel	Persona física o jurídica que compra acciones	$(33.100, 0)$	$(20.200, 3)$	Condiciones pactadas en la compra venta
d)	NO es operación financiera				
e)	NO es operación financiera				
f)	Padre	Banc Sabadell	5.000€ cada año hasta la jubilación	Capital acumulado en el Plan de Pensiones en el momento de la jubilación	Condiciones firmadas en el Plan de Pensiones
g)	Banco Santander	Cementos S.A.	$(18.935, 0)$	$\left(20.000, \frac{2}{12}\right)$	Condiciones firmadas para el descuento comercial
h)	Bankinter	María	$(899, 0)$	121,85€ durante 10 meses	Condiciones firmadas del Préstamo
i)	Entidad financiera que tiene concertada la VISA	Yo	420€ el día 3 de enero	420€ el día 25 de enero	Condiciones firmadas en el contrato VISA
j)	Manuel	Caixabank	$(200, 0)$ más sueldo mensual de 1.400€ más otros cobros	Reintegros para comer, vestir, pagar facturas, etc.	Condiciones firmadas de la Cuenta Corriente

7. Operaciones elementales: a), c), g), i)

   Operaciones parcialmente complejas: f), h)

   Operaciones totalmente complejas: j)

8.

Operación financiera	Precio Total	Interés efectivo	Interés nominal
a)	120€	3%	6%
c)	-12.900€	-38,97%	-12,99%
i)	0€	0%	0%

9. a)

Criterio	Plazo de la operación $\boldsymbol{t}$
$\frac{\text{Act}}{365}$	$\frac{17+30+31+30+31+31+30+18}{365}=\frac{218}{365}=0{,}59726$
$\frac{\text{Act}}{360}$	$\frac{17+30+31+30+31+31+30+18}{360}=\frac{218}{360}=0{,}60\overset{\frown}{5}$
$\frac{30}{360}$	$\frac{16+30+30+30+30+30+30+18}{360}=\frac{214}{360}=0{,}59\overset{\frown}{4}$

b)

Criterio	Precio Total	Interés efectivo	Interés nominal
$\frac{\text{Act}}{365}$	450€	3,75%	6,27867%
$\frac{\text{Act}}{360}$	450€	3,75%	6,19266%
$\frac{30}{360}$	450€	3,75%	6,30841%

10. a)

Criterio	Plazo de la operación $\boldsymbol{t}$
$\frac{\text{Act}}{365}$	$1+\frac{23+30+19}{365}=1+\frac{72}{365}=1{,}19726$
$\frac{\text{Act}}{360}$	$1+\frac{23+30+19}{360}=1+\frac{72}{360}=1{,}20$
$\frac{30}{360}$	$1+\frac{22+30+19}{360}=1+\frac{71}{360}=1{,}197\overset{\frown}{2}$

b)

Criterio	Precio Total	Interés efectivo	Interés nominal
$\frac{\text{Act}}{365}$	150€	17,647%	14,7395%
$\frac{\text{Act}}{360}$	150€	17,647%	14,7059%
$\frac{30}{360}$	150€	17,647%	14,7400%

11. 65,34€

12. Capital acumulado: 12.540,60€
    Intereses brutos: 15,92€

13. 1,85%

14. Interés nominal vencimiento 3 meses: 3,104%
    Interés nominal vencimiento 9 meses: 3,231%

15. 3.940€

16. 55,47€

17. a) 33.320,70€
    b) 33.423,35€

18. a) 7,50%
    b) 6,115%

19. a) 8,163%
    b) 10,678%

20. a) 10.262,50€
    b) 19.320€
    c) No tiene dinero suficiente. Interés simple anual mínimo: 3,397%

21. a) 7.065,85€
    b) 5,25 años

22. 1.735,38€

23. 8.789,04€

24. 1.037,85€

25. 7.867,65€

26. 2,829%

27. 945,33€

28. 4,59%

29. 6,923%

30. Interés efectivo bimestral: 0,9902%
Interés efectivo semestral: 3%

31. a) 1,75%
b) 7%
c) 7,186%

32. 946,88€

33. a) 9.131,29€
b) 1,4588%

34. Interés efectivo mensual: 0,375%
Interés efectivo anual: 4,594%
TAE: 4,594%

35. Interés efectivo anual: 3,493%
TAE: 3,493%

36. Interés efectivo anual: 6,963%
TAE: 15,965%

37. Interés efectivo anual: 5,252%
TAE: 3,735%

38. Interés efectivo trimestral: 1,6875%
Interés efectivo anual: 6,923%
TAE: 6,923%

39. Interés efectivo anual: 3,155%
TAE: 2,955%

40. a) 15.667,14€
b) Interés efectivo anual 1,054% y TAE 1,054%
c) Interés efectivo anual 1,054% y TAE 0,893%

