

# TRABAJO FINAL DE MÁSTER

---

**Título: Riesgo de Longevidad y Reaseguro**

**Autoría: Óscar Zarzoso Altemir**

**Tutoría: Francisco Javier Sarrasí Vizcarra**

**Curso académico: 2019 – 2020**



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat d'Economia  
i Empresa

Màster  
**de Ciències  
Actuarials  
i Financeres**

El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto.

## **Resumen:**

Español:

El objetivo de este trabajo es el de investigar un nuevo riesgo al cual se enfrentan las compañías de seguros, dicho riesgo es el de longevidad. He decidido estudiarlo ya que parece, a priori, un riesgo bastante desconocido por el público general y creo que puede tener una gran relevancia durante el siglo XXI, pudiendo afectar en gran manera al sector asegurador. En el trabajo no sólo me limitaré a estudiar este riesgo, sino que también haré referencia a las distintas formas de mitigación o prevención que están en el mercado, centrándome en el reaseguro.

Inglés:

The objective of this project is to investigate a new risk faced by insurance companies which is longevity risk. I have decided to study the longevity risk since it seems a risk quite unknown to the general public and I think it can have a great relevance during the 21st century and can heavily hurt the insurance sector. At this project I will not only going to limit myself to studying this risk, but I will also investigate the different forms of mitigation that are currently in the market. I will focus mainly in reinsurance.

## **Palabras clave:**

Español:

Riesgo de longevidad, Solvencia II, Renta Vitalicia, Reaseguro, Esperanza de vida.

Inglés:

Longevity risk, Solvency II, Life Annuity, Reinsurance, Life expectancy.

# Índice

1. Introducción.....	2
2. Primeras acciones ante el riesgo de longevidad .....	3
3. Envejecimiento .....	4
4. Evolución de la esperanza de vida.....	7
5. Gestión del riesgo de longevidad .....	11
6. Modelización de la mortalidad .....	14
6.1. Orígenes de la modelización de la mortalidad.....	14
6.2. La necesidad de estimar mejor la mortalidad .....	15
6.3. Modelización de la mortalidad a partir de las Tablas de Vida.....	16
6.4. Modelización de la mortalidad a partir de modelos estocásticos.....	19
7. Mitigación del riesgo de longevidad: Reaseguro .....	24
7.1. Herramientas disponibles de mitigación del riesgo de longevidad.....	24
7.2. Reaseguro en el ramo de vida .....	25
7.3. Clasificación de los reaseguros según el criterio técnico .....	26
7.3.1. Reaseguro Proporcional .....	26
7.3.2. Reaseguro no proporcional.....	30
8. Propuestas de reaseguro del riesgo de longevidad .....	31
9. Caso práctico .....	33
9.1. Presentación del caso práctico .....	33
9.2. Mitigación del riesgo de longevidad por parte de la aseguradora: Reaseguros ...	35
9.2.1. Reaseguros desde la edad de jubilación .....	35
9.2.2. Reaseguro a partir de la esperanza de vida .....	38
9.3. Comparativa entre los distintos reaseguros .....	42
10. Conclusiones.....	44
11. Referencias .....	45
12. Anexos.....	46

## 1. Introducción

El incremento de la longevidad es una de las consecuencias del desarrollo social, económico y científico. En la actualidad, estamos viviendo uno de los momentos históricos con mayores avances científicos y técnicos y como resultado las generaciones están sobreviviendo cada vez hasta edades más avanzadas.

El hecho de que esta tendencia continuará es poco discutido y casi todo el mundo lo da por hecho. Realmente, la mayor incertidumbre está en torno a cuan acusada será la tendencia con la que aumente la supervivencia y hasta que edad la gente podrá sobrevivir. A causa de la dificultad de medir esto, existe el riesgo de longevidad. Rodríguez-Pardo del Castillo (2011).

El riesgo de longevidad es aquel relacionado con las consecuencias económicas negativas que puede tener que las personas vivan más años de los esperados.

El hecho de que las personas vivan más de lo que se espera tiene consecuencias negativas para los particulares, las compañías aseguradoras y el sector público.

A los particulares les afecta de manera negativa ya que en la etapa de su vida en la que son más vulnerables pueden quedarse sin recursos al no haber planificado bien su jubilación. La mayoría de las personas en España tienen un nivel de cultura financiera bajo, con lo que gran parte de ellos no planifican lo suficientemente bien su retiro. A parte de esto, muy pocos de ellos tienen en cuenta riesgos como el de la longevidad o la posibilidad de que el sistema público de pensiones quiebre. Los que son conscientes de los riesgos que existen en la actualidad han buscado maneras de mitigarlos. Uno de ellos, el más usado, es la contratación de un seguro de rentas vitalicias. Con ello, trasladan su exposición al riesgo de longevidad a las compañías aseguradoras. En España, teniendo en cuenta las características propias que tiene la planificación de la jubilación, el peso del sector privado como proveedor de rentas durante el retiro es menor que en otros países como el caso del Reino Unido. Albarrán et al. (2014).

En cuanto a las compañías aseguradoras, estarán expuestas al riesgo de longevidad las que actúan en el ramo de vida. Estas, incurrirán en el riesgo de longevidad cuando los asegurados de su cartera sobrevivan más años de los que la compañía había estimado. En caso de que esto ocurra, la aseguradora puede no tener recursos suficientes para el pago de las prestaciones.

Para mitigar los efectos adversos y reducir la posibilidad de insolvencia a causa del riesgo de longevidad, este está contemplado dentro del marco de Solvencia II, el cual establece una cierta carga de capital para las compañías con carteras de pólizas expuestas a este riesgo.

El sector público también se puede ver afectado por la posibilidad de que los ciudadanos sobrevivan cada vez a edades más avanzadas. Un claro caso es el referente a las pensiones

públicas en España, el cual se basa en un sistema de reparto. Este se enfrenta a dos retos: primero, a la inversión de la pirámide poblacional aumentado cada vez más la gente que debe recibir pensión y reduciéndose aquellos que cotizan y por lo tanto aportan al sistema. Y segundo, el incremento del tiempo que los ciudadanos reciben pensión el cual crece al ritmo que se incrementa la esperanza de vida y la edad modal de fallecimiento. Siendo la edad modal de fallecimiento aquella edad en la que más individuos de una población mueren.

Estos agentes económicos deben tomar en consideración la importancia y el reto que supone la exposición al riesgo de longevidad ya que si no se remedian sus efectos adversos el incremento de la esperanza de vida y de las tasas de supervivencia pueden reducir la calidad de vida.

El objetivo de este trabajo es estudiar el riesgo de longevidad, ver qué lo causa y qué posibles soluciones existen o se pueden crear para mitigarlo.

El trabajo se estructurará de la siguiente manera:

- Estudio del envejecimiento y de la esperanza de vida.
- Gestión del riesgo de longevidad.
- Modelización de la mortalidad.
- Maneras de mitigar el riesgo de longevidad.
- Caso práctico.

## 2. Primeras acciones ante el riesgo de longevidad

En el futuro cercano tal y como se ha comentado en el apartado anterior se espera que se incremente la demanda de pensiones privadas. En particular, se prevé un incremento de la demanda de seguros de rentas vitalicias para contrarrestar la pérdida de la tasa de sustitución que se espera de las pensiones públicas. Además de para mantener el poder adquisitivo la contratación de esta renta significará una cobertura ante el riesgo de longevidad para los ciudadanos.

Las rentas vitalicias funcionan de la siguiente manera: si el asegurado sobrevive a una edad determinada se le debe pagar una renta hasta que este fallezca. Esto, genera un pasivo para la compañía de seguros la cual tiene una obligación de pago por un tiempo indefinido.

Al aumentar la esperanza de vida, en las aseguradoras con seguros de rentas vitalicias en su cartera se incrementan los pasivos. Al aumentar los pasivos crece la exposición al riesgo de longevidad.

Para solucionar esta exposición, es muy necesario una correcta proyección de la longevidad esperada. En caso contrario, la aseguradora podría estar suscribiendo riesgos que no serían rentables. Esto podría provocar que la compañía entrase en una situación

de insolvencia en la que los pasivos superasen a los activos de la aseguradora y por lo tanto esta fuese incapaz de afrontar sus obligaciones de pago de prestaciones.

Actualmente, las aseguradoras se enfrentan a situaciones similares a las comentadas en el párrafo anterior. Ha sido un error común durante el pasado el subestimar el aumento de la esperanza de vida, en especial en España, antes de la implantación en el año 2000 de las tablas generacionales, Albarrán et al. (2014). Una vez que se establece el uso de tablas generacionales, se reduce, al menos parcialmente, el riesgo de tablas y por tanto no se subestima en principio la evolución de la esperanza de vida en el futuro. Más adelante, se expondrá con profundidad que son las tablas generacionales y qué las diferencia de sus predecesoras.

El regulador, a nivel europeo EIOPA (Autoridad Europea de Seguros y Pensiones de Jubilación) y a nivel español DGSFP (Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones), supervisa la solvencia de las compañías europeas y establecen un marco de comparación de su músculo financiero a través de la normativa de Solvencia II.

Solvencia II establece un marco de prudencia a la hora de calcular las provisiones técnicas y establece unos incrementos de los niveles de capital requeridos en función de la exposición al riesgo de longevidad. A parte, exige a la dirección una postura activa en relación con la gestión del riesgo de longevidad.

Además de provisionar capital para hacer frente a una posible pérdida económica debida al riesgo de longevidad, se han creado distintos instrumentos financieros que permiten mitigarlo. Uno de ellos, es el reaseguro de longevidad. Este, es un instrumento no muy conocido que describiré y presentaré en la parte final del estudio.

### 3. Envejecimiento

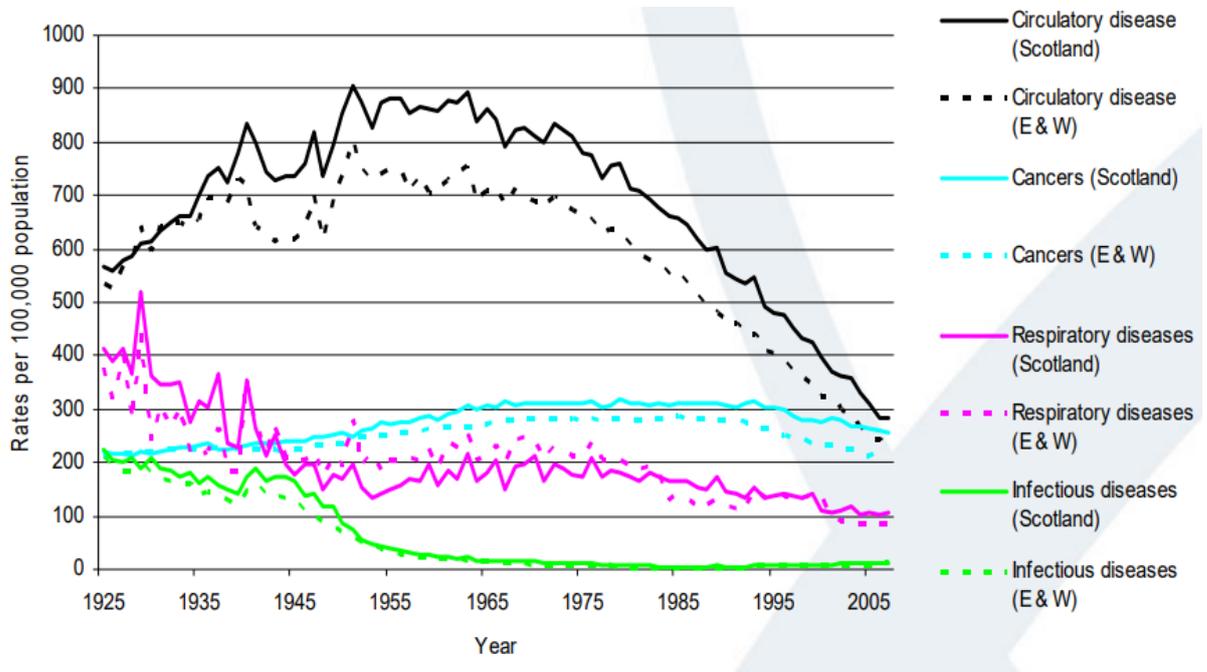
Para poder controlar el riesgo de longevidad es necesario modelizar como la mortalidad evolucionará en el futuro. Y para ello, es preciso entender las causas que generan el envejecimiento humano, el cual, en última instancia provoca el fallecimiento por causas naturales.

Una de las maneras más comunes para entender el envejecimiento es a través de la observación de aquellas poblaciones con una esperanza de vida mayor. Por medio de la observación de estas se pueden intuir patrones de comportamiento y tendencias que se podrían extrapolar a otras poblaciones para poderlas entender mejor y saber cómo va a evolucionar su esperanza de vida, basándonos en los hechos observados. Una manera posible de proyectar la esperanza de vida es a través de la creación de una serie de biomarcadores que puedan medir la fragilidad de la vida humana para cada tramo de edad. Albarrán et al. (2014).

A parte de la creación de los biomarcadores, también se deberían estudiar las causas de muerte prematura, muchas las cuales permitirían saber cuáles son las fuerzas impulsoras

de las mejoras de la mortalidad humana. Es decir, si se conociesen las causas de muerte prematura que son lo que hace que un cierto grupo de individuos fallezcan antes de la edad modal de fallecimiento, se conseguiría en muchos casos evitarlas. Resultando la reducción de la mortalidad anticipada en un incremento de las tasas de supervivencia.

**Figura 1.** Evolución de las muertes prematuras causadas por distintos tipos de enfermedades para hombres en el periodo 1925 – 2007.



*Fuente: Scottish mortality: past, present and future, PAMS conference, 30 October 2009, Adrian Gallop, ONS.*

En la figura anterior, el eje de ordenadas indica el número de individuos por cada 100.000 que morían a causa de una de las enfermedades estudiadas para el periodo 1925-2007. Siendo las enfermedades estudiadas aquellas relacionadas con las dolencias vasculares, los cánceres, las enfermedades respiratorias y las enfermedades infecciosas. En el eje de abscisas, se indica cada uno de los años del periodo estudiado. Las poblaciones estudiadas han sido la escocesa (Scotland) y la inglesa y galesa (E & W).

Tal y como se aprecia, el número de muertos ocasionado por 3 de las 4 enfermedades estudiadas para cada uno de los años se ha venido reduciendo desde los años 50. En especial, se distingue una gran reducción para el número de muertos ocasionados por enfermedades circulatorias. También, se aprecia cómo la única de las enfermedades que no ha reducido el número de muertos desde entonces ha sido el cáncer. Esta figura es muy explicativa ya que en ella se aprecia perfectamente cómo a través de las mejoras médicas y tecnológicas la mortalidad prematura ha ido reduciéndose desde la mitad del siglo pasado.

Para estudiar las causas de muerte prematura, a lo largo de la historia se han realizado sucesivas investigaciones. Una de las más destacables e ilustrativas ha sido la realizada por Breslow y Enstrom (1980). En ella se detallan los siete hábitos más beneficiosos para la salud. Los hábitos que se identificaron en dicho estudio son los siguientes:

- No fumar.
- Beber alcohol con moderación.
- Comer de forma regular durante el día.
- Dormir entre siete y ocho horas al día.
- Realizar ejercicio asiduamente.
- Desayunar cada día.
- Mantener un peso moderado en función de las características personales.

