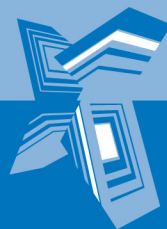


# la enseñanza de resolución de problemas de física en la universidad

DE EXPLICAR PROBLEMAS RESUELTOS  
A GUIAR SU RESOLUCIÓN

Jenaro Guisasola, Mikel Ceberio, José Manuel Almudí, José Luis Zubimendi







LA ENSEÑANZA DE RESOLUCIÓN  
DE PROBLEMAS DE FÍSICA  
EN LA UNIVERSIDAD



Jenaro Guisasola, Mikel Ceberio,  
José Manuel Almuñá y José Luis Zubimendi

# LA ENSEÑANZA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FÍSICA EN LA UNIVERSIDAD

De explicar problemas resueltos  
a guiar su resolución

OCTAEDRO - ICE

Colección Educación universitaria

Director:

José Carreras Barnés (Facultad de Medicina de la Universitat de Barcelona)

Consejo de redacción:

Vicenç Benedito Antolí (Facultad de Pedagogía), Salvador Carrasco Calvo (Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales), M<sup>a</sup> del Carmen Díaz Gasa (Facultad de Química), Coloma Lleal Galceran (Facultad de Filología) y Miquel Martínez Martín (ICE) de la Universitat de Barcelona y el equipo de redacción de Ediciones OCTAEDRO.

Primera edición: octubre de 2007

© Jenaro Guisasola, Mikel Ceberio, José Manuel Almudí  
y José Luis Zubimendi

© De esta edición:

Ediciones Octaedro, S.L.  
Bailén, 5 - 08010 Barcelona  
Tel.: 93 246 40 02 – Fax: 93 231 18 68  
e.mail: octaedro@octaedro.com

Universitat de Barcelona  
Institut de Ciències de l'Educació  
Campus Mundet - 08035 Barcelona  
Tel.: 93 403 51 75 – Fax: 93 402 10 61  
e.mail: ice@ub.edu

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del *Copyright*, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidas la reprografía y el tratamiento informático.

ISBN: 978-84-8063-908-8  
Depósito legal: B. 47.578-2007

Impresión: Hurope, s.l.

Impreso en España  
*Printed in Spain*

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	11
<b>1. EL FRACASO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: DEFICIENCIAS CONCEPTUALES Y METODOLÓGICAS</b> .....	19
Análisis secuencial de las estrategias operativas de resolución .....	20
Análisis específico del conocimiento procedimental en resolución de problemas.....	30
Opinión del profesorado acerca de las posibles causas del fracaso en resolución de problemas.....	40
<b>2. MODELO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ACTIVIDAD DE INVESTIGACIÓN ORIENTADA</b> .....	42
Qué es lo que entendemos por problema.....	42
Qué implica resolver un problema.....	43
Los modelos algorítmicos.....	44
Modelo de resolución de problemas por comparación entre expertos y novatos.....	47
Consideración del posible interés de la situación problemática planteada.....	58
De una situación problemática a un problema concreto: análisis cualitativo.....	59
Distanciamiento del razonamiento basado en evidencias: el papel de las hipótesis en la resolución de problemas.....	62
En busca del camino de la resolución: las estrategias como tentativas.....	64



Sobre la consistencia del proceso de resolución: el análisis de resultados.....	65
De la resolución de un problema al planteamiento de otras nuevas perspectivas.....	66
Algunas precisiones sobre el modelo propuesto .....	67
Resolución del problema abierto “acelerador de partículas” .....	71
<b>3. ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA HABITUAL DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS</b> .....	75
Análisis de la actividad de resolución de problemas en los libros de texto .....	77
Análisis de la resolución por profesores de un problema habitual de Física .....	97
<b>4: ENSEÑANZA ALTERNATIVA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ORGANIZACIÓN Y DESARROLLO EN EL AULA</b> .....	108
Enunciados, resoluciones y objetivos de algunos problemas .....	110
Estructura de las clases para aplicar en el contexto real del aula el modelo de resolución de problemas como investigación orientada .....	161
Opiniones de los profesores que han implementado en sus clases la metodología de resolución de problemas.....	164
<b>5. ¿QUÉ RESULTADOS OBTIENEN LOS ESTUDIANTES QUE APLICAN LAS ESTRATEGIAS ENSEÑADAS EN EL MODELO DE APRENDIZAJE COMO INVESTIGACIÓN ORIENTADA?</b> .....	170
Análisis secuencial de las estrategias operativas de una resolución .....	171
Análisis de los razonamientos y procedimientos empleados por los estudiantes experimentales en la resolución de problemas de Física.....	177
Ejemplo de entrevista .....	191
Actitudes generadas en los estudiantes con la propuesta de resolución de problemas como investigación orientada .....	196
<b>6. CONCLUSIONES</b> .....	204
<b>7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	209

# PRÓLOGO

En el campo de la investigación didáctica, el proceso de enseñanza-aprendizaje es complejo con múltiples factores que lo mediatizan y que no siempre se conoce como mejorar. Dentro de este campo, la resolución de problemas constituye una de las actividades más frecuentes en los contextos educativos científicos desde el inicio de la escolarización. Durante décadas la investigación en resolución de problemas ha constituido objetivo preferente tanto de psicólogos como de didactas y este interés ha ido en aumento ante la perspectiva de la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior.

Los nuevos métodos de enseñanza para la resolución de problemas, se basan, a grandes rasgos, en poner al alumno en situación de utilizar todos los recursos para enfrentarse a una situación para la que, de entrada, no tiene solución conocida. Con la guía del profesor, los alumnos dan los pasos necesarios para acotar el problema, acudiendo tanto a sus conocimientos como a la bibliografía y realizan una propuesta de solución.

En los diferentes modelos para la resolución de problemas (algorítmicos, comparación entre expertos y novatos, y actividad de investigación orientada), el modelo de investigación orientada plantea la creatividad, el cambio conceptual, metodológico y actitudinal como elementos fundamentales, proponiendo una estrategia de enseñanza-aprendizaje que mejore la actitud de los estudiantes hacia el propio aprendizaje. El planteamiento de problemas abiertos junto con la inclusión de aspectos de Ciencia Tecnología y Sociedad (CTS) en la en-

señanza en general, y en los enunciados de los problemas en particular, contribuye a mejorar la actitud y aumentar el interés hacia la ciencia y su aprendizaje.

El consejo de redacción de la colección Educación Universitaria decidió incluir en la misma esta monografía sobre la enseñanza de resolución de problemas de Física como investigación orientada, en el primer curso de Universidad. El contenido desarrollado por los autores es una puesta en común de su experiencia didáctica con los profesores universitarios del ámbito. Se toma como base la educación centrada en el aprendizaje, en la que el profesor no es únicamente un buen transmisor de los conocimientos, sino que es también el guía y acompañante del estudiante en el proceso. La guía en la resolución de problemas abiertos que se plantea tiene como objetivos: el desarrollo de factores de creatividad, la identificación de estrategias, el adoptar posturas críticas, la flexibilidad y apertura para aceptar otras ideas bien argumentadas, el trabajo en grupo, y la puesta en común de los resultados como método para introducir al estudiante en la comunicación científica. Todos estos factores ayudan al buen desarrollo de las competencias científicas que debe adquirir el estudiante a lo largo de sus estudios y que pide la sociedad.

Expreso el deseo que esta publicación sea una aportación constructiva para el «problema abierto» de aprender y enseñar ciencia a nivel universitario.

M<sup>a</sup> DEL CARMEN DÍAZ GASA

# INTRODUCCIÓN

El mundo en nuestros días se caracteriza por los cambios acelerados. Una serie de factores tales como la globalización, el impacto de las tecnologías de la información y la comunicación, la administración del conocimiento y la necesidad de patrocinar y gestionar la diversidad, hacen necesario un entorno educativo significativamente diferente.

La tendencia actual, asociada al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) asume que nos dirigimos hacia una sociedad del aprendizaje; esto supone el desplazamiento de una educación centrada en la enseñanza hacia una educación centrada en el aprendizaje lo que, a su vez, nos conduce a un cambio de paradigma que implica a una serie de elementos (Tuning Educational, 2003).

En primer lugar, un enfoque de la educación fundamentalmente centrado en el estudiante y su capacidad de aprender, exige de éste más protagonismo y cuotas más altas de compromiso, puesto que es él, el estudiante, quien debe desarrollar la capacidad de acceder a la información original, analizarla e interpretarla y es el propio estudiante el que tiene que afrontar las diferentes situaciones didácticas que le permitan alcanzar un aprendizaje comprensivo aplicable en nuevos contextos. Ello nos lleva a una nueva definición de objetivos de aprendizaje y al interés en el desarrollo de las competencias en los programas educativos.

Sin embargo, lo expresado anteriormente se relaciona explícitamente con el cambiante papel del profesor que, de ser la persona que estructuraba el proceso de aprendizaje, el protagonista principal en la enseñanza y articulación de conceptos clave, así como supervisor y director de los trabajos de los estudiantes cuyos conocimientos evaluaba, pasa a ser, en la visión centrada en el estudiante, un acompañante en el proceso de aprender, que ayuda al que estudia a alcanzar ciertas competencias. Si bien el papel del profesor continúa siendo crítico, se desplaza cada vez más hacia el de un consejero, orientador y motivador. Podríamos establecer una metáfora con la relación entre el director de tesis y el investigador novel.

Además del nuevo papel a desempeñar por estudiantes y profesores, este cambio de paradigma debería afectar a otros aspectos clave como el enfoque y la organización de las actividades educativas y los materiales de enseñanza, que deberían dar lugar a una gran variedad de 'situaciones didácticas' que permitan estimular el compromiso sistemático del estudiante con su aprendizaje.

Así mismo, el desplazamiento desde la incorporación de conocimientos a los resultados de aprendizaje, se deberá reflejar en la evaluación del estudiante, que de estar centrada en el conocimiento declarativo como referencia dominante, y a veces única, pasa a incluir una evaluación basada en las competencias, capacidades y procesos estrechamente relacionados con el trabajo y las actividades que conducen al progreso del estudiante, (necesidad de evaluación continua), y a su articulación con los perfiles profesionales que, en todo caso, debería atender a los diferentes tipos de contenidos del currículo.

Ahora bien, teniendo en cuenta que la resolución de problemas es una de las tareas comúnmente puesta en práctica en nuestras aulas pero que, a su vez, se trata de uno de los aspectos clave de la enseñanza de la Física donde el índice de fracaso es mayor, parece razonable cuestionarse si esta actividad, tal y como habitualmente se plantea, reúne las características adecuadas para permitir desarrollar competencias bajo el nuevo paradigma educativo. Este trabajo, por tanto, parte de reconocer

una preocupación entre el profesorado de Física de primer ciclo de universidad por los resultados de la enseñanza que imparte en resolución de problemas. A pesar del esfuerzo y del tiempo que se invierten en esta actividad, los resultados que se obtienen son poco satisfactorios.

En esta línea, pretendemos avanzar hacia el cuestionamiento de visiones, muchas veces desalentadoras o derrotistas, que suelen ser aceptadas como obvias e inevitables en el nivel universitario. Como ejemplo podríamos citar:

a) La falta de preparación de los estudiantes debida al pobre aprendizaje logrado en el nivel de secundaria. Esto crearía una dificultad añadida a la enseñanza de la Física en el primer curso universitario (Calatayud et al., 1992).

b) El fracaso generalizado de los estudiantes en Física es “natural” ya que la propia naturaleza de la misma es de alta demanda cognitiva (siempre habrá “listos” y “torpes”).

Sin embargo, este argumento comienza a ser alarmante cuando el fracaso en la universidad afecta a la gran mayoría de la elite de los alumnos de secundaria, es decir, cuando se registran altos índices de fracaso y abandono entre aquellos estudiantes de nota media de sobresaliente y notable en secundaria (los “listos”) (McDermott, 1993).

Con visiones de esta índole, aspectos potencialmente cuestionables de la Enseñanza Universitaria pueden ser aceptados como realidades naturales e inmodificables. En este sentido, nos parece necesaria una revisión crítica de las estrategias habituales utilizadas en la clase, basadas generalmente en la idea ingenua de que enseñar es transmitir conocimientos y que una buena transmisión de los mismos implica un buen aprendizaje. Esta idea, en resolución de problemas se concreta en la concepción de los mismos como ‘ejercicios de aplicación’ y en la resolución de ‘problemas tipo’ (Guisasola et al., 2002).

Frente a estas ideas simplistas, el cuerpo de conocimientos construido en torno a la Didáctica de la Física cree que esta vi-

sión del aprendizaje, excesivamente centrada en la componente conceptual y que no tiene en cuenta otros cambios como los epistemológicos (por ejemplo, las formas de razonamiento empleadas, visiones distorsionadas de la Ciencia, etc.) (Wandersee, 1992) y axiológicos (por ejemplo, el interés de los estudiantes, las actitudes de profesores y estudiantes hacia el proceso de enseñanza-aprendizaje, valores, etc.) (Solbes y Vilches, 1997), ha de ser superada ampliando los horizontes de la investigación en estrategias didácticas y nuevos modelos de orientación constructivista (Duschl, 1997; Gil, 1993; Porlán, 1993; Jiménez, 1998; Gil et al., 1999).

Así, un enfoque didáctico que atienda a la perspectiva constructivista debe plantearse actuar sobre las concepciones alternativas de los estudiantes, proporcionar el cambio epistemológico sin el cual no se puede producir el necesario cambio conceptual, y proponer una estrategia de enseñanza-aprendizaje que mejore la actitud de los estudiantes hacia la Ciencia y, sobre todo, hacia el propio aprendizaje (Gil et al., 2002).

Por ello, el problema que pretendemos abordar consiste, por una parte, en detectar las principales características de resolución de problemas de Física en Cursos Introdutorios de Física en la Universidad y, por otra, diseñar una alternativa de resolución de problemas dentro del marco constructivista, basada en el modelo de 'Aprendizaje como Investigación Orientada' (Furió C., 2001; Gil y Martínez-Torregrosa, 1983, 1984 y 1987), que favorezca el aprendizaje de los contenidos declarativos y procedimentales de la Física.

Con la aplicación del citado modelo se pretende paliar, en parte, el fracaso generalizado en la resolución de problemas de Física a nivel de cursos introductorios universitarios, y coadyuvar a conseguir un aprendizaje significativo de los conocimientos científicos. Para ello, se pretende alcanzar un cambio metodológico en los estudiantes (y en el profesorado) que suponga el abandono de prácticas operativistas, habituales en la resolución de problemas (Gil et al., 1988), por otras formas procedimentales de resolución que tiendan a familiarizar al estudiante con aspectos esenciales de un trabajo con orientación científica, tales

como concretar un problema de enunciado abierto, favorecer el pensamiento divergente por medio de la emisión de hipótesis o de la elaboración de estrategias de resolución, así como del análisis de los resultados obtenidos (Guisasola et al., 2003).

Simultáneamente, con la aplicación reiterada de este modelo de resolución se espera conseguir un cambio actitudinal positivo de los alumnos hacia la resolución de problemas de Física, que aleje a los estudiantes de actitudes pasivas y de rechazo y los convierta en agentes activos de su aprendizaje.

La validez del modelo de resolución de problemas propuesto, ya ha sido contrastada en el área de la Física a nivel de enseñanza Secundaria: Mecánica (Martínez-Torregrosa, 1987), Física en los liceos franceses (Dumas-Carré, 1987; Goffard, 1990), Electromagnetismo (Ramírez, 1990), Física (Varela, 1994), y también a nivel de primer curso de universidad, tanto en el ámbito de la mecánica como del electromagnetismo (Ceberio, 2004).

De acuerdo con la problemática descrita, comenzaremos en el capítulo 1 haciendo un análisis de las resoluciones de problemas realizadas por estudiantes y trataremos de relacionar el bajo rendimiento detectado con deficiencias de tipo conceptual y, también, metodológico. Es decir, nos planteamos: ¿cuáles son las estrategias utilizadas por los estudiantes de cursos introductorios de Física en la universidad cuando se enfrentan a situaciones problemáticas y, cuál es su relación con los hábitos procedimentales de resolución? (Guisasola et al., 2003). Esta situación de partida en la que los estudiantes fracasan ante problemas que, de acuerdo con la perspectiva de los profesores, deberían ser capaces de resolver con éxito nos conducirá a un replanteamiento global de la actividad de resolución de problemas.

Así, en el capítulo 2 nos cuestionamos qué es lo que entendemos por problema, es decir, ¿qué características habrán de reunir los problemas propuestos en el ámbito escolar para que puedan ser abordados como verdaderos problemas?, ¿qué implica resolver un problema?; por tanto, ¿qué características debe te-



ner una metodología de resolución de problemas de Física para que sea coherente con su naturaleza de tarea de investigación? Será la propia investigación en resolución de problemas que, desde hace décadas, se ha configurado como una de las principales líneas de investigación didáctica (Gil et al., 1988; Garrett, 1987; Mohapatra, 1987; Perales, 1993; Maloney, 1994; Cabral da Costa y Moreira, 1996-1997; Fávero y Soares Gomes de Sousa, 2001; Hsu et al., 2004; Boilevin, 2005) la que nos aporte las respuestas.

Una vez definidas las características de la forma de trabajar problemas en el contexto de las Ciencias, en el capítulo 3 utilizaremos estos parámetros como marco de referencia para efectuar un análisis crítico de la enseñanza de resolución de problemas de Física en la Universidad, la cual, fundamentalmente, está basada en la transmisión verbal de conocimientos ya elaborados. Este análisis comprenderá la presentación didáctica de esta actividad en los libros de texto y las estrategias de los profesores para su aplicación en el aula. Es decir, nos preguntamos: ¿hasta qué punto los problemas de Física se presentan habitualmente de modo coherente con su naturaleza de proceso de investigación, donde sea posible poner en práctica aspectos esenciales de la metodología científica?

Si la presentación habitual de los problemas de Física a nivel universitario genera hábitos basados en el operativismo y en la repetición no significativa de estrategias tipo, en el capítulo 4 trataremos de encontrar propuestas alternativas de enseñanza que puedan paliar, en la medida de lo posible, el escaso aprendizaje significativo que logran los estudiantes en la enseñanza habitual cuando resuelven problemas. En este sentido, se presenta una propuesta didáctica que considere las actividades de introducción de conceptos, la resolución de problemas y las prácticas de laboratorio, muchas veces inconexas, como variantes de un mismo proceso de enseñanza-aprendizaje que, en forma de tratamiento de situaciones problemáticas abiertas, persigue el triple cambio conceptual, metodológico y actitudinal. Incidiremos, especialmente, en la importancia del conocimiento procedimental de cara a la resolución de las situaciones problemáticas.

Posteriormente, en el capítulo 5, habrá que contrastar si la aplicación de la metodología de Resolución de Problemas como Investigación Orientada, puede favorecer la superación de las deficiencias detectadas, es decir: ¿se conseguirá, con la metodología propuesta, una mejora sustancial del rendimiento de los estudiantes universitarios en la resolución de problemas de Física?, ¿se fomentará una actitud que reduzca el operativismo y la pasividad ante la resolución?, ¿se aproximarán más los procedimientos usados por los estudiantes en la resolución, a los característicos de la metodología científica?

A lo largo de este trabajo, se podrán encontrar múltiples ejemplos y resultados de diferentes análisis que podrían permitir comprender el alcance de los aspectos anteriormente reseñados. Resaltaremos, así mismo, la estrecha relación entre el conocimiento procedimental asociado a la resolución de problemas como investigación orientada y las competencias que, desde la perspectiva de la convergencia europea, podrían desarrollarse por medio de la tarea de resolución de problemas, teniendo muy presente, además, la estructura del grupo y su funcionamiento e interacciones, es decir, su aplicabilidad en un contexto real de aula.

Para terminar esta presentación, debemos añadir que la propuesta de resolución de problemas que estamos realizando aparece indisolublemente ligada a todos aquellos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje que la investigación didáctica viene a destacar. Ha sido, por tanto, necesario recurrir a investigaciones precedentes, en esta misma línea, que han prestado atención a aspectos tales como la concepción del currículum y la manera de estructurar las actividades en el aula (Furió et al., 1987; Millar, 1996; Duschl, 1998; Furió, 2001), la introducción de conceptos (Posner et al., 1982; Hashew, 1986; Carrascosa, 1987; Guisasola, 1994; Almudí, 2002; Zubimendi, 2004), la propia resolución de problemas (Martínez-Torregrosa, 1987; Dumas-Carré, 1987; Goffard, 1990; Reyes, 1991; Ramírez, 1990; Varela, 1994; Ceberio, 2004), y la evaluación entendida como instrumento de aprendizaje (Alonso, 1994).



# 1. EL FRACASO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: DEFICIENCIAS CONCEPTUALES Y METODOLÓGICAS

Decíamos en la introducción que, siendo habitualmente importante la dedicación de tiempo y esfuerzo para la actividad de resolución de problemas en primer ciclo de universidad, los resultados que se obtienen son poco satisfactorios.

Por tanto, con objeto de conocer el grado de eficacia de los estudiantes en resolución de problemas, deberemos averiguar qué características presentan las resoluciones de los problemas académicos que en los cursos introductorios de Física a nivel universitario deben abordar.

Para ello, será necesario valorar, por un lado, la efectividad de los estudiantes que han sido formados bajo parámetros de enseñanza habitual frente a la resolución de problemas y, por otro, indagar en los procedimientos de resolución utilizados por éstos.

El análisis de las resoluciones de los estudiantes, sin embargo, ha de realizarse en base a métodos que permitan llegar a conclusiones generalizables y que no aporten, simplemente, apreciaciones subjetivas que puedan tener su origen en las ideas previas del grupo de profesores que realiza dicho análisis. Por ello, hemos tomado como referencias métodos contrastados por la investigación en Enseñanza de Resolución de Problemas (Maloney, 1994). Los dos métodos elegidos y que más adelante describimos, se basan en análisis de las formas de razonamiento que utilizan los estudiantes cuando, en la resolución de problemas, toman decisiones, llegan a conclusiones y realizan justificaciones.

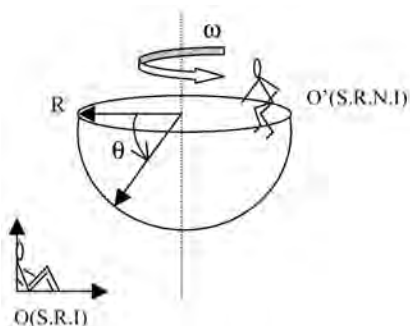
El primer método implica un análisis secuencial (paso a paso) que nos permita percibir una visión global del modo de resolución habitual de nuestros estudiantes. El segundo, un enfoque centrado en los procedimientos concretos que los estudiantes activan en la resolución de problemas de Física. Todo ello nos dará una idea del uso significativo o, por contra, puramente mecanicista que los alumnos hacen de los conceptos y procedimientos de la Física en resolución de problemas.

## Análisis secuencial de las estrategias operativas de una resolución

Para la realización del estudio secuencial se han elaborado cuatro situaciones problemáticas, dos de mecánica y dos de electromagnetismo, con diverso grado de dificultad interpretativa, para que sean resueltas en situación de examen, por estudiantes de primer curso de Ingeniería Técnica Industrial (EUITI). Por cuestiones obvias de espacio presentamos, a modo de ejemplo, únicamente el problema del cuenco (cuadro 1.1) que se corresponde con un problema estándar de aplicación de la segunda ley de Newton junto con conceptos de cinemática circular. Desde el punto de vista matemático no conlleva una dificultad especial y desde el punto de vista estratégico presenta una resolución sencilla. Este problema se abordó transcurrida la mitad del curso y fue incluido en un examen parcial. Este contexto garantiza tanto el carácter individual de los resultados como el interés de los estudiantes por la correcta realización de las pruebas.

Este método secuencial de análisis, se basa en la comparación de las resoluciones de los estudiantes con la correcta resolución de cada problema planteado (cuadro 1.1). Con objeto de orientar esta comparación, se ha realizado un protocolo de referencia en el que se recogen los criterios que se han considerado para que ciertos aspectos clave de la resolución puedan ser valorados (cuadro 1.2).

**PROBLEMA CUENCO.** *En el interior de una semiesfera hueca de radio  $R$ , que gira con velocidad  $\omega$  constante, se encuentra una partícula como indica la figura. Si el coeficiente de rozamiento estático entre las dos es  $\mu$  y el ángulo  $\theta$  es también conocido, determinar la  $\omega_{\max}$  a la que puede girar el cuenco para que la partícula no se mueva respecto de la superficie semiesférica.*

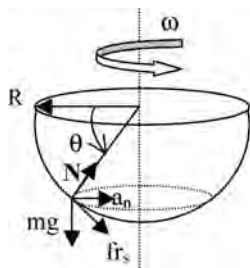


### ¿Cuál es el estado de movimiento que nos plantea el problema?

Un observador no inercial (S.R.N.I) como el indicado en la figura, girando con el cuenco, vería la partícula en reposo, mientras que un observador inercial (S.R.I) no-acelerado, la vería girando con la misma  $\omega$  que el cuenco. El problema, entonces, nos plantea el equilibrio de una partícula puntual respecto al cuenco semiesférico hueco que gira con velocidad constante.

### ¿Qué fuerzas actúan sobre la partícula?

El diagrama de cuerpo libre será:



### ¿Cómo influyen estas interacciones en la $\omega$ de equilibrio?

Mediante el análisis de las fuerzas se confirma la idea intuitiva de que si el sistema gira “muy rápidamente”, la partícula tiende a subir por la pared del cuenco y la  $fr_s$  opuesta a dicha tendencia la empuja hacia abajo; si la velocidad angular es “muy baja”, sin embargo, la tendencia es a caer y la  $fr_s$  empujará hacia arriba. Debemos considerar, entonces, que hay dos valores límite de la velocidad angular,  $\omega_{max}$  y  $\omega_{min}$ , entre los cuales tendrá que estar acotada dicha velocidad para que se dé el equilibrio relativo al cuenco, es decir:

$$\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}$$

Centrándonos en uno de ellos,  $\omega_{max}$  pedido en el enunciado, las fuerzas reales que actúan sobre la partícula son:  $P$ ,  $N$ , y  $fr_s$  con la dirección y sentidos indicados en la figura anterior. Estas fuerzas son las que deben dar lugar a una aceleración normal,  $a_n$ , que el observador inercial aprecia para la partícula.

Si el problema se analiza desde un punto de vista de un S.R.N.I, este observador, que no aprecia la  $a_n$  relacionada con  $\omega$ , deberá considerar una fuerza de inercia (fuerza centrífuga) que no es real en el sentido de que no se debe a ninguna interacción con el entorno.

$$\text{S.R.I.: } \sum F = ma \quad ; \quad x: N \cos \theta + fr_s \sin \theta = m\omega^2 R \cos \theta \quad (1)$$

$$y: N \sin \theta - fr_s \cos \theta - mg = 0 \quad (2)$$

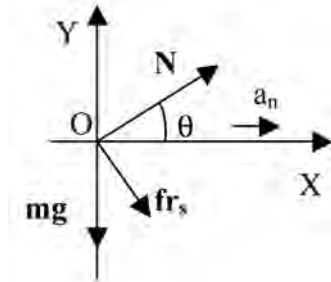
En el límite, cuando está a punto de deslizar, para  $\omega = \omega_{\max}$ , se cumple que  $fr_s = \mu_s N$  (3)

De (1), (2) y (3) se obtiene:

$$N = \frac{mg}{\sin \theta - \mu_s \cos \theta} \quad (4)$$

De (4) y (1) queda:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g(1 + \mu_s \operatorname{tg} \theta)}{R(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)}}$$



Análogamente, para la velocidad mínima, cambiando el sentido de  $fr_s$  se obtiene:

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g(1 - \mu_s \operatorname{tg} \theta)}{R(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)}}$$

Cuadro 1.1. Problema propuesto a estudiantes de 1° de EUITI.

### 1.- Sistema de Referencia elegido.

Criterio: Se computan en esta etapa cuántos alumnos optan por un Sistema de Referencia Inercial y cuántos por un Sistema de Referencia No-Inercial. En ambos casos, además, se recoge el número de estudiantes que señalan de forma explícita su elección.

### 2.- Indican correctamente todas las interacciones sobre la partícula.

Criterios: a) Para aquellos alumnos que indiquen el Sistema de Referencia elegido, se valorará afirmativamente cuando señalen correctamente todas las interacciones en consonancia con dicho Sistema de Referencia. b) Para los alumnos que no indiquen el Sistema de Referencia a utilizar, se valorará afirmativamente cuando señalen correctamente todas las interacciones en consonancia con un observador inercial o no inercial que se supone implícitamente elegido.

### 3.- Justifican de forma razonada las interacciones sobre la partícula.

Criterio: Se valorará afirmativamente cuando razonen el efecto que sobre la partícula tienen las fuerzas centrípeta o, en su caso, centrífuga, normal, peso y

rozamiento, así como, en base al carácter límite de la velocidad pedida, el módulo y sentido de la fuerza de rozamiento.

**4.- Utilizan correctamente las leyes o principios físicos elegidos para la resolución.**

Criterio: Se valorará afirmativamente cuando utilicen correctamente la segunda ley de Newton.

**5.- Abandonan sin concluir.**

Criterio: Se considerará que el problema se abandona sin concluir cuando no se desarrolla la estrategia hasta plantear las ecuaciones correspondientes. Se entenderá que el problema está concluido, sin embargo, cuando se aprecie que la razón para no haber obtenido una expresión matemática para la variable pedida sea, precisamente, alguna dificultad de tipo matemático.

**6.- El resultado es correcto.**

Criterio: Se valorará afirmativamente cuando la expresión matemática de la magnitud pedida sea la correcta.

*Cuadro 1.2. Estadillo para la valoración de las etapas consideradas en el análisis secuencial del proceso seguido por los estudiantes en la resolución del problema del cuenco.*

Las distintas estrategias se representan mediante mapas secuenciales obtenidos del análisis de las principales etapas de estas resoluciones, y se presentan en las figuras 1.1 y 1.2. Se trata de representaciones comunes a grupos de resolventes por lo que no recogen las diferencias puramente idiosincrásicas, siendo así mayor la utilidad para realizar un diagnóstico de las dificultades de aprendizaje que si fueran esquemas individuales.

La detección de errores conceptuales es importante pues el conocimiento declarativo se considera condición necesaria para resolver problemas eficazmente. Sin embargo, el conocimiento declarativo deberá estar articulado con el conocimiento procedimental a través de unas formas de razonamiento coherentes con la epistemología científica. Por ello, es nuestro propósito identificar, también, deficiencias metodológicas asociadas a las resoluciones.



El análisis de los esquemas secuenciales, muestra que un elevado número de estudiantes aplican de manera incorrecta conceptos y principios fundamentales durante la resolución del problema planteado. Pasamos a señalar las principales deficiencias conceptuales detectadas:

***Se indican de forma incorrecta las interacciones entre las distintas partes del sistema.***

*· Poco más de una cuarta parte del alumnado (26%) no indica correctamente, de acuerdo con el sistema de referencia elegido, todas las fuerzas que intervienen. De ellos, el 82% señala la fuerza de rozamiento en sentido contrario al que corresponde.*

***Se aplican de forma incorrecta las leyes y principios fundamentales de la Física implicadas en la resolución del problema (Segunda ley de Newton).***

*· De los 48 estudiantes que en la resolución del problema del cuenco han indicado correctamente todas las interacciones que intervienen, 39 (81%) no aplican correctamente la segunda ley de Newton a las condiciones del problema. El 26% (10 de 39) señala en el diagrama de fuerzas de la partícula la aceleración normal dirigida hacia el centro del cuenco, en vez de hacia el centro de la circunferencia descrita por la partícula y escriben, por tanto, las ecuaciones en consonancia con esa apreciación. Otros, 28 de los 39, (72%), a pesar de señalar correctamente el vector aceleración normal en el esquema de fuerzas, introducen en la expresión matemática de dicha aceleración el valor del radio del cascarón en lugar del radio de la circunferencia descrita por la partícula. Estos errores, ponen de manifiesto la limitada comprensión que los estudiantes logran obtener de un concepto tan básico como el de la aceleración normal, a pesar de que reiteradamente se viene utilizando en gran número de problemas de cinemática y de dinámica.*

Por otro lado, podemos apreciar que el número de alumnos que es capaz de desarrollar una estrategia globalmente correcta de cara a la resolución de la situación problemática planteada es muy reducido: 14%. El hecho de que en el análisis secuencial de las resoluciones de otros problemas se hayan detectado resulta-

dos análogos, nos permite contrastar en base a un procedimiento más estructurado lo que nuestra experiencia como profesores de asignaturas de ciencias nos indica, esto es, que el grado de eficacia como resolventes de los estudiantes es bajo. Confirmamos, así mismo, que los estudiantes no alcanzan a comprender de forma significativa los conceptos, leyes y principios fundamentales que se imparten en las clases de teoría y se pretenden reforzar con la realización de problemas tipo.

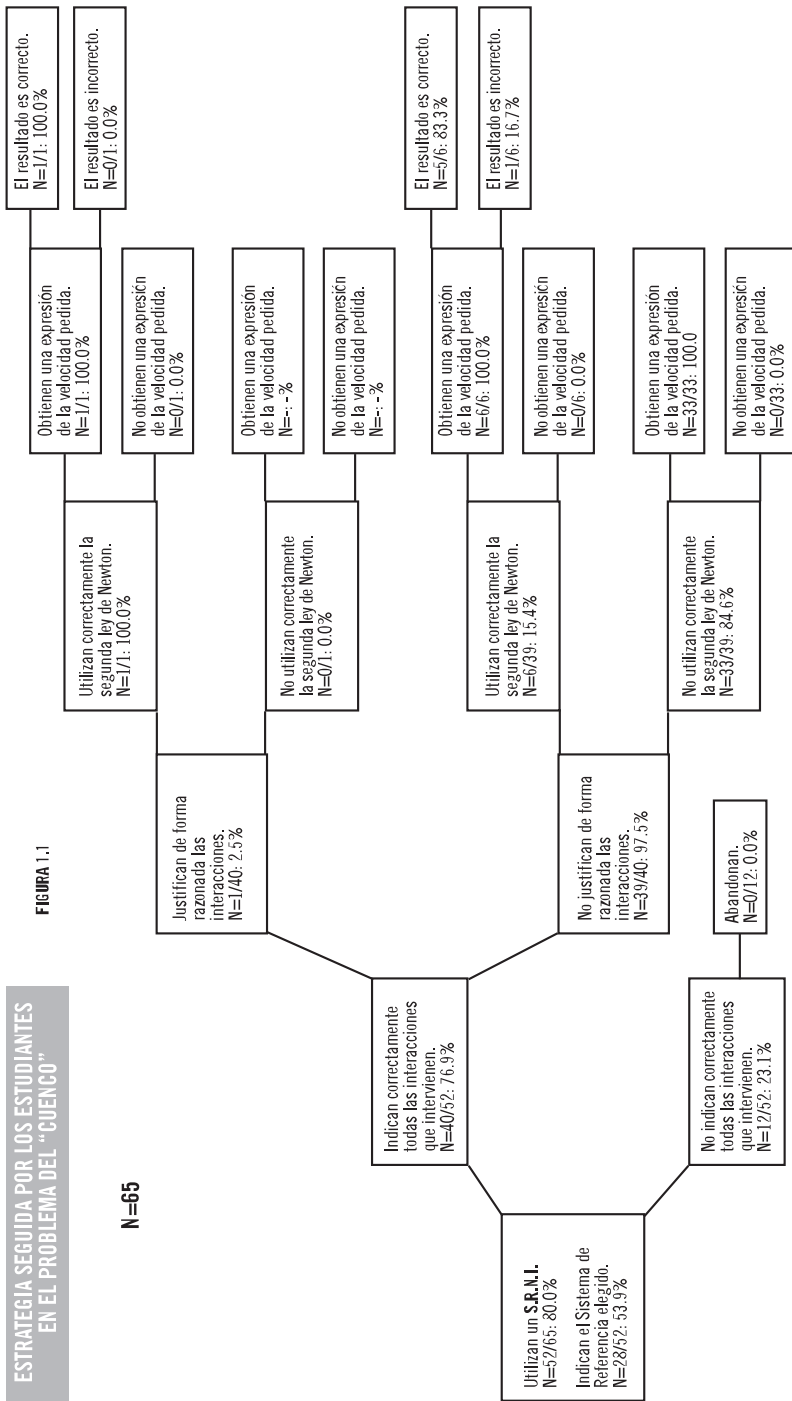
Sin embargo, existe una estrecha interrelación entre los diferentes aspectos conceptuales, metodológicos y actitudinales que intervienen en el éxito de la resolución de problemas. Es por ello que el análisis de resultados deba completarse haciendo mención a las graves deficiencias metodológicas detectadas en las estrategias de resolución de los estudiantes, que, en nuestra opinión, tienen una incidencia directa en la escasa eficacia lograda. En efecto, el estudio de los esquemas secuenciales (figuras 1.1 y 1.2) muestra que:

***No se realiza un planteamiento cualitativo de la situación problemática a resolver.***

En el *problema del cuenco* resulta evidente que la elección del sistema de referencia hace percibir la situación de manera muy distinta: mientras que para el observador inercial la partícula describe un movimiento circular y uniforme, para el no inercial (girando con el cuenco) se encuentra en reposo y, además, la fuerza que en cada caso habrá que considerar, centrípeta (interacción real) o centrífuga (fuerza de inercia) también es diferente. Pues bien, a pesar del papel fundamental que el análisis cualitativo desempeña en el desarrollo de este problema, el 48% de los estudiantes no justifica las implicaciones del sistema de referencia elegido.

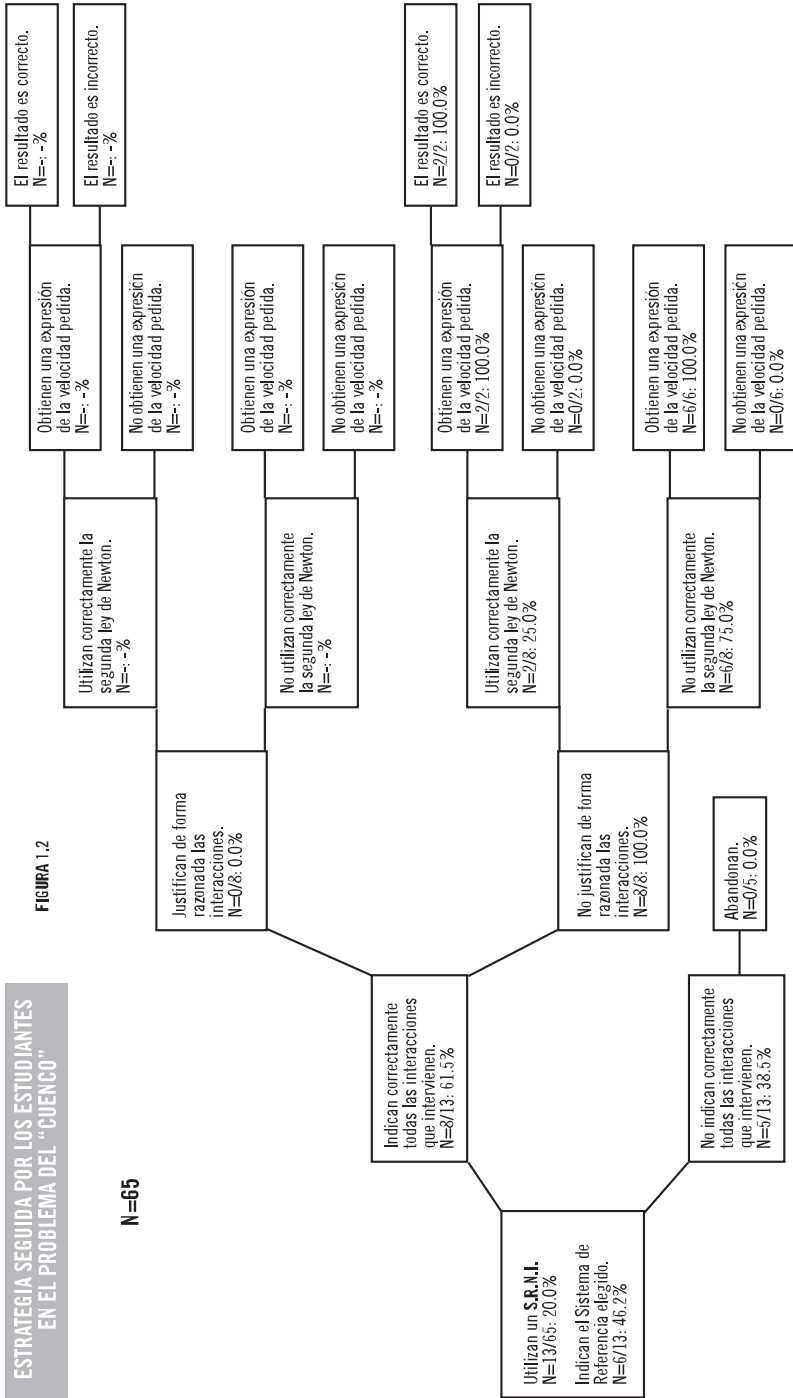
Hemos señalado antes que el 82% de los alumnos que en este problema han indicado mal las interacciones ha considerado para la fuerza de rozamiento estática el sentido contrario al que corresponde. Teniendo en cuenta que un 69% de los estudiantes no justifican de forma razonada el sentido de esta fuerza, cabe pensar que este error tiene una estrecha vinculación con la es-

**ESTRATEGIA SEGUIDA POR LOS ESTUDIANTES EN EL PROBLEMA DEL "CUENCO"**



**ESTRATEGIA SEGUIDA POR LOS ESTUDIANTES EN EL PROBLEMA DEL "CUENCO"**

**N=65**



casa importancia que se le da al análisis cualitativo de la situación planteada y a la tendencia a iniciar rápidamente los aspectos puramente operativos del problema.

***Las estrategias de resolución, siempre únicas, parecen ser reproducidas a partir de un modelo aprendido aunque no bien comprendido.***

El 79% de los estudiantes que indican correctamente las interacciones, al aplicar la segunda ley de Newton considera la aceleración normal dirigida hacia el centro del cuenco en vez de hacia el centro de la circunferencia descrita por la partícula. El alumno ha aprendido el modelo en el que la aceleración normal se dirige hacia 'el centro', pero cuando se encuentra con dos 'centros' muestra no haber comprendido dicho modelo.

Se ha observado en el análisis de este problema que, el hecho clave para su resolución de que la fuerza de rozamiento estática se pueda considerar igual al coeficiente de rozamiento por la normal porque se trata de su valor máximo (consecuencia de la velocidad pedida), no lo explica ningún estudiante. Esto sugiere que el alumno identifica la fuerza de rozamiento con el coeficiente de rozamiento por la normal, sin considerar que en situación estática la fuerza de rozamiento puede ser menor o igual que el mencionado producto.

***El objetivo es alcanzar un resultado, del que se aceptan como válidas todas las soluciones independientemente de su coherencia y racionalidad.***

En el problema que estamos considerando no se da abandono del intento de resolución por parte de los estudiantes. Esto se puede comprender teniendo en cuenta que una vez planteada la segunda ley de Newton, correcta o incorrectamente, en ella figura la velocidad angular máxima pedida y, para obtenerla no hay más que despejar, es decir, no existe dificultad matemática o estratégica añadida. Sin embargo, el hecho de que el 88% de las soluciones sean incorrectas sugiere que lo importante para los alumnos es llegar a una solución numérica, sea lógica o absurda, tenga sentido físico o no lo tenga. Queda claro que el re-

sultado que se obtiene no es objeto de ningún análisis que ponga a prueba su coherencia con la situación física que se aborda.

Desde la perspectiva metodológica, estamos en condiciones de afirmar que nuestros estudiantes abordan los problemas de física por identificación con problemas tipo memorizados pero no bien comprendidos, más que por aplicación de procedimientos eficaces para abordar situaciones problemáticas cuya solución, a priori, se desconoce.

Además, tal y como anteriormente hemos citado, estos estudiantes muestran una baja eficacia para resolver problemas de Física. Sin embargo, tras recibir formación sobre esta materia durante sus estudios preuniversitarios así como en este primer nivel universitario que cursan, el conocimiento declarativo adquirido habría que considerarlo suficiente para poder abordar problemas de aplicación de dicha teoría.

La eficacia de los resolventes parece estar determinada tanto por dificultades metodológicas como por carencias de conocimientos propios de la disciplina o por la habilidad en el manejo del aparato matemático. Aunque estas deficiencias de conocimiento declarativo y de destrezas de tipo matemático ciertamente existan, los resultados obtenidos indican que no son las únicas ni, probablemente, las más influyentes.

Finalmente, una objeción que a este diseño se le podría hacer, es considerar que los estudiantes no explicitan las capacidades procedimentales características de la metodología científica cuando resuelven problemas pero que, sin embargo, dominan de una manera implícita muchas de esas destrezas. Es decir, la enseñanza habitual no exige a los estudiantes un conocimiento procedimental explícito. Considera suficiente que se aprendan y se apliquen correctamente los contenidos declarativos, por ello, los alumnos que cuando resuelven problemas economizan tiempo y esfuerzo, no sienten la necesidad de proceder como un científico, simplemente buscarán el resultado correcto. Por tanto, con la intención de sacar a la luz esas posibles capacidades procedimentales, si es que en verdad subyacen en la estructura cognitiva de los alumnos y, en cualquier caso, con ánimo de

precisar más cuál es el grado real de desarrollo que la enseñanza habitual alcanza para el conocimiento procedimental, hemos diseñado otra batería de situaciones problemáticas que incide, explícitamente, en estas cuestiones y que describiremos a continuación.

### **Análisis específico del conocimiento procedimental en resolución de problemas**

De cara al análisis específico del conocimiento procedimental que los estudiantes poseen y activan en la resolución de problemas de Física, se ha optado por presentar aquí como ejemplo una situación problemática ubicada en el contexto del electromagnetismo y, que ha sido abordada por estudiantes de primero de EUITI en situación de examen con incidencia en la nota final, con el fin de asegurar el interés de los estudiantes en realizar una buena resolución.

En el enunciado del problema que vamos a analizar (cuadro 1.3), se solicita a los alumnos de forma explícita por medio de una consigna o pregunta directa, que desarrollen un aspecto metodológico concreto. En nuestro caso, mediremos el grado de desarrollo del conocimiento procedimental implicado en el análisis de los resultados obtenidos tras la resolución de un problema de lápiz y papel. Para ello, focalizaremos nuestra atención en aspectos tales como el análisis que los estudiantes hacen de la respuesta en cuanto a su coherencia dimensional, en lo referente a la dependencia del resultado con los parámetros del problema, o si ésta se ajusta a lo que cabría esperar en ciertos casos límite.

El procedimiento ‘saber analizar resultados’, es una destreza asociada a la metodología científica a la que en múltiples ocasiones se refiere el profesorado tanto a nivel de secundaria como universitario. En las conversaciones entre profesores, suele ser frecuente contar anécdotas sobre resultados que son ‘imposibles’ o ‘disparatados’ desde el punto de vista de un contexto real y que son aceptados por los estudiantes sin ningún cuestionamiento crítico. Por ejemplo, resultados con 10 decimales al medir una distancia con una regla graduada en centímetros y milí-

metros, fuerzas de rozamiento que contribuyen a la ganancia de energía cinética o interacciones gravitatorias, eléctricas o mag-

**PROBLEMA ANILLO DE CARGA:** Un anillo de radio 'a' tiene una carga positiva total  $Q$  uniformemente repartida.

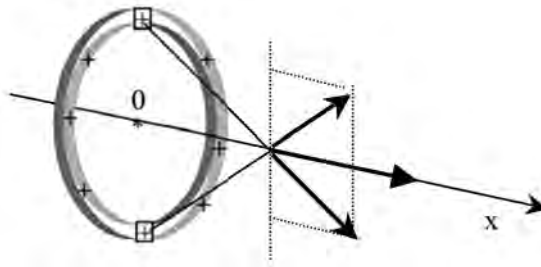
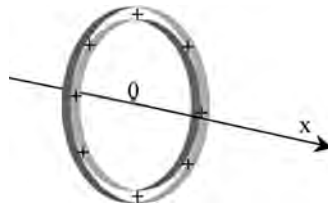
Analiza, sin resolver, si consideras coherente, desde el punto de vista físico, que el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo, en un punto que esté a una distancia  $x$  del centro del anillo venga dada por la expresión:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 - a^2)^{3/2}} u_x$$

para lo cual se sugiere valorar los siguientes aspectos:

**a)** Comprobar si la ecuación es dimensionalmente homogénea.

**b-1)** Razonar si es coherente que el campo  $E$  tenga únicamente componente en el eje del anillo. **b-2)** Analizar si es plausible que el campo dependa de las magnitudes físicas en la fórmula indicadas y de la manera en que cabría esperar. **c)** Analiza las situaciones de especial relevancia física que dentro



del contexto del problema consideres que se puedan producir para ciertos valores característicos de las variables descritas en el apartado anterior (por ejemplo,  $x \ll a$  o  $x \gg a$ ) y contrasta su coherencia.

**a)** La ecuación a analizar resulta dimensionalmente homogénea, por lo que en este sentido se puede considerar aceptable.

**b-1)** Debido a la simetría que presenta la distribución de carga propuesta, la componente del campo perpendicular al eje del anillo creada por cualquier elemento de carga, se cancela con la componente perpendicular de un ele-



mento diametralmente opuesto del anillo. Así pues, es razonable que el campo total sólo presente componente en la dirección del eje.

**b-2)** Respecto a la dependencia del campo con las variables indicadas en la fórmula, podemos señalar lo siguiente: es razonable pensar que al aumentar la carga total  $Q$  aumente el campo ya que es ésta, precisamente, la causa de que este campo se produzca. También se comprende intuitivamente que cuanto más alejados nos encontremos del centro del anillo, mayor sea  $x$ , menor será la interacción eléctrica entre su carga y otra carga ubicada en un punto sobre el eje, es decir, menor será el campo. No parece razonable, sin embargo, que cuanto mayores sean las dimensiones del anillo (siempre y cuando no aumente su carga total  $Q$ ) mayor sea el campo en los puntos sobre el eje distantes  $x$  de su centro, pues al aumentar el radio a la carga del anillo se encuentra más alejada del punto en cuestión y el campo debería ser menor, no mayor. Por otro lado, se daría la paradoja de que para  $x=a$  el campo resultaría infinito y para  $x<a$  la expresión dada para el campo no tendría solución en el ámbito de los números reales, lo cual no tiene ningún sentido para la situación planteada.

**c)** Si  $x \ll a$  nos encontramos muy próximos al centro  $O$  del anillo y se tiene que  $E = 0$ , lo que se puede justificar recurriendo de nuevo a la simetría de la distribución de carga. Ésta es tal que en el centro del anillo el campo creado por un elemento diferencial de la carga del anillo, se ve compensado por el igual y opuesto que su elemento simétrico crea en ese punto. Es decir, sin importar cuánta carga tengamos uniformemente repartida en el anillo, cuanto más próximos nos encontremos a  $O$ , la  $dE$  creada por  $dq$  posee más contribución de las componentes  $dE_y$  y  $dE_z$  y menos  $dE_x$ , de manera que en  $x=0$  se tiene sólo  $dE_{yz}$ , y como por simetría esta  $dE_{yz}$  sobre el eje siempre se anula, resultará  $E = 0$

Si  $x \gg a$  se tiene que  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} u_x$ .

Es decir, la expresión correspondiente al campo eléctrico creado por una carga puntual en un punto a una distancia  $x$ , lo cual es coherente, pues si la dimensiones del anillo son muy pequeñas en comparación con la distancia  $x$  a la cual queremos calcular el campo, desde ahí el anillo se percibirá como si, efectivamente, de una carga puntual se tratara. Esto es, visto desde lejos no es apreciable que la carga esté uniformemente repartida adoptando una distribución anular y, por tanto,  $dE_y = dE_z = 0$ ; sólo existe  $dE_x$ , y, como además, no hay ninguna dirección preferencial en el espacio, la expresión del campo sería aplicable a cualquier dirección radial.

Cuadro 1.3. Problema propuesto a estudiantes de 1° de EUITI para que analicen el resultado.

néticas que aumentan con la distancia a la fuente, por citar sólo algunos de los muchos casos a los que los profesores estamos habituados.

Podemos observar que, en el problema que tratamos (cuadro 1.3), se da una supuesta expresión del campo eléctrico que un anillo de carga uniforme produce sobre puntos de un eje perpendicular que pasa por su centro y se pide a los estudiantes que razonen sobre la coherencia de esos hipotéticos resultados.

En el análisis del conocimiento procedimental involucrado en el proceso de resolución hemos tratado de explicitar argumentos que sirvan de indicadores de los logros alcanzados. Estos razonamientos se han agrupado en una tabla por niveles de 0 a 4 de tal manera que se recogen de forma acumulativa los principales procedimientos implicados en la faceta metodológica que esa situación problemática pretende abordar (análisis de resultados). Esta manera de proceder nos permite disponer de una herramienta sencilla y coherente de ordenar los procedimientos implicados en la resolución de acuerdo con una secuencia razo-

NIVEL	CATEGORÍA DE RESPUESTA
0	<i>No analiza, o no lo hace correctamente, la coherencia teórica de la respuesta. No justifica relaciones entre variables.</i>
1	<i>Analiza correctamente la categoría de la respuesta. No analiza, o no lo hace justificadamente en referencia al marco teórico, la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema.</i>
2	<i>Analiza correctamente la categoría de la respuesta. Así mismo, razona justificadamente en referencia al marco teórico la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema.</i>
3	<i>Analiza la coherencia teórica, razona justificadamente en referencia al marco teórico la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema y analiza ésta con referencia a valores límite de ciertas variables.</i>
4	<i>Analiza la coherencia teórica, razona justificadamente en referencia al marco teórico la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema analizando valores límite de ciertas variables y complementa su estudio con un análisis dimensional del resultado.</i>

*Documento 1.1. Protocolo de corrección de las contestaciones de los estudiantes cuando tienen que analizar resultados de la situación problemática anillo de carga.*

nable de aplicación. Así, al plantear la categorización por acumulación de procedimientos utilizados por el resolvente, podremos considerar que una resolución de nivel alto es más rica en conocimiento procedimental que otra de nivel más bajo. Esta categorización se recoge en el protocolo de corrección (documento 1.1), cuyos criterios de aplicación (documento 1.2) toman como referencia la correcta resolución de cada problema planteado (cuadro 1.3) que trata de recoger los principales aspectos procedimentales implicados previamente consensuados por tres expertos.

**Nivel 0.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando no cumple con ninguno de los requisitos característicos de los niveles 1 a 4 que detallamos a continuación.

**Nivel 1.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando razona que debido a la simetría que presenta la distribución de carga propuesta, la componente del campo perpendicular al eje del anillo creada por cualquier elemento de carga se cancela con la componente perpendicular de un elemento diametralmente opuesto del anillo, quedando como única componente del campo la suma de las proyecciones sobre el eje de las contribuciones de los distintos elementos de anillo.

**Nivel 2.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando, además de lo señalado en el nivel 1, justifica al menos 2 de las siguientes relaciones, siempre y cuando incluyan la correcta valoración del radio  $a$ :

· Por ser la carga  $Q$  la fuente de la interacción eléctrica cabrá esperar siempre que cuanto mayor sea ésta mayor será la interacción y, por tanto, mayor el campo eléctrico.

· Cuanto más alejados nos encontremos del centro del anillo, mayor sea  $x$ , menor será la interacción eléctrica entre su carga y una carga unidad ubicada en un punto sobre el eje, es decir, menor será el campo.

· No parece razonable que cuanto mayores sean las dimensiones del anillo (si no aumenta su carga total  $Q$ ) mayor sea el campo en los puntos sobre el eje distantes  $x$  de su centro, pues al aumentar el radio  $a$ , la carga del anillo se encuentra más alejada del punto en cuestión y el campo debería ser menor, no mayor. Alternativamente, se aceptará que argumenten que sería paradójico que para  $x=a$  el campo resultara infinito y para  $x < a$  la expresión dada para el campo no tendría solución en el ámbito de los números reales, lo cual no tiene ningún sentido para la situación planteada.