41. a) 8.343,82€
b) Interés efectivo anual depósito A: 6,152%
Interés efectivo anual depósito B: 7,442%
Interés efectivo anual depósito C: 8,215%

42. Cantidad que retira hijo mayor: 41.090,83€
Cantidad que retira hijo menor: 46.948,33€

43. a) 4,074%
b) 12,79 años
c) 4,675%

44. a) Cuantía acumulada alternativa 1: 20.539,60€
Cuantía acumulada alternativa 2: 20.500€
Cuantía acumulada alternativa 3: 20.560€
b) TAE alternativa 1: 4,074%
TAE alternativa 2: 3,773%
TAE alternativa 3: 4,229%

45. 10.725,85€

46. Precio hoy finca Opción A: 95.472,40€
Precio hoy finca Opción B: 100.754,31€
Para el comprador es más conveniente la opción A

47. a) 11.531,69€
b) $3.000 \cdot (1+I_1)^3 + 2.000 \cdot (1+I_1)^{2,25} + 5.500 \cdot (1+I_1)^{0,5} = 11.531,69$
c) 11.400,90€
d) $3.000 \cdot (1+I_1)^3 + 2.000 \cdot (1+I_1)^{2,25} + 5.500 \cdot (1+I_1)^{0,5} = 11.400,90$

48. a) 10.833,45€

b) $6.000 \cdot (1+I_1)^4 + 5.200 \cdot (1+I_1)^{2,5} - 1.500 \cdot (1+I_1)^{0,75} = 10.833,45$

49. a) 7.853,92€

b) 28.537,50€

c) 39.018,21€

BLOQUE TEMÁTICO 1. TEMA 2

1. a) Valor actual: 19.304,34€
   Valor final: 31.444,73€
   b) Valor actual: 2.117,48€
   Valor final: 4.083,48€
   c) Valor actual: 3.545,61€
   Valor final: 11.633,26€
   d) Valor actual: 296,34€
   Valor final: 390,56€
   e) Valor actual: 3.141,99€
   Valor final: No tiene

2. 24.486,74€

3. 175,95€

4. 152.668,48€

5. $2.000 = 200 + 200 \cdot \frac{1-\left(1+I_{12}\right)^{-10}}{I_{12}}$ o $2.000 = 200 \cdot \frac{1-\left(1+I_{12}\right)^{-11}}{I_{12}} \cdot \left(1+I_{12}\right)$

6. a) 131.177,22€
   b) 144.829,25€

7. a) Valor actual: 4.114,37€
   Valor final: 11.047,35€
   b) Valor actual: 60.326,30€
   Valor final: 106.433,85€
   c)
   c.1) Valor actual: 54.180,09€
   Valor final: 101.855,99€
   c.2) Valor actual: 37.294,80€
   Valor final: 135.101,27€
   d) Valor actual: 318.772,33€
   Valor final: No tiene

8. a) Renta temporal de 15 términos trimestrales, diferida 5 trimestres, vencida, con primer término 800 y creciente un 5% trimestral acumulativo

   b) 14.589,99€

9. a) 55.596,93€

   b) 51.950,29€

10. a) 30.595,39€

    b) 32.431,12€

    c) 25.688,48€

11. 5.901.398,73€

12. a) Valor actual: 13.727,45€

    Valor final: 16.670,28€

    b) Valor actual: 34.088,85€

    Valor final: 45.879,10€

    c) Valor actual: 34.698,99€

    Valor final: 70.918,91€

    d) Valor actual: 29.678,18€.

    Valor final: No tiene

13. a) 2.950€

    b) 50.455,14€

14. 17.008,70€

15. Valor actual Proyecto 1: 142.037,64€

    Valor actual Proyecto 2: 171.045,78€

    El proyecto más económico es el Proyecto 1

16. Saldo cuenta: 82.964,41€

17. a) 2.744,38€

b) $130.000 = 5.500 \cdot \dfrac{1-\left(1+I_4\right)^{-24}}{I_4} \cdot \left(1+I_4\right)^{\frac{1}{3}}$

c)

$$130.000 = \left[\left(2.500 + 50 \cdot h + \frac{h}{0,0005}\right) \cdot \frac{1-\left(1+0,0005\right)^{-50}}{0,0005} - \frac{50 \cdot h}{0,0005}\right] \cdot \left(1+0,0005\right)^{-5}$$