El estudio concluyó que una persona de 45 años que siguiera 6 de los 7 hábitos anteriormente mencionados podría llegar a vivir hasta 11 años más que un individuo que solo siguiese 3 de los 7.

El mismo doctor Breslow practicó estos hábitos saludables que se proponían en el estudio y falleció a la edad de 97 años.

Otro elemento para destacar expuesto por Albarrán et al. (2014) son las causas de las muertes prematuras. En él se explica lo siguiente:

- Un 40% de las causas de muerte prematura tienen que ver con el comportamiento de los individuos, es decir, serían evitables si se modificasen malos hábitos.
- El 30% son debidas a la genética y por lo tanto no se pueden evitar en la mayoría de los casos al no ser que se lleven a cabo tratamientos y conductas de tipo preventivo.
- El 15% son sociales como sería la muerte en accidentes de tráfico, entre otras.
- El 10% son debidas a la deficiencia del sistema sanitario.
- Y el restante 5% está causado por el medio ambiente.

El último punto está siendo controvertido ya que en la actualidad existe un problema de contaminación en las zonas urbanas. Durante estas últimas décadas se han iniciado algunas políticas para intentar reducir lo máximo posible los niveles de contaminación en las grandes ciudades. Con ello, se espera que las personas que vivan en estas zonas tengan una mejor calidad de vida y disminuyan las consecuencias adversas de la polución en las ciudades.

Otro estudio publicado en Archives of Internal Medicine (2010) muestra unos resultados similares ya que estima que llevar una vida saludable con unos hábitos poco perniciosos para la salud puede conllevar un incremento de la esperanza de vida de hasta 12 años.

El estudio se basó en los resultados obtenidos de la observación de una población de 5.000 personas en Reino Unido durante 20 años, la cual concluyó que el cuidado de la alimentación y la realización de forma periódica de deporte conlleva incrementos significativos de la esperanza de vida.

Los incrementos demostrados por ambos estudios son muy significativos ya que en caso de que se produjeran los incrementos de la esperanza de vida que en ellos se muestran esta se situaría muy cercana a aquella establecida como un límite biológico de supervivencia del ser humano, que regularmente, lo podemos localizar sobre la edad modal de fallecimiento. En la actualidad se suele establecer este límite sobre los 95 años. Rodríguez-Pardo del Castillo (2011).

#### 4. Evolución de la esperanza de vida

En los países desarrollados en general la esperanza de vida ha ido incrementándose de manera paulatina desde mediados del siglo XIX. El incremento de la esperanza de vida ha tendido a homogeneizarse entre los países del mundo desarrollado durante este periodo y también entre todos los países del mundo más recientemente. A pesar de ello, aún existen diferencias en términos de esperanza de vida entre los países desarrollados y aquellos que están en el proceso de industrializarse.

Una cuestión que despierta mucho interés e incertidumbre es si estos incrementos de la esperanza de vida que se han dado durante el pasado van a seguir en el futuro. Otro factor que preocupa tanto a compañías aseguradoras como a reguladores es si la intensidad de los incrementos de la esperanza de vida se va a sostener o si por el contrario va a variar. Albarrán et al. (2014).

Una variación positiva de la tendencia sería un hecho preocupante para las compañías aseguradoras ya que supondría un incremento del riesgo de longevidad. Este hecho, se tratará ampliamente durante el estudio ya que una variación en la tendencia de la esperanza de vida tendría un impacto directo en la rentabilidad de los seguros de rentas vitalicias debido a que estos se calcularon teniendo en cuenta unas tablas que a todas luces se van a quedar desfasadas.

El regulador, ante la existencia de este riesgo y sabiendo las consecuencias nocivas que puede ocasionar lo incluyó dentro de Solvencia II. La normativa busca corregir la insuficiencia de las tablas regulatorias a través de recargos de capital por la existencia de pólizas expuestas a este riesgo.

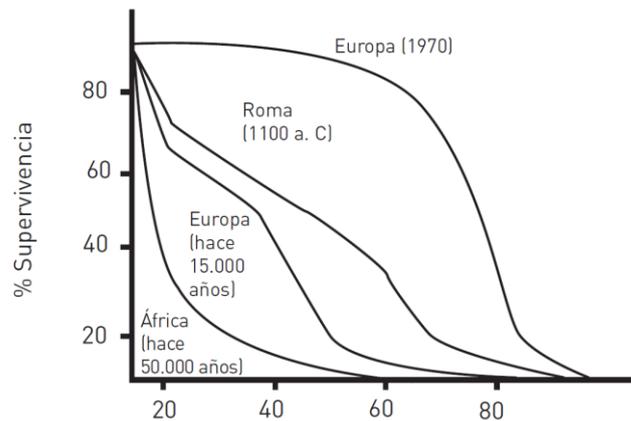
A pesar de que se esperan incrementos de la longevidad estos no son seguros ya que la supervivencia humana es muy difícil de medir. Hay expertos que afirman que a causa de la crisis económica del 2008 la supervivencia humana puede dejar de aumentar e incluso puede comenzar a reducirse. Por otro lado, científicos como el gerontólogo Aubrey de Grey afirman que la primera persona que viva más de 1.000 años ya ha nacido.

La evolución de la probabilidad de supervivencia a una edad y por lo tanto de la esperanza de vida ha sido afectada por dos fuerzas principalmente a lo largo de la historia, Albarrán et al. (2014) y Rodríguez-Pardo del Castillo (2011):

- Una de ellas, es la que provoca la rectangulización de la curva de supervivencia para cada edad. La rectangulización es debida a la reducción de las tasas de mortalidad para edades jóvenes y adultas. Cuantos menores sean los fallecimientos a esas edades mayor será la rectangulización de la supervivencia. La rectangulización se ha acusado más en aquellos periodos en los que ha habido más paz y avances científicos y técnicos.
- La otra fuerza es aquella relacionada con la extensión del límite de la vida humana. Es la parte donde se cierra el rectángulo. Es decir, el momento a partir del cual la tasa de supervivencia comienza a caer y se van produciendo todas las muertes hasta la extinción de la población.

A continuación, se puede observar una figura en la que se aprecia el porcentaje de supervivencia a lo largo de la historia. En ella se aprecian claramente las fuerzas de rectangulización y cómo evoluciona el límite de vida humano para cada época, Cutler (1984).

**Figura 2.** Comparación de curvas de supervivencia humana a lo largo de la historia.



*Fuente: Cutler (1984).*

En el anterior gráfico se presentan en el eje de abscisas las distintas edades que puede alcanzar un individuo, mientras que en el eje de ordenadas se dispone de la probabilidad de supervivencia de un individuo de una determinada población a una edad.

En el gráfico se ve como al incrementarse el porcentaje de personas que sobreviven a cada edad la curva se va asimilando a un rectángulo. Esto es debido a una reducción de la mortalidad para edades jóvenes y adultas. A lo largo de la historia a causa de los recursos escasos de los que se disponía la mortalidad a esas edades acostumbraba a ser alta.

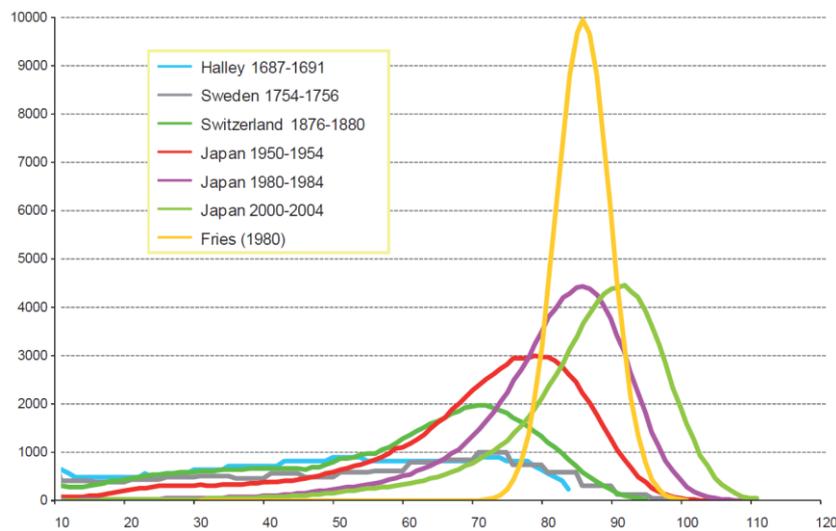
Por otro lado, a medida que la medicina y la técnica han ido mejorando, la edad a partir de la cual la tasa de mortalidad se incrementa también ha ido aumentando. Sería inimaginable para un ciudadano romano llegar a vivir 90 años, sin embargo, en la actualidad es una edad alcanzable para la mayoría de las personas que viven en países desarrollados.

La existencia de un límite de supervivencia humano es un tanto controvertido ya que cada vez más personas superan edades que antaño no se solían sobrepasar, pero también es cierto que sigue existiendo un límite que nadie supera que es el de los 120 años. Esto hace pensar en que tal vez exista un límite a partir del cual nuestro cuerpo este demasiado degradado como para continuar. Un ejemplo de ello es que desde 1900 tan solo una persona ha superado los 120 años. Albarrán et al. (2014).

Una teoría que ratifica la existencia de un límite de la supervivencia humana es la teoría de la comprensión de la morbilidad. Esta fue propuesta por el investigador Fries en 1980. La hipótesis de esta teoría se basa en la rectangulación de la curva de supervivencia. Fries en su investigación proponía una concentración muy alta de los fallecimientos en las edades avanzadas. Él intuía una caída dramática de la supervivencia en torno a la edad modal de fallecimiento. Según sus estudios alrededor de una cierta edad el ser humano no es capaz de sobrevivir.

A continuación, se expone un gráfico que muestra su predicción de la mortalidad comparada con la mortalidad registrada en el pasado y la distribución de los fallecimientos posteriores a su estudio.

**Figura 3.** Comparación del comportamiento de la mortalidad según Fries y lo observado en el pasado y en el presente.



*Fuente: Society of Actuaries (EE. UU.) (2008)*

En el eje de ordenadas se observa el número de fallecidos para cada una de las poblaciones del estudio. En el eje de abscisas se aprecian las distintas edades de defunción.

Se aprecia como Fries (1980) en su estudio concentraba gran parte de las muertes en torno a la edad modal de fallecimiento. Él concluía que la mayor parte de muertes por causas naturales se situarían en torno a los 90 años. Cayendo de manera dramática la supervivencia a partir de los 75 años. Sin embargo, el comportamiento de la mortalidad de la población japonesa para los periodos 1980-1984 y 2000-2004 demuestra como el

grado de concentración de los fallecimientos no es tan alto y por lo tanto la caída de la tasa de supervivencia no es tan elevada como él preveía. También, demuestra un grado de rectangularización menor al que él suponía en su estudio.

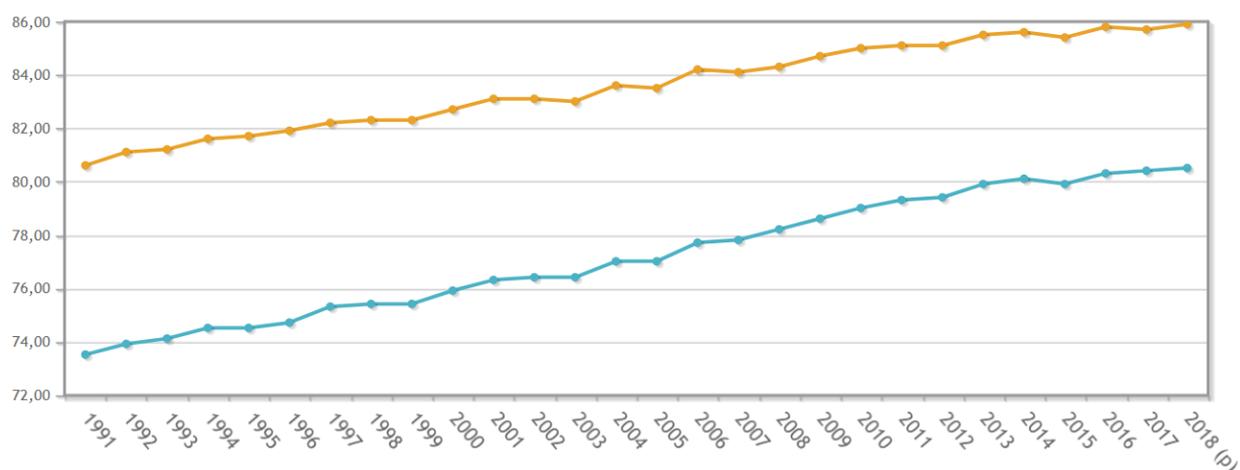
La conclusión que se puede sacar es que el porcentaje de supervivencia tiende a rectangularizarse, existiendo tasas bajas de mortalidad hasta edades avanzadas y después incrementándose estas de manera muy notable. Sin embargo, los valores observados no son tan exagerados como aquellos propuestos por Fries en 1980. Con lo cual, se pueden esperar incrementos de la esperanza de vida superiores a lo que en la actualidad tenemos por el límite de supervivencia humano.

En contraste con la teoría propuesta por Fries, están los estudios realizados por el profesor Gavrilov (2019), el cual, sostiene que durante las próximas décadas gracias a las terapias biomédicas se alargará significativamente la esperanza de vida de las personas, incluso llegando a sobrepasar lo que en la actualidad se considera el límite humano de la longevidad, Albarrán et al. (2014).

Otro reto que existe en torno al estudio de la supervivencia es el de la modelización actuarial de la mortalidad a edades avanzadas. Esto es debido a la escasez de datos disponibles. A través del estudio de la base de datos Kannisto-Thatcher realizada por Väinö Kannisto y Roger Thatcher en 1993, se pudo concluir que, para edades avanzadas, a partir de 95 años el riesgo de fallecimiento no seguía el modelo de extrapolación de la mortalidad propuesto por Gompertz, Albarrán et al. (2014). Es decir, el número de muertos y de sobrevivientes no decrecía con la edad en progresión geométrica, mientras las edades crecen en progresión aritmética, Gompertz (1825).

A continuación, se puede observar cómo ha ido creciendo la esperanza de vida al nacer en España desde el año 1991. Se aprecia como desde el año 1991 la esperanza de vida al nacer ha pasado de menos de 81 años a casi 86 en el caso de las mujeres y de casi 74 a más de 80 para los hombres.