**Nivel 3.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando, además de lo reseñado en el nivel 2, valora al menos un caso límite de interés, como por ejemplo:

· Para  $x \ll a$ ,  $E = 0$ , lo que se justifica recurriendo a la simetría de la distribución de carga: en el centro del anillo el campo creado por un elemento diferencial de la carga del anillo, se ve compensado por el igual y opuesto que su elemento simétrico crea en ese punto.

Para  $x \gg a$ ,  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} u_x$ , se razona basándose en que desde muy lejos el

anillo se percibirá como si realmente fuera una carga puntual.

**Nivel 4.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando, además de lo reseñado en el nivel 3, comprueba la homogeneidad dimensional de los dos miembros de la expresión propuesta.

*Documento 1.2. Criterios para la aplicación del protocolo de corrección de las contestaciones de los estudiantes cuando tienen que realizar análisis del resultado propuesto para el problema de anillo de carga.*

En el análisis de resultados que los estudiantes han realizado en el problema de electromagnetismo que estamos contemplando (tabla 1.1 y gráfico 1.1), hemos encontrado que más de la mitad del grupo, 23 de 40, no ha razonado que debido a la simetría que presenta la distribución de carga, el campo pedido sólo tenga componente en la dirección del eje del anillo. No realizan, por tanto, un análisis correcto de la coherencia teórica del resultado propuesto en el enunciado, (nivel 0). Veamos algún ejemplo de interpretación teórica incorrecta:

**Ejemplo 1:** *El campo eléctrico no sólo tiene componentes en la dirección del eje del anillo, ya que el campo sigue el principio de superposición por lo que el campo tiene componente en cualquier parte del espacio.*

**Ejemplo 2:** *El campo sólo tiene componente X porque las líneas de campo que salen de las cargas positivas tienen el sentido y la dirección del eje X.*

De los 17 estudiantes que han superado este nivel 0, 15 no han sabido justificar la dependencia del campo eléctrico con las variables que se proponen en el resultado de acuerdo con nuestros criterios de corrección (nivel 1), y solamente 2 estudiantes han alcanzado el nivel 2 al reconocer y explicar razonadamente que el radio del anillo figure con significado incoherente desde

el punto de vista físico en la expresión propuesta; siendo ésta, precisamente, una de las claves más importantes en el análisis del resultado propuesto y que, en consecuencia, ha sido incluida como requisito imprescindible para la inclusión de una respuesta en el nivel segundo. Respuestas categorizadas en estos niveles son:

**Ejemplo 3 (Nivel 1):** *El campo tiene únicamente componente en el eje del anillo, ya que el campo sigue el principio de superposición, lo cual quiere decir que se calcularía por la suma de los campos que crearía cada una de las cargas presentes..., y cada carga tiene otra carga (que llamaríamos gemela) que cuando se suman dan siempre la dirección del eje del anillo. (El estudiante apoya su explicación en una figura correcta).*

**Ejemplo 4 (Nivel 2):** *En mi opinión el resultado no es coherente. No sé como explicarlo pero no es coherente porque en vez de debería ser pues el denominador me quedaría negativo y la raíz sería compleja. Por lo cual el resultado no sería coherente.*

Por otro lado, hay que indicar que aunque algunos estudiantes (5) han realizado el análisis dimensional correctamente y otros (5) han valorado coherentemente los casos límite, ninguno ha podido ser incluido en el nivel 3 o nivel 4, puesto que no han superado el nivel 2.

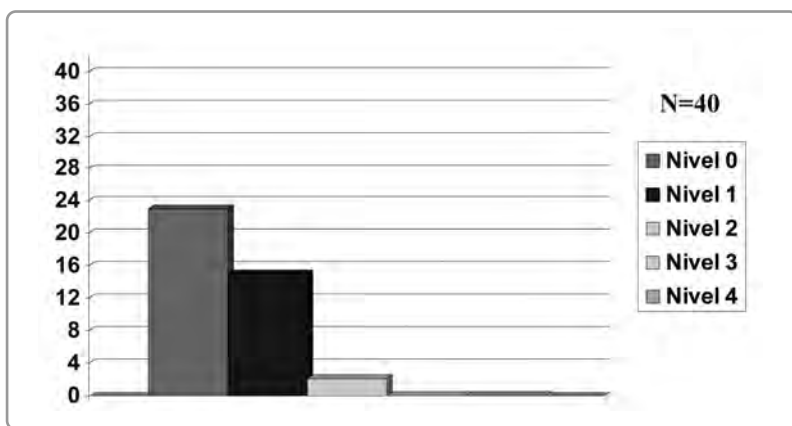


Gráfico 1.1. Resultados de la aplicación del protocolo de corrección de las contestaciones de los estudiantes cuando tienen que realizar un análisis de resultados.

<b>Nivel</b>	<b>Categoría de respuesta</b>	<b>Nº de respuestas (N = 40)</b>
0	<i>No analiza, o no lo hace correctamente, la coherencia teórica de la respuesta. No justifica relaciones entre variables.</i>	23
1	<i>Analiza correctamente la coherencia teórica de la respuesta. No analiza, o no lo hace justificadamente, en referencia al marco teórico, la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema.</i>	15
2	<i>Analiza correctamente la coherencia teórica de la respuesta. Así mismo, razona justificadamente, en referencia al marco teórico, la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema.</i>	2
3	<i>Analiza la coherencia teórica, razona justificadamente, en referencia al marco teórico, la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema y analiza ésta con referencia a valores límite de ciertas variables.</i>	0
4	<i>Analiza la coherencia teórica, razona justificadamente, en referencia al marco teórico, la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema analizando valores límite de ciertas variables y complementa su estudio con un análisis dimensional del resultado.</i>	0

Tabla 1.1. Resultados de la aplicación del protocolo de corrección de las contestaciones de los estudiantes cuando tienen que realizar un análisis de resultados.

En cuanto a las formas espontáneas de razonamiento, se ha detectado una fuerte tendencia (la tercera parte de los estudiantes) a realizar el análisis de variables de la expresión propuesta por comparación con el campo eléctrico correspondiente a una carga puntual. Podemos interpretarlo como una ‘fijación funcional’ a un caso particular, al que los estudiantes otorgan un rango de aplicabilidad general. Cuando nos encontramos a distancias muy grandes del anillo éste se asemejaría a una carga puntual y el campo por él creado sí vendría dado por la Ley de Coulomb pero, por supuesto, no a cualquier distancia.

A la vista de los resultados obtenidos de nuestro análisis, corroboramos las dificultades que los estudiantes encuentran a la hora de realizar una valoración crítica de la respuesta obtenida tras la resolución de una situación problemática. Si por iniciativa propia ya vimos en los diseños secuenciales que habitual-

mente no contrastan los resultados obtenidos, cuando explícitamente se les indica qué aspectos deben valorar en su análisis de resultados, presentan graves deficiencias en el desarrollo de esos procedimientos. No se muestran eficientes a la hora de contrastar la coherencia teórica del resultado y no interpretan correctamente la dependencia de la magnitud obtenida con otros parámetros del problema. En algunos casos, incluso, los resultados obtenidos se aceptan como correctos aunque una interpretación de lo que éstos significan lleven a una situación completamente incoherente desde el punto de vista físico. Es de destacar que estos resultados se han obtenido después de que los estudiantes hayan realizado cursos de Física en el Bachillerato y se encuentren cursando el primer curso en la universidad.

Diseños análogos nos han permitido analizar ocho situaciones problemáticas resueltas por los alumnos. De entre ellas, cuatro se refieren al ámbito de la mecánica y otras cuatro se han ubicado en el contexto del electromagnetismo y han sido abordadas por un total de 304 estudiantes de primero de EUITI de las escuelas de Bilbao y San Sebastián pertenecientes a la UPV/EHU en situación de examen con incidencia en la nota final, con el fin de asegurar el interés de los estudiantes en realizar una buena resolución.

Sin embargo, es necesario remarcar que en ningún caso hemos pretendido medir todos y cada uno de los aspectos procedimentales que pudieran estar implicados en la resolución de los problemas planteados, ni tampoco queremos establecer jerarquía alguna en cuanto a la importancia de cada una de estas capacidades. A pesar de ello, sí consideramos que el espectro de procedimientos al que hemos prestado atención es lo suficientemente completo como para que, del estudio de las resoluciones correspondientes, se puedan obtener conclusiones nítidas sobre las graves deficiencias procedimentales que los estudiantes universitarios de primero de Ingeniería Técnica presentan a la hora de resolver problemas de Física y, al mismo tiempo, obtener una imagen representativa de las principales características de nuestros estudiantes como resolventes. Así mismo, los resultados obtenidos son convergentes con los de otras investigaciones en países diferentes y niveles educativos similares (Becerra, 2004).

Es por esto que hemos clasificando sus respuestas por niveles en los que de manera acumulativa se incluyen los procedimientos más representativos, lo que nos ha permitido detectar las tendencias más marcadas que pueden interpretarse como indicadores de la manera en que los estudiantes abordan, desde el punto de vista metodológico, la resolución de problemas.

En este sentido, podríamos concluir que el comportamiento estándar de los estudiantes analizados, ante la resolución de situaciones problemáticas de la asignatura que nos ocupa, se ajusta al siguiente patrón:

*· Muestran deficiencias en la realización de un análisis cualitativo de la situación, lo que se ha puesto de manifiesto en su incapacidad para discutir el sistema físico en estudio, realizar descripciones verbales o gráficas de la situación para poder tomar las decisiones cruciales que la resolución de un problema exige al comienzo, acotar la situación para modelizarla y simplificarla si es preciso, reconocer un marco teórico de referencia e identificar variables.*

*· Encuentran importantes dificultades para emitir hipótesis descriptivas y explicativas. Esta deficiencia se ha podido apreciar en el escaso éxito que los estudiantes han obtenido al valorar la posible evolución del sistema, al establecer relaciones de dependencia entre variables o al analizar casos límite de especial relevancia física.*

*· La elaboración de estrategias de resolución adolece de importantes deficiencias procedimentales, tanto de carácter descriptivo como explicativo, reflejadas en las dificultades que presentan los estudiantes para elegir y justificar las leyes y principios fundamentales a utilizar en la resolución, valorar posibles vías alternativas o realizar una descripción secuencial de actuaciones para alcanzar la solución. En demasiadas ocasiones, la elección de las vías de resolución responde más a factores relativos a la aparente similitud del problema con situaciones tipo que a verdaderos criterios teóricos basados en la interpretación física de la situación.*

*· Los resultados se aceptan acríticamente. Esta actitud se ha*



*visto reflejada en los obstáculos que han encontrado los estudiantes para analizar la coherencia teórica de la respuesta, para analizar la coherencia dimensional de la respuesta, para analizar la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema en el sentido que cabría esperar y para analizar si se ajusta la respuesta a lo que se podría esperar en situaciones sencillas y especiales, por ejemplo, las correspondientes a valores extremos de las variables.*

## **Opinión del profesorado acerca de las posibles causas del fracaso en resolución de problemas**

Ante esta situación descrita, cuando con objeto de que los profesores puedan expresar la concepción que tienen de la tarea de resolución de problemas se les solicita, por medio de una pregunta abierta, que reflexionen acerca de las posibles causas del fracaso generalizado de los estudiantes cuando resuelven problemas, la mayoría del profesorado encuestado señala aquéllas que responsabilizan a los estudiantes del mencionado fracaso. Entre las razones que los profesores esgrimen para explicar el fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas se citan, fundamentalmente, deficiencias de base físico-matemática, deficiencias en su capacidad de trabajo y madurez intelectual, falta de conocimiento teórico, esfuerzo insuficiente por su parte y dificultades para comprender los enunciados. Es decir, la responsabilidad fundamental del fracaso en la resolución de problemas es imputada por los profesores, de forma directa o implícita, a las carencias de los alumnos.

En menor medida, los profesores suelen hacer referencia a causas relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje como la escasa formación docente del profesorado universitario, la falta de comunicación entre estudiantes y profesores o la falta de motivación de profesores y estudiantes.

Si recogemos los argumentos que con mayor incidencia suelen ser considerados, nos encontramos ante el siguiente planteamiento patrón de las causas del fracaso en resolución de problemas: los estudiantes presentan deficiencias de base físico-matemática, no entienden las leyes físicas, tienen un deficiente conocimiento teórico, presentan deficiencias en sus destrezas y

capacidad de trabajo y tienen falta de madurez intelectual. Por otro lado, los estudiantes resuelven problemas por aplicación de una receta o fórmula, es decir, aprenden problemas tipo. Además, no se esfuerzan lo suficiente, si bien es cierto que, en primer ciclo de universidad, disponen de poco tiempo para estudiar.

Como ejemplos ilustrativos de esta concepción, sirvan los comentarios de dos de los profesores que ha reflexionado sobre esta cuestión:

**Ejemplo 1:** *Cuando se hacen problemas se puede profundizar lo que se ha visto en teoría, o mejor dicho, se pueden aplicar los principios explicados y enunciados. Los alumnos fallan porque no entienden bien los principios, porque han aprendido siempre con fórmulas y lo que buscan es la fórmula que les solucione el planteamiento problemático sin analizar la situación, convirtiendo la materia en una colección de recetas... Además, para resolver problemas hay que utilizar herramientas matemáticas que el alumno no conoce o no entiende tampoco...*

**Ejemplo 2:** *Quizás en niveles inferiores de formación se tiende a presentar la resolución de problemas como la habilidad para encontrar la receta adecuada, aspecto que también se fomenta en nuestros niveles de enseñanza cuando se dicen cosas como “esto lo veremos desde un punto de vista ingenieril”, queriendo hacer ver que se obviará la teoría en pro de una visión más práctica que acaba reduciéndose a una receta o casuística más o menos extensa.*

El patrón mostrado nos lleva a pensar que los profesores tienen una concepción de los problemas como aplicación de la teoría, que implica una responsabilidad final del estudiante. Es decir, una vez que el profesor ha explicado bien los fundamentos teóricos y los ha aplicado en algún ejercicio resuelto por él mismo, los estudiantes, en base a un esfuerzo personal, deberían ser capaces de aprender a resolver problemas.

En el siguiente capítulo trataremos de aportar una alternativa a esta situación de aparente bloqueo en la que los profesores creemos ‘enseñar’ a resolver problemas pero los estudiantes no parecen ‘aprender’.

## 2. MODELO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ACTIVIDAD DE INVESTIGACIÓN ORIENTADA

Con el ánimo de superar la situación fatalista a la que el fracaso generalizado en resolución de problemas parece conducirnos, pasamos a cuestionarnos esta actividad tal y como habitualmente se presenta en el aula, planteándonos en primer lugar *qué es lo que entendemos por problema*.

Se ha señalado con frecuencia que los investigadores en la resolución de problemas de lápiz y papel, en ocasiones, no suelen plantearse qué es un problema, lo que puede limitar sus investigaciones. Otros autores, sin embargo, sí han abordado la cuestión y, de manera genérica, el concepto de problema es definido como sigue:

- *Una persona se enfrenta a un problema cuando desea algo y no conoce inmediatamente qué serie de acciones debe llevar a cabo para alcanzarlo* (Newell y Simon, 1972).
- *Una situación que un individuo o grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución* (Lester, 1983).
- *Es una situación que no se ajusta a nuestros conocimientos y crea una tensión y una ambigüedad. Intelectualmente está lo suficientemente próximo al límite de nuestras estructuras cognitivas para despertar nuestro interés* (Garret, 1988).
- *Una situación para la cual no hay soluciones evidentes* (Gil et al., 1988).

Estas definiciones, aunque diferentes, son coincidentes en el hecho de considerar que una situación sólo puede ser concebida como un problema en la medida en que existe un reconocimiento de ella como tal problema, es decir, resulta desconocida, y en la medida en que, a priori, no disponemos de solución.

Por otra parte, el concepto de problema posee una dimensión altamente idiosincrásica: lo que para una persona puede representar un problema no tiene por qué serlo para otra. Esto es, la existencia de dificultades no es una cuestión intrínseca de una situación sino que también depende de los conocimientos, expe-

riencia, etc., del resolvente (Garrett, 1987). En este sentido, Elshout (1985) desarrolla la idea de *umbral de problematicidad* diferente para cada persona y por encima del cual se puede considerar que una situación constituye un verdadero problema para las personas implicadas. Así mismo, Garrett (1988) señala que el problema es una situación o conflicto para la que no tenemos una respuesta inmediata, ni algoritmo ni heurístico. Incluso, ni siquiera sabemos qué información necesitamos para intentar conseguir una respuesta. El problema se sitúa exactamente más allá de lo que nosotros conocemos del mundo, pero está lo suficientemente cerca para despertar nuestro interés. Aun así, creemos que en el contexto educativo, el problema, como elemento de una estrategia de enseñanza debe definirse en sí mismo por las características de su proceso de resolución, y no por la complejidad que presente para la persona que afronta la resolución.

Sin embargo, muchas de las actividades que habitualmente realizamos los profesores en el aula bajo el nombre de problemas, no responden a estas características básicas de lo que, en realidad, debería ser un problema, pues en ellas el profesor explica ordenadamente una situación para la que conoce perfectamente la solución, luego no hay lugar para las dudas pues para él no es un problema real, aunque sí lo sea para los alumnos. Se pretende que los estudiantes aprendan la resolución y la apliquen en otros casos similares. Es razonable, entonces, que los estudiantes no aprendan a enfrentarse a verdaderos problemas y que fracasen ante cualquier cambio respecto a lo reconocido.

Un segundo aspecto ineludible en nuestro cuestionamiento de la resolución de problemas es clarificar ***qué implica resolver un problema.***

De nuevo, en este punto, encontramos en la bibliografía sobre resolución de problemas múltiples interpretaciones de lo que supone abordar la resolución de un problema. Podríamos sintetizar estas versiones en la idea de Polya (1980), cuando plantea que resolver un problema consiste en encontrar un camino allí donde previamente no se conocía tal, encontrar una salida para una situación difícil, para vencer un obstáculo, para alcanzar un objetivo que no puede ser inicialmente alcanzado.

La pregunta que inmediatamente surge es ¿cómo encontrar ese camino, esa salida que nos lleve a la solución?, y la respuesta trataremos de encontrarla en la investigación didáctica.

En la actualidad, la mayoría de las investigaciones en resolución de problemas se enmarcan en el campo de la psicología cognitiva, ya sea desde las teorías del procesamiento de la información o desde la perspectiva constructivista del aprendizaje, que surgen como respuesta a la crisis del conductismo (Pozo et al., 1998). Encontramos aquí un conjunto de intentos por desarrollar teorías de la cognición que abarcan un amplio abanico de posturas en su concepción de aprendizaje y que tienen fiel reflejo en el surgimiento de modelos didácticos en resolución de problemas, entre los que destacamos tres orientaciones teóricas diferenciadas:

- *Las que proponen la enseñanza de algoritmos y heurísticos que faciliten la resolución.*
- *Las que comparan los procedimientos utilizados por los expertos y los novatos para tratar de identificar la naturaleza de los mecanismos de resolución eficaces.*
- *Las que abordan la resolución de problemas como actividad de investigación orientada y que plantean la creatividad y el cambio conceptual, metodológico y actitudinal como elementos fundamentales del proceso de resolución.*

Los **modelos algorítmicos** abordan la resolución de problemas con la intención de establecer una serie de etapas que serán ejecutadas secuencialmente para resolver problemas generales.

Esta orientación, ante la doble pregunta de qué pueden hacer los docentes para facilitar a los estudiantes las vías de resolución de los problemas, en general cuantitativos, y cómo pueden los estudiantes aprender a resolver estos problemas más sistemáticamente y con menos errores, responde que la solución es transformar los problemas en ejercicios estándar o problemas tipo y esto constituye, precisamente, la fase nuclear de su propuesta.

Van Weeren et al. (1982) a partir del modelo desarrollado inicialmente por Mettes et al. (1980, 1981) denominado programa de acciones y métodos (PAM, en iniciales en lengua inglesa), proponen una estrategia de resolución de problemas denominada aproximación sistemática a la resolución de problemas, (SAP, en iniciales en lengua inglesa), que consiste básicamente en la transformación de los problemas cuantitativos en problemas estándar, tal y como se recoge en los documentos 2.1 y 2.2.

- *Tomar la cantidad pedida como punto de partida.*
- *Buscar relaciones clave que incluyan la cantidad pedida.*
- *Seleccionar con la ayuda de los resultados de la fase de análisis relaciones clave utilizables.*
- *Contrastar la validez de las relaciones clave seleccionadas en la situación dada.*
- *Reemplazar magnitudes genéricas de las relaciones clave por cantidades específicas haciendo uso de los datos y del resultado de la fase de análisis; realizar posibles aproximaciones.*
- *Si tras sustituir los datos la relación clave aún contiene magnitudes desconocidas, considerar estas cantidades desconocidas como nuevas incógnitas.*
- *Repetir los pasos previos hasta que una relación clave no contenga ninguna cantidad desconocida.*

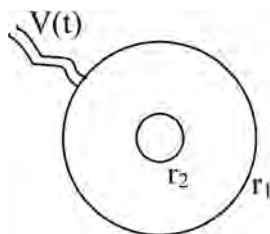
*Documento 2.1. Algoritmo correspondiente al método SAP (Van Weeren et al., 1982).*

El método detalla lo que el alumno debe realizar siguiendo una receta y matiza la estrategia propuesta introduciendo el concepto de ‘relaciones clave encadenadas’ que, básicamente, consiste en buscar las ecuaciones fundamentales del área conceptual en la que inscribe el problema y encadenarlas de forma que, de dos en dos, compartan al menos una variable, tal que, al final, se encuentren en la misma cadena la incógnita y los datos (ver documento 2.2).

Del propio planteamiento del modelo, consistente en transformar los problemas en ejercicios tipo, se deriva que los estudiantes sólo podrán aprender a resolver problemas semejantes a

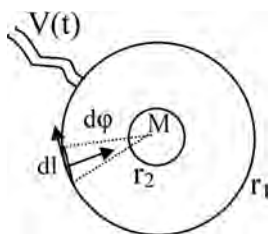
los problemas estándar cuya solución se conozca de antemano, pues esta manera de resolver requiere, por un lado, la recuperación desde la memoria de la información pertinente y, por otro, la aplicación de esa información al nuevo problema.

**PROBLEMA:** En el centro de una espira circular de radio  $r_1$  existe otra espira circular de radio  $r_2$ , ( $r_2 \ll r_1$ ). Las normales a los planos de ambas espiras coinciden. Ambas espiras poseen una resistividad  $\rho \ \Omega m^{-1}$ . Se aplica un voltaje  $V(t) = V_0 \cos \omega t$  a la espira mayor. Se pueden despreciar los coeficientes de autoinducción de ambas espiras. **Calcular la corriente  $I_2$  en la espira pequeña.**



**ANÁLISIS**

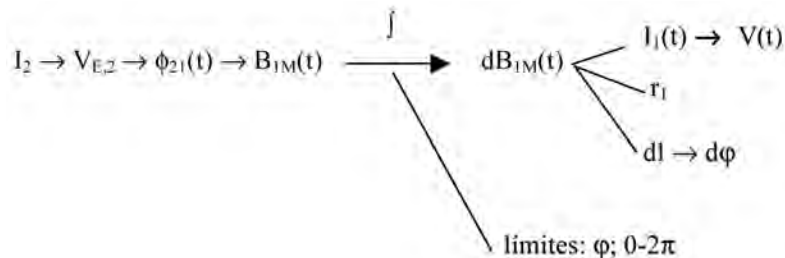
- $V(t) = V_0 \cos \omega t$
- $V(t)$  produce  $I_1(t)$
- $I_1(t)$  produce  $B_1(t)$
- Como  $r_2 \ll r_1$ ,  $B_1(t)$  se puede considerar constante sobre la espira 2, y valdrá  $B_1(t) = B_{1M}(t)$
- El vector  $B_{1M}(t)$  es paralelo a las normales a las espiras
- Todos los elementos  $dl$  de la espira 1 distan lo mismo de  $M$



**RELACIONES CLAVE**

$$V_E = -\frac{d\phi}{dt} \quad \phi_B = \iint B \cdot dS \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \times u_r \quad B = \int dB$$

**ELABORACIÓN DE ESTRATEGIA**



## RESOLUCIÓN

$$dB_{1M}(t) = \frac{\mu_0 I_1(t) dl}{4\pi r_1^2} = \frac{\mu_0 I_1(t) d\varphi}{4\pi r_1} \quad B_{1M}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1(t) d\varphi}{4\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2r_1}$$

$$\phi_{21}(t) = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2r_1} \pi r^2 \quad V_{E2} = -\frac{d\phi_{21}(t)}{dt} = \frac{\mu_0 r_2^2}{4r_1^2 \rho} V_0 \omega \sin \omega t$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi r_2 \rho} \frac{\mu_0 r_2^2}{4r_1^2 \rho} V_0 \omega \sin \omega t$$

Documento 2.2. Ejemplo de aplicación del método SAP (Van Weeren et al., 1982).

Entonces, si lo que se pretende es simplificar, nos encontraríamos con la necesidad de tratar de algoritmizar todos los problemas posibles para que los estudiantes, llegado el caso, no se tuvieran que enfrentar a un problema del que desconocieran el algoritmo (Ramírez et al., 1994).

La puesta en práctica de este modelo, además, lleva a favorecer un tratamiento operativista a partir de los datos que suministra el enunciado y que impide la reflexión cualitativa y el análisis de las situaciones, lo que conduce a los estudiantes a reconocer el problema o a abandonar (Gil et al., 1988).

Análogamente, la conversión sistemática de los problemas en ejercicios estándar concentra todas sus energías en obtener un resultado y desaprovecha el extraordinario potencial que, de cara al aprendizaje, tiene la resolución de problemas. Se da un claro predominio del “aprender a resolver problemas” frente al “resolver problemas para aprender” (Garrett, 1988).

Por otro lado, los estudios alineados con el **modelo de resolución de problemas por comparación entre expertos y novatos**, parten del supuesto de que existen buenos y malos resolventes de problemas y, en consecuencia, se indaga acerca de cómo proceden los individuos cuando tratan de resolver problemas con el objeto de que, una vez reconocidas las diferencias, se puedan implementar actuaciones que permitan que los novatos se hagan más expertos y mejore su efectividad en la resolución de problemas.



Muchas de las primeras investigaciones en esta línea de expertos y novatos, aunque de gran valor informativo, se consideran limitadas por no haberse realizado en el contexto del aula (Maloney, 1994). Las conclusiones son de gran interés y el marco teórico congruente, pero, no ofrecen mucha información sobre cómo las habilidades para resolver problemas pueden ser desarrolladas o enseñadas en el contexto del aula, es decir, la dificultad surge cuando de estas investigaciones se han de extraer conclusiones de cara a la actuación docente. Tal y como reconoce la propia línea de investigación (Reif, 1995), sólo pueden esperarse avances sustanciales en la efectividad del proceso de enseñanza, si todos los aspectos recopilados por la investigación son reorganizados conjuntamente y son aplicados en la instrucción real. El autor asume, además, que existe un gran salto entre los estudios a pequeña escala y la práctica educativa de dimensiones reales.

Esta orientación metodológica propone la necesidad de enseñar explícitamente estrategias o métodos de resolución de problemas que integren los resultados de sus investigaciones. La estrategia heurística más representativa y la que utilizan la mayoría de los intentos de aplicación en el aula, queda perfectamente recogida en la recapitulación que de esta línea de investigación realiza Frederick Reif, (1995). Este autor indica que el método explícito a enseñar se divide en tres fases principales: análisis inicial del problema, incluyendo representaciones múltiples de la situación; construcción de una solución, haciendo uso si es necesario de la partición del problema en subproblemas y la comprobación del resultado. Así mismo, para facilitar la resolución de problemas se consideran de gran interés los siguientes factores: una organización jerárquica del conocimiento que faciliten la elección de la vía de resolución y la adquisición previa de una serie de habilidades de interpretación y representación del conocimiento.

Si bien, en un próximo capítulo, cuando abordemos el análisis de la enseñanza habitual de resolución de problemas, contrastaremos con más detenimiento cómo es integrado este tipo de estrategias en determinados libros de texto de Física General,

adelantamos ahora (documento 2.3) un ejemplo de estrategia para resolver ‘problemas de Gauss’.

## ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS

### Con la ley de Gauss

**IDENTIFICAR** los conceptos pertinentes: la ley de Gauss resulta más útil en situaciones donde la distribución de carga tiene simetría esférica o cilíndrica o es uniforme en todo un plano. En estas situaciones se establece la dirección de  $E$  a partir de la simetría de la distribución de carga. Si se proporciona la distribución de carga, la ley de Gauss permite hallar la magnitud de  $E$ . Por otra parte, si se conoce el campo, la ley de Gauss permite establecer los detalles de la distribución de carga. En uno u otro caso, inicie su análisis formulando la pregunta: “¿cuál es la simetría?”

**PLANTEAR** el problema utilizando las etapas siguientes:

1. Elija la superficie que utilizará con la ley de Gauss, a la cual se le suele llamar superficie gaussiana. Si se propone hallar el campo en un punto determinado, entonces ese punto debe estar sobre la superficie gaussiana.
2. No es necesario que la superficie gaussiana sea una superficie física real, como una superficie de un cuerpo sólido. En muchos casos la superficie apropiada es una superficie geométrica imaginaria; puede ser espacio vacío, estar incrustada en un cuerpo sólido, o ambas cosas.
3. Por lo general se puede evaluar la integral de la ley de Gauss (sin ayuda de una computadora) sólo si la superficie gaussiana y la distribución de carga tienen alguna propiedad de simetría. Si la distribución de carga tiene simetría cilíndrica o esférica, elija una superficie gaussiana coaxial al cilindro o que sea una esfera concéntrica, respectivamente.

**EJECUTAR** la solución como sigue:

1. Lleve a cabo la integral de la ecuación (22.9). Esto puede parecer una tarea de enormes proporciones, pero la simetría de la distribución de carga, aunada a una elección cuidadosa de la superficie gaussiana, la facilita enormemente.
2. En muchos casos es posible pensar en la superficie gaussiana cerrada como compuesta de varias superficies individuales, como los lados y los extremos de un cilindro. La integral  $\int E_{\perp} dA$  con respecto a la superficie cerrada en su totalidad siempre es igual a la suma de las integrales con respecto a todas las superficies individuales.

Algunas de estas integrales pueden ser cero, como lo muestran los puntos 4 y 5 siguientes.

3. Si  $E$  es perpendicular (normal) en todos los puntos a una superficie de área  $A$ , si apunta hacia afuera desde el interior de la superficie y si además tiene la misma magnitud en todos los puntos de la superficie, entonces  $E_{\perp} = -E$ , y  $\int E_{\perp} dA$  con respecto a la superficie es igual a  $EA$ . Si  $E$  más bien es perpendicular y entrante, en tal caso  $E_{\perp} = -E$ , y  $\int E_{\perp} dA$  es igual a  $-EA$ .

4. Si  $E$  es tangente a una superficie en todos los puntos, por tanto  $E_{\perp} = 0$  y la integral con respecto a esa superficie es cero.

5. Si  $E = 0$  en todos los puntos de una superficie, la integral es cero.

6. En la integral  $\int E_{\perp} dA$ ,  $E_{\perp}$  es siempre la componente perpendicular del campo eléctrico total en cada punto de la superficie gaussiana cerrada. En general, este campo puede deberse en parte a cargas situadas dentro de la superficie y en parte a cargas que están afuera de ella. Incluso cuando no hay carga dentro de la superficie, el campo en todos los puntos de la superficie gaussiana no es necesariamente cero. De cualquier manera, en ese caso la integral con respecto a la superficie gaussiana, es decir, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana, siempre es cero.

7. Una vez evaluada la integral, resuelva la ecuación (22.9) a favor de la variable que busca.

**EVALUAR** la respuesta: En muchos casos el resultado será una función que describe cómo varía la magnitud del campo eléctrico con la posición. Examine esta función con ojo crítico para ver si es razonable.

Documento 2.3. Estrategia sugerida para resolver problemas de la ley de Gauss. Sears et al., 2004.

Las estrategias explícitas enseñadas resultan de una rigidez excesiva, y su reiterada aplicación a problemas paradigmáticos o tipo puede llevar, por un lado, a una cierta algoritmización del proceso de resolución y a un aprendizaje de carácter memorístico de los conceptos, por otro.

El fracaso de los estudiantes en resolución de problemas se atribuye, en esta orientación, a la falta de conocimientos de la materia específica y a la mala estructuración mental de los mismos (Chi et al., 1982; Kempa, 1986; Elio y Scharf, 1990). En consecuencia, un supuesto que subyace claramente en las investigaciones que consideran las diferencias entre expertos y novatos es

el de la responsabilidad individual (hay quien resuelve bien los problemas y hay quien no), es decir, convierte al estudiante en el principal responsable de los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje. Pero, esta explicación resulta difícilmente aceptable cuando nos enfrentamos a un fracaso tan generalizado.

Otra hipótesis inherente a esta orientación teórica es que una vez que se conoce qué es lo que hacen los expertos para resolver problemas con éxito, no hay más que *transmitírsele* a los novatos para que actúen como ellos. Así pues, dado que los expertos poseen unos conocimientos procedimentales –destrezas y habilidades– (Ferguson-Hessler, 1990; Hegarty, 1991) que no poseen los novatos, es necesario detectarlos como perfiles ideales para ser transmitidos a los novatos.

Sin embargo, otros trabajos de investigación indican que para que los estudiantes desarrollen las capacidades propias del dominio científico (resolver problemas, justificar opciones, analizar soluciones...) *es necesario practicarlas* y, para ello, hay que crear ambientes de aprendizaje en los que se demande al estudiante el análisis de pruebas o datos, comparar las soluciones dadas por distintos grupos y justificar las estrategias empleadas (Gil, 1993; Duschl, 1995; Jiménez Aleixandre, 1998).

Al hilo de las objeciones que hemos realizado a las propuestas didácticas derivadas de la comparación entre expertos y novatos, el trabajo de Huffman (1997) analiza el efecto que ejerce una metodología didáctica de resolución de problemas de acuerdo con los principios expuestos, y que el autor denomina “*instrucción explícita de resolución de problemas*”, sobre la capacidad de los estudiantes para resolver problemas y comprender conceptos. Los resultados del estudio indican que esta metodología ayuda a mejorar la calidad de las representaciones del problema que hacen los estudiantes respecto a aquéllos que utilizan una técnica de resolución habitual en los libros de texto. Sin embargo, no hay evidencias de que los estudiantes tratados mejoran respecto a los del grupo de control en lo que se refiere a la resolución propiamente dicha o ejecución matemática del problema. Así mismo, respecto a la comprensión conceptual, los re-

sultados indican que a pesar del énfasis en la instrucción explícita en los aspectos conceptuales de la resolución de problemas, esta metodología no mejora necesariamente la comprensión de estos aspectos conceptuales respecto a los estudiantes que utilizan la metodología habitual.

Así pues, en nuestra opinión, esta línea de investigación ha contribuido a que se tenga una mejor información sobre el cómo las personas resolvemos problemas y desde un punto de vista instruccional pone de relieve la importancia de desarrollar en los estudiantes el hábito de realizar descripciones explícitas (Reif, 1995). Sin embargo, esta visión se encuentra alineada con la concepción de enseñanza por transmisión verbal de conocimientos, donde se tratará de transmitir estrategias y procedimientos, esto es, se favorecerán los procesos cognitivos reproductivos o de recuerdo de soluciones, frente a los procesos cognitivos productivos de construcción o de creación de soluciones (Gil, 1983; Ramírez et al., 1994). El estudiante, por tanto, no participa plenamente en la elaboración de las estrategias de resolución ni de los procedimientos lo que, desde una perspectiva constructivista del proceso de enseñanza aprendizaje de las ciencias, resultaría requisito imprescindible (Furió et al., 1994).

Si tal y como hemos justificado anteriormente, la aplicación de algoritmos, por su propia característica de conjunto de reglas válidas sólo para determinadas situaciones específicas, no podrá servirnos cuando nos encontremos ante verdaderos problemas y, si tampoco la actitud de los expertos ante la resolución de problemas para los que poseen una gran pericia podrá servirnos de modelo de referencia puesto que su perspectiva es la de un resolvente que conoce el camino de resolución y no la de aquél que se enfrenta a un problema de verdad, con objeto de responder a la pregunta inicial de 'cómo encontrar ese camino, esa salida que nos lleve a la solución', pasamos a describir el modelo de resolución de problemas como actividad de investigación orientada, que como veremos, integra las aportaciones más relevantes de la investigación didáctica.

Según este planteamiento, la respuesta habrá que encontrarla en la propia Ciencia, en lo que los científicos hacen

cuando se enfrentan a problemas para ellos desconocidos, es decir, indagar e investigar. Y si bien es cierto que términos como investigación, terminología científica o método científico no tienen una clara significación unívoca y, por tanto, deberemos precisar lo que con ellos pretendemos significar, resulta indudable que el tratamiento científico posee unas características generales transferibles en parte a la resolución de problemas en el ámbito docente (Ramírez et al., 1994).

En efecto, la resolución de verdaderos problemas es la tarea de los científicos. Los nuevos enfoques epistemológicos llevan a considerar el conocimiento científico como tentativa, no equiparable a verdad absoluta y poseedor de un status realista hipotético (Izquierdo, 1996). Somos conscientes de que la naturaleza de la actividad científica ha dado lugar a serios debates en los que se manifiestan profundas diferencias entre los expertos (Mellado y Carracedo, 1993). Ello genera, en ocasiones, una cierta perplejidad entre los investigadores en didáctica y lleva a plantear si tiene sentido hablar de una concepción correcta de la Ciencia (Stinner, 1992). No obstante, existen ciertas características esenciales de la metodología científica sobre las que existe un amplio consenso y que podríamos resumir como sigue (Hodson, 1986; Chalmers, 1987; Cleminson, 1990; Gil et al., 1999):

*· Los problemas que acometen los científicos no están definidos con precisión. Inicialmente es necesaria una fase de análisis que permita encontrar objetivos de estudio claros y definidos y en la que se establezcan condiciones que delimiten el problema.*

*· Las conjeturas sobre las dependencias entre determinadas magnitudes del sistema, las suposiciones sobre la evolución del mismo, en definitiva, la generación de hipótesis por especulación creativa es una fase fundamental del método científico sin la cual no sería posible resolver el problema, pues el investigador no parte generalmente de los datos sino que los busca a partir de las hipótesis.*

*· La validez del resultado de un trabajo científico, no se concede sólo porque el procedimiento seguido se considere correcto en todos sus aspectos, además tendrá que establecer su coherencia o incoherencia, por referencia a las hipótesis hechas y al cuerpo de conocimientos de partida.*

Es esta imagen imprecisa y flexible de la metodología científica, en la que nada garantiza que se llegará a buen resultado, lejos de toda idea de algoritmo, es la que mejor puede describir y orientar el tratamiento de un verdadero problema, incluyendo los problemas de lápiz y papel para los estudiantes (Gil et al., 1988).

Al hilo de lo anterior cabe decir que, a pesar de las referencias continuas a la metodología científica por los profesores de ciencias, muy poco en la práctica habitual refleja de manera adecuada esta orientación (Glaser, 1992). Esto es especialmente cierto en lo que se refiere a la resolución de problemas. En efecto, lo más frecuente es encarar la resolución de problemas como un proceso absoluto y explícitamente dirigido a reconocer el problema como una situación estándar; es decir, como un no problema o a transformar el problema en situaciones estándar no problemáticas (Gil et al., 1988).

El siguiente aspecto que nos deberemos replantear es el referente a las características que habrán de reunir los problemas propuestos en el ámbito escolar para que puedan ser abordados bajo la perspectiva de la metodología científica como verdaderos problemas.

Los problemas del ámbito de las asignaturas de ciencias, como ocurre en general con los problemas académicos utilizados en el aula, no surgen espontáneamente, sino intencionadamente para servir a fines didácticos. Además, estos problemas poseen una solución conocida por anticipado (por el profesor) y generalmente incluyen unos datos inicialmente explícitos.

Los problemas académicos contemplan habitualmente los siguientes elementos (Dumas-Carré, 1987):

- *La descripción de un dispositivo y su funcionamiento, eventualmente acompañado de un esquema.*
- *Las condiciones experimentales a que está sometido.*
- *Unas simplificaciones o modificaciones parciales que inscriben el fenómeno estudiado en un marco teórico simple.*

- *Los datos o valores tomados por ciertas magnitudes que se llaman a menudo 'condiciones iniciales'.*
- *Unas cuestiones.*
- *Unas consignas de respuestas, más o menos implícitas, interviniendo en la formulación de la pregunta.*

Vemos pues que los enunciados que habitualmente se utilizan en la enseñanza de la Física, incluidos en los libros de texto o recopilados por los profesores, y los enunciados planteados por los métodos de resolución propuestos en la última década presentan, en general, las siguientes características formales:

- *El contexto está muy alejado o es ajeno al medio próximo al alumno.*
- *Los términos utilizados en el texto son excesivamente académicos.*

Y, en cuanto a las características de fondo, son las siguientes:

- *Contienen todos los datos necesarios para solucionar el problema.*
- *No hay ninguna ambigüedad respecto a la incógnita.*

A los problemas cuyos enunciados presentan estas características básicas se les denomina problemas de enunciado cerrado y, en relación a los primeros defectos formales, los resultados de varias investigaciones (Driver, 1986) indican que las estructuras lógicas que utilizan los estudiantes dependen en gran medida del contexto de la tarea. Puede decirse, en consecuencia, que las situaciones problemáticas que guardan alguna relación con situaciones reconocibles por el estudiante serán, más fácilmente abordables por éste que aquéllas que, por su presentación más académica, se incluyen para él en un contexto menos conocido o extraño. Este factor, junto con el lenguaje utilizado en el enunciado, influyen en la actitud del estudiante hacia la resolución de problemas (Kempa, 1986).

La inclusión de todos los datos en los enunciados para tomarlos como punto de partida y la explicitación de todas las condiciones reinantes, parece ser considerado como algo inevi-



table por la gran mayoría de los modelos de resolución de problemas, a pesar de la constatación realizada de las dificultades de los alumnos para reconocer dicha información. Así, Selvaratnman (1983) indica que muchos estudiantes en lugar de centrarse en lo que es necesario para clarificar el problema, intentan manipular los datos y las ecuaciones con las que están familiarizados, por lo que si se empieza por los datos el peligro de ir en una dirección equivocada es mayor.

Esta dificultad no debe sorprender ya que la búsqueda de los datos sólo tiene sentido a la luz de una visión cualitativa que profundice en la situación, así como a hipótesis precisas (Gil et al., 1988).

Si de este modo, al resolver un problema el alumno se ve abocado a buscar aquellas ecuaciones que pongan en relación los datos y las incógnitas proporcionadas en el enunciado, cayendo así en un puro operativismo, no basta con denunciar dicho operativismo: se trata de hacerlo imposible atacando sus causas (Ramírez et al., 1994).

La comprensión de que la presencia de los datos en el enunciado, así como la indicación de todas las condiciones existentes, todo ello como punto de partida, responde a concepciones inductivistas y orienta incorrectamente la resolución, constituye un paso esencial para desbloquear la enseñanza habitual de los problemas y sus limitaciones. Pero al mismo tiempo, genera también una cierta inquietud de que al eliminar los datos, los enunciados se tornen muy ambiguos y que los alumnos se encuentren perdidos. Sin embargo, es la ambigüedad una de las características principales de las situaciones verdaderamente problemáticas, y uno de los aspectos principales de la metodología científica es concretar las situaciones abiertas y concebir las simplificaciones necesarias (Gil et al., 1988).

La transformación de enunciados cerrados en abiertos es fácil y proporciona un trabajo más efectivo e interesante a los alumnos y profesores (Garret et al., 1990) pudiéndose adecuar fácilmente al grado de dificultad de cada nivel educativo. Con esta misma opinión se expresan Gil y Martínez-Torregrosa

(1987), señalando que estas traducciones no plantean dificultades mayores y que cualquier enunciado habitual es transformable en situación problemática abierta.

Veamos un primer ejemplo, de los varios que se plantearán a lo largo de este trabajo, de transformación de enunciados cerrados en problemas de los denominados abiertos y que cumplen las características anteriormente descritas.

## ENUNCIADO HABITUAL

*Se libera un protón desde el reposo en un campo eléctrico uniforme de  $8 \cdot 10^4$  V/m dirigido a lo largo del eje X positivo (se da una figura). El protón se desplaza 0,5 m en la dirección de E. Calcular la velocidad del protón después de que se ha desplazado, desde el reposo, una distancia de 0,5 m.*

---

Se trata de un enunciado cerrado y directivo en el que la forma en que se presenta la información (se incluyen todos los datos y muchas acotaciones y precisiones) y la manera de presentar los interrogantes en base a una pregunta directa, desproblematiza el problema y condiciona la posterior resolución. Una posible alternativa de enunciado abierto que, tal y como se podrá apreciar más adelante cuando abordemos su resolución, permitirá desarrollar y potenciar mejor los aspectos metodológicos de la resolución, sería:

## ENUNCIADO ABIERTO

*Se quiere diseñar un dispositivo capaz de acelerar uniformemente partículas cargadas. Haciendo uso de tus conocimientos de electrostática y electrocinética, razona los fundamentos básicos de tu propuesta de diseño.*

---

Nos parece fundamental subrayar en este punto, sin embargo, que tal y como señalan los propios promotores de la metodología que estamos analizando, *es la orientación didáctica la que se cuestiona y no los enunciados en sí mismos: modificar los enunciados ayuda en una primera fase a romper los hábitos, pero*

*una vez adquirida la nueva orientación, se puede volver a los enunciados tradicionales* (Gil et al., 1988).

En consecuencia, no debemos interpretar la apertura de los enunciados como un corsé didáctico que nos obligue en todos y cada uno de los problemas que abordemos en el aula, sino más bien, como una manera de imposibilitar a los alumnos el tratamiento puramente operativo del problema y aproximar su forma de trabajo a una metodología más acorde con la de la propia Ciencia. Cuando los hábitos estén firmemente enraizados cabe esperar que cualquier problema, de enunciado abierto o cerrado, sea abordado haciendo uso de procedimientos característicos de la Ciencia.

Evidentemente, tal y como ya hemos señalado con anterioridad, la eliminación del enunciado de los datos y de las condiciones reinantes crea en los estudiantes un cierto desamparo y, únicamente por enfrentarlos a este tipo de enunciados, no queda garantizado el éxito de la actividad. Por tanto, a continuación, valoraremos qué tipo de orientaciones propone a los alumnos el método de resolución de problemas por investigación orientada para facilitar la resolución de las situaciones problemáticas abiertas.

### **Consideración del posible interés de la situación problemática planteada**

Si se desea romper con planteamientos excesivamente escolares, alejados de la orientación investigativa que el método propone, es absolutamente necesario evitar que los alumnos se vean sumergidos en el tratamiento de una situación sin haber podido siquiera formarse una primera idea motivadora (Ramírez et al., 1994).

Esta discusión previa del interés de la situación problemática, además de proporcionar una concepción preliminar y de favorecer una actitud más positiva hacia la tarea, permite una aproximación funcional a las relaciones Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS) que continúan siendo, pese a reconocerse su importancia, uno de los aspectos generalmente más olvidados en la

resolución de problemas, y que cobra aún más relevancia si cabe, en el contexto de los estudios universitarios de ciencias e ingeniería en el que se focaliza nuestro trabajo, si pensamos en la futura incorporación del alumnado al mundo laboral.

Se conoce con el nombre Ciencia, Tecnología y Sociedad a la línea de investigación en la didáctica de las Ciencias que integra el aprendizaje de la Ciencia y la Tecnología en la problemática del medio natural y social en el que se inserta. Se denominan interacciones CTS a las complejas y múltiples relaciones que existen entre la Ciencia, la Tecnología, la Sociedad y el Medio. En la actualidad, en la mayor parte de los países desarrollados, existen programas de educación e investigación en CTS, todos consistentes en mostrar la dimensión social de la Ciencia así como la influencia de los diferentes contextos sociales en el desarrollo científico y tecnológico (Solves y Vilches, 1997).

La inclusión de los aspectos CTS en la enseñanza en general, y en los enunciados de los problemas en particular, va a contribuir, no sólo a mejorar la actitud y a aumentar el interés hacia la ciencia y su aprendizaje, sino también va a permitir aprender más Ciencia y saber más sobre la Ciencia, al mostrar una imagen más completa y contextualizada de la misma (Furió y Vilches, 1997).

### **De una situación problemática a un problema concreto: análisis cualitativo**

En las investigaciones comparativas entre expertos y novatos se percibía con claridad que los expertos realizan un análisis cualitativo, una representación del dominio específico que requiere conocimientos de Física, anterior a cualquier trabajo con ecuaciones y que el alumno (novato), en cambio, inicia inmediatamente la acción mediante el uso operativo de ecuaciones (Larkin y Reif, 1979; Larkin, 1983).

Prácticamente la totalidad de los autores se muestran de acuerdo en que, con anterioridad a cualquier cálculo, es necesario realizar un planteamiento cualitativo de la situación: Lectura razonada del problema. Análisis cuidadoso de los datos y de las

incógnitas, representándolos esquemáticamente, era la sugerencia de los modelos algorítmicos (Mettes et al., 1980). O, el gran énfasis puesto en el desarrollo de habilidades de resolución de problemas relativas a representaciones múltiples, tales como representaciones gráficas, representaciones matemáticas y representaciones físicas sobre las cuales, en la propia hoja de resolución ya formateada y a disposición de los alumnos, el método OCS (Van Heuvelen, 1991) alineado con los modelos de expertos y novatos, indica las distintas facetas constituyentes de cada una de esas representaciones.

Pero cuando se habla de análisis cualitativo se trata, no sólo de hacerse una idea de la situación, lo que resulta absolutamente necesario, sino también de acotarla, de modelizarla y de simplificarla para poder abordarla; de clarificar el objetivo, lo que se busca, aspecto no siempre evidente en las situaciones problemáticas (Gil et al., 1988).

Por otro lado, la ausencia de reflexiones cualitativas previas a la resolución y el operativismo mecánico ciego se encuentra tan arraigado en los estudiantes tras años de influencia de la enseñanza habitual en los que se han limitado a solucionar problemas desproblematizados y ejercicios de aplicación directa para los cuales se conocen de antemano las vías algorítmicas o heurísticas de resolución, que las simples instrucciones y consejos que, de cara a las valoraciones cualitativas, los métodos de resolución citados puedan transmitir a estos estudiantes, resultan a todas luces, insuficientes. Los estudiantes se limitarán, en todo caso, a rellenar el formulario y a cumplir con las exigencias de representación de la situación, pero este cumplimiento formal de la instrucción transmitida no implica, necesariamente, una correcta interpretación cualitativa de la situación física planteada.

Sin embargo, la concepción de la resolución de problemas como actividad de investigación orientada da cuenta de los aspectos clave de esta aproximación cualitativa inicial, necesaria para pasar de una situación problemática abierta a un problema concreto. El hecho de eliminar los datos del enunciado obliga a realizar esta aproximación, a tomar decisiones, a modelizar la

situación y a concretarla, sin posibilidad de pasar directamente a tratamientos operativos para los cuales los alumnos no disponen de datos. Se espera además que, una vez superado el hábito operativista, los alumnos realicen dicho análisis cualitativo, incluso ante enunciados tradicionales con datos (Gil et al., 1988).

Así, cuando los estudiantes abordan la resolución del problema del *acelerador de partículas* que presentamos como primer ejemplo, ante un enunciado completamente abierto en el que, con el único dato de que la aceleración ha de ser uniforme, deben proponer un esquema de diseño de acelerador, no les quedará otra alternativa que reconocer la aproximación de planos de carga uniforme infinitos y paralelos como la base física del dispositivo. Además, deberán valorar la duplicidad en el signo de la carga, la posible ubicación de la fuente de partículas y el efecto de la masa en el movimiento de la partícula. (La resolución completa se presenta en el último apartado de este capítulo).

La verbalización es otro factor importante que se considera en este enfoque y que suele estar, por lo general, ausente en otros modelos. La exigencia de explicitar de manera oral o escrita, de principio a fin de la resolución, todos los pasos seguidos, razonamientos y su fundamentación, obliga al resolvente a pensar sus actuaciones a la vez que facilita el descubrimiento de nuevas relaciones entre principios generales y su empleo en la resolución de otros problemas (Gagné y Smith, 1962). En esta misma línea se expresa Jiménez Aleixandre (1998) al señalar que la discusión explícita en el aula, de los criterios por los que una hipótesis es preferible a otra o del camino de resolución propuesto para un problema, es una parte importante de la adopción por parte del alumnado de la cultura científica, es decir, de la forma de razonar propia de las ciencias.

Es necesario señalar que, en general, no resulta posible definir de forma precisa un problema a partir de la situación abierta que se plantea en base a un análisis del enunciado. De este análisis a menudo surgen conjeturas no muy precisas que darán lugar, posteriormente, a hipótesis más definidas que guíen la resolución.

## Distanciamiento del razonamiento basado en evidencias: el papel de las hipótesis en la resolución de problemas

Existe un consenso general entre los epistemólogos acerca del papel central de las hipótesis en el tratamiento de verdaderos problemas. En cierta medida, se puede decir que el sentido de la orientación científica –dejando de lado toda idea de *método*– se encuentra en el cambio de un razonamiento basado en evidencias, en certezas, a un razonamiento en términos de hipótesis, a la vez más creativo (es necesario ir más allá de lo que parece evidente e imaginar nuevas posibilidades) y más riguroso (es necesario fundamentar y después someter a prueba cuidadosamente las hipótesis, dudar del resultado, buscar la coherencia global). Así, son las hipótesis las que focalizan y orientan la resolución, las que indican los parámetros a tener en cuenta (los datos a buscar). Y son las hipótesis –y la totalidad del cuerpo de conocimientos en las que se basan– las que permitirán analizar el resultado y todo el proceso (Guisasola et al., 2003).

Cuando los estudiantes, por las características del enunciado propuesto o como consecuencia de la interiorización de una metodología de resolución más acorde con la Ciencia, emiten hipótesis fundadas sobre los factores de los que puede depender la magnitud buscada y sobre la forma de esta dependencia, imaginando, en particular, casos límite de fácil interpretación física, profundizan su visión cualitativa de la situación planteada y se alejan de la resolución del problema a partir de representaciones superficiales del enunciado.

Volviendo a nuestro primer ejemplo, el análisis de variables presenta varios puntos de interés. Así, con anterioridad a cualquier resolución operativa, tendrán que especular acerca de los efectos de ciertas variables (masa y carga de la partícula a acelerar, densidad de carga de los planos, distancia de separación entre ellos o la permitividad del medio) sobre el movimiento de la carga a acelerar. En este caso, al tratarse del diseño de un dispositivo concreto, no deben olvidarse las limitaciones que ello supone ni, tampoco, se puede omitir alguna reflexión respecto a cuáles son las variables que en el acelerador verdaderamente podríamos controlar. (Ver resolución al final de este capítulo).

Es cierto también que a veces, incluso muy a menudo, los alumnos introducen ideas ‘erróneas’ cuando formulan hipótesis pero esto, lejos de ser negativo, constituye, quizás, la manera más eficaz de sacar a la luz sus preconcepciones y, precisamente, la falsación de las hipótesis que resulta de la solución del problema se convierte en un conflicto cognitivo y, por tanto, en una herramienta de cambio conceptual.

Sin embargo, en general, en la enseñanza de las ciencias, la emisión de hipótesis brilla por su ausencia (Gil y Martínez-Torregrosa, 1987), y esto responde al hecho de que el paradigma dominante en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias es de simple transmisión-recepción de conocimientos previamente elaborados (Gil, 1983; Millar y Driver, 1987).

Esta realidad tiene su fiel reflejo en la gran mayoría de los modelos de resolución de problemas propuestos al amparo de las diversas líneas de investigación. Ni los modelos algorítmicos ni las estrategias explícitas de resolución propuestas desde la perspectiva de expertos y novatos hacen referencia alguna a la posibilidad de incluir valoraciones hipotéticas sobre la evolución del sistema como parte importante dentro del análisis cualitativo. Esta omisión, siendo importante en sí misma, tiene además incidencia en otras etapas de la estrategia de resolución propuesta en los diversos modelos, como es el caso del análisis de resultados. Si con carácter previo no se ha hipotetizado sobre las posibles magnitudes que pueden intervenir en el proceso y sobre la forma de esta incidencia, no dispondremos de un marco de referencia respecto al que contrastar el resultado obtenido, por lo que el análisis solicitado sólo podrá ser abordado de una manera parcial.

