



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

**EL TEOREMA DE INMERSIÓN
DE BONNET**

Autor: Marc Guzmán Albiol

Director: Dr. Carlos Currás Bosch

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de junio de 2019

Abstract

This paper deals with a classic theorem in differential geometry of surfaces: Bonnet's theorem. Our objective is to generalize the theorem for manifolds of arbitrary codimension. The theory of vector bundles gives us strong tools concerning different topics in differential geometry theory, such as metric, connections and curvature. Henceforth, we develop in the first part of this work the most important aspects in this theory, without losing sight of our objectives. We will introduce one of the most powerful tools in this theory: the pullback of vector bundles. This tool will be frequently used during this work. Moreover, we will shortly introduce the concept of Ehresmann connection, whose presence in modern differential geometry is highly important. At the end, it will be given a precise statement and a proof of the Bonnet's immersion theorem.

Resumen

Este trabajo trata sobre un teorema clásico en la teoría de superficies diferenciables: el teorema de Bonnet. Nuestro objetivo será generalizar el teorema para variedades Riemannianas de codimensión arbitraria. La teoría de fibrados vectoriales diferenciables nos da herramientas muy potentes al tratar ciertos tópicos de la diferencial, como la métrica, las conexiones o la curvatura. Es por ello que en la primera parte de este trabajo se desarrollan los aspectos más importantes de esta teoría, siempre sin perder de vista nuestro objetivo. Introduciremos una de las herramientas más potentes de esta teoría, el pullback de fibrados vectoriales, cuya presencia será continua a lo largo del trabajo. También introduciremos, de manera breve, el concepto de conexión de Ehresmann, cuya presencia en la geometría diferencial moderna es sumamente importante. Como parte final, se dará un enunciado preciso y prueba al teorema de inmersión de Bonnet.

Agradecimientos

Als meus pares, per permetre'm el privilegi d'estudiar el que vertaderament m'omple, per aguantar-me en els moments on tot es complica i, simplement, per estimar-me sempre. Als meus avis, els meus segons pares; mai els hi podre agrair tant. Al meu tiet, perquè sempre ha sapigut produir en mi un interès científic que ha derivat fins on ha derivat. A la Raquel, per tot l'amor que he rebut, indispensable en tot moment. A tota la meva família, en general. Al meu cosí Ruben i als meus amics Ivan, Jerez, Dani, Villo y Navarro per distreure'm la ment quan més ho requería i per omplir la meva vida d'infinitos moments per recordar. Al meu tutor, per solucionar-me tots els dubtes que he tingut en el transcurs d'aquest treball i saber guiar els meus pensaments de la millor forma possible.

Índice general

1. Introducción	1
2. Fibrados vectoriales	3
2.1. Definiciones	3
2.2. Funciones de transición. Construcción de fibrados vectoriales.	4
2.3. Morfismos de fibrados vectoriales	6
2.4. Pullback de fibrados vectoriales	8
2.5. Sumas de Whitney	9
2.6. Subfibrados vectoriales	9
2.7. Métrica en los fibrados vectoriales	9
2.8. Conexiones en los fibrados vectoriales	11
2.9. Curvatura	14
2.10. Conexiones de Ehresmann	15
3. Teorema de Inmersión de Bonnet	19
3.1. Segundo campo tensorial fundamental	19
3.2. Las conexiones lineales ∇ y ∇^\perp	22
3.3. Las ecuaciones de Gauss-Codazzi	23
3.4. Campos tensoriales de Gauss-Codazzi	25
3.5. Teorema de inmersión Bonnet	25
Bibliografía	32

Capítulo 1

Introducción

La geometría diferencial clásica de superficies nos da herramientas para el estudio de superficies diferenciables en \mathbb{R}^3 . Una de estas herramientas, y de las más importantes, es la primera forma fundamental. La primera forma fundamental nos expresa la manera en la que la superficie S hereda el producto escalar natural en \mathbb{R}^3 . De esta manera, nos define una métrica sobre la superficie, permitiéndonos calcular áreas de regiones, longitudes de curvas, y ángulos de vectores tangentes en S . Y lo más importante es que nos permite efectuar cálculos de forma intrínseca, sin tener que referirnos directamente al espacio ambiente donde S se encuentra. De hecho, esta propiedad es una de las motivaciones de la definición moderna de variedad diferenciable abstracta. Otra de las herramientas más importantes de la geometría diferencial clásica surge de un intento de generalizar el estudio de la curvatura que se hace en curvas. Dado un punto $p \in S$, nos interesa estudiar la “variación” en p de un campo vectorial normal unitario N en un entorno del punto. Esto nos lleva directamente a la definición de la aplicación de Gauss y, más en concreto, a su diferencial, el automorfismo de Weingarten $d_p N : T_p S \rightarrow T_p S$.

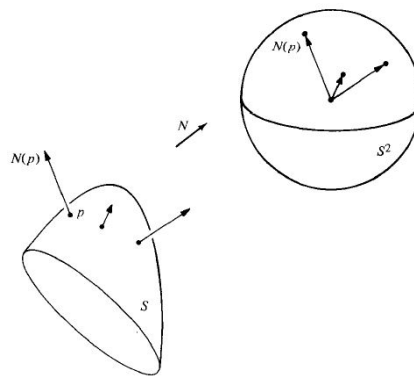


Figura 1.1: Aplicación de Gauss.

Una de las propiedades más importantes de $d_p N$ es que se trata de una aplicación lineal y autoadjunta, cosa que nos permite definir una forma cuadrática en $T_p S$ que llamamos segunda forma fundamental de S en p . Esta forma cuadrática nos codifica muchas propiedades importantes de la superficie, en particular, su curvatura. El estudio local de la

primera y la segunda forma fundamental nos dirige al teorema Egregio de Gauss y a las ecuaciones de Gauss y de Mainardi-Codazzi, llamadas ecuaciones de compatibilidad. Una propiedad importante de estas ecuaciones, y en la que nos centraremos a lo largo de este trabajo, es que nos determinan localmente la superficie S .

De hecho, esta manera de proceder se puede generalizar sin mucha dificultad para variedades riemannianas de codimensión 1. Nuestra labor es generalizar aún más este concepto para variedades riemannianas arbitrarias. Para ello, desarrollaremos en el primer capítulo una serie de herramientas de fibrados vectoriales que nos permitirán, entre muchas cosas, definir lo que corresponde informalmente al espacio normal a una variedad. Este hecho será de crucial importancia para generalizar la segunda forma fundamental a un tensor que tomará valores en este espacio. Este tensor, para variedades isométricamente inmersas en algún espacio euclidiano, satisface unas ciertas ecuaciones que deduciremos en la segunda parte de este trabajo. Nuestro objetivo será probar que dichas ecuaciones nos caracterizan la inmersión. Este es el llamado **teorema de Bonnet**.

Capítulo 2

Fibrados vectoriales

2.1. Definiciones

Definición 2.1.1. Sea M una variedad diferenciable. Un **fibrado vectorial (real) k -dimensional sobre M** es una terna (E, π, M) , donde E es una variedad diferenciable y $\pi : E \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable que satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $p \in M$, la fibra $E_p := \pi^{-1}(p)$ sobre p tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión k .
2. Para todo $p \in M$ existe un entorno U de p en M y un difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ (llamado *trivialización local de E sobre U*) tal que
 - a) $\pi_U \circ \phi = \pi$, donde $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ es la proyección.
 - b) Para todo $q \in U$, la restricción de ϕ a la fibra sobre q , es un isomorfismo de espacios vectoriales entre E_q y $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$

La siguiente figura ilustra un fibrado vectorial, junto con una trivialización local.