**Figura 4.** Evolución de la esperanza de vida al nacer.



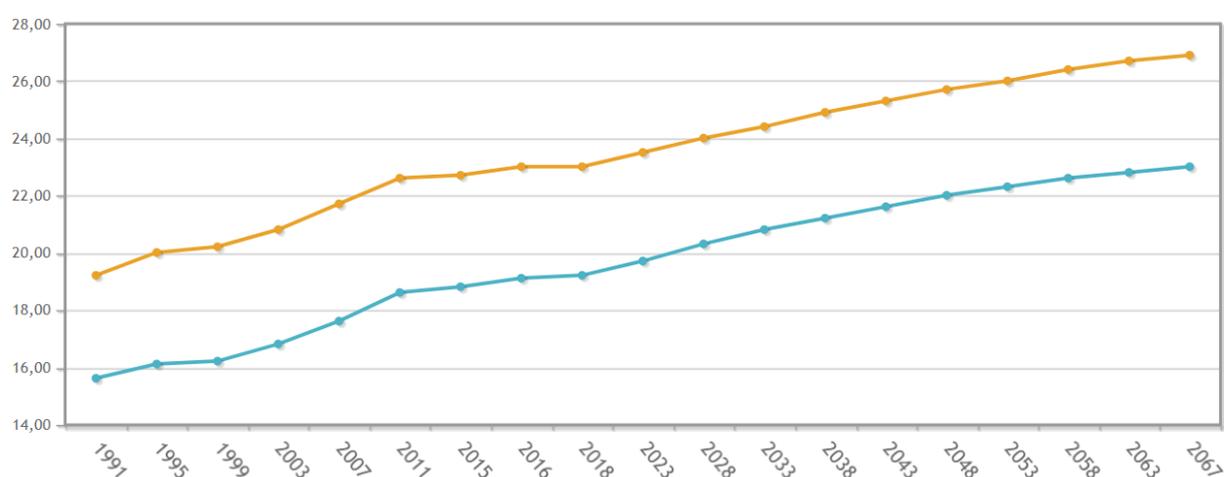
Fuente: Instituto Nacional de Estadística.

En el eje de ordenadas de la figura anterior se sitúan los distintos valores de la esperanza de vida al nacer para cada cohorte. Por otro lado, en el eje de abscisas figura el año de nacimiento de cada cohorte. El color amarillo se refiere a las mujeres, mientras el azul a los hombres.

Claramente, la tendencia que ha tomado la esperanza de vida al nacer en España ha sido positiva.

Para el futuro, desde el Instituto Nacional de Estadística se estiman los siguientes valores en referencia a la evolución de la esperanza de vida a los 65 años, edad tradicional de jubilación en España, en la actualidad 67 años.

**Figura 5.** Proyección de la esperanza de vida a los 65 años.



*Fuente: Instituto Nacional de Estadística.*

En el eje de ordenadas de la figura anterior se sitúan los distintos valores de la esperanza de vida proyectada a los 65 años para cada cohorte. Por otro lado, en el eje de abscisas figura el año de nacimiento para cada cohorte. Al igual que para el gráfico anterior el color amarillo se refiere a las mujeres frente al azul que indica los valores para los hombres.

Tal y como es de esperar la esperanza de vida para aquellos individuos de 65 años va a ir creciendo de manera sostenida hasta el año 2067. Según las estimaciones del Instituto Nacional de Estadística la esperanza de vida a los 65 pasará de menos de 20 a casi 23 años en el caso de los hombres y de 23 años a 27 para las mujeres, en el periodo 2018-2067.

## 5. Gestión del riesgo de longevidad

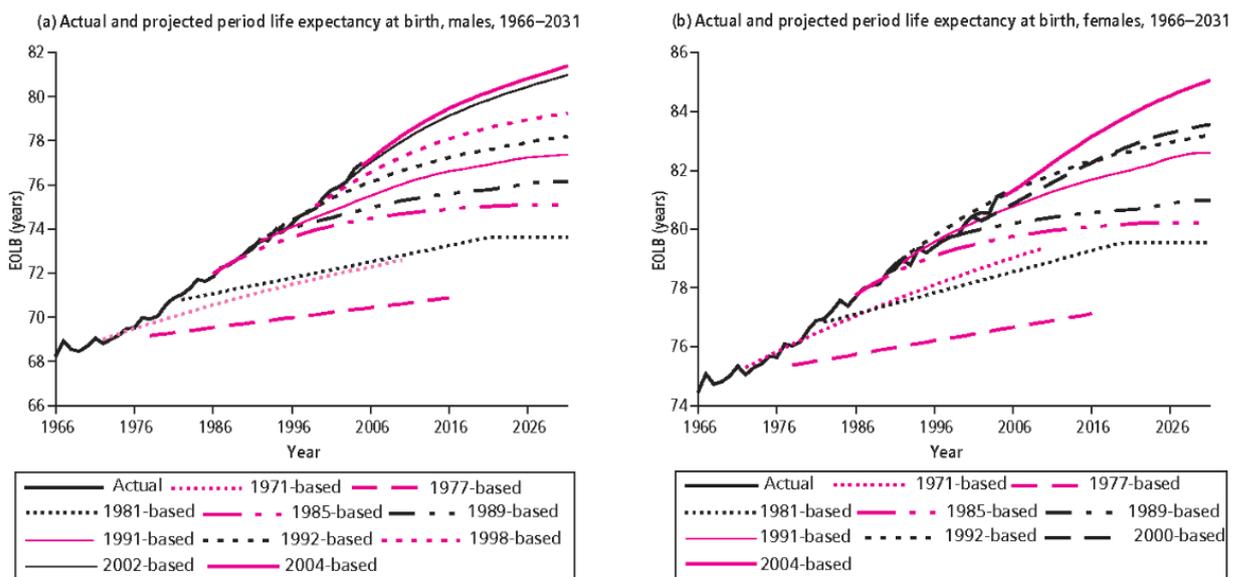
El riesgo de longevidad es aquel riesgo por el que las reservas constituidas para los pagos de seguros de jubilación, invalidez, viudedad y orfandad resultan insuficientes para su

finalidad al haberse basado en el pasado en unas tablas de mortalidad regulatorias que reflejaban hipótesis de supervivencia inferiores a las reales. Albarrán et al. (2014).

El riesgo de longevidad es uno de los riesgos que ocasionan una mayor incertidumbre a las aseguradoras que tienen en su cartera productos de vida y de vida riesgo debido principalmente a la dificultad de medir la evolución de la longevidad en el futuro, tal y como se ha comentado anteriormente. Como consecuencia de ello, la normativa de Solvencia II exige tener una política de gestión de riesgos que incluya dentro de esta cómo se tratará el riesgo de longevidad.

En las operaciones de rentas vitalicias es necesario que se garantice una rentabilidad financiera y actuarial para ofrecer al cliente una renta vitalicia. Sin embargo, a causa de la subestimación del crecimiento de la esperanza de vida, todos los seguros de este tipo han sido calculados teniendo en cuenta unas tasas de mortalidad superiores a las reales. El principal error fue no tener en cuenta la tendencia de la evolución de la supervivencia.

**Figura 6.** Proyecciones de la evolución de la esperanza de vida.



*Fuente: Chris Shaw: “Fifty Years of United Kingdom National Population Projections: How Accurate Have They Been?”.*

En la figura anterior, se muestra en el eje de ordenadas la esperanza de vida al nacer y en el eje de abscisas el año de nacimiento de los individuos para los que se realizan las proyecciones.

En los gráficos anteriores se puede observar la comparación entre la evolución real de la esperanza de vida al nacer y las predicciones hechas en cada momento que estimaban como esta iba a evolucionar en el futuro. Se aprecia claramente como todas las previsiones hechas hasta el año 2005 subestimaron el crecimiento de la esperanza de vida. Especialmente, aquellas que atinaron menos fueron las realizadas en los años 1971, 1977

y 1981. También, se puede observar como la subestimación del crecimiento de la esperanza de vida se llevó a cabo para ambos sexos. Es decir, que tanto las pólizas de hombres como de mujeres están afectas en la actualidad por el riesgo de longevidad debido a la subestimación de este en el pasado.

Un hecho destacable es el que se observa en las estimaciones de a partir del año 2002, las cuales ya otorgan una tendencia mayor al crecimiento de la esperanza de vida.

A continuación, se van a comentar dos subriesgos del riesgo de longevidad:

### **Subriesgo de tendencia:**

El subriesgo de tendencia representa un riesgo de desviación sistemática. Es decir, es la exposición a que las mejoras de la mortalidad en el conjunto de la población sean mayores de lo previsto inicialmente. Albarrán et al. (2014).

Este riesgo es muy difícil de mitigar ya que es sistémico y todos los individuos estarán expuestos a él. El hecho de tener muchas y variadas rentas vitalicias expuestas a este riesgo no mitigará sus consecuencias ya que la tendencia del crecimiento de la esperanza de vida suele ser bastante homogénea.

Los expertos estiman que en el futuro la tendencia siga aumentando, aunque es difícil su estimación. Estos estiman que, durante el siglo XXI, la esperanza de vida aumente a un ritmo de alrededor de 2 años por década, llegando incluso a existir la posibilidad de que aumente la esperanza de vida 1 año cada 4 años, siendo este un incremento de 2,5 años por década. En caso de que la tendencia que estiman se sostenga durante el siglo XXI la esperanza de vida al nacer llegará a ser de 100 años. Cabe añadir que los modelos actuariales de predicción de mejora de la mortalidad determinan que, en Europa occidental, se ha pasado de estimar una mejora anual del 1,5%, a una del 2,5%. Albarrán et al. (2014).

El llegar a una esperanza de vida al nacer de 100 años supondría superar la estimación actual del límite modal de vida. Entendiéndose por límite modal de vida estimado aquella edad a la que se espera que se produzcan el mayor número de defunciones. Es decir, la edad estimada más común para fallecer.

El hecho de que la tendencia de la evolución de la esperanza de vida vaya incrementándose significa que cada año la tasa de supervivencia a cada edad es mayor y por lo tanto la probabilidad de que un individuo fallezca a una edad determinada va reduciéndose. Este hecho tiene una importancia fundamental en lo que hace referencia al riesgo de longevidad ya que los seguros de rentas vitalicias se habrán calculado con unas probabilidades de muerte mucho mayores que las observadas en la realidad.

### **Subriesgo de fluctuación aleatoria:**

Este subriesgo a diferencia del primero no es sistémico y por lo tanto se pueden mitigar sus consecuencias negativas a través de la diversificación.

El subriesgo de fluctuación aleatoria está afectado por 3 subriesgos:

- Subriesgo sociodemográfico: es aquel riesgo en el que se incurre cuando la mortalidad de la población asegurada difiere de la población subyacente. Este, también es conocido como selección adversa.
- Subriesgo de volatilidad: es aquel en el que se puede incurrir cuando la mortalidad de la población asegurada se desvíe a causa de fluctuaciones únicamente estadísticas.
- Subriesgo de cohorte: es el riesgo de que una determinada cohorte tenga una supervivencia superior a la esperada.

Tal y como se ha dicho anteriormente estos riesgos al no ser sistémicos son mitigables. Para mitigarlos se podrán llevar a cabo las siguientes acciones:

- Realizar recargos para mitigar posibles fluctuaciones aleatorias. Se cubren desviaciones de siniestralidad real respecto a la siniestralidad esperada.
- Recargos por posibles cambios en la mortalidad futura. Cubren cambios de la siniestralidad real respecto a la esperada debido a cambios propios del riesgo.
- Recargos por estimaciones incorrectas
- Recargos por reducción de las tasas de mortalidad.

## 6. Modelización de la mortalidad

### 6.1. Orígenes de la modelización de la mortalidad

El estudio de la población humana siempre ha sido de interés por parte de gobiernos e investigadores. Por ejemplo, en los territorios ocupados por el imperio romano, estos debían llevar un cierto recuento de la población que había en ellos para tenerlo en cuenta a la hora de recaudar impuestos y de organizar levadas militares.

A pesar de los estudios demográficos que se hiciesen en el pasado ninguno de ellos hasta el siglo XVII trato con tanta exactitud y precisión la modelización actuarial como aquel hecho por el matemático Jan de Witt a mediados de dicho siglo. El objetivo de su trabajo fue la creación de un informe destinado a determinar científicamente el precio de un seguro de vida usando unas tablas de mortalidad que él creó, convirtiéndose estas en las primeras tablas de mortalidad de la historia. Dicho informe lo realizó para el gobierno neerlandés.

Más tarde Edmund Halley en 1693, construyó también una tabla de vida. La diferencia entre esta tabla y la de Witt es que mientras la de Witt era una tabla hipotética, la de Halley fue construida a través de la observación de la mortalidad de los habitantes de Wroclaw (Polonia). A parte de mejorar las tablas de mortalidad y hacer que se ajustasen mejor a la realidad formuló el cálculo del valor de las anualidades de un seguro de vida.

Con todo esto, se puede concluir que los padres de la matemática del seguro de vida fueron Edmund Halley y Jan de Witt. Ambos fueron los impulsores de los modelos de actuariales deterministas.

La creación de los modelos actuariales estocásticos no llegó hasta el siglo XVIII cuando Johannes Tetens realizó el primer análisis del riesgo de mortalidad de una cartera de seguros. Gracias a sus ideas se dieron los primeros pasos hacia la famosa teoría individual del riesgo.

Desde los orígenes hasta la actualidad, la sofisticación y el ajuste con la realidad de los modelos ha crecido de manera considerable.

## 6.2. La necesidad de estimar mejor la mortalidad

Tal y como se ha ido comentando en los apartados anteriores, la esperanza de vida ha ido creciendo durante este último siglo de manera muy notable gracias a los avances científicos, técnicos y económicos. En especial, durante estas últimas décadas se están llegando a las cotas de esperanza de vida más altas.

A pesar de que desde hace tiempo se sabía que se estaban registrando incrementos de la esperanza de vida, estos no se preveían tan acusados como están siendo, es decir, durante tiempo hubo una subestimación de la tendencia que tomaría la esperanza de vida.

El riesgo de longevidad tal y como lo define el Instituto de Actuarios Británicos es el riesgo de que los miembros de alguna población de referencia puedan vivir más tiempo en promedio que el que se había previsto. Esto implicaría que exista un riesgo de que el valor actual actuarial de las prestaciones a favor de una persona sea inferior al valor actual necesario para pagar dichas prestaciones en los términos previstos.

**Figura 7.** Representación gráfica de la subestimación de la esperanza de vida en hombre y mujeres.



*Fuente: Longevity Risk Policy summary, Institute and Faculty of Actuaries (2015).*

En la figura anterior se puede observar de manera gráfica y comprensible la diferencia entre la esperanza de vida estimada y la observada para la población británica. A pesar de

ser para la población británica es perfectamente extrapolable a la mayoría de los países desarrollados. La diferencia que existe entre lo estimado y lo observado es de 5 años para la población masculina y 10 años en el caso de la femenina.

En concreto, todos aquellos seguros de rentas vitalicias que se contrataron en España previamente a la implantación de las tablas generacionales en el año 2000. Están, expuestos al riesgo de longevidad a causa de una subestimación de la tendencia de la esperanza de vida. Esto es debido a que las tablas previas a las PERM/F del año 2000 predecían unas tasas de mortalidad superiores en ciertas edades que las que se han dado realmente.

Según el Long-term guarantees assessment (2013) de EIOPA la longevidad se espera que se incremente en un 20% si consideramos la fórmula estándar. Por ello, se supervisa que las compañías aseguradoras europeas reserven capital para hacer frente a incrementos de hasta el 20%, tal y como exige Solvencia II. Esto servirá para eliminar el riesgo de longevidad en el 99,5% de los casos durante un año.

Para intentar mitigar el riesgo de longevidad se han desarrollado modelos que permitan ajustar mejor lo que se estima con lo que realmente sucede y como consecuencia eliminar la subestimación de la esperanza de vida.

Estos modelos estimarán los pasivos futuros, es decir, las prestaciones futuras, a través de las proyecciones de la mortalidad. Si las proyecciones de la mortalidad están bien hechas y se ajustan de manera correcta a la realidad se reduciría el subriesgo de tendencia y no habría subestimación.