A partir del análisis cualitativo, de la emisión de hipótesis y del cuerpo de conocimientos que se posee, se podrán elaborar tentativas de resolución de la situación planteada. En palabras de Einstein (citado por Martínez-Torregrosa, 1987): *“Ningún científico piensa con fórmulas. Antes de que el físico empiece a calcular, debe de tener en el cerebro el curso de los acontecimientos. Estos últimos, en la mayor parte de los casos, deberían poder ser explicados con palabras sencillas. Los cálculos y las fórmulas vienen después”*.



## En busca del camino de resolución: las estrategias como tentativas

Si el cuerpo de conocimientos de que dispone el alumno juega, como hemos visto, un papel esencial en los procesos de resolución, desde la representación inicial del problema y la manera de modelar la situación, hasta en las hipótesis que se avanzan, es sin duda en la búsqueda de caminos de resolución donde su papel resulta más evidente (Guisasola et al., 2003).

En efecto, los problemas de lápiz y papel son situaciones que se abordan disponiendo ya de un corpus de conocimientos suficientemente elaborado para permitir la resolución: su 'estatus' en los libros de texto es el de problemas de 'aplicación'. Son situaciones que se pueden resolver con los conocimientos ya elaborados, sin que haya necesidad de nuevas verificaciones experimentales. Es por tanto lógico y correcto que, en la literatura sobre resolución de problemas, se dé mucha importancia a un buen conocimiento teórico. Ya no resulta tan correcto que se interprete el fracaso en la resolución como evidencia de la falta de esos conocimientos teóricos: se olvida que las estrategias de resolución no derivan automáticamente de los principios teóricos sino que son también construcciones tentativas, que parten del planteamiento cualitativo realizado, de las hipótesis formuladas y de los conocimientos que se poseen, pero que requieren imaginación y ensayos (Furió et al., 1994).

Según este enfoque las estrategias de resolución son, en cierta medida, el equivalente a los diseños experimentales en problemas que exigen una contrastación.

Por ejemplo, en el *problema del acelerador de partículas*, el carácter conservativo de la fuerza eléctrica hace que un planteamiento energético nos relacione de una manera sencilla la velocidad alcanzada por la partícula con las variables del dispositivo. Así mismo, al poder aproximar el campo entre placas a un valor constante para separaciones muy pequeñas, la estrategia cinemático-dinámica resulta fácil de aplicar. Sin embargo, es importante que los estudiantes reflexionen acerca de la aplicabilidad de esta última vía para el caso más general en el que la interacción eléctrica varíe con la posición.

Tal y como subrayan Gil et al. (1988), es necesario que la resolución esté fundamentada y claramente explicitada (Reif, 1983) lo que exige, evidentemente, verbalización y se aleja de los tratamientos puramente operativistas, sin ninguna explicación, que se encuentran tan a menudo en los libros de texto (Ramírez et al., 1994). Ello exige también una resolución literal hasta el final (Mettes et al., 1980) lo que permite que el tratamiento se mantenga próximo a los principios manejados y facilitará, además, el análisis de resultados. La resolución literal podrá ser posteriormente completada introduciendo datos, bien aportados por la bibliografía, el profesor o simplemente considerando valores plausibles de las magnitudes en cuestión.

Así, para el *problema del acelerador*, teniendo en cuenta que hemos analizado los fundamentos físicos de un dispositivo experimental, es importante hacerse una idea de las velocidades alcanzables con él, y encontrarle alguna aplicación directa en sistemas tecnológicos, reforzando así el interés práctico de la valoración teórica realizada. Por ello, para saber si efectivamente un dispositivo de estas características es realmente un acelerador eficaz, podemos considerar un caso concreto y valorar la magnitud de la velocidad alcanzada. Por ejemplo, en el cañón de electrones de una TV el campo eléctrico es de  $2,5 \cdot 10^6 \text{N/C}$ , en una longitud de 1cm. Buscando en la bibliografía los valores de las constantes carga y masa del electrón, se obtiene una velocidad de  $9,4 \cdot 10^7 \text{m/s}$  (del orden de la tercera parte de la velocidad de la luz).

## **Sobre la consistencia del proceso de resolución: el análisis de resultados**

El análisis del resultados de una situación problemática es consustancial a la actividad científica. Se considera, así mismo, fundamental para los problemas de lápiz y papel en todos los modelos de resolución analizados en este capítulo. Pero este análisis cobra todo su valor cuando se realiza con relación a las hipótesis emitidas y al corpus de conocimientos (Gil, 1997).

A pesar de ello, desde del modelo de resolución de problemas por investigación orientada, surge la pregunta de por qué ni

Reif ni otros autores que resaltan la importancia del análisis de resultados y se centran en la elaboración de las estrategias de resolución, e incluso se preocupan de los diversos tipos de representaciones que pueden contribuir al análisis cualitativo de la situación, no han creado el nexo lógico entre las hipótesis y el análisis de resultados. La respuesta se encuentra, una vez más, en la aceptación incuestionada del tipo habitual de enunciado y en la orientación didáctica asociada al mismo, consistente en desproblematizar los problemas: puesto que el profesor intenta explicar claramente lo que se debe hacer, y él no tiene ninguna duda, no hace falta verificar los resultados.

La necesidad de realizar una resolución literal se aprecia con claridad cuando alcanzamos el resultado y éste se refleja en una ecuación en la que todas las magnitudes se representan por símbolos literales. Esto posibilita la contrastación de las hipótesis sobre la dependencia de variables que se ha emitido con anterioridad y permite cotejar el resultado con el esquema conceptual del alumno, convirtiéndose así la resolución de problemas en herramienta de aprendizaje (Reyes, 1991).

En el caso del *acelerador de partículas*, tras contrastar la dependencia de la velocidad de la partícula con las variables características del dispositivo y analizar su coherencia dimensional, en el análisis de resultados, si no ha surgido con anterioridad, es conveniente valorar la influencia del medio entre placas en el diseño de acelerador y justificar la conveniencia de hacer el vacío en su interior.

### **De la resolución de un problema al planteamiento de otros: nuevas perspectivas**

Como en cualquier investigación, los resultados pueden ser origen de nuevos problemas. Se deberá poner en juego nuevamente la creatividad de estudiantes y profesores para considerar nuevas perspectivas abiertas tras la resolución de este problema contemplando, por ejemplo, la conveniencia de abordar la situación a un nivel de mayor complejidad o estudiando sus implicaciones teóricas (profundización en la comprensión de algún concepto) o prácticas (posibilidad de aplicaciones técnicas).

En ocasiones, también puede resultar de gran interés solicitar la elaboración de una memoria del tratamiento del problema, es decir de la investigación realizada, que explique el proceso de resolución y que destaque los aspectos de mayor interés en el tratamiento de la situación considerada.

Tras esta descripción del modelo de resolución de problemas por investigación, cuyos aspectos esenciales se recogen en el cuadro 2.1, pasamos a precisar ciertas valoraciones sobre el mismo.

### **Algunas precisiones sobre el modelo propuesto**

Es conveniente remarcar que las orientaciones precedentes no constituyen un algoritmo que pretenda guiar paso a paso la actividad de los alumnos. Muy al contrario, se trata de indicaciones genéricas destinadas a llamar la atención contra ciertos ‘vicios metodológicos’ connaturales: la tendencia a caer en operativismos ciegos o a pensar en términos de certeza y no de hipótesis, lo que se traduce en no pensar en posibles caminos alternativos de resolución, no analizar los resultados, etc. (Ramírez et al., 1994). Estas orientaciones intentan, pues, ayudar a superar lo que se ha denominado ‘metodología de la superficialidad’ (Carrascosa y Gil, 1985) o metodología del ‘sentido común’ (Hasweh, 1986), haciendo posible un tratamiento de los problemas a la vez imaginativo y riguroso, acorde con lo que constituye la metodología científica.

Así mismo, hay que aclarar que el paralelismo establecido entre la actividad de los científicos y este modelo no es rígido ni completo. No se pretende una reproducción exacta del comportamiento de los científicos, sino hacer uso de procedimientos para resolver problemas de lápiz y papel que se han mostrado sumamente eficaces en la resolución de problemas científicos (Reyes, 1991, Guisasola et al., 2001).

Otro aspecto a destacar es que, si bien este modelo de resolución de problemas como actividad de investigación orientada se aparta de las líneas predominantes en resolución de problemas, esto no quiere decir que se rechacen las aportaciones parciales

positivas que otros han realizado; bien al contrario, una revisión de la literatura lleva a la conclusión de que los resultados fructíferos que se ponen de manifiesto en dichos trabajos son coherentes con este modelo y ayudan a validarlo.

Por otro lado, el modelo aporta, desde una nueva perspectiva, una coherencia que antes no tenían a las diferentes aportaciones dispersas. Así, autores como Glaser (1992) abogan por la toma en consideración de la metodología científica; Gilbert (1980), Selvaratnman (1983), Brissaud (1987), Maloney y Siegler (1993), Langlois, et al. (1995), Leonard et al. (2002), ponen en cuestión que los datos del enunciado deban ser el punto de partida; Gilbert (1980), Reif (1983), Brich (1986), Dumas-Carré (1987), McMillan y Swadener (1991), Leonard et al. (2002), subrayan la importancia del análisis cualitativo; Caillot y Dumas-Carré (1987), Wenham (1993), Seroussi (1995), remarcan la importancia de la emisión de hipótesis; Mettes et al. (1980), Reif (1983), Jansweijer et al. (1987), se muestran de acuerdo en la necesidad de analizar los resultados, y la consideración de casos límite es valorada por Mettes et al. (1980), Brich (1986), Caillot y Dumas-Carré (1987), Reif (1995); en cuanto a la elaboración de estrategias de resolución inciden un buen número de investigadores como Larkin y Reif (1979), Gilbert (1980), Selvaratnman (1983), Caillot y Dumas-Carré (1987), Mestre et al. (1993), Reif (1995), Leonard et al. (2002).

Bajo esta perspectiva globalizadora, el conocimiento procedimental que interviene en la actividad investigativa científica y que, por tanto, deberá orientar la resolución de problemas, sería el que se resume en el cuadro 2.1

***Realización de análisis cualitativo.***

- a) Clarificar el objetivo, lo que se busca, aspecto no siempre evidente en las situaciones problemáticas.*
- b) Reconocer un interés por resolver el problema.*
- c) Realizar descripciones verbales o gráficas de la situación para poder tomar las decisiones cruciales que la resolución de un problema exige al comienzo.*

**d) Analizar el sistema físico en estudio:**

- Acotar la situación para modelizarla y simplificarla si es preciso.
- Reconocer un marco teórico de referencia.
- Identificar variables o, en su caso, buscar datos.
- Identificar partes del problema.

**e) Plantear interrogantes.**

**Emisión de hipótesis: Descriptivas o predictivas si responde a “¿Qué?”.  
Explicativas si además responde, en base al marco teórico, a “¿Por qué?”.**

- a) Predecir la posible evolución del sistema.
- b) Establecer procesos de control y exclusión de variables.
- c) Establecer relaciones de dependencia entre variables.
- d) Analizar casos límite de especial relevancia física.

**Elaboración de estrategias como tentativas: Hipótesis estratégicas, descriptivas si responde a “¿Cómo?”. Explicativas si además responde, en base al marco teórico, a “¿Por qué?”.**

- a) Presentar una descripción secuencial de actuaciones para alcanzar la solución.
- b) Subdividir el problema en etapas, si fuera posible.
- c) Identificar las leyes y principios fundamentales a utilizar en la resolución.
- d) Valorar posibles vías alternativas.

**Resolución-verbalización.**

- a) Resolver literalmente hasta el final.
- b) Verbalizar los aspectos más destacables.
- c) Obtener valores numéricos.
- d) Representar gráficamente el resultado.

**Análisis de resultados: Aspectos relacionados con una valoración justificada de la respuesta.**

- a) Analizar la coherencia teórica de la respuesta.
- b) Analizar la plausibilidad del valor de la respuesta.
- c) Analizar la coherencia dimensional de la respuesta.
- d) Analizar la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema en el sentido que cabría esperar (según las hipótesis).
- e) Analizar si se ajusta la respuesta a lo que se podría esperar en situaciones sencillas y especiales, por ejemplo, las correspondientes a valores extremos de las variables (según las hipótesis).
- f) Analizar si se obtiene la misma respuesta por otro medio diferente de resolución.

***Formulación de nuevas perspectivas.***

- a) Relacionar con otras cuestiones del mismo o de distinto tema.***
- b) Abordar con otro nivel de profundidad.***
- c) Plantear otros modelos. Formular hipótesis en dichos marcos.***
- d) Plantear nuevos problemas.***

*Cuadro 2.1. Conocimiento procedimental en resolución de problemas como investigación orientada.*

Recogemos, como opinión cualificada, la valoración que en el Handbook of Research on Science Teaching and Learning (Maloney, 1994, p.344) se emite sobre este modelo: “an interesting alternative approach to problem solving”.

Para concluir con esta presentación del modelo de resolución de problemas como actividad de investigación orientada, diremos que una de las principales limitaciones que han tenido las investigaciones sobre resolución de problemas y los modelos que de ellas se derivan, es, precisamente, el tratamiento aislado al que ha sido sometida la resolución de problemas, obviando aspectos fundamentales del aprendizaje.

En este sentido, el modelo que proponemos trata de superar estas deficiencias al integrar la resolución de problemas en un modelo global de enseñanza-aprendizaje como investigación orientada (Guisasola et al., 2002).

Este modelo, pretende que los alumnos (re)construyan los conocimientos mediante estrategias didácticas próximas a las empleadas por la ciencia para resolver problemas científicos, es decir, se persigue que las aproximaciones entre la naturaleza de la actividad científica y la naturaleza del aprendizaje, puedan proporcionar nuevas estrategias didácticas integradoras que consigan el triple cambio conceptual, metodológico y actitudinal deseado en los estudiantes de ciencias (Coll, 1987). En este contexto, resulta claro que la posibilidad de identificar signos de aptitudes intelectuales relacionadas con los procedimientos característicos de la ciencia que acompañan al aprendizaje, debería suponer una importante referencia para la aplicación del propio modelo de enseñanza-aprendizaje.

## RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA ABIERTO “ACELERADOR DE PARTÍCULAS”

### **Enunciado**

*Se quiere diseñar un dispositivo capaz de acelerar uniformemente partículas cargadas. Haciendo uso de tus conocimientos de electrostática y electrocinética, razona los fundamentos básicos de tu propuesta de diseño.*

### **Observación**

*Ante las dificultades lógicas de los estudiantes al tratar de resolver el problema por sí mismos, el profesor podría guiarlos en el proceso de resolución. Para ello, se utilizan preguntas que orientan la discusión del problema. En la resolución se han indicado cada una de las preguntas que se podrían plantear. Más adelante, en este libro, se detallará la puesta en escena en el aula de la propuesta didáctica que aquí presentamos.*

### **Resolución**

*¿Qué distribución de carga te parece la más adecuada para producir una aceleración constante sobre la partícula?*

*Para conseguir una aceleración constante en la partícula cargada, deberemos ejercer sobre ella una fuerza constante, por lo que el campo producido por la distribución de carga que seleccionemos como fuente impulsora del dispositivo, deberá ser constante.*

*La naturaleza de la interacción eléctrica hace que su intensidad disminuya con la distancia. Únicamente hemos visto un caso en el que, asumiendo la aproximación de distribución infinita (bien porque consideramos posiciones muy próximas, o bien porque sus dimensiones son realmente grandes) el campo eléctrico es constante. Se trata del plano infinito con distribución uniforme de carga:*

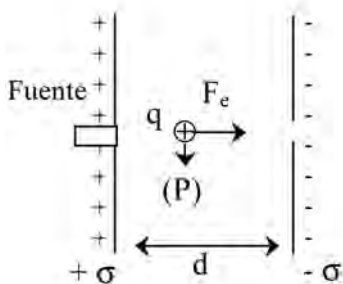
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

*Por otro lado, teniendo en cuenta el principio de superposición, si consideramos dos planos infinitos con cargas iguales y opuestas en la región comprendida entre ambos el campo se duplica:*

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{Ésta parece la opción más interesante.}$$



¿Cuáles son las interacciones sobre la carga mientras atraviesa el acelerador y qué efecto producen en ella?



Una partícula de carga  $q$  (por ejemplo positiva) y de masa  $m$  se verá afectada por la interacción eléctrica y la gravitatoria. Ocurre, a nivel de partículas subatómicas, que el valor de la fuerza electrostática es, generalmente, mucho mayor que el peso, de forma que podemos despreciar el efecto de esta última. Con esta aproximación el problema se simplifica puesto que, si se tiene en cuenta sólo la fuerza electrostática, la partícula describirá un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado. (También se podría añadir otro sistema de placas paralelas cuya fuerza electrostática fuera igual y opuesta al peso y evitar así desviaciones).

Por otro lado, si la carga es positiva, la fuente de la cual se liberen estas partículas deberá colocarse junto a la placa positiva. Y justamente enfrente, en el lado de la placa negativa, habría que hacer una pequeña perforación por la que puedan salir las cargas con una determinada velocidad.

¿Qué variables deberíamos poder controlar en el dispositivo para regular la velocidad alcanzada por las partículas que salen de él?

$$v = v(\sigma, q, d, m)$$

Cuanto mayor sea  $\sigma$ , mayor será la fuerza eléctrica y mayor la velocidad. Así mismo, mayor será la disminución de energía potencial electrostática al pasar de una placa a la otra, mayor el incremento de energía cinética y mayor la velocidad.

Cuanto mayor sea  $q$ , mayor será la fuerza eléctrica y mayor la velocidad. Así mismo, mayor será la disminución de energía potencial electrostática al pasar de una placa a la otra, mayor el incremento de energía cinética y mayor la velocidad. Sin embargo ésta no es una variable propia del dispositivo, sino que viene dada con la partícula a acelerar.

Cuanto mayor sea  $d$ , mayor será el tiempo durante el cual actúa la fuerza eléctrica y mayor la velocidad. Así mismo, mayor será la disminución de energía potencial electrostática al pasar de una placa a la otra, mayor el incremento de energía cinética y mayor la velocidad. Sin embargo, debemos recordar que, a no ser que utilicemos placas muy grandes, lo que podría suponer alguna limitación de espacio,  $E$  solamente es constante para posiciones muy próximas a las placas por lo que  $d$  no puede ser incrementada indiscriminadamente si queremos mantener una aceleración constante.

*Cuanto mayor sea la masa  $m$ , más resistencia opondrá a ser acelerado por la fuerza eléctrica y por tanto alcanzará menor velocidad. Así mismo, con la energía cinética ganada de la disminución de energía potencial electrostática, a mayor masa menor velocidad. Sin embargo ésta tampoco es una variable propia del dispositivo, sino que viene dada con la partícula a acelerar.*

*Algunos estudiantes pueden proponer como variables independientes la carga neta de las placas,  $Q$ , o el área de las mismas,  $S$ , pero al tratarse de un plano de dimensiones infinitas (en nuestra aproximación), es la relación  $Q/S$ , es decir, la densidad superficial de carga, la magnitud que parece más apropiada para el control.*

*Habrà que tener en cuenta, también, que la magnitud de las variables  $\sigma$  y  $d$  características del dispositivo deberá alcanzar un compromiso entre el campo interno y la ruptura del dieléctrico que rodee a las placas en el caso de la densidad de carga y entre un máximo recorrido y la aproximación de campo constante en el caso de la distancia entre placas.*

*¿Cómo podríamos obtener la expresión de la velocidad en función de estas magnitudes?*

*Encontramos dos vías alternativas para la resolución:*

**a)** *Como la única fuerza que realiza trabajo, la fuerza eléctrica, es conservativa, la energía se mantendrá constante durante el proceso:*

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_+ = \frac{1}{2}mv^2 + qV_- \quad \text{Luego, } v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{2q\sigma d}{\epsilon_0 m}}$$

*donde hemos tenido en cuenta que  $V_+ - V_- = V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$*

**b)** *Al ser un M.R.U.A (lo hemos razonado con anterioridad), si aplicamos la segunda ley de Newton para obtener la aceleración, las ecuaciones cinemáticas nos permitirán obtener la velocidad buscada:*

$$F = qE = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = ma$$

*Con  $a = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \text{cte}$  y  $v = \sqrt{2ad}$  obtenemos el mismo resultado para la velocidad.*

*¿Se cumplen nuestras hipótesis?*

*Observamos en el resultado obtenido que, además de las variables consideradas en las hipótesis, figura en la expresión de la velocidad el término  $\epsilon_0$ . Si en lugar del vacío tuviéramos en el espacio entre placas otro medio, la velocidad alcanzada sería diferente. Si el material fuera conductor, las placas se descargarían. Si fuera dieléctrico, el campo en su interior, por efecto de la polarización inducida en sus moléculas, sería menor y, por ello, la aceleración producida también disminuiría.*

*En definitiva, la situación ideal parece darse cuando entre placas mantengamos el vacío. Por otro lado, esta situación aporta las ventajas de evitar la ruptura del dieléctrico entre placas, así como posibles choques entre la partícula que se acelera y las moléculas del material dieléctrico.*

*¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?*

$$\left( \frac{\frac{C}{m^2} m}{\frac{C^2}{Nm^2} kg} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m}{s}$$

*¿Alcanzaríamos con partículas reales velocidades elevadas en un acelerador de estas características?*

*Para saber si efectivamente un dispositivo de estas características es realmente un acelerador eficaz, podemos considerar un caso concreto y valorar la magnitud de la velocidad alcanzada. Por ejemplo, en el cañón de electrones de una TV el campo eléctrico es de  $2,5 \cdot 10^6 N/C$ , en una longitud de 1cm. Buscando en la bibliografía los valores de las constantes carga y masa del electrón, se obtiene una velocidad de  $9,4 \cdot 10^7 m/s$  (del orden de la tercera parte de la velocidad de la luz).*

### 3. ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA HABITUAL DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En los capítulos previos hemos realizado una presentación general de la problemática y hemos concluido que, desde un punto de vista de los resultados de la investigación en Enseñanza de la Física, es necesario reconducir la actividad de resolución de problemas de Física en cursos introductorios de Universidad.

El análisis de la situación hasta aquí realizado permite suponer que el fracaso generalizado que se da en la resolución de problemas no se debe únicamente a responsabilidades individuales de los estudiantes, sino a la utilización de una metodología de resolución no adecuada y que presenta deficiencias didácticas, epistemológicas y procedimentales. Es decir, entendemos que la enseñanza habitual de resolución de problemas tipo como aplicación de las leyes y conceptos, se muestra como un planteamiento didáctico ineficaz.

Así mismo, cabe pensar que los estudiantes resuelven los problemas de Física en consonancia con la forma de presentación y con los procedimientos de resolución que para estos problemas se han utilizado en la enseñanza.

Esto es, en realidad, en nuestras aulas no se enseña a resolver verdaderos problemas en base a unas orientaciones globales que permitan a los estudiantes adquirir los procedimientos propios de la Ciencia. Fundamentalmente, el profesor resuelve problemas tipo de aplicación que el alumno ha de asimilar y reproducir cuando se enfrente a enunciados similares. Esta forma de actuar, en la que el profesor realiza una exposición lineal de la resolución, minusvalora la fase inicial de análisis del problema, hasta el punto de que en múltiples ocasiones es usurpada a los estudiantes aunque mentalmente la tenga en cuenta el profesor, e impide el tratamiento del mismo en términos de hipótesis, sin lo cual se desproblematiza el problema y se induce a un operativismo ciego tantas veces criticado en nuestros estudiantes.

Tampoco difieren las resoluciones presentadas en los libros de texto respecto de las que acabamos de describir, lo cual es absolutamente coherente pues los propios profesores se surten del material ofertado en los libros de texto y son esos ejercicios y problemas los que, de forma análoga a la planteada en los libros, se explican en el aula ante los alumnos.

Estas estrategias didácticas, propiciarán una categorización de los diferentes tipos de problemas por parte de los estudiantes, de manera que cuando se enfrenten a un nuevo problema tendrán éxito si éste es similar a los aprendidos, pero el fracaso aumentará cuando las situaciones exijan una valoración cualitativa con mayor trasfondo interpretativo de los conceptos aplicados.

Dicho de otro modo, la enseñanza habitual de la resolución de problemas de Física no es adecuada para un aprendizaje efectivo de los procedimientos implicados en su tratamiento, puede generar actitudes negativas frente a la actividad didáctica de resolución de problemas y ser origen de hábitos que impiden a los estudiantes abordar situaciones que inicialmente no puedan reconocer.

A partir de un análisis de los principales modelos de resolución de problemas reflejados en la bibliografía, hemos constatado que, o bien son meramente descriptivos o sus prescripciones se encaminan, fundamentalmente, a facilitar al estudiante la resolución de problemas cerrados, la gran mayoría cuantitativos. Tras una resolución reiterativa de problemas análogos y un esfuerzo por parte de los estudiantes para asimilar las técnicas que les han sido transmitidas, se pretende que el alumno aprenda a reproducir con éxito los ejercicios característicos de los exámenes.

Ya hemos abordado en el capítulo 1 la escasa efectividad frente a la resolución de problemas de los estudiantes que han sido formados bajo estos parámetros de enseñanza habitual, así como sus dificultades para utilizar procedimientos de resolución más coherentes con la metodología científica. En este capítulo, vamos a analizar con un poco más de detenimiento la enseñanza habitual en resolución de problemas de Física. Para ello,

nos apoyaremos en los dos grandes protagonistas de la enseñanza en el aula: los libros de texto y la enseñanza impartida por el profesorado.

En primer lugar, realizaremos un análisis de la presentación didáctica de la resolución de ejercicios y problemas en los libros de texto, con el fin de apreciar si existen contradicciones importantes (deficiencias didácticas) respecto a los resultados de la investigación didáctica que dificulten un aprendizaje significativo de la resolución de problemas.

En segundo lugar, para completar el análisis de la enseñanza habitual de la resolución de problemas de Física, prestaremos atención a la manera en que los profesores presentan esta actividad, ya que son los profesores uno de los principales elementos transmisores del conocimiento conceptual, así como de los procedimientos y actitudes que los estudiantes adquirirán y, por tanto, seguirán en la resolución.

### **Análisis de la actividad de la resolución de problemas en los libros de texto**

Para analizar cómo presentan los libros de texto de Física la resolución de problemas, se han preparado diferentes diseños convergentes en los objetivos a analizar. En este capítulo, a modo de ejemplo, vamos a presentar dos de ellos. En primer lugar, una red de análisis (cuadro 3.1) que versa sobre los aspectos didácticos implicados en la presentación que los libros de texto hacen de la resolución de problemas de Física. Los ítems de la red de análisis están relacionados con el conocimiento procedimental que interviene en la actividad investigativa científica y que, según el modelo de resolución de problemas como investigación orientada, debería guiar la resolución de problemas, tal y como señalábamos en el capítulo anterior.

Se han analizado, en base a ello, 22 libros de texto de Física general con ejercicios resueltos y otros 13 libros específicos de problemas de Física (Anexo incluido al final del capítulo 3), de uso generalizado en las universidades españolas, considerando en todos los casos las ediciones más recientes.

De cada libro se han elegido, cuando así ha sido posible, dos problemas resueltos, uno de mecánica y otro de electromagnetismo. El problema de mecánica se enmarca en el contexto del estudio del sólido rígido, por considerar que en él podrían estar incluidos importantes conceptos y relaciones del cuerpo teórico de la mecánica, y el problema de electromagnetismo se contextualiza en el entorno de la obtención del campo eléctrico creado por distribuciones estáticas de carga, pues se trata de un aspecto al que en la enseñanza habitual a nivel universitario se le presta especial atención por parte de profesores y textos. Ambos pueden dar lugar a situaciones problemáticas ricas en contenidos, tanto conceptuales como metodológicos. En total se han analizado 60 enunciados y sus respectivas resoluciones. (Incluimos ejemplos en documentos 3.1 y 3.2).

#### **PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA:**

**Ítem 1.** *Discusión del interés de la situación problemática: Se presenta/No se presenta.*

**Ítem 2.** *Tipo de situación problemática: 2.1. Referente a una situación académica característica de la Física. 2.2. Referida a un contexto cotidiano. 2.3. Con referencia a un contexto CTS.*

**Ítem 3.** *Presentación de la información: 3.1. General de la situación. 3.2 Específica de la magnitud pedida. 3.3. Valores numéricos. 3.4. Se incluyen todos los datos necesarios. 3.5. Aclara las simplificaciones o acotaciones parciales que se deben realizar en el fenómeno estudiado en un marco teórico simple. 3.6. Hace referencia al marco teórico en el que ubicar la resolución.*

**Ítem 4.** *Presentación de lo que se pide: 4.1. A través de una consigna o pregunta directa. 4.2. Por medio de una orientación o pregunta abierta.*

#### **PROCEDIMIENTOS INVOLUCRADOS EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN:**

**Ítem 5.** *Realización de análisis cualitativo. 5.1 Clarificar el objetivo, lo que se busca, aspecto no siempre evidente en las situaciones problemáticas. Se presenta/No se presenta. 5.2 Discutir el sistema físico en estudio. Se presenta/No se presenta. 5.3 Realizar descripciones verbales o gráficas de la situación para poder tomar las decisiones cruciales que la resolución de un problema exige al comienzo. Se presenta/No se presenta. 5.4 Acotar la situación para modelizarla y simplificarla si es preciso. Se presenta/No se presenta. 5.5 Reconocer un marco teórico de referencia. Se presenta/No se presenta. 5.6 Identificar variables. Se presenta/No se presenta. 5.7 Identificar partes del problema. Se presenta/No se presenta. 5.8 Plantear interrogantes. Se presenta/No se presenta. 5.9 Buscar datos. Se presenta/No se presenta.*

**Ítem 6.** Emisión de hipótesis: Descriptivas o predictivas si responde a “¿Qué?”. Explicativas si además responde, en base al marco teórico, a “¿Por qué?”. **6.1** Valorar la posible evolución del sistema. Se presenta/No se presenta. **6.2** Establecer relaciones de dependencia entre variables. Se presenta/No se presenta. **6.3** Establecer procesos de control y exclusión de variables. Se presenta/No se presenta. **6.4** Analizar casos límite de especial relevancia física. Se presenta/No se presenta.

**Ítem 7.** Elaboración de estrategias como tentativas: Hipótesis estratégicas, descriptivas si responde a “¿Cómo?”. Explicativas si además responde, en base al marco teórico, a “¿Por qué?”. **7.1** Subdividir el problema en etapas. Se presenta/No se presenta. **7.2** Elegir las leyes y principios fundamentales a utilizar en la resolución. Se presenta/No se presenta. **7.3** Valorar posibles vías alternativas. Se presenta/No se presenta. **7.4** Realizar una descripción secuencial de actuaciones para alcanzar la solución. Se presenta/No se presenta.

**Ítem 8.** Resolución. **8.1** Resolver literalmente hasta el final. Se presenta/No se presenta. **8.2** Verbalizar. Baja/Media/Alta. **8.3** Obtener valores numéricos. Se presenta/No se presenta. **8.4** Representar gráficamente el resultado. Se presenta/No se presenta.

**Ítem 9.** Análisis de resultados. **9.1** Analizar la coherencia teórica de la respuesta. Se presenta/No se presenta. **9.2** Analizar la plausibilidad del valor de la respuesta. Se presenta/No se presenta. **9.3** Analizar la coherencia dimensional de la respuesta. Se presenta/No se presenta. **9.4** Analizar la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema en el sentido que cabría esperar (según las hipótesis). Se presenta/No se presenta. **9.5** Analizar si se ajusta la respuesta a lo que se podría esperar en situaciones sencillas y especiales, por ejemplo, las correspondientes a valores extremos de las variables (según las hipótesis). Se presenta/No se presenta. **9.6** Analizar si se obtiene la misma respuesta por otro medio diferente de resolución. Se presenta/No se presenta.

#### **PROCEDIMIENTOS RELATIVOS A LA FORMULACIÓN DE NUEVAS PERSPECTIVAS:**

**Ítem 10.** Adoptar otros modelos. Se presenta/No se presenta.

**Ítem 11.** Formular otras hipótesis. Se presenta/No se presenta.

**Ítem 12.** Abordar con otro nivel de profundidad. Se presenta/No se presenta.

**Ítem 13.** Relacionar con otras cuestiones del mismo o de distinto tema. Se presenta/No se presenta.

**Ítem 14.** Plantear nuevos problemas. Se presenta/No se presenta.

Cuadro 3.1. Red de análisis de la presentación de los libros de texto de la actividad de resolución de problemas.



Veamos algunos de los resultados obtenidos referentes a la presentación del problema en los enunciados.

En el ítem 1 hemos registrado la existencia de algún comentario o reflexión previa que resalte el interés que podría tener la resolución de la situación planteada. La justificación previa a la resolución del posible interés de la misma ha resultado insignificante (3,3%).

En el ítem 2 hemos contabilizado los enunciados en los que la situación se presenta referida a un contexto académico, cotidiano o CTS. Resulta que la mayoría (75%) de los enunciados son de tipo puramente académico, dejando así al margen un importante potencial motivador.

En el ítem 3, referente a la presentación de la información en los enunciados, encontramos que en el 90% de los casos se trata de una información que hace referencia explícita a los datos específicos necesarios para obtener la magnitud pedida, datos éstos que en el 90% de los enunciados se incluyen en su totalidad. Así mismo, el 86,7% de los enunciados aclaran todas las acotaciones que son necesarias realizar para modelizar la situación. Incluso en un 12,7% de ellos, se hace referencia al marco teórico en el que se debe plantear la posterior resolución. En casi la mitad (45%) de las situaciones se incluyen datos numéricos.

Cuando en el ítem 4 hemos valorado cómo se presenta lo que el problema pide, hemos comprobado que la gran mayoría de los enunciados (93,3%) lo hacen por medio de una pregunta directa.

Un presentación cerrada de los enunciados como la que acabamos de comprobar, no deja opción a considerar en la resolución importantes aspectos del análisis cualitativo de la situación. Efectivamente, en el análisis de la aplicación de los principales procedimientos en las resoluciones de los textos, se aprecia que muchos de los aspectos del análisis cualitativo identificados en el ítem 5 se utilizan muy esporádicamente. La clarificación del objetivo (5.1), la acotación de la situación (5.4), la

identificación de variables (5.6), plantear interrogantes (5.8) o buscar datos (5.9) no alcanzan, en ningún caso, el 14%. Esto se debe, lógicamente, a que es el propio enunciado el que aporta toda la información, incluso con anterioridad a que los estudiantes perciban su necesidad.

Con el ítem 6 pretendemos establecer en qué medida se recurre a la emisión de hipótesis en las resoluciones presentadas por los textos, bien a nivel puramente descriptivo o en su faceta más explicativa. La valoración de la posible evolución del sistema en estudio, entre descriptivas y explicativas, se ha realizado en un 23,4% de las resoluciones. El análisis de variables o el estudio de casos límite, apenas se han considerado (menos del 9%).

Al analizar los datos del ítem 7 referente a las estrategias, encontramos que los textos en sus resoluciones, fundamentalmente, se limitan a elegir las leyes y principios a utilizar en la resolución (el 15,6% de una manera justificada y el 71,7% simplemente indicando su elección). El 12,7% restante no necesita valorar por qué vía resuelve puesto que ha sido el enunciado del problema el que le ha indicado el camino a seguir. La valoración de posibles vías alternativas sólo se ha realizado en un 20% de las resoluciones.

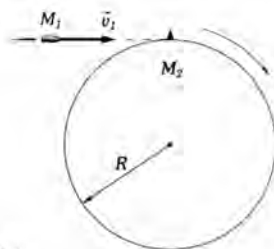
La resolución propiamente dicha, se valora por medio del ítem 8 en cuyo análisis se ha percibido que resolver literalmente hasta el final es lo habitual en los textos (95%). Sin embargo, el grado de verbalización es muy variable. Ello ha dado lugar a porcentajes próximos al 30% para los distintos grados de verbalización considerados.

Como consecuencia de la escasa emisión de hipótesis previas a la resolución, en el momento de analizar los resultados obtenidos tras ella (ítem 9), dicho análisis no suele hacerse en referencia a las especulaciones anteriores. Por ello, cuando el análisis de resultados se ha realizado éste ha consistido, sobre todo, en valorar la coherencia teórica de la respuesta (43,3%) y en considerar si se obtiene el mismo resultado por otro camino de resolución diferente (18,3%). El resto de los aspectos procedimentales del análisis de resultados no supera el 10%.

De entre los procedimientos relativos a la formulación de posibles nuevas perspectivas tras la resolución de un problema, la relación con cuestiones del mismo o distinto tema es el aspecto que con mayor asiduidad surge en los textos (38,3%). La posibilidad de plantear nuevas situaciones de interés, abordar el problema con distinto nivel de profundidad o adoptar otros modelos e hipótesis no ha alcanzado, en ningún caso, el 15%.

Unos ejemplos que bien pudieran ilustrar la manera de presentar los problemas resueltos en los libros de texto conforme a los aspectos que acabamos de destacar, los recogemos en los do-

Documento 3.1. Problema resuelto en el libro de problemas Problemas de Física General BURBANO DE ERCILLA, S. et al., 1994. Problemas de Física. Mira editores, Zaragoza.



### CHOQUES 325

Problema XIII-96.

**Problema XIII-96.** Una bala de masa  $M_1$  y velocidad horizontal  $v_1$  choca con un pequeño diente situado en la periferia de un volante de masa  $M_2$  y radio  $R$ , como se indica en la figura. Suponiendo la bala como una masa puntual, que el volante es cilíndrico, macizo y homogéneo (no se tiene en cuenta el pequeño diente) y que el choque es perfectamente elástico, realizándose en la periferia del volante, averiguar la velocidad de la bala y la angular adquirida por la rueda después del choque. ( $M_2 = 1$  kg;  $M_1 = 100$  g;  $R = 10$  cm;  $v_1 = 100$  m/s).

#### Solución

Conservación del momento angular:  $M_1 v_1 R = M_1 v_1' R + I \omega$

Conservación de la energía cinética:  $\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$$\left. \begin{aligned} M_1 R (v_1 - v_1') &= I \omega \\ M_1 (v_1^2 - v_1'^2) &= I \omega^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_1 + v_1' = \omega R$$

que sustituida en la primera:

$$M_1 v_1 R = M_1 v_1' R + I \frac{v_1 + v_1'}{R} \Rightarrow v_1 \left( M_1 R - \frac{I}{R} \right) = v_1' \left( M_1 R + \frac{I}{R} \right) \Rightarrow v_1' = v_1 \frac{M_1 R^2 - I}{M_1 R^2 + I} ; \omega = \frac{v_1 + v_1'}{R}$$

sustituyendo:

$$I = \frac{1}{2} M_2 R^2$$

$$v_1' = v_1 \frac{2M_1 - M_2}{2M_1 + M_2} \quad \omega = \frac{v_1}{R} \frac{4M_1}{2M_1 + M_2}$$

Resultados numéricos:

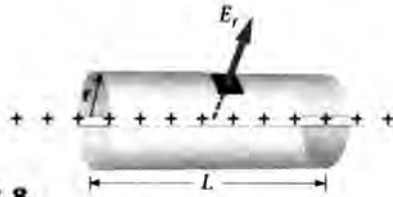
$$v_1' = 100 \frac{0,2 - 1}{1,2} = -66,66 \text{ m/s}$$

La bala retrocede a tal velocidad.

$$\omega = \frac{100}{0,1} \frac{0,4}{1,2} = 333,33 \text{ rad/s}$$

cumentos 3.1 y 3.2. Se ha seleccionado un problema de mecánica y otro de electromagnetismo. El problema de mecánica se enmarca en el contexto del estudio del sólido rígido, y ha sido

Documento 3.2. Problema resuelto en el libro de texto Física para la ciencia y la tecnología. TIPLER P.A., 1999. Física para la ciencia y la tecnología, Vol 2. Editorial Reverté, S.A. Barcelona.



### EJEMPLO 23.8

Figura 23.25

Utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico a una distancia  $r$  de una carga lineal infinitamente larga de densidad de carga uniforme  $\lambda$ .

**Esquema del problema** Por simetría, las líneas de campo eléctrico irradian uniformemente desde la línea de carga, hacia fuera si  $\lambda$  es positiva y hacia dentro si  $\lambda$

es negativa. Por tanto, elegiremos una superficie gaussiana cilíndrica de longitud  $L$  y radio  $r$  (figura 23.25). El campo eléctrico es, por tanto, perpendicular a la superficie cilíndrica y posee el mismo valor  $E_r$  en cualquier punto de la superficie. El flujo eléctrico es entonces igual al producto del campo eléctrico por el área de la superficie cilíndrica, que es  $2\pi rL$ . No hay flujo a través de las superficies planas de los extremos del cilindro, ya que en estas superficies  $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ .

1. Relacionar el flujo a través de la superficie gaussiana con el campo eléctrico  $E_r$  sobre la superficie gaussiana para  $r > R$ :

$$\phi_{\text{neto}} = E_r \oint dA = E_r 2\pi rL$$

2. Aplicar la ley de Gauss para relacionar el campo con la carga total en el interior de la superficie  $Q_{\text{interior}}$ :

$$E_r 2\pi rL = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

3. La carga interior es la carga que existe sobre una longitud  $L$  de la línea:

$$Q_{\text{interior}} = \lambda L$$

4. Sustituir este valor para  $Q_{\text{interior}}$  y despejar  $E_r$ :

$$E_r 2\pi rL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

**Observación** Como  $1/(2\pi\epsilon_0) = 2k$ , el campo es  $2k\lambda/r$ , equivalente a la ecuación 23.9, si sustituimos  $r = y$ :

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

seleccionado del libro específico de resolución de problemas, *Problemas de Física General* (Burbano, XXXI edición) muy utilizado a nuestro nivel. El problema de electromagnetismo se contextualiza en el entorno de la obtención del campo eléctrico creado por distribuciones estáticas de carga, y es un ejemplo resuelto, intercalado con la teoría, incluido en el libro de texto que seguramente encuentra mayor implantación en cursos introductorios de Universidad en nuestro país, *Física para la ciencia y la tecnología* (Tipler, 1999).

Apreciamos, en los dos casos, enunciados académicos y cerrados con todos los datos y las acotaciones necesarias. La pregunta en ambos casos es directa e, incluso, se señala el marco teórico en el que se debe resolver: ley de Gauss o choques.

El análisis cualitativo es insuficiente, pues en el problema de mecánica no se indican cuáles son las interacciones producidas en el choque, las cuales determinarán la aplicabilidad de leyes y principios de conservación, no se habla del sistema de referencia y no se describen los movimientos tras la colisión. En el problema de cálculo del campo eléctrico, no se argumentan con claridad las condiciones de simetría, que son las referencias claves para, posteriormente, poder resolver como lo hace ni se indica que cuando hablamos de hilos infinitos nos estamos refiriendo a un punto muy próximo a un hilo finito, es decir, nos movemos en el ámbito de las aproximaciones.

Formas de pensamiento divergente, como la emisión de hipótesis, no son en absoluto consideradas en ninguna de las resoluciones.

Las estrategias, no son suficientemente justificadas pero, además, se consideran vías únicas de resolución. Esto es, no se valora, por ejemplo, la posibilidad de que en el choque se conserve el momento lineal, ni la posibilidad de elegir otra superficie gaussiana, ni de utilizar el método de integración para obtener el valor del campo. Así mismo, la presentación por pasos de la resolución del problema de electromagnetismo, parece que puede llevar a los estudiantes a pensar en una única forma posi-

ble de enfocar el problema, lo cual, a su vez, favorecería un aprendizaje memorístico de ese método concreto de resolución.

Respecto al resultado obtenido, o no se analiza (problema de mecánica), o se analiza poco (problema de electromagnetismo). En este último, es sencillo comprobar cómo un hilo rectilíneo finito, desde muy lejos se ve como una partícula puntual, mientras que desde muy cortas distancias el resultado coincide con el de un hilo infinito. Sería interesante, por tanto, hacer ver al estudiante que, tal y como habíamos previsto, nos estamos moviendo en el ámbito de las aproximaciones. No se enseña habitualmente al estudiante a analizar el resultado.

A continuación presentaremos otro de los diseños realizados y que, completando al anterior, busca contrastar si los resultados son convergentes con las consideraciones que acabamos de realizar. El diseño consiste en una revisión de los libros de texto

<i><b>Autores y título</b></i>	<i><b>Editorial</b></i>	<i><b>Año</b></i>
<i>FISHBANE, P.M. et al., Physics for Scientifics and Engineers.</i>	<i>Prentice-Hall, Inc.</i>	<i>1996</i>
<i>GIANCOLI, D.C. Física para Universitarios, Vol I y II.</i>	<i>Pearson Educación, México</i>	<i>2002</i>
<i>HECHT, U. Física: Álgebra y Trigonometría 1 y 2.</i>	<i>International Thomson Editores, S.A. España</i>	<i>2000</i>
<i>LEA, S.M. y BURKE, J.R. Física. La Naturaleza de las Cosas 1 y 2.</i>	<i>International Thomson Editores, S.A. España</i>	<i>1999</i>
<i>SEARS, F.W. et al., Física Universitaria.</i>	<i>Pearson Education, México.</i>	<i>2004</i>
<i>SERWAY, A.R. y JEWETT, J. Física 1 y 2.</i>	<i>International Thomson editores, S.A. España</i>	<i>2003</i>
<i>TIPLER P.A. Física para la Ciencia y la Tecnología, Vol. 1 y 2.</i>	<i>Editorial Reverté, S.A. Barcelona</i>	<i>1999</i>
<i>WILSON J.D. Física.</i>	<i>Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.</i>	<i>1996</i>

Cuadro 3.2. Relación de textos de Física General de teoría y problemas de reciente publicación con importantes características comunes.

desde una segunda perspectiva más global. Por un lado, hemos valorado las informaciones que los propios autores aportan en los prólogos y prefacios de los textos sobre su propósito de intenciones respecto a la selección, planteamiento y resolución de los problemas propuestos. Por otro, se ha indagado en cómo presentan los problemas en los distintos capítulos. Para este análisis, hemos creído conveniente referirnos únicamente a los textos publicados en la última década, es decir, a partir de 1996.

Es decir, se han elegido 15 de los libros de texto de Física General de teoría y problemas que han sido editados en los últimos 10 años (a partir de 1996). En la mitad de ellos (8 textos) cuya relación se recoge en el cuadro 3.2, hemos detectado una serie de características comunes que pasamos a detallar.

1. Todos ellos resaltan de manera explícita la importancia de la resolución de problemas en el aprendizaje de la Física al nivel que nos ocupa y, al mismo tiempo, reconocen la dificultad que supone a los estudiantes el desarrollo de la capacidad de resolver problemas. Así, hemos podido encontrar comentarios como los que siguen:

*Sentimos que la destreza en la resolución de problemas cuantitativos es la mejor medida de la comprensión de la física.* (Fishbane et al., 1996).

*Aprender cómo enfocar y resolver problemas es una parte básica de cualquier curso de física. Ella es en sí misma una gran habilidad, pero es también importante porque el proceso ayuda al entendimiento de la física.* (Giancoli, 2002).

*Todo físico que ha enseñado esta materia oye el lamento universal de los alumnos: “Comprendo todo, pero no puedo resolver problemas”. Sin embargo, la mayor parte de los profesores creemos que “resolver” problemas es la culminación de toda experiencia.* (Hecht, 2000).

*R.P. Feynman, premio Nobel de Física, dijo en una ocasión: “No se puede saber nada hasta que no se ha practicado”. Siguiendo la filosofía contenida en esa frase, aconsejamos a los estu-*

*diantes que desarrollen las capacidades necesarias para resolver un amplio rango de problemas.*(Serway y Jewett, 2003).

*En esta edición nuestros objetivos fundamentales han sido: 1. Procurar que los estudiantes aumenten su experiencia y habilidad en resolución de problemas. 2. ...*(Tipler, 1999).

*Hay dos cosas que cualquier curso introductorio de física debe lograr, cualquiera que sea su enfoque, su énfasis o lo que trate de obtener: Impartir una comprensión de los principios fundamentales, y capacitar a los estudiantes para resolver una diversidad de problemas razonables en las áreas cubiertas por el texto.*(Wilson, 1996).

2. Consecuencia de lo anterior, y con el propósito de facilitar el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, los textos consideran oportuno transmitir a los estudiantes estrategias generales de resolución de problemas. Algunas de estas estrategias generales se particularizan después para aplicar a problemas de un tipo determinado. Veamos algunos de estos planteamientos.

*Los recuadros de resolución de problemas, aproximadamente 20 de ellos, son nuevos en esta edición. Éstos se centran más en los primeros capítulos, pero se hallan en todo el libro. Cada uno indica un enfoque paso a paso para resolver problemas en general, y/o específicamente para el material ahí tratado... yo pienso también que estos recuadros ayudan a los estudiantes a adquirir confianza.* (Giancoli, 2002).

*En este libro, todo ejemplo resuelto sigue el mismo método de cinco pasos. Por ejemplo, el primer paso, el planteamiento, vuelve a enunciar el problema en prosa científica y genérica. Con esto se hace que los alumnos lean con atención el enunciado y organicen sus ideas antes de profundizar en él. El método de cinco pasos lleva a los alumnos desde una fase necesaria del análisis hasta la siguiente y proporciona el marco organizacional que tantos alumnos necesitan desesperadamente.* (Hecht, 2000).



*En los primeros capítulos hay Interludios que ayudan a establecer la base de un método sistemático para la resolución de problemas. En el primero describimos nuestra estrategia básica para resolver problemas en cuatro partes. Esas partes –MODELO, PLANTEAMIENTO, SOLUCIÓN y ANÁLISIS– se identifican y se describen en esta parte y se usan y citan en cada ejemplo del libro.(Lea y Burke, 1999).*

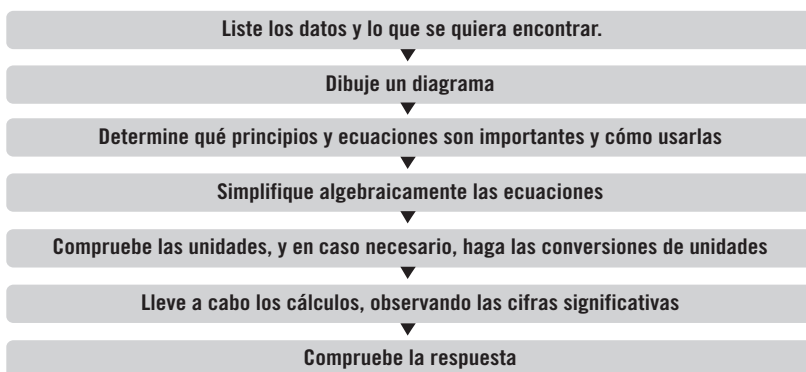
*A lo largo de todo el libro, los espacios ‘Estrategias para resolver problemas’ proponen al estudiante tácticas específicas para resolver tipos particulares de problemas. Todos los recuadros de Estrategia siguen el método IPEE (Identificar, Plantear, Ejecutar y Evaluar)... (Sears et al., 2004).*

*Una importante forma de convertirse en un hábil solucionador de problemas consiste en adoptar una estrategia para la resolución de problemas. Los pasos que se enumeran a continuación se usan habitualmente para desarrollar una estrategia para la resolución de problemas numéricos: 1) Lea el problema despacio al menos dos veces. Este paso le llevará a la representación mental del problema... 2) Dibuje un diagrama con las etiquetas y ejes adecuados, si son necesarios. Este paso lleva a la representación visual... 3) Si puede traducir el problema a una forma similar a algún otro problema que haya analizado anteriormente, identifique un modelo analítico para el problema... Este paso permite establecer una representación matemática del problema. 4) Sustituya en la ecuación o ecuaciones los valores dados en el problema, especificando las unidades adecuadas... 5) Piense en el resultado final. ¿Son correctas las unidades? ¿Tiene la respuesta un orden de magnitud razonable?... (Serway y Jewett, 2003).*

*Se ha procurado mostrar a los estudiantes un método lógico para la resolución de problemas. Los ejemplos comienzan con la estrategia, y a menudo diagramas, en un prólogo que llamamos “esquema del problema”. Siempre que es posible, la primera etapa ofrece una ecuación que relaciona la magnitud que se desea hallar con otras magnitudes. A continuación, suele recordarse un enunciado del principio general de la física que se aplica. (Pej. Aplicar la segunda ley de Newton, o Usar el principio de conservación de la energía). Los ejemplos suelen concluir con “observaciones” que*

analizan el problema y la solución, y, en muchos casos, secciones de “comprobación del resultado” que enseñan al alumno a comprobar la respuesta. (Tipler, 1999).

3. Estas estrategias generales de resolución, aunque difieran ligeramente en aspectos formales, son básicamente iguales en su trasfondo didáctico. Como ejemplos representativos recogemos a continuación, en los documentos 3.3 y 3.4, una estrategia de tipo general y la aplicación de uno de sus pasos (dibuje un diagrama) a un caso concreto como es la construcción del diagrama de cuerpo libre, (Wilson, 1996). En el capítulo 1 incluimos otro ejemplo de estrategia, esta vez particularizada para un tipo concreto de problema, aplicación del teorema de Gauss, sugerida en este caso por el Sears et al., 2004.



Documento 3.3. Diagrama de flujo que el texto Wilson, 1996, ofrece como referente estratégico para la resolución de problemas.

1. Haga un diagrama del espacio e identifique las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo del sistema.
2. Aísle el cuerpo para el cual se va a construir el diagrama de cuerpo libre. Dibuje un conjunto de ejes cartesianos con el origen en un punto a través del cual actúan las fuerzas y uno de los ejes a lo largo de la línea de movimiento del cuerpo. (Éste estará en la dirección de la fuerza neta si hay alguna).
3. Dibuje sobre el diagrama con la orientación apropiada los vectores de las fuerzas que emanan del origen de los ejes. Si hay una fuerza no equilibrada, indique la dirección del movimiento con un vector aceleración. (Esta dirección puede elegirse arbitrariamente si no es evidente la dirección de la fuerza neta).

4. Resuelva en sus ejes componentes  $x$  e  $y$  cualquier fuerza que no esté dirigida a lo largo de dichos ejes. Utilice el diagrama del cuerpo libre para analizar las fuerzas en términos de la segunda ley de Newton del movimiento. (Nota: si la aceleración tiene la dirección opuesta a la seleccionada, esto se indicará por una aceleración con un signo opuesto en la solución).

*Documento 3.4. Estrategia sugerida para la construcción del diagrama de cuerpo libre. WILSON J.D., 1996. Física. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.*

4. Esta consideración de que es suficiente transmitir al aprendiz estrategias explícitas y métodos sistemáticos de cómo los expertos resuelven problemas para que los estudiantes reproduzcan sus métodos con éxito, coincide plenamente con la visión que el modelo de resolución de problemas por comparación entre expertos y novatos (capítulo 2) incluye en su propuesta didáctica. Esta concepción se refleja explícitamente en algunas valoraciones que se citan en los prefacios de los propios textos. Por ejemplo:

*Esas partes –MODELO, PLANTEAMIENTO, SOLUCIÓN Y ANÁLISIS– se identifican y describen en esta parte, y se usan y citan en cada ejemplo del libro. Si el alumno ve cómo se aplica el método en cada ejemplo, podrá aplicar mejor un método semejante en sus propios trabajos. (Lea y Burke, 1999).*

*Los profesores de física enfocan los problemas de manera muy sistemática y lógica. Estos recuadros le ayudarán a usted, en calidad de solucionador de problemas principiante, a hacer lo mismo siguiendo una estrategia sistemática para resolver problemas... (Sears et al., 2004).*

*Muchos ejemplos terminan con una “Observación” que proporciona información adicional, advierte de errores comunes e informa sobre la manera en que un físico resolvería el problema. (Tipler, 1999).*

5. Estos textos, en sus propuestas de presentación y resolución de problemas incluyen características y procedimientos propios de la metodología científica que suponen un notable avance respecto a planteamientos más tradicionales. Su aplica-

ción real en los enunciados propuestos y en las resoluciones, sin embargo, es más cuestionable.

Así, tenemos un reconocimiento de la importancia de los enunciados CTS y del contexto cotidiano:

*Muchos de los nuevos ejemplos y las mejoras a los viejos proporcionan importantes aplicaciones a la ingeniería, a otros campos relacionados y a la vida diaria.* (Giancoli, 2002).