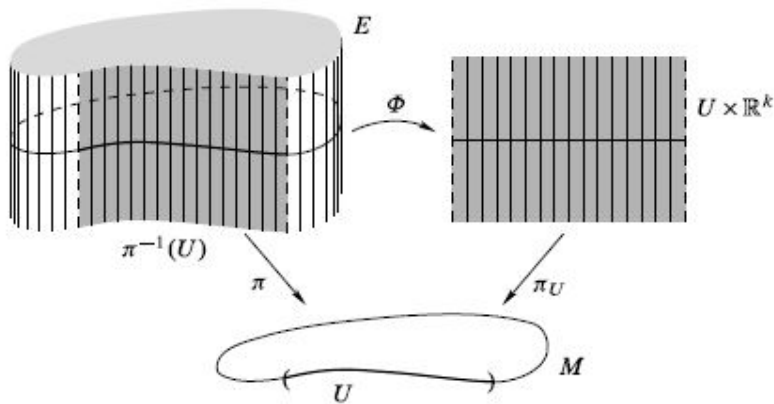


Figura 2.1: Trivialización local de un fibrado vectorial.

A la variedad E la llamaremos espacio total del fibrado, M es su base y π su proyección. Si existe una **trivialización local de E sobre todo M** (llamada trivialización global de E) diremos que E es un **fibrado trivial**. En este caso E es difeomorfo a la variedad producto $M \times \mathbb{R}^k$.

Observación 2.1.2. En lo que sigue acostumbraremos a denotar los fibrados vectoriales como $\pi : E \rightarrow M$ o simplemente E .

Consideramos ahora $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. Una **sección local** de E es una aplicación diferenciable $\sigma : U \rightarrow E$ definida en un abierto U de M tal que $\pi \circ \sigma = Id_U$. Una sección global, o simplemente una sección, es una sección local definida sobre todo M . La **sección cero** de E es la sección global $\zeta : M \rightarrow E$ definida por $\zeta(p) = 0 \in E_p$ para toda $p \in M$. Denotaremos por $\Gamma(E)$ al $\mathcal{F}(M)$ -módulo formado por el conjunto de todas las secciones (globales) de E . Sea ahora $f : N \rightarrow M$ una aplicación diferenciable entre variedades, diremos que $\sigma : N \rightarrow E$ es una sección de E a lo largo de f si $\pi \circ \sigma = f$.

Definición 2.1.3. Una **referencia local** de un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ de dimensión k es una k -tupla (ξ_1, \dots, ξ_k) de secciones locales en $U \subseteq E$ linealmente independientes punto a punto.

Dada una referencia local $(\xi_i)_{i=1, \dots, k}$ en un abierto $U \subset M$, toda sección local definida en U puede escribirse como combinación lineal $\sum_{j=1}^k \alpha_j \xi_j$ donde $\alpha_j \in \mathcal{F}(U)$.

2.2. Funciones de transición. Construcción de fibrados vectoriales.

Todo fibrado vectorial no trivial requiere más de una trivialización local. Ahora mostraremos que la composición de dos trivializaciones locales tiene una forma simple.

Proposición 2.2.1. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimensión k sobre una variedad diferenciable M . Suponemos que $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ y $\psi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ son dos trivializaciones locales de E tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces existe una aplicación diferenciable $\tau : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ tal que la composición $\phi \circ \psi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$ tiene la forma

$$\phi \circ \psi^{-1}(p, v) = (p, \tau(p)v),$$

donde $\tau(p)v$ denota la acción usual de la matriz de $\tau(p)$ sobre el vector $v \in \mathbb{R}^k$.

Demostración. Estamos en la situación de este diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (U \cap V) \times \mathbb{R}^k & \xleftarrow{\psi} & \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\phi} & (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi_{U \cap V} & \downarrow \pi & \swarrow \pi_{U \cap V} & \\ & & U \cap V & & \end{array}$$

donde entendemos ϕ y ψ como las restricciones a $\pi^{-1}(U \cap V)$ de las aplicaciones originales. Por las propiedades de fibrado vectorial, el diagrama anterior es conmutativo. Esto significa que

$$\pi_{U \cap V} \circ (\phi \circ \psi^{-1}) = \pi_{U \cap V}.$$

Por tanto, tenemos que $(\phi \circ \psi^{-1})(p, v) = (p, \xi(p, v))$ para una cierta aplicación diferenciable $\xi : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Además, por una de las propiedades de fibrado vectorial, fijado $p \in U \cap V$ se cumple que la aplicación que envía v a $\xi(p, v)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por tanto, existe $\tau(p) \in GL(k, \mathbb{R})$ tal que $\xi(p, v) = \tau(p)v$. Nos queda probar que la aplicación $\tau : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ es diferenciable.

Escogemos $(e_i)_i$ una base de \mathbb{R}^k y para cada i consideramos la proyección en la i -ésima coordenada $\pi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ respecto de la base fijada. Denotamos ahora como $\tau_j^i(p)$ las entradas de la matriz $\tau(p)$ respecto de la base escogida. Se cumple que $\tau_j^i(p) = \pi_i(\tau(p)e_j)$. Por tanto, como las entradas de la matriz son composiciones de funciones diferenciables, obtenemos que τ es diferenciable. □

La aplicación diferenciable $\tau : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ definida en el anterior lema se llama **función de transición** entre las trivializaciones locales ϕ y ψ . Como pasa en el espacio tangente, los fibrados vectoriales se suelen describir dando una colección de espacios vectoriales, uno en cada punto de la variedad base. Pero para definir un fibrado vectorial necesitamos darle una topología y una estructura diferenciable a la unión disjunta de todos los espacios vectoriales y luego construir trivializaciones locales que cumplan ciertas propiedades. El siguiente lema nos proporciona un atajo.

Lema 2.2.2. *Sea M una variedad diferenciable y suponemos que para cada $p \in M$ tenemos un espacio vectorial E_p de una cierta dimensión fijada k . Sea $E = \coprod_{p \in M} E_p$ y $\pi : E \rightarrow M$ la aplicación que envía cada elemento de E_p a p . Suponemos, además, que tenemos:*

1. *Un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M .*
2. *Para cada $\alpha \in A$, una aplicación biyectiva $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ cuya restricción a cada E_p es un isomorfismo de espacios vectoriales de E_p en $\{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.*
3. *Para cada $\alpha, \beta \in A$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, una aplicación diferenciable $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ tal que la aplicación $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ de $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$ en si mismo es de la forma $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)v)$.*

Entonces E tiene una única topología y estructura diferenciable que lo hacen a la vez una variedad diferenciable y un fibrado vectorial k -dimensional sobre M , cuya proyección es π y sus trivializaciones locales son $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$.

Conviene pararnos ahora a estudiar una propiedad importante que cumplen las funciones de transición que presentamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimensión k sobre una variedad diferenciable M . Suponemos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento abierto de M tal que para todo $\alpha \in A$ tenemos una trivialización local $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ de E . Entonces las funciones de transición cumplen*

1. $\tau_{\alpha\alpha}(p) = p$
2. $\tau_{\alpha\beta}(p)\tau_{\beta\gamma}(p) = \tau_{\alpha\gamma}(p) \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

Donde la yuxtaposición se entiende como producto de matrices.

A esta propiedad la llamaremos **condición de cociclo**. En el siguiente lema veremos que la elección de funciones de transición consistentes con la condición de cociclo determina un fibrado vectorial.