Para predecir la mortalidad se usan 2 tipos de modelos, los cuales se explicarán a continuación.

Las variables que tienen en cuenta estos modelos para estimar la evolución de la longevidad para el futuro son:

- Edad.
- Sexo.
- La cohorte a la que pertenecen los individuos.

### 6.3. Modelización de la mortalidad a partir de las Tablas de Vida

La modelización a través de tablas es uno de los métodos más habituales para estudiar la mortalidad asociada a una población o colectivo. Las tablas de vida o también llamadas tablas de mortalidad representan un modelo teórico determinista que permite medir las probabilidades de defunción o de supervivencia de los individuos de una población en función de su edad.

Las tablas que se utilizan actualmente para valorar operaciones de seguros de vida son las PASEM/F 2010 (Población Asegurada Española Masculina/Femenina). Estas, pasaron a

sustituir las tablas GKM 95 (Masculina) y GKF 95 (Femenina) en el año 2010 para los seguros de vida como el seguro de fallecimiento.

En el caso de las operaciones de supervivencia, entre las cuales están las operaciones de rentas vitalicias, se usan las tablas PERM/F (Tablas Generacionales Españolas de Supervivencia Masculina/Femenina) del año 2000. Las nuevas tablas de mortalidad han pasado a sustituir a las antiguas tablas GRM 80 y GRF, las cuales no eran generacionales.

La principal diferencia entre ambas tablas es que mientras las PASEM/F son estáticas las PERM/F son dinámicas. Este hecho es de una importancia vital ya que permite que la probabilidad de fallecimiento dependa, no sólo de la edad y del sexo de una persona, sino también del año de nacimiento. Es decir, el uso de una tabla generacional nos permite tener una tabla distinta para cada generación, hecho por el cual podemos ajustarnos mejor a las probabilidades de fallecimiento de cada cohorte. Sin embargo, el hecho de que sean dinámicas no reduce de manera necesaria el riesgo que existe de no ajustarse de manera adecuada a la tendencia que pueda tomar la supervivencia en el futuro.

En el pasado la mayoría de las aseguradoras han salido ganando con las operaciones de seguros de vida (seguros de fallecimiento), a causa del descenso en las probabilidades de fallecimiento. Es decir, se han beneficiado de la subestimación del crecimiento de la esperanza de vida ya que sus tablas recogen una tasa de mortalidad mayor a la mortalidad real.

A continuación, se muestra un extracto de la tabla PASEM/F 2010. Cabe destacar que esta tabla como hemos comentado anteriormente no es generacional con lo que no recoge información concreta para cada cohorte. Esta, incluye la siguiente información:

- $q_x$  (hombre): es la probabilidad de que un hombre que llega vivo a la edad  $x$  sobreviva un año más.
- $q_x$  (mujer): es la probabilidad de que una mujer que llega viva a la edad  $x$  sobreviva un año más.

**Figura 8.** Extracto inicial de la tabla de mortalidad PASEM/F 2010.

Edad	$q_x$ (hombre)	$q_y$ (mujer)
0	0,005807	0,004744
1	0,000418	0,000376
2	0,000349	0,000307
3	0,000287	0,000245
4	0,000236	0,000195
5	0,000200	0,000157

*Fuente: «BOE» núm. 174, de 21 de julio de 2012, páginas 52491 a 52495.*

El extracto anterior, recoge las probabilidades de fallecimiento para individuos de entre 0 y 5 años. Sin embargo, la tabla alcanza edades muy superiores cuantificando la probabilidad de fallecimiento de individuos de hasta 120. A pesar de que la tabla llega

hasta 120, esta estima que la probabilidad que tiene de fallecer un individuo que llega vivo a los 112 años antes de un año es del 100%.

A continuación, se puede observar como la tabla limita la supervivencia de un individuo a los 112 años.

**Figura 9.** Extracto final de la tabla de mortalidad PASEM/F 2010.

109	0,897733	0,882519
110	0,942245	0,927507
111	0,987609	0,973152
112	1,000000	1,000000
113	1,000000	1,000000
114	1,000000	1,000000
115	1,000000	1,000000
116	1,000000	1,000000
117	1,000000	1,000000
118	1,000000	1,000000
119	1,000000	1,000000
120	1,000000	1,000000

*Fuente:* «BOE» núm. 174, de 21 de julio de 2012, páginas 52491 a 52495.

Por otro lado, están las Tablas Generacionales Españolas de Supervivencia masculinas y femeninas. Estas, fueron realizadas por parte de una comisión técnica para el estudio continuado de la mortalidad creada en el año 1998 de manera conjunta entre UNESPA, el Instituto de Actuarios Españoles, ICEA y la Dirección General de Ordenación de la Seguridad Social, y posteriormente el Instituto Nacional de Estadística.

Cuando se aprobó e instauró el uso de las tablas de mortalidad PERM/F se crearon dos tablas:

- La PERM/F 2000P que es aquella tabla hecha para el cálculo de las pólizas de seguros de nueva creación, es decir, de todas aquellas pólizas suscritas a partir del año 2000.
- La PERM/F 2000C es la tabla que se aplica a las pólizas que estaban en vigor cuando se aprobó la implementación de las tablas generacionales para el cálculo de las rentas de supervivencia. Para adaptarse a las nuevas tablas se tuvo que efectuar una dotación al inicio del año 2000, el plazo que se estableció para realizar la dotación de adaptación fue hasta el 1 de enero del 2001.

A continuación, se podrá observar un extracto de las tablas PERM/F 2000C.

Antes de nada, hay que recordar que, a diferencia de las tablas mostradas y explicadas anteriormente, las PASEM/F 2000C, son dinámicas, es decir, la probabilidad de fallecimiento depende, no sólo de la edad y del sexo de una persona, sino también del año de nacimiento. A causa de ello, su interpretación es más complicada y sus resultados más ajustados a la realidad. Con ello, se pretendía eliminar el riesgo de tendencia, es decir, se buscaba eliminar la subestimación de la esperanza de vida.

**Figura 10.** Extracto inicial de la tabla de mortalidad PERM/F 2000C.

**Para los contratos en cartera**

**Tablas PERM/F2000C**

Año de Nacimiento	Tabla Base. $q_x$ ( en tanto por mil )		Factor de mejora de $q_x$ ( $\lambda$ )	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
2000	6,487	3,633	0,0000	0,0400
1999	0,638	0,298	0,0000	0,0400
1998	0,339	0,221	0,0000	0,0400
1997	0,300	0,149	0,0000	0,0400
1996	0,254	0,144	0,0000	0,0400
1995	0,247	0,119	0,0000	0,0400
1994	0,223	0,108	0,0000	0,0400
1993	0,216	0,098	0,0000	0,0400

Fuente: «BOE» núm. 244, de 11 de octubre de 2000, páginas 34882 a 34895.

Una vez se ha observado la tabla anterior, esta se debe reformular para adaptarla a la generación de cada uno de los individuos que quieren contratar una renta de supervivencia. El proceso que se debe seguir es el siguiente:

1. Se deben observar cada una de las probabilidades de fallecimiento de la tabla base.
2. Es preciso llevar a cabo un factor de conversión para cada edad de generación. Este factor de conversión es la exponencial del producto de menos el factor de mejora ( $\lambda$ ) por el año de nacimiento menos año de generación ( $t$ ).
3. Se determina la edad a partir de la diferencia entre 2000 menos año de generación.
4. Se calcula la probabilidad de fallecimiento para la cohorte que queremos estudiar a partir del producto entre la probabilidad de fallecimiento en la tabla base por el factor de conversión.

A modo de simplificación, se puede observar la fórmula que permitirá calcular la probabilidad de fallecimiento que afecta a cada cohorte.

$$q_{(x+t; A)} = q_{(x+t; \text{tabla Base})} * e^{[-\lambda_{x+t} * t]}$$

#### 6.4. Modelización de la mortalidad a partir de modelos estocásticos

Para estudiar la mortalidad, a parte de las Tablas de Vida, comentadas en el apartado anterior, también se usan los modelos estocásticos.

Cuando un modelo se denomina estocástico significa que este se basa en la evolución de una variable aleatoria, en nuestro caso la mortalidad de una determinada población o colectivo. Un modelo estocástico sirve para estimar las distribuciones de probabilidad de los resultados potenciales al permitir la variación aleatoria a lo largo del tiempo. La variación aleatoria se basa en las fluctuaciones observadas en los datos históricos para un período determinado. Las distribuciones de resultados potenciales se derivan de una gran

cantidad de simulaciones, las cuales también se llaman proyecciones estocásticas, que reflejan la variación aleatoria en las entradas.

Los primeros modelos estocásticos se empiezan a desarrollar en la década de los 90s. Siendo uno de los más relevantes para el caso que se quiere analizar en este estudio el modelo de Lee Carter. En concreto, el modelo de Lee Carter se desarrolla en el año 1992.

Según Albarrán et al. (2014), los métodos de proyección se basarán en la observación del pasado y asumirán que en el futuro la supervivencia se comportará de una manera similar a como lo ha hecho en el pasado. Estos modelos, les dan una relevancia mayor a las observaciones del pasado más reciente ya que entienden que estas tendrán una relevancia mayor en cómo se comportará la supervivencia en el futuro próximo. Tal y como es lógico, estos modelos predicen mejor el comportamiento de la supervivencia en el futuro próximo que para el más lejano.

Los modelos estocásticos que estudian la mortalidad se pueden dividir en 2 grandes grupos:

- Aquellos que se centran en el logaritmo de la fuerza de la mortalidad. Siendo la fuerza de la mortalidad el cociente entre los fallecidos de una edad en un periodo determinado y los expuestos centrales al riesgo de fallecimiento de esa misma edad durante el mismo periodo. A continuación, se muestra la fórmula de la tasa de mortalidad bruta, la cual, se asume como hipótesis en este caso, que es igual a la fuerza de la mortalidad, Albarrán et al. (2014):

$$\mu(x, t) = m(x, t) = \frac{\text{Muertos a la edad } x \text{ durante el periodo } t}{\text{Población media durante el periodo } t \text{ de edad } x}$$

- Aquellos que se centran en el logaritmo de la tasa de mortalidad. Siendo la tasa de mortalidad el cociente entre el número de fallecidos de una misma edad durante un periodo determinado de tiempo y el número de individuos que llegan vivos a esa misma edad.

$${}_t q_x = \frac{\text{Muertos a la edad } x \text{ durante el periodo } t}{\text{Población que llega viva a la edad } x}$$

En todos ellos, se asume que el número de fallecimientos se distribuyen como una Poisson y que se pueden ajustar por medio de un GLM (Modelo Lineal Generalizado) o un GNM (Modelo No-lineal Generalizado). Albarrán et al. (2014).

A continuación, se mostrarán algunos modelos de manera breve y esquemática para el conocimiento por parte del lector:

### **1 - Modelo Lee Carter:**

El modelo Lee Carter fue desarrollado por los investigadores Lee y Carter en 1992 y es uno de los primeros modelos estocásticos que estudian la distribución de la mortalidad.

En concreto, se centra en el estudio de logaritmo de la fuerza de la mortalidad. Gorosi y King (2007).

A continuación, se puede observar cómo se formula:

$$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$$

En este caso  $\alpha_x$  es el efecto de la edad,  $\kappa_t$  el efecto del periodo de tiempo a estudiar y  $\beta_x$  es la velocidad con la que cambia la fuerza de la mortalidad.

El principal inconveniente que presenta el modelo de Lee Carter, según Albarrán et al. (2014), es el problema de identificabilidad. Es decir, que cuando se realizan transformaciones en los parámetros y en la variable incluida se obtienen los mismos resultados para todos los casos en la variable estimada. Para evitarlo será necesario llevar a cabo diferentes transformaciones sobre la  $\beta_x$  y sobre  $\kappa_t$ . Sin embargo, las ventajas más grandes del modelo Lee Carter son la sencillez y la fácil interpretación de sus parámetros.

Se establecen las siguientes restricciones:

$$\sum_i \beta_i = 1$$
$$\sum_t \kappa_t = 0$$

## 2 - Lee Carter suavizado a través de B-spline:

Uno de los problemas más grandes que tiene el modelo Lee Carter es la volatilidad que puede tener  $\beta_x$  cuando el número de muertes de la población es pequeño. Esto representa un grave problema para las compañías aseguradoras ya que sus carteras no acostumbran a ser lo suficientemente grandes como para que se evite la volatilidad excesiva de  $\beta_x$ . Esta, se ajusta mucho mejor cuando se realizan estudios macroeconómicos con datos de países, según Albarrán et al. (2014).

Para corregir esto, se llevó a cabo una modificación que fue realizada por Delwarde (2007). La cual suponía la sustitución de  $\beta_x$  por una suavización a través de B-spline.

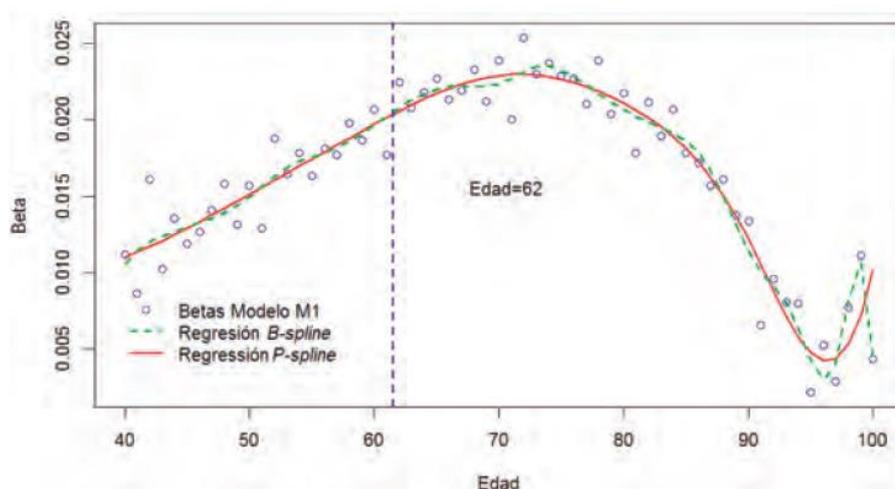
Se aprecia de manera visual en la figura 11 la diferencia existente entre Lee Carter (llamado M1 en la figura 11) y la regresión con B-spline. Se observa cómo se reduce la volatilidad y se suavizan los resultados.

Otra de las mejoras introducidas por Delwarde (2007) a este método es que no se necesitan establecer restricciones para que el modelo sea identificable.

### 3. Lee Carter suavizado a través de P-spline:

Otra manera de suavización es a través de P-splines. La comparación entre las 2 suavizaciones se puede apreciar gráficamente en la figura siguiente. Este, al igual que el anterior, tiene el objetivo de reducir la volatilidad de las  $\beta_x$  cuando las poblaciones no sean lo suficientemente grandes, Currie (2013)

*Figura 11. Suavización a través de B-spline y P-spline.*



*Fuente: El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II, Albarrán et al. (2014).*

### 4 - Modelo APC:

El nombre de este modelo está formado por las siglas de las palabras Age-Period-Cohort, estas palabras en inglés significan edad, periodo y cohorte. El hecho de incluir ambas en el propio nombre es indicativo de que la estimación del modelo se realiza a partir de la observación de los efectos de la edad a estudiar ( $\beta_x$ ), del periodo de edades ( $\kappa_t$ ) y de la cohorte a la que pertenezca el individuo o individuos a estudiar ( $\gamma_t$ ).