*Una fuerza motriz que conformó este libro es creer que los alumnos desean aprender lo que afecta en forma directa a sus vidas e ideas. En consecuencia, la perspectiva del libro es práctica, en gran parte: ¿Cómo caminamos? ¿Cómo trabaja un velocímetro? ¿Cómo vuela un avión?* (Hecht, 2000).

*Los problemas incluyen aplicaciones en campos tan diversos como la astrofísica, biología y la aerodinámica.* (Sears et al., 2004).

*Las aplicaciones son intrínsecamente interesantes y pedagógicamente útiles; satisfacen la curiosidad de los estudiantes acerca del papel de la física en el mundo real, al mismo tiempo que refuerzan el material que se presenta en el texto.* (Wilson, 1996).

Si bien es cierto que en estos textos de reciente edición se percibe una mayor influencia de enunciados CTS, no lo es menos que la mayoría de los ejemplos resueltos que se intercalan con la teoría continúan siendo enunciados más bien de tipo académico. Los aspectos CTS, en general, se relegan a estudios que sirven de cierre al tema o a enunciados propuestos al final del tema para ser resueltos por los estudiantes.

Al margen de esta contextualización básicamente académica, la presentación de los enunciados de los ejemplos que estos textos resuelven intercalados con la teoría, son fundamentalmente cerrados: incluyen todos los datos, se especifican las acotaciones necesarias en un marco teórico simple y lo que se busca se solicita a través de una pregunta directa. Este planteamiento cerrado condiciona, en gran medida, el análisis cualitativo pos-

terior y con ello, las oportunidades que tiene el estudiante de enfrentarse a un verdadero problema y poner en práctica aspectos procedimentales relevantes en la resolución.

El uso de procedimientos científicos aplicados a la resolución, tales como justificaciones, hipótesis, análisis de resultados, etc. son resaltados por los textos, tal y como vemos a continuación:

*Se han incluido más pasos en las resoluciones, más de “por qué lo hacemos de esta manera”, y se ha proporcionado un mayor análisis del enfoque. La idea es conducir a los estudiantes a desarrollar una mayor penetración en sus análisis. (Giancoli, 2002).*

*Asegúrese de que cada relación es aplicable en el caso considerado. Es muy importante conocer los límites de cada fórmula. Usualmente es preferible trabajar algebraicamente antes de insertar valores numéricos, así puede considerar el resultado para casos ya entendidos (digamos un valor determinado de un ángulo). Considere si su respuesta es razonable. El uso del análisis dimensional puede servirle como una revisión en muchos problemas. (Giancoli, 2002).*

*A menudo, resulta conveniente tratar de encontrar soluciones alternativas al mismo problema. Por ejemplo, se pueden resolver problemas mecánicos utilizando las leyes de Newton, pero a menudo resulta más directo un método alternativo, basado en consideraciones energéticas. (Serway y Jewett, 2003).*

*A menudo, los estudiantes no son conscientes de las limitaciones de ciertas ecuaciones o leyes físicas en una situación concreta. Es muy importante comprender y recordar las suposiciones que subyacen a una teoría o formalismo concretos. (Serway y Jewett, 2003).*

*Cuando se ha considerado adecuado, las secciones “Comprobación del resultado” enseñan a los estudiantes cómo comprobar el resultado de su trabajo. (Tipler, 1999).*

*El objetivo no es sólo mostrar al alumno qué fórmulas debe utilizar, sino explicarle la estrategia utilizada y la función de cada*

etapa dentro del plan general. Se estimula a los estudiantes a aprender el porqué de cada uno de los pasos, al tiempo que aprenden el cómo. (Wilson, 1996).

Estos propósitos de intenciones, sin embargo, no se concretan de una manera natural, coherente y continuada en los ejemplos resueltos que estos textos intercalan con la teoría. Surgen más bien como aspectos de detalle y no como eje procedimental de la resolución. Aun reconociendo que en algunos casos hemos dado con resoluciones ciertamente ricas en procedimientos científicos, en muchas otras, en cambio, este planteamiento procedimental se incluye más como una cuestión formal y aparente que de fondo.

En los documentos 3.5 y 3.6 recogemos dos enunciados cerrados y sus correspondientes soluciones extraídos de dos de los textos a los que nos estamos refiriendo en este análisis (Giancoli, 2002; Serway y Jewett, 2003).

Documento 3.5. Problema resuelto en el libro de física general, GIANCOLI, D.C., 2002. Física para Universitarios, Vol I y II. Pearson Educación, México.

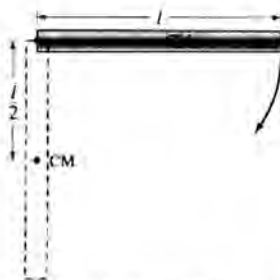


FIGURA 10-35 Ejemplo 10-18.

**EJEMPLO 10-18 Barra en rotación.** Una barra de masa  $M$  puede girar alrededor de una articulación sin fricción en un extremo de ella, como se muestra en la figura 10-35. La barra se mantiene primero horizontalmente en reposo y luego se suelta. Determine la velocidad angular de la barra cuando alcanza la posición vertical y la rapidez de la punta de la barra en ese momento.

**SOLUCIÓN** Podemos usar aquí el principio del trabajo y la energía. El trabajo hecho es debido a la gravedad y es igual al cambio en la energía potencial gravitacional de la barra. Como el CM de la barra cae una distancia vertical  $l/2$ , el trabajo hecho por la gravedad es

$$W = Mg \frac{l}{2}.$$

La energía cinética inicial es cero. Por consiguiente, del principio del trabajo y la energía,

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = Mg \frac{l}{2}.$$

Como  $I = \frac{1}{3}Ml^2$  para una barra pivoteada alrededor de su extremo (figura 10-21), podemos despejar a  $\omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

La punta de la barra tendrá una rapidez lineal (véase la ecuación 10-4)

$$v = l\omega = \sqrt{3gl}$$

En comparación, un objeto que cae verticalmente una altura  $l$  tiene una rapidez  $v = \sqrt{2gl}$ .

En el ejemplo de Giancoli, 2002, el enunciado es de tipo académico y cerrado. La estrategia de resolución no se justifica en base las interacciones sobre la barra, ni se valora la dificultad que supondría una resolución por vías cinemático-dinámicas. La única aportación metodológica que podría considerarse es la comparación del resultado obtenido con el caso de una caída libre.

### Ejemplo 10.12 Otra vez la máquina de Atwood

Considere de nuevo la máquina de Atwood con una polea de masa no despreciable de los Ejemplos 10.10 y 10.11. Determinar la aceleración de los dos objetos utilizando un enfoque basado en el momento angular.

**Razonamiento** Éste es un ejemplo de un cuerpo no rígido que está bajo el efecto de un par neto, de modo que utilizaremos el modelo del sistema no aislado. Calcularemos el momento angular del sistema en cualquier instante de tiempo y luego derivaremos el momento angular, para igualarlo al par externo neto. En la expresión resultante despejaremos la aceleración de los objetos.

**Solución** En primer lugar, calculemos el momento angular del sistema, que consta de los dos objetos más la polea. En el instante en que  $m_1$  y  $m_2$  tienen una velocidad  $v$ , el momento angular de  $m_1$  con respecto al eje de la polea es  $m_1 vR$  y el de  $m_2$  es  $m_2 vR$ . En el mismo instante, el momento angular de la polea alrededor de su centro es  $L = I\omega = Iv/R$ . Por lo tanto, el momento angular total del sistema es

$$(1) L = m_1 vR + m_2 vR + I \frac{v}{R} = m_1 vR + m_2 vR + \left(\frac{1}{2}MR^2\right) \frac{v}{R} \\ = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)vR$$

Calculemos ahora el par externo total sobre el sistema con respecto al eje de la polea. El peso de la polea y la fuerza del eje de la polea hacia arriba tienen un brazo de momento igual a cero con respecto al centro de la polea, por lo que no contribuyen al par. Las fuerzas externas al sistema que producen un par con respecto al eje de la polea son  $m_1 \mathbf{g}$ , con un par igual a  $m_1 gR$ , y  $m_2 \mathbf{g}$ , con un par igual a  $-m_2 gR$ . Combinando el par externo neto con (1) y la Ecuación 10.37 nos da,

$$\tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt} \\ m_1 gR - m_2 gR = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)vR]$$

$$(2) \quad m_1 g R - m_2 g R = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M) R \frac{dv}{dt}$$

Dado que  $dv/dt = a$ , podemos despejar  $a$  en la Ecuación (2) y obtener

$$a = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} \right) g$$

qué es el mismo resultado que obtuvimos en el Ejemplo 10.10. Podría preguntarse por qué no incluimos las fuerzas de tensión que la cuerda ejerce sobre los objetos a la hora de calcular el par neto con respecto al eje. La razón es que esas fuerzas son *internas* al sistema que estamos considerando. Sólo los pares *externos* contribuyen al cambio en el momento angular.

Documento 3.6. Problema resuelto en el libro de física general, SERWAY, A.R. y JEWETT, J., 2003. Física 1 y 2. International Thomson editores, S.A. España.

En el ejemplo del Serway y Jewett, 2003, la utilización de los aspectos procedimentales puede considerarse de más alto nivel. El enunciado, aunque clásico, tiene un cierto enfoque CTS (la máquina de Atwood). Por otro lado, este enunciado conecta con el de otros ejemplos abordados con anterioridad en el propio texto (10.10 y 10.11, no presentados aquí) en los que se incluyen todos los datos y las acotaciones pertinentes en cuanto a la libre rotación de la polea, su forma de disco plano y al hecho de que la cuerda no resbale por la polea. En el ejemplo 10.12 que nos ocupa, además, se indica el marco teórico en el que centrar la solución (...basado en el momento angular).

En el planteamiento de la resolución, sin embargo, se argumentan las estrategias a utilizar y se recoge una secuenciación de actuaciones a seguir. Se distingue claramente entre las interacciones externas e internas y se razonan los distintos pasos.

Una vez alcanzado el resultado se compara con el obtenido por otras vías de resolución (ejemplo 10.10), en el cual, además, se había valorado que si la masa de la polea tendiera a cero, la aceleración coincidiría con el resultado de otro ejemplo (10.4), tratado así mismo, con anterioridad. Es decir, se plantea un análisis de resultados en base a un caso límite.

Aun asumiendo progresos procedimentales como los citados estas resoluciones, en general, continúan presentando impor-



tantes deficiencias. Así, la emisión de hipótesis, tanto a nivel de valoración de la posible evolución del sistema, como en lo referente al análisis de las variables que pudieran incidir en la magnitud buscada, se encuentra prácticamente ausente de estas resoluciones más evolucionadas. A su vez, esta situación hace que el análisis de resultados que se incluye como paso fundamental en todas y cada una de las estrategias generales propuestas, no pueda realizarse por comparación con las hipótesis previas. Si se plantea, ha de limitarse a un análisis de la coherencia teórica de la respuesta o al análisis de su homogeneidad dimensional. Lógicamente, además, sin hipótesis que contrastar, las resoluciones son básicamente lineales y alejadas de lo que supondría resolver un verdadero problema.

6. En algunas de sus directrices y planteamientos generales, los textos orientan a los estudiantes a un aprendizaje basado en la memorización de situaciones tipo.

*Los ejemplos que representan problemas típicos son muy numerosos. Sus soluciones muestran métodos correctos de manejo de problemas.* (Fishbane et al., 1996).

*Determine el tipo de problema que esté manejando. Esto es, ¿cuál es su idea central? Esto por lo general es fácil en los libros de texto, porque se conoce en qué capítulo se encuentra uno, pero en un examen puede no ser tan fácil.* (Hecht, 2000).

*Al final de cada capítulo aparece una “Guía de resolución de problemas” en forma de un resumen de los ejemplos resueltos en el mismo. Esta guía está diseñada para ayudar a los alumnos a reconocer tipos específicos de problemas y determinar la estrategia conceptual para su resolución.* (Tipler, 1999).

De acuerdo con las características anteriormente descritas, y desde una posición comprometida con el modelo de resolución de problemas como investigación orientada, planteamos una crítica constructiva a la manera en la que los libros de texto de edición más reciente (a partir de 1996) presentan la actividad de resolución de problemas.

En primer lugar, reconocemos un enorme valor al hecho de que se recojan importantes aportaciones de la investigación didáctica en los nuevos libros de texto de implantación a nivel mundial. Es, en sí mismo, un reconocimiento a la tarea de los que, con mayor o menor acierto, tratamos de avanzar en la didáctica de las ciencias. Nos congratula así mismo, que muchos de los aspectos novedosos propuestos coincidan en parte con las orientaciones que nosotros mismos asumimos.

No podemos, no obstante, dejar de mostrar nuestra falta de sintonía con el planteamiento basado en modelos de transmisión-recepción del conocimiento ya elaborado que busca que los estudiantes, siguiendo estrategias más o menos rígidas y estructuradas, reproduzcan la manera de resolver problemas de los expertos. Se les ofertan esquemas de resoluciones lineales, que tras la consecución de una serie de pasos les lleven a alcanzar la respuesta a la manera del que ya conoce la solución de antemano. Se potencian así procesos memorísticos frente a procesos de creación de soluciones. No se permite a los estudiantes afrontar la resolución de verdaderos problemas que, en base a orientaciones más especulativas y creativas, les conduzca a reconstruir vías de solución con verdadero significado.

En el siguiente punto, presentamos los resultados obtenidos del análisis de la presentación que los profesores hacen de la actividad de resolución de problemas.

### **Análisis de la resolución por profesores de un problema habitual de Física**

Los problemas que enseñan los profesores son concebidos como algo que ellos conocen perfectamente, como una tarea que no les genera dudas ni la necesidad de realizar tentativas de resolución; los profesores, por tanto, dominan el problema y confían en explicar claramente la solución a los alumnos para que estos la aprendan.

Vamos a mostrar a continuación, uno de los instrumentos que nos han servido para analizar las concepciones del profesorado sobre la enseñanza de resolución de problemas. Es evi-

dente que los resultados de un solo diseño no nos permitirán llegar a conclusiones generales, pero la necesaria brevedad del texto, así como la intención de no abrumar al lector con excesivas concreciones, nos ha llevado a mostrar sólo este instrumento a modo de ejemplo. El lector interesado podrá recurrir a la bibliografía que se indica.

El instrumento que presentamos para contrastar las concepciones del profesorado sobre la actividad de resolución de problemas, consiste en analizar problemas resueltos por ellos. Se ha solicitado a 6 profesores que nos entreguen resueltos por escrito dos problemas, a ser posible uno de mecánica y otro de electromagnetismo, elegidos de entre los que ellos mismos hayan propuesto en algún examen de evaluación y que indiquen el porcentaje de puntuación asignado a cada parte del problema sobre el valor total del mismo. Se les sugiere que la resolución se aproxime lo más posible a la que ellos harían para resolver ese problema en el aula ante sus alumnos. En la experiencia participaron voluntariamente 6 profesores de universidad que enseñan Física General en primer curso y que son funcionarios pertenecientes a los cuerpos de titulares o catedráticos.

El análisis de los 12 problemas resueltos por profesores se ha realizado en base a la misma red presentada en el cuadro 3.1 de la página 78-79, que también nos ha servido de referencia para el análisis de la presentación que los libros de texto realizan de la actividad de resolución de problemas.

En primer lugar, en la tabla 3.1 se recogen los resultados obtenidos del análisis de los aspectos relacionados con la presentación que del problema realizan los propios profesores.

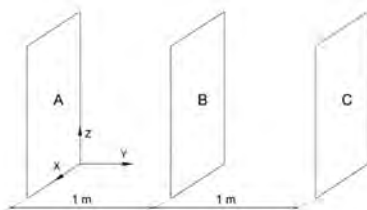
En ellos se observa que no se considera el posible interés de resolver la situación problemática planteada (0 enunciados), que el tipo de situación problemática hace casi siempre referencia a una situación académica (9) y en pocas ocasiones a situaciones de un contexto cotidiano (2) o CTS (1). Así mismo, la información que se presenta en el enunciado es específica del contexto en el cual se ubica la magnitud pedida (11), incluye todos los datos (11) y valores numéricos de los mismos (8) y, además, mu-

	<b>Aspectos analizados (N = 12 enunciados)</b>		<b>Número ocasiones que se presenta</b>
<b>Presentación del problema</b>	1. Discusión del interés de la situación problemática		0
	2. Tipo de situación problemática	2.1 Referente a una situación académica	9
		2.2 Referida a un contexto cotidiano	2
		2.3 Con referencia a un contexto CTS	1
	3. Presentación de la información	3.1 General de la situación	1
		3.2 Específica de la magnitud pedida	11
		3.3 Valores numéricos	8
		3.4 Se incluyen todos los datos necesarios	11
		3.5 Aclara las simplificaciones o acotaciones parciales que se deben realizar en el fenómeno estudiado en un marco teórico simple	11
		3.6 Hace referencia al marco teórico en el que ubicar la resolución	0
4. Presentación de lo que se pide	4.1 A través de una consigna o pregunta directa	11	
	4.2 Por medio de una orientación o pregunta abierta	1	

*Tabla 3.1. Resultados del análisis de la presentación de los problemas resueltos por profesores.*

chas veces aclara las acotaciones y simplificaciones que es necesario realizar (11). En cuanto a la manera de presentar lo que se pide, en los enunciados utilizados por los profesores se incluye, prácticamente siempre (11), una consigna o pregunta directa y sólo en una ocasión se hace uso de una orientación o pregunta abierta que dé pie a que los estudiantes analicen, valoren y acoten la situación por ellos mismos.

Los tres grandes planos de la figura (que pueden considerarse de superficie infinita, ya que sus áreas son mucho mayores que la separación de 1 m entre ellos; en el espacio entre ellos está el vacío) están cargados uniformemente con unas densidades de carga:



$$A = 3'54 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2 \quad B = 7'08 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2 \quad C = 10'62 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

1. Determinar el campo eléctrico en todo punto del espacio.
2. Determinar las diferencias de potencial  $V_B - V_A$ ,  $V_C - V_B$  y  $V_C - V_A$
3. ¿Con qué velocidad en la dirección del eje OY se debe lanzar un protón desde un punto de coordenadas (0'5 ; -0'5 ; 0'5) para que llegue al plano B con velocidad cero?
4. ¿Desde qué posición de coordenadas (0'5 ; y ; 0'5) se debe lanzar un protón en la dirección del eje OY con una velocidad de módulo igual a la calculada en el apartado anterior, para que llegue al plano C con velocidad cero?
5. Determinar la geometría de un condensador de placas planas de área  $6'00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  en cada placa, con el vacío entre armaduras y tal que si se le aplica la diferencia de potencial calculada  $V_C - V_A$  almacene una carga eléctrica igual a la que el conjunto de los tres planos tiene por unidad de superficie.

DATOS:  $\epsilon_0 = 8'85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$

Carga del protón  $q_p = 1'60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Masa del protón  $m_p = 1'70 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Capacidad:  $C = Q/V$ . Capacidad de un condensador de placas planas:  $C = \epsilon \frac{A}{d}$

Campo eléctrico en las proximidades de un plano

infinito cargado con una densidad superficial de carga  $\sigma$ :  $E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon} \cdot u_n$

Dar los resultados en notación científica con una correcta precisión.

Documento 3.7. Ejemplo de enunciado cerrado utilizado por profesores en la enseñanza habitual.

En el documento 3.7 se muestra un ejemplo de enunciado utilizado por los profesores que se ajusta a estas características.

Es decir, de acuerdo con la investigación didáctica en resolución de problemas, los enunciados así presentados son considerados cerrados, directivos y pueden orientar la resolución hacia un operativismo mecánico. Al mismo tiempo, la contextualización exclusivamente académica y la ausencia de discusión acerca del interés de resolver la situación, deja de lado aspectos actitudinales.

En lo referente a los aspectos relacionados con las capacidades procedimentales involucradas en el proceso de resolución que siguen los propios profesores, hemos encontrado lo siguiente:

En cuanto a la realización del análisis cualitativo de la situación previo a la resolución, se aprecia que éste se centra fundamentalmente en identificar el marco teórico de referencia (en 12 resoluciones), en menor medida (9 resoluciones) realizar descripciones verbales o gráficas de la situación e identificar partes del problema (5). Aspectos tan claves del planteamiento cualitativo, como acotar la situación para modelizarla y simplificarla si es preciso, clarificar el objetivo, discutir el sistema físico en estudio o identificar variables, apenas se tienen en cuenta durante la resolución del problema, puesto que es en el propio enunciado donde se han incluido todas esas precisiones, desproblematizando, en buena medida, la situación planteada.

Así mismo, resulta escasa la utilización que de la emisión de hipótesis acerca de la posible evolución del sistema (3) realizan los profesores y nulo el análisis de la dependencia de variables, tanto a nivel descriptivo como explicativo. En consecuencia, cuando se alcanza un resultado no existe la posibilidad de contrastarlo con las hipótesis previas. En cualquier caso, una vez alcanzado dicho resultado, ni la coherencia teórica ni la homogeneidad dimensional de la respuesta son prácticamente tenidas en cuenta por los profesores en sus resoluciones (3). Este enfoque didáctico es un indicio de que la resolución se muestra al estudiante como un procedimiento lineal y seguro del que no

es preciso dudar, como si fuera una tarea conocida y de la que ya conocemos la respuesta.

Análogamente, las estrategias de resolución son planteadas por los profesores como vías únicas y sin alternativas. Cuando los profesores en sus problemas (12), eligen las leyes y principios a aplicar en la búsqueda de la magnitud pedida, la mayoría de las veces (9) lo hacen sin justificar de forma explícita, en base al marco teórico, el porqué de dicha elección. No nos cabe ninguna duda de que los profesores saben perfectamente cuáles son los argumentos teóricos en los que basan su elección, pero, si no los hacen explícitos ante sus estudiantes, éstos quedarán huérfanos de criterios razonados para afrontar, por sí mismos, nuevas situaciones problemáticas.

La resolución en sí misma, no siempre se realiza de forma literal hasta el final (6), en general está encaminada a obtener valores numéricos en la respuesta (8) y las resoluciones escritas recogidas, a excepción de una, incluyen una verbalización media/baja, aunque, en las explicaciones orales ante los estudiantes cabe pensar que el grado de verbalización será notablemente superior.

Parece, pues, que no se enseña al estudiante a enfrentarse a problemas, sino a actuar frente a un enunciado del mismo tipo y de una manera aprendida. Estos resultados son convergentes con los resultados obtenidos en el aprendizaje de los estudiantes (capítulo 1) y con nuestra experiencia como profesores.

Un ejemplo de la propia resolución realizada por uno de los profesores entrevistados, en el que se puede apreciar la verbalización, nivel de justificaciones y las orientaciones procedimentales utilizadas, lo presentamos en el documento 3.8 (página siguiente). Esta resolución se corresponde con el enunciado incluido en el documento 3.7 (p.98) y en ella podemos apreciar un caso, ciertamente extremo, del enfoque didáctico que los docentes podemos llegar a transmitir a los estudiantes en la enseñanza habitual acerca de la actividad de resolver problemas.

$$1. \text{ En cualquier punto: } E = E_A + E_B + E_C = \frac{\sigma_A}{2\epsilon_0} \cdot (\pm j) + \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0} \cdot (\pm j) + \frac{\sigma_C}{2\epsilon_0} \cdot (\pm j)$$

$$\text{En } y < 0: E_{<y} = \frac{\sigma_A + \sigma_B + \sigma_C}{2\epsilon_0} \cdot (-j) = \frac{3'54 \cdot 10^{-6} + 7'08 \cdot 10^{-6} + 10'62 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8'85 \cdot 10^{-12}} \cdot (-j) = \underline{-12 \cdot 10^5 \cdot j \text{ N/C}}$$

$$\text{En } 0 < y < 1: E_{AB} = \frac{\sigma_A - \sigma_B - \sigma_C}{2\epsilon_0} \cdot j = \frac{3'54 \cdot 10^{-6} - 7'08 \cdot 10^{-6} - 10'62 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8'85 \cdot 10^{-12}} \cdot j = \underline{-8 \cdot 10^5 \cdot j \text{ N/C}}$$

$$\text{En } 1 < y < 2: E_{BC} = \frac{\sigma_A + \sigma_B - \sigma_C}{2\epsilon_0} \cdot j = \frac{3'54 \cdot 10^{-6} + 7'08 \cdot 10^{-6} - 10'62 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8'85 \cdot 10^{-12}} \cdot j = \underline{0}$$

$$\text{En } y > 2: E_{>y} = \frac{\sigma_A + \sigma_B + \sigma_C}{2\epsilon_0} \cdot j = \frac{3'54 \cdot 10^{-6} + 7'08 \cdot 10^{-6} + 10'62 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8'85 \cdot 10^{-12}} \cdot j = \underline{12 \cdot 10^5 \cdot j \text{ N/C}}$$

$$2. E = -\text{grad}V = -\frac{dV}{dy} \cdot j \Rightarrow dV = -\frac{E \cdot dy}{j} = -\frac{E \cdot j \cdot dy}{j} = -E \cdot dy \Rightarrow \int_M^N dV = \int_{y_M}^{y_N} -E \cdot dy$$

$$\text{En } y < 0: \int_M^A dV = \int_{-y}^0 12 \cdot 10^5 \cdot dy \Rightarrow V_A - V_{y < 0} = -12 \cdot 10^5 \cdot y \text{ Voltios}$$

$$\text{En } 0 < y < 1: \int_A^{y_{AB}} dV = \int_0^y 8 \cdot 10^5 \cdot dy \Rightarrow V_{y_{AB}} - V_A = 8 \cdot 10^5 \cdot y \text{ Voltios}$$

$$\text{Para } y_{AB} = y_B = \underline{V_B - V_A = 8'00 \cdot 10^5 \text{ V}}$$

$$\text{En } 1 < y < 2: \int_B^{y_{BC}} dV = \int_0^y 0 \cdot dy \Rightarrow V_{y_{BC}} - V_A = 0 \text{ Voltios}$$

$$\text{Para } y_{BC} = y_C = \underline{V_C - V_B = 0 \text{ V}}$$

$$\text{En } y > 2: \int_C^P dV = \int_2^{y > 2} -12 \cdot 10^5 \cdot dy \Rightarrow V_P - V_C = -12 \cdot 10^5 \cdot (y - 2) \text{ Voltios}$$

$$\text{Entonces: } V_C - V_B + V_B - V_A = V_C - V_A = 0 + 8 \cdot 10^5 = 8 \cdot 10^5 \text{ V} \quad \underline{V_C - V_A = 8'00 \cdot 10^5 \text{ V}}$$

$$3. \text{ Variación de energías entre A y B: } \frac{1}{2} m v_A^2 - 0 = (V_B - V_A) \cdot q = 8 \cdot 10^5 \cdot q \Rightarrow v_A^2 = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot q}{m}$$

Variación de energías entre  $y = -0,5$  y A:

$$\frac{1}{2} m v_{-0,5}^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = (V_{-0,5} - V_A) \cdot q = (12 \cdot 10^5) \cdot 10^5 \cdot q \Rightarrow v_{-0,5}^2 = v_A^2 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot q}{m}$$

$$v_{-0,5} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot q}{m} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot q}{m}} = 1'62 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad \underline{v_{-0,5} = 1'62 \cdot 10^7 \cdot j \text{ m/s}}$$

$$4. \text{ Variación de energías entre y y C: } \frac{1}{2} m v_{-0,5}^2 - 0 = (V_y - V_C) \cdot q = 12 \cdot 10^5 \cdot (y - 2) \cdot q$$

$$y = 2 + \frac{m \cdot v_{-0,5}^2}{2 \cdot 12 \cdot 10^5 \cdot q} = \underline{3'17 \text{ m}}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{(\sigma_A + \sigma_B + \sigma_C) \cdot 1 \text{ m}^2}{8 \cdot 10^5} = 2'655 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow d = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{C} = \frac{8'85 \cdot 10^{-12} \cdot 6'00 \cdot 10^{-2}}{2'655 \cdot 10^{-11}} = 2'00 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

5. La geometría es: dos placas paralelas de área  $6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  cada una, separadas  $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$



Resumimos, a continuación, las principales conclusiones que podemos extraer de los diseños referentes a la presentación y concepción que la enseñanza habitual tiene de la resolución de problemas de Física, en sus diferentes facetas, a nivel de cursos introductorios en la Universidad.

· *En opinión de los profesores, la responsabilidad de la escasa efectividad que los estudiantes muestran como resolventes de problemas de Física es plenamente imputable a los alumnos (ver capítulo 1).*

· *En cuanto a la presentación de los problemas en los textos y, por ello utilizados por los profesores, el tipo de situación que se describe en el enunciado (cerrados, y directivos), la forma en que se presenta la información (se incluyen todos los datos y muchas acotaciones y precisiones) y la manera de plantear los interrogantes (en base a una pregunta directa), limita la posibilidad de motivar al resolvente y de orientarlo a un estudio cualitativo de la misma lo cual, a su vez, condiciona todo el proceso, e invita a la reproducción memorística de ejercicios tipo cuya estrategia de resolución es reconocida.*

· *En lo que hace referencia a las capacidades procedimentales involucradas en el proceso de resolución, hemos encontrado soluciones guiadas por un operativismo mecánico que induce a pensar que el camino desde el enunciado hasta el resultado está siempre perfectamente determinado y, por lo tanto, no es preciso dudar de él. Hemos percibido, así mismo, que la mayoría de las características metodológicas presentadas en la resolución por parte de los profesores y textos se encuentran alejadas de aquéllas que propugna el modelo de resolución de problemas como investigación orientada. Así, la enseñanza habitual, no parece considerar necesario que en la presentación de los problemas de Física a los estudiantes se recojan formas de pensamiento divergente, ni que la resolución se corresponda con un proceso creativo.*

· *En el caso de los textos, sin embargo, para aquellos libros publicados en los últimos años, se ha detectado una mayor incorporación de aportaciones de la investigación didáctica, sobre todo en base a las orientaciones propugnadas por la metodología de resolución por comparación entre expertos y novatos.*

Todo parece indicar, en consecuencia, que la enseñanza habitual de la resolución de problemas no tiene en cuenta los resultados de la investigación didáctica respecto a la enseñanza-aprendizaje de las ciencias en general y de la resolución de problemas en particular, por lo que presenta graves deficiencias didácticas.

Este modo de actuación didáctica, a nuestro entender, influye en que los estudiantes resuelvan los problemas de Física en base a un operativismo mecánico, sin hacer uso de los procedimientos característicos de la metodología científica, tal y como adelantábamos en el primer capítulo. Es decir, estas deficiencias se reflejan en el aprendizaje, y ello es una de las causas principales del fracaso generalizado en resolución de problemas.

Queda pendiente la cuestión de ver en qué medida es posible mejorar estos resultados desde un modelo de resolución de problemas como investigación orientada, haciendo especial hincapié en sus posibilidades reales de aplicación en el aula y su coherencia con los criterios de convergencia europea. Este será el objetivo del próximo capítulo.

# ANEXO I: RELACIÓN DE LIBROS DE TEXTO ANALIZADOS

## I.1 Libros de texto de Física General. Incluyen teoría y problemas correspondientes al nivel de 1º de Universidad.

ALONSO, M. y FINN, E.J., 1995. Física. (Addison-Wesley Iberamericana, S.A.).

BLATT, F.J., 1991. Fundamentos de Física (Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.).

BURBANO DE ERCILLA, S. et al., 1993. Física General. (Mira editores, Zaragoza).

BREITHAUP, J., 1999. Physics. (McMillan Press L.T.D.).

CUTNELL, J.D. y KENNETH, w.j., 1998. Física. (Editorial Limusa, S.A., México).

CHABAY, R. y SERWOOD, B., 2002. Matter & Interactions, Vol I y II, (John Wiley & Sons, Inc.).

DE JUANA, J.M., 2003. Física General, Vol I. (Pearson Educación, S.A. Madrid).

DIAS DE DEUS, J. et al., 2001. (McGraw-Hill/ Interamericana de España, S.A.U.).

FIDALGO, J.A., y FERNÁNDEZ, M.R., 1994. Física General. (Editorial Everest, S.A., León).

FISHBANE, P.M. et al., 1996. Physics for Scientifics and Engineers. (Prentice-Hall, Inc.).

GÁLVEZ, F.J. et al., 1998. Física. Curso Teórico Práctico de Fundamentos Físicos de la Ingeniería. (Tébar Flores S.L. Albacete).

GETTYS, W. et al., 1991. Física Clásica y Moderna. (McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.).

GIANCOLI, D.C., 2002. Física para Universitarios, Vol I y II. (Pearson Educación, México).

HECHT, U., 2000. Física: Álgebra y Trigonometría 1 y 2. (International Thomson editores, S.A.).

LEA, S.M. y BURKE, J.R., 1999. Física. La Naturaleza de las Cosas 1 y 2. (International Thomson editores, S.A. España).

REIF, F., 1995. Understanding basics mechanics. (John Wiley and Sons, Inc.).

SEARS, F.W. et al., 1999. Física universitaria. (Addison Wesley Longman de México, S.A.).

SERWAY, A.R., 1992. Física. Tomos I y II. (McGraw-Hill/ Interamericana de México, S.A.)

SERWAY, A.R. y JEWETT, J., 2003. Física 1 y 2. (International Thomson editores, S.A. España).

TIPLER P.A., 1999. Física para la ciencia y la tecnología, Vol 1 y 2. (Editorial Reverté, S.A. Barcelona).

WILSON J.D., 1996. Física. (Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.).

WOLFSON, R. y PASACHOFF, J.M., 1999. Physics with modern physics for scientifics and engineers. (Addison Wesley Longman Inc.).

## **I.2 Libros de texto de Problemas de Física General. Incluyen problemas correspondientes al nivel de 1º de Universidad.**

AYALA, F. et al., 1996. 350 Problemas de Física General. (Universidad de La Rioja. Servicio de Publicaciones, Logroño).

BURBANO DE ERCILLA, S. et al., 1994. Problemas de Física. (Mira editores, Zaragoza).

CABAÑES, M.S., et al., 1992. Problemas de Física. (Servicio de Publicaciones de la U.P.V).

GNÄDIG, P. et al., 2001. 200 Puzzling Physics Problems. (Cambridge University Press).

GONZÁLEZ, F.A., 1995. La Física en Problemas. (Tébar Flores S.L. Albacete).

HERNÁNDEZ, M., 1997. Detrás del espejo. Física en Problemas. (Miguel Hernández, Santa Cruz de Tenerife).

JOU, D. et al.1990. Física para ciencias de la vida. (Libros McGraw-Hill de México, S.A.).

LÓPEZ, V. y MONTOYA, M.M., 1996. Física para Informática. Problemas Resueltos. (Sanz y Torres, Madrid).

MARTÍN, B. y MARTÍN, E., 1996. Problemas Resueltos de Física para estudiantes de Escuelas Técnicas y Facultades de Ingeniería. (Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Santiago de Compostela).

NUÑEZ, L., y MIÑONES, J., 1994. Problemas de Física General. (Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Valladolid).

REES,W.G., 1994. Physics by Example. 200 Problemas and Solutions. (Cambridge University Press).

SERRANO, V.G. et al., 2001. Electricidad y Magnetismo. Estrategias para la resolución de problemas y aplicaciones. (Pearson Educación, México).

TORRENT, J.L., 1994. 272 Exámenes de Física resueltos y comentados. (Primeros cursos de Universidad). (Tébar Flores S.L. Albacete).

## 4. ENSEÑANZA ALTERNATIVA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ORGANIZACIÓN Y DESARROLLO EN EL AULA

Ya hemos comprobado en capítulos anteriores que la didáctica habitual de resolución de problemas de Física a nivel de cursos introductorios de Universidad, podría estar necesitada de un cuestionamiento crítico.

Nos hemos centrado, por el momento, en la ineficacia que revelaría la enseñanza habitual de la resolución de problemas tipo como aplicación de las leyes y conceptos, es decir, hemos valorado las causas metodológicas que están en el origen de la baja eficacia que muestran los estudiantes al resolver problemas de Física. En este capítulo consideramos la posibilidad de organizar y desarrollar el modelo de resolución de problemas como investigación orientada en las clases de Física y que éste conduzca a un cambio metodológico, que conlleve un cambio conceptual y finalmente actitudinal.

Concebimos, por tanto, la posibilidad de proponer una visión superadora para la actividad didáctica de resolución de problemas de Física que, en consonancia con el modelo de aprendizaje como investigación orientada, dé lugar a un cambio metodológico en el estudiante de forma que éstos se ejerciten y desarrollen el pensamiento divergente. Se pretende que adquieran hábitos de razonamiento que les permitan abordar todo tipo de problemas de lápiz y papel de Física, ya sean abiertos o cerrados, cualitativos o cuantitativos.

Bajo el enfoque de la enseñanza habitual, los problemas se tratan como ejercicios tipo de aplicación de la teoría, que hace que los estudiantes memoricen estrategias y las apliquen de forma mecánica en situaciones problemáticas similares, pero que les hace fracasar cuando se trata de resolver problemas ligeramente diferentes a los resueltos con anterioridad. Una premisa necesaria para romper con esta dinámica es, según el método de resolución de problemas que pretendemos aplicar, plantear enunciados más abiertos que obligue a los estudiantes a afrontar la situación bajo las orientaciones que la metodología

científica les aporta. Por ello, nos planteamos este primer interrogante:

***¿Es posible transformar los enunciados cerrados de los problemas de Física a nivel de primer curso de Universidad, en enunciados abiertos o semiabiertos acordes con el modelo de resolución de problemas como investigación orientada?***

Los enunciados abiertos de los problemas, además de no incluir todos los datos ni de concretar la situación hasta delimitar todas las posibilidades (trabajo que deberá realizar el alumno), incorporarán, en la medida de lo posible, conexiones entre ciencia, tecnología y sociedad, con el objetivo de adecuar la resolución de problemas a una perspectiva más actual de la asignatura que genere actitudes positivas en los estudiantes y favorezca el aprendizaje significativo.

En cuanto a la resolución, tal y como en la presentación del método alternativo que proponemos se justificó en el capítulo 2, ésta debe venir dirigida por orientaciones próximas a los procedimientos característicos de la metodología científica. Pretendemos que los estudiantes realicen un análisis cualitativo del enunciado abierto, acotándolo, realizando las aproximaciones pertinentes, ubicando la situación en un marco teórico de referencia etc. Así mismo, para orientar la resolución, pretendemos que hagan de la emisión de hipótesis un recurso procedimental habitual en sus planteamientos, haciendo especial hincapié en la previsión de la dependencia de variables y en la posible evolución del sistema en estudio. Por otro lado, las estrategias no deberán ser reproducciones memorísticas de situaciones aprendidas sino, más bien, alternativas de resolución razonadas en base al cuerpo teórico y los resultados no se aceptarán acríticamente: éstos serán contrastados con las hipótesis emitidas y se pondrá en tela de juicio su coherencia respecto al cuerpo teórico.

No podemos dejar de subrayar, sin embargo, que estos aspectos metodológicos que pretendemos inculcar en las resoluciones de los estudiantes, no constituyen un método rígido que obligue, en todos y cada uno de los problemas a seguir paso a paso un algoritmo sistemático. Es, precisamente, lo contrario lo

que se persigue. Estos problemas de enunciado abierto y la metodología de resolución propuesta, tratan de apoyar y reforzar los procesos de pensamiento y conductas de aprendizaje deseados y busca contribuir al abandono de los procesos de pensamiento y conductas de resolución iniciales, más mecanicistas e irreflexivas.

Es el momento, por tanto, de concretar el diseño de los enunciados de los problemas propuestos como alternativa a los problemas habituales. Para el desarrollo de los mismos, se han tenido presentes intentos similares por parte de otros investigadores, aunque en ningún caso a nivel universitario (Martínez-Torregrosa, 1987; Reyes, 1991; Ramírez, 1990, Varela y Martínez, 1997).

Por otro lado, estos problemas tampoco son los 'únicos' problemas. Solamente presentamos una parte del material didáctico que hemos diseñado y utilizado. Entendemos que es más clarificador incluir sólo unos pocos problemas, pero presentados junto a su resolución bajo el enfoque metodológico como investigación orientada e incluyendo comentarios de los objetivos conceptuales, procedimentales y actitudinales que con ellos pretendemos abordar, que aportar una larga relación de enunciados sin desarrollar.

En la resolución de los problemas incluimos (en cursiva) preguntas que coinciden con las que el profesor pudiera realizar a los estudiantes para orientarlos en la búsqueda y aplicación de las diferentes facetas metodológicas en el contexto de la situación problemática, pero no indicamos expresamente a qué aspecto procedimental nos estamos refiriendo. Queremos evitar con ello que los estudiantes memoricen el proceso de resolución como una sucesión sistemática de pasos a seguir y se alejen de los procesos reflexivos que con este cambio metodológico perseguimos.

De acuerdo con todo lo cual, pasamos a exponer los **enunciados, resoluciones y objetivos de algunos problemas** representativos de nuestra propuesta didáctica.

## ENUNCIADO P.1

Entre el punto A, en el que estamos situados, de la orilla de un lago y el punto B de la otra orilla hay una distancia  $L$ .

En un momento dado lanzamos hacia arriba verticalmente un objeto y, desde ese mismo instante y durante todo el tiempo de vuelo del objeto, el aire ejerce sobre él una fuerza  $F$  constante en la dirección AB.

**¿Caerá el objeto en el lago?**

## RESOLUCIÓN P.1

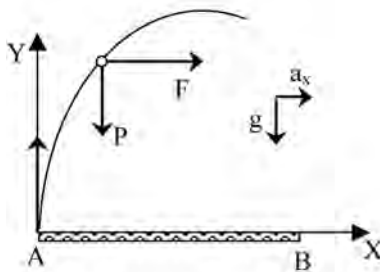
**¿Qué magnitud física tendremos que obtener para poder responder a la interrogante del problema?**

Para saber si el objeto caerá en el lago o lo atraviesa, deberíamos ser capaces de obtener su recorrido horizontal o alcance máximo, de modo que si  $X_{\max} < L$  caerá en el lago, si  $X_{\max} = L$  caerá justamente en el extremo B y si  $X_{\max} > L$  sobrepasará la orilla B.

**¿Cuáles son las interacciones sobre el objeto mientras atraviesa el lago y qué efecto producen en él?**

· Desde que lanzamos verticalmente hacia arriba el objeto (al que consideraremos partícula puntual para simplificar), se ve sometido a dos interacciones: el peso como consecuencia de la

atracción terrestre y la fuerza horizontal y de magnitud constante ejercida por el aire. Si ubicamos el sistema de referencia como en la figura, encontramos que en el eje OY el peso que es constante produce una aceleración constante hacia abajo y en el eje OX la fuerza constante del aire impulsa el objeto hacia las X positivas con aceleración uniforme. De acuerdo con el principio de superposición, el movimiento curvilíneo plano resultante se puede estudiar considerando estos dos M.R.U.A de manera independiente, valorando el mismo tiempo de vuelo en ambas direcciones.



**¿Qué variables afectarán al alcance del proyectil?**

$$X_{\max} = X_{\max}(F, v_0, g, m)$$

· Cuanto mayor sea la fuerza del viento, mayor será el desplazamiento horizontal alcanzado en el tiempo de vuelo. De hecho, sin el efecto del viento con un lanzamiento vertical no habría desplazamiento horizontal.

· Cuanto mayor sea la velocidad inicial vertical de lanzamiento, mayor será el tiempo de vuelo y mayor el alcance. Ésta es la variable más fácil de controlar.



- Cuanto mayor sea  $g$  (según el lugar en el que se realice la experiencia) más rápidamente regresará a tierra y menor será el alcance horizontal.
- Cuanto mayor sea la masa  $m$  del objeto lanzado, más resistencia opondrá a ser acelerado por la fuerza del viento (mayor inercia) y por tanto alcanzará menos distancia horizontal durante el vuelo.

**¿Cómo podríamos obtener la expresión del alcance horizontal en función de estas magnitudes?**

· Una simple aplicación de la segunda ley de Newton nos permite obtener las aceleraciones horizontal y vertical constantes que dan lugar a dos M.R.U.A. Combinando estos movimientos, según el principio de superposición, llegamos a un conjunto de ecuaciones cinemáticas:

$OX: a_x = F/m = cte; M.R.U.A.$

$OY: a_y = P/m = g = cte; M.R.U.A.$

$$OX: x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad (1) \quad OY: y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3) \quad \rightarrow 0 = t \left( v_0 - \frac{1}{2} g t \right) \Rightarrow t = 0; t = \frac{2v_0}{g} \quad (5)$$

$$V_x = \frac{F}{m} t \quad (2) \quad V_y = v_0 - g t \quad (4)$$

· Haciendo uso de la condición  $y=0$  para la posición de impacto con el suelo, obtenemos el tiempo de vuelo del objeto, que llevado a (1) nos da para el alcance máximo:

$$X_{\max} = \frac{2Fv_0^2}{mg^2}$$

**¿Es coherente el resultado con las hipótesis previamente emitidas?**

Se contrasta el resultado en lo referente a la dependencia de variables y al caso límite de  $F=0$ , movimiento vertical, alcance horizontal cero.

**¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?**

$$\frac{N \cdot \left( \frac{m}{s} \right)^2}{kg \cdot \left( \frac{m}{s^2} \right)^2} = m; \text{ Se comprueba que sí lo es.}$$

**¿Son realmente independientes los movimientos horizontal y vertical que hemos planteado? ¿Es razonable que el alcance máximo no dependa de la altura máxima alcanzada?**

La velocidad inicial vertical de lanzamiento, determina junto con  $g$  el tiempo transcurrido hasta que el objeto se para en la altura máxima y este tiempo más el de caída (que son iguales puesto que se dan bajo la misma aceleración  $g$ ) es el tiempo du-

rante el cual el viento puede desplazar la partícula horizontalmente. Pero esto no significa que el movimiento vertical se vea afectado por el horizontal o viceversa. Ninguno de ellos se ve alterado por el hecho de que simultáneamente se esté produciendo el otro luego, en este sentido, son realmente independientes tal y como indica el principio de superposición.

## COMENTARIOS P.1

Se trata de un problema semiabierto contextualizado en la cinemática de la partícula, más concretamente en el movimiento de proyectiles. Esto hace que la situación sea familiar para los estudiantes de primer curso de Universidad, aún en los primeros días de clase. En este sentido, se considera apropiado para introducir la metodología de resolución. Por otro lado, la aplicación memorística de las estrategias de resolución del tiro parabólico no resulta válida, pues el efecto del aire en el eje horizontal da lugar a un movimiento uniformemente acelerado. La realización de un análisis cualitativo resulta, por tanto, imprescindible para enfocar la resolución en base al principio de superposición de dos movimientos independientes. La emisión de hipótesis de variables es sencilla e intuitiva y fácil de contrastar en el resultado. Se realiza, también, un análisis dimensional de la respuesta, procedimiento que, en general, al comienzo resulta extraño para los estudiantes.

## ENUNCIADO P.2

Por lo general, tratamos de no dejar marca de caucho quemado detrás de nuestro vehículo. Esto es, tratamos de que nuestros neumáticos rueden sin que su superficie patine sobre el pavimento. Por ello, rodar sin deslizar supone que la velocidad del punto de contacto de la rueda respecto del suelo es cero.

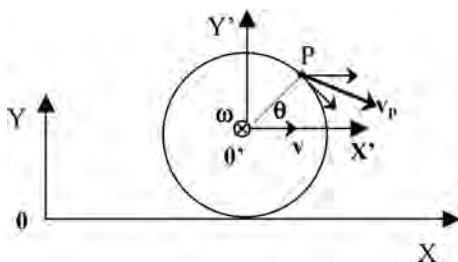
Encontrar la expresión del vector velocidad lineal de cualquier punto de la periferia de una rueda respecto del asfalto.

## RESOLUCIÓN P.2

¿Qué tipo de movimiento tiene un punto genérico de la periferia de la rueda?

Cuando la rueda lleva un movimiento de rodadura sin desliza-

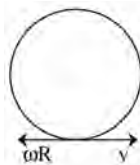
miento, mientras gira alrededor de su eje con velocidad angular  $\omega$ , se traslada con velocidad lineal  $v$ . Esto supone que un punto  $P$  de su periferia se verá afectado por ambos movimientos y una manera sencilla de abordar su estudio es considerar dos sistemas de referencia en todo momento paralelos entre sí, uno fijo  $(X, Y, Z)$  ligado al suelo y otro móvil  $(X', Y', Z')$  trasladándose con la rueda (otra opción sería solidario con



la rueda en traslación y rotación). De este modo, podemos analizar el movimiento de un punto  $P$  de la periferia por superposición de una rotación alrededor del eje que pasa por  $O'$  y una traslación de toda la rueda respecto de  $O$ .

**¿Qué relación existirá entre la velocidad lineal de traslación  $v$  y la velocidad angular de rotación  $\omega$ , si la rodadura es sin deslizamiento?**

Como el punto de contacto de la rueda con el suelo está en reposo respecto de él, su velocidad absoluta será nula, es decir, la suma vectorial de la velocidad debida a la traslación y la velocidad tangencial debida a la rotación deberá dar el vector nulo:



$v - \omega R = 0$ , luego  $v = \omega R$  será la condición de rodadura sin deslizamiento.

**¿De qué variables dependerá el módulo del vector velocidad  $v_p$ ?**

$$v_p = v_p(\omega, R, \theta)$$

· Para emitir las hipótesis de variables, debemos interpretar que el vehículo se traslada con una determinada velocidad  $v$  porque el motor hace girar a las ruedas con una velocidad angular  $\omega$ . Como  $v = \omega R$  para la rodadura sin deslizamiento, la velocidad  $v$  en realidad, no es una variable independiente, esto es, depende del valor de la velocidad angular y del radio de la rueda.

· Por tanto, cuanto mayor sea la velocidad de rotación  $\omega$  de la rueda, mayor será la velocidad absoluta del punto  $P$ , pues mayor será la velocidad de traslación  $v$  y todos los puntos de la rueda se ven arrastrados con esta velocidad.

· Lo mismo ocurrirá cuanto mayor sea el radio  $R$  de la rueda.

· Tal y como hemos definido la posición angular  $\theta$ , si aumentamos este ángulo entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  elevamos la posición del punto  $P$  y el término de la velocidad debido a la rotación contribuye más a la velocidad total, pues su proyección sobre la horizontal aumenta. (Es probable que los alumnos no alcancen a emitir esta hipótesis por lo que se podría posponer al análisis de resultados).

**¿Cómo podríamos obtener la expresión de la velocidad absoluta en función de estas magnitudes?**

· La expresión general que nos relaciona la velocidad de un móvil en dos sistemas de referencia en movimiento relativo como los que hemos considerado, viene dada por:

$$v_p = v_0 + v_r + \omega \wedge r$$

· El término  $\omega \wedge r$  es nulo puesto que nuestro sistema de referencia móvil no gira.

· El término  $v_0$ , que representa la velocidad de traslación del origen  $O'$  respecto de  $O$ , coincide con la velocidad de traslación del vehículo:  $v_0 = v_{u_x} = \omega R u_x$

· El término  $v_r$  es la velocidad del punto  $P$  respecto del sistema de referencia móvil y de acuerdo con nuestra elección, representa la velocidad tangencial de rotación de  $P$  en torno a  $O'$ :  $v_r = \omega \wedge r$ , donde  $r = R \cos \theta u'_x + R \sin \theta u'_y$  y  $\omega = -\omega u'_z$ , luego:

$$v_r = \omega \wedge r = \omega R \sin \theta u'_x - \omega R \cos \theta u'_y$$

· Por tanto, la velocidad buscada será:  $v_p = \omega R u_x + \omega R \sin \theta u'_x - \omega R \cos \theta u'_y$  y teniendo en cuenta que los ejes de ambos sistemas son paralelos entre sí, queda:

$$v_p = \omega R \left[ (1 + \sin \theta) u_x - \cos \theta u_y \right] \text{ y su módulo } v_p = \omega R \sqrt{2(1 + \sin \theta)}$$

### ¿Es coherente el resultado con las hipótesis previamente emitidas?

· Se contrasta el resultado en lo referente la dependencia de variables y se valoran los siguientes casos particulares:

· Si  $\theta=90^\circ$  (posición superior),  $v=2v$  puesto que la velocidad  $\omega \wedge r$  es paralela a  $v_y$  del mismo módulo ( $v=\omega R$ ).

· Si  $\theta=270^\circ$  (posición inferior),  $v=0$  puesto que la velocidad  $\omega \wedge r$  es antiparalela a  $v_y$  y del mismo módulo ( $v=\omega R$ ), lo que es coherente con la condición de no deslizamiento respecto del suelo.

· Por otro lado, vemos que  $\omega R$  afecta tanto a la velocidad tangencial debido a la rotación como a la velocidad de traslación del coche. Esto lo podemos justificar porque estas dos velocidades no son independientes en la rodadura sin deslizamiento. En nuestras hipótesis, sin embargo, sólo habíamos considerado el efecto de la variación de  $\omega$  y  $R$  sobre la contribución tangencial.

· Además, el resultado es dimensionalmente homogéneo.

## COMENTARIOS P.2

Planteamos un enunciado semiabierto de cinemática relativa. Tiene un cierto enfoque CTS que pretende incentivar el interés de la resolución en una materia ardua para los estudiantes. En el enunciado se incluye información acerca de la condición de rodadura sin deslizamiento, pues en los programas habituales este aspecto se trata en la lección de sólido rígido todavía sin abordar. El análisis de algunas variables en términos de hipótesis, puede resultar complejo para los estudiantes. Si durante la resolución por ellos realizada observáramos estas dificultades, no tendríamos inconveniente en posponer su análisis al final del problema cuando ya dispongamos de un resultado matemático. Al fin y al cabo, cuando emitimos hipótesis no estamos obligados a hacer diana siempre, a la primera y en todos los aspectos. Por contra, el derecho a equivocarse es fundamental dentro de nuestro planteamiento metodológico, y es conveniente que los estudiantes, desde un comienzo, asuman esta posibilidad. Otro aspecto procedimental de interés que surge durante esta resolución, es la necesidad de distinguir entre las variables dependientes e independientes. La condición de rodadura pura nos liga la traslación y la rotación a través del radio de la rueda,

por lo que, en contra de la probable opinión de algunos estudiantes, las tres no pueden ser variables independientes. El estudio de algunos casos límite puede ayudarnos a comprender este movimiento de rodadura.

### ENUNCIADO P.3

Tras asistir a clase en la escuela, al montarte en el coche de un compañero para volver a casa olvidas el libro de física encima del capó. ¿Cuál será la máxima aceleración que se le puede comunicar al coche para no perder el libro?

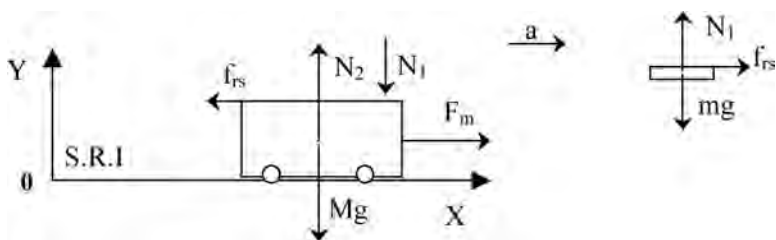
### RESOLUCIÓN P.3

**¿Por qué perderíamos el libro si sobrepasáramos una determinada aceleración, como predice el enunciado?**

· Si analizamos la situación respecto a un sistema de referencia inercial (S.R.I), cuando el coche al ponerse en marcha acelera en un sentido, el libro, debido a su inercia tiende a permanecer en reposo respecto del suelo. Si el rozamiento entre el libro y el capó no es suficiente como para arrastrar el libro junto con el coche, la aceleración del libro de física será menor que la del coche y deslizará hacia atrás sobre el capó. La fuerza de rozamiento estática necesaria para mantener el libro sobre el coche es tanto mayor cuanto mayor sea la aceleración de éste.

· Desde un punto de vista no inercial (S.R.N.I), por ejemplo, un observador que viaje con el coche, considerando una fuerza de inercia opuesta a la aceleración del coche justificamos la tendencia del libro a moverse en sentido opuesto al de la marcha del vehículo y de este observador. La fuerza de inercia es tanto mayor cuanto mayor sea la aceleración del coche.

**¿Cuáles son las interacciones sobre el libro de física y sobre el coche y qué movimiento producen respecto al sistema de referencia elegido?**



· Bajo la perspectiva inercial identificamos la siguientes fuerzas:

Los pesos de ambos cuerpos como consecuencia de su interacción con la tierra.