Teorema 2.2.4 (Construcción de fibrados vectoriales). *Sea M una variedad diferenciable y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento abierto de M . Suponemos que para cada $\alpha, \beta \in A$ tenemos una aplicación diferenciable $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$. Pediremos que estas aplicaciones cumplan la condición de cociclo. Entonces existe un fibrado vectorial k -dimensional $\pi : E \rightarrow M$ con trivializaciones locales $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ cuyas funciones de transición son las aplicaciones $\tau_{\alpha\beta}$ dadas.*

Demostración. Consideramos en $X = \coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k)$ la relación de equivalencia que identifica $(p, v) \sim (p, \tau_{\alpha\beta}(p)v)$ para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta, \forall \alpha, \beta \in A$. La razón de pedir que las funciones de transición cumplan la condición de cociclo es para que \sim sea, efectivamente, una relación de equivalencia. Definiremos entonces $E := X / \sim$ con la proyección $\pi : E \rightarrow M$ evidente. Por el lema anterior, E tiene estructura de fibrado vectorial y obtenemos el resultado que queríamos ver. \square

2.3. Morfismos de fibrados vectoriales

Queremos construir la categoría de los fibrados vectoriales **VB** cuyos objetos son los fibrados vectoriales definidos anteriormente. Para ello necesitamos definir los morfismos de la categoría **VB**, los morfismos de fibrados vectoriales. La composición en **VB** será naturalmente la composición de morfismos de fibrados vectoriales.

Definición 2.3.1. *Sean $\pi : E \rightarrow M$ y $\pi' : E' \rightarrow M'$ fibrados vectoriales. Una aplicación diferenciable $F : E \rightarrow E'$ se llama **morfismo de fibrados vectoriales** si existe una aplicación $f : M \rightarrow M'$ que satisface $\pi' \circ F = f \circ \pi$ con la propiedad que, para todo $p \in M$, la restricción $F|_{E_p} : E_p \rightarrow E'_{f(p)}$ es lineal.*

Esta definición de morfismo entre fibrados vectoriales nos lleva a considerar el caso donde los fibrados están definidos sobre la misma variedad base, formando así una subcategoría de **VB**.

Definición 2.3.2. Sean $\pi : E \rightarrow M$ y $\pi' : E' \rightarrow M$ fibrados vectoriales sobre la misma variedad base M . Una aplicación diferenciable $F : E \rightarrow E'$ se llama **M -morfismo de fibrados vectoriales** si satisface $\pi' \circ F = \pi$ y para todo $p \in M$, la restricción $F|_{E_p} : E_p \rightarrow E'_p$ es lineal.

Para cada variedad M definimos \mathbf{VB}_M la categoría cuyos objetos son los fibrados vectoriales sobre M con los M -morfismos de fibrados vectoriales como morfismos de la categoría. Categoricalmente tenemos la noción de isomorfismo de fibrados vectoriales y de isomorfismo de fibrados vectoriales sobre M . En concreto, un M -isomorfismo de fibrados vectoriales $F : E \rightarrow E'$ es un difeomorfismo que satisface $\pi' \circ F = \pi$ y la restricción a cada fibra es lineal. En el siguiente teorema proporcionaremos una condición necesaria y suficiente para que un M -morfismo sea un isomorfismo.

Teorema 2.3.3. Sea $F : E \rightarrow E'$ un M -morfismo entre dos fibrados vectoriales. Entonces F es un isomorfismo si y solo si para todo $p \in M$ la aplicación $F|_{E_p} : E_p \rightarrow E'_p$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Primero suponemos que F es un isomorfismo. Por tanto, existe G (también isomorfismo) tal que $F \circ G = Id_{E'}$ y $G \circ F = Id_E$. Entonces es inmediato ver que la restricción de F a cada fibra es un isomorfismo de espacios vectoriales ya que $G|_{E'_p} : E'_p \rightarrow E_p$ cumple que $F|_{E_p} \circ G|_{E'_p} = Id_{E'}$ y $G|_{E'_p} \circ F|_{E_p} = Id_E$.

Ahora supondremos que $F|_{E_p}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y veremos que F es un isomorfismo de fibrados vectoriales. Vamos a construir $G : E' \rightarrow E$ como la aplicación que, restringida a cada fibra E'_p , es la inversa de la aplicación lineal $F|_{E_p}$. Resta demostrar que G así construida es diferenciable.

Como F es una biyección entre las fibras de E y E' , se sigue que F es una biyección. Por tanto, si probamos que F es un difeomorfismo local obtendremos que $F^{-1} = G$ es diferenciable. Tomamos un punto $p \in E$. Escogemos un entorno U de $\pi(p) \in M$ lo suficientemente pequeño para que existan trivializaciones locales $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ y $\phi' : (\pi')^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$. Como F es una biyección y un morfismo de fibrados, tendremos que $F(\pi^{-1}(U)) = (\pi')^{-1}(U)$ y, por tanto, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{F} & (\pi')^{-1}(U) \\ & \searrow \phi & \downarrow \phi' \\ & & U \times \mathbb{R}^k \end{array}$$

Como ϕ, ϕ' son difeomorfismos, F restringida a un abierto de E que contiene p es un difeomorfismo entre abiertos y, por tanto, F es un difeomorfismo local. □

Observación 2.3.4. Sea $\phi : E \rightarrow E'$ un M -morfismo de fibrados vectoriales sobre una variedad base M . Se cumple que ϕ induce un morfismo de $\mathcal{F}(M)$ -módulos $\psi : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ definido como $\psi(s) = \phi \circ s$. Por tanto, $\phi(fs) = f\phi(s)$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$ y $s \in \Gamma(E)$.

2.4. Pullback de fibrados vectoriales

En esta sección vamos a centrar nuestra atención en la construcción de fibrados vectoriales inducidos por aplicaciones diferenciables de las variedades base. En otras palabras, dada una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables $f : M \rightarrow N$ vamos a construir un functor $f^* : \mathbf{VB}_N \rightarrow \mathbf{VB}_M$.

Teorema 2.4.1. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y $\pi : E \rightarrow N$ un fibrado vectorial k -dimensional. Entonces existe un fibrado vectorial f^*E sobre M y una aplicación $F : f^*E \rightarrow E$ tal que es un isomorfismo entre las fibras de f^*E y E . Además, f^*E es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Definimos f^*E el fibrado vectorial con espacio total

$$f^*E = \{ (p, v) \in M \times E \mid f(p) = \pi(v) \}$$

y la proyección $\pi_1 : f^*E \rightarrow M$ que envía $(p, v) \mapsto p$. Definimos $F : f^*E \rightarrow E$ como $F(p, v) = v$ y, por tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \quad (2.4.1)$$

Por el teorema de la función implícita, f^*E es una subvariedad diferenciable de $M \times E$. Observamos que, por construcción, la fibra sobre $p \in M$ es $p \times E_{f(p)} \cong E_{f(p)}$. Ahora, si $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ es una familia de trivializaciones locales que recubre E , entonces $\{f^{-1}(U_\alpha), h_\alpha \circ f\}$ es una familia de trivializaciones locales para f^*E .

La unicidad salvo isomorfismo es consecuencia directa del teorema 2.3.3. \square

Observación 2.4.2. También podemos concluir la argumentación anterior usando funciones de transición. Si $\{g_{\alpha\beta}\}$ son funciones de transición para E , entonces $\{g_{\alpha\beta} \circ f\}$ son funciones de transición para f^*E .

Observación 2.4.3. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y $E \rightarrow N$ un fibrado vectorial. Una forma efectiva de visualizar el pullback de E es identificando la fibra de f^*E sobre un punto $p \in M$ con la fibra sobre $f(p)$ de E .

Definición 2.4.4. *Al fibrado vectorial f^*E construido en el teorema anterior lo llamaremos **pullback de E por la aplicación f** .*

También nos interesará, al igual que hemos hecho para fibrados vectoriales, introducir el pullback de secciones de un fibrado vectorial. Sea $\pi : E \rightarrow N$ un fibrado vectorial, $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y $s : N \rightarrow E$ una sección de E , entonces

$$f^*s : M \rightarrow f^*E$$

$$(f^*s)(p) = (p, s(f(p))) \in f^*E$$

es una sección del fibrado pullback f^*E .

2.5. Sumas de Whitney

Una operación básica entre fibrados vectoriales con la misma variedad base es la suma directa.