A continuación, se puede observar la expresión del modelo APC, Albarrán et al. (2014):

$$\ln m(t, x) = \beta_x + \kappa_t + \gamma_{t-x}$$

### 5 – Modelo de Renshaw y Haberman:

Este modelo fue especificado por parte de los investigadores Renshaw y Haberman (2006). El modelo es una generalización del modelo Lee Carter, pero incluyendo a parte del efecto debido a la edad de estudio  $\beta_x$  y periodo de edades de estudio simbolizados por  $\kappa_t$ , se incluye el efecto de la cohorte  $\gamma_{t-x}$ .

Para que se pueda apreciar, a continuación, se muestra la especificación del modelo:

$$\ln m(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}$$

Este modelo al igual que el Lee Carter y el APC se centra en el estudio de logaritmo de la fuerza de la mortalidad.

Según Albarrán et al. (2014) el modelo Lee Carter se puede ver como un caso particular del Renshaw y Haberman cuando  $\beta_x^{(3)}$  es igual a 0. También al igual que el modelo Lee Carter, este presenta problemas de identificabilidad por lo que es necesario imponer restricciones sobre los parámetros. Entre ellas, encontramos las siguientes:

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0$$

$$\sum_t \beta_t^{(2)} = 1$$

$$\sum_t \gamma_{t-x} = 0$$

$$\sum_t \beta_t^{(3)} = 1$$

## 6 – Modelo CBD:

El modelo CBD toma el nombre a partir de las siglas de los investigadores Cairns, Blake y Dowd. Este, fue desarrollado en el año 2006. A diferencia de los anteriores que se centraban en el estudio del logaritmo de la fuerza de la mortalidad, este se centra en el logaritmo de la tasa de mortalidad ( $\log itq(t,x)$ ). En otras palabras, es un modelo que estudia las probabilidades de fallecimiento.

Según Albarrán et al. (2014), el modelo CBD no presenta problemas de identificabilidad.

La especificación del modelo es la siguiente:

$$\log itq(t,x) = \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$$

Se aprecia como el modelo sólo tiene en cuenta el efecto debido a la edad de estudio y el efecto debido al periodo de edades de estudio.

Según Albarrán et al. (2014), para esta forma del modelo se asume que  $\beta_x^{(1)}$  es igual a 1 y que  $\beta_x^{(2)}$  es la diferencia entre la edad a analizar ( $x$ ) y la media muestral de las edades analizadas  $E[x]$ . A continuación, se muestra la especificación del modelo con las suposiciones anteriores:

$$\log itq(t,x) = \kappa_t^{(1)} + (x - E[x]) \kappa_t^{(2)}$$

A partir de este modelo han salido generalizaciones de este cada vez más sofisticadas como:

- El modelo CBD con efecto cohorte.
- El modelo CBD con efecto cohorte y componente cuadrático.

## 7. Mitigación del riesgo de longevidad: Reaseguro

### 7.1. Herramientas disponibles de mitigación del riesgo de longevidad

Es importante destacar que, para cubrir el riesgo de longevidad, la oferta de posibilidades de cobertura no es muy extensa y atractiva teniendo en cuenta su relevancia en el contexto actual y la relevancia que se espera que este adquiera en el futuro.

Tal y como se ha comentado anteriormente, el riesgo de longevidad afecta a los ciudadanos, al sector público y a las aseguradoras. Cada uno de los afectados, intenta mitigar los efectos adversos del riesgo a través de distintas formas de cobertura. Por ejemplo, en el caso de los ciudadanos, estos intentan transmitir su exposición a este riesgo a las compañías aseguradoras contratando rentas vitalicias, entre otros productos.

Las aseguradoras que operan en el ramo de vida, de igual manera, intentan mitigar su exposición a este riesgo a través de otros mecanismos que se describirán a continuación.

El riesgo que las compañías aseguradoras intentarán mitigar es aquel que para su cartera de rentas vitalicias la siniestralidad de estas sea superior a la prevista. En otras palabras, que los asegurados sobrevivan más años de los que en un principio se había estimado. Para mitigar las consecuencias de este acontecimiento las compañías constituirán unas reservas de capital tal y como se establece en el reglamento de Solvencia II.

Para mitigar el riesgo de longevidad las compañías aseguradoras pueden optar entre dos opciones, tal y como sugiere Albarrán et al. (2014), que a continuación se exponen:

#### **Opciones de mitigación internas:**

Las opciones de mitigación internas son todas aquellas acciones que la compañía puede tomar sin la necesidad de intervención de una tercera parte. Estas tienen como consecuencia una reducción de la exposición al riesgo.

Algunas de ellas son las siguientes:

- Controlar el tamaño, el perfil de la cartera, la selección de riesgos, y realizar ajustes en las bases técnicas en función de la experiencia biométrica adquirida.
- Establecer un precio específico en función del perfil del solicitante. Es decir, en función de su estilo de vida y edad, establecer una prima distinta ya que son factores muy relevantes en lo que hace referencia a la esperanza de vida. Una de las maneras a través de las cuales se puede llevar a cabo es modelizando con Generalized Linear Models (GLM) cuyas variables explicativas sean referentes al estilo de vida de los solicitantes de las rentas vitalicias.

- La realización de natural hedging: esta técnica busca compensar la existencia de riesgo de longevidad al incluir en el contrato de una renta vitalicia un seguro de fallecimiento. De esta manera se busca que la exposición al riesgo de longevidad de una renta vitalicia quede compensada.

### **Opciones de mitigación externas:**

Las opciones de mitigación externas son aquellas que permiten a una aseguradora ceder parcial o totalmente el riesgo de longevidad a una tercera parte.

Existen distintos métodos de cesión del riesgo de longevidad de una cartera de rentas vitalicias. Una de ellas es el reaseguro, la cual, se estudiará más a fondo en el siguiente apartado además de ver una simulación de distintos reaseguros de longevidad en la parte final del estudio.

A parte del reaseguro, existen otros métodos disponibles de transferencia del riesgo de longevidad a una tercera parte, algunos de ellos se exponen a continuación:

- Una opción para transferir de manera total el riesgo de longevidad es a través de la venta o transmisión de una cartera de rentas vitalicias a otra entidad aseguradora que desee asumir el riesgo que conlleva.
- Transmisión del riesgo de longevidad en el mercado de capitales. El riesgo de longevidad se puede gestionar por medio de la creación de activos negociables en los mercados de capitales. Algunos de los activos más comunes son:
  - Mortality linked securities: son instrumentos financieros vinculados a la supervivencia de una determinada población durante un periodo de tiempo determinado o a la evolución de un índice de supervivencia.
  - La creación de un Special Purpose Vehicle, el cual se basa en la transformación por parte de una aseguradora de activos en títulos negociables en los mercados secundarios los cuales son adquiridos por inversores.

## **7.2. Reaseguro en el ramo de vida**

El reaseguro es un contrato o instrumento por el cual un asegurador denominado reasegurador, toma a su cargo total o parcialmente un riesgo ya cubierto por otro asegurador que se le denomina cedente, sin alterar lo convenido entre este último y el asegurado, Sarrasí (2018).

Los riesgos que cubre el reaseguro de vida son los siguientes:

- El riesgo de muerte prematura en las operaciones de seguros. En este caso la compañía cede parcial o totalmente el riesgo de que la pérdida económica que

genera el fallecimiento de un asegurado supere la provisión matemática de la póliza.

- Riesgo de sobrevivencia prolongada o de longevidad, el cual, es propio de las operaciones de rentas. Dentro de este estaría el riesgo de longevidad, propio de las operaciones de rentas vitalicias. En la práctica este tipo de riesgo apenas se cubre a través de reaseguro.
- Otros riesgos, menos frecuentes, relacionados con seguros de dependencia e invalidez.

### 7.3. Clasificación de los reaseguros según el criterio técnico

En el ramo de vida al igual que para no vida existen distintos tipos de reaseguros. Estos se pueden clasificar en función de distintos criterios. Uno de los criterios de clasificación más comunes es el criterio técnico, expuesto a continuación.

Según el criterio técnico:

#### 7.3.1. Reaseguro Proporcional

Los reaseguros proporcionales en el ramo de vida se caracterizan por no poderse cancelar por ninguna de las partes contratantes mientras los respectivos riesgos estén en vigor. Es decir, que una vez que la cedente transfiere un determinado riesgo no puede cancelarlo hasta que el mismo termine ya sea porque se anule la póliza a la que perteneciese, se rescate o esta venza. El reasegurador tampoco podrá cancelarlo hasta que suceda uno de los acontecimientos comentados anteriormente, Sarrasí (2018).

A pesar de ser incancelables hasta la finalización de la existencia del riesgo, puede haber excepciones, las cuales deberán figurar en el contrato de reaseguro, que permitan la finalización o modificación de este.

Una peculiaridad de los contratos de reaseguro proporcionales en vida es que se aplican sobre los asegurados y no sobre las pólizas. Esto es debido a la incidencia que puede tener la acumulación de pólizas sobre un sólo asegurado.

El reaseguro proporcional se caracteriza porque la distribución del riesgo entre la cedente y el reasegurador se basa en el valor de la suma asegurada. Es decir, el reasegurador acepta asumir una proporción determinada de la suma asegurada de cada póliza de la cedente. La proporción de suma asegurada que el reasegurador acepte servirá para determinar la responsabilidad del reasegurador sobre los siniestros que puedan tener las pólizas reaseguradas de la cedente. Por otro lado, permitirá también determinar la prima que tendrá que pagar la cedente al reasegurador.

Existen 2 modalidades principales de reaseguro proporcional de vida, las cuales se exponen de forma breve a continuación:

- Reaseguro a condiciones originales:

Es una modalidad de reaseguro proporcional muy similar a los reaseguros proporcionales de no vida. En esta modalidad el reasegurador a cambio de aceptar la responsabilidad de la parte convenida de una póliza, recibirá una parte proporcional de las primas originales. La responsabilidad se basará en las condiciones aplicadas por la cedente en la póliza original, el reasegurador no se responsabilizará de modificaciones posteriores.

Los reaseguros a condiciones originales se pueden formalizar mediante las siguientes modalidades:

- Reaseguro Cuota-Parte:

La modalidad de reaseguro cuota-parte es la más sencilla de calcular entre todas las modalidades de reaseguro. Esta se basa en el establecimiento por parte de la cedente de un coeficiente de retención el cual se simbolizará como  $k$ . Mientras, la cuota de cesión, que determinará la responsabilidad del reasegurador, se simbolizará como  $(1-k)$ . Los dos tomarán un valor entre 0 y 1 y la suma de ambos será igual a 1.

La cuota de cesión estará preestablecida para toda la cartera o para un determinado ramo de esta en el contrato de reaseguro. Este coeficiente sirve también para determinar la participación del reaseguro en la suma asegurada, en las indemnizaciones, en la prima, en los gastos y en la constitución de reservas.

Habitualmente, se expresará en esta modalidad de reaseguro el coeficiente de retención ( $k$ ) y la cuota de cesión  $(1 - k)$ , de la siguiente manera:

$$k/(1 - k)$$

Por ejemplo, en caso de ceder el 80% del riesgo, el reaseguro cuota parte se expresaría de la siguiente manera:

$$20/80$$

También, hay que indicar que el coeficiente de retención ( $k$ ) y la cuota de cesión  $(1 - k)$  se determinan de la siguiente forma:

$$k = \frac{S_c}{S} \quad 1 - k = \frac{S_r}{S}$$

En este caso  $S_c$  significará la parte de la suma asegurada que corresponderá a la cedente y  $S_r$  la parte de la suma asegurada que estará a cargo del reasegurador.

Para la determinación de la participación del reaseguro en la suma asegurada, en las indemnizaciones, en la prima, en los gastos y en la constitución de reservas será un cálculo tan sencillo como un producto entre la cuota de cesión y la suma asegurada, las indemnizaciones, la prima, los gastos o la constitución de reservas para cada caso.

A continuación, se muestra cómo se calcula la prima retenida por la cedente ( $P_c$ ), la cedida al reasegurador ( $P_r$ ), el valor de los siniestros a cargo de la cedente ( $X_c$ ) y los siniestros a cargo del reasegurador ( $X_r$ ). Siendo  $P$  y  $X$  el valor de la prima total y el coste del siniestro total respectivamente.

$$P_c = k * P \quad P_r = k * P$$

$$X_c = (1 - k) * X \quad X_r = (1 - k) * X$$

- Reaseguro de excedentes:

El reaseguro de excedentes se diferencia del reaseguro cuota parte en que la cedente reasegurará únicamente aquella parte del riesgo cuya suma asegurada supere el pleno de retención acordado en el contrato de reaseguro ( $M$ ). Siendo el pleno de retención la parte de la suma asegurada a cargo de la cedente. En este caso el reaseguro sólo actuará cuando la suma asegurada de una póliza sea superior al pleno de retención.

A causa de lo comentado en el párrafo anterior, la cuota de retención ( $k$ ) para aquellas pólizas cuya suma asegurada supere el pleno será variable. Gracias a esto, la cedente retendrá el 100% de las primas cuyas sumas aseguradas no lleguen al pleno de retención, sin embargo, la cedente también soportará el 100% de los siniestros que afecten dicha póliza.

Teniendo en cuenta todo lo indicado antes, la cuota de cesión ( $1 - k$ ) y el coeficiente de retención ( $k$ ), se determinan de la siguiente forma:

$$k = 1 \text{ si } S \leq M \quad 1 - k = 0 \text{ si } S \leq M$$

$$k = \frac{M}{S} \text{ si } S > M \quad 1 - k = \frac{S - M}{S} \text{ si } S > M$$

El cálculo de la participación del reaseguro en la suma asegurada, en las indemnizaciones, en la prima, en los gastos y en la constitución de reservas se determinará a través del producto entre la cuota de cesión y la suma asegurada, las indemnizaciones, la prima, los gastos o la constitución de reservas para cada caso, al igual que en el reaseguro cuota parte.

- Reaseguro a prima de riesgo:

Este método se utiliza principalmente para cubrir el riesgo de muerte anual al que puede estar sometida la cedente para operaciones de seguros. Por lo tanto, es una modalidad más utilizada para cubrir el riesgo de mortalidad anticipada y no el de longevidad.