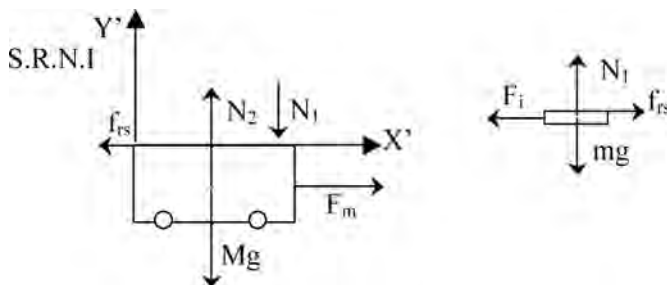
Las reacciones normales de la tierra sobre el coche y del coche sobre el libro. A su vez, el libro ejerce una fuerza igual y opuesta a  $N_1$  sobre el coche.

La fuerza de rozamiento entre el coche y el libro que actúa sobre ambos pero con sentidos contrarios y que será estática mientras se mantenga el reposo relativo entre ambos y será cinética en caso contrario.

Mientras el libro no deslice respecto del coche, el sistema se moverá con aceleración 'a' por la acción de la fuerza que transmite el motor (a través del rozamiento entre los neumáticos y el asfalto, pero que en nuestra simplificación consideramos aplicada al centro de masas del vehículo).

Para remarcar el concepto de acción y reacción que va asociado a las interacciones, se podría pedir a los estudiantes que representaran también las fuerzas que el sistema ejerce sobre la tierra.

· Bajo la perspectiva no inercial de un observador que viaje con el coche, el libro se encuentra en reposo. Para justificar semejante circunstancia, además de las fuerzas reales anteriormente descritas es necesario considerar una fuerza de inercia sobre el libro (ficticia, pues no es consecuencia de interacción real alguna) que equilibre al rozamiento estático.



**¿De qué magnitudes dependerá la máxima aceleración que pueda alcanzar el coche sin que el libro se caiga de él?**

$$a_{max} = a_{max}(\mu_s, m, g)$$

· Cuanto mayor sea el coeficiente de rozamiento estático, mayor será la máxima fuerza de rozamiento estática que se pueda dar entre el coche y el libro, por lo que mayor será la aceleración que pueda alcanzar el vehículo sin que el libro deslice sobre él. Esta variable puede cambiar de diversas maneras. Por ejemplo, dependerá de que el coche esté o no mojado, de que el libro se encuentra o no forrado...

· Cuanta más masa tenga el libro, mayor será el rozamiento (pues aumenta la normal) y mayor la aceleración máxima. Por otro lado, también aumenta la inercia (para un observador inercial, más dificultad para ser arrastrado desde el reposo hasta alcanzar la aceleración del coche y desde el punto de vista no inercial, mayor será la fuerza de inercia opuesta al rozamiento) por lo que la aceleración máxima posible se-

ría menor. A priori, aparecen dos efectos contrapuestos por lo que es difícil predecir cómo será la dependencia con la masa.

· Si habitáramos en un lugar del planeta con mayor  $g$ , la aceleración máxima posible sería mayor puesto que al aumentar el peso, aumenta la normal y, en consecuencia, la fuerza de rozamiento estática que mantiene al libro en reposo respecto al coche.

### **¿Qué vía deberíamos seguir para obtener la expresión de la aceleración máxima en función de estas variables?**

Podremos aplicar la segunda ley de Newton al libro, desde un punto de vista inercial o no inercial:

$$\text{S.R.I.: } f_{rs} = ma; \quad N_1 - mg = 0$$

$$\text{S.R.N.I.: } f_{rs} - F_i = 0; \quad N_1 - mg = 0$$

· En general sabemos que  $f_{rs} \leq \mu_s N$ . Si queremos obtener la expresión de la aceleración máxima para que no deslice el texto sobre el coche, deberemos considerar el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática entre ambas superficies, es decir,  $f_{rs,max} = \mu_s N$ . Por tanto,  $\mu_s mg = ma_{max} \Rightarrow a_{max} = \mu_s g$

### **¿Cómo interpretamos este resultado?**

Hemos hallado la expresión del valor límite que puede alcanzar la aceleración del coche para no perder el libro de física. En consecuencia, si la aceleración del vehículo es tal que supera este valor máximo,  $a > \mu_s g$ , el libro se caerá y permanecerá sobre el capó en caso contrario, es decir, cuando  $a < \mu_s g$ .

### **¿En qué trayectos del recorrido a casa crees que podría sobrepasarse esta aceleración máxima?**

Lógicamente, los momentos de riesgo de caída del libro de texto son aquellos en los que el coche acelera hacia delante, frena para reducir su velocidad o toma curvas. En este último caso el problema tendría un tratamiento similar pero considerando la aceleración normal o la fuerza de inercia (centrífuga) correspondiente.

### **¿Es coherente el resultado con las hipótesis previamente emitidas?**

· Se contrasta el resultado en lo referente la dependencia de las variables coeficiente de rozamiento y aceleración de la gravedad.

· Una vez resuelta la situación observamos que la aceleración en cuestión no depende de la masa del libro. Debemos interpretar que los dos efectos contrapuestos antes citados (el aumento de la inercia y de la fuerza de rozamiento estática máxima) se cancelan entre sí.

· Además, el resultado es dimensionalmente homogéneo, pues el coeficiente de rozamiento es adimensional.

**¿Qué nuevas vías referentes a esta situación podrían ser interesantes de explorar?**

· Llegados a este punto, podría ser interesante conocer la fuerza que el motor debe ejercer para que la aceleración del sistema sea justamente la máxima posible,  $\{F_m = (m+M) \mu_s g\}$ .

· Así mismo, se podría hallar la aceleración del libro respecto del asfalto en el caso de que la aceleración del coche sobrepase el valor crítico antes calculado,  $\{a_1 = \mu_k g\}$ , o la aceleración absoluta del coche en función de la fuerza del motor,

$$\left\{ a_2 = \frac{F_m - \mu_k mg}{M} \right\}$$

### COMENTARIOS P.3

Se trata de un enunciado abierto que presenta una situación problemática muy cercana al día a día de los estudiantes en su ámbito escolar. De nuevo este planteamiento pretenden incrementar su interés por la tarea. En lo metodológico, es fundamental que los estudiantes identifiquen el origen de las interacciones sobre cada parte del sistema, que reconozcan los pares de fuerza de acción y reacción distinguiendo sobre qué cuerpo actúa cada una y que estos razonamientos los emitan en base a un sistema de referencia inercial o no inercial claramente definido. Otra característica importante de este análisis cualitativo es el reconocer que nos encontramos ante un valor límite de la fuerza de rozamiento estática. En cuanto a la emisión de hipótesis de variables surge, en este contexto, el doble efecto de la masa (inercial y gravitacional) sobre la aceleración pedida. Esta duplicidad hace que no sea posible predecir en términos de hipótesis el efecto final de la variable masa, por lo que es en el análisis de resultados donde tendremos que detenernos a reconsiderar esta cuestión. Desde la perspectiva procedimental, este problema se presta a que, una vez alcanzado el resultado pedido, se continúe indagando las posibles nuevas perspectivas que de él se puedan derivar.

### ENUNCIADO P.4

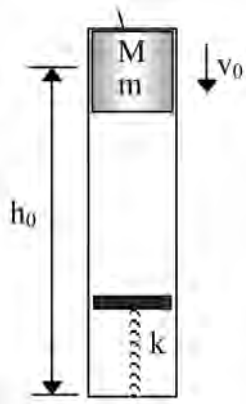
Como medida de seguridad en el fondo de los ascensores se instala un muelle vertical que amortigüe el posible impacto. Además, en caso de ruptura del cable un freno de seguridad aplica una fuerza de rozamiento constante al ascensor. Determinar la constante elástica que deberá tener el muelle utilizado.



## RESOLUCIÓN P.4

**¿Cómo podemos esquematizar la situación en caso de ruptura de los cables?**

· En el momento del accidente el ascensor podría encontrarse subiendo, bajando o en reposo. Nos centraremos en el caso de mayor riesgo, es decir, cuando parte hacia abajo con una velocidad  $v_0$ , desde la máxima altura  $h_0$  medida desde el fondo del pozo, a la que el ascensor, cuyas dimensiones despreciamos frente a la altura del hueco y así lo consideramos como partícula puntual, se puede encontrar. Cuando tras su caída el ascensor comprima el muelle, éste tiene que tener una constante elástica  $k$ , tal que la máxima compresión posible  $X_{max}$  no supere la longitud del muelle y poder minimizar, así, el efecto del impacto.



· Distinguimos, pues, dos fases bien diferenciadas, por un lado la caída del ascensor de masa  $M$  con su carga  $m$  frenado por la fuerza de rozamiento  $f_r$  y, por otro lado, la compresión del muelle durante la cual suponemos que sigue actuando el rozamiento.

**¿Cómo se relacionará la constante elástica del muelle con estas variables?**

$$k = k(v_0, M, m, h_0, f_r, X_{max})$$

· Cuanto mayor sea la velocidad con la que el ascensor desciende en el momento de la ruptura de los cables, mayor será la energía cinética inicial del sistema que tendrá que absorber el muelle, luego mayor será la  $k$  necesaria.

· De manera análoga, también supone un aumento de la energía inicial, en este caso potencial, el que la altura a la que se produce la ruptura sea mayor. Cuanto más elevada sea la máxima altura  $h_0$  a la que se pueda encontrar el ascensor, más  $k$  necesitaremos para el muelle.

· Cuanto mayor sea el efecto del freno, mayor  $f_r$ , más energía se disipará durante el descenso y menos habrá que absorber en la compresión, luego menor  $k$  necesitará el muelle.

· Cuanto menor sea la masa  $M$  del ascensor o la  $m$  de su carga, mayor será la energía de partida (tanto cinética como potencial) por lo que mayor será la energía que el muelle deberá absorber en su compresión y mayor la  $k$  necesaria.

**¿Qué vía deberíamos seguir para obtener la expresión de la constante elástica del muelle en función de estas variables?**

· La fase de descenso se podría analizar siguiendo una estrategia dinámica para calcular la aceleración de caída y una cinemática correspondiente a M.R.U.A para obtener la velocidad de entrada al muelle, puesto que al ser todas las fuerzas constantes la aceleración resultante también lo es.

· Sin embargo, durante la compresión del muelle actúa la fuerza elástica dependiente de la posición que, por tanto, dará lugar a una aceleración variable. La resolución de esta etapa por la vía dinámico-cinemática, aunque factible, no resulta la más sencilla.

· Por ello, resolveremos el problema en base a un planteamiento energético de la situación.

· Desde que se rompe el cable hasta que el muelle alcanza su máxima compresión y se detiene (antes de impactar con el suelo), actúan sobre él las siguientes fuerzas: Peso: conservativa, su trabajo se puede calcular a través de la variación de energía potencial gravitatoria. Tomamos  $E_{pg}=0$  en  $h=0$ .

Elástica: conservativa, su trabajo se puede calcular a través de la variación de energía potencial elástica. Tomamos  $E_{pe}=0$  en la posición natural del muelle ( $x=0$ ).

Fuerza de rozamiento: no conservativa, su trabajo hay que calcularlo resolviendo la integral de la fuerza por el desplazamiento.

· Por tanto, considerando todo el proceso de una vez, diremos que  $\Delta E=W_r$ , es decir, que la energía mecánica inicial del sistema en el instante de la ruptura de los cables, será igual a su energía mecánica final cuando alcance la máxima compresión el muelle, más la energía disipada por rozamiento durante la compresión:

$$(M + m)gh_0 + \frac{1}{2}(M + m)v_0^2 = \frac{1}{2}kX_{\max}^2 + f_r h_0, \text{ de donde:}$$

$$k = \frac{(M + m)(2gh_0 + v_0^2) - 2f_r h_0}{X_{\max}^2}$$

· Los estudiantes podrían comprobar que si el balance energético se realiza separado en la fase de descenso y en la de compresión del muelle, el resultado no cambia. Así mismo, podría tener interés que contrasten la resolución energética del descenso con la vía dinámico-cinemática.

### **¿Es coherente el resultado con las hipótesis emitidas?**

Se contrastan las dependencias previstas. En cuanto a la altura, se observa que en la expresión de  $k$  figura, por un lado, en un sumando que hace que su aumento aumente  $k$  de manera coincidente con el razonamiento emitido en las hipótesis y, por otro, en un sumando tal que al aumentar  $h_0$ , disminuye  $k$  puesto que este aumento conlleva que durante más espacio actúe la fuerza de rozamiento y más se reduzca la energía del ascensor durante la caída. Sin embargo, esta fuerza de rozamiento siempre será menor que el peso total del sistema, por lo que esta influencia negativa sobre  $k$  no será nunca tan intensa como la positiva proveniente del trabajo del peso.

## ¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?

$$\frac{\text{kg}\left(\frac{\text{m}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right) - \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{m}^2} = \frac{\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

A modo de nuevas perspectivas abiertas por el problema pediríamos a los estudiantes: **¿Podrías describir cualitativamente el movimiento del sistema una vez alcanzada la máxima compresión del muelle?**

Cuando el muelle se encuentra en su posición más comprimida posee una energía potencial elástica asociada a la fuerza elástica que el resorte ejerce hacia arriba sobre el ascensor y que es superior al peso del sistema. Por tanto, el muelle se estirará perdiendo energía potencial elástica y lanzará al ascensor hacia arriba hasta alcanzar una determinada altura. Es decir, la energía potencial elástica se ha utilizado en vencer la fuerza de rozamiento (disipación de energía mecánica) y en ganar velocidad y altura (transformación de energía mecánica). El ascensor rebotará sucesivamente sobre el muelle perdiendo en cada oscilación una parte de su energía como consecuencia del rozamiento y cuando toda ella se disipe, se parará. Este tipo de movimiento se conoce como movimiento oscilatorio amortiguado que en temas posteriores se tratará con detalle.

### COMENTARIOS P.4

Nos encontramos ante otro enunciado abierto con un cierto enfoque CTS, que necesariamente requiere de un planteamiento cualitativo que acote y centre la situación. En este caso, es de rigor analizar el posible accidente del ascensor considerando la peor de las situaciones posibles. Los estudiantes deberán encontrar cuáles son las variables pertinentes para abordar el problema y deberán relacionarlas con la constante elástica pedida, tratando de justificar su relación con argumentos energéticos o cinemático-dinámicos. En lo que a las estrategias se refiere, el problema consta de dos partes. La primera es la caída del sistema frenado por el rozamiento, la cual podría resolverse haciendo uso de leyes dinámicas y cinemáticas, o mediante un balance energético. Para la segunda fase, correspondiente a la compresión del muelle, los estudiantes deberán encontrar razonadamente, acorde con las interacciones, qué vía es la más conveniente para la resolución. Es, por tanto, fundamental, reconocer cuáles son las interacciones que actúan sobre el sistema y analizar, por un lado, si son o no constantes y, por otro, si realizan o no trabajo. Así mismo, puede ser un ejercicio interesante que los estudiantes comprueben la concordancia de resultados obtenidos por vías alternativas. El análisis de resultados da lugar a valorar el doble efecto (probablemente no tenido en cuenta en la emisión de hipótesis) que el aumento de la altura inicial tiene en la constante del muelle. Por último, un análisis cualitativo del movi-

miento posterior al impacto del ascensor con el muelle, nos permitirá relacionar el problema con contenidos que se estudiarán más adelante durante el curso.

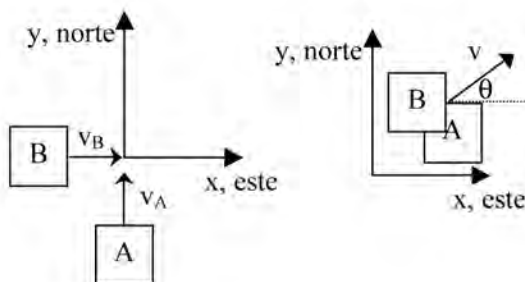
## ENUNCIADO P.5

Tras acabar sus estudios, un ingeniero técnico se coloca como perito en una agencia de seguros. Un cliente le transmite el siguiente parte: En un cruce con semáforo, cuando el coche A (cliente de la compañía) viajaba hacia el norte, chocó con el coche B que viajaba hacia el este. Los dos coches quedaron enganchados y, con las ruedas bloqueadas, deslizaron juntos hasta detenerse. El accidente sólo tiene consecuencias de chapa.

Como no existen testigos y ambos conductores afirman que respetaron la señal luminosa ¿qué podría hacer el perito para determinar si alguno de los vehículos ha sobrepasado el límite de velocidad permitido y utilizar este hecho a favor de su compañía?

## RESOLUCIÓN P.5

¿Cómo podemos modelizar la situación producida en el accidente?



· Como las direcciones del movimiento de los coches, que en principio modelizaremos como partículas puntuales, son norte y este, el choque es perpendicular y para representarlo definimos un sistema de referencia como el de la figura.

· Cuando se produce la colisión los coches salen de ella enganchados por lo que se trata de un choque plástico en el que, necesariamente, parte de la energía cinética de los vehículos ha tenido que transformarse en energía potencial interna asociada a la deformación de chapa y parte en calor. De la colisión los coches salen con la misma velocidad  $v$  formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Posteriormente, deslizan unidos sobre el asfalto (llamaremos  $\mu$  al coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre los neumáticos y el asfalto) hasta detenerse tras recorrer una determinada distancia  $S$ .

· El perito tratará de obtener las velocidades  $v_A$  y  $v_B$  que llevan los vehículos cuando colisionan.

### ¿Qué datos deberá obtener el perito en el lugar del accidente?

· Las velocidades  $v_A$  y  $v_B$  que los vehículos poseen cuando entran al choque, (nos centraremos en la velocidad del coche del cliente de la compañía), se podrán relacionar con las siguientes magnitudes:  $v_A = v_A(\theta, S, \mu)$ .

· Según la figura el ángulo  $\theta$  es el formado por la velocidad  $v$  de salida del choque con la horizontal. Así definido, cuanto mayor sea  $\theta$  mayor será la componente  $v_x$  tras el choque, para lo cual mayor ha tenido que ser  $v_A$  antes del mismo.

· Por otro lado, cuanto más distancia  $S$  recorran los vehículos hasta detenerse por efecto del rozamiento tras el impacto, mayor habrá sido la velocidad de entrada al choque y, lógicamente, a mayor coeficiente de rozamiento, mayor velocidad inicial para completar una distancia determinada. Ambas dependencias se justifican tanto dinámicamente como energéticamente.

· En definitiva, el perito deberá de medir la huella  $S$  sobre el asfalto, la dirección  $\theta$  que forma con la horizontal y deberá estimar el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y el asfalto.

### ¿Cómo podríamos obtener la relación simbólica entre estas magnitudes?

· Distinguiamos la resolución correspondiente a cada fase:

1. Durante el choque, que es plástico puesto que los coches salen unidos tras ella, las fuerzas internas entre vehículos debidas a la colisión son muy superiores a las externas como el rozamiento. Por ello, podemos considerar que para este proceso el sistema se encuentra aislado del exterior y, por tanto, que el momento lineal se conserva. Respecto al sistema de referencia de la figura podremos escribir:

$P = \text{cte}$

$$x : m_B v_B = (m_A + m_B)v \cos \theta \Rightarrow v_B = \frac{(m_A + m_B)}{m_B} v \cos \theta$$

$$y : m_A v_A = (m_A + m_B)v \sin \theta \Rightarrow v_A = \frac{(m_A + m_B)}{m_A} v \sin \theta$$

2. La fase correspondiente al deslizamiento de los coches sobre el asfalto podrá analizarse tanto desde la perspectiva cinemático-dinámica (fuerzas constantes y aceleraciones uniformes), como desde un planteamiento energético de la situación: toda la energía cinética del sistema inmediatamente después de la colisión se habrá perdido como consecuencia del rozamiento con el asfalto hasta que finalmente se detienen:

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \mu(m_A + m_B)gS \Rightarrow v = \sqrt{2\mu gS}$$

Por lo que las velocidades previas a la colisión:

$$v_A = \left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right) \sqrt{2\mu g S} \sin \theta$$

$$v_B = \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) \sqrt{2\mu g S} \cos \theta$$

### ¿Es coherente el resultado con las hipótesis emitidas?

· Se contrastan las dependencias previstas.  
· Se aprecia en el resultado obtenido que las velocidades de entrada al choque de cada vehículo, para valores fijos de  $\theta$ ,  $\mu$ ,  $g$  y  $S$  son tanto mayores cuanto más pequeña sea la masa del coche en cuestión y más grande sea la masa del otro vehículo. Esto se justifica porque la masa del vehículo del que damos la velocidad contribuye al impulso en el choque (para un momento lineal dado, a mayor  $m$ , menor  $v$ , es decir, para producir un mismo impulso cuanto mayor  $m$  lleve menor  $v$  será necesaria), mientras que la masa del otro coche sólo influye en la inercia del sistema tras la colisión (a mayor masa, mayor inercia y, por ello, mayor velocidad será necesaria para que tras el choque recorra el mismo espacio).

### ¿Son coherentes las unidades en el resultado?

$$\frac{\text{kg}}{\text{kg}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### ¿Cuál sería el resultado más favorable para los intereses del cliente de la compañía?

· El caso más favorable que cabría esperar es aquél en el que el coche del cliente se encontrara en reposo en el instante del accidente. Para que esto fuera así el ángulo  $\theta$  debería ser nulo y, entonces:

$$v_A = \left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right) \sqrt{2\mu g S} \sin 0 = 0$$

$$v_B = \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) \sqrt{2\mu g S} \cos 0 = \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) \sqrt{2\mu g S}$$

· Si además, la velocidad del vehículo B sobrepasara el límite permitido, el caso quedaría resuelto a favor del cliente.

## COMENTARIOS P.5

· El enunciado se contextualiza en una situación con visos de ser una plausible circunstancia profesional para un ingeniero técnico. Lógicamente, al ser una situación real abierta, el estudiante deberá acotar y modelizar el problema para poder abor-

darlo bajo el prisma de sus conocimientos académicos en resolución de problemas. Así mismo, se verá obligado a razonar qué variables son las que hay que valorar para tratar de alcanzar una solución y cómo podría, en la situación real descrita, obtener valores numéricos de las mismas, realizando medidas sobre el terreno o consultando catálogos y tablas. Pero, son las hipótesis sobre la dependencia de variables las que pueden orientar esta búsqueda y, por tanto, guiar la resolución. En lo estratégico este problema se debe dividir en dos subproblemas cada uno de los cuales puede ser abordado por medio de un principio de conservación (momento lineal o energía) cuya aplicabilidad deberá ser razonada por los estudiantes, en base a las interacciones sobre el sistema. La fase de deslizamiento sobre el asfalto puede ser resuelta, también, a través de caminos cinemático-dinámicos y son los propios estudiantes los que deberán valorar ambas alternativas. En cuanto al resultado, una vez alcanzada la expresión matemática de las velocidades previas al choque, será necesario realizar una interpretación del mismo acorde con el contexto planteado en el enunciado.

### ENUNCIADO P.6

Consideremos una esfera, un cilindro y un aro. Si liberamos los tres simultáneamente desde lo alto de una cuesta, ¿cuál de ellos llegará antes a la parte inferior?

### RESOLUCIÓN P.6

**¿Qué acotaciones deberemos realizar para afrontar el problema?**

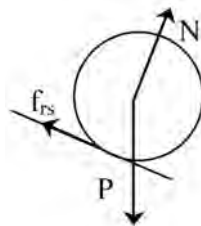
- Consideraremos que las superficies de contacto ofrecen en todo instante un rozamiento estático suficiente como para se de la rodadura sin deslizamiento.
- En cuanto al camino de descenso se podría considerar un plano inclinado de pendiente uniforme o, por el contrario, una cuesta de inclinación variable.
- En cuanto a las características de los tres cuerpos rodantes, trataremos de equipararlos considerando la misma masa y el mismo radio, para que así solamente influya en nuestro análisis la forma.



**¿En qué magnitud deberemos fijar nuestra atención para responder al interrogante del enunciado?**

- Para saber qué cuerpo llega antes a la base, deberemos conocer, bien la aceleración que la fuerza externa produce sobre el centro de masa, o bien la velocidad con la que los tres cuerpos se mueven tras descender una determinada altura. Según la estrategia de resolución que sigamos, será más sencillo valorar una u otra magnitud.

· Si la pendiente es constante, las fuerzas externas producirán una aceleración de traslación constante, por lo que la vía cinemático-dinámica será factible. Si la pendiente es variable, el movimiento resultante no será rectilíneo y uniformemente acelerado por lo que las valoraciones cinemáticas no será tan sencillas.



· Independientemente del tipo de camino que recorran los cuerpos en su descenso, la energía mecánica se conserva pues la normal no realiza trabajo por ser perpendicular al desplazamiento, la fuerza de rozamiento tampoco al ser estática por lo que no conlleva desplazamiento de su punto de aplicación y el peso es conservativo.

**¿De qué magnitudes dependerá la velocidad de traslación de cada uno de los cuerpos tras descender una determinada altura?**

$$V_{Mz} = V_{Mz}(h_{Mz}, g, I)$$

· Si aumentamos la altura inicial a la que se encuentra el centro de masa de cada cuerpo, su energía potencial inicial es mayor, por lo que también será mayor la energía cinética final y, por lo tanto, su velocidad de traslación. Así mismo, se puede razonar que al aumentar la altura, aumenta el espacio a través del cual actúa el peso causando una mayor aceleración.

· Los mismos razonamientos explicarían el previsible incremento de la velocidad con la aceleración de la gravedad.

· Si el cuerpo posee un mayor momento de inercia, opone más resistencia a la rotación, por lo que mayor parte de la energía inicial deberá ser utilizada para hacer girar al cuerpo y menos quedará para que se traslade, por lo que la velocidad de traslación deberá ser menor.

· A modo de hipótesis explicativa, podemos anticipar que los cuerpos de mayor momento de inercia desciendan más lentamente, es decir, como

$$I_{CM,esf} = \frac{2}{5}MR^2, I_{CM,cil} = \frac{1}{2}MR^2 \text{ e } I_{CM,aro} = MR^2,$$

primero llegará la esfera, luego el cilindro y, finalmente, el aro.

**¿Cómo podemos obtener la expresión matemática que nos ligue la velocidad con estas variables?**

Tal y como previamente hemos justificado, la energía mecánica del sistema permanece constante:

$$Mgh_{CM} = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \text{ y, si la rodadura es sin deslizamiento, } V_{CM}=\omega R.$$



Si sustituimos y despejamos, queda: 
$$V_{CM} = \sqrt{\frac{2Mgh_{CM}}{M + \frac{I}{R^2}}}$$

**¿Es coherente el resultado con las hipótesis emitidas?**

- En lo referente a la dependencia de la velocidad de traslación con la altura, la aceleración de la gravedad y el momento de inercia, las hipótesis se confirman.
- Sin embargo, en la expresión de la velocidad figuran la masa  $M$  y el radio  $R$ . Ahora bien, debemos tener en cuenta que el momento de inercia es proporcional a la masa y es proporcional al cuadrado del radio, por lo que si sustituimos los valores de  $I$  en la expresión de la velocidad, obtenemos:

$$V_{CM,esf} = \sqrt{\frac{10}{7}gh_{CM}} \quad , \quad V_{CM,cil} = \sqrt{\frac{4}{3}gh_{CM}} \quad , \quad V_{CM,aro} = \sqrt{gh_{CM}} \quad .$$

- La no dependencia de la velocidad de traslación con la masa, la justificamos en base a dos efectos contrapuestos que se producen si aumentamos la masa, el aumento de la energía potencial gravitatoria inicial (el aumento del peso), por un lado y, por otro, el aumento de la energía cinética final (el aumento de la inercia). Estos efectos finalmente se compensan.
- La no dependencia de la velocidad de traslación con el radio, la justificamos en base a otros dos efectos contrapuestos que se producen si aumentamos el radio, por un lado el aumento del momento de inercia por distribuir la masa más alejada del eje de giro y, por otro, la disminución de la velocidad angular para una misma velocidad de traslación de la rueda. Estos efectos afectan de manera igual y opuesta a la energía cinética de rotación y, finalmente, se compensan.
- En definitiva, un incremento del momento de inercia supone que el cuerpo alcance una menor velocidad de traslación, pues más energía inicial ha de utilizarse en hacer girar el cuerpo rodante. Esta influencia, sin embargo, no viene dada por el factor radio o el factor masa, sino por el coeficiente que multiplica a estas magnitudes y que tiene relación con la manera de distribuirse la masa entorno al eje de rotación.

**¿Son coherentes las unidades en el resultado obtenido?**

$$\left(\frac{m}{s^2}m\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m}{s}$$

**¿Será capaz el más rápido de los cuerpos rodantes analizados de vencer en el descenso a un bloque que desliza sin rozamiento?**

Si el bloque desliza sin rozamiento toda su energía inicial se convertirá en cinética tras descender una altura determinada. Al no tener que invertir nada de su potencial

*inicial en hacer rodar al cuerpo, la cinética final será mayor para el bloque que desliza y la velocidad alcanzada. Este argumento es válido si no existe rozamiento, lo cual es una idealización. Por tanto, en general, si consideramos el rozamiento, según cuál sea el valor de éste, la rueda aventaja al cuerpo que desliza.*

## **COMENTARIOS P.6**

*Éste es un problema cuyo enunciado apenas difiere del que habitualmente se presenta en los libros de texto. Las principales diferencias las encontramos en los procedimientos utilizados en la resolución. Primeramente, el que se considere un plano inclinado o una cuesta de pendiente variable tiene una incidencia determinante en las posteriores estrategias de resolución, pues alguna de las interacciones pasa de ser constante a ser variable con la posición. Así mismo, la variable a estudiar, aceleración o velocidad, está estrechamente vinculada a la estrategia a seguir, y, en consecuencia, al tipo de pendiente considerada. Serán los estudiantes los que deberán valorar estos aspectos cualitativos. Las hipótesis sobre la dependencia de la velocidad con las variables del proceso son bastante intuitivas. De entre ellas, destaca el efecto del momento de inercia de tal manera que, si reconocemos cuál es su influencia inercial sobre el cambio de movimiento, podremos anticipar qué cuerpo se moverá más rápido y tener así una clara referencia de lo que matemáticamente deberemos obtener posteriormente. Si las hipótesis de variables se han emitido en base al momento de inercia, en el análisis de resultados tendremos que buscar la relación de éste con la masa y el radio. Surgen para estas magnitudes efectos contrapuestos sobre la velocidad y su valoración detallada puede ser útil para profundizar en el significado del concepto de momento de inercia en la rotación. Para terminar, se puede relacionar el problema con el descenso de bloques deslizantes y valorar las diferencias.*

## **ENUNCIADO P.7**

*Una bola muy pequeña cargada positivamente se encuentra en reposo sobre la base de un plano inclinado sin rozamiento y construido de material aislante. Otra bola pequeña y también positiva se acerca muy despacio y desde muy lejos siguiendo la horizontal de la base del plano inclinado, hasta que ocupa la posición que inicialmente ocupaba la primera bola, y ahí se mantiene fija. Describe cómo evolucionará el sistema.*

## **RESOLUCIÓN P.7**

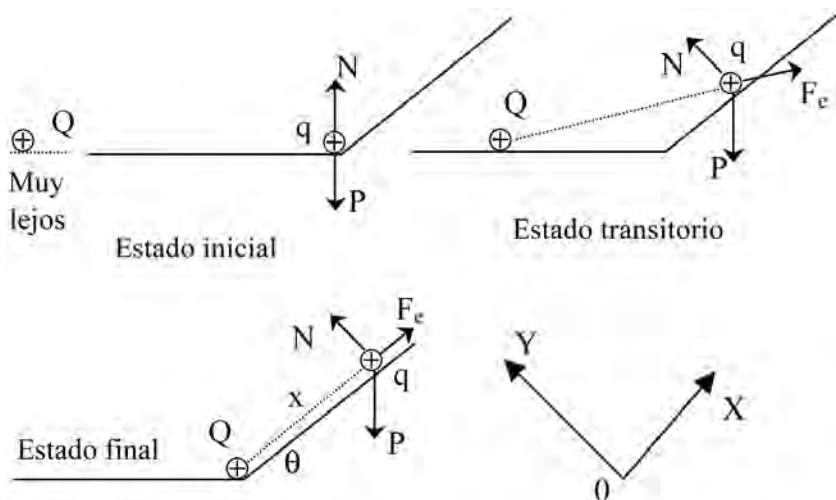
*¿A qué será debido que en el enunciado se hagan las siguientes precisiones: a) las bolas son muy pequeñas, b) el plano inclinado es de material aislante, c) la bola se acerca desde muy lejos y muy despacio?*

**A)** Si son muy pequeñas podremos considerarlas como cargas puntuales, despreciar posibles efectos de inducción y aplicar la ley de Coulomb.

**B)** Material aislante en el plano para que las partículas no se descarguen. Aún así, debemos despreciar posibles efectos de inducción en este material.

**C)** Si se acerca desde muy lejos, inicialmente no existe interacción eléctrica. Si se acerca muy despacio siempre nos encontramos en situación de equilibrio (cuasiestático, con las dos bolas prácticamente en reposo). Podemos despreciar efectos magnéticos.

**¿Cuáles son las interacciones sobre la carga que inicialmente ocupaba la posición inferior del plano y qué efecto producen en ella?**



· A medida que  $Q$  se aproxima lentamente a  $q$ , sobre esta última actúa su peso, la normal y la fuerza de repulsión eléctrica. En la dirección del eje  $O_x$  de nuestro sistema de referencia fijo, tenemos dos fuerzas contrapuestas,  $F_{ex}$  y  $P_x$ . Mientras que  $F_{ex} > P_x$ , la carga  $q$  ascenderá muy despacio por el plano inclinado. Cuando fijamos  $Q$  a la base del plano,  $P_x$  permanece constante, mientras que la interacción eléctrica disminuye con la distancia entre cargas. Llegará un momento en el que  $F_e = P_x$  alcanzándose el equilibrio estático.

· Puede resultar interesante calcular cuál será la separación entre cargas en la situación de equilibrio final.

**¿De qué magnitudes dependerá la distancia  $x$  de separación entre cargas en el equilibrio? ¿Cómo será esta dependencia?**

$$x = x(Q, q, m, g, \theta)$$

· Si aumenta  $Q$ , aumenta  $x$  pues se incrementa la interacción eléctrica.

· Si aumenta  $q$ , aumenta  $x$  pues se incrementa la interacción eléctrica.

- Si aumenta  $m$ , disminuye  $x$  pues se incrementa la interacción gravitatoria que se opone a la eléctrica.
- Si aumenta  $g$ , disminuye  $x$  pues se incrementa la interacción gravitatoria que se opone a la eléctrica.
- Si aumenta  $\theta$ , disminuye  $x$  pues se incrementa la componente del peso que se opone a la fuerza eléctrica.

**¿Cómo podemos obtener la expresión matemática que ligue estas variables?**

En el equilibrio se cumple **OX**:  $mg \cdot \sin\theta = KQq/x^2 \Rightarrow x = (KQq/mg \cdot \sin\theta)^{1/2}$

**¿Podríamos haber resuelto el problema de la misma manera si la carga  $Q$  hubiera estado uniformemente repartida, por ejemplo, en una varilla?**

No, pues no podríamos haber aplicado la Ley de Coulomb como si toda la carga de la varilla estuviera concentrada en un punto para expresar la interacción eléctrica entre cargas. Esto nos sugiere la necesidad de buscar otras vías para expresar la interacción eléctrica.

**¿Se ajusta el resultado a las hipótesis emitidas?**

Se contrasta el efecto de las distintas variables sobre la distancia  $x$ , según la expresión matemática obtenida, con las hipótesis previamente emitidas.

**¿Es homogénea la respuesta desde el punto de vista dimensional?**

$$\left( \frac{\frac{N \cdot m^2}{C^2} C \cdot C}{\frac{kg \cdot m}{s^2}} \right)^{1/2} \equiv m$$

Una vez vista la materia correspondiente se puede recuperar el problema para realizar un tratamiento energético de la situación:

**¿De dónde surge el trabajo realizado para que el sistema de cargas pase de la situación inicial a la final de equilibrio? ¿Cuánto vale este trabajo?**

- Como ambas cargas son positivas, el sistema, por sí mismo, no tiende a aproximarse como consecuencia de la fuerza eléctrica (es repulsiva). En consecuencia, desde el exterior algún agente deberá aplicar una fuerza sobre  $Q$  que realice un trabajo sobre el sistema y le aporte la energía necesaria para aproximar las cargas, así como para elevar a una de ellas por el plano inclinado.

· La parte del trabajo externo utilizada en hacer ascender a la partícula por el plano se acumulará en forma de energía potencial gravitatoria:

$$E_p = mgh = mgx \sin \theta, \text{ (si } E_p = 0 \text{ para } h = 0).$$

· La parte del trabajo externo utilizada en aproximar las partículas se acumulará en forma de energía potencial electrostática:

$$U = K \frac{Qq}{x}, \text{ (si } U = 0 \text{ para } x \rightarrow \infty)$$

$$\cdot \text{ El trabajo total será } W = mgx \sin \theta + K \frac{Qq}{x} = \frac{mgx^2 \sin \theta + KQq}{x}$$

y, teniendo en cuenta el valor de  $x$  previamente obtenido, queda:  $W = 2K \frac{Qq}{x} = 2U$

· El trabajo realizado desde el exterior es, por tanto, el doble de lo que habría que haber ejercido en el caso de que el desplazamiento de las cargas se hubiera dado sobre la horizontal (sólo interacción eléctrica).

**¿Debemos interpretar del planteamiento anterior que la única fuerza que realiza trabajo durante el proceso es la fuerza externa que actúa sobre Q?**

· En realidad, de una manera intuitiva a modo de balance de energía, hemos aplicado el teorema de la energía cinética que nos indica que el trabajo de todas las fuerzas que actúan, la externa sobre Q, el peso y la eléctrica en nuestro caso, ha de ser igual a la variación de energía cinética:  $W = \Delta E_k$

$$\int (F_{ext} + F_e + P) \cdot dS = \int F_{ext} \cdot dS + \int F_e \cdot dS + \int P \cdot dS = \Delta E_k$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ W & -\Delta U & -\Delta E & 0, \text{ eq. cuasiestático} \end{array}$$

Es decir,

$$W = \Delta U + \Delta E_p = K \frac{Qq}{x} + mgx \sin \theta, \text{ que coincide con el planteamiento anterior.}$$

· No debemos interpretar, por tanto, que la única fuerza que realiza trabajo durante el proceso es la fuerza externa aplicada sobre Q. Si bien es ésta la causante de que el proceso se desencadene, una vez que las cargas comienzan a desplazarse también realizan trabajo la fuerza eléctrica de repulsión y el peso. Como ambas se oponen al desplazamiento real, la partícula gana energía potencial elástica y gravitatoria a costa del trabajo de la fuerza externa que se ha aplicado para vencerlas.

## COMENTARIOS P.7

En este primer problema de electromagnetismo, planteamos una situación bastante abierta en cuanto a que se pide cuál será la evolución del sistema. Sin embargo, el propio enunciado aporta cierta información sobre las acotaciones a realizar en el

planteamiento. Se deja para los estudiantes la justificación razonada del porqué de dichas consideraciones. Así mismo, desde una perspectiva cualitativa, es necesario razonar cómo se alcanzará el equilibrio electrostático final, para lo cual se deberán reconocer todas las interacciones entre las partículas que componen el sistema. Por otro lado, no se menciona qué magnitud se busca y son los estudiantes los que deberán intuir que la distancia entre cargas en el equilibrio puede ser el objetivo. Llegados a esta conclusión, la dependencia de esta variable con las otras que en ella influyen, se basará, por un lado, en el análisis de las magnitudes que afectan a la interacción eléctrica (la intensidad de la fuente y la distancia a ella) y, por otro, en efectos mecánicos de otras variables sobre el equilibrio. Esta interacción eléctrica entre cargas puntuales se puede expresar fácilmente por medio de la Ley de Coulomb. Para muchas distribuciones continuas de carga, sin embargo, no podríamos actuar igual. Conviene que los estudiantes reflexionen sobre este aspecto para evitar, en la medida de lo posible, fijaciones estratégicas a esta ley. Un aspecto metodológico de gran interés que se puede trabajar en el contexto de esta situación problemática, es el poder reconsiderar la misma bajo un planteamiento energético. Se podrá poner en evidencia, de esta manera, la coherencia de ambos enfoques en la resolución de un buen número de situaciones, sobre todo si hacemos ver a los estudiantes que las fuerzas que dan lugar a que el sistema evolucione como lo hace, son las que, asociadas a un tipo de energía u otro, intervienen igualmente en la interpretación energética del fenómeno.

## ENUNCIADO P.8

Se quiere diseñar un dispositivo capaz de acelerar uniformemente partículas cargadas. Haciendo uso de tus conocimientos de electrostática y electrocinética, razona los fundamentos básicos de tu propuesta de diseño.

## RESOLUCIÓN P.8

**¿Qué distribución de carga te parece la más adecuada para producir una aceleración constante sobre la partícula?**

· Para conseguir una aceleración constante en la partícula cargada, debemos ejercer sobre ella una fuerza constante, por lo que el campo producido por la distribución de carga que seleccionemos como fuente impulsora del dispositivo, debe ser constante.

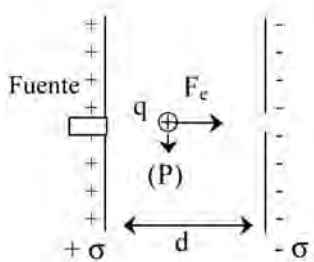
· La naturaleza de la interacción eléctrica hace que su intensidad disminuya con la distancia. Únicamente hemos visto un caso en el que, asumiendo la aproximación de distribución infinita (bien porque consideramos posiciones muy próximas, o bien porque sus dimensiones son realmente grandes) el campo eléctrico es constante. Se trata del plano infinito con distribución uniforme de carga:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el principio de superposición, si consideramos dos planos infinitos con cargas iguales y opuestas en la región comprendida entre ambos el campo se duplica:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \text{ Ésta parece la opción más interesante.}$$

**¿Cuáles son las interacciones sobre la carga mientras atraviesa el acelerado y qué efecto producen en ella?**



· Una partícula de carga  $q$  (por ejemplo positiva) y de masa  $m$  se verá afectada por la interacción eléctrica y la gravitatoria. Ocurre, a nivel de partículas subatómicas como es el caso, que el valor de la fuerza electrostática es, generalmente, mucho mayor que el peso, de forma que podamos despreciar el efecto de esta última. Con esta aproximación el problema se simplifica puesto que, si se tiene en cuenta sólo la fuerza electrostática,

la partícula describirá un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado. (También se podría añadir otro sistema de placas paralelas cuya fuerza electrostática fuera igual y opuesta al peso y evitar así desviaciones).

· Por otro lado, si la carga es positiva, la fuente de la cual se liberen estas partículas deberá colocarse junto a la placa positiva y justamente enfrente, en el lado de la placa negativa, habría que hacer una pequeña perforación por la que puedan salir las cargas con una determinada velocidad.

**¿Qué variables deberíamos poder controlar en el dispositivo para regular la velocidad alcanzada por las partículas que salen de él?**

$$v=v(\sigma, q, d, m)$$

· Cuanto mayor sea  $\sigma$ , mayor será la fuerza eléctrica y mayor la velocidad. Así mismo, mayor será la disminución de energía potencial electrostática al pasar de una placa a la otra, mayor el incremento de energía cinética y mayor la velocidad.

· Cuanto mayor sea  $q$ , mayor será la fuerza eléctrica y mayor la velocidad. Así mismo, mayor será la disminución de energía potencial electrostática al pasar de una placa a la otra, mayor el incremento de energía cinética y mayor la velocidad. Sin embargo ésta no es una variable propia del dispositivo, sino que viene dada con la partícula a acelerar.

· Cuanto mayor sea  $d$ , mayor será el tiempo durante el cual actúa la fuerza eléctrica y mayor la velocidad. Así mismo, mayor será la disminución de energía potencial electrostática al pasar de una placa a la otra, mayor el incremento de energía cinética y mayor la velocidad. Sin embargo, debemos recordar que, a no ser que utilicemos pla-

cas muy grandes, lo que podría suponer alguna limitación de espacio,  $E$  solamente es constante para posiciones muy próximas a las placas por lo que  $d$  no puede ser incrementada indiscriminadamente si queremos mantener una aceleración constante.

· Cuanto mayor sea la masa  $m$ , más resistencia opondrá a ser acelerado por la fuerza eléctrica y por tanto alcanzará menor velocidad. Así mismo, con la energía cinética ganada de la disminución de energía potencial electrostática, a mayor masa menor velocidad. Sin embargo ésta tampoco es una variable propia del dispositivo, sino que viene dada con la partícula a acelerar.

· Algunos estudiantes pueden proponer como variables independientes la carga neta de las placas,  $Q$ , o el área de las mismas,  $S$ , pero al tratarse de un plano de dimensiones infinitas (en nuestra aproximación), es la relación  $Q/S$ , es decir, la densidad superficial de carga, la magnitud que parece más apropiada para el control.

· Habrá que tener en cuenta, también, que la magnitud de las variables  $\sigma$  y  $d$  características del dispositivo deberá alcanzar un compromiso entre el campo interno y la ruptura del dieléctrico que rodee a las placas en el caso de la densidad de carga y entre un máximo recorrido y la aproximación de campo constante en el caso de la distancia entre placas.

### ¿Cómo podríamos obtener la expresión de la velocidad en función de estas magnitudes?

· Encontramos dos vías alternativas para la resolución:

**a)** Como la única fuerza que realiza trabajo, la fuerza eléctrica, es conservativa la energía se mantendrá constante durante el proceso:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_+ = \frac{1}{2}mv^2 + qV_- \quad \text{Luego, } v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{2q\sigma d}{\epsilon_0 m}}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$V_+ - V_- = V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

**b)** Al ser un M.R.U.A (lo hemos razonado con anterioridad), si aplicamos la segunda ley de Newton para obtener la aceleración, las ecuaciones cinemáticas nos permitirán obtener la velocidad buscada:

$$F = qE = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = ma$$

Con  $a = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \text{cte}$  y  $v = \sqrt{2ad}$  se obtiene el mismo resultado para la velocidad.

### ¿Se cumplen nuestras hipótesis?

· Observamos en el resultado obtenido que, además de las variables consideradas en las hipótesis, figura en la expresión de la velocidad el término  $\epsilon_0$ . Si en lugar del va-



cío tuviéramos en el espacio entre placas otro medio, la velocidad alcanzada sería diferente. Si el material fuera conductor, las placas se descargarían. Si fuera dieléctrico, el campo en su interior, por efecto de la polarización inducida en sus moléculas, sería menor y, por ello, la aceleración producida también disminuiría.

· Así pues, la situación ideal parece darse cuando entre placas mantengamos el vacío. Por otro lado, esta situación aporta las ventajas de evitar la ruptura del dieléctrico entre placas, así como posibles choques entre la partícula que se acelera y las moléculas del material dieléctrico.

**¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?**

$$\left( \frac{\frac{C}{m^2} m}{\frac{C^2}{Nm^2} kg} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m}{s}$$

**¿Alcanzaríamos con partículas reales velocidades elevadas en un acelerador de estas características?**

Para saber si efectivamente un dispositivo de estas características es realmente un acelerador eficaz, podemos considerar un caso concreto y valorar la magnitud de la velocidad alcanzada. Por ejemplo, en el cañón de electrones de una TV el campo eléctrico es de  $2,5 \cdot 10^6 \text{ N/C}$ , en una longitud de 1cm. Buscando en la bibliografía los valores de las constantes carga y masa del electrón, se obtiene una velocidad de  $9,4 \cdot 10^7 \text{ m/s}$  (del orden de la tercera parte de la velocidad de la luz).

## COMENTARIOS P.8

Estamos ante un enunciado completamente abierto, en el que con el único dato de que la aceleración ha de ser uniforme, los estudiantes deben proponer un esquema de diseño de acelerador de partículas. Partiendo de este dato, los estudiantes deberán reconocer la aproximación de planos de carga uniforme infinitos y paralelos como la base física del dispositivo. Además, deberán valorar la duplicidad en el signo de la carga, la posible ubicación de la fuente de partículas y el efecto de la masa en el movimiento de la partícula. El análisis de variables presenta varios puntos de interés. Así, tendrán que considerar los efectos de ciertas variables sobre el movimiento de la carga a acelerar de una manera más genérica pero, en este caso, al tratarse del diseño de un dispositivo concreto, no se deben olvidar las limitaciones que ello supone ni, tampoco, se puede omitir alguna reflexión en cuanto a cuáles son las variables que en el acelerador verdaderamente podríamos controlar. El carácter conservativo de la fuerza eléctrica hace que un planteamiento energético nos relacione de una manera sencilla la velocidad con las variables del dispositivo. Así mismo, al poder apro-

ximar el campo entre placas a un valor constante para separaciones muy pequeñas, la estrategia cinemático-dinámica resulta fácil de aplicar. Sin embargo, es importante que los estudiantes reflexionen acerca de la aplicabilidad de esta última vía para el caso más general en el que la interacción eléctrica varíe con la posición. En el análisis de resultados, si no ha surgido con anterioridad, es conveniente valorar la influencia del medio entre placas en el diseño de acelerador. Por último, teniendo en cuenta que hemos analizado los fundamentos físicos de un dispositivo experimental, es importante hacerse una idea de las velocidades alcanzables con él, y encontrarle alguna aplicación directa en sistemas tecnológicos, reforzando así el interés práctico de la valoración teórica realizada.

## ENUNCIADO P.9

Un medidor de combustible se vale de un condensador para determinar el nivel de combustible de un depósito. Disponemos de un tanque en forma de paralelepípedo. Las caras de mayor superficie se recubren de sendas láminas conductoras y se unen a los bornes de una batería. A medida que el nivel de combustible del depósito desciende, la corriente descargada al circuito es utilizada por un sensor para dar un registro de la altura de combustible en función de la carga que ha circulado por él. Razona el fundamento físico del dispositivo.

## RESOLUCIÓN P.9

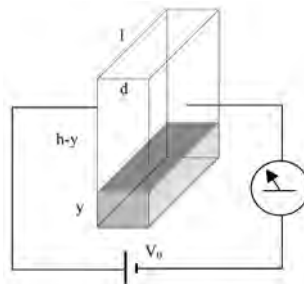
**¿Cuáles son los procesos físicos más destacables que tienen lugar en la situación descrita en el enunciado?**

Siempre y cuando el fondo  $d$  del depósito sea considerablemente menor que el ancho  $l$  y la altura  $h$ , podemos equiparar el dispositivo a un condensador de placas paralelas infinitas.

Si, cuando el tanque está completamente lleno

( $y=h$ ), el condensador adquiere una cierta carga consecuencia de su conexión con la batería, a medida que se va consumiendo el carburante (líquido dieléctrico) la capacidad del condensador disminuye por efecto de la reducción de la porción de material polarizado. La menor polarización hace que, en principio, aumente el campo eléctrico entre placas y, en consecuencia, también la diferencia de potencial.

Es razonable suponer que una cierta carga, bajo esta nueva diferencia de potencial, se descargue desde las placas al circuito hasta que, precisamente, la diferencia de potencial entre ellas coincida con la que existe entre los polos de la batería. Mientras el proceso de vaciado continúe, por el sensor circulará carga y ésta dará una medida del nivel (altura  $y$ ) de carburante en el depósito. Cuando el recipiente esté completamente vacío finalizará el tránsito de carga y el sensor no detectará más variación.



### ***¿De qué variables dependerá la carga almacenada por el condensador?***

- Para la carga almacenada por el condensador (depósito) parcialmente lleno de combustible (dieléctrico), tendremos que  $Q = Q(l, h, d, V_0, y, \epsilon_r)$
- Un incremento de las dimensiones  $l$  y  $h$  de la placa, dará lugar a una mayor capacidad para ubicar la carga bajo un determinado potencial.
- Así mismo, como la carga se desplaza hacia las placas por efecto de la diferencia de potencial originada por la pila, cuanto mayor sea  $V_0$ , mayor será la carga almacenada.
- Por otro lado, cuanto mayor sea la distancia  $d$  de separación entre placas, el potencial sobre éstas se verá menos reducido por la superposición del potencial de la placa de signo opuesto y, por tanto, menos se cargará para un determinado potencial de la batería.
- En lo referente al dieléctrico, en base a los razonamientos previamente emitidos acerca de la polarización, podremos esperar que cuanto más carácter dieléctrico tenga el líquido, mayor permitividad relativa, más carga se almacenará en las placas y, cuanto más altura de líquido combustible tengamos (mayor  $y$ ) ocurrirá lo mismo.
- Por tanto, la carga almacenada será máxima cuando el depósito esté completamente lleno ( $Q_h$ ) y mínima cuando se encuentre completamente vacío ( $Q_0$ ).
- Sin embargo, el sensor utiliza la carga que pierden las placas a medida que el depósito se va vaciando, es decir,  $Q_{\text{sensor}} = Q_h - Q$

### ***¿De qué variables dependerá la carga que pase por el sensor?***

- Lógicamente, de acuerdo con lo anterior, podemos esperar que  $Q_{\text{sensor}} = Q_{\text{sensor}}(l, h, d, V_0, y, \epsilon_r)$  pero, en este caso, en lo que al dieléctrico se refiere, cuanto mayor sea su altura ' $y$ ', menor será la descarga de las placas, es decir menor  $Q_{\text{sensor}}$ . Para  $y=h$ , se tendrá que la carga que ha pasado por el sensor será  $Q_{\text{sensor}}=0$  (no se ha descargado nada) y, para  $y=0$ ,  $Q_{\text{sensor}}$  será máxima (se ha descargado hasta quedar con la carga que hubiera adquirido en vacío bajo el mismo potencial). Por otro lado, la permitividad relativa tiene una doble influencia en esta fase del proceso: cuanto mayor sea  $\epsilon_r$ , mayor será la carga  $Q_h$  almacenada con el depósito lleno pero, a su vez, mayor será la carga  $Q$  que queda en el condensador cuando el tanque está parcialmente lleno. En consecuencia, no parece que la influencia de esta variable sea previsible con anterioridad a la resolución.
- En cualquier caso, sí podemos tratar de establecer una relación matemática entre el nivel de combustible en el depósito y la carga que circula por el sensor.

**¿Cómo podríamos obtener la expresión que nos ligue la carga que ha circulado por el sensor con la altura de combustible en el tanque?**

· Inicialmente, con el depósito lleno, todo el condensador está ocupado por el dieléctrico entre las placas, luego la carga almacenada será:

$$Q_h = C_h V_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{lh}{d} V_0$$

· A medida que consumimos combustible (dieléctrico), la capacidad disminuye. El nuevo condensador equivale a la asociación en paralelo de dos condensadores del mismo espesor  $d$ , de superficies  $ly$ ,  $y$ ,  $l(h-y)$  y de permitividad  $\epsilon$  y  $\epsilon_0$  respectivamente.

$$C = C_y + C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{ly}{d} + \epsilon_0 \frac{l(h-y)}{d} = \epsilon_0 \frac{l}{d} [\epsilon_r y + h - y] = \epsilon_0 \frac{l}{d} [(\epsilon_r - 1)y + h]$$

· Como la pila mantiene el mismo potencial en las dos partes que componen el condensador (con y sin dieléctrico), la carga total será:

$$Q = CV_0 = \epsilon_0 \frac{l}{d} V_0 [(\epsilon_r - 1)y + h] \quad Y, \text{ la carga buscada:}$$

$$Q_{\text{sensor}} = Q_h - Q = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{l(h-y)}{d} V_0$$

**¿Se corresponde el resultado con las hipótesis previamente emitidas?**

· Se contrasta la dependencia de variables de la expresión matemática con las hipótesis emitidas.

· Podemos comprobar que, para el depósito lleno ( $y=h$ ) la descarga de las placas ha sido  $Q_{\text{sensor}}=0$ . Para el depósito vacío ( $y=0$ )

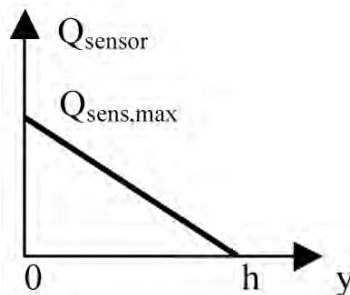
$$Q_{\text{sens,max}} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{lh}{d} V_0$$

toma su máximo valor.