18. a) Primera imposición: 356,69€

Última imposición: 858,59€

b)

$$35.000 = 8.000 \cdot \left(1+0,004508\right)^{10} + 3.000 \cdot \frac{1-q^8 \cdot \left(1+0,004508\right)^{-8}}{1+0,004508-q} \cdot \left(1+0,004508\right)^{9}$$

BLOQUE TEMÁTICO 2. TEMA 1

1. a) 21.136,34€

   b) Cuota de interés: 3.136,34€

   Cuota de amortización de capital: 18.000€

   c) Tanto efectivo anual del préstamo: 5,5%

   Tanto efectivo anual prestatario: 6,3335%

   TAE: 6,3335%

   d) Capital pendiente: 18.000€

   Total amortizado: 0€

   e) 19.160,21€

   f)

   f.1) 19.160,21€

   f.2) 18.912,98€

2. a) Importe a pagar a los 4 años: 80.611,30€

   b) Cuota de interés: 30.611,30€

   Cuota de amortización: 50.000€

   c) 63.486,73€

   d) Tanto efectivo anual: 12,6825%

   TAE: 13,2531%

   e) 61.565,28€

   f) $50.000 = 1.000 + 15.000 \cdot (1 + I_1)^{-2} + 61.565,28 \cdot (1 + I_1)^{-4}$

   g) La TAE no varía al considerar la entrega de los 15.000€

3. a) 1.350€

   b) 91.350€

   c) 90.000€

   d) 90.447,77€

   e) 1.530€

4. a) 180€

   b) Capital pendiente de amortizar: 48.000€

   Reserva matemática: 48.000€

   c) Capital pendiente de amortizar: 48.000€

   Reserva matemática: 48.089,92€

d) 161,25€

e) $48.000 = 480 + 350 + 180 \cdot a_{\overline{120}|I_{12}} + 48.000 \cdot (1 + I_{12})^{-120}$ y $TAE = (1 + I_{12})^{12} - 1$

f) $$48.000 = 480 + 350 + 180 \cdot a_{\overline{72}|I_{12}} + 5.012{,}5 \cdot (1 + I_{12})^{-72} +$$
$$+161{,}25 \cdot a_{\overline{48}|I_{12}} \cdot (1 + I_{12})^{-72} + 43.000 \cdot (1 + I_{12})^{-120}$$

5. a) 994,69€

b)

Periodo	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de capital	Total amortizado	Capital pendiente
					170.000,00
1	994,69	510,00	484,69	484,69	169.515,31
2	994,69	508,55	486,14	970,83	169.029,17
3	994,69	507,09	487,60	1.458,44	168.541,56
…					
238	994,69	8,90	985,79	168.019,54	1.980,46
239	994,69	5,94	988,75	169.008,29	991,71
240	994,69	2,98	991,71	170.000,00	0,00

c) Capital pendiente: 164.086,87€

Total amortizado: 5.913,13€

d) Capital pendiente: 164.086,87€

Reserva matemática: 164.332,82€

e) Cuota de amortización: 505,49€

Cuota de interés: 489,20€

f)

f.1) 160.809,14€

f.2) 169.183,87€

g) $170.000 = 5.100 + 994{,}69 \cdot a_{\overline{240}|I_{12}}$ y $TAE = (1 + I_{12})^{12} - 1$

6. a) 4.197,82€

b) Cuota de amortización: 2.906,76€

Cuota de interés: 1.291,06€

c) $150.000 = 2.250 + 4.197{,}82 \cdot a_{\overline{48}|I_4}$ y $TAE = (1 + I_4)^{4} - 1$

d)

d.1) 3.780,04€

d.2)

$$150.000 = 2.250 + 4.197{,}82 \cdot a_{\overline{12}|I_4} + 12.060 \cdot (1+I_4)^{-12} + 3.780{,}04 \cdot a_{\overline{36}|I_4} \cdot (1+I_4)^{-12}$$

7. a) 801,66€

   b) Cuota amortización primera mensualidad: 326,66€

   Cuota interés primera mensualidad: 475€

   Cuota amortización última mensualidad: 797,67€

   Cuota interés última mensualidad: 3,99€

   c) 719,39€

8. a) 6.328,95€

   b) 216.103,43€

   c) 6.583,10€

9. a) 22.845,96€

   b) Ecuación TAE y tanto efectivo prestatario:

$$180.000 = 1.800 + 22.845{,}96 \cdot a_{\overline{13}|TAE} \cdot (1+TAE)^{-2}$$

   c) 141.868,70€

   d) 143.253,17€

10. a) Importe de las cuotas de interés: 480€

    Importe de los términos amortizativo: 1.263,05€

    b) $60.000 = 600 + 480 \cdot a_{\overline{12}|I_6} + 1.263{,}05 \cdot a_{\overline{60}|I_6} \cdot (1+I_6)^{-12}$ y $TAE = (1+I_6)^6 - 1$

    c) 20.627,77€

    d) 20.627,77€

    e)

    e.1) 39.529,41€

    e.2) $60.000 = 600 + 480 \cdot a_{\overline{12}|I_6} + 1.263{,}05 \cdot a_{\overline{24}|I_6} \cdot (1+I_6)^{-12} +$

$$+39.627{,}84 \cdot (1+I_6)^{-36{,}5}$$

APUNTES DE MATEMÁTICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS. L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