Definición 2.5.1. Sea M una variedad diferenciable y $\pi' : E' \rightarrow M$, $\pi'' : E'' \rightarrow M$ fibrados vectoriales sobre M de dimensiones k', k'' respectivamente. Llamaremos **suma directa de E' y E''** (o **suma de Whitney de E' y E''**) al fibrado vectorial sobre M cuya fibra en cada $p \in M$ es la suma directa $E'_p \oplus E''_p$. El espacio total está definido por $E' \oplus E'' = \coprod_{p \in M} (E'_p \oplus E''_p)$ con la proyección natural $\pi : E' \oplus E'' \rightarrow M$.

Una manera formal de construir el fibrado suma directa es la siguiente:

Consideramos el fibrado vectorial producto $\pi' \times \pi'' : E' \times E'' \rightarrow M \times M$ y la aplicación diferenciable $\Delta : M \rightarrow M \times M$ que envía $p \mapsto (p, p)$, es decir, la aplicación diagonal. Entonces el pullback $\Delta^*(E' \times E'')$ es la suma de Whitney de E' y E'' .

Se puede comprobar fácilmente que la operación \oplus es conmutativa, asociativa y se comporta bien con la operación pullback. Más precisamente, sean E_1, E_2, E_3 fibrados vectoriales sobre N y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, se cumple

$$\begin{aligned} E_1 \oplus E_2 &\cong E_2 \oplus E_1 \\ E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) &\cong (E_1 \oplus E_2) \oplus E_3 \\ f^*(E_1 \oplus E_2) &\cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2). \end{aligned}$$

2.6. Subfibrados vectoriales

Vamos a introducir muy brevemente los subfibrados vectoriales de un fibrado vectorial.

Definición 2.6.1. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. Un **subfibrado** de E es un fibrado $\pi' : E' \rightarrow M$ junto con un morfismo $i : E' \rightarrow E$ tal que i es inyectivo sobre las fibras, es decir, para todo $p \in M$ la aplicación $i|_p : E'_p \rightarrow E_p$ es inyectiva.

Por ejemplo, sea M una variedad diferenciable, un subfibrado vectorial del espacio tangente TM es lo que llamamos una distribución.

2.7. Métrica en los fibrados vectoriales

En esta sección vamos a dotar a los fibrados vectoriales de una métrica. Para ello, necesitamos introducir antes un producto tensorial de fibrados, así como el fibrado dual.

Definición 2.7.1. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimensión k . El **fibrado dual** E^* es el fibrado vectorial cuyas fibras son los espacios duales de las fibras de E . Es decir,

$$E^* = \{ (p, w) \in M \times E_p^* \}$$

con la proyección natural.

Si (ξ_i) es una referencia local de E en un abierto U , entonces la aplicación $\phi : \pi_{E^*}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ definida por $(p, w) \mapsto (p, w(\xi_1(p)), \dots, w(\xi_k(p)))$ es una trivialización local de E^* sobre U . La correspondiente referencia para E^* viene dada por las secciones θ^i definidas por $\theta^i(\xi_j) = \delta_j^i$.

Definición 2.7.2. Sean E_1, \dots, E_k fibrados vectoriales sobre una variedad M . El **producto tensorial** $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ es el fibrado vectorial sobre M cuya fibra sobre $p \in M$ es el producto tensorial $(E_1)_p \otimes \dots \otimes (E_k)_p$.

Se puede comprobar que el producto tensorial es asociativo, es decir, $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \cong (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ y que, además, respecta los duales, es decir $(E_1 \otimes E_2)^* \cong E_1^* \otimes E_2^*$. Se podría iniciar un estudio extensivo del producto tensorial de fibrados, pero en este trabajo lo enunciamos únicamente con la finalidad de introducir el concepto de métrica.

Observación 2.7.3. Observamos que el pullback de fibrados funciona bien con el fibrado dual y el producto tensorial, es decir:

$$(f^*(E))^* \cong f^*(E^*) \quad y \quad f^*E_1 \otimes f^*E_2 \cong f^*(E_1 \otimes E_2).$$

Definición 2.7.4. Una **métrica g en un fibrado vectorial** $\pi : E \rightarrow M$ es una sección de $E^* \otimes E^*$ tal que en cada punto $p \in M$, g_p es un producto escalar en E_p .

Teorema 2.7.5. Todo fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ admite una métrica.

Demostración. La idea es considerar un recubrimiento abierto de M tal que el fibrado sea trivial sobre cada uno de ellos. Esto es siempre posible debido a que E es un fibrado vectorial. Ahora, escogemos una partición de la unidad asociada a este recubrimiento y definimos en cada abierto un producto escalar. Usando ahora la partición de la unidad construimos una métrica definida en todo el fibrado vectorial. □

Sabemos que toda sección local de $E^* \otimes E^*$ en un abierto $U \subset M$ se puede expresar como combinación $\mathcal{F}(M)$ -lineal de las referencias locales. Sea (ξ_1, \dots, ξ_k) una referencia local en U de E . Hemos definido anteriormente $(\theta^1, \dots, \theta^k)$ la referencia dual en E^* . Entonces se puede comprobar que el conjunto

$$\{ \theta^{i_1} \otimes \theta^{i_2} \mid 1 \leq i_1, i_2 \leq k \}$$

es una referencia local de $E^* \otimes E^*$ definida en U .

Observación 2.7.6. Sea (M, g) una variedad riemanniana, entonces g es una métrica definida en el fibrado tangente TM . Por tanto, la definición anterior engloba la usual definición de métrica riemanniana en una variedad diferenciable.

Ejemplo 2.7.7. Una aplicación que nos será de vital importancia más adelante será la construcción del subfibrado vectorial complemento ortogonal a un subfibrado dado.

Tenemos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

donde $\pi : E \rightarrow M$ y $\pi' : F \rightarrow M$ son dos fibrados vectoriales y F es subfibrado de E . Dotamos a E de una métrica g .

Denotaremos F^\perp al fibrado

$$F^\perp = \{ x \in E \mid g(x, y) = 0 \ \forall y \in i(F)_{\pi(x)} \}$$

con la proyección dada por E . Lo llamaremos **fibrado complemento ortogonal de F en E** .

Una de las propiedades importantes de este fibrado es que se cumple que

$$F \oplus F^\perp \cong E.$$

Otra pregunta natural es la siguiente: Dada una inmersión $f : M \hookrightarrow N$ y $\pi : E \rightarrow N$ un fibrado vectorial provisto de una métrica g , ¿existe una métrica en f^*E inducida por g ? La respuesta es afirmativa. Podemos definir una métrica $g_f \in \Gamma(f^*(E^* \otimes E^*))$ en f^*E como $g_f = f^*(g)$.