· Por otro lado, tal y como se representa en la gráfica, la relación  $Q_{\text{sensor}}/y$  es lineal y, así, por ejemplo, para medio depósito lleno,  $y=h/2$ ,

$$Q_{\text{sensor}} = \frac{Q_{\text{sens,max}}}{2} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{lh}{2d} V_0$$

· El dispositivo es tanto más sensible cuanto mayor sea la permitividad relativa del combustible. En el caso extremo de que el 'combustible' fuera aire ( $\epsilon_r-1=0$ ), y, en consecuencia, no se detectaría cambio alguno. Queda así resuelta la duda inicial que en el análisis previo habíamos encontrado respecto a la doble influencia que esta magnitud tiene sobre la carga que pasa por el sensor.



**¿Si queremos diseñar un sistema de alerta luminosa que nos advierta cuando la reserva de gasolina en el depósito es el 10% del volumen total, cuánta carga habrá tenido que circular por el sensor para que se ilumine el chivato?**

· Para un depósito en forma de paralelepípedo, el 10% del volumen supone el 10% de la altura  $h$  inicial ( $y=h/10$ ). Como la  $Q_{\text{sensor}}$  es directamente proporcional a la altura de depósito que se ha vaciado ( $h-y$ ), se tiene que

$$Q_{\text{sensor, reserva}} = \frac{9Q_{\text{sens,max}}}{10} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{9lh}{10d} V_0$$

· La luz de reserva deberá diseñarse de tal forma que se active cuando por el sensor haya circulado el 90% de la carga máxima.

**¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?**

$$\frac{C^2}{N.m^2} \frac{m.m}{m} \frac{N.m}{C} \equiv C \text{ Siendo la permitividad relativa adimensional.}$$

## COMENTARIOS P.9

Presentamos en este enunciado una aplicación tecnológica básica de un condensador de gran tamaño que, permitirá que los estudiantes razonen, desde una perspectiva puramente cualitativa, el proceso de carga del condensador, primero repleto de dieléctrico y, después, cuando el recipiente se va paulatinamente vaciando de líquido dieléctrico (combustible). Los estudiantes también deberán percatarse de que la carga que sale de las placas del condensador es la que detecta el sensor del indicador de nivel y, por ello, esta carga es la magnitud que tendrán que tratar de obtener. La justificación de la relación entre las distintas variables en este problema, como en muchos otros, es conveniente que se plantee en base a las interacciones microscópicas que determinan la dependencia y no haciendo uso de fórmulas conocidas que ligan las variables. Por ejemplo, es más fructífero en significado físico razonar lo que ocurre con la diferencia de potencial entre placas, cuando éstas se acercan o se alejan, basándonos en la influencia mutua entre las placas positiva y negativa, que argumentar que como el campo eléctrico es constante, si disminuimos  $d$  el potencial también disminuye, pues  $V=E.d$ . Considerar dos condensadores, el correspondiente a la parte con dieléctrico y el de la parte vacía, asociados en paralelo puede ser un buen camino para alcanzar el valor de la carga que llega a las placas. Una manera de analizar la coherencia del resultado es considerar algún valor límite de las variables como, por ejemplo, permitividad relativa igual a la unidad, altura de combustible nula o altura de combustible máxima, cuyo resultado podemos prever de manera cualitativa sin realizar cálculo alguno.

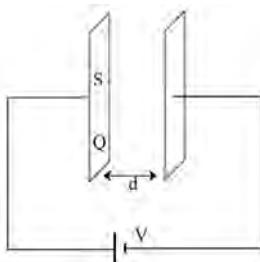
## ENUNCIADO P.10

- Disponemos de dos placas conductoras planas, paralelas y aisladas. Una de ellas es móvil sobre un carril y se puede fijar frente a la otra en dos posiciones diferentes. Conectando a una fuente de alimentación cargamos el sistema cuando las placas se encuentran en la posición más separada.
- Razona qué podemos hacer si queremos aumentar la energía almacenada.

## RESOLUCIÓN P.10

**¿Cuál es la situación de partida descrita en el enunciado?**

- Nos encontramos ante un condensador de placas paralelas muy grandes (si la separación inicial no es muy grande frente al área de las placas) cargado bajo una d.d.p suministrada por la fuente. El condensador adquirirá una determinada carga, en función de su capacidad y del potencial de la pila, por lo que almacenará una energía potencial electrostática que, de acuerdo con el enunciado, pretendemos incrementar.



Con objeto de encaminar la resolución, es razonable preguntarse, entonces:

**¿De qué factores dependerá la energía almacenada en el sistema?**

- Es habitual (nosotros así lo hacemos) presentar la energía almacenada en un condensador en función de  $C$ ,  $V$  y  $Q$ . Seguramente nuestros estudiantes enfoquen la resolución en base a estas fórmulas, siguiendo caminos similares los que se plantean a continuación:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 ; C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

y si mantenemos la pila conectada  $V=\text{cte}$ , luego si reducimos  $d$ , aumenta  $C$  y aumenta  $U$ .

- Pero si desconectamos la batería y después reducimos  $d$ ,  $Q=\text{cte}$  y  $C$  aumenta y como

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ se tiene que la energía disminuye.}$$

· Sin embargo, este punto de vista podría dar pie a pensar que  $Q$ ,  $C$  y  $V$  son variables independientes, cuando no lo son pues además de estar relacionadas entre sí,  $Q=CV$ ,  $C$  y  $V$  dependen de otros factores relacionados con la geometría del condensador y con el medio.

- Por ello, podría ser interesante, aún asumiendo como válidos los argumentos en base a  $C$ ,  $Q$  y  $V$ , reorientar a los estudiantes para que analicen la situación en función de las variables realmente independientes.

· Una manera de ver la dependencia de variables de la energía del sistema, es considerar que la energía potencial para fuerzas conservativas depende de la cantidad de propiedad representativa de la interacción (carga o masa) y de la posición relativa de las distintas partes del sistema. En el condensador tendríamos que valorar la cantidad de carga  $Q$  almacenada en las placas, la superficie  $S$  de éstas que permite un mayor o menor distanciamiento entre cargas y la distancia  $d$  entre placas (consideramos el vacío).  $U=U(Q,S,d)$

· Si almacenamos más carga en el condensador, éste guardará más energía potencial electrostática ya que más intensa es la interacción entre las cargas.

· Si aumentamos la superficie de las placas, las cargas que se ubican en ellas se alejarán las unas de las otras por la acción de la fuerza eléctrica repulsiva gastando energía electrostática, por lo que la energía almacenada será menor. Es decir, la nueva situación con cargas del mismo signo más separadas entre sí en cada placa se corresponde con un estado de menor energía.

· Si incrementamos la distancia entre placas, las cargas positivas y negativas alojadas en cada placa se alejan pero, para lograrlo, desde el exterior, hemos tenido que ejercer una fuerza que compense la atracción electrostática entre placas y, por tanto, la energía se habrá visto incrementada. Esto es, la nueva configuración en la que las cargas de distinto signo de las placas se encuentran más alejadas las unas de las otras se corresponde a una situación de mayor energía.

· El llamado principio de mínima energía nos indica que los sistemas, por sí mismos, siempre tienden a alcanzar las configuraciones de mínima energía. Para que incrementen su energía algún agente exterior debe realizar un trabajo que fuerce el paso a un estado de mayor energía y, por tanto, más inestable.

· Estos razonamientos son válidos si mantenemos invariables todas las magnitudes menos una.

**¿Cómo podríamos obtener la expresión que nos ligue la energía con estas magnitudes?**

Podemos partir de la expresión conocida  $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$  y sustituir  $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ , esto es,

$$U = \frac{1}{2} \frac{d}{\epsilon_0 S} Q^2$$

**¿Se corresponde el resultado con las hipótesis previamente emitidas?**

Se aprecia que, para el vacío, la energía electrostática almacenada en el condensador depende de los factores geométricos  $d$  y  $S$  y de la carga acumulada  $Q$  de la manera prevista en las hipótesis.

### **¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?**

$$\frac{C^2 m}{C^2 m^2} \equiv Nm \equiv \text{Joule}$$

### **¿Cómo podemos actuar sobre el condensador para aumentar su energía?**

Según nuestro análisis previo, si desplazamos la placa móvil a la posición más próxima a la placa fija, disminuimos  $d$  y la energía almacenada será menor, y podría parecer que no es posible aumentar la energía tal y como pedía el enunciado. Pero, estos razonamientos son válidos si mientras disminuimos  $d$ , mantenemos constantes  $S$  y  $Q$ , es decir, si acercamos las placas con el condensador desconectado de la batería. Si mantenemos la conexión a la pila mientras realizamos el acercamiento, la reducción del potencial entre placas por la disminución de  $d$  ( $V=Ed$  y  $E=\text{cte}$ , o mayor influencia mutua), se verá compensado por un incremento en la carga del condensador hasta alcanzar de nuevo la situación de equilibrio dada por la igualdad de potenciales. En consecuencia, aunque  $d$  disminuya,  $Q$  aumenta, y como la dependencia de la energía con la carga es de orden superior a la dependencia con la distancia entre placas, podemos esperar que la energía se incremente.

A modo de nuevas perspectivas, podríamos pedir a los estudiantes que valoraran cualitativamente lo siguiente:

### **¿Qué ocurriría si desde la posición más cercana y manteniendo la fuente conectada alejamos de nuevo las placas?**

· Para volver a distanciar las placas deberemos ejercer, desde el exterior, una fuerza que compense la atracción electrostática y esta fuerza externa aporta energía al sistema. Pero, si al acercar las placas manteniendo la fuente conectada, el condensador ganaba carga y energía, al alejarlas de nuevo, perderá carga y energía. Debemos concluir, entonces, que la batería gana una doble partida de energía, la aportada por el agente externo y la perdida por el condensador (despreciando las pérdidas por efecto Joule).

## **COMENTARIOS P.10**

Se trata de una situación problemática contextualizada en un condensador de placas paralelas e infinitas, similar a los que habitualmente se plantean en las clases de problemas y con un claro propósito de remarcar la trascendencia del análisis de variables. Concretamente, queremos reorientar a los estudiantes en la manera que interpretan la influencia de ciertas magnitudes en la energía almacenada en el condensador. Pretendemos que dejen de lado la interpretación puramente formulística (sin negar su validez), para pasar a dar una valoración a nivel microscópico del fenó-



meno. Esto les debería hacer reconocer cuáles son las variables ralmente independientes y, al mismo tiempo, les permite profundizar en el significado de aspectos tan importantes como la energía potencial de un sistema de partículas. La resolución, en sí misma, viene fuertemente determinada por las hipótesis emitidas. El problema, abre una interesante nueva perspectiva en cuanto a la valoración de lo que ocurre si, nuevamente, acercamos las placas, que da como resultado una doble ganancia de energía de la fuente a costa del trabajo externo y de la pérdida energética del condensador que, en parte, se descarga.

## ENUNCIADO P.11

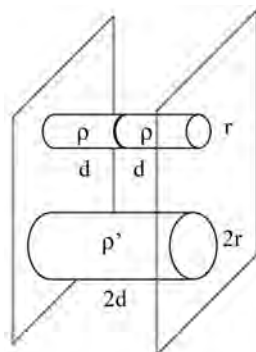
Se quieren conectar entre sí dos placas de conductividad muy elevada y separadas una distancia  $2d$ . Para ello se dispone de tres cilindros, dos de ellos tienen radio  $r$ , longitud  $d$  y resistividad  $\rho$  y el tercero es de radio  $2r$ , longitud  $2d$  y resistividad  $\rho'$ , siendo  $\rho' < \rho$ .

¿Cómo deberíamos disponer las conexiones entre las placas para obtener una resistencia máxima? Y, ¿para que la resistencia sea mínima?

## RESOLUCIÓN P.11

¿Qué conexiones nos posibilitan los cilindros disponibles?

Siendo  $2d$  la distancia entre placas, para conectarlas podemos usar el cilindro grueso  $2d$ , los cilindros delgados de longitud  $d$  unidos en serie, o los dos cilindros delgados en serie junto con el cilindro  $2d$  en paralelo.



¿De qué factores depende la resistencia de cada conductor cilíndrico?

$$R = R(\rho, d, S) = R(\rho, d, r)$$

· A igualdad de dimensiones, cuánto mayor sea la resistividad  $\rho$  del material mayor resistencia opone éste al paso a su través de las cargas libres que forman la corriente eléctrica.

· Para un mismo material conductor, un aumento del área transversal (del radio  $r$  del cilindro), supone un incremento del espacio por el que las cargas pueden circular y, por tanto, una menor resistencia.

· Si mantenemos la sección transversal y el material conductor, un aumento de la longitud del cilindro implica más camino a recorrer por las cargas y más oposición al paso de las mismas, por lo que la resistencia aumenta.

· Estas relaciones se reflejan en la expresión conocida para la resistencia:  $R = \rho \frac{d}{S}$

### **¿Qué previsiones podemos realizar respecto a las distintas resistencias que podríamos obtener según sean las conexiones entre placas?**

- En el caso de nuestros cilindros, si unimos en serie los cilindros delgados y colocamos en paralelo con ellos el cilindro grueso, estamos utilizando la máxima sección transversal posible, y, en consecuencia, deberíamos obtener la mínima resistencia.
- La máxima resistencia la encontraremos cuando hagamos uso de sólo el cilindro grueso, o utilicemos sólo la conexión en serie de los dos delgados. En ambos casos la longitud total es la misma (la separación entre placas). Sin embargo, el área de la sección transversal es menor en el cilindro delgado y como además la resistividad del cilindro delgado es mayor, cuando conectemos las placas con los dos cilindros de menor radio en serie la resistencia deberá ser la mayor de las posibles.

### **¿Podemos confirmar cuantitativamente nuestras hipótesis?**

Si únicamente conectamos con el cilindro grueso:  $R_3 = \rho' \frac{2d}{\pi(2r)^2} = \frac{1}{2} \rho' \frac{d}{\pi r^2}$

La conexión en serie de los cilindros delgados:

$$R_{12} = R_1 + R_2 = \rho \frac{d}{\pi r^2} + \rho \frac{d}{\pi r^2} = 2\rho \frac{d}{\pi r^2}$$

dividiendo miembro a miembro:  $\frac{R_{12}}{R_3} = \frac{2\rho}{\frac{1}{2}\rho'} \Rightarrow R_{12} = 4 \frac{\rho}{\rho'} R_3$

y como  $\rho' < \rho$  se tiene que  $R_{12} > R_3$ , verificándose nuestra primera suposición.

- Si consideramos ahora la conexión a través de los tres cilindros, los delgados en serie y el grueso en paralelo con ellos:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2\rho \frac{d}{\pi r^2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}\rho' \frac{d}{\pi r^2}} = \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{2}{\rho'}\right) \frac{\pi r^2}{d} \Rightarrow R = \frac{2\rho}{\rho' + 4\rho} \cdot 2 \frac{1}{2} \rho' \frac{d}{\pi r^2} = \frac{4\rho}{\rho' + 4\rho} R_3$$

y se comprueba que, para valores finitos de las resistividades, siempre se cumple que la resistencia equivalente de la asociación de los tres cilindros, tal y como la hemos descrito, es menor que  $R_3$ , por lo que es la más pequeña de todas las posibles.

### **¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?**

- Todas las expresiones obtenidas para las resistencias son coherentes respecto a sus unidades:  $\Omega = \Omega$ .

### **¿Podemos destacar algún valor límite de las resistividades que nos refleje alguna situación física de interés?**

Para la triple asociación,  $R = \frac{4\rho}{\rho' + 4\rho} R_3$  con  $R_3 = \frac{1}{2} \rho' \frac{d}{\pi r^2}$  y  $R_{12} = 2\rho \frac{d}{\pi r^2}$ .

· Si uno de los cilindros es muy conductor, por ejemplo el cilindro grueso, su resistividad es muy pequeña,  $\rho' \rightarrow 0$  y, entonces,  $R \rightarrow R_3$  y  $R_3 \rightarrow 0$ , por lo que prácticamente toda la carga circularía por el cilindro grueso.

· Si uno de los cilindros es muy resistivo, por ejemplo el cilindro grueso,

$$\rho' \rightarrow \infty \text{ y entonces, } R = \frac{4\rho}{\rho' + 4\rho} R_3 = \frac{4\rho}{\rho'} R_3 = \frac{4\rho}{\rho'} \frac{1}{2} \rho' \frac{d}{\pi r^2} = 2\rho \frac{d}{\pi r^2} = R_{12},$$

es decir  $R \rightarrow R_{12}$ .

· Si la resistividad del cilindro grueso es muy elevada, la resistencia equivalente de la asociación en paralelo con la serie de los cilindros delgados, coincide con la resistencia de estos últimos, pues éste es en realidad el único camino conductor.

## COMENTARIOS P.11

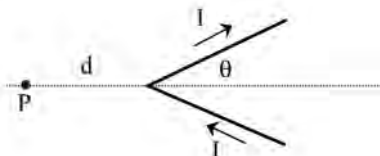
Buscamos de nuevo en este problema, remarcar cómo la emisión de hipótesis nos orienta en la resolución de una situación problemática, llegando incluso a predecir el resultado final. Así mismo, incidimos en la importancia de tratar las variables que intervienen en las expresiones matemáticas que las ligan, como representativas de los procesos físicos que describen y no como simples miembros de dichas ecuaciones, aunque estas dos maneras de describir los hechos, la meramente matemática y la cualitativa que considera los procesos de una forma más descriptiva, deban llegar a las mismas conclusiones. Tras un análisis cualitativo y en profundidad de las distintas opciones, la resolución en sí misma no supone dificultad procedimental alguna. La coherencia del resultado con nuestro modelo interpretativo se puede poner en evidencia analizando casos límites de las resistividades. En estos casos, el resultado matemático de la expresión final obtenida debería coincidir con nuestra interpretación que, en base al cuerpo teórico, podemos hacer de los hechos.

## ENUNCIADO P.12

A comienzos del siglo diecinueve el campo magnético creado por alambres de corriente fue foco de atención en la investigación en Física, tanto teórica como experimental. Un interesante caso particular es el de un hilo muy largo que transporta una determinada corriente y que ha sido doblado en forma de "V", con un ángulo de apertura  $2\theta$ . Según las mediciones realizadas por Ampère, la magnitud del campo magnético en un punto P exterior a la "V", sobre su eje de simetría y a una determinada distancia de su vértice, es proporcional a  $\text{tg}(\theta/2)$ . Sin embargo, Biot y Savart sugirieron que el campo en P debería ser proporcional a  $\theta$ . ¿Quién tenía razón?

## RESOLUCIÓN P.12

¿Cómo podemos esquematisar la situación descrita en el enunciado?



· Podríamos pensar, en principio, que como el hilo es infinito y que como al doblarlo en “V” podría considerarse formado por dos semihilos infinitos, el campo en P sería, según el principio de superposición, la suma de los campos creados por los dos semihilos infinitos, cada uno de los cuales podría obtenerse por separado haciendo uso de la expresión

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

· Sin embargo, la distancia  $r$  en esta expresión representa la distancia perpendicular del punto P al hilo infinito, mientras que, en nuestro caso, la distancia  $d$  es otra. Esta estrategia de resolución ya utilizada en otras situaciones problemáticas, no parece ser válida en nuestro caso.

¿Podemos adelantar de qué variables dependerá el campo magnético en cuestión?

- Si aumentamos la corriente, aumentamos la intensidad de la fuente del campo magnético por lo que éste se hará mayor.
- La interacción magnética disminuye con la distancia a la fuente, así, a mayor  $d$  menor campo.
- La permeabilidad del medio es un factor que altera el campo. En nuestro caso consideraremos el aire y, por tanto, constante.
- En cuanto al ángulo  $\theta$  apreciamos que su variación aproxima o aleja el hilo en “V” al punto P. Si aumentamos  $\theta$  (y mantenemos la forma en “V” de ángulo  $2\theta$ ) los hilos se acercan a P por lo que el campo aumentará.
- En definitiva,  $B_P = B_P(I, d, \mu_0, \theta)$ .

¿Cómo podremos juzgar cuál de las propuestas del enunciado era la correcta?

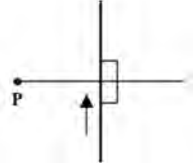
- Con el propósito de orientar la resolución del problema puede ser interesante analizar algunos valores límite del ángulo de apertura  $2\theta$  de la “V” pues, al fin y al cabo, en la relación del campo con esta variable discreparon los científicos.
- Si  $\theta \rightarrow 0$  ( $2\theta \rightarrow 0$ ). Nos encontramos ante dos hilos paralelos muy próximos entre sí que llevan corrientes iguales y opuestas cuya línea de acción pasa por P. Según esta última característica, cabe esperar que su efecto en ese punto sea nulo. Sin embargo, las dos propuestas cumplen esta condición límite:



Ampère:  $B_P = K_A \cdot \text{tg}(\theta/2)$ ; Si  $\theta \rightarrow 0$ , entonces,  $\text{tg}(\theta/2) \rightarrow 0$  y  $B_P \rightarrow 0$

Biot y Savart:  $B_P = K_{BS} \cdot \theta$ ; Si  $\theta \rightarrow 0$ , entonces,  $B_P \rightarrow 0$

· Si  $\theta \rightarrow \pi/2$  ( $2\theta \rightarrow \pi$ ). La "V" se convierte en un alambre de corriente rectilíneo e infinito. Para este caso, la magnitud del campo magnético en P es conocida y vale  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$



· Ahora bien, tomando una constante de proporcionalidad adecuada, ambas propuestas pueden ajustarse a la expresión del campo en aquella época generalmente aceptada:

Ampère:  $B_P = K_A \cdot \text{tg}(\theta/2)$ ; Si  $\theta \rightarrow \pi/2$ , entonces,  $\text{tg}(\theta/2) \rightarrow 1$  y  $B_P \rightarrow K_A$ , luego,  $K_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$ .

Biot y Savart:  $B_P = K_{BS} \cdot \theta$ ; Si  $\theta \rightarrow \pi/2$ , entonces,  $B_P \rightarrow K_{BS} \cdot \pi/2$ ,

luego,  $K_{BS} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cdot \frac{2}{\pi}$ , es decir,  $K_{BS} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 d}$

· Si  $\theta \rightarrow \pi$  ( $2\theta \rightarrow 2\pi$ ). El punto P se encuentra entre los dos alambres que transportan corrientes iguales en sentido contrario y está infinitamente próximo a ellos. Por tanto, los hilos crean en P campos muy grandes y del mismo sentido. Es decir, el campo en P tenderá a infinito. Como  $\text{tg}(\theta/2) \rightarrow \infty$  cuando  $\theta \rightarrow \pi$ , la expresión de Ampère parece ser la correcta y, hoy en día, es universalmente aceptada. Por contra, la expresión propuesta por Biot y Savart no puede ser correcta pues supone un valor finito del campo para esta situación especial.



· Podemos concluir entonces, que el campo en P en la situación descrita en el enunciado será:

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

**¿Es coherente el resultado con respecto a las hipótesis emitidas?**

En la expresión matemática obtenida para el campo en P se comprueba que la dependencia de esta magnitud con la intensidad de corriente, con la distancia d y con el ángulo de apertura de la "V", previamente consideradas son correctas.

**¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?**

De la expresión obtenida concluimos que,  $\frac{\frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}} \text{A}}{\text{m}} = \text{T}$ , por lo que lo es.

## COMENTARIOS P.12

Presentamos ante los estudiantes, como situación problemática a resolver, un desacuerdo histórico entre científicos que realizaron aportaciones fundamentales al desarrollo del electromagnetismo y, en el caso que nos ocupa, al descubrimiento de las leyes que rigen las fuentes del campo magnético. Tiene, por tanto, un claro enfoque CTS. Desde el punto de vista metodológico, su resolución requiere, por un lado, valorar el rango de aplicabilidad de estrategias habitualmente utilizadas en situaciones de apariencia similar y, por otro, hacer ver a los estudiantes que la ciencia, en ocasiones, aborda los problemas que se le plantean considerando situaciones particulares de más fácil interpretación cualitativa. La valoración de casos límite de la variable angular es, precisamente, el camino más sencillo y alejado de complejos cálculos para determinar si tenía razón Ampère o Biot y Savart. Estos aspectos procedimentales, la valoración de la estrategia, la emisión de hipótesis y la consideración de casos límite, resultan en este contexto ricos en significado y de gran valor didáctico.

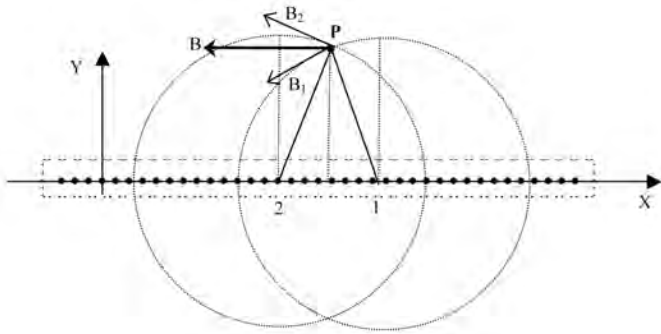
## ENUNCIADO P.13

No siempre la corriente se transporta en conductores cilíndricos. En los chips de los semiconductores o en ciertos circuitos impresos, por ejemplo, hay bandas conductoras planas, mucho más anchas y largas que gruesas, que llevan la corriente entre los elementos del circuito. Este modelo de lámina es como si tuviéramos un conjunto infinito de conductores paralelos de manera que entre todos transportaran una densidad lineal de corriente  $J$  (corriente por unidad de longitud “ $x$ ”, anchura). Obtener la expresión del campo magnético creado por una lámina de corriente infinita.

## RESOLUCIÓN P.13

**¿Cómo podemos interpretar la situación descrita en el enunciado?**

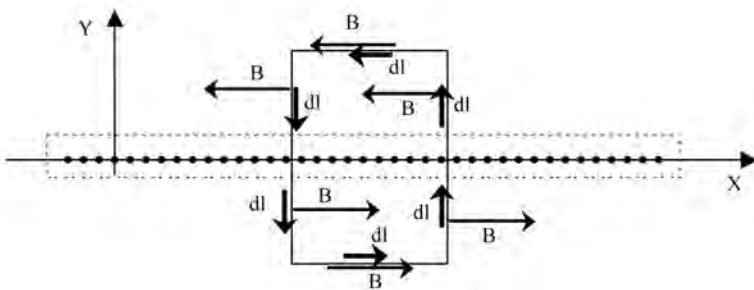
En este modelo de la lámina, como un conjunto infinito de conductores paralelos, puesto que cada uno produce líneas circulares de campo, la superposición de campos debidos a los distintos conductores resulta paralela a la lámina y perpendicular a la intensidad de corriente. Para ser más precisos, en cualquier punto  $P$  (por encima de la lámina) se definen pares de conductores (1 y 2, en la figura) equidistantes de  $P$ . El campo magnético originado por cada par tiene la dirección negativa de las  $X$ . El sentido del campo se invierte a ambos lados de la lámina. Podemos interpretar este hecho recordando que las líneas de campo magnético tienden a rodear a su fuente. Si la lámina es infinita (lo cual no es más que una idealización que supone que nos encontramos muy próximos a ella) las líneas no alcanzan a circunvalarla y se mantienen paralelas a ella.



**¿Podemos adelantar de qué variables dependerá el campo magnético en cuestión?**

- Si aumentamos la densidad de corriente, aumentamos la intensidad de la fuente del campo magnético por lo que éste se hará mayor.
  - La interacción magnética disminuye con la distancia a la fuente, así, a mayor distancia a la placa cabe esperar que el campo sea menor. Sin embargo, para considerar la lámina infinita la distancia del punto P a ella debe de ser muy pequeña. En esta situación límite la dependencia del campo con la distancia no resulta fácil de predecir.
  - La permeabilidad del medio es un factor que altera el campo. En nuestro caso consideraremos el aire y, por tanto, constante.
- En definitiva,  $B_p = B_p(J, d, m_0)$ .

**¿Cómo podremos obtener la expresión matemática del campo magnético creado por la lámina?**



Podemos elegir como curva de Ampère un rectángulo con dos lados paralelos a la lámina, a iguales distancias del plano central. Con esta elección, resulta que estos dos lados también son paralelos al campo magnético generado por toda la banda conductora que, por otro lado, es constante en todos los puntos de dichos segmentos. Los

otros dos lados, son perpendiculares a la lámina y, por tanto, perpendiculares al campo magnético. En estas condiciones,  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl$  y de acuerdo con la ley de Ampère,  $2Bl = \mu_0 I$ , luego,  $B = \mu_0 I / 2$

### **¿Es coherente el resultado con respecto a las hipótesis emitidas?**

Lo es en lo referente a la densidad de corriente (la fuente del campo) pero, resulta independiente de la distancia a la lámina infinita. Este resultado, aparentemente incongruente pues la interacción, por principio, disminuye con la distancia a la fuente, ya lo habíamos encontrado para el campo eléctrico en el caso del plano infinito. Debemos tener en cuenta que las dimensiones infinitas no son más que una aproximación y, por ello, el resultado independiente de la distancia obtenido también lo será. El paralelismo con el plano de carga infinito se da, así mismo, en el aspecto formal de la expresión matemática:  $E = \sigma / 2\epsilon_0$  para el caso eléctrico y  $B = \mu_0 I / 2$  para la lámina de corriente.

### **¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?**

De la expresión obtenida,  $\frac{T \cdot m \cdot A}{A \cdot m} = T$ , y, desde el punto de vista de las unidades, es coherente.

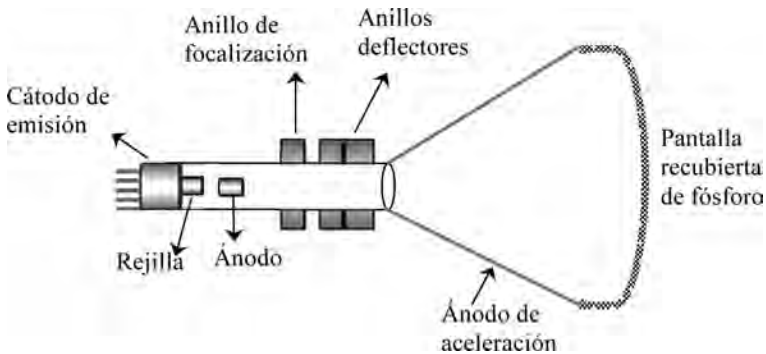
## **Comentario P.13**

En el enunciado de esta situación problemática, comparado con otros, damos a los alumnos más información acerca de el sistema a estudiar. Si bien podría parecer que, en este sentido se cierra el problema los estudiantes, sin embargo, tienen que interpretar esa información dada en forma de lenguaje gráfico y la transposición de lenguajes es, precisamente, un procedimiento habitual en el quehacer de los científicos que creemos conveniente trabajar en resolución de problemas. Cuando los alumnos pretendan valorar, a modo de hipótesis, la dependencia del campo con la distancia a la fuente se encontrarán, por un lado, con que el campo, en general, disminuye con la distancia pero, por otro, al tratarse de una banda infinita (distancia a la fuente muy pequeña) las previsiones al respecto no quedan claras. Una importante aportación de este problema, en lo que a estrategia de resolución se refiere, es que rompe con la simetría cilíndrica que en la mayoría de las ocasiones se plantea cuando se obtienen campos magnéticos por aplicación de la ley de Ampère. Este uso reiterativo de situaciones con la misma simetría puede originar en los estudiantes 'fijaciones funcionales', que con enunciados de este tipo pretendemos sacar a la luz y corregir. En el análisis de resultados se presta especial atención a la dependencia del campo con la distancia (la no dependencia, en este caso) y puede ser una oportunidad de conectar con el campo eléctrico creado por un plano infinito, estableciendo comparaciones entre las dos situaciones.



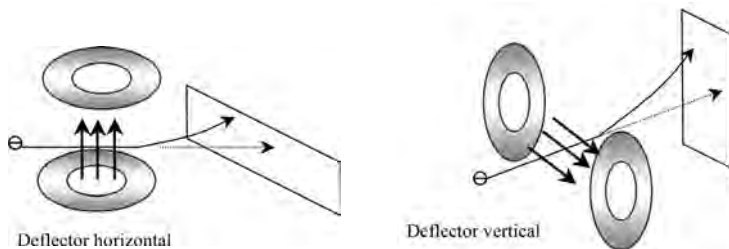
## ENUNCIADO P.14

1. De un modo esquemático podemos resumir el funcionamiento del tubo de imagen de un televisor en blanco y negro como sigue: Los puntos de luz se forman en el interior de la pantalla cuando los electrones colisionan con el fósforo que la recubre. Estos electrones son emitidos por una superficie a altas temperaturas en el cuello del tubo de imagen y son acelerados hacia la carga positiva que contiene la pantalla. Cuando los electrones chocan contra el fósforo, le transmiten energía y, haciendo uso de esta energía, el fósforo se vuelve luminiscente dando lugar al punto de luz. Una vez que los electrones salen de la rejilla del cátodo de emisión formando un estrecho haz, ¿qué crees que les ocurrirá mientras avanzan hacia la pantalla?



2. ¿Cómo podríamos solucionar este problema? (Observa el esquema del cuello del tubo de imagen).

3. El haz de electrones deberá impactar sobre algún punto de la pantalla de fósforo, pero no necesariamente en el centro. Es preciso desviar los electrones hacia las diferentes partes de la pantalla. Para ello se utilizan los anillos deflectores. Explica razonadamente el funcionamiento básico de los deflectores horizontales y verticales representados en las figuras siguientes:



4. Cuando el haz de electrones impacta contra la pantalla de fósforo, se transfiere energía al fósforo y entonces éste emite luz blanca. Crear una imagen brillante requiere mucha energía, por lo que los electrones deben ser acelerados en su camino hacia la pantalla. Una fuente de alimentación de alto voltaje (15.000, 25.000V) intro-

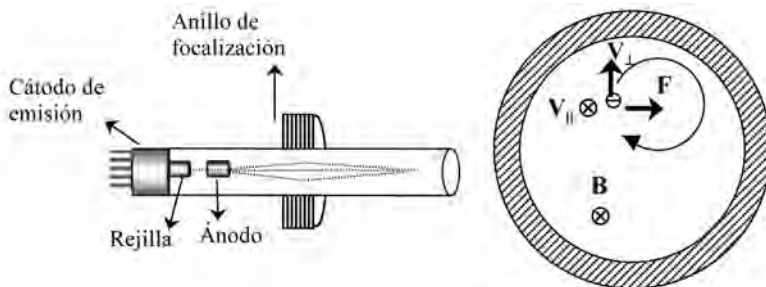
duce carga positiva en la pantalla y en el ánodo acelerador que la rodea y esta carga atrae a los electrones. En un aparato de TV se puede leer la siguiente advertencia: AVISO, Este aparato contiene peligrosos altos voltajes incluso cuando ha sido desconectado. ¿A qué crees que se puede deber esta circunstancia?

5. a) Los electrones del tubo de imagen salen de la rejilla a muy bajas velocidades. Si son acelerados bajo una ddp de 15.000V entre la rejilla y la pantalla, ¿con qué velocidad alcanzarán la pantalla? b) Con objeto de que los electrones impacten en la parte superior de la pantalla se necesita desviarlos con un radio de curvatura de unos 20cm. Calcular el campo magnético necesario.

## RESOLUCIÓN P.14

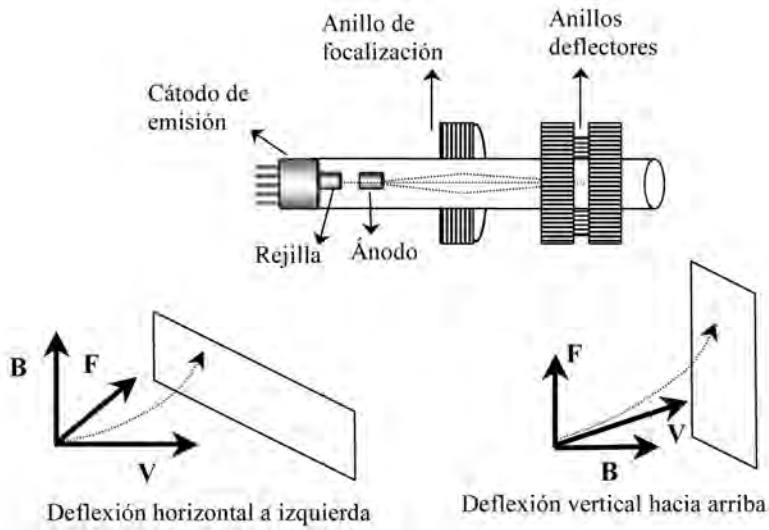
1. Efectivamente los electrones emergen del cátodo cargado negativamente. Este cátodo se calienta por medio de un filamento y es por eso que los tubos de imagen tardan unos segundos en activarse. La rejilla, que está cargada negativamente, contiene un pequeño agujero a través del cual algunos electrones pueden pasar. Estos electrones son atraídos por el ánodo cargado positivamente y forman un estrecho haz. Sin embargo, los electrones del haz se repelerán entre sí, por lo que deberán ser redirigidos para que todos ellos impacten en el mismo punto de la pantalla.

2. Se hace uso de la interacción magnética sobre cargas en movimiento. Para crear el campo magnético adecuado se colocan espiras de corriente rodeando el cuello del tubo de imagen (anillo de focalización), de manera que el campo magnético sea paralelo a la velocidad de avance de los electrones y perpendicular a la velocidad causada por la repulsión entre ellos.



Los electrones del haz avanzan en espiral como consecuencia de las aceleraciones que sufren en la dirección del cuello del tubo y de la interacción magnética que hace que curven su trayectoria.

3. Un par de espiras, por encima y por debajo del cuello del tubo de imagen, producen un campo magnético vertical que desvía el haz de electrones horizontalmente. Ajustando la magnitud y el sentido de la corriente que circula por las espiras, se puede controlar la posición horizontal de impacto sobre la pantalla. (Los estudiantes pueden realizar un análisis detallado de las diferentes posibilidades).



4. Los televisores utilizan condensadores para mantener la carga eléctrica separada en la fuente de alimentación de alto voltaje que utilizan. Las elevadas diferencias de potencial pueden persistir durante muchos minutos tras ser desconectado.

5. a) Aunque no conozcamos la distancia que recorren los electrones, considerando el carácter conservativo del campo eléctrico se tendrá:  $\Delta E_k + \Delta E_p = 0$ ;  $q\Delta V = 1/2mv^2$  y, por tanto,  $v = (2 q\Delta V/m)^{1/2} = (2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5 \cdot 10^4 / 9 \cdot 10^{-31})^{1/2} = 7,3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ , que es casi la cuarta parte de la velocidad de la luz. b) De acuerdo con análisis ya realizados, el campo magnético se relaciona con el radio de la circunferencia descrita por el electrón por medio de  $B=(vm/qR)=2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ .

#### Observaciones:

- Los grises se consiguen controlando la corriente electrónica del haz. Este control se realiza ajustando la cantidad de carga negativa en la rejilla del cuello del tubo de imagen. Cuanto más carga negativa en la rejilla más dificultad para los electrones que pretenden atravesarla y menor corriente electrónica en el haz.
- La imagen completa se consigue escaneando las 625 líneas que componen la pantalla a alta frecuencia. Aproximadamente tarda 1/60 de segundo en completar la pantalla.

#### COMENTARIOS P.14

La situación problemática que acabamos de describir, difiere mucho del resto de los enunciados hasta ahora presentados en nuestra propuesta alternativa. Pretende abordar una aplicación tecnológica conjunta de los efectos de los campos eléctrico y magnético a un contexto de nuestro entorno próximo como es un tubo de imagen de

TV. Aplicaciones CTS de la materia impartida planteadas como situaciones problemáticas, tiene un efecto muy positivo sobre la actitud de los estudiantes hacia la asignatura. Es, por tanto, el objetivo actitudinal el que más nos interesa cubrir con esta actividad. Lógicamente, para un primer curso universitario de la asignatura de Física, la atención debe de estar dirigida más hacia las leyes básicas del electromagnetismo y no tanto a la descripción desde una perspectiva meramente tecnológica. Se trata sólo de una aproximación descriptiva pero, permite hacer ver a los estudiantes que las leyes que describen las interacciones electromagnéticas no son únicamente teorías generales sino que alcanzan de lleno al diseño y funcionamiento de los dispositivos tecnológicos. Por otro lado, el papel del profesor durante el desarrollo de esta actividad tendrá que ser más activo que en otras, para reconducir la posible desorientación que los alumnos puedan sentir ante una situación de abanico más amplio como la que aquí se aborda.

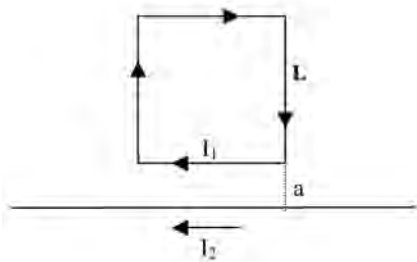
### ENUNCIADO P.15

Una espira cuadrada de corriente se coloca a una determinada distancia de un hilo muy largo y fijo que transporta otra corriente, de manera que éste queda paralelo a uno de los lados de la espira y en el mismo plano definido por ella. ¿Qué fuerza habrá que ejercer sobre la espira desde el exterior para mantenerla en reposo en su posición inicial?

### RESOLUCIÓN P.15

¿Cómo podemos esquematizar la situación descrita en el enunciado?

Supongamos las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  que circulan por la espira y por el hilo, respectivamente, con los sentidos de



la figura y consideremos la distancia 'a' y la longitud de la espira  $L$ . En esta situación el campo magnético creado por el hilo ejercerá una fuerza magnética sobre cada lado de la espira por el que circula la intensidad  $I_1$ . Así mismo, el campo creado por la espira actuará sobre el hilo ejerciendo una fuerza magnética sobre él. Esta fuerza, sin embargo, como el hilo se mantiene fijo en su posición por efecto de algún sistema externo, no necesitamos valorar. La fuerza externa que habrá que ejercer para mantener la espira en reposo será aquella que, justamente, compense la fuerza magnética total que el hilo ejerce sobre ella, siempre y cuando no consideremos el peso ni ninguna otra fuerza externa. Así mismo, despreciamos la interacción que se daría entre los cuatro lados de la espira recorridos por la intensidad  $I_1$ , no necesariamente insignificantes según el valor de esta intensidad.

### ¿De qué factores dependerá la fuerza magnética sobre la espira?

· La fuerza magnética se produce como consecuencia de la interacción de las cargas en movimiento del hilo que crean el campo magnético en el espacio ocupado por la espira, con las cargas en movimiento de la propia espira. Por ello, los factores que incrementen el campo creado por el hilo y los que supongan mayor movimiento de cargas en la espira, aumentarán la fuerza entre el hilo y la espira:

· Si aumentamos la intensidad que circula por el hilo, aumentamos el campo que éste crea en su entorno y la fuerza sobre la espira será mayor.

· Si aumentamos la distancia  $a$  entre el hilo y el lado de la espira más próximo a él, disminuimos el campo en el lugar que ocupa la espira y la fuerza se hará menor.

· Si aumentamos la intensidad  $I_1$  que circula por la espira, la interacción de las cargas en movimiento con el campo existente será mayor, aumentando, en consecuencia, la fuerza magnética.

· Si aumentamos la longitud  $L$  de la espira, nos encontramos ante diversos efectos. Por un lado, incrementamos el número de portadores de carga en movimiento y, por ello, deberá aumentar la fuerza magnética sobre todos los lados de la espira. Así mismo, alejamos más el lado superior de la espira respecto del hilo y, como el campo creado por éste disminuye con la distancia, la fuerza por unidad de longitud sobre este lado será menor. Como la fuerza neta es consecuencia de la diferencia entre la fuerza magnética sobre los lados superior e inferior, no resulta sencillo anticipar cual será la dependencia final con la dimensión  $L$  de la espira.

· En definitiva, podemos esperar que  $\mathbf{F}=\mathbf{F}(I_1, I_2, L, a, \mu_0)$ .

### ¿Cómo podemos obtener la fuerza pedida?

· El campo magnético creado por el hilo rectilíneo e infinito se puede calcular como  $B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$ , con  $r$  la distancia perpendicular del punto en cuestión al hilo. Este campo es tangente a la línea circular de radio  $r$  y centrada en el hilo, siendo su sentido el de avance de un tornillo según la corriente, perpendicular al papel y entrante.

· Para los tramos de espira paralelos al hilo el campo magnético es constante en todos sus puntos pues, o bien  $r=a$  en el lado inferior, o bien  $r=a+L$  en el lado superior y resulta del mismo valor para todos los puntos de cada lado. Así, la fuerza se podrá obtener por medio de  $\mathbf{F} = I_1 \mathbf{L} \wedge \mathbf{B}$  y como el campo es perpendicular a los lados de la espira, se tiene:

$F_{\text{inf}} = I_1 L \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$  dirigido hacia abajo y  $F_{\text{sup}} = I_1 L \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(a+L)}$  dirigido hacia arriba.

· La fuerza neta en la dirección vertical será:

$F = I_1 L \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} - I_1 L \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(a+L)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L^2}{2\pi a(a+L)}$  dirigida hacia abajo.

· Para los laterales izquierdo y derecho de la espira, el campo magnético es variable con la distancia al hilo y no se podrá hacer uso de la expresión  $F = I_1 L \wedge B$ , válida únicamente para campos constantes. La magnitud de estas fuerzas habría que hallarlas por integración de la expresión diferencial entre  $a$  y  $a+L$ , para cada segmento rectilíneo. Sin embargo, en nuestro caso, como buscamos la fuerza neta sobre la espira, teniendo en cuenta que las interacciones sobre los laterales son iguales y opuestas, su efecto se contrarresta.

· La fuerza total sobre la espira queda  $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L^2}{2\pi a(a+L)}$ , dirigida hacia abajo, por lo que desde el exterior deberemos actuar con una fuerza del mismo modulo y dirección, pero con sentido hacia arriba.

### ¿Es coherente el resultado con respecto a dependencia de variables?

· Se contrastan las hipótesis de variables y se comprueba que el efecto final del incremento de  $L$  es aumentar la fuerza magnética.

· Podemos considerar algunos valores extremos de estas variables, como:

Si  $I_1 \rightarrow 0$ , no hay fuerza porque las cargas de la espira no se mueven y no interactúan con las cargas móviles del hilo infinito.

Si  $I_2 \rightarrow 0$ , no hay campo porque las cargas del hilo rectilíneo están en reposo, no crean campo y no interactúan con las cargas móviles de la espira.

Si  $a \gg L$ , separamos mucho las cargas móviles del hilo de las cargas móviles de la espira, por lo que la interacción tiende a cero.

Si  $L \gg a$ , el lado superior de la espira se aleja mucho del hilo rectilíneo y como las fuerzas sobre los lados laterales se contrarrestan entre sí, nos encontramos ante dos hilos infinitos y paralelos que llevan corrientes en la misma dirección, por lo que deberíamos obtener (de acuerdo con cálculos ya realizados) una fuerza atractiva por unidad de longitud:  $F/L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$ . Este valor se obtiene de la expresión general obtenida previamente despreciando a frente a  $L$  y simplificando.

· Por otro lado, los estudiantes podrían reconsiderar el problema con intensidades de sentido diferente al utilizado para este análisis o, también, podrían especular sobre la dirección que debería tener el campo magnético para que por efecto de las fuerzas la espira rectangular gire sobre su eje.

### ¿Es dimensionalmente homogéneo el resultado?

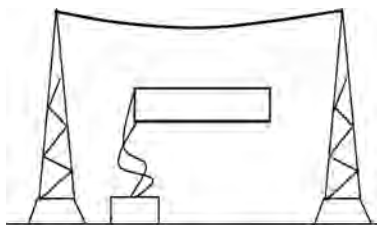
$$\frac{\frac{N}{A \cdot m} \cdot m \cdot A \cdot A \cdot m^2}{A \cdot m^2} = N \text{ donde hemos tenido en cuenta que las unidades de } \mu_0 \text{ son } \frac{T \cdot m}{A} \text{ y un Tesla equivale a } \frac{N}{A \cdot m}.$$

## COMENTARIOS P.15

Se trata de un problema contextualizado en la interacción magnética entre corrientes que, entre otros aspectos, persigue alcanzar dos objetivos: uno conceptual y que hace referencia a la distinción entre las fuentes del campo magnético (las cargas en movimiento) y sus efectos (la fuerza magnética sobre otras cargas en movimiento) y otro procedimental que pretende hacer valorar a los estudiantes el rango de aplicabilidad de ciertas expresiones matemáticas de la fuerza magnética sobre conductores que, según nuestra experiencia docente, da lugar a fijaciones funcionales. Así mismo, especulando acerca de la dirección del campo magnético se puede valorar la rotación de la espira y conectar de una forma natural con otros aspectos de la unidad didáctica.

## ENUNCIADO P.16

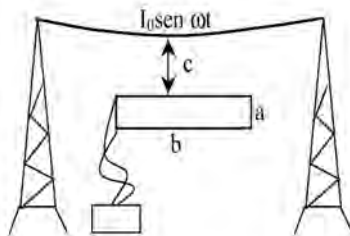
Un campesino avisado ha sido descubierto robando corriente de las líneas de alta tensión que pasan por sus tierras y por las que circula corriente alterna según  $I=I_0\text{sen}\omega t$ . Para ello utilizaba un dispositivo como el que se esquematiza en la figura. ¿Cuál es la fem extraída?



## RESOLUCIÓN P.16

¿Cómo podemos interpretar el método empleado por el campesino para extraer corriente de las líneas de alta tensión?

· Al ser la corriente alterna, su intensidad es variable con el tiempo y esto hace que el flujo del campo magnético que esta corriente crea en su entorno, a través de cualquier superficie delimitada por una espira conductora, sea también variable con el tiempo. Este flujo variable da lugar a una fem inducida en la espira que es la que, a través de las conexiones pertinentes, el campesino extrae para su beneficio.



· En el esquema se nos indica que se utiliza una espira rectangular próxima a los hilos de alta tensión, que no son rectilíneos, aunque si consideramos la espira lo suficientemente próxima a ellos, podremos actuar como si lo fueran y simplificar así los posteriores cálculos.

### ¿Cómo deberá diseñar su dispositivo el aldeano para maximizar la fem extraída?

· La fem extraída deberá depender de todos aquellos factores que alteren la variación temporal del flujo magnético a través de la espira conductora utilizada. Es decir, dependerá de aspectos característicos de la línea de alta tensión (los cuales el campesino no podrá modificar) y de variables relativas a la propia espira conductora y su posición relativa respecto a los cables de corriente (sobre las que sí podrá actuar).

· Entre los primeros tenemos:

La intensidad  $I_0$  que circula por la línea que, cuanto mayor sea, mayor campo creará en su entorno dando lugar a una mayor variación temporal del flujo.

La frecuencia angular  $\omega=2\pi f$  que, cuanto mayor sea, mayor será el ritmo de cambio de la intensidad que circula por los cables y mayor la variación temporal del flujo magnético que crea a través de la espira.

· Los parámetros sobre los que el aldeano podrá incidir son:

La distancia  $c$  de la espira al hilo que, cuanto mayor sea, menor será el campo magnético en la región ocupada por la espira y menor el flujo a su través. Además, si pretendemos considerar el hilo como rectilíneo e infinito no deberíamos alejar la espira mucho de él.

Las propias dimensiones  $a$  y  $b$  de la espira que, cuanto mayores sean, mayor será el flujo a su través.

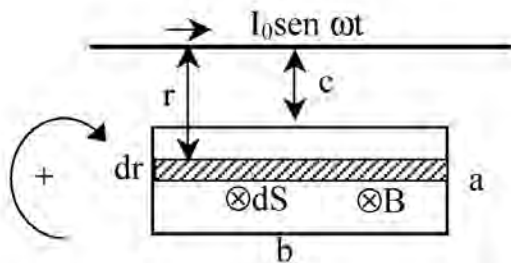
También influye la orientación de la espira respecto del cable de alta tensión. En el presente caso viene dada en la figura y se corresponde con la orientación de máximo flujo y, por tanto, la más favorable.

Un último factor que incidirá, distinto de los dos tipos antes citados, es la permeabilidad del medio que altera el campo. En nuestro caso consideraremos el aire y, por tanto, constante.

· Como la corriente es alterna, la fem inducida variará de forma análoga con el tiempo. Su valor máximo  $\epsilon_0$  vendrá dado por  $\epsilon_0=\epsilon_0(I_0, \omega, a, b, c, \mu_0)$ .

### ¿Cómo podremos obtener la expresión matemática del campo magnético creado por la lámina?

· Para obtener la fem inducida deberemos calcular la variación temporal del flujo magnético a través de la superficie definida por la espira de corriente. Como el campo creado por el hilo de alta tensión varía con la distancia a él, el flujo lo calcularemos





dividiendo la espira en franjas diferenciales y luego sumando mediante una integral definida:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right)$$

Como  $I = I_0 \sin \omega t$ , la fem inducida:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 b \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right) \cos \omega t, \text{ con sentido alterno en el tiempo.}$$

Su valor máximo, en valor absoluto, será:  $\varepsilon_0 = \frac{\mu_0 I_0 b \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right)$

**¿Es coherente el resultado con respecto a las hipótesis emitidas?**

· Se comprueba que, tanto los factores relativos a la intensidad de la corriente de alta tensión, como los referentes a la geometría de la espira y al medio, figuran en la expresión obtenida tal y como habíamos previsto. Para analizar la variación de la distancia  $c$ , es conveniente escribir el resultado como:

$$\varepsilon_0 = \frac{\mu_0 I_0 b \omega}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

El resultado, se comprueba que es dimensionalmente homogéneo:

$$\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \text{A} \cdot \text{m} \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C} \cdot \text{s}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} = \text{V}$$

**¿Es realmente eficaz el método propuesto por el aldeano?**

· Para valorar esta cuestión podemos pedir a nuestros estudiantes que calculen la dimensión  $b$  de la espira que habría que colocar si la línea de alta tensión transportara una corriente de  $I_0 = 10 \text{ kA}$  y  $f = 60 \text{ Hz}$  y si el campesino pretendiera obtener una fem de valor máximo de  $170 \text{ V}$  (típico para una corriente alterna de  $120 \text{ V}$ ) y si suponemos que coloca la espira, de ancho  $a = 0.5 \text{ m}$ , a  $c = 5 \text{ m}$  de la línea.

· Despejando la dimensión que queremos obtener, queda:  $b = \frac{\varepsilon_0 2\pi}{\mu_0 I_0 \omega \ln\left(\frac{c+a}{c}\right)}$

· Y, sustituyendo valores, se tiene que sería necesaria una espira de  $2.7 \text{ km}$  de largo, lo que, desde luego, no hace que el sistema empleado sea muy operativo.

**COMENTARIOS P.16**

Aunque su resolución se ajusta a los parámetros de los problemas habituales de inducción electromagnética, el enunciado pretende incluir una cierta dosis de humor que pueda ayudar a que los estudiantes aborden el problema con mayor ánimo. La inclusión, a posteriori, de datos numéricos que se ajustan a la realidad, permite valo-

*rar la eficacia del método y especular sobre su posible mejora e inconvenientes. Desde el punto de vista de las estrategias de resolución, destaca la dificultad que supone el que el campo magnético, además de ser variable con el tiempo, también varíe con la posición.*



En conclusión, la recopilación de problemas de enunciado abierto o semiabierto que acabamos de exponer, junto con sus resoluciones y comentarios, nos ha permitido mostrar que es posible incorporar a la enseñanza de esta actividad de la Física, las principales características de una metodología de resolución como investigación orientada.