BLOQUE TEMÁTICO 2. TEMA 2

1. 1,693%

2. 1.934,10€

3. a) 9.845,70€
   b) 98,457%

4. a) 3,848%
   b) 3,304%

5. a) 100.000
   b) 1,5097%
   c) Precio pagaré: 2.983,50€
      Interés anual (TIR): 1,577%
   d) 99,86%

6. a) 1.130,02€
   b) 3,548%
   c) 108.477,90€

7. a) 1,392%
   b) 2,055%
   c) 15,137€
   d) 87.329,51€
   e) $1.039,637 = \left(32,50 \cdot a_{\overline{7}|I_1} + 1.000 \cdot (1+I_1)^{-7}\right) \cdot (1+I_1)^{\frac{170}{365}}$

8. a) 1.016,15€
   b) Cupón corrido a 20 febrero de este año: 38,52€
      Precio ex-cupón a 20 de febrero de este año: 1.028,49€

9. a) $2.450 + 12,25 = 55 \cdot a_{\overline{10}|I_2} + 2.525 \cdot (1+I_2)^{-10}$
   b) $2.450 + 12,25 = 55 \cdot a_{\overline{4}|I_2} + 2.473,82 \cdot (1+I_2)^{-4}$

10. a) Para un título: $985 = 40 \cdot a_{\overline{3|}I_1} + 970,05 \cdot \left(1 + I_1\right)^{-\left(3+\frac{130}{365}\right)}$

b) $15.000 \cdot 985 = 12.000 + 15.000 \cdot 40 \cdot a_{\overline{5|}I_1} + 15.000 \cdot 1.000 \cdot \left(1 + I_1\right)^{-5}$

11. a) Importe nominal: 40.000.000€

Importe efectivo: 38.800.000€

b) Para un título: $970 = 3,2 + 13,50 \cdot a_{\overline{40|}I_4} + 1.010 \cdot \left(1 + I_4\right)^{-40}$

c) Para un título: $970 + 1,94 = 13,50 \cdot a_{\overline{40|}I_4} + 1.010 \cdot \left(1 + I_4\right)^{-40}$

d) Para un título: $970 + 1,94 = 13,50 \cdot a_{\overline{8|}I_4} + 978,35 \cdot \left(1 + I_4\right)^{-8}$

e) Para un título: $978,35 + 4,50 = 13,50 \cdot a_{\overline{32|}I_4} + 1.010 \cdot \left(1 + I_4\right)^{-32}$

FUENTES DE INFORMACIÓN

LIBROS

ALEGRE, P. [et al.]. *Ejercicios resueltos de matemática de las operaciones financieras*. 2ª. ed. Madrid: AC, 2005.

BADÍA, C. [et al.]. *Matemàtica financera. Anàlisi d'operacions de finançament.* Barcelona: Universidad de Barcelona, 2015.

GIL, L. *Matemática de las operaciones financieras*. 2ª. ed. Madrid: AC, 1993.

MARTÍN, M.; TRUJILLO, A. *Manual de mercados financieros*. Madrid: Thomson, 2004.

NAVARRO, E.; NAVE, J.M. *Fundamentos de matemáticas financieras*. Barcelona: Bosch, 2001.

RODRÍGUEZ, A. *Matemática de la financiación*. Barcelona: Ediciones S, 1994.

TERCEÑO, A. [et al.]. *Matemática financiera*. Barcelona: Pirámide, 1997.P

PÁGINAS WEB

AIAF. [en línea]. Disponible en: www.aiaf.es.

Banco de España. [en línea]. Disponible en: www.bde.es.

Bolsas y Mercados Españoles Market Data. [en línea]. Disponible en www.bmemarketdata.es/.

Comisión Nacional del Mercado de Valores. [en línea]. Disponible en: www.cnmv.es.

Tesoro Público. [en línea]. Disponible en: www.tesoro.es.

Universitat de Barcelona. Introducció a la Matemàtica Financera. Disponible en: www.ub.edu/mf/.