Definición 2.7.8. *A la métrica g_f definida en el párrafo anterior la llamaremos **métrica pullback** en f^*E .*

2.8. Conexiones en los fibrados vectoriales

Definición 2.8.1. *Una conexión en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in \mathcal{F}(M)$ se cumpla:*

1. $\nabla_{X+Y}(s) = \nabla_X(s) + \nabla_Y(s)$
2. $\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X(s)$
3. $\nabla_X(s+t) = \nabla_X(s) + \nabla_X(t)$
4. $\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X(s)$

Ejemplo 2.8.2. El fibrado vectorial trivial $E = M \times V \rightarrow M$, donde V es un espacio vectorial tiene una conexión canónica. Primero observamos que toda función $h : M \rightarrow V$ tiene asociada una sección \bar{h} en E dada por

$$\bar{h}(p) = (p, h(p))$$

para todo punto $p \in M$. Observamos también que toda sección de E es de esta forma, por definición. Ahora definimos $\nabla_X \bar{h}$ como la sección que corresponde a la función Xh , es decir,

$$\nabla_X \bar{h} = \overline{Xh}.$$

Teorema 2.8.3. *Todo fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ admite una conexión ∇ .*

Demostración. Escogemos un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_\alpha$ de M tal que $E|_{U_\alpha}$ sea trivial para cada α . Escogemos ahora una partición de la unidad $\{g_\alpha\}$ asociada a este recubrimiento. Por el ejemplo anterior, todo $E|_{U_\alpha}$ admite una conexión ∇^α . Ahora, definimos para toda sección $s \in \Gamma(E)$ y todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X s = \sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha(s),$$

donde ∇^α está definida únicamente en $E|_{U_\alpha}$; al considerar $g_\alpha \nabla^\alpha$ la extendemos trivialmente a toda M . Primeramente observamos que ∇ verifica los tres primeros axiomas de una conexión. Para verificar el cuarto tomamos $f \in \mathcal{F}(M)$. Entonces

$$\nabla_X(fs) = \sum_\alpha g_\alpha(Xf \cdot s + f \nabla_X^\alpha(s)) = Xf \cdot s + f \sum_\alpha g_\alpha \nabla_X^\alpha(s) = Xf \cdot s + f \nabla_X(s).$$

□

Proposición 2.8.4. *Sea ∇ una conexión en un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces ∇_X es un operador local, es decir, si una sección $s \in \Gamma(E)$ se anula en un conjunto abierto $U \subset M$, entonces $\nabla_X s$ también se anula en U .*

Demostración. Suponemos $s|_U = 0$ y escogemos un punto $p \in M$. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\text{supp}(f) = U$ y $f(p) = 1$. Entonces $fs = 0$, luego

$$0 = \nabla_X(fs) = Xf \cdot s + f \nabla_X s.$$

Evaluando la ecuación anterior en p obtenemos que $(\nabla_X s)(p) = 0$, como queríamos ver. □

Vamos a presentar ahora un lema técnico sin demostración que nos va a permitir demostrar un resultado importante sobre conexiones en un fibrado vectorial.

Lema 2.8.5. *Sean E, E' fibrados vectoriales sobre M y $A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ una aplicación $\mathcal{F}(M)$ -lineal. Entonces existe un único morfismo de fibrados $a : E \rightarrow E'$ tal que $As = as$ para toda sección $s \in \Gamma(E)$.*

Proposición 2.8.6. *Sea ∇ una conexión en un fibrado vectorial $E \rightarrow M$, $s \in \Gamma(E)$ y $p \in M$. Si X, Y son campos vectoriales en M tales que $X_p = Y_p$ entonces*

$$(\nabla_X s)(p) = (\nabla_Y s)(p).$$

Demostración. Sigue directamente del lema anterior ya que la aplicación que envía $X \mapsto \nabla_X s$ para una sección fija s es $\mathcal{F}(M)$ -lineal. □

Esta proposición nos permite definir $\nabla_v s$ para un vector $v \in T_p M$ para un cierto $p \in M$. Escogemos un campo vectorial X tal que $X_p = v$ y definimos

$$\nabla_v s = (\nabla_X s)(p),$$

que por la proposición anterior, no depende de la elección de X .

Ahora veremos que podemos describir localmente las conexiones de forma sencilla gracias a la trivialización local que nos ofrecen los fibrados vectoriales. Más concretamente:

Lema 2.8.7. *Dado $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial trivial y (s_1, \dots, s_r) una referencia global para E . Entonces existe una correspondencia biyectiva entre las conexiones en E y las matrices $r \times r$, $\omega = (\omega_j^i)$ de 1-formas en M definida por la fórmula*

$$\nabla_X s_j = \sum_{i=1}^r \omega_j^i(X) s_i.$$

Llamaremos a ω la **1-forma de conexión** de ∇ con respecto a la referencia (s_1, \dots, s_r) .

Tal y como hemos hecho en secciones anteriores, dada $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y $\pi : E \rightarrow N$ un fibrado vectorial k -dimensional, nos interesará dotar al fibrado f^*E de una conexión inducida por una cierta conexión ∇ en el fibrado E .

Teorema 2.8.8. *Sea ∇ una conexión en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow N$ y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Entonces existe una única conexión $\bar{\nabla}$ en f^*E tal que para toda sección $s \in \Gamma(E)$, todo punto $p \in M$ y $v_p \in T_p M$ se cumple*

$$\pi_2 \left(\bar{\nabla}_{v_p} (f^* s) \right) = \nabla_{d_p f(v_p)} s$$

donde $\pi_2 : f^*E \rightarrow E$ es el morfismo de fibrados que envía $(p, v) \mapsto v \in E$.

Demostración. La unicidad sigue de que sea $\{s_j\}$ una referencia local de E definida en un abierto $U \subset N$ entonces $\{f^*s_j\}$ es una referencia para f^*E en el abierto $f^{-1}(U)$.

Primero consideramos el caso en el que E es un fibrado trivial. Escogemos una referencia (s_1, \dots, s_r) de E . Por el lema 2.8.7 obtenemos una matriz de 1-formas en N , $\omega = (\omega_j^i)$ tal que $\nabla_Y s_j = \sum_i \omega_j^i(Y) s_i$, para campos $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Ahora sea $\bar{s}_j = f^*(s_j)$ y $\bar{\omega}_j^i = f^*(\omega_j^i)$. Llamaremos $\bar{\nabla}$ a la única conexión en f^*E tal que

$$\bar{\nabla}_X \bar{s}_j = \sum_i \bar{\omega}_j^i(X) \bar{s}_i,$$

para campos $X \in \mathfrak{X}(M)$. Queda comprobar que $\bar{\nabla}$ satisface la ecuación del teorema. Sea $p \in M$, $v_p \in T_p M$ y $s \in \Gamma(E)$. Podemos escribir la sección s como $s = \sum_j h^j s_j$ para unas ciertas funciones $h^j \in \mathcal{F}(N)$. Sea $q = f(p) \in N$, $w = d_p f(v_p)$ y $g^j = h^j \circ f$. Entonces $f^*(s) = \sum_j g^j \bar{s}_j$ y se cumple

$$\pi_2 \left(\bar{\nabla}_{v_p} \bar{s}_j \right) = \pi_2 \left(\sum_i \bar{\omega}_j^i(v) \bar{s}_i(p) \right) = \sum_i \omega_j^i(w) s_i(q) = \nabla_w s_j$$

y por lo tanto

$$\pi_2 \left(\bar{\nabla}_v (f^* s) \right) = \pi_2 \left(\sum_j \left(v(g^j) \cdot \bar{s}_j(p) + g^j(p) \cdot \bar{\nabla}_v \bar{s}_j \right) \right)$$

$$= \sum_j \left(w(h^j) \cdot s_j(q) + h^j(q) \cdot \nabla_w s_j \right) = \nabla_w s$$

Para el caso general escogemos $\{U_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto de N tal que $E|_{U_\alpha}$ sea trivial para cada α . Sea $\bar{U}_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$. Por el primer caso, tenemos una conexión pullback $\bar{\nabla}^\alpha$ en $f^*E|_{\bar{U}_\alpha}$. Por unicidad, $\bar{\nabla}^\alpha$ y $\bar{\nabla}^\beta$ se restringen a la misma conexión en $\bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta$ para cada α y β . Por tanto, por el mismo argumento utilizado anteriormente con particiones de la unidad, obtenemos una conexión $\bar{\nabla}$ en f^*E que satisface la ecuación del enunciado. \square

Definición 2.8.9. *Bajo las condiciones del teorema llamaremos a $\bar{\nabla}$ **conexión pullback** de ∇ por f . Si queremos reflejar f en la notación podemos denotar a $\bar{\nabla}$ por $f^*\nabla$ o ∇^f .*

Observación 2.8.10. Bajo la identificación de la fibra sobre $p \in M$ de f^*E y la fibra sobre $f(p)$ en E , podemos escribir que la conexión pullback satisface $\bar{\nabla}_{v_p}(f^*s) = \nabla_{d_p f(v_p)}s$ en $(f^*E)_p = E_{f(p)}$.