Este enfoque debe contribuir a un mayor y mejor aprendizaje de la resolución de problemas, pero para su desarrollo en el aula será necesario un cambio en las concepciones y prácticas habituales del profesorado en relación con la enseñanza, en este caso de la resolución de problemas de Física a la que estamos aludiendo. Por tanto, es conveniente realizar una serie de precisiones en lo referente a la aplicación de estos materiales didácticos. Veamos:

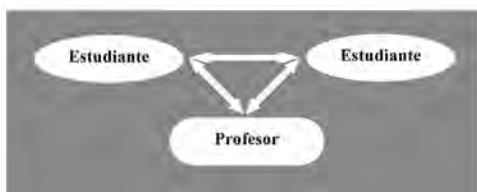
***¿Cómo podemos estructurar las clases para aplicar en el contexto real del aula el modelo de resolución de problemas como investigación orientada de manera coherente con los criterios de convergencia europea?***

La metodología de enseñanza-aprendizaje como investigación orientada ha de ser aplicada en el aula con una estructuración de la misma en pequeños grupos de trabajo que actúen como equipos de investigación que abordan la tarea y que interaccionan entre ellos y con la comunidad científica representada por el profesor, los libros de texto, etc. Hemos dividido cada clase, por tanto, en grupos de unos tres estudiantes a los que, a lo largo de toda la asignatura, se les han ido presentando los enunciados de las situaciones problemáticas. Cada grupo de trabajo, fuera del horario de la asignatura, aborda el problema, lo analiza, comienza a emitir las primeras hipótesis y evalúa posi-

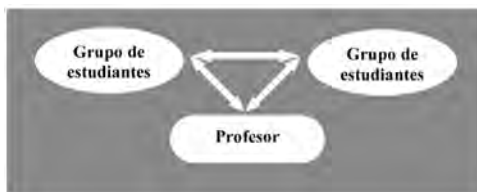
bles estrategias de resolución, es decir, realiza una primera tentativa en la que se producen interacciones entre los distintos estudiantes que componen el grupo y entre éstos y las diferentes fuentes de información como libros de texto, internet, etc.



Tras este trabajo inicial, cada grupo de estudiantes se entrevista con el profesor en horario de tutorías y se producen las primeras interacciones entre profesor y estudiantes. El profesor, que percibe las dificultades conceptuales y metodológicas de la resolución, reorienta a los estudiantes y les ayuda a superar posibles bloqueos.



Finalizadas las sesiones de tutoría con todos los grupos de trabajo, y en una fecha previamente establecida, unos días después, se realiza una puesta en común en el aula. Esta sesión, en la que se resuelve el problema, se estructura en formato de seminarios con la participación de doce o quince estudiantes (cuatro o cinco grupos de trabajo de unos tres estudiantes). El profesor actuará de guía y moderador de las posibles discusiones que surjan entre los estudiantes. Al comienzo de esta clase se recogen los informes escritos que cada grupo de trabajo debe presentar como resumen de la resolución del problema.



Tomando, de nuevo, como referencia el Proyecto Tuning (Tuning Educational, 2003): Las competencias y las destrezas se entienden como conocer y comprender (conocimiento teórico de un campo académico, la capacidad de conocer y comprender), saber cómo actuar (la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones) saber cómo ser (los valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en un contexto social). Las competencias representan una combinación de atributos (con respecto al conocimiento y sus aplicaciones, aptitudes, destrezas y responsabilidades) que describen el nivel o grado de suficiencia con que una persona es capaz de desempeñarlos.

En este sentido, la propuesta metodológica de resolución de problemas como investigación orientada constituye una situación didáctica factible de aplicar en el ámbito real de nuestras aulas y que permite desarrollar y evaluar competencias de máximo interés. Así, cuando los estudiantes se enfrentan a este tipo de tareas deberán aplicar significativamente los aspectos fundamentales de física básica en la comprensión de situaciones problemáticas contextualizadas en diversos ámbitos de la asignatura, tendrán la oportunidad de emplear coherentemente el conocimiento procedimental asociado a la metodología científica en la resolución de situaciones problemáticas de física básica, (realizar análisis cualitativo, emitir hipótesis, elaborar estrategias alternativas, resolver, manipular aparatos y analizar resultados), podrán trabajar en equipo para abordar con los compañeros tareas cooperativas en el contexto de la física (realizar propuestas, analizar aportaciones de otros, discutir ideas y ejecutar las acciones pertinentes), deberán trabajar con información correspondiente a procesos relativos a la física básica, analizar y expresar correctamente las ideas tanto de forma escrita como oralmente, utilizando para ello diversos sistemas de símbolos o formas de representación: texto, fórmulas, tablas, gráficos y diagramas, y, finalmente, tendrán ocasión de adoptar una actitud favorable hacia el aprendizaje de la asignatura mostrándose proactivos, participativos y con espíritu de superación ante las dificultades de aprendizaje.

Y, análogamente, para estudiantes y profesores, esta manera de enfocar la tarea de resolución de problemas, permite realizar un seguimiento continuado del proceso de enseñanza-aprendizaje que facilite la (auto)regulación del mismo.

Para finalizar este capítulo, creemos que es importante recoger algunas opiniones del profesorado que ha implantado en sus clases esta metodología de resolución de problemas en un contexto organizativo con formato de seminario, tal y como anteriormente hemos descrito:

***¿Qué opinión merece la metodología de resolución de problemas como investigación orientada a los profesores que la han implementado en sus clases? ¿Que dificultades han encontrado?***

Consideramos necesario que con los profesores que deseen implicarse en la aplicación en el aula de la metodología de resolución de problemas propuesta, se lleve a cabo un plan de apoyo consistente en familiarizarles con la metodología de enseñanza-aprendizaje como investigación orientada dentro del paradigma constructivista, si es que no lo estuvieran ya. Este programa de formación podría consistir en unas cuatro sesiones de talleres de, aproximadamente, tres horas.

Estos cursos de formación impartidos a lo largo de la última década nos han aportado importante información de índole cualitativa obtenida a partir de los intercambios de opiniones en las sesiones de taller y de las experiencias de clase expresadas por los profesores tras la implantación de la metodología. Podemos resumir la opinión del profesorado en los siguientes términos:

*1. ¿En qué aspectos centran los profesores las dificultades de comprensión de los enunciados de los problemas alternativos propuestos?*

En la discusión detenida de los problemas y su utilización en el aula, han ido surgiendo dificultades derivadas de la necesidad de comprender cuál es el verdadero sentido de plantear enunciados de carácter abierto.

Los profesores expresan, en principio, sus dudas respecto a la no inclusión de todos los datos y las acotaciones pertinentes en los enunciados, pues contrasta con lo que habitualmente se hace. Normalmente, en los problemas habituales se procura dar la máxima información posible para que los estudiantes sepan cuál es la situación precisa que hay que resolver, qué magnitud hay que obtener, los valores numéricos necesarios, e incluso, en ocasiones, hasta la propia vía de resolución.

Las posteriores reflexiones en torno a esta cuestión, suelen permitir hacer ver a estos profesores que los enunciados habituales promueven la resolución operativista de los problemas y evitan que los estudiantes realicen reflexiones cualitativas en base al cuerpo teórico que les conduzca, por ellos mismos, a centrar la situación. En cierta medida, los profesores asumen que nuestro modelo pretende ser coherente con el paradigma emergente que concibe el aprendizaje de una manera superadora de la simple transmisión-recepción de conocimientos ya elaborados y que este proceso debe ir acompañado de un profundo cambio metodológico. Cambio que, en resolución de problemas, toma como punto de partida la presentación de los mismos con un formato más abierto e indefinido. Así, se ayuda a comprender a los estudiantes el papel de las estimaciones cualitativas a las que los científicos recurren con frecuencia, previamente a realizar cálculos más precisos, es decir, se ayuda a romper la visión tópica que asocia el trabajo científico con cálculos minuciosos que, a menudo, pierden toda su significación.

Otro aspecto relativo a los enunciados presentados que, en una primera fase, suele llamar la atención de los profesores, es el énfasis que se hace en relacionarlos con aspectos familiares al entorno de los estudiantes o en presentarlos en contextos próximos a aplicaciones tecnológicas. No tardan en reconocer, sin embargo, que vale la pena hacer que los estudiantes se planteen cuál puede ser el interés de la situación problemática propuesta, pues ello puede contribuir a favorecer una actitud más positiva hacia la tarea, evitando que los alumnos se vean sumergidos en el tratamiento de una situación sin haber podido formarse siquiera una primera idea motivadora. Por otro lado, los aspectos CTS han desempeñado, y lo siguen haciendo, un papel funda-

mental en el desarrollo de la Ciencia que, a nivel epistemológico, remarca su importancia.

Los profesores plantean, en ocasiones, que si bien esta presentación de la tarea que presta atención a crear un interés previo es de gran ayuda para evitar un activismo ciego en los estudiantes, no debe ser, sin embargo, considerada como una limitación a la hora de elegir los enunciados; simplemente es una referencia. Los profesores opinaron al respecto que determinados enunciados puramente académicos tienen, por sí mismos, grandes aportaciones que hacer en lo que respecta a su tratamiento, tanto desde la perspectiva conceptual como metodológica y, por ello, no deben ser descartados sólo por sus carencias CTS.

*2. ¿En qué aspectos centran los profesores las dificultades procedimentales de resolución de los problemas alternativos propuestos?*

Un aspecto que crea inseguridad en los profesores que por primera vez aplican esta metodología alternativa de resolución de problemas, es el no saber exactamente cuál es su verdadero papel durante la actividad de resolución.

Cuando pretendemos que los estudiantes realicen un análisis cualitativo de la situación y un planteamiento del problema, estamos haciendo una petición bastante global, lo que nos parece preferible a ir orientando el trabajo de los estudiantes con preguntas más concretas que parcialicen la resolución. Ello no quiere decir que el profesor no pueda introducir, si cree conveniente, nuevas cuestiones durante la puesta en común, pero lo esencial es que los estudiantes se planteen una situación suficientemente global para que tenga sentido y no constituya un simple ejercicio escolar controlado por el profesor. El papel de éste ha de ser el de favorecer una actividad lo más autónoma y significativa posible, sin descomponer la tarea innecesariamente a base de preguntas muy concretas que puedan ocultar el hilo conductor. Ésta es una tendencia natural en los profesores que durante los talleres suele ser discutida.

No deberíamos olvidar, además, que la tendencia actual, (asociada al EEES), es que avanzamos hacia una sociedad del aprendizaje; esto supone el desplazamiento de una educación centrada en la enseñanza hacia una educación que gravita en torno al aprendizaje. En este nuevo contexto, el papel del profesor pasa de ser el de la persona que estructuraba el proceso de aprendizaje, el protagonista principal en la enseñanza y articulación de conceptos clave, así como supervisor y director de los trabajos de los estudiantes cuyos conocimientos evaluaba, a ser, en la visión centrada en el estudiante, un acompañante en el proceso de aprender, que ayuda al que estudia a alcanzar ciertas competencias. Si bien el papel del profesor continúa siendo crítico, se desplaza cada vez más hacia el de un consejero, orientador y motivador.

Una vez que se ha definido un problema concreto a partir de una situación inicial más abierta y se sabe lo que se busca, nuestra propuesta metodológica incide en la importancia de la emisión de hipótesis que focalicen el problema y orienten su resolución. Hipótesis que pueden referirse tanto a cómo va a evolucionar un sistema como a la dependencia de la magnitud buscada con otras variables del sistema. Los profesores muestran, a veces, en esta cuestión su impresión de que para una actividad escolar de lápiz y papel, la emisión de hipótesis pueda resultar artificiosa. Es conveniente reflexionar, por tanto, acerca de cuál es el verdadero objetivo de este aspecto metodológico de la resolución en el sentido de que, si somos capaces de conseguir que los estudiantes no se limiten a decir de qué factores dependerá una determinada variable y hacemos que recapaciten sobre el cómo y el porqué de esa dependencia, pueden comprender de una manera más significativa los procesos físicos que se analizan, lo que contribuye en gran medida a su aprendizaje. Los profesores suelen reconocer el papel de las hipótesis previas para orientar las estrategias de resolución y para contrastar posteriormente la coherencia del resultado.

Los profesores implicados en la aplicación de esta metodología de resolución, tras varias puestas en escena en el aula, asumen de total acuerdo la insistencia por nuestra parte en que las estrategias se valoren como alternativas a discutir, y siempre de



forma razonada y justificada en base a las interacciones y al cuerpo teórico.

En cuanto al análisis de los resultados obtenidos, los profesores, a medida que asumen el sentido de la metodología, comprenden que no será un tratamiento superfluo siempre y cuando se incida en una lectura significativa del resultado más allá de la pura expresión matemática, para superar, en la medida de lo posible, la escasa práctica en el trabajo de interpretación física. Reflexiones con los profesores sobre lo que supone contrastar el resultado con las hipótesis emitidas y buscar argumentos que permitan aceptar o rechazar dicho resultado (que contraría la actitud característica del pensamiento ordinario de darse fácilmente por satisfecho sin mayores cuestionamientos) contribuyen a interpretar el objetivo de este análisis.

*3. Después de la discusión y puesta en práctica de la metodología, ¿cuáles son las opiniones más relevantes de los profesores?*

Los profesores suelen valorar muy positivamente los siguientes aspectos:

- La presentación de los enunciados más abiertos que obliga a realizar valoraciones cualitativas previas y que ataja el operativismo característico de las resoluciones habituales de los estudiantes.
- La inclusión de aspectos CTS que aumentan la motivación hacia la tarea y fomentan una actitud positiva hacia la Ciencia.
- La metodología de resolución interpretada como conjunto de procedimientos próximos a los característicos de la Ciencia y que ayuda a los estudiantes a superar deficiencias asociadas a los mismos. Se valora, sobre todo, la resolución en un sentido global de procedimientos concatenados, más que los distintos aspectos por separado, aunque se reconocen ventajas didácticas a la utilización de todas y cada una de las fases.

· El desarrollo de competencias y la evaluación continua se considera coherente con el modelo de resolución de problemas como investigación orientada.

En síntesis, los resultados parecen indicar que los profesores son capaces de asumir en su labor educativa la utilización de la metodología de resolución de problemas como investigación orientada, reconociendo en esta metáfora, su papel como guías y dinamizadores de las pequeñas investigaciones que los estudiantes realizan cuando abordan una nueva situación problemática.

Hasta ahora en este capítulo, nos hemos referido a la mejora del proceso de enseñanza de resolución de problemas. Sin embargo, será necesario analizar si, realmente, el aprendizaje logrado por los estudiantes con esta metodología alternativa ha sido mejor que el obtenido con el enfoque tradicional. A esta cuestión nos referiremos en el siguiente capítulo.

## 5. ¿QUÉ RESULTADOS OBTIENEN LOS ESTUDIANTES QUE APLICAN LAS ESTRATEGIAS ENSEÑADAS EN EL MODELO DE APRENDIZAJE COMO INVESTIGACIÓN ORIENTADA?

Pretendemos comprobar, ahora, si la práctica reiterada del modelo de resolución de problemas de Física como investigación orientada produce un verdadero cambio metodológico en la forma de resolución de los estudiantes acercándola a las características del trabajo científico, si aumenta su capacidad para resolver situaciones problemáticas y si mejora la actitud y el interés de los estudiantes hacia esta actividad.

Es decir, parece claro que los aspectos positivos del aprendizaje en resolución de problemas de Física como investigación orientada no pueden mostrarse únicamente a través de la mayor eficacia alcanzada a la hora de resolverlos. En efecto, el conocimiento declarativo, el conocimiento procedimental implicado en la resolución de problemas, así como los aspectos actitudinales, se encuentran fuertemente interrelacionados e influyen en los logros de aprendizaje.

Por ello, tal y como ya planteábamos para el análisis de la resolución de problemas por estudiantes de enseñanza habitual (ver capítulo 1), orientaremos el estudio en base a las formas de razonamiento que toda capacidad procedimental debe llevar asociada, desde una doble vertiente: por un lado focalizaremos nuestra atención en los criterios y justificaciones que los estudiantes hacen de la elección de las leyes y principios utilizados en la resolución, así como de las conjeturas predictivas o explicativas que realicen y, por otro, prestaremos atención a las *formas de razonamiento* espontáneo que los estudiantes presentan en la resolución de problemas de Física y que pueden dificultar el aprendizaje.

Se han realizado dos tipos de pruebas complementarias con alumnos experimentales, estudiándose en todas ellas, los aspectos conceptuales y metodológicos implicados bajo el marco que acabamos de relatar. Las pruebas del primer tipo han consistido en la resolución por escrito de una serie de problemas de Física,

y en las del segundo tipo se han grabado entrevistas con estudiantes en las que se les ha cuestionado sobre la resolución de problemas por ellos realizada.

Hemos subdividido los diseños basados en la resolución escrita de problemas de Física por estudiantes, en dos bloques orientados por enfoques diferentes:

### **Análisis secuencial de las estrategias operativas de una resolución**

Con objeto identificar las características conceptuales y procedimentales de las principales etapas de resolución y percibir una visión global del ‘mapa’ de resolución habitual de nuestros estudiantes, se ha procedido a analizar la resolución desde una **perspectiva secuencial** de las estrategias operativas seguidas por los estudiantes (Reyes, 1991).

Se han utilizado las mismas situaciones problemáticas, dos de mecánica y dos de electromagnetismo, que ya fueron presentadas para su resolución a los alumnos de enseñanza habitual. Lógicamente, nos centraremos en el mismo problema, denominado ‘cuenco’, al que ya hemos hecho referencia en el capítulo 1 (figuras 1.1 y 1.2, páginas 26-27) y que, en este caso también, ha sido incluido en un examen con objeto de garantizar tanto el carácter individual de los resultados como el interés de los estudiantes por su correcta realización.

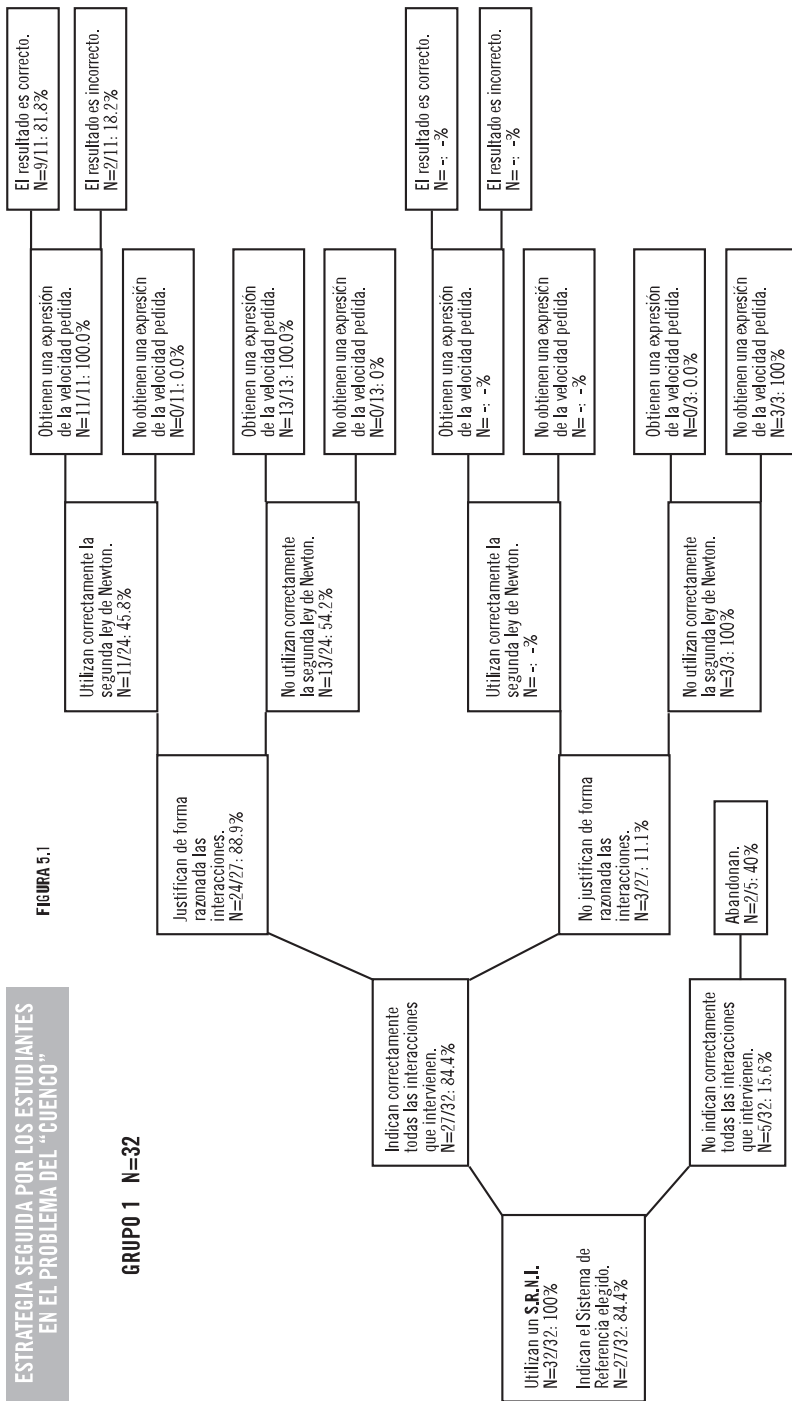
Las distintas estrategias se representan mediante mapas secuenciales obtenidos del análisis de las principales etapas de estas resoluciones, y se presentan en la figura 5.1. Se trata de representaciones comunes a grupos de resolventes por lo que no recogen las diferencias puramente idiosincrásicas, siendo así mayor la utilidad para realizar un diagnóstico de las dificultades de aprendizaje que si fueran esquemas individuales.

Los grupos experimentales son tres grupos de primer curso de la EUITI de Bilbao correspondientes a las titulaciones de Mecánica Industrial (Grupo 1) y Electrónica Industrial (Grupo 2 y Grupo 4) y un cuarto grupo de la EUITI de San Sebastián (Grupo 3), también de primer curso de la titulación de Electrónica Industrial.

**ESTRATEGIA SEGUIDA POR LOS ESTUDIANTES EN EL PROBLEMA DEL "CUENCO"**

**FIGURA 5.1**

**GRUPO 1 N=32**



A continuación, analizamos las diferencias tanto de tipo conceptual como metodológico, detectadas entre los grupos de control y los experimentales. Este análisis, sin embargo, no lo planteamos buscando la precisión numérica sino, más bien, tratando de destacar los grandes trazos que distinguen las resoluciones de los alumnos tratados y las de control. Aún así, el análisis de los esquemas secuenciales correspondientes a los grupos experimentales (Grupos 1, 2, 3 y 4) y su comparación con los de los grupos de control (Grupo C) muestra que la aplicación de los conceptos y principios fundamentales durante la resolución de los cuatro problemas planteados es mejor en el caso de los alumnos tratados. Pasamos a señalar, para el único problema aquí considerado, las diferencias más destacables:

***Se indican de forma incorrecta las interacciones entre las distintas partes del sistema.***

· En el problema del ‘cuenco’ una cuarta parte del Grupo C (26%) no indica correctamente, de acuerdo con el sistema de referencia elegido, todas las fuerzas que intervienen. En el caso del Grupo 1, en cambio, son un 16% de los estudiantes los que no indican bien las interacciones.

***Se aplican de forma incorrecta las leyes y principios fundamentales de la Física implicadas en la resolución del problema (Segunda ley de Newton).***

· De los 48 estudiantes del Grupo C que en la resolución del problema del ‘cuenco’ han indicado correctamente todas las interacciones que intervienen, 39 (81%) no aplican correctamente la segunda ley de Newton a las condiciones del problema. En el caso del Grupo 1, la deficiencia se reduce a 16 de 27 (59%).

Somos conscientes de que, debido a las características del diseño utilizado, algunos de los porcentajes aquí recogidos se han obtenido a partir de un número pequeño de estudiantes que han llegado a esa fase determinada del problema. Por tanto, nos limitamos a afirmar que hay una menor tendencia general a cometer errores de tipo conceptual cuando resuelven problemas, en todos y cada uno de los aspectos analizados, por parte de los

estudiantes tratados con la metodología propuesta en comparación con los estudiantes que reciben una enseñanza habitual.

Así mismo, el estudio de los esquemas de resolución muestra que los estudiantes de los grupos experimentales utilizan una variedad de procedimientos más acordes con la metodología científica. Veamos algún ejemplo:

### ***Planteamiento cualitativo de la situación problemática a resolver.***

· Ya hemos valorado previamente, cómo en el problema del ‘cuenco’ la elección del sistema de referencia hace percibir la situación de manera muy distinta y que, por lo tanto, justificar la elección del sistema de referencia elegido es un aspecto de gran importancia en la fase de análisis cualitativo previo a la resolución. Sin embargo, de forma explícita, el 48% de los estudiantes del grupo de control no señala su elección, mientras que para el grupo experimental de mecánicos el porcentaje se reduce hasta alcanzar el 16%. En este Grupo 1, además, todos los alumnos optan por un sistema de referencia inercial y trabajan únicamente con las interacciones reales sobre la partícula que previamente han identificado.

· Entre los estudiantes del grupo de control encontramos que el 97% no justificaba de forma razonada las interacciones que de una manera correcta indicaba para resolver la situación. Esta omisión cualitativa, en cambio, sólo ha tenido lugar para el 11% de los estudiantes experimentales.

### ***Elaboración de las Estrategias de resolución.***

· El 79% de los estudiantes de control que en el problema del ‘cuenco’ indican correctamente las interacciones, al aplicar la segunda ley de Newton, considera la aceleración normal dirigida hacia el centro del cuenco en vez de hacia el centro de la circunferencia descrita por la partícula. El alumno ha estudiado el modelo en el que la aceleración normal se dirige hacia ‘el centro’, pero cuando se encuentra con dos ‘centros’ muestra no haber comprendido dicho modelo. En el Grupo 1, sólo un estu-

diante de los 27 que señalan correctamente las interacciones (4%) comete este error con la aceleración normal.

- Si bien, el hecho clave para la resolución del problema de que la fuerza de rozamiento estática se pueda considerar igual al coeficiente de rozamiento por la normal porque se trata de su valor máximo (consecuencia de la velocidad pedida), no lo explica ningún estudiante de control, entre los alumnos del grupo experimental, el porcentaje de omisión de esta valoración de la aplicabilidad de la fórmula se reduce a un 25%.

- Además de que, como acabamos de mostrar, las deficiencias conceptuales y metodológicas se reducen para los alumnos tratados cuando se comparan con los que siguen una enseñanza habitual de resolución de problemas, así mismo, podemos concluir del análisis de los esquemas secuenciales de resolución que el porcentaje de alumnos que alcanza un resultado correcto mejora significativamente para el caso de los grupos experimentales.

En la tabla 5.1 presentamos los porcentajes de estudiantes, calculados sobre el total de los componentes de cada grupo, que en cada caso ha alcanzado un resultado estrictamente correcto. En la columna donde figura el Grupo M se representan los resultados de la media ponderada de los grupos experimentales.

El grado de significación para comparar si existen o no diferencias significativas en los datos porcentuales, se ha hecho mediante el cálculo de Distribución Normal (t) para el nivel de confianza habitual del 5% o menor, habiéndose obtenido, en todos los casos, diferencias estadísticamente significativas.

Problema		% Resultado correcto (N)		
		G.M: Media experimentales	G.Control	t
Cuenco (P.1)		28 (32)	12 (65)	1,95
Muelle-masas (P.2)		39 (33)	5 (60)	4,17
Corteza esférica (P.3)		51 (64)	11 (65)	4,92
Alambre-circuito (P.4)	SI	72 (108)	32 (60)	5,02
	SII	30 (108)	3 (60)	4,16

Tabla 5.1. Resultados comparativos de resultado correcto obtenidos por los grupos experimentales (Grupo M.) y de control (Grupo C.)



La diferencia queda patente en el gráfico 5.1 adjunto en el que en blanco se representa la media de los grupos experimentales y muy por debajo, en negro, el grupo de control.

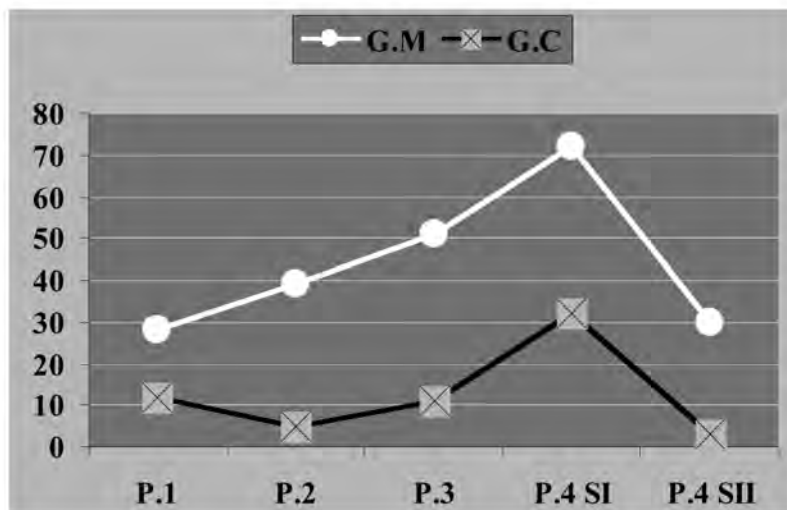


Gráfico 5.1. Resultados comparativos de resultado correcto obtenidos por los grupos experimentales (Grupo M.) y de control (Grupo C.)

Del análisis bajo esta perspectiva secuencial de la resolución de problemas por parte de los estudiantes hemos podido obtener, tal y como pretendíamos, una percepción global de las capacidades procedimentales que los estudiantes de control y experimentales ponen en práctica durante la resolución de problemas. Tras un primer cuatrimestre de tratamiento con la metodología propuesta (problemas ‘cuenco’, ‘muelle-masas’ y ‘corteza esférica’), aunque los resultados obtenidos, tanto a nivel conceptual como metodológico, mejoran respecto a los grupos de control, es de rigor reconocer que aún distan de ser unos muy buenos resultados. Cuando se comparan las deficiencias en resolución de problemas de los grupos de control y de los experimentales tras haber aplicado estos últimos la metodología de resolución como investigación orientada durante todo el curso (problema ‘alambre-circuito’), las diferencias detectadas son, en algunos aspectos, bastante más marcadas. Creemos que estamos en condiciones de afirmar que la metodología alternativa de resolución ayuda a mejorar y a superar en parte las deficiencias de tipo conceptual y metodológico que los estudiantes suelen presentar

en la resolución de problemas de Física a nivel universitario. Concluimos, así mismo, del análisis de los resultados de estos diseños, que la nueva metodología necesita de un cierto tiempo de asimilación durante el cual se pueda ir rompiendo con ciertos hábitos operativistas fuertemente implantados y sustituirlos por enfoques más reflexivos.

La eficacia de los resolventes parece estar determinada en parte por dificultades metodológicas además de por carencias de conocimientos propios de la disciplina o por la habilidad en el manejo del aparato matemático.

Con objeto de profundizar en las diferencias metodológicas entre los estudiantes que resuelven problemas según los parámetros de la enseñanza habitual y los tratados con la metodología de resolución de problemas como investigación orientada, presentamos en el siguiente punto, los resultados de los diseños correspondientes.

### **Análisis de los razonamientos y procedimientos empleados por los estudiantes experimentales en resolución de problemas de Física**

Para realizar el análisis específico del conocimiento procedimental que los estudiantes tratados poseen y activan en el proceso de resolución de problemas de Física, no hemos creído conveniente hacer uso de las mismas situaciones problemáticas presentadas a los estudiantes de control para su resolución. Con objeto de medir la utilización de los procedimientos por parte de los estudiantes experimentales, la presentación de enunciados abiertos creemos que debería ser suficiente para que en el intento de alcanzar una solución a los mismos, los alumnos, sin ningún tipo de explicitación o instrucción que así se lo indique de forma expresa, hagan uso de los procedimientos más característicos de la metodología científica. Los estudiantes que reciben la enseñanza habitual, por contra, no están familiarizados con esta manera de proceder, y es lógico que si no hay indicación expresa al respecto no utilicen tales procedimientos.

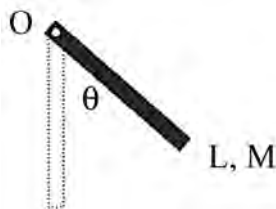
Lo que pretendemos ahora, por tanto, es contrastar si los estudiantes tratados con la metodología de resolución propuesta, cuando se enfrentan a un enunciado de carácter abierto, son capaces de centrar y acotar la situación por medio del análisis cualitativo de la misma, si orientan la resolución emitiendo hipótesis, si tratan la elección de estrategias como alternativas a valorar, y si una vez alcanzado el resultado analizan su coherencia.

Para ello, hemos pedido a nuestros estudiantes de mecánica que resuelvan en un control al final de la asignatura cuatrimestral de Fundamentos Físicos de la Ingeniería el problema que llamaremos ‘choque masa-varilla’ (cuadro 5.1), y a los estudiantes de electrónica que resuelvan, también en situación de control, dos problemas abiertos. El primero, al que llamaremos ‘hilos paralelos’, lo abordaron al final de la asignatura del primer cuatrimestre, y el segundo, al finalizar la asignatura de Ampliación de Física en el segundo cuatrimestre, y, en consecuencia, con un tratamiento más prolongado en la utilización de la nueva metodología. Nos referiremos a este problema como problema ‘espira en movimiento’. Aunque hagamos alguna referencia a resultados obtenidos del análisis de las resoluciones de todos estos problemas, centraremos nuestros ejemplos en el problema ‘choque masa-varilla’ (cuadro 5.1).

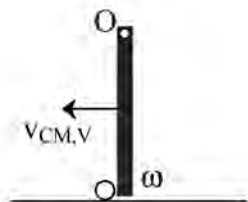
**PROBLEMA CHOQUE MASA-VARILLA.** *Disponemos de una varilla que puede girar libremente en un plano vertical en torno a un eje fijo que pasa por uno de sus extremos. Se desplaza de su posición de equilibrio y se libera. Si cuando pasa por la vertical el extremo libre de la varilla choca contra una pequeña bola de plastilina que se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal, quedando ambos unidos, determinar la velocidad de salida del choque.*

*¿Cómo podemos acotar y modelizar la situación planteada en el enunciado?*

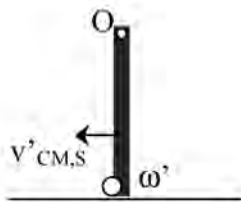
*· Consideraremos que la varilla es homogénea de masa  $M$  y longitud  $L$  y que la desplazamos un ángulo  $\theta$  respecto de la vertical hasta que su centro de masa alcance una altura  $h_{CM}$ . Al liberarla describirá un movimiento circular en torno al eje  $O$ .*



· Cuando alcanza la posición vertical con una determinada velocidad angular  $\omega$  (su centro de masa tiene una velocidad tangencial  $v_{CM}$ ) choca con su extremo inferior contra una masa puntual  $m$  en reposo sobre la horizontal. El choque es plástico y pretendemos obtener la velocidad angular  $\omega'$  del sistema tras la colisión.



Antes del choque



Después del choque

¿Qué previsiones podemos realizar respecto a la velocidad tras el choque?

· El choque es plástico y, en consecuencia, en él parte de la energía cinética que la varilla llevaba asociada a su rotación se utilizará para deformar la plastilina, por lo que la energía cinética disponible para la rotación posterior es menor que la de entrada al choque. Además, tras el choque el sistema aumenta su masa por lo que se incrementa la inercia y esto hará que la velocidad de salida sea menor que la de entrada:  $\omega' < \omega$ .

· En cuanto a la dependencia de variables, cabe pensar que  $\omega' = \omega' (h_{CM}, g, L, m, M)$ .

· Si aumentamos la altura inicial a la que se encuentra el centro de masa de la varilla, su energía potencial inicial es mayor, por lo que también será mayor la energía cinética de entrada al choque y la de salida del mismo y, por ello, su velocidad será mayor. Así mismo, se puede razonar que al aumentar la altura, aumenta el espacio a través del cual actúa el peso causando una mayor aceleración.

· Los mismos razonamientos explicarían el previsible incremento de la velocidad con la aceleración de la gravedad.

· Si el cuerpo posee un mayor momento de inercia, opone más resistencia a la rotación. El momento de inercia antes del choque depende de  $M$  y  $L$ , y el momento de inercia tras el choque es función de  $M$ ,  $m$  y  $L$ . Para  $m$  podemos prever que cuanto mayor sea, menor será la velocidad del sistema tras el choque pues con su aumento se incrementa la inercia y, para un mismo impulso, menor velocidad de rotación. Para  $M$  y  $L$  la influencia se produce en un doble sentido, por un lado, el incremento de estas

variables da lugar al aumento de la inercia y por otro al aumento del impulso que la varilla ejerce sobre la bola en el choque. El resultado de estas dos acciones contrapuestas se habrá de valorar en el análisis de resultados. Sin embargo, en el caso de  $L$ , su aumento supone un incremento de la inercia a la rotación durante el descenso sin que su energía inicial se modifique. Esto hará que disminuya la velocidad de entrada al choque y, por tanto, la velocidad de salida del mismo.

¿Cómo podemos obtener la expresión matemática que nos ligue la velocidad con estas variables?

· Para el descenso de la varilla, el peso y el momento que esta fuerza produce respecto del eje fijo son variables con la posición por lo que no podemos analizar esta rotación bajo la perspectiva del movimiento circular y uniformemente acelerado. Sin embargo, las fuerzas de reacción aplicadas en  $O$  no realizan trabajo puesto que su punto de aplicación no se desplaza y, como el peso es conservativo, la energía mecánica del sistema se conservará.

$$Mgh_{CM} = \frac{1}{2} I_{o,v} \omega^2 \text{ de donde: } \omega = \sqrt{\frac{2Mgh_{CM}}{I_{o,v}}}, \text{ con } I_{o,v} = \frac{1}{3} ML^2$$

· Durante el choque el sistema no puede considerarse aislado puesto que en el eje fijo de rotación aparecen reacciones que impiden la traslación y que no son despreciables frente a las fuerzas internas. El momento lineal no será constante. Estas fuerzas de reacción externas, como se aplican en el mismo eje, no dan lugar a momento alguno por lo que el momento angular del sistema sí se conservará.

$$I_{o,v} \omega = I_{o,s} \omega', \text{ de donde, } \omega' = \frac{I_{o,v}}{I_{o,s}} \omega, \text{ con } I_{o,s} = \frac{1}{3} ML^2 + mL^2. \text{ Se aprecia que } \omega' < \omega.$$

· Así, para la velocidad angular tras la colisión se obtiene:  $\omega' = \frac{M}{(M + 3m)} L \sqrt{6gh_{CM}}$

¿Es coherente el resultado con las hipótesis emitidas?

· En lo referente a la dependencia de la velocidad de traslación con la altura, la aceleración de la gravedad y la masa  $m$ , las hipótesis se confirman.

· En lo que respecta a la longitud  $L$ , se aprecia que el efecto sobre la inercia supera a su influencia sobre el impulso por lo que, al aumentar la longitud, disminuye la velocidad tras la colisión.

· Para apreciar el efecto de la masa  $M$ , podemos escribir  $\frac{M}{M + 3m} = \frac{1}{1 + \frac{3m}{M}}$ ,

donde se observa que al aumentar  $M$  el denominador se hace menor y la velocidad angular se incrementa. Sin embargo, este incremento no puede lograrse de manera ilimitada al aumentar  $M$ . Así, si la masa fuera 'infinita', la velocidad tras el choque no aumentaría indefinidamente. Esta limitación se debe a que, como ya hemos adelantado, también se incrementa la inercia al aumentar la masa de la varilla.

¿Son coherentes las unidades en el resultado obtenido?

$(\frac{1}{m})(\frac{m}{s^2}m)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{s}$ , y, teniendo en cuenta el carácter adimensional del ángulo plano, el resultado es dimensionalmente homogéneo.

Cuadro 5.1. Problema de enunciado abierto propuesto a los estudiantes de la clase experimental.

De manera análoga a como hemos procedido con el análisis del proceso de resolución de las situaciones problemáticas propuestas a los estudiantes de control, aquí también, se ha realizado una taxonomía por niveles de 0 a 4 de tal manera que se recogen de forma acumulativa los principales procedimientos implicados en la resolución de los problemas abiertos planteados. Para la identificación de las diferentes categorías se comparan los pasos que siguen los estudiantes con aquellos que se consideran aceptables desde la perspectiva disciplinar o del experto.

Para el problema que estamos considerando como ejemplo, esta categorización se recoge en el estadillo de corrección (documento 5.1) y sus criterios de aplicación (documento 5.2) que toman como referencia la correcta resolución del problema planteado (cuadro 5.1) tratando de recoger los principales aspectos procedimentales implicados y que han sido previamente consensuados por tres expertos.

Recordamos, así mismo, que los grupos experimentales son tres grupos de primer curso de la EUITI de Bilbao correspondientes a las titulaciones de Mecánica Industrial (Grupo 1) y Electrónica Industrial (Grupos 2 y 4), y un grupo de la EUITI de

San Sebastián (Grupo 3) también de primer curso de la titulación de Electrónica Industrial. El Grupo 1 de mecánicos ha sido tratado durante el primer cuatrimestre y los grupos de electrónicos durante el primer y segundo cuatrimestre.

<b>Nivel</b>	<b>Categoría de respuesta</b>
0	<i>No realiza un análisis cualitativo inicial adecuado que le permita centrar la situación problemática para poder abordarla bajo los procedimientos de la metodología científica.</i>
1	<b>Realización de análisis cualitativo.</b> <i>Clarifica el objetivo, lo que se busca, realiza descripciones verbales o gráficas de la situación y analiza el sistema físico en estudio: acota la situación para modelizarla y simplificarla si es preciso; reconoce un marco teórico de referencia; identifica variables o, en su caso, busca datos; identifica partes del problema y plantea interrogantes.</i>
2	<b>Emisión de hipótesis.</b> <i>Además de lo señalado en el nivel anterior, predice la posible evolución del sistema y establece relaciones de dependencia entre variables.</i>
3	<b>Elaboración de estrategias.</b> <i>Además de lo señalado en el nivel anterior, presenta una descripción secuencial de actuaciones para alcanzar la solución, subdivide el problema en etapas, identifica y justifica las leyes y principios fundamentales a utilizar en la resolución y valora posibles vías alternativas.</i>
4	<b>Análisis de resultados.</b> <i>Además de lo señalado en el nivel anterior, analiza la coherencia teórica de la respuesta, la plausibilidad del valor de la respuesta, la coherencia dimensional de la respuesta, la dependencia de la respuesta con los parámetros del problema en el sentido que cabría esperar (según las hipótesis) y analiza si se ajusta la respuesta a lo que se podría esperar en situaciones sencillas y especiales, por ejemplo, las correspondientes a valores extremos de las variables.</i>

Documento 5.1. Protocolo de corrección de las contestaciones de los estudiantes cuando tienen que resolver una situación problemática de enunciado abierto.

**Nivel 0.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando no cumple con ninguno de los requisitos característicos de los niveles 1 a 4 que detallamos a continuación.

**Nivel 1.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando indica, bien verbalizando o bien mediante un esquema gráfico, que la varilla es homogénea de masa  $M$  y longitud  $L$  y que la desplazamos un ángulo  $\theta$  respecto de la vertical hasta que su centro de masa alcance una altura  $h_{CM}$ , que al libe-

rarla describe un movimiento circular en torno al eje  $O$  y que cuando alcanza la posición vertical con una determinada velocidad angular  $\omega$  choca con su extremo inferior contra una masa puntual  $m$  en reposo sobre la horizontal. Reconoce, además, que el choque es plástico y que pretendemos obtener la velocidad angular  $\omega'$  del sistema tras la colisión.

**Nivel 2.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando, además de lo reseñado para el nivel 1, indica que la velocidad pedida se relacionará con al menos tres de las siguientes variables  $\omega' = \omega'$  ( $\theta$  o  $h_{CM}$ ,  $g$ ,  $L$ ,  $m$ ,  $M$ ), justificando estas dependencias en base a razonamientos físicos coherentes, tanto cinemático-dinámicos como energéticos.

**Nivel 3.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando, además de lo reseñado en el nivel 2, indica que, para **el descenso de la varilla** las fuerzas de reacción aplicadas en  $O$  no realizan trabajo puesto que su punto de aplicación no se desplaza, y el peso es conservativo por lo que la energía mecánica del sistema se conservará y que, **durante el choque**, el sistema no puede considerarse aislado puesto que en el eje fijo de rotación aparecen reacciones que impiden la traslación y que no son despreciables frente a las fuerzas internas pero que, como se aplican en el mismo eje, no dan lugar a momento alguno por lo que el momento angular del sistema sí se conservará.

**Nivel 4.** Se considerará que la respuesta de un estudiante está incluida en este nivel cuando, además de lo reseñado en el nivel 3, contrasta las hipótesis emitidas con el resultado matemático obtenido, valorando al menos el efecto final de una de las variables masa  $M$  o longitud  $L$  de la varilla, cuyo efecto sobre la inercia y sobre el impulso, en las hipótesis se habían detectado como contrapuestos.

*Documento 5.2. Criterios para la aplicación del protocolo de corrección de las contestaciones de los estudiantes cuando tienen que resolver el problema de choque masa-varilla de enunciado abierto.*

En la tabla 5.2 se presentan los resultados obtenidos en la categorización de las resoluciones que los estudiantes han realizado de las tres situaciones problemáticas citadas.



nivel	categoría de respuesta	número de respuestas						
		choque masa-varilla	hilos paralelos			espira en movimiento		
			GRP 1 N=30	GRP 2 N=40	GRP 3 N=34	GRP 2 N=35	GRP 3 N=32	GRP 4 N=30
0	Ausencia de análisis cualitativo	4	5	7	2	3	2	
1	Realización de análisis cualitativo	7	9	9	5	4	9	
2	Emisión de hipótesis	9	8	2	11	9	10	
3	Elaboración de estrategias	4	9	6	8	12	5	
4	Análisis de resultados	6	9	10	9	4	4	

Tabla 5.2. Resultados de la aplicación del protocolo de corrección de las contestaciones de los estudiantes experimentales cuando resuelven situaciones problemáticas de enunciado abierto.

Conviene recordar, sin embargo, que, como los niveles de categorización del uso de los procedimientos durante la resolución se han organizado de manera acumulativa, se apantallan dos tipos de datos: por un lado, se dan casos de estudiantes que puedan cumplir con los requisitos de niveles superiores sin superar los niveles inferiores y, por ejemplo, pueden haber valorado correctamente y de manera justificada las estrategias de resolución, pero como no han emitido previamente hipótesis correctamente, figuran en el nivel inferior. En vista de que buscamos una orientación metodológica global de resolución, no creemos interesante centrarnos en valorar estos casos de acierto inconexo y desmarcados de un planteamiento general. No consideramos un avance, por ejemplo, que un estudiante analice un resultado sin haber emitido previamente hipótesis razonadas. Por otro lado, cuando incluimos a un estudiante en un nivel superior, aquél ha tenido que cumplir satisfactoriamente con los requisitos de los niveles previos. Así, un estudiante del nivel 4 cumple con los requerimientos estratégicos del nivel 3, con la emisión de hipótesis de nivel 2 y con el análisis cualitativo del nivel 1. Por lo tanto, el número de estudiantes que para cada situación problemática rea-

liza un correcto análisis cualitativo, lo obtendremos sumando los estudiantes incluidos en los niveles 1, 2, 3 y 4; los que han emitido hipótesis coherentes con nuestros criterios serán los que se obtienen con la suma de los niveles 2, 3 y 4, etc. Estos datos, sí los consideramos de mayor interés puesto que se corresponden con la utilización de los procedimientos interrelacionados de una forma lógica y coherente con la estrategia global de resolución como investigación orientada. En la tabla 5.3 para los tres problemas y en el gráfico para el ejemplo de mecánica se recogen y se representan estos datos.

aspectos procedimentales	número de respuestas					
	choque masa-varilla	hilos paralelos			espira en movimiento	
	GRP 1 N=30	GRP 2 N=40	GRP 3 N=34	GRP 2 N=35	GRP 3 N=32	GRP 4 N=30
Realizan análisis cualitativo	26	35	27	33	29	28
Emiten hipótesis	19	26	18	28	25	19
Elaboran estrategias	10	18	16	17	16	9
Analizan resultados	6	9	10	9	4	4

Tabla 5.3. Utilización de procedimientos con un sentido global por los estudiantes experimentales cuando resuelven situaciones problemáticas de enunciado abierto.

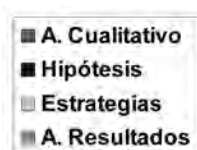
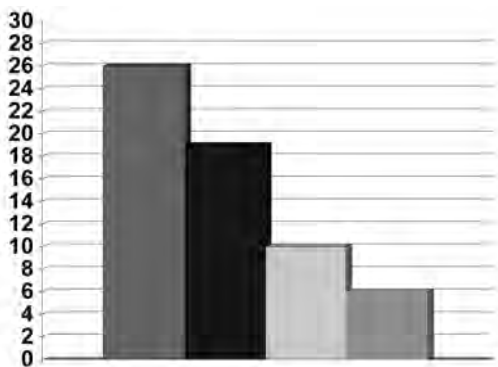


Gráfico 5.2. Utilización de procedimientos con un sentido global por los estudiantes experimentales cuando resuelven el problema choque masa-varilla de enunciado abierto.



Debemos destacar, primeramente, que tras un primer cuatrimestre de puesta en práctica de la propuesta alternativa, persisten ciertos hábitos de resolución mecanicistas en algunos estudiantes de los grupos experimentales: 4 de 30 en el Grupo 1 que resuelve el problema de mecánica y 5 de 40 en el Grupo 2 y 7 de 34 en el Grupo 3 cuando abordan el problema de los hilos paralelos. Si el tratamiento se prolonga durante todo el curso, sin embargo, como es el caso de los estudiantes de los Grupos 2, 3 y 4 cuando resuelven el problema de inducción magnética (espira en movimiento), se aprecia una reducción de las resoluciones categorizadas en este nivel procedimental más bajo: 2 de 35 en el Grupo 2, 3 de 35 en el Grupo 3 y 2 de 30 en el Grupo 4. Algunos de estos últimos estudiantes, además, se han incluido en el nivel 0 no por no haber realizado un análisis cualitativo de la situación, sino por haberlo hecho de manera incorrecta.

Otros estudiantes, alcanzan a realizar un análisis cualitativo de la situación pero sin completar una emisión de hipótesis lo suficiente. Así, por ejemplo, de entre los 7 estudiantes de 30 que en el Grupo 1 han sido clasificados en este nivel 1 encontramos planteamientos como éste:

*Ejemplo 1: Se puede ver que nos encontramos ante un choque plástico pues la bola de plastilina gira junto con la barra. Antes de ese choque se da un movimiento circular acelerado de la barra, ya que el peso le acelera. Suponemos que liberamos la barra desde un ángulo  $\theta$  o una altura  $h$ .*

Este estudiante realiza un esquema gráfico correcto interpretativo de la situación, donde, además, indica las variables masa de la bola, masa de la varilla, longitud de la varilla y ángulo de desplazamiento inicial de la varilla respecto de la vertical. Sin embargo, la emisión de hipótesis de variables que realiza no cumple con los requisitos impuestos para alcanzar el nivel 2:

*...el resultado estará en función del ángulo  $\theta$ , cuanto más alta se encuentre la barra, llegará con más velocidad a chocar con la bola. Además, tanto la masa de la bola como de la barra influirán en el resultado, pues cambian el momento de inercia.*

En un siguiente nivel de categoría de respuesta (nivel 2), hemos incluido a aquellos estudiantes que habiendo completado un análisis cualitativo de la situación, además, han sabido emitir hipótesis razonadas sobre la solución del problema. El número de estudiantes clasificados en este nivel 2 ha sido de 9 de 30, 8 de 40 y 2 de 34 en los grupos experimentales 1, 2 y 3 respectivamente, tras un primer cuatrimestre de tratamiento. Ejemplo de hipótesis satisfactorias emitidas durante la resolución de este problema de mecánica, por estudiantes tras haber recibido tratamiento en el primer cuatrimestre sería:

*Ejemplo 2: Yo creo que el resultado aparecerá en función de las siguientes magnitudes: La masa de la bola de plastilina, pues cuanto mayor sea ésta, después del choque la velocidad será menor; la masa de la varilla, pues cuanto mayor sea, más impulso llevará en el choque; el ángulo o la altura inicial, que cuanto más desplazemos más velocidad cogerá al ir a chocar; la longitud de la varilla, que afecta a su momento de inercia.*

Una vez analizada la situación problemática abierta desde el punto de vista cualitativo y tras emitir hipótesis razonadas, 4 estudiantes de 30 en el Grupo 1, 9 de 40 en el 2 y 6 de 34 en el grupo experimental 3, han elaborado sus estrategias de resolución de forma justificada y considerando alternativas (nivel 3). Estos estudiantes han escrito valoraciones tales como:

*Ejemplo 3: Por otro lado, la rotación de la varilla en principio, hay que suponer que se puede resolver de distintas maneras. La primera, usando el momento de las fuerzas (que no es constante) obtener el valor de la aceleración angular. Si éste es constante, es decir, si queda en función de magnitudes constantes, es fácil obtener la velocidad por cinemática. Otra posibilidad, es aplicar la conservación de la energía, pues la única fuerza que realiza trabajo, el peso, es conservativa (las reacciones en el eje no se desplazan).*

*La segunda parte del problema, lo haré usando la conservación del momento angular, porque el momento lineal no es constante porque la barra está sujeta por arriba, y tiene reacciones fuertes en el choque.*

El más alto nivel de utilización procedimental del proceso de resolución (nivel 4) supone que se cumplimentan satisfactoriamente las fases de análisis cualitativo, la emisión de hipótesis, la elaboración de estrategias y, finalmente, una vez alcanzado el resultado, se analiza su coherencia. En la tabla 5.2 (página 184), se representa esquemáticamente la articulación de los diferentes procedimientos que estas resoluciones de elevado nivel metodológico realizan, siguiendo una estrategia global más acorde con el proceder de los científicos según nuestra metáfora de resolución de problemas como investigación orientada y que conlleva reflexión, análisis y creatividad por lo que en nada se asemeja a un algoritmo de resolución.

Pues bien, tras un primer cuatrimestre de trabajo en el aula en base a esta metodología de resolución de problemas, aproximadamente la quinta parte de los estudiantes de los grupos experimentales 1, 2 y 3 ( 6 de 30, 9 de 40 y 10 de 34) han presentado sus resoluciones ajustadas a estos parámetros procedimentales.

Ejemplo de la fase final de análisis de resultados bien realizada sería:

*Ejemplo 4: Si nos fijamos en el resultado, se puede ver que aparecen las dos masas, la longitud de la barra y el ángulo. También aparece la aceleración de la gravedad que no he tenido en cuenta antes (en las hipótesis), pero me parece normal porque es constante. Se puede ver que si aumentamos la masa de la bola, más le cuesta moverse después del choque. Si aumentamos el ángulo, se ve que la velocidad es mayor como habíamos dicho antes (en las hipótesis). Se puede ver que la masa y la longitud de la varilla, aparece en el numerador y en el denominador. Creo que es porque influyen de dos maneras, por la inercia y por la fuerza que dan en el choque.*

Podemos inferir de lo anterior, que tras un primer cuatrimestre de tratamiento de los estudiantes experimentales que ingresan en nuestras escuelas en primer curso de Ingeniería Técnica Industrial, sin ninguna formación previa en resolución de problemas de Física bajo nuestro enfoque metodológico, la gran

mayoría se habitúa a realizar una reflexión cualitativa inicial que le permita interpretar la situación y ubicarla en un marco teórico apropiado, alejándose de resoluciones puramente operativistas. Más de la mitad de los estudiantes, además, ha emitido hipótesis razonadas sobre lo que esperan encontrar tras la resolución. Entre la tercera parte y algo menos de la mitad de los alumnos, según los problemas, tras lo anterior, han elaborado las estrategias de resolución apoyándose en razonamientos y justificaciones coherentes con el cuerpo de conocimientos, considerando, en ocasiones, diferentes alternativas de resolución. Y, como ya hemos señalado con anterioridad, la quinta parte o más de los estudiantes analizan el resultado obtenido completando una estrategia global muy rica desde la perspectiva procedimental.

Cuando la metodología de resolución se desarrolla a lo largo de todo el curso, en general, se consigue una ligera progresión hacia niveles procedimentales más elevados. Prácticamente la totalidad de los estudiantes realizan al menos un planteamiento cualitativo de la situación previo a la fase operativa de la resolución. Más de las tres cuartas partes de los estudiantes de los Grupos 2 y 3 emiten hipótesis de variables y razonan la posible evolución del sistema, aunque algo menos (6 de cada 10) en el Grupo 4. Aproximadamente la mitad de los estudiantes que componen los Grupos 2 y 3 elaboran, además, razonadamente las estrategias a seguir y resuelven de manera literal hasta alcanzar el resultado, siendo, de nuevo, menor esta proporción en el Grupo 4 (9 de 30) y, cerca de la cuarta parte del Grupo 2 analiza el resultado obtenido con objeto de validarlo, mientras que solamente son unos pocos (4) los estudiantes que en los Grupos 3 y 4 han culminado su resolución con un correcto análisis del resultado.