La prima de reaseguro de esta modalidad para un seguro de vida de un individuo de edad  $x$  se calcula multiplicando el capital reasegurado por la probabilidad de fallecimiento, Sarrasí (2018). A continuación, se muestra la expresión:

$$P^R = C^R * q_x$$

En el reaseguro a prima de riesgo se pueden distinguir las siguientes modalidades:

- Reaseguro de capital en riesgo a prima de riesgo: diseñado para aquellas operaciones de seguros en las que se tengan que dotar provisiones matemáticas, y por lo tanto para operaciones con plazos superiores al año. Sarrasí (2018)

En esta modalidad, lo primero que se tendrá que calcular es el capital en riesgo. Este, es la diferencia entre la suma asegurada en el momento del cálculo ( $S_t$ ) y la provisión matemática en ese mismo momento ( $V_t$ ).

$$C_t^{Riesgo} = S_t - V_t$$

Una vez que se ha obtenido el capital en riesgo ya se puede calcular el capital reasegurado ( $C_t^R$ ), el cual, se determinará como el producto entre el capital en riesgo y la cuota de cesión.

$$C_t^R = (1 - k) * C_t^{Riesgo}$$

La prima que se deba satisfacer al reasegurador ( $P_t^R$ ) se establecerá de la siguiente manera. Siendo esta el producto entre el capital reasegurado y la probabilidad de que una persona de edad actuarial  $x + t - 1$  fallezca en el transcurso de 1 año ( $q_{x+t-1}$ ).

$$P_t^R = C_t^R * q_{x+t-1}$$

- Reaseguro cuota parte y de excedentes a prima de riesgo: se aplica en operaciones de seguros renovables anualmente. En esta modalidad la compañía no tendrá que dotar la provisión matemática, sólo dotará la provisión por primas no consumidas. Es muy utilizado por las aseguradoras de vida. Sarrasí (2018).

Al igual que en el caso anterior, se tendrá que establecer el capital reasegurado. Este se obtendrá de distinta manera en función de si es un cuota-parte o un reaseguro de excedentes:

- Cuota parte:

$$C^R = (1 - k) * S$$

- Excedentes:

$$C^R = \begin{cases} 0 & \text{si } S \leq M \\ S - M & \text{si } S > M \end{cases}$$

Una vez que se ha determinado el capital reasegurado se procede al cálculo de la prima de reaseguro por medio del producto entre el capital reasegurado, un porcentaje pactado en el contrato de reaseguro (%), la probabilidad de fallecimiento obtenida a través de una tabla propuesta por el reasegurador ( $q_x^*$ ) y un factor de actualización financiero ( $v^{1/2}$ ). El cálculo de la prima será el mismo en el caso de las dos modalidades.

$$P^R = C^R * \% q_x^* * v^{1/2}$$

### 7.3.2. Reaseguro no proporcional

Las modalidades de reaseguros no proporcionales han experimentado un gran crecimiento en los mercados de seguros de daños. Sin embargo, no han tenido el mismo éxito los reaseguros no proporcionales de vida.

Las aseguradoras, muchas de las cuales, reaseguradas con reaseguros proporcionales, tienden a preferir continuar con el reaseguro proporcional antes que afrontar una nueva situación donde los costes son conocidos en el principio, pero se desconoce cómo evolucionarán en el tiempo, según Sarrasí (2018).

El reaseguro no proporcional se caracteriza porque la distribución del riesgo asegurado se basa en la siniestralidad. El reasegurador actúa cuando un siniestro supera un cierto valor o cuando la suma de un conjunto de siniestros lo hace. Cuando eso ocurre el reasegurador se responsabiliza de aquella parte del siniestro o siniestralidad que supere el límite acordado en el contrato de reaseguro. Por tanto, en este caso no hay proporcionalidad en el reparto de responsabilidades, ya que el comportamiento de las partes depende de la cuantía de los siniestros que tenga una póliza, una cartera o un ramo.

Las dos modalidades más comunes de reaseguro no proporcional se describen a continuación:

- Reaseguro Excess-loss:

El reaseguro Excess-loss protege a la cedente frente a la acumulación de pérdidas causadas por un mismo acontecimiento. Este acontecimiento adverso, en el caso del ramo de vida, debe afectar a un número previamente pactado de asegurados para que el reaseguro pase a actuar.

En este tipo de reaseguro, el reasegurador pagará el excedente de la prioridad previamente establecida hasta llegar al límite máximo de indemnización pactado en el contrato.

En vida su uso más habitual es el de protección frente a cúmulos de riesgo que puede provocar un evento adverso, como por ejemplo un accidente.

- Reaseguro Stop-loss:

En el caso de la modalidad Stop-loss el reasegurador acepta una parte de la responsabilidad de los siniestros netos agregados, es decir, acepta cubrir una parte de la siniestralidad. El reasegurador se hará cargo de una parte del coste agregado de los siniestros siempre y cuando la siniestralidad supere un importe previamente establecido en el contrato de reaseguro, la prioridad, y llegando hasta la responsabilidad máxima del reasegurador.

La responsabilidad del reasegurador también puede expresarse de acuerdo con las indemnizaciones que exceden de un determinado porcentaje de la siniestralidad proyectada. Siendo esta una modalidad del Stop-loss denominada reaseguro de exceso de coeficiente de siniestralidad, Sarrasí (2018).

El hecho de disponer de un reaseguro de este tipo permitiría a la cedente conocer cuál es el límite máximo de siniestralidad que puede sufrir y evitar las consecuencias económicas adversas que puede ocasionarle que su cartera sufra una siniestralidad mayor que la esperada.

Un ejemplo de como se representan las modalidades no proporcionales descritas anteriormente es el siguiente:

900 vs 350

En este ejemplo, 900 sería la responsabilidad máxima del reasegurador, también llamado tramo working, y 350 la prioridad del contrato.

## 8. Propuestas de reaseguro del riesgo de longevidad

En este apartado, se exponen brevemente algunas propuestas de reaseguros que cubran específicamente el riesgo de longevidad. Se propondrán 6 modalidades de reaseguro, 4 de ellas proporcionales y 2 no proporcionales. Estas estarán enfocadas a mitigar el riesgo de longevidad al que podría estar expuesta una aseguradora que ha suscrito una cartera de rentas vitalicias diferidas hasta la edad de jubilación.

### **Reaseguro cuota parte:**

Para reasegurar el riesgo de longevidad en esta modalidad la cedente acordaría con el reasegurador el coeficiente de retención que se quiere establecer. Este coeficiente será el

que permita a la cedente repartirse con el reasegurador desde el momento de jubilación el pago de las prestaciones de las rentas vitalicias. En esta misma proporción la cedente cederá al reasegurador parte de todas las primas puras referentes a dichas rentas vitalicias.

El riesgo de que un asegurado viva más años de los que se espera se comparte, en este caso, con el reasegurador y la exposición de la cedente dependerá de que cuota de cesión quiere contratar.

#### **Reaseguro de excedentes:**

Para cubrir el riesgo de longevidad la cedente acordaría con el reasegurador el establecimiento de un pleno de retención en base al cual se calculará la proporción de primas cedidas al reasegurador y los capitales anuales que este debe satisfacer.

Con un pleno de retención más bajo la cedente estará menos expuesta al riesgo de longevidad. Sin embargo, al reducir el pleno de retención el volumen de primas que la cedente retendrá también será menor.

#### **Reaseguro Stop-loss:**

Un reaseguro stop-loss para reasegurar el riesgo de longevidad funcionaría estableciendo, en primer lugar, una prioridad y un límite máximo de responsabilidad. Este, podría cubrir el exceso de prestaciones de la cartera de rentas vitalicias cuando estas superen la prioridad acordada. Es decir, en caso de que los individuos sobreviviesen más de lo esperado y por tanto continuasen más años percibiendo la renta, el reaseguro Stop-loss podría cubrir el exceso de pérdidas económicas que generase el haber incurrido en el riesgo de longevidad.

#### **Reaseguro cuota parte contratado a partir de la esperanza de vida del asegurado:**

Este caso es una variante del comentado anteriormente. Se diferencia del anterior en que en este caso el reaseguro sólo cubre a partir de una determinada edad del asegurado.

En este caso, el riesgo de que un asegurado viva más años de los que se espera se comparte con el reasegurador a partir de una cierta edad. La exposición de la cedente al riesgo de longevidad dependerá de que cuota de cesión quiera contratar.

#### **Reaseguro de excedentes contratado a partir de la esperanza de vida del asegurado:**

El riesgo de que un asegurado viva más años de los que se espera se comparte con el reasegurador a partir de la edad media de fallecimiento calculada en la edad de contratación, al igual que en la anterior modalidad. La exposición de la cedente al riesgo de longevidad dependerá del pleno de retención que se establezca en el contrato de reaseguro.

## Reaseguro Stop-loss contratado a partir de la esperanza de vida del asegurado:

En este caso, al igual que en los dos anteriores se establecerá un reparto de la exposición al riesgo de longevidad entre la cedente y el reasegurador a partir de la edad esperada de fallecimiento. En caso de que los asegurados sobrevivan más años de los esperados, es decir, la cedente incurra en el riesgo de longevidad, esta lo podrá mitigar en mayor o menor medida en función de la prioridad que esta haya acordado con el reasegurador.

A continuación, a modo de aclaración, se formalizará el cálculo de la esperanza de vida de un individuo de edad actual  $x$ :

Primero, se definirá la variable aleatoria  $T(x)$  que es la vida futura o residual de un individuo de edad actuarial  $x$ . Se define como la diferencia entre la edad de fallecimiento ( $X$ ) menos la edad actual ( $x$ ), Ayuso (2007).

$$T(X) = X - x$$

Una vez se ha definido la variable vida residual se puede calcular su esperanza la cual nos dará el número de años que se puede esperar que viva una persona de edad  $x$ .

$$E[T(x)] = \sum_{t=0}^{w-x-1} t/q_x * t$$

Por último, se obtiene la esperanza de vida de una persona de edad actual  $x$ ,  $e(x)$ , por medio de la suma entre la edad actual y los años de más que se espera que viva.

$$e(x) = x + E[T(x)]$$

## 9. Caso práctico

### 9.1. Presentación del caso práctico

Una vez se ha examinado toda la teoría y se conoce con algo más de profundidad qué es el riesgo de longevidad, qué lo genera y cómo se puede mitigar y reducir, se procede a la realización de un ejemplo numérico en el cual se expondrá cómo a través de distintas modalidades de reaseguro se puede mitigar este riesgo.

El ejemplo se basa en la siguiente situación hipotética:

Una aseguradora cuenta con una cartera compuesta por 120 rentas vitalicias de hombres nacidos en 1969 con los siguientes capitales anuales contratados.

**Tabla 1.** Capitales anuales contratados por tipo de renta y número de pólizas.

Tipo de renta vitalicia	Capital anual contratado	N.º de rentas
Renta tipo 1	8.000,00 €	50
Renta tipo 2	10.000,00 €	45
Renta tipo 3	12.000,00 €	25
TOTAL	30.000,00 €	120

Fuente: Elaboración propia.

A pesar de que las cuantías contratadas sean distintas, todas ellas son rentas pagaderas mientras viva el asegurado de edad actual 50 años (1969), diferidas 17 años, hasta la jubilación a los 67, vitalicias y pospagables con tipo de interés técnico del 2%. Al tratarse de una cartera de rentas pertenecientes a hombres, las Tablas de Vida utilizadas son las PERM 2000.

**Esquema temporal de las rentas a contratar:**



En el esquema se aprecia como a partir de los 67 al final de cada año se va a ir percibiendo la renta contratada. Esta se percibirá mientras viva el asegurado. Al utilizar en el cálculo de la prima de las rentas las tablas PERM 2000, se asume que el asegurado puede llegar vivo hasta los 115 años, ya que a la edad de 116 se espera que la población que percibe las rentas esté extinta.

Se puede observar cómo los asegurados pueden ir percibiendo una renta durante 48 años de los 67 a los 115 años.

**Cálculo de la prima por parte de la cedente:**

Una vez se ha diseñado la forma en que se quiere percibir la renta y se conocen las cuantías que se quieren percibir. La compañía aseguradora puede calcular la prima pura correspondiente a las rentas vitalicias.

A modo de simplificación se establece que se pagará una prima única en el momento actual. Para conocer el valor de la prima pura se procederá al cálculo del valor actual actuarial de la renta vitalicia teniendo en cuenta las características y capitales de esta.

A continuación, se detalla el cálculo llevado a cabo para conocer la prima:

$${}_{17|}Va_{50} = \sum_{t=17}^{116-50-2} u_i * 1,02^{-(t+1)} * \frac{l_{50+t+1}}{l_{50}}$$

Siendo  $u_i$  el capital anual que se debe pagar en función del tipo de renta. En este caso  $u_i$  puede tomar los valores 8.000 € 10.000 € y 12.000 € respectivamente.

Una vez se ha procedido al cálculo de la prima pura se obtienen los siguientes resultados:

**Tabla 2.** Valor de las primas puras individuales y totales.

Tipo de renta vitalicia	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	91.801,21 €	4.590.060,00 €
Renta tipo 2	114.751,50 €	5.163.818,00 €
Renta tipo 3	137.701,80 €	3.442.545,00 €
TOTAL	344.254,51 €	13.196.423,00 €

Fuente: Elaboración propia.

Para la obtención de las primas se ha procedido al cálculo del valor actual actuarial para cada uno de los tipos de renta. Se aprecia como a medida que el valor de la cuantía de la renta contratada aumenta su prima también se incrementa. El total de las primas se ha obtenido a partir del producto entre el número cada tipo de rentas por el valor de la prima pura individual para cada una de ellas.

A causa del mayor capital a percibir anualmente y del gran número de rentas que lo percibirán la renta tipo 2 es la que genera una mayor prima total, seguida de la renta tipo 1 y por último la renta tipo 3 que a pesar de ser la más cara individualmente su prima total es menor a causa de que sólo la percibirán 25 individuos.

La compañía aseguradora percibirá 13.196.423,00 € en concepto de primas puras para esta cartera de rentas vitalicias.

## 9.2. Mitigación del riesgo de longevidad por parte de la aseguradora: Reaseguros

### 9.2.1. Reaseguros desde la edad de jubilación

#### Reaseguro 1 - Cuota Parte:

La aseguradora, tal y como se ha comentado previamente, estará expuesta al riesgo de longevidad al suscribir una cartera de rentas vitalicias. Al estar expuesta a dicho riesgo, la compañía puede optar por distintas opciones para mitigarlo. En este caso, se optará por la contratación de un reaseguro proporcional de la modalidad cuota parte.

Esta modalidad se basa en la transferencia, por parte de la cedente al reasegurador de la cuota de cesión  $(1 - k)$ .

En este caso la entidad aseguradora, en adelante, la cedente. Ha decidido contratar un reaseguro proporcional cuota parte 30/70. Es decir, la cedente retendrá el 30% ( $k = 0,3$ ) y cederá el 70% restante ( $(1-k) = 0,7$ ).

A continuación, se muestra la prima que retendrá la cedente de cada tipo de renta y la parte de la prima que cederá al reasegurador.

**Tabla 3.** Prima retenida por la cedente y cuantía de la prestación a cargo de esta.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo de la cedente	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	2.400,00 €	27.540,36 €	1.377.018,00 €
Renta tipo 2	3.000,00 €	34.425,45 €	1.549.145,00 €
Renta tipo 3	3.600,00 €	41.310,54 €	1.032.764,00 €
TOTAL	9.000,00 €	103.276,35 €	3.958.927,00 €

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 4.** Prima cedida al reasegurador y cuantía de la prestación a cargo de este.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo del reasegurador	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	5.600,00 €	64.260,85 €	3.213.042,00 €
Renta tipo 2	7.000,00 €	80.326,06 €	3.614.673,00 €
Renta tipo 3	8.400,00 €	96.391,27 €	2.409.782,00 €
TOTAL	21.000,00 €	240.978,18 €	9.237.497,00 €

Fuente: Elaboración propia.