Definición 2.8.11. *Una conexión ∇ en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ dotado de una métrica g , se dice que es compatible con la métrica si para todo $s, t \in \Gamma(E)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$X(g(s, t)) = g(\nabla_X s, t) + g(s, \nabla_X t).$$

Vamos a definir ahora una conexión importante en el fibrado tangente que vamos a utilizar más adelante, la conexión de Levi-Civita.

Definición 2.8.12. *Una conexión ∇ en TM es simétrica si no tiene torsión, es decir, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Teorema 2.8.13. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Entonces existe una única conexión ∇ en TM que es simétrica y compatible con la métrica g . Esta conexión se llama **conexión de Levi-Civita**.*

Ahora veremos cómo se comporta la compatibilidad con la métrica con el pullback de conexiones. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.8.14. *Sea ∇ una conexión en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow N$ y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Si g es una métrica en E y ∇ es compatible con g , entonces la conexión pullback $f^*\nabla$ es una conexión compatible con la métrica pullback g_f .*

2.9. Curvatura

La curvatura $R = R^\nabla$ de una conexión ∇ en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ asocia a cada par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ en M la aplicación $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ definida por

$$R(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]}s.$$

Si $R(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, diremos que ∇ es una conexión **plana**.

También podemos ver la curvatura como una aplicación $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ que envía $(X, Y, s) \mapsto R(X, Y)s$. Además, se puede comprobar que la curvatura vista de esta manera es un tensor y, por tanto, $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E^* \otimes E)$. Observamos también que R es un tensor antisimétrico en las dos primeras variables, ya que $R(X, Y)s = -R(Y, X)s$ y, como conclusión, la curvatura R es un elemento de $\Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \text{End}(E)) = \Omega^2(M, \text{End}(E))$.

Ahora veremos que, de una forma similar a cuando trabajamos con conexiones, podemos describir localmente la curvatura de una forma sencilla.

Si ∇ es una conexión en un fibrado trivial $E \rightarrow N$ y (s_1, \dots, s_r) es una referencia global de E entonces existe una matriz $r \times r$ (Ω_j^i) de 2-formas en N , llamada **2-forma de curvatura** de ∇ respecto a la referencia (s_1, \dots, s_r) tal que dados $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ se cumple

$$R(X, Y)s_j = \sum_i \Omega_j^i(X, Y)s_i.$$

Además, para todo $i, k \in \{1, \dots, r\}$ se cumple que

$$\Omega_k^i = d\omega_k^i + \sum_j \omega_j^i \wedge \omega_k^j,$$

donde (ω_j^i) denota la 1-forma de conexión para ∇ en la referencia (s_1, \dots, s_r) .

En particular, bajo estas condiciones, si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades y $f^*\nabla$ es la conexión pullback en f^*N entonces, la 2-forma de curvatura $(\tilde{\Omega}_j^i)$ de $f^*\nabla$ respecto la referencia (f^*s_1, \dots, f^*s_r) cumple que

$$\tilde{\Omega}_j^i = f^*\Omega_j^i.$$

Teorema 2.9.1. *Sea ∇ una conexión en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow N$. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Entonces, la curvatura R_f en el fibrado pullback f^*E cumple que para todo punto $p \in M$, $v_p, w_p \in T_pM$ y toda sección $s \in \Gamma(E)$*

$$\pi_2(R_f(v_p, w_p)(f^*s)) = R(d_p f(v_p), d_p f(w_p))s.$$

En particular, el pullback de una conexión plana es una conexión plana.

Demostración. Es consecuencia directa de la descripción dada en el teorema 2.8.8 de la conexión pullback y del hecho que π_2 es un morfismo de fibrados. □

Observación 2.9.2. De nuevo, bajo la identificación de la fibra sobre $p \in M$ de f^*E y la fibra sobre $f(p)$ en E , podemos escribir que la curvatura de la conexión pullback satisface $R_f(v_p, w_p)(f^*s) = R(d_p f(v_p), d_p f(w_p))s$ en $(f^*E)_p = E_{f(p)}$.

2.10. Conexiones de Ehresmann

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial dotado con una conexión ∇ y $\gamma : I \rightarrow M$ una curva parametrizada diferenciable en M . Diremos que una sección s es paralela si

$$\nabla_X s = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y diremos que s es paralela a lo largo de γ si

$$\nabla_{\dot{\gamma}} s = 0.$$

El objetivo en esta sección es probar que $\pi : E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial de dimensión n y M es simplemente conexa y ∇ es una conexión plana, entonces existen n secciones paralelas σ_i , $i = 1, \dots, n$ tal que los vectores $\sigma_1(p), \dots, \sigma_n(p)$ son linealmente independientes para todo $p \in M$.

Nos será útil reformular de forma equivalente la noción de conexión en un fibrado vectorial, llevándonos directamente al concepto de conexión de Ehresmann.

En primer lugar, observamos que dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$, tenemos una noción natural de verticalidad. Consideraremos verticales los espacios tangentes a las fibras de E .

Definición 2.10.1. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. El **fibrado vertical** $\mathcal{V} \rightarrow E$ es el subfibrado de $TE \rightarrow E$ definido por

$$\mathcal{V}E = \{ \xi \in TE \mid d\pi(\xi) = 0 \}$$

Sus fibras $\mathcal{V}_y E := (\mathcal{V}E)_y \subset T_y E$ se llaman **subespacios verticales**.

Sea un vector en $T_y E$, para algún $y \in E$. Nuestro objetivo es proyectarlo verticalmente. Sin embargo, para ello necesitamos de un espacio horizontal a lo largo del cual proyectar. La idea es asumir que existe una distribución en E , es decir, un subfibrado vectorial de TE que es complementario en cada punto al subespacio vertical. En esta situación podemos proyectar verticalmente.

Definición 2.10.2. Una **conexión de Ehresmann** (o subfibrado horizontal) en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ es una distribución \mathcal{H} en E complementaria al fibrado vertical $\mathcal{V}E$, es decir, $TE = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}E$.

Observamos que la descomposición del espacio total en suma de Whitney $TE = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}E$ nos define proyecciones naturales $V : TE \rightarrow \mathcal{V}E$, $H : TE \rightarrow \mathcal{H}$. Para $y \in E$, diremos que un elemento $w \in T_y E$ es horizontal si $w \in \mathcal{H}_y$. Igualmente, sea $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(E)$ un campo vectorial, diremos que es un **campo vectorial horizontal** si $\tilde{X}_y \in \mathcal{H}_y$ para todo $y \in E$. La siguiente imagen nos muestra una representación de los subespacios vertical y horizontal.

En esta situación, dado un vector $v \in T_p M$ y un $y \in E_p$, existe un único vector $v_y \in \mathcal{H}_y \subset T_y E$ tal que $d_y \pi(v_y) = v$. Este vector se llama el **levantamiento horizontal** de v en $T_y E$. Igualmente para campos vectoriales, sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, existe un único campo vectorial horizontal $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(E)$ tal que $d_y \pi(\tilde{X}_y) = X_{\pi(y)}$ para todo $y \in E$. Lo llamaremos **levantamiento horizontal** de X .

La idea es que la aplicación de levantamiento horizontal nos da una forma de conectar los dos conceptos de conexión que hemos trabajado hasta ahora. Más específicamente, dada una conexión podremos definir una conexión de Ehresmann y de ella podremos recuperar la conexión original.