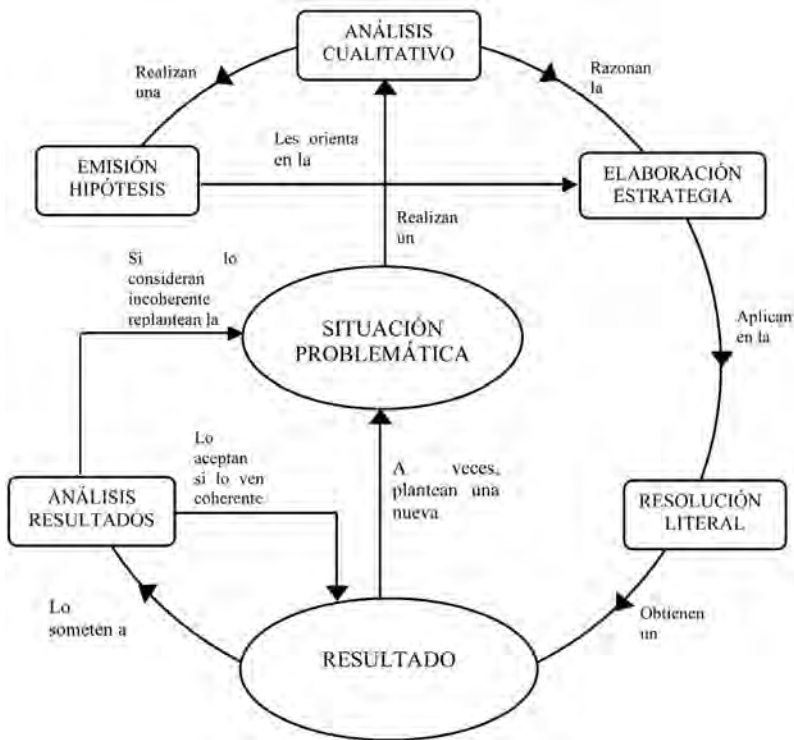


Figura 5.2. Estrategia metodológica global seguida por alumnos experimentales en la resolución de problemas de enunciado abierto.

Para completar esta aproximación cualitativa a la utilización que los estudiantes hacen de los procedimientos científicos en resolución de problemas, pasamos a describir los resultados del análisis de las entrevistas grabadas a los estudiantes mientras éstos describen, razonan y defienden de viva voz sus resoluciones. Las situaciones problemáticas utilizadas para las grabaciones han sido las mismas que se han utilizado en los controles escritos cuyos resultados acabamos de presentar y analizar. Pero, mientras la resolución escrita, cada estudiante la había abordado individualmente, las entrevistas se han realizado estando presentes los dos o tres miembros que han formado durante el curso el grupo de trabajo entrevistado. Con ello, hemos pretendido, por un lado, analizar nuevamente los procedimientos utilizados por esos estudiantes pudiendo aclarar así algunos matices y, por otro, nos ha permitido comprobar la dinámica interna que

ese grupo de trabajo mantiene para afrontar la resolución de un problema de enunciado abierto, apreciar como confrontan opiniones y argumentos y valorar la coherencia científica de los mismos.

Reproducimos, a continuación, extractos de las transcripciones de una de las ocho **entrevistas grabadas** junto con algunos comentarios aclarativos. Han intervenido cuatro subgrupos de trabajo pertenecientes al Grupo 1 de mecánicos y, por tanto, tratados únicamente durante el primer cuatrimestre, y otros cuatro subgrupos del Grupo 2 de electrónicos, estos últimos habiendo practicado nuestra propuesta metodológica de resolución durante todo el curso. En total han tomado parte en las entrevistas 21 estudiantes, los cuales han dado su consentimiento de forma voluntaria y han sido seleccionados de manera que sus resoluciones individuales escritas de los problemas utilizados, hayan sido ubicadas, fundamentalmente, en niveles procedimentales medios. Sin embargo, como la entrevista se realiza al subgrupo de trabajo en conjunto, lógicamente, también intervienen estudiantes de niveles procedimentales más bajos o más altos.

Continuaremos utilizando como ejemplo, una de las entrevistas relativas a la resolución del problema de mecánica ‘choque masa-varilla’ (cuadro 5.1, página 178).

**EJEMPLO Entrevista:**  
**Problema “CHOQUE MASA-VARILLA” (DOCUMENTO 5.1)**  
**Subgrupo 1.2. (Sugar, Iñigo y Joseba)**

**Sugar (S):** *Bueno, yo lo primero que he hecho tras leer el enunciado ha sido tratar de centrar el problema, que es bastante cerrado pues deja claro qué es lo que pasa y eso lo represento en la figura donde se ve que la barra se desplaza hacia arriba y luego se suelta y, como está sujeta por un extremo, rota y cuando pasa por la parte de abajo choca contra una bola de plastilina que está quieta y luego salen juntas. Por eso, he dividido el problema en dos fases: primero el movimiento circular de la barra y luego el choque.*

**Entrevistador (E):** *Vosotros, Iñigo y Joseba, ¿podéis completar lo que está planteando Sugar, o tenéis alguna pega?*



**Iñigo (I):** No, lo mismo. Primero cómo rota la varilla y luego el choque con la bola. También he hecho un croquis de lo que dice el enunciado.

**Joseba (J):** Bueno, yo en el esquema, como la barra al principio se encuentra desplazada a una altura, yo he representado el ángulo con la vertical y luego otras variables, la masa de la barra, su longitud, la masa de la bola...

**I:** Sí, yo también, aunque luego, además, valoro cómo creo que van a influir en la velocidad que nos piden, o sea, la de salida después del choque. Y la bola la he considerado como puntual, no como una esfera.

**J:** No, no, yo sí que he considerado el radio de la esfera para cuando calculo el momento de inercia.

**S:** Sí pero como luego se deforma con el choque, ¿que haces con ella?

**J:** Sí bueno, es verdad, no sé...

Las primeras reflexiones cualitativas sobre la situación problemática planteada, llevan a los tres estudiantes a enfoques muy similares. Se establece una discrepancia entre Joseba y Sugar sobre la viabilidad de tratar la bola de plastilina con forma esférica permanente. La diferencia de criterio no se aclaró más durante la entrevista, que continuó con la siguiente pregunta del entrevistador,

**E:** Veo que después os habéis metido con la influencia de las variables en la velocidad que nos piden. ¿Qué habéis previsto?

**I:** Pues, como piden la velocidad después del choque, he ido pensando qué variables y cómo van a influir. Igual que Joseba, he considerado la altura de la barra, su centro de masa, sobre la mesa y cuanto más alto, la velocidad final será mayor, sería lo mismo considerar el ángulo porque se relacionan, después lo hago por trigonometría...

**J:** ...la masa de la bola hace que cuanto mayor sea menor será la velocidad final porque le cuesta más salir, o sea tiene más momento de inercia.

**S:** Con la masa de la bola sí pasa eso pero la masa de la varilla puede tener un doble efecto, sí que le cuesta más salir del choque si la masa es mayor pero, además, cuando entra al choque tiene más efecto cuanto mayor sea la masa. Yo pienso que tiene esos dos efectos y, al final, no sé bien qué pasará. Para la longitud algo parecido.

**E:** Joseba, Iñigo ¿cómo lo veis? ¿Estáis de acuerdo con él?

**I:** Hombre, pues, ahora que le oigo, sí, yo creo que puede tener razón.

*Yo sólo he pensado en el momento de inercia, pero claro, cuando entra al choque... sí, diría que sí.*

*Yo lo que sí he valorado es que como el choque es plástico, se va a perder energía cinética y velocidad.*

La emisión de hipótesis más completa la ha realizado Sugar que ha considerado tanto el efecto inercial como el impulsor, a la hora de valorar la masa y la longitud de la varilla. Iñigo ha parecido reconocer el acierto de esta valoración, aunque él no la haya tenido en cuenta, mientras que Joseba, con su silencio, no ha mostrado opinión alguna. La predicción que Iñigo hace de la disminución de velocidad como consecuencia de la pérdida de energía cinética en el choque, es indicativa de su buena comprensión de la situación a estudiar. A continuación, el entrevistador dirige la conversación hacia las estrategias de resolución,

**E:** *Estoy seguro de que, llegados a este punto, los tres habéis comenzado a plantear cómo resolver las distintas fases para alcanzar una solución. Pues bien, el que quiera que empiece.*

**I:** *La resolución de esta primera parte la he planteado por energías, cuando la barra está desplazada tiene una energía potencial que se irá transformando en cinética a medida que rota. Cuando llega a chocar con la bola, ya no tiene energía potencial y la cinética es máxima. Así, igualando las energías, he obtenido la velocidad angular con la que la varilla choca con la bola sobre la mesa.*

**E:** *¿Los demás, estáis de acuerdo? ¿Lo habéis planteado igual o de otra manera?*

**J:** *Sí, yo también lo he hecho por energías.*

**S:** *Sí, yo primero he visto que la barra rota por el peso y que este efecto cambia con la posición, o sea que no es constante, el peso sí pero su momento no y, entonces, no se puede resolver por cinemática...*

**E:** *Bueno, poder, poder...*

**S:** *Sí, bien sí se podrá pero yo no sé cómo hacerlo porque la aceleración angular no es constante. Por eso he preferido resolverlo por energías y esto sí se puede porque el peso es conservativo. De aquí he obtenido la velocidad con la que la barra rota al chocar con la bola.*

**E:** *De acuerdo, contadme, entonces, cómo habéis resuelto esta fase del choque.*

**I:** *El choque es plástico porque las dos partes salen juntas del choque. He considerado entonces que como hay un punto fijo... eh... a ver...*

**J:** *Sí, que como la normal se compensa con el peso el sistema está aislado y por eso el momento angular se conservará y, de ahí, calculamos la velocidad final.*

**S:** *No estoy de acuerdo, yo he examinado cuáles son las fuerzas externas, los pesos, la normal de la mesa sobre la bola y la del eje sobre la barra, pero en el choque el eje no deja trasladarse a la barra y no está aislado, hay reacciones fuertes y por eso no se puede decir que el momento lineal se conserva, sólo el angular.*

**I:** *Eso es, sí, que hay reacciones fuertes en el eje... claro, claro.*

A nivel de valoración de estrategias de resolución, se aprecia con claridad que Sugar tiene sus ideas más claras y que encuentra con agilidad referencias teóricas que le permitan distinguir entre las distintas alternativas de resolución. Iñigo y Joseba, aun cuando aciertan con la elección de la estrategia, tienen más dudas cuando se trata de justificar ésta. En el pequeño debate surgido, la argumentación empleada por Sugar convence a sus compañeros sin oposición.

**E:** *De la aplicación de estos principios, supongo, que habréis encontrado la velocidad que pide el enunciado. ¿Habéis tenido alguna complicación? ¿Cómo habéis actuado una vez alcanzado el resultado?*

**S:** *He contrastado las hipótesis, y se ve que matemáticamente lo previsto se cumple para el ángulo, para la masa de la bola..., la masa de la barra aparece en el denominador y en el numerador porque tiene dos efectos, pero se ve que al final si aumenta la masa aumenta la velocidad final, luego este efecto es mayor..., la longitud de la barra, que yo creía que tenía un doble efecto, sólo tiene uno porque sólo aparece en el denominador.*

**I:** *Yo creo que cuando aumenta la longitud, la velocidad final es menor. Eso sale en la ecuación.*

**S:** *Eso quiero decir, sí, que sólo influye de una manera y yo pensaba que de dos formas distintas.*

**E:** *¿Veis entonces una contradicción entre la hipótesis de Sugar y el resultado matemático? Es decir, ¿el que sólo figure esta variable en el denominador quiere decir que sólo tiene un efecto o podría ser que un efecto supere al otro?*

**S:** *Bueno..., no sé.*

**I:** *Matemáticamente aparece en varios sitios y luego se simplifica. Si que puede ser ¿no?*

**S:** *Algunas veces ya hemos visto que pasa eso, pero con  $L$  no lo acabo de ver claro.*

**E:** *De acuerdo, muy bien, aparte de contrastar las hipótesis de variables ¿qué más habéis hecho para analizar el resultado?*

**I:** *Yo he comprobado las dimensiones de la ecuación y algo he debido de hacer mal porque no me salen igual a los dos lados. He repasado por encima y no he visto dónde me he equivocado.*

**J:** *Yo, además, como depende del ángulo de desplazamiento inicial, he tratado de ver lo que pasa para algunos casos particulares, por ejemplo, que cuando la barra se sube hasta ponerla vertical, la velocidad final será la máxima y así me sale.*

**S:** *Yo he pensado que se podría obtener el desplazamiento inicial que habría que darle para que luego dé la vuelta completa, como en un problema que hicimos con un péndulo simple.*

Entre las aportaciones que los tres estudiantes han realizado, se completa un buen análisis del resultado, contrastando las hipótesis, reflexionando de nuevo acerca de ellas si existen diferencias entre lo supuesto y lo obtenido, analizando casos límite y considerando nuevas perspectivas. Evidentemente, no todos los estudiantes han abordado con éxito todos los aspectos, pero sí se percibe que en este grupo de trabajo la metodología alternativa ha cuajado y que estos estudiantes aplican los procedimientos con cierta naturalidad. Se aprecia, así mismo, que el diálogo entre ellos es francamente fluido.

Vemos, por tanto, que el resultado de las pruebas escritas (análisis secuencial y específico de procedimientos) es convergente con los obtenidos al analizar las entrevistas grabadas. Se puede concluir que se ha logrado una marcada tendencia a hacer uso de los procedimientos científicos en resolución de problemas de lápiz y papel aunque, lógicamente, el éxito de los estudiantes en la utilización de los mismos se va reduciendo de manera escalonada a medida que se les exige aplicar bien un procedimiento además de los anteriores, es decir, cuando buscamos la intersección de las aplicaciones correctas de todos los procedimientos, paulatinamente el número de estudiantes que lo consigue es menor. Aún así, el objetivo último es lograr que los estudiantes alcancen una visión procedimental global correcta de cómo abordar la resolución los problemas de Física y,

en este sentido, debemos reconocer que transformar otros hábitos metodológicos tan fuertemente enraizados es una tarea difícil que requiere tiempo y esfuerzo.

Tal y como hemos señalado con anterioridad, cuando el tratamiento se ha prolongado durante todo el curso, se ha percibido una cierta mejoría en la aplicación de los procedimientos propios de la ciencia en resolución de problemas de Física. Parece razonable suponer, entonces, que una práctica más dilatada en el tiempo mejoraría aún más los resultados.

Otra dificultad añadida para alcanzar el cambio metodológico propuesto para la resolución de problemas es el hecho de que, en el ámbito de nuestras escuelas, esta metodología se desarrolle exclusivamente en el contexto de la asignatura de Física. Creemos que sería de gran ayuda la extensión de la propuesta a otras asignaturas, pues ello conllevaría una convergencia metodológica que podría servir para reforzar, de cara a los estudiantes, su propia coherencia así como para ampliar su rango de validez.

### **Actitudes generadas en los estudiantes con la propuesta de resolución de problemas como investigación orientada**

En el apartado anterior hemos presentado los diseños para evaluar la mejora en la aplicación de procedimientos y en la efectividad en resolución de problemas de Física. Otro de los aspectos en los que incide el modelo de enseñanza que estamos tomando como referencia, es el aspecto actitudinal. Es decir, para producir un cambio metodológico estable es fundamental que se produzca paralelamente un cambio actitudinal que lleve a los alumnos no sólo a obtener mejores resultados en la resolución de problemas (aunque esto, evidentemente, ayudará al cambio actitudinal) sino también a valorar más positivamente la nueva metodología. No podemos olvidar que el estudiante tiene poder de veto sobre lo que aprende.

Para medir las actitudes de los estudiantes experimentales hacia el aprendizaje de la resolución de problemas de Física hemos utilizado un cuestionario (documento 5.3) que consta de

tres partes. En la primera, se presentan cinco afirmaciones en relación con los contenidos y métodos que se han trabajado. En la segunda parte se realizan cuatro afirmaciones sobre la forma en la que se han trabajado en el aula y las tutorías los problemas abiertos, y, finalmente, en la tercera se cuestiona sobre la satisfacción global con el método de resolución.

Este cuestionario ha sido cumplimentado por estudiantes de las clases experimentales que suman un total de 101 alumnos y alumnas. Los resultados para las distintas partes de las que consta en cuestionario se recogen en la tabla 5.4.

*Las respuestas a este cuestionario servirán, a nuestro equipo de investigación, para reflexionar sobre la dinámica de nuestras clases de **resolución de problemas abiertos**, y para intentar mejorarlas. Por ello, os pedimos que contestéis con seriedad y sinceridad.*

*El cuestionario consta de tres apartados. En cada uno de ellos se realizan diversas afirmaciones. Por favor, léelas atentamente antes de responder, y luego puntúa de **0 a 10** cada una de ellas según tu acuerdo o desacuerdo con lo que dicen, tomando como referencia la siguiente escala:*

- **Totalmente de acuerdo: de 8 a 10.***
- **De acuerdo: de 6 a 7.***
- **Indiferente: 5.***
- **En desacuerdo: de 3 a 4.***
- **Totalmente en desacuerdo: de 0 a 2.***

*Tras calificar numéricamente cada apartado, haz una breve exposición de las razones en las que has basado tus valoraciones, destacando lo que consideres más importante.*

### **1. SOBRE LOS PROBLEMAS ABIERTOS QUE SE HAN TRABAJADO.**

*1.1 El nivel conceptual de los problemas ha sido adecuado, en términos de dificultad, para el nivel de conocimiento de los alumnos y alumnas: .....*

*1.2 Tras resolver uno o dos problemas con esta metodología, los objetivos procedimentales a trabajar (análisis cualitativo, emisión de hipótesis, estrategias de resolución, análisis de resultados) estaban claros, es decir, sabía qué aspectos había que tratar: .....*

**1.3** El que en el enunciado no se expliciten todos los datos, las aproximaciones y acotaciones que hay que realizar, me ha obligado a reflexionar más profundamente sobre la situación problemática: .....

**1.4** Los procedimientos que se han trabajado en estos problemas (análisis cualitativo, emisión de hipótesis, estrategias de resolución, análisis de resultados) me han ayudado a comprender mejor los conceptos, leyes y principios de la Física: .....

**1.5** La resolución de problemas abiertos requiere más tiempo que la forma habitual de resolverlos. Aún así, en el tiempo disponible durante el curso, me parece mejor resolver menos problemas aplicando los procedimientos de análisis, hipótesis, estrategias, etc., que resolver más problemas de la manera habitual: .....

COMENTARIOS QUE PUEDAN AYUDAR A COMPRENDER TUS PUNTUACIONES EN EL APARTADO 1.

.....  
.....  
.....

## **2. SOBRE LA MANERA DE ENFOCAR LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS ABIERTOS.**

**2.1** Abordar la resolución de los problemas abiertos en pequeños grupos de trabajo me ha ayudado a afrontar mejor las dificultades y a comprender mejor los conceptos y los procedimientos de resolución: .....

**2.2** Las entrevistas que mi grupo de trabajo ha mantenido con el profesor me han ayudado a centrar los problemas y a comprender mejor los conceptos y los procedimientos de resolución: .....

**2.3** La resolución final que de cada problema abierto se ha realizado en el aula es una buena manera de poner en común la resolución de los distintos grupos y me ha ayudado a afrontar mejor las dificultades y a comprender mejor los conceptos y los procedimientos de resolución: .....

**2.4** Durante la resolución ha habido un buen ambiente de trabajo:

- En mi pequeño grupo de trabajo: .....
- En las entrevistas con el profesor: .....
- En la puesta en común en el aula: .....

COMENTARIOS QUE PUEDAN AYUDAR A COMPRENDER TUS PUNTUACIONES EN EL APARTADO 2.

.....  
.....  
.....

**3. SOBRE LA SATISFACCIÓN CON LA QUE SE HA TRABAJADO EN CLASE.**

**3.1** Las clases de resolución de problemas abiertos han conseguido atraer mi interés:

.....

**3.2** Nunca tengo ganas de que llegue la clase de resolución de problemas abiertos:

.....

**3.3** Existe, por parte del profesor, apoyo y disposición para superar las dificultades que tienen los estudiantes en la resolución de problemas abiertos: .....

**3.4** En las clases de resolución de problemas ha habido un clima de cooperación entre los estudiantes: .....

COMENTARIOS QUE PUEDAN AYUDAR A COMPRENDER TUS PUNTUACIONES EN EL APARTADO 3.

.....  
.....  
.....

Documento 5.3. Cuestionario para valorar las actitudes de los estudiantes hacia la resolución de problemas como actividad de investigación orientada.

Los resultados que aparecen en las columnas de ‘error muestral’ están calculados con una significación tal que permite un nivel de confianza de ‘dos sigmas’.

Los diferentes grupos experimentales encuestados han sido los siguientes:

**Grupo 1:** Grupo de primer curso, titulación Mecánica Industrial de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao perteneciente a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). Tratados durante el primer cuatrimestre.



**Grupo 2:** Grupo de primer curso, titulación Electrónica Industrial de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao perteneciente a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). Tratados durante el primer y segundo cuatrimestre.

**Grupo 3:** Grupo de primer curso, titulación Electrónica Industrial de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de San Sebastián perteneciente a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). Tratados durante el primer y segundo cuatrimestre.

aspectos considerados		grupo 1		grupo 2		grupo 3	
		media	error m.	media	error m.	media	error m.
1. Problemas abiertos trabajados	1.1 Nivel conceptual adecuado	6.7	0.5	6.3	0.4	7.0	0.4
	1.2 Objetivos procedimentales claros	6.7	0.5	6.5	0.3	7.5	0.4
	1.3 Obligan a mayor reflexión	7.2	0.2	7.0	0.3	7.3	0.3
	1.4 Ayudan a comprender	6.9	0.3	6.6	0.4	7.6	0.2
	1.5 Pocos problemas más a fondo	5.3	0.6	5.4	0.5	6.2	0.5
2. Forma de enfocar la resolución.	2.1 Trabajo en pequeños grupos	7.2	0.3	6.8	0.4	7.5	0.3
	2.2 Entrevistas grupos con profesor	7.8	0.2	7.0	0.4	7.4	0.2
	2.3 Puesta en común en el aula	6.9	0.5	6.8	0.5	7.7	0.4
	2.4 Buen clima de trabajo	7.5	0.3	7.4	0.3	7.8	0.5
3. Satisfacción.	3.1 Clases interesantes	6.5	0.4	6.3	0.4	7.8	0.5
	3.2 No quiero que llegue la clase	4.0	0.5	4.0	0.4	3.1	0.4
	3.3 Apoyo del profesor	7.6	0.2	7.0	0.3	7.6	0.3
	3.4 Clima de cooperación	6.7	0.4	7.1	0.4	7.6	0.5

Tabla 5.4. Resultados obtenidos en la valoración por estudiantes experimentales, del modelo de resolución propuesto.

Teniendo en cuenta que la puntuación de 5 sería neutra, los estudiantes experimentales muestran una actitud positiva hacia los problemas de enunciado abierto trabajados (primera parte). Por un lado, el grado de dificultad lo han considerado ajustado para su nivel de conocimientos (ítem 1.1) y, por otro, los objetivos procedimentales que se persiguen los han captado con prontitud (ítem 1.2). Las puntuaciones más altas se han asignado a aspectos tan importantes en resolución de problemas, como la reflexión sobre la situación que los enunciados abiertos exigen (ítem 1.3) y al hecho de que los procedimientos utilizados ayuden a comprender mejor los conceptos, leyes y principios implicados (ítem 1.4).

Los estudiantes, sin embargo, a pesar de reconocer las ventajas didácticas del método propuesto, otorgan puntuaciones prácticamente neutras cuando se les indica en el ítem 1.5 que es preferible resolver en el mismo tiempo menos problemas aplicando a fondo los procedimientos, que resolver más problemas de la manera habitual. Una posible explicación a esta valoración de los estudiantes que, desde luego, no ha respondido a nuestras expectativas, la encontramos en algunas de las aclaraciones que han realizado los propios alumnos al respecto. En los comentarios que el cuestionario pedía a los estudiantes, de entre los que peor han valorado este ítem 1.5, hemos recogido opiniones como las que siguen:

*“Los problemas abiertos me han ayudado a comprender mejor pero, en mi opinión, los hemos resuelto con demasiada profundidad, hipótesis, el porqué de todos los pasos...”*

*“Estos problemas abiertos aumentan las posibilidades de los problemas, pero llevan demasiado tiempo porque hay que pensar más, y hay que estudiar otras asignaturas”*

Es decir, aunque estos estudiantes son conscientes de las ventajas que reporta el modelo, algunos matizan su buena opinión alegando la sobrecarga de esfuerzo y tiempo frente a otros modelos más ‘cómodos’ para ellos a los que, por otro lado, están habituados.

Respecto a la manera de trabajar los problemas (segunda parte) los estudiantes muestran su clara conformidad con la propuesta ya que casi todos los aspectos logran una puntuación próxima a siete. Destacan las valoraciones positivas que realizan en lo que respecta a abordar los problemas, primeramente, en pequeños grupos de trabajo (ítem 2.1), para posteriormente tener una pequeña entrevista con el profesor en la que se reconduce con su ayuda la situación (ítem 2.2) y el buen ambiente de trabajo que todo ello conlleva (ítem 2.4). Nos causó sorpresa, sin embargo, el que la fase de puesta en común entre los distintos grupos de trabajo en el aula, obtuviera una puntuación inferior (ítem 2.3). De nuevo, encontramos alguna pista sobre las posibles causas en los comentarios de los estudiantes:

*“...hacer comentarios delante de toda la clase da bastante vergüenza”.*

*“...lo malo es que cuando estamos toda la clase no se pueden dar las opiniones de todos, los más tímidos tienen desventaja”.*

Por desgracia, no es habitual que a nivel universitario los estudiantes tomen parte activa en las clases con naturalidad. Muchos de ellos sienten rubor a hablar en público y la falta de seguridad en sí mismos y en sus conocimientos sobre la materia actúa de cortapisa a la hora de emitir opiniones ante los demás. Es, por tanto, labor del profesor que pretenda aplicar esta metodología el tratar de mitigar al máximo esta tendencia negativa y convencer a los estudiantes de que las reflexiones erróneas, en ocasiones, son tan válidas como las certeras.

En la tercera parte, los estudiantes expresan que la actividad de resolución de problemas abiertos ha logrado captar su interés (ítem 3.1) y que el clima de cooperación entre ellos ha sido bueno (ítem 3.4). No es menos importante, que los estudiantes se hayan sentido apoyados por sus profesores durante las distintas fases de la resolución (ítem 3.3).

En resumen, podemos afirmar que los estudiantes experimentales muestran su satisfacción con los problemas abiertos planteados y con la forma de abordar su resolución. Así mismo,

están satisfechos con el grado de colaboración entre ellos y con el apoyo de los profesores. Una opinión que podría sintetizar este sentir, es la expresada por un estudiante junto a sus valoraciones:

*“A mí, personalmente, este tipo de problemas me han ayudado mucho y trabajando en grupo he aprendido más, discutiendo acerca de los conceptos etc. La dificultad ha sido bastante alta, pero eso ha servido para pensar más. En general, soy partidario de hacer este tipo de problemas”.*

## 6. CONCLUSIONES

El nuevo paradigma educativo asociado al EEES, además de al nuevo papel a desempeñar por estudiantes y profesores, afecta a otros aspectos clave como el enfoque y la organización de las actividades educativas y los materiales de enseñanza, que deberían dar lugar a una gran variedad de ‘situaciones didácticas’ que permitan estimular el compromiso sistemático del estudiante con su aprendizaje. Entre estas tareas, ubicamos la propuesta de ‘resolución de problemas como investigación orientada’ aquí presentada.

Este trabajo se ha ocupado de la problemática educativa que se presenta como consecuencia del amplio fracaso en resolución de problemas de Física por parte de los estudiantes de cursos introductorios de primer ciclo de Universidad y se ha guiado por el interés en contribuir a paliar dicho fracaso.

Para ello, se propone alcanzar un cambio epistemológico en los estudiantes que suponga el abandono de prácticas operativistas, habituales en la resolución de problemas (Gil et al., 1988), por otras formas procedimentales de resolución que tiendan a familiarizar al estudiante con aspectos esenciales de un trabajo con orientación científica, tales como concretar un problema de enunciado abierto, favorecer el pensamiento divergente por medio de la emisión de hipótesis o de la elaboración de estrategias de resolución, así como del análisis de los resultados obtenidos (Guisasola et al., 2003).

Simultáneamente, con la aplicación reiterada de este modelo de resolución, se espera conseguir un cambio actitudinal positivo de los alumnos hacia la resolución de problemas de Física, que aleje a los estudiantes de actitudes pasivas y de rechazo y los convierta en agentes activos de su aprendizaje.

Acorde con la problemática descrita, los aspectos que en los capítulos del libro hemos abordado han sido los siguientes:

Hemos comenzado, en el capítulo 1, analizando cuáles son las estrategias utilizadas por los estudiantes de cursos introduc-

torios de Física en la universidad cuando se enfrentan a situaciones problemáticas y, cuál es su relación con los hábitos procedimentales de resolución. El análisis de la situación de partida en la que los estudiantes fracasan ante problemas que, de acuerdo con la perspectiva de los profesores, deberían ser capaces de resolver con éxito, nos ha conducido a un replanteamiento global de la actividad de resolución de problemas.

Así, en el capítulo 2 nos hemos planteado qué es lo que entendemos por problema, es decir, qué características habrán de reunir los problemas propuestos en el ámbito escolar para que puedan ser abordados como verdaderos problemas; qué implica resolver un problema y, por tanto, qué características debe tener una metodología de resolución de problemas de Física para que sea coherente con su naturaleza de tarea de investigación.

Ha sido la propia investigación en resolución de problemas que, desde hace décadas se ha configurado como una de las principales líneas de investigación didáctica (Gil et al., 1988; Garrett, 1987; Mohapatra, 1987; Perales, 1993; Maloney, 1994; Cabral da Costa y Moreira, 1996-1997; Fávero y Soares Gomes de Sousa, 2001; Hsu et al., 2004; Boilevin, 2005) la que nos ha hecho comprender que una situación sólo puede ser concebida como un problema en la medida en que existe un reconocimiento de ella como tal problema, es decir, resulta desconocida, y en la medida en que, a priori, no disponemos de solución.

Por ello, el modelo de resolución como investigación orientada trata de integrar, las aportaciones más relevantes de la investigación didáctica. Esta orientación, considera las características que habrán de reunir los problemas propuestos en el ámbito escolar para que puedan ser abordados bajo la perspectiva de la metodología científica como verdaderos problemas. Propone partir de enunciados de interés y abiertos, que no incluyan todos los datos y que conduzcan a los estudiantes a acotar la situación y a buscar los datos en base al análisis y las hipótesis previas.

Se ha visto, en este sentido, que es posible transformar los enunciados cerrados de los problemas de Física a nivel de pri-

mer curso de Universidad, en enunciados abiertos o semiabiertos acordes con el modelo de resolución de problemas como investigación orientada. Es decir, enunciados que, además de no incluir todos los datos ni de concretar la situación hasta delimitar todas las posibilidades, incorporen, en la medida de lo posible, conexiones entre ciencia, tecnología y sociedad.

Lo anterior no significa que no se realicen problemas cerrados sino que, tanto los abiertos como los cerrados, se aborden utilizando procedimientos propios del trabajo científico y que, para familiarizar a los estudiantes con estos métodos, es aconsejable utilizar problemas abiertos en los que la inexistencia de datos numéricos hace inviable un operativismo sin significados. Así, para la resolución, el modelo facilita orientaciones acordes con los procedimientos científicos que, partiendo del análisis cualitativo y de la emisión de hipótesis, permitan a los estudiantes elaborar estrategias como alternativas para, una vez alcanzado un resultado, analizarlo y buscar nuevas perspectivas.

El modelo de enseñanza de resolución de problemas que se ha presentado, a diferencia de otras propuestas metodológicas, se integra en un modelo global de enseñanza-aprendizaje como actividad de investigación orientada tal y como se ha abordado en otros trabajos (Furió et al., 2003; Guisasola et al., 2005).

Una vez definidas las características de la forma de trabajar problemas en el contexto de las Ciencias, en el capítulo 3 hemos utilizado estos parámetros como marco de referencia para efectuar un análisis crítico de la enseñanza de resolución de problemas de Física en la Universidad la cual, fundamentalmente, está basada en la transmisión verbal de conocimientos ya elaborados.

Hemos hecho referencia a la presentación didáctica de esta actividad en los libros de texto y a las estrategias de los profesores para su aplicación en el aula. Es decir, hemos indagado hasta qué punto los problemas de Física se presentan habitualmente de modo coherente con su naturaleza de proceso de investigación, de modo que sea posible poner en práctica aspectos esenciales de la metodología científica.

Hemos podido apreciar que la enseñanza habitual de resolución de problemas en cursos introductorios de Física a nivel universitario adolece de graves deficiencias didácticas que tienen incidencia en el fracaso mostrado por los estudiantes.

Comprobado que la presentación habitual de los problemas de Física a nivel universitario genera hábitos basados en el operativismo y en la repetición no significativa de estrategias tipo, en el capítulo 4 hemos ahondado en la propuesta alternativa de enseñanza que considera las actividades de introducción de conceptos, la resolución de problemas y las prácticas de laboratorio, muchas veces inconexas, como variantes de un mismo proceso de enseñanza-aprendizaje que, en forma de tratamiento de situaciones problemáticas abiertas, persigue la familiarización de los estudiantes con la metodología científica (aprender sobre la Naturaleza de la Ciencia) y la utilización con significado de conceptos leyes y teorías (aprendizaje comprensivo de los conceptos de la Física). Hemos incidido, especialmente, en la importancia del conocimiento procedimental de cara a la resolución de las situaciones problemáticas.

Los profesores de Universidad, apoyados en un trabajo colectivo, son capaces de asumir en su labor educativa la utilización de la metodología de resolución de problemas como investigación orientada, asumiendo en esta metáfora su papel como guías y dinamizadores de las pequeñas investigaciones que los estudiantes realizan cuando abordan una nueva situación problemática abierta.

Finalmente, en el capítulo 5, hemos tratado de aportar algunos resultados de los diseños elaborados para tratar de contrastar si la aplicación de la metodología de resolución de problemas como investigación orientada puede favorecer la superación de las deficiencias detectadas, es decir, si se consigue con la metodología propuesta, una mejora sustancial del rendimiento de los estudiantes universitarios en la resolución de problemas de Física, si se fomenta una actitud que reduzca el operativismo y la pasividad ante la resolución y si se aproximan más los procedimientos usados por los estudiantes en la resolución a los característicos de la metodología científica.



En este sentido, podemos afirmar que los estudiantes del grupo experimental son capaces de afrontar las resoluciones de los problemas abiertos o semiabiertos propuestos y, adecuadamente orientados, se convierten en protagonistas de su propio aprendizaje. Esto se traduce en un mejor uso de los procedimientos científicos durante la resolución y en que se muestren más eficaces como resolventes. Así mismo, cuando los estudiantes que siguen esta metodología se enfrentan a problemas como los que habitualmente aparecen en los libros de texto de Física para Ciencias e Ingeniería, la mayoría de ellos los resuelve correctamente y en un porcentaje significativamente mayor que los estudiantes que reciben una enseñanza habitual.

Además, la metodología de resolución como actividad de investigación orientada propuesta, contribuye a generar actitudes positivas en los estudiantes hacia el aprendizaje de la resolución de problemas de Física. Esto es, los estudiantes expresan una opinión positiva hacia los problemas trabajados, la forma de abordar su resolución y reconocen su capacidad para mejorar el aprendizaje de la Física, así como para estimular el interés por la actividad de resolución de problemas.

Podemos concluir que, el conjunto de resultados obtenidos nos permiten afirmar que se ha alcanzado un avance satisfactorio en la plausibilidad de una propuesta metodológica de resolución de problemas, dentro del modelo de enseñanza-aprendizaje como investigación orientada, aplicada a situaciones problemáticas de diversa dificultad. La propuesta metodológica y su implementación en el aula puede suponer, al tiempo, una tarea de interés para desarrollar y evaluar ciertas competencias de tipo procedimental incluidas en las directrices de las nuevas titulaciones de Ciencias e Ingeniería.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMUDÍ, J.M. (2002). *Campos magnéticos producidos por cargas móviles: dificultades de aprendizaje y propuesta constructivista de enseñanza en primer curso universitario de Física General*. Tesis doctoral. Departamento de Física Aplicada. Universidad del País Vasco.

ALONSO, M., 1994. *La evaluación de la enseñanza de la Física y análisis de la evaluación habitual*. Tesis de Master (Universitat de València).

AMERICAN ASSOCIATION FOR ADVANCEMENT OF SCIENCE.; 1989. *Project 2061: Science for all Americans*. Washington, DC: AAAS.

BANDIERA, M., DUPRE, F., IANNIELLO, M.G. y VICENTINI, M.; 1995. Una investigación sobre habilidades para el aprendizaje científico. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (1), 46-54.

BECERRA, C., GRAS-MARTI, A. y MARTÍNEZ-TORREGROSA, J., 2007. La física con una estructura problematizada: efectos sobre el aprendizaje conceptual, las actitudes y los intereses de los alumnos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29 (1), 97-105.

BRICH, W., 1986. Towards a model for problem-based learning. *Studies in higher education*, 11 (51), 73-83.

BRISSAUD, R., 1987. Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème chez des élèves de cours élémentaire deuxième année. *Reports de recherches*, (12), 199-244, Paris: INPR editors.

BOILEVIN, J.M., 2005. Enseigner la physique par la situation problema ou par probleme ouvert, *Aster* 40, 13-37.

CABRAL DA COSTA, S.S. y MOREIRA, M.A., 1996. Resolução de problemas I: Diferenças entre novatos e especialistas. *Investigações em Ensino de Ciências*, 1 (2).

CABRAL DA COSTA, S.S. y MOREIRA, M.A., 1997. Resolução de problemas II: Propostas de metodologias didáticas. *Investigações em Ensino de Ciências*, 2 (1), 5-26.

CABRAL DA COSTA, S.S. y MOREIRA, M.A., 1997. Resolução de problemas III: Factores que influenciam na resolução de problemas em sala de aula. *Investigações em Ensino de Ciências*, 2 (3), 65-104.

CABRAL DA COSTA, S.S. y MOREIRA, M.A., 1997. Resolução de problemas IV: Estratégias para resolução de problemas. *Investigações em Ensino de Ciências*. 2(3), 153-184.

CAILLOT, M. y DUMAS-CARRRE, A., 1987. PROFHY: Un enseignement d'une méthodologie de résolution de problèmes de Physique, en *Résolution de problèmes en mathématiques en en physique, Reports de recherches*, (12), 199-244, París: INPR editors.

CALATAYUD, M.L., GIL, D., y GIMENO, J.V.; 1992. Cuestionamiento del pensamiento espontáneo del profesorado universitario: ¿las deficiencias de enseñanza como origen de las dificultades de los estudiantes? *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 14, 71-81.

CARRASCOSA, J., 1987. *Tratamiento didáctico en la enseñanza de las ciencias de los errores conceptuales*. Tesis Doctoral. (Servei de Publicacions de la Universitat de València: València).

CARRASCOSA, J. y GIL, D., 1985. La metodològia de la superfiialitat i l'aprenentatge de les ciències. *Ensenyanza de las Ciencias*, 10 (3), 314-328.

CEBERIO, M. (2004). *La resolución de problemas de física general en la universidad: una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de situaciones problemáticas abiertas*. Tesis doctoral. Departamento de Física Aplicada. Universidad del País Vasco.

CHALMERS, R.F., 1987. *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?*, Siglo XXI: Madrid.

CHI, M., GLASER, R., y REES, E., 1982. Expertise in problem solving. En R.J. Sternberg (Eds.), *Advances in the psychology of human intelligence*, (vol.1, 7-75). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

CLEMINSON, A., 1990. Establishing an epistemological base for science teaching in the light of contemporary notions of nature of science and of how children learns science. *Journal of Research in Science Teaching*, 27 (5), 429-455.

COLL, C., 1987. *Psicología y Curriculum*. Barcelona: Laia.

DRIVER, R., 1986. Psicología cognoscitiva y esquemas conceptuales de los alumnos, *Ensenyanza de las Ciencias*, 4 (1), 3-15.

DUMAS-CARRE, A., 1987. *La résolution de problèmes en Physique au Lycée*, Thèse d'état soutenue à l'Université Paris 7.

DUSCHL, R.A., 1995. Mas allá del conocimiento: los desafíos epistemológicos y sociales de la enseñanza mediante el cambio conceptual. *Ensenyanza de las Ciencias*, 13(1); 3-13.

DUSCHL, R.A., 1997. *Renovar la enseñanza de las ciencias*. Narcea: Madrid.

DUSCHL, R.A., 1998. La valoración de argumentos y explicaciones: promover estrategias de retroalimentación. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1); 13-20.

ELIO, R. y SCHARF, P., 1990. Modeling novice to expert shifts in problem solving strategy and knowledge organization. *Cognitive Science*, 14(4), 579-639.

ESCUADERO, C., 1996. Los procedimientos en resolución de problemas de alumnos de 3<sup>er</sup> año: Caracterización a través de entrevistas. *Investigações em Ensino de Ciências*, 1 (3).

ELSHOUT, J.J., 1985. Problem solving and education, state of the art paper. Early conference Lewen June, 1985.

FÁVERO, M.H. y SOARES GOMES DE SOUSA, C.M., 2001. A resolução de problemas em física: revisão de pesquisa, análise e proposta metodológica. *Investigações em Ensino de Ciências*, 6 (2).

FERGUSON-HESSLER, M. y DE JONG, T., 1990. Studying physics texts: Differences in study processes between good and poor performers. *Cognition and Instruction*, 7, 41-54.

FURIÓ, C. et al., 1987. *Memoria final: Experimentación de un nuevo currículum de física y química para el segundo curso de BUP*. (Consellería de Cultura, Educación y Ciencia. Generalitat de Valencia. Programas de experimentación educativa).

FURIÓ C., 2001, La enseñanza-aprendizaje de las ciencias como investigación: un modelo emergente. En J. Guisasola y L. Pérez de Eulate (editores), *Investigaciones en didáctica de las ciencias experimentales basadas en el modelo de enseñanza-aprendizaje como investigación orientada*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao, 43-109.

FURIÓ, C., ITURBE, J. y REYES, J., 1994. Contribución de la resolución de problemas como investigación al paradigma constructivista de aprendizaje de las ciencias. *Investigación en la Escuela*. 24, 89-99.

FURIÓ, C. y VILCHES A., 1997. *Las actitudes del alumnado hacia las ciencias y las relaciones ciencia, tecnología y sociedad en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias de la naturaleza en la educación secundaria*. ICE/Horsori: Barcelona.

FURIÓ, C., GUIASOLA J., ALMUDÍ, J.M. y CEBERIO M., 2003, Learning the electric field concept as oriented research activity. *Science Education*, 87, 640-662.

FRIEDLER, Y., NACHMIAS, R. y LINN, M.C., 1990. Learning scientific reasoning skills in microcomputer-based laboratories. *Journal of Research in Science Teaching*, 27 (2), 173-191.

- GAGNÉ, R.M. y SMITH, E.C., 1962. A study of the effects of verbalization on problem solving. *Journal of Experimental Psychology*, 63 (1), 12-18.
- GARRETT, R.M., 1987. Issues in science education: problem solving, creativity and originality. *International Journal of Science Education*, 9, (2), 125-137.
- GARRET, R. M., 1988. Resolución de problemas y creatividad: Implicaciones para el currículo de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, (6), 3, 224-230.
- GARRET, R., SATTERLY, D., GIL PÉREZ, D. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J., 1990. Turning exercises into problems: An experimental study with teachers in training. *International Journal of Science Education*, 12, 1-12.
- GIL, D., 1983. Tres paradigmas básicos en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 1 (1), 26-33.
- GIL, D., 1993. Contribución de la Historia y Filosofía de las Ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación. *Enseñanza de las Ciencias*, (11) 2, 197-212.
- GIL, D., 1997. Aprender a resolver problemas: una asignatura pendiente, en Carrascosa, J. y Martínez, J. "Problemas de Física". Santillana: Madrid.
- GIL, D. y MARTÍNEZ-TORREGROSA, J., 1983. A model for problem solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), 447-455.
- GIL, D. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J., 1984. Problem solving in physics: a critical analysis. *Research on Physics Education*, París: CNRS editors.
- GIL, D. y MARTÍNEZ-TORREGROSA, J., 1987. *La resolución de problemas de Física*, Madrid: M.E.C.-Vicens Vives.
- GIL, D., DUMAS, A., CAILLOT, M., MARTÍNEZ-TORREGROSA, J. y RAMÍREZ L, 1988. La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. *Investigación en la Escuela*, 6, 3-19.
- GIL, D., MARTÍNEZ-TORREGROSA, J. y SENENT, F., 1988. El fracaso en la resolución de problemas de física: Una investigación orientada por nuevos supuestos. *Enseñanza de las Ciencias*, 6 (2), 131-146.
- GIL, D., FERNÁNDEZ, I. y CARRASCOSA, J., 1999. *La transformación de las concepciones docentes espontáneas acerca de la ciencia*. En Carretero, M. (Ed.). (Argentina).

GIL, D., GUIASOLA, J., MORENO, A. y colaboradores, 2002, Defending constructivism in Science Education, *Science and Education* 11, 557-571.

GILBERT, G.L., 1980. How do i get the ansewer. *Journal of Research of Chemical Education*, 57, 79-81.

GLASER, R., 1992. Expert knowledege and prcesses of thinking. En: D.F. Halpern (Ed.) *Enchancing thinking skills in the sciences and mathematics*. Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum.

GOFFARD, M., 1990. *Modes de travail pédagogiques et résolution de problèmes en Physique*. Tesis doctoral. Universidad de Paris.

GUIASOLA, J., 1996. *Análisis crítico de la enseñanza de la electrostática en el bachillerato y propuesta alternativa de orientación constructivista*. Tesis Doctoral. Departamento de Física Aplicada. Universidad del País Vasco.

GUIASOLA J., REYES V. Y CEBERIO M., 2001, Modelo de resolución de problemas como actividad de investigación orientada, J.M. Rabadán (editor) *La resolución de problemas como investigación orientada en Física y Química* 5-19, Centro de Profesores y Recursos de Santander, Santander. ISBN: 84-699-6235-3)

GUIASOLA, J., CEBERIO, M., ALMUDÍ, J.M. y ZUBIMENDI J.L., 2002. La enseñanza de los problema-tipo en el primer curso de Ingeniería y el aprendizaje significativo de los conceptos y principios fundamentales de la Física, *Caderno Brasileiro de Encino de Física* 19 (1), 7-28.

GUIASOLA, J., CEBERIO, M., ALMUDÍ, J.M. y ZUBIMENDI J.L., 2002, A teaching strategy for enhancement of physics learning in the first year of Industrial Engineering, *European Journal of Engineering Education* 27(3).

GUIASOLA J., CEBERIO M. Y ZUBIMENDI J.L.; 2003. El papel científico de las hipótesis y los razonamientos de los estudiantes universitarios en resolución de problemas de Física, *Investigações em Enseino de Ciencias* 8 (1), <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol8/n1/20indice.html>

GUIASOLA, J., FURIÓ, C., CEBERIO, M. y ZUBIMENDI J.L., 2003. ¿Es necesaria la enseñanza de contenidos procedimentales en cursos introductorios de física en la universidad?, *Enseñanza de las Ciencias Extra*, 17-28.

GUIASOLA, J., ALMUDÍ, J.M., ZUBIMENDI J.L. y ZUZA K., 2005. Campo magnético: diseño y evaluación de estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje como investigación orientada, *Enseñanza de las Ciencias* 23(3), 303-320.

- HASWEH, F., 1986. Towards an explanation of conceptual change. *European Journal of Science Education*, 8 (3), 229-249.
- HEGARTY, M., 1991. Knowledge and processes in mechanical problem solving. En R.J. Sternberg & P.A. Frensch (Eds.), *Complex problem solving: Principles and mechanisms* (253-285). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- HODSON, D., 1986. Philosophy of Science and Science Education. *Journal of Philosophy of Education*. 20 (2). Recogido por Porlán, R., García, J.E. y Cañal, P., 1988 en *Constructivismo y enseñanza de las ciencias*. (Diada: Sevilla).
- HSU, L., BREWE, E., FOSTER, T.M. y HARPER, K.A., 2004. Resource Letter RPS-1: Research in problem solving. *American Journal of Physics* 72 (9), 1147-1156.
- HUFFMAN, D., 1997. Effect of Explicit Problem Solving Instruction on High School Students' Problem-Solving Performance and Conceptual Understanding of Physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 34(6), 551-570.
- IZQUIERDO, M., 1996. Relación entre la historia y la filosofía de la ciencia y la enseñanza de las ciencias. *Alambique* 8, 7-21.
- JANSWEIJER, W, ELSHOUT, J, y WIELINGER, B., 1987. Modeling the genuine beginner; on the multiplicity of learning to solve problems. *Earli conference Tubingen*, september, 1987.
- JIMÉNEZ ALEIXANDRE, M.P., 1998. Diseño curricular: Indagación y razonamiento con el lenguaje de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), 203-216.
- KEMPA, R., 1986. Resolución de problemas en Química y Estructura Cognoscitiva. *Enseñanza de las Ciencias*. 4(2), 99-110.
- LANGLOIS, F., GRÉA, J., VIARD, J., 1995. Influencia de la formulación del enunciado y del control didáctico sobre la actividad intelectual de los alumnos en la resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (2), 179-191.
- LARKIN, J. H., 1983. Enriching formal knowledge: A model for learning to solve textbook physics problems. En J.R. Anderson (Ed.), *Cognitive skills and their acquisition*, (311-334). Hillsdale, NY: Erlbaum.
- LARKIN, J.H., y REIF, F., 1979. Understanding and teaching problem solving in physics. *European journal of science education*, 1(2),191-203.

LEONARD, W.J., GERACE, W.J. y DUFRESNE, R.J., 2002. Resolución de problemas basada en el análisis. Hacer del análisis y del razonamiento el foco de la enseñanza de la Física. *Enseñanza de las Ciencias*, 20 (3), 387-400.

MALONEY, D., 1994. Research on Problem Solving: Physics. *Handbook of Research in Science Teaching and Learning*. Gabel, Dorothy (Ed.). Mac Millan Publishing Company.

MALONEY, D. y SIEGLER, R.S., 1993. Conceptual competition in physics learning. *International Journal of Science Education*, 15, 283-295.

MARTÍNEZ-TORREGROSA, J., 1987. *La Resolución de Problemas de Física como Investigación: Un instrumento de Cambio Metodológico*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

McDERMOTT, L.C., 1993. How we teach and how students learn: a mismatch? *American Journal of Physics*, 59, 301-315.

Mc MILLAN, C. y SWADENER, M., 1991. Novice use of qualitative versus quantitative problem solving in electrostatics. *Journal of Research in Science Teaching*, 28 (8), 661-670.

MELLADO, V. y CARRACEDO, D., 1993. Contribución de la filosofía de las ciencias a la didáctica de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 11 (3), 331-339.

METTES, C.T.C.W., PILOT, A., ROOSSINK, H.J. y KRAMERS-PALS, H., 1980. Teaching and learning problem solving in science. Part I: A general strategy. *Journal of Chemical Education*, 57, 882-885.

MESTRE, J.P., DUFRESNE, R.J., GERACE, W.J., HARDIMAN, P.T. y TOUGER, J.S., 1993. Promoting skilled problem-solving behavior among beginning physics students. *Journal of Research in Science Teaching*, 30 (3), 303-317.

MILLAR, R., 1996. Investigation des élèves en Science: une approche fondée sur la connaissance. *Diskalia*, 9, 9-30.

MILLAR, R. y DRIVER, R., 1987. Beyond processes. *Studies in Science Education*, 14, 33-62.

MOHAPATRA, J.K., 1987. Can problem-solving in physics give an indication of pupils "process knowledge"? *International Journal of Science Education*, 9 (1), 117-123.

NEWELL, A. y SIMON, H.A., 1972. *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.



- PERALES, F.J., 1993. La resolución de problemas: Una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias*, 11 (2), 170-178.
- POLYA, G.; 1980. (Traducción 1992, *How to solve it*). Serie de Matemáticas, Ed. Trillas. México.
- PORLÁN, R., 1993. *Constructivismo y Escuela. Hacia un modelo de enseñanza/aprendizaje basado en la investigación*. Diada: Sevilla.
- POSNER, G., SRIKE, K., HEWSON, P. y GERTZOG, W., 1982. Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66, 211-227.
- POZO, J.I., PUY, M., DOMINGUEZ, J., GÓMEZ, M.,A., Y PÓSTIGO, Y., 1998. *La solución de problemas*, Madrid: Aula XXI, Santillana.
- REYES, V., 1991. *La resolución de problemas de Química como investigación: Una propuesta didáctica basada en el cambio metodológico*, Tesis Doctoral. Universidad del País Vasco.
- RAMÍREZ, J.L., 1990. *La resolución de problemas de física y química como investigación en la enseñanza media, un instrumento de cambio metodológico*. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Químicas. Universidad Autónoma de Barcelona.
- RAMÍREZ, J.L, GIL, D., MARTÍNEZ-TORREGROSA, J.M., 1994. *La resolución de problemas de física y de química como investigación*, Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia: CIDE.
- REIF, F., 1983. Understanding and Teaching Problem Solving in Physics. *In Researches en didactique*, 3-53, Paris CNRS Editions.
- REIF, F., 1995. Millican Lecture 1994: Understanding and teaching important scientific thoght processes. *American Journal of Physics*, 63 (1), 17-32.
- SALINAS, J., CUDMANI, L. y PESA, M., 1996. Modos espontáneos de razonar: Un análisis de su incidencia sobre el aprendizaje del conocimiento físico a nivel universitario básico. *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (2), 209-220.
- SELVARATNMAN, M., 1983. Studets' mistakes in problem solving. *Education in Chemistry*, Julio, 125-128.
- SELVARATNMAN, M. y KUMARASINGHE, S., 1991. Student concep- tions and competence concerning quantitative relatinships between variables. *Journal of Chemical Education*, 68, 370-372.

SEROUSSI, D.E., 1995. Heuristic Hypotheses in Problem Solving: An Example of Conceptual Issues about Scientific Procedures. *Science Education* 79 (6), 595-609.

SOLBES, J., VILCHES, A., 1997. STS interactions and the teaching of physics and chemistry. *Science education*, 81 (4), 337-386.

STINNER, A., 1992. Science textbooks and science teaching from logic to evidence. *Science Education*, 76 (1), 1-16.

TUNING EDUCATIONAL STRUCTURES IN EUROPE., 2003. Coord.: J.González; R. Wagenaar. *Universidad de Groningen* (Países Bajos); *Universidad de Deusto*, Bilbao (España): [www.relint.deusto.es/TuningProject/index.htm](http://www.relint.deusto.es/TuningProject/index.htm)

VAN HEUVELEN, A., 1991. Overview, case study physics. *American Journal of Physics*, 59(10), 898-906.

VAN WEEREN, J.H.P., KRAMERS-PALS, H. y ROOSSINK, H.J., 1982. Teaching problem-solving in physics: A course in electromagnetism. *American Journal of Physics*, 50, (8), 725-732.

VARELA, M.P., 1994. *La resolución de problemas en la enseñanza de las ciencias. Aspectos didácticos y cognitivos*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

WANDERSEE, J.H., 1992. The Historiclity of cognition: implications for Science Education. *Journal of Research in Science Teaching*, 29 (4), 423-434.

WENHAM, M., 1993. The nature and the role of hypotheses in school science investigations. *International Journal of Science Education*, 15, (3), 231-240.

ZUBIMENDI, J.L., 2004. *La enseñanza de la capacidad eléctrica en primer ciclo de universidad: análisis de dificultades y propuesta alternativa*. Tesis doctoral. Departamento de Física Aplicada. Universidad del País Vasco.