A través de la observación de las tablas anteriores se aprecia como se reduce al 30% el capital que debe aportar la cedente en las sucesivas prestaciones anuales de la renta vitalicia. De igual manera, esta renuncia al 70% de la prima, la cual, la cede al reasegurador para que este cubra la parte restante de cada una de las prestaciones.

### Reaseguro 2 - Excedentes:

Para protegerse ante el riesgo de longevidad las aseguradoras también pueden contratar otra modalidad de reaseguro proporcional como podría ser el reaseguro de excedente.

En este caso, la cedente, ha decidido establecer como pleno de retención  $M = 3.500$  €. Es decir, la cedente se hará cargo de 3.500 € de cada prestación anual, dejando el resto al reasegurador. Al haberse contratado para los 3 tipos de rentas vitalicias un capital anual superior, el reasegurador participará en todos los riesgos y también percibirá parte del importe de todas las primas puras.

A continuación, se muestra el volumen de primas que retiene la cedente para cada uno de los tipos de rentas en función del rango en la empresa.

**Tabla 5.** Prima retenida por la cedente y cuantía de la prestación a cargo de esta.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo de la cedente	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	3.500,00 €	40.163,03 €	2.008.151,00 €
Renta tipo 2	3.500,00 €	40.163,03 €	1.807.336,00 €
Renta tipo 3	3.500,00 €	40.163,03 €	1.004.076,00 €
TOTAL	10.500,00 €	120.489,09 €	4.819.563,00 €

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla anterior se puede observar como el valor de las primas puras individuales que la cedente ha retenido es el mismo para todos los tipos de renta. La cedente, únicamente se hará cargo de los primeros 3.500 € de cada una de las prestaciones.

**Tabla 6.** Valor del coeficiente de retención para cada una de las rentas.

Tipo de renta vitalicia	k
Renta tipo 1	43,75%
Renta tipo 2	35,00%
Renta tipo 3	29,17%

Fuente: Elaboración propia.

En el cuadro superior se puede ver el coeficiente de retención para cada tipo de renta. Este resultado es fruto del cociente entre el capital a cargo de la cedente y el capital total contratado.

Este tipo de reaseguro implica que la cedente se haga cargo de un mayor porcentaje de la prestación en aquellas rentas con capitales menores, mientras se tendrá que hacer cargo de una proporción menor en de aquellas rentas con capitales mayores.

En lo que hace referencia a la reaseguradora, esta se hará cargo de la diferencia entre el capital anual contratado menos la prioridad, en este caso 3.500 €. La siguiente tabla, muestra los resultados.

**Tabla 7.** Capital a cargo del reasegurador y valores de las primas cedidas a este.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo del reasegurador	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	4.500,00 €	51.638,18 €	2.581.909,00 €
Renta tipo 2	6.500,00 €	74.588,48 €	3.356.482,00 €
Renta tipo 3	8.500,00 €	97.538,78 €	2.438.470,00 €
TOTAL	19.500,00 €	223.765,44 €	8.376.861,00 €

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 8.** Cuota de cesión al reaseguro para cada tipo de renta.

Tipo de renta vitalicia	(1-k)
Renta tipo 1	56,25%
Renta tipo 2	65,00%
Renta tipo 3	70,83%

Fuente: Elaboración propia.

A partir de la observación de las tablas anteriores se puede concluir que a través del uso del reaseguro de excedentes, la cedente evita tener que hacerse cargo de una menor proporción de las rentas cuando estas son de capitales altos.

La cedente mitiga el riesgo de longevidad limitando su responsabilidad a 3.500 € de cada una de las rentas vitalicias.

### Reaseguro 3 – Stop-loss:

Otra opción de reaseguro disponible para mitigar las consecuencias negativas de incurrir en el riesgo de longevidad es el uso de un reaseguro no proporcional, en concreto del reaseguro stop-loss.

En este caso se ha decidido establecer como prioridad del contrato de reaseguro una cuantía de 500.000 €. Esto significa que la cedente se hará cargo, cada año, de los primeros 500.000 € del agregado de todas las rentas anuales, mientras el reasegurador se hará cargo de lo que exceda de dicho valor.

En el siguiente cuadro se muestra el importe de prima pura que recibirán la cedente y el reasegurador. Se debe notar que al tratarse de un stop-loss el cual se basa en la siniestralidad registrada, no se diferenciará qué parte de la prima corresponde a cada tipo de renta, sino que se tratará el agregado de todas ellas como un todo.

**Tabla 9.** Cuantía de la prima retenida por la cedente y cedida al reasegurador.

	Importe de la prima
Retenido por la cedente	5.737.576,00 €
Cedido al reasegurador	7.458.848,00 €
TOTAL	13.196.424,00 €

Fuente: Elaboración propia.

### 9.2.2. Reaseguro a partir de la esperanza de vida

Los reaseguros comentados anteriormente se les cede parte de todas las primas y ellos a cambio se hacen cargo de todas aquellas prestaciones que se ajusten a lo acordado en el contrato de reaseguro desde la edad de jubilación hasta la extinción del colectivo.

A pesar de ser buenos instrumentos que permiten a la compañía aseguradoras mitigar su riesgo de longevidad ya que este lo pasa a compartir con el reasegurador, la compañía

pierde bastante volumen de primas. Un tipo de reaseguro que le permitiría reducir la cantidad de prima que cede y al mismo tiempo continuar cubriéndose ante el riesgo de longevidad es el hecho de reasegurar las prestaciones de las edades más avanzadas.

En este caso, la edad a partir de la cual se ha decidido establecer los reaseguros es a partir de los 87 años. Dicha edad es la esperanza de vida de los nacidos en 1969 a la edad de 50 años, es decir, en el momento de contratación de la renta vitalicia. Este cálculo se ha obtenido de la siguiente manera:

$$E[T(50)] = \sum_{t=0}^{w-50-1} {}_tq_{50} * t$$

$$e(50) = 50 + E[T(50)]$$

Nótese que  $e(50)$  es la esperanza de vida de una persona que hoy tiene 50 años y  $E[T(50)]$  es el número de años enteros vividos que se espera que sobreviva una persona que en el momento del cálculo tiene 50 años.

Con este tipo de reaseguros la cedente retendrá el 100% de la prima hasta esa edad al igual que será ella la que se haga cargo de satisfacer el 100% de los capitales hasta los 87 años. A partir de los 87, el importe de la prima que esta ceda al igual que la cantidad de capital que ella tenga que aportar anualmente dependerá del reaseguro que contrate.

A continuación, se muestran las modalidades expuestas anteriormente, pero actuando a partir de la esperanza de vida de los nacidos en 1969 calculada a la edad de 50 años.

Sin embargo, para todas las modalidades la cedente recibirá los siguientes importes de prima hasta que la población de sus asegurados cumpla los 87 años.

**Tabla 10.** Primas retenidas por la cedente y capitales a su cargo correspondientes a las rentas vitalicias hasta la edad de 87 años.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo de la cedente	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	8.000,00 €	76.129,30 €	3.806.465,00 €
Renta tipo 2	10.000,00 €	95.161,62 €	4.282.273,00 €
Renta tipo 3	12.000,00 €	114.193,90 €	2.854.849,00 €
TOTAL	30.000,00 €	285.484,82 €	10.943.587,00 €

Fuente: Elaboración propia.

#### Reaseguro 4 – Cuota Parte a partir de los 87 años

La cedente decide contratar un reaseguro proporcional de la modalidad cuota parte el cual actuará a partir de la edad de 87 años. Se opta por un contrato cuota parte 30/70, es decir, la cedente percibirá el 30% de las primas y satisfará el 30% de los capitales correspondientes al periodo entre los 87 y la extinción del colectivo. Por otro lado, el

reasegurador percibirá el 70% de las primas correspondientes a dicho periodo y satisfará el 70% restante de los capitales de las rentas vitalicias.

En las siguientes tablas se observan las primas retenidas por a la cedente y cedidas al reasegurador referentes al periodo reasegurado.

**Tabla 11.** Primas retenidas y capital a cargo de la cedente a partir de la edad 87 años.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo de la cedente	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	2.400,00 €	4.701,57 €	235.078,70 €
Renta tipo 2	3.000,00 €	5.876,97 €	264.463,50 €
Renta tipo 3	3.600,00 €	7.052,36 €	176.309,00 €
TOTAL	9.000,00 €	17.630,90 €	675.851,20 €

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 12.** Capital a cargo del reasegurador y primas cedidas a este a partir de la edad 87 años.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo del reasegurador	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	5.600,00 €	10.970,34 €	548.516,90 €
Renta tipo 2	7.000,00 €	13.712,92 €	617.081,50 €
Renta tipo 3	8.400,00 €	16.455,51 €	411.387,70 €
TOTAL	21.000,00 €	41.138,77 €	1.576.986,10 €

Fuente: Elaboración propia.

A partir de la observación de las dos tablas anteriores se ve cómo el valor de las primas cedidas al reasegurador se ha reducido considerablemente al contratar el reaseguro para las edades superiores a 87 años.

En la siguiente tabla, se observa el total de prima retenida por la cedente, esto supone la agregación de las primas correspondientes a las rentas de los 67 a los 87 y las rentas para edades superiores a los 87 años.

**Tabla 13.** Primas puras totales retenidas por la cedente.

Tipo de renta vitalicia	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	80.830,87 €	4.041.543,70 €
Renta tipo 2	101.038,59 €	4.546.736,50 €
Renta tipo 3	121.246,26 €	3.031.158,00 €
TOTAL	303.115,72 €	11.619.438,20 €

Fuente: Elaboración propia.

## Reaseguro 5 – Excedentes a partir de los 87 años

En el caso de contratar un reaseguro proporcional de la modalidad de excedentes, implica que hasta los 87 años la cedente se hará cargo del 100% de las prestaciones y percibirá el 100% de las primas correspondientes a dicho periodo. Sin embargo, a partir de los 87 años la cedente satisfará el valor de la renta anual hasta el pleno de retención dejando el resto a cargo del reasegurador.

En este caso se ha establecido como prioridad 3.500 €.

En las siguientes tablas se observan las primas retenidas por a la cedente y cedidas al reasegurador referentes al periodo reasegurado.

**Tabla 14.** Primas retenidas y capital a cargo de la cedente a partir de la edad 87 años.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo de la cedente	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	3.500,00 €	6.856,46 €	342.823,10 €
Renta tipo 2	3.500,00 €	6.856,46 €	308.540,70 €
Renta tipo 3	3.500,00 €	6.856,46 €	171.411,50 €
TOTAL	10.500,00 €	20.569,38 €	822.775,30 €

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 15.** Capital a cargo del reasegurador y primas cedidas a este a partir de la edad 87 años.

Tipo de renta vitalicia	Capital a cargo del reasegurador	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	4.500,00 €	8.815,45 €	440.772,50 €
Renta tipo 2	6.500,00 €	12.733,43 €	573.004,20 €
Renta tipo 3	8.500,00 €	16.651,41 €	416.285,10 €
TOTAL	19.500,00 €	38.200,29 €	1.430.061,80 €

Fuente: Elaboración propia.

Una vez estudiadas las tablas anteriores se observa cómo el valor de las primas cedidas al reasegurador se ha reducido considerablemente al igual que en el anterior reaseguro. Con ello, la cedente cubre el riesgo de longevidad para las edades más avanzadas y a su mismo tiempo pierde un menor volumen de prima. En este caso, la cedente retiene más prima pura que al contratar el reaseguro a partir de los 87 de la modalidad cuota parte.

En la siguiente tabla, se observa el total de prima retenida por la cedente, esto supone la agregación de las primas correspondientes a las rentas de los 67 a los 87 y las rentas para edades superiores a los 87 años.

**Tabla 16.** Primas puras totales retenidas por la cedente.

Tipo de renta vitalicia	Prima Pura Individual	Prima pura total por tipo de renta
Renta tipo 1	82.985,76 €	4.149.288,10 €
Renta tipo 2	102.018,08 €	4.590.813,70 €
Renta tipo 3	121.050,36 €	3.026.260,50 €
TOTAL	306.054,20 €	11.766.362,30 €

Fuente: Elaboración propia.

### Reaseguro 6 – Stop-loss a partir de los 87 años

En este caso, al igual que en los supuestos anteriores el reaseguro tomará efecto a partir de la edad de 87 años. A partir de los 87 años la cedente se hará cargo, anualmente, de los primeros 500.000 € en prestaciones, dejando el exceso en manos del reasegurador.

En la siguiente tabla se observa cómo se reparte la prima pura entre la cedente y el reasegurador.

**Tabla 17.** Cuantía de la prima retenida por la cedente y cedida al reasegurador.

	Importe de la prima
Retenido por la cedente	979.494,40 €
Cedido al reasegurador	1.273.343,00 €
TOTAL	2.252.837,40 €

Fuente: Elaboración propia.

Observando la tabla siguiente se puede apreciar como la cedente usando este tipo de reaseguro ha podido retener el máximo de prima posible. De igual manera, usar este reaseguro le ha permitido limitar el impacto en caso de incurrir en el riesgo de longevidad ya que la cedente ha limitado su aportación a partir de los 87 años a los primeros 500.000€.

**Tabla 18.** Primas puras totales retenidas por la cedente.

	Importe de la prima
Retenido por la cedente antes de los 87	10.943.587,00 €
Retenido por la cedente después de los 87	979.494,40 €
TOTAL	11.923.081,40 €

Fuente: Elaboración propia.

### 9.3. Comparativa entre los distintos reaseguros

Una vez se han estudiado los distintos tipos de reaseguro, a modo de resumen se pueden presentar las siguientes tablas. En ellas, se pueden ir comparando la cuantía de prima que retiene la cedente, la prima que cede al reasegurador y la prima total.

**Tabla 19.** Comparativa de la prima retenida frente a la cedida para los 3 primeros reaseguros.

	<b>Cuota Parte 30/70</b>	<b>Excedentes M=3.500€</b>	<b>Stop-loss 650.000 xs 500.000</b>
Prima retenida por la cedente	3.958.927,00 €	4.819.563,00 €	5.737.576,00 €
Prima cedida al reasegurador	9.237.497,00 €	8.376.861,00 €	7.458.848,00 €
<b>TOTAL</b>	<b>13.196.424,00 €</b>	<b>13.196.424,00 €</b>	<b>13.196.424,00 €</b>

*Fuente: Elaboración propia.*

En el caso de los reaseguros que tienen efecto desde la edad de jubilación se aprecia como la cedente retiene una cantidad de prima mayor en el caso de seguro no proporcional stop-loss. En este caso, la cedente se queda con 5.737.576 €. Esta cantidad representa 1.778.649 € más que contratando el reaseguro cuota parte, el cual es en este caso práctico la modalidad con la que la cedente percibe menor prima.

**Tabla 20.** Comparativa de la prima retenida frente a la cedida para los reaseguros con efecto a partir de los 87 años.

	<b>Cuota Parte 30/70</b>	<b>Excedentes M=3.500€</b>	<b>Stop-loss 650.000 xs 500.000</b>
Prima retenida por la cedente	11.619.438,20 €	11.766.362,30 €	11.923.081,40 €
Prima cedida al reasegurador	1.576.986,10 €	1.430.061,80 €	1.273.343,00 €
<b>TOTAL</b>	<b>13.196.424,30 €</b>	<b>13.196.424,10 €</b>	<b>13.196.424,40 €</b>

*Fuente: Elaboración propia.*

Para los reaseguros contratados para edades superiores a la esperanza de vida se observa al igual que para los reaseguros anteriores como el stop-loss es aquel que permite a la entidad ceder un menor volumen de prima mientras el cuota-parte es el que obliga a ceder más prima en este caso.