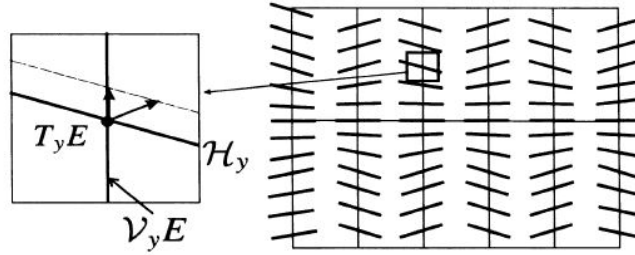


Figura 2.2: Conexión de Ehresmann.

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial dotado de una conexión ∇ . Sea p un punto de M y $y \in E_p$, entonces existe una sección $s \in \Gamma(E)$ tal que $s(p) = y$ y $\nabla_X s = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definiremos el subespacio horizontal en y como $\mathcal{H}_y = d_p s(T_p M)$. Como $d_y \pi$ es inversa a $d_p s$, existe un isomorfismo lineal entre \mathcal{H}_y y $T_p M$. Por lo tanto, para cada vector tangente v_p a M en p existe un único levantamiento horizontal v_p^{hor} de v_p en \mathcal{H}_y . Además, dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, el levantamiento horizontal de vectores define un nuevo campo vectorial $X^{hor} \in \mathfrak{X}(E)$. Esto, a su vez, nos define una distribución $\mathcal{H} \subset TE$ complementaria a V , i.e. $\mathcal{V}E \oplus \mathcal{H} = E$. Por lo tanto, dado una conexión, hemos podido definir un subfibrado horizontal. El siguiente lema nos dice que podemos recuperar la conexión dada la aplicación de levantamiento horizontal $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(E)$, que envía $X \mapsto X^{hor}$.

Lema 2.10.3. *Sea ∇ una conexión en $E \rightarrow M$. Entonces, para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y toda sección $s \in \Gamma(E)$ se cumple que*

$$\nabla_X s = ds(X) - X^{hor} \circ s.$$

Por tanto, es equivalente dotar a un fibrado vectorial de una conexión a la elección de una distribución horizontal.

Vamos a introducir ahora el transporte paralelo en un fibrado vectorial. Primeramente observamos que una sección $s \in \Gamma(E)$ a lo largo de una aplicación diferenciable $f : N \rightarrow M$ es una sección paralela si y solo si $ds(v)$ es horizontal para todo $v \in TN$. En particular, sea $\gamma : I \rightarrow E$ una curva, s es paralela a lo largo de γ si y solo si $s \circ c$ es paralela.

Teorema 2.10.4. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial dotado de una conexión de Ehresmann \mathcal{H} . Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva diferenciable en M . Entonces, para cada $u \in E_{\gamma(0)}$ existe una única sección paralela $\sigma_{\gamma,u}$ a lo largo de c tal que $\sigma_{\gamma,u}(0) = u$. Además, si $P_\gamma : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$ denota la aplicación que envía $u \in E_{\gamma(0)}$ a $\sigma_{\gamma,u}(1)$, entonces P_γ es un isomorfismo lineal.*

Visualmente, una conexión nos da una forma de movernos por las fibras de un fibrado vectorial mediante isomorfismos entre ellas.

Definición 2.10.5. *En las condiciones del teorema anterior, la aplicación P_γ se llama **transporte paralelo** a lo largo de la curva γ desde $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$. A la curva $\sigma_{\gamma,u}$ la llamaremos **levantamiento horizontal** de la curva γ .*

A partir de ahora, vamos a ponernos en dirección al teorema que queremos probar. Vamos a relacionar de alguna manera la curvatura de una conexión ∇ con la integrabilidad de la distribución horizontal \mathcal{H} .

Consideramos la siguiente aplicación bilineal diferenciable

$$F(X, Y) = -V([H(X), H(Y)]),$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$. F define un morfismo antisimétrico de fibrados vectoriales $F : TE \oplus TE \rightarrow \mathcal{V}E$ llamado **2-forma de curvatura** asociada a la conexión que nos define \mathcal{H} . Presentamos los siguientes resultados sin demostración:

Proposición 2.10.6. *Una conexión en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ es plana si y solo si su 2-forma de curvatura $F \equiv 0$.*

Proposición 2.10.7. *En virtud del teorema de Frobenius, la distribución \mathcal{H} es integrable si y solo si para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $[X^{hor}, Y^{hor}] \in \mathcal{H}$.*

Todo ello nos lleva a enunciar el siguiente resultado, que nos será muy útil para probar el teorema objetivo de esta sección.

Teorema 2.10.8. *Una conexión ∇ en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ es plana si y solo si la distribución horizontal \mathcal{H} es integrable.*

Vamos a recordar ahora el resultado que queremos probar.

Teorema 2.10.9. *Sea E un fibrado vectorial de dimensión n sobre una variedad M simplemente conexa y ∇ una conexión plana, entonces existen n secciones paralelas σ_i , $i = 1, \dots, n$ tal que los vectores $\sigma_1(p), \dots, \sigma_n(p)$ son linealmente independientes para todo $p \in M$.*

Demostración. Como la conexión es plana, por el resultado anterior obtenemos que la distribución \mathcal{H} es integrable. Por tanto, para cada $u \in E$ existe una variedad integral conexa maximal L_u tal que $u \in L_u$. Tomamos n vectores linealmente independientes sobre una fibra de E , que llamaremos e_1, \dots, e_n . Para cada e_i tomamos la variedad integral maximal L_{e_i} que pasa por e_i . Gracias al transporte paralelo, podemos levantar únicamente horizontalmente a la variedad L_{e_i} todo camino en M . Esto implica que $\pi|_{L_{e_i}} : L_{e_i} \rightarrow M$ es un espacio recubridor. Como M es simplemente conexa, por el teorema de levantamiento para espacios recubridores, $\pi|_{L_{e_i}}$ tiene una inversa. Definiremos las secciones $\sigma_i = (\pi|_{L_{e_i}})^{-1}$, que son paralelas y linealmente independientes punto a punto por construcción, como queríamos ver.

□

Capítulo 3

Teorema de Inmersión de Bonnet

3.1. Segundo campo tensorial fundamental

En las secciones que siguen vamos a establecer el ambiente inicial del problema que vamos a tratar en los últimos capítulos, el teorema de inmersión de Bonnet. El objetivo será deducir las ecuaciones de Gauss-Codazzi. Todas las herramientas de fibrados vectoriales adquiridas anteriormente nos van a permitir introducir el lenguaje desde un punto de vista más moderno y unificado. Empezamos con M una variedad diferenciable de dimensión m y $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión de M en un espacio euclidiano de dimensión n . Nos interesa introducir un operador que en el caso $n = m + 1$ se reduzca a la segunda forma fundamental clásica. Tenemos la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\varphi} & T\mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Queremos trabajar en un fibrado sobre M cuya fibra sobre cada punto $p \in M$ sea $\varphi(p)$. Para ello, trabajaremos en el fibrado pullback $\varphi^*(T\mathbb{R}^n)$. Observamos que $d\varphi$ es un morfismo de fibrados vectoriales. Nos interesa factorizar nuestra aplicación $d\varphi$ entre el fibrado $\pi : TM \rightarrow M$ y el fibrado pullback $\varphi^*(T\mathbb{R}^n)$, cuya fibra en un punto p de M es $\varphi(p)$. Enunciamos el siguiente lema:

Lema 3.1.1. Sean $\pi : E \rightarrow M$ y $\pi' : E' \rightarrow N$ fibrados vectoriales y $\bar{f} : E \rightarrow E'$ un morfismo entre ellos, entonces existe un morfismo $\phi : E \rightarrow f^*E'$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{f} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ E & \xrightarrow{\phi} & f^*E' & \xrightarrow{\pi_2} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 & & \downarrow \pi' \\ & & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Definimos $\phi : E \rightarrow M \times E'$ como $\phi(v) = (\pi(v), \bar{f}(v))$. Como $f \circ \pi = \pi' \circ \bar{f}$, se cumple que $\phi(v) \in f^*E'$ y como f^*E' es una subvariedad de $M \times E'$, restringiendo la imagen a f^*E' , la aplicación ϕ es diferenciable. Como \bar{f} es lineal entre las fibras, ϕ también lo es. □