Es importante destacar que para la prima que se ceda al reasegurador no sólo dependerá de la modalidad sobre la que se está trabajando sino también del riesgo que se ceda a este. Cuanto mayor sea el riesgo que se ceda al reasegurador, mayor será la prima que le corresponderá.

## 10. Conclusiones

Una vez se ha estudiado qué es el riesgo de longevidad, que lo provoca y cómo mitigar sus efectos se ha llegado a una serie de conclusiones.

La esperanza de vida a nivel mundial va a continuar creciendo según la gran mayoría de expertos. Este crecimiento será debido a avances especialmente en el campo de la biomedicina los cuales permitirán a las personas vivir más años y gozar de una mejor calidad de vida.

Este crecimiento de la esperanza de vida necesita una gestión ya que supone un riesgo. El sector asegurador es uno de los más expuestos a este riesgo, en especial, aquellas compañías cuyo mayor negocio se centra en vida.

En las compañías aseguradoras que actúan en el ramo de vida el riesgo se encuentra en que en sus carteras de rentas de supervivencia los asegurados vivan más años de los que las compañías habían estimado. En el caso de incurrir en este riesgo las reservas constituidas para los pagos de dichas rentas resultarían insuficientes.

El hecho de subestimar la supervivencia de los asegurados es debido a la existencia del subriesgo de tendencia. Al subestimar la supervivencia de una población se calculan unas probabilidades de fallecimiento superiores a las reales y por lo tanto se calculan unas primas insuficientes para las prestaciones. Desde hace años se han ido tomando medidas para reducir la subestimación de la evolución de la esperanza de vida. Por ejemplo, en España con la instauración de las tablas generacionales PERM/F 2000. Además, se están llevando a cabo investigaciones sobre modelización de la mortalidad a partir de modelos estocásticos, los cuales, se espera que ajusten la mortalidad estimada lo máximo posible a la real.

A parte de una mejor modelización de la mortalidad, para prevenir el riesgo de longevidad existen varios instrumentos que se pueden usar, siendo el reaseguro, el estudiado más a conciencia en esta investigación.

Se ha podido comprobar cómo a partir del reaseguro, una entidad aseguradora puede ceder parte del riesgo al reasegurador, mitigando su exposición al mismo.

En el estudio se han ofrecido varias alternativas de reaseguro tanto proporcionales como no proporcionales, al igual que se han propuesto 2 opciones referentes al periodo de vigencia del reaseguro. Periodo durante el cual se le cede parte del riesgo de longevidad.

Para concluir, se debe destacar que existe una gran concienciación sobre los peligros de incurrir en este riesgo tanto desde el sector público como desde las entidades aseguradoras y que existe la voluntad para estudiarlo, prevenirlo y mitigarlo.

## 11. Referencias

- Albarrán, I.; Ariza, F.; Cóbreces, V. M.; Durbán, M. L.; Rodríguez-Pardo del Castillo, J. M. (2014). *El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II, Modelos actuariales avanzados para su gestión*. Fundación Mapfre. Madrid (España).
- Ayuso, M.; Corrales, H.; Guillén, M.; Pérez-Marín, A.M.; y Rojo, J.L. (2007). *Estadística actuarial vida*. Publicacions y Edicions de la Universitat de Barcelona. Barcelona (España).
- Boletín oficial del estado «BOE» núm. 174, de 21 de julio de 2012, páginas 52491 a 52495. Ministerio de Economía y Hacienda. Madrid (España).
- Boletín oficial del estado «BOE» núm. 244, de 11 de octubre de 2000, páginas 34882 a 34895. Ministerio de Economía y Hacienda. Madrid (España).
- Breslow, L.; Enstrom, J. E. (1980). *Persistence of health habits and their relationship to mortality*. Elsevier Inc.
- Currie, I. (2012). *Forecasting with the Age-Period-Cohort Model?* Proceedings of 27th International Workshop on Statistical Modelling. Praga (República Checa).
- Delwarde, A.; Denuit, M. (2006). *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*. Economica. París (Francia).
- Fries, J.F. (1980). *Aging, natural death, and the compression of morbidity*. The New England Journal of Medicine. 303. 130-135.
- Gavrilov, L. A.; Gavrilova, N. S. (2019). *Are We Approaching a Biological Limit to Human Longevity?* The Journals of Gerontology: Series A, glz164. Oxford (Reino Unido).
- Giroi, F.; King, G. (2007). *Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method*. University of Harvard. Boston (Estados Unidos).
- Gompertz, B. (1825). “*On the Nature of the Function of the Law of Human Mortality and On a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies*”. Philosophical Transactions of The Royal Society. Londres (Reino Unido).
- Institute and Faculty of Actuaries (2015). *Longevity Risk, Policy summary*.
- Renshaw, A. E.; Haberman, S. (2006). *A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Factors*. Insurance: Mathematics and Economics. 33.
- Rodríguez-Pardo del Castillo, J. M. (2011). *La incertidumbre bioactuarial en el riesgo de longevidad: Reflexiones bioéticas*. Fundación Mapfre. Madrid (España).

Sarrasí, F. J. (2018). *Matemática del reaseguro*. Publicación n.61 de la Colección de Publicaciones del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Universitat de Barcelona. Barcelona (España).

Scottish mortality: past, present and future, PAMS conference, 30 October 2009, Adrian Gallop, ONS.

Shaw, C. (2007). *Fifty Years of United Kingdom National Population Projections: How Accurate Have They Been?* Population trends. 128.

### **Webgrafía:**

<https://www.ft.com/content/238cc916-e935-11e6-967b-c88452263daf>

[https://www.ine.es/jaxi/Datos.htm?path=/t00/mujeres\\_hombres/tablas\\_2/10/&file=d1g1.px](https://www.ine.es/jaxi/Datos.htm?path=/t00/mujeres_hombres/tablas_2/10/&file=d1g1.px)

<https://novo.lavozdegalicia.es/noticia/que-se-cuece/2015/10/23/cientificos-creen-nacido-persona-llegara-1000-anos-edad/00031445613684982565845.htm>

<https://unespa-web.s3.amazonaws.com/main-files/uploads/2017/06/Tablas-Generacionales-Espanolas-PERMF2000.pdf>

## **12. Anexos**

### **Código caso práctico R:**

```
load("C:/Users/Victoria/Desktop/TFM, Riesgo de Longevidad y Reaseguro/R
codigo/TAULES_MAV.RData")
```

```
#DATOS:
```

```
# Interes=2%
```

```
# Edad asegurados 50 años, nacidos en 1969
```

```
# Renta vitalicia, pospagable, anual y diferida 17 años
```

```
# 3 tipos de asegurados:
```

```
# Tipo 1 percibe 8000??? al año, 50 asegurados
```

```
# Tipo 2 percibe 10000??? al año, 45 asegurados
```

```
# Tipo 3 percibe 12000??? al año, 25 asegurados
```

```
l69<-conslm(1969)
```

```
t<-17:64;t
```

```
v<-1.02^-(t+1)
```

```
p<-l69[51+t+1]/l69[51]
```

```
# VAA Tipo 1
```

```

u1<-8000
r1<-sum(u1*v*p);r1
r1T<-r1*50;r1T

# VAA Tipo 2

u2<-10000
r2<-sum(u2*v*p);r2
r2T<-r2*45;r2T

# VAA Tipo 3

u3<-12000
r3<-sum(u3*v*p);r3
r3T<-r3*25;r3T

sum(r1T,r2T,r3T)
##### CUOTA PARTE 30/70 30=K 70=(1-K)

k<-0.3

#TIPO 1

# cedente
u1CPc<-u1*k;u1CPc
r1CPc<-sum(u1CPc*v*p);r1CPc
r1CPcT<-r1CPc*50;r1CPcT

# reaseguro
u1CPr<-u1*(1-k);u1CPr
r1CPr<-sum(u1CPr*v*p);r1CPr
r1CPrT<-r1CPr*50;r1CPrT

#TIPO 2

# cedente
u2CPc<-u2*k;u2CPc
r2CPc<-sum(u2CPc*v*p);r2CPc
r2CPcT<-r2CPc*45;r2CPcT

# reaseguro
u2CPr<-u2*(1-k);u2CPr

```

```
r2CPr<-sum(u2CPr*v*p);r2CPr
r2CPrT<-r2CPr*45;r2CPrT
```

```
#TIPO 3
```

```
# cedente
u3CPc<-u3*k;u3CPc
r3CPc<-sum(u3CPc*v*p);r3CPc
r3CPcT<-r3CPc*25;r3CPcT
```

```
# reaseguro
u3CPr<-u3*(1-k);u3CPr
r3CPr<-sum(u3CPr*v*p);r3CPr
r3CPrT<-r3CPr*25;r3CPrT
```

```
##### EXCEDENTES
```

```
m<-3500
```

```
#TIPO 1
```

```
# cedente
u1EXc<-m;u1EXc
r1EXc<-sum(u1EXc*v*p);r1EXc
r1EXcT<-r1EXc*50;r1EXcT
```

```
# reaseguro
u1EXr<-u1-m;u1EXr
r1EXr<-sum(u1EXr*v*p);r1EXr
r1EXrT<-r1EXr*50;r1EXrT
```

```
#TIPO 2
```

```
# cedente
u2EXc<-m;u2EXc
r2EXc<-sum(u2EXc*v*p);r2EXc
r2EXcT<-r2EXc*45;r2EXcT
```

```
# reaseguro
u2EXr<-u2-m;u2EXr
r2EXr<-sum(u2EXr*v*p);r2EXr
```

```
r2EXrT<-r2EXr*45;r2EXrT
```

```
#TIPO 3
```

```
# cedente
```

```
u3EXc<-m;u3EXc
```

```
r3EXc<-sum(u3EXc*v*p);r3EXc
```

```
r3EXcT<-r3EXc*25;r3EXcT
```

```
# reaseguro
```

```
u3EXr<-u3-m;u3EXr
```

```
r3EXr<-sum(u3EXr*v*p);r3EXr
```

```
r3EXrT<-r3EXr*25;r3EXrT
```

```
##### STOP-LOSS
```

```
su<-(u1*50)+(u2*45)+(u3*25);su #su=siniestralidad cartera rentas vitalicias
```

```
mSL<-500000
```

```
# cedente
```

```
suSLc<-mSL;suSLc
```

```
rSLc<-sum(suSLc*v*p);rSLc
```

```
# reaseguro
```

```
suSLr<-su-mSL;suSLr
```

```
rSLr<-sum(suSLr*v*p);rSLr
```

```
##### SEGUNDA PARTE
```

```
# ESPERANZA DE VIDA
```

```
te<-0:64;te
```

```
tx<-sum(((l69[51+te]-l69[51+te+1])/l69[51])*(50+te));tx
```

```
# VAA de la cedente que se lleva el 100% hasta los 87 años
```

```
tc<-17:37;tc
```

```
vc<-1.02^-(tc+1);vc
```

```
pc<-l69[51+tc+1]/l69[51]
```

```
# TIPO 1
```

```
rc1<-sum(u1*vc*pc);rc1
```

```
rc1T<-rc1*50;rc1T
```

```
# TIPO 2
```

```
rc2<-sum(u2*vc*pc);rc2
```

```
rc2T<-rc2*45;rc2T
```

```
# TIPO 3
```

```
rc3<-sum(u3*vc*pc);rc3
```

```
rc3T<-rc3*25;rc3T
```

```
# CON SU
```

```
#prueba que coinciden
```

```
rcsu<-sum(su*vc*pc);rcsu
```

```
sum(rc1T,rc2T,rc3T)
```

```
## VAA del reasegurador
```

```
tr<-38:64;tr
```

```
vr<-1.02^-(tr+1);vr
```

```
pr<-169[51+tr+1]/169[51]
```

```
# CUOTA PARTE 30/70
```

```
k<-0.3
```

```
#TIPO 1
```

```
# cedente
```

```
u1CPcr<-u1*k;u1CPcr
```

```
r1CPcr<-sum(u1CPcr*vr*pr);r1CPcr
```

```
r1CPcrT<-r1CPcr*50;r1CPcrT
```

```
# reaseguro
```

```
u1CPrr<-u1*(1-k);u1CPrr
```

```
r1CPrr<-sum(u1CPrr*vr*pr);r1CPrr
```

```
r1CPrrT<-r1CPrr*50;r1CPrrT
```

```
#TIPO 2
```

```
# cedente
```

```
u2CPcr<-u2*k;u2CPcr
```

```
r2CPcr<-sum(u2CPcr*vr*pr);r2CPcr
```

r2CPcrT<-r2CPcr\*45;r2CPcrT

# reaseguro

u2CPrr<-u2\*(1-k);u2CPrr

r2CPrr<-sum(u2CPrr\*vr\*pr);r2CPrr

r2CPrrT<-r2CPrr\*45;r2CPrrT

#TIPO 3

# cedente

u3CPcr<-u3\*k;u3CPcr

r3CPcr<-sum(u3CPcr\*vr\*pr);r3CPcr

r3CPcrT<-r3CPcr\*25;r3CPcrT

# reaseguro

u3CPrr<-u3\*(1-k);u3CPrr

r3CPrr<-sum(u3CPrr\*vr\*pr);r3CPrr

r3CPrrT<-r3CPrr\*25;r3CPrrT

##### EXCEDENTES

m<-3500

#TIPO 1

# cedente

u1EXcr<-m;u1EXcr

r1EXcr<-sum(u1EXcr\*vr\*pr);r1EXcr

r1EXcrT<-r1EXcr\*50;r1EXcrT

# reaseguro

u1EXrr<-u1-m;u1EXrr

r1EXrr<-sum(u1EXrr\*vr\*pr);r1EXrr

r1EXrrT<-r1EXrr\*50;r1EXrrT

#TIPO 2

# cedente

u2EXcr<-m;u2EXcr

r2EXcr<-sum(u2EXcr\*vr\*pr);r2EXcr

r2EXcrT<-r2EXcr\*45;r2EXcrT

```

# reaseguro
u2EXrr<-u2-m;u2EXrr
r2EXrr<-sum(u2EXrr*vr*pr);r2EXrr
r2EXrrT<-r2EXrr*45;r2EXrrT

#TIPO 3

# cedente
u3EXcr<-m;u3EXcr
r3EXcr<-sum(u3EXcr*vr*pr);r3EXcr
r3EXcrT<-r3EXcr*25;r3EXcrT

# reaseguro
u3EXrr<-u3-m;u3EXrr
r3EXrr<-sum(u3EXrr*vr*pr);r3EXrr
r3EXrrT<-r3EXrr*25;r3EXrrT

##### STOP-LOSS

su<-(u1*50)+(u2*45)+(u3*25);su #su=siniestralidad cartera rentas vitalicias
mSL<-500000

# cedente
suSLc<-mSL;suSLc
rSLcr<-sum(suSLc*vr*pr);rSLcr

# reaseguro
suSLrr<-su-mSL;suSLrr
rSLrr<-sum(suSLrr*vr*pr);rSLrr
rSLrr+rSLcr+sum(rc1T,rc2T,rc3T)

```