En nuestro caso, deducimos del lema anterior que $d\phi$ induce un morfismo $\nu : TM \rightarrow \varphi^*(T\mathbb{R}^n)$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & d\phi & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 TM & \xrightarrow{\nu} & \varphi^*(T\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\pi_2} & T\mathbb{R}^n \\
 & \searrow \bar{\pi} & & & \downarrow \pi' \\
 & & M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \\
 & & \nearrow \pi_1 & &
 \end{array}$$

También podemos comprobar que $\nu(TM) \subset \varphi^*(T\mathbb{R}^n)$ es un subfibrado de $\varphi^*(T\mathbb{R}^n)$. Dotaremos a $\varphi^*(T\mathbb{R}^n)$ de la métrica pullback g_φ de la métrica usual en \mathbb{R}^n y definiremos $T^\perp M$ como el fibrado complemento ortogonal de $\nu(TM)$ en $\varphi^*(T\mathbb{R}^n)$ sobre M respecto de g_φ . Entonces se cumple que $\varphi^*(T\mathbb{R}^n) = \nu(TM) \oplus T^\perp M$. Además, tenemos un M -morfismo de fibrados $\pi^\perp : \varphi^*(T\mathbb{R}^n) \rightarrow T^\perp M$ dado por la proyección en la componente ortogonal. Igualmente, tenemos un morfismo evidente $\pi : \varphi^*(T\mathbb{R}^n) \rightarrow \nu(TM)$.

Denotamos por $\tilde{\nabla}$ a la conexión pullback de la conexión usual en \mathbb{R}^n . Para un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ fijado, definimos la siguiente aplicación:

$$\theta_X : \Gamma(\nu(TM)) \rightarrow \Gamma(T^\perp M)$$

definida como

$$\theta_X(s) = \pi^\perp(\tilde{\nabla}_X s).$$

Además, el operador θ_X es $\mathcal{F}(M)$ -lineal. En efecto, si $f \in \mathcal{F}(M)$ entonces

$$\theta_X(fs) = \pi^\perp(\tilde{\nabla}_X fs) = \pi^\perp((Xf)s + f\tilde{\nabla}_X s) = f\theta_X(s).$$

Por último, vemos que

$$\theta_{fX}(s) = f\theta_X(s).$$

Por tanto los operadores θ_X definen una aplicación $\mathcal{F}(M)$ -bilineal

$$\theta : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\nu(TM)) \rightarrow \Gamma(T^\perp M).$$

Observación 3.1.2. El operador θ_X definido arriba induce un operador que llamaremos, abusando de la notación, $\theta_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(T^\perp M)$, definido como $\theta_X(Y) = \pi^\perp(\tilde{\nabla}_X \nu(Y))$. Observamos que, como $\nu(Y) \in \Gamma(\nu(TM))$, la definición anterior incluye ésta. De ahora en adelante usaremos θ_X para referirnos indistintamente a cualquiera de los dos operadores.

Llamaremos a θ **segundo campo tensorial fundamental para la inmersión** φ .

Suponemos ahora que M es una variedad riemanniana con métrica g en el fibrado tangente TM . Diremos que la inmersión φ es isométrica si $g_\varphi(\nu(X), \nu(Y)) = g(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A partir de ahora supondremos que φ es una inmersión isométrica.

Lema 3.1.3. *En la notación anterior, se cumple que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\tilde{\nabla}_X \nu(Y) - \tilde{\nabla}_Y \nu(X) = \nu[X, Y]$$

Demostración. Tomamos $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\pi_2(\nu(X)) = \tilde{X}|_{\varphi(M)}$$

y

$$\pi_2(\nu(Y)) = \tilde{Y}|_{\varphi(M)}.$$

Tenemos que

$$D_{\tilde{X}} \tilde{Y} - D_{\tilde{Y}} \tilde{X} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

donde D denota la conexión euclidiana en \mathbb{R}^n , que no tiene torsión. Vemos también que $\pi_2(\nu([X, Y])) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]|_{\varphi(M)}$. Por lo tanto, como $\tilde{\nabla}$ es la conexión pullback por φ de D , tenemos que

$$\tilde{\nabla}_X \nu(Y) - \tilde{\nabla}_Y \nu(X) = \nu[X, Y].$$

□

Gracias a este lema tenemos que

$$\theta_X(Y) - \theta_Y(X) = \pi^\perp(\nu[X, Y]) = 0$$

y por lo tanto $\theta_X(Y) = \theta_Y(X)$. Es decir, θ es un tensor simétrico.

Consideramos ahora el operador adjunto $\theta_X^* : \Gamma(T^\perp M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ determinado por la siguiente condición:

$$g(\theta_X^* e, Y) = g_\varphi(e, \theta_X Y) \quad Y \in \mathfrak{X}(M), \quad e \in \Gamma(T^\perp M).$$

Lema 3.1.4. *El operador adjunto θ_X^* satisface la siguiente relación:*

$$\pi \tilde{\nabla}_X e = -\theta_X^* e \quad e \in \Gamma(T^\perp M)$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $e \in \Gamma(T^\perp M)$. Como $g_\varphi(e, \nu(Y)) = 0$ y la conexión $\tilde{\nabla}$ es compatible con la métrica g_φ , ya que es el pullback de una conexión compatible con la métrica euclidiana, tenemos que

$$0 = X(g_\varphi(e, \nu(Y))) = g_\varphi(\tilde{\nabla}_X e, \nu(Y)) + g_\varphi(e, \tilde{\nabla}_X \nu(Y)) = \\ g_\varphi(\pi \tilde{\nabla}_X e, \nu(Y)) + g_\varphi(e, \pi^\perp \tilde{\nabla}_X \nu(Y))$$

Entonces

$$g_\varphi(-\pi \tilde{\nabla}_X e, \nu(Y)) = g_\varphi(e, \pi^\perp \tilde{\nabla}_X \nu(Y)) = g_\varphi(e, \theta_X Y) = g(\theta_X^* e, Y)$$

y al ser la inmersión φ isométrica se cumple el resultado que queríamos ver

$$\pi \tilde{\nabla}_X e = -\theta_X^* e.$$

□

Observación 3.1.5. En este lema hemos hecho un pequeño abuso de notación, identificando $\nu(TM)$ con TM . Por tanto, cuando decimos que θ_X^* satisface la relación

$$\pi \tilde{\nabla}_X e = -\theta_X^* e$$

nos referimos a $\pi \tilde{\nabla}_X e$ como a un campo de M cuya imagen por ν es $\pi \tilde{\nabla}_X e$.

Observación 3.1.6. Si $n = m+1$, entonces el operador θ definido coincide con la segunda forma fundamental clásica.

3.2. Las conexiones lineales ∇ y ∇^\perp

La inmersión φ determina dos conexiones lineales ∇ en $\nu(TM)$ y ∇^\perp en $T^\perp M$ definidas por

$$\nabla_Y \nu(Z) = \pi(\tilde{\nabla}_Y \nu(Z)), \quad Z \in \mathfrak{X}(M)$$

y

$$\nabla_Y^\perp e = \pi^\perp(\tilde{\nabla}_Y e), \quad e \in \Gamma(T^\perp M).$$

Observamos que ∇ queda totalmente determinada por la imagen de todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, ya que toda sección de $\nu(TM)$ es de la forma $\nu(X)$, con $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposición 3.2.1. Sea $Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $e \in \Gamma(T^\perp M)$. Se cumplen las siguientes descomposiciones:

$$\tilde{\nabla}_Y \nu(Z) = \nabla_Y \nu(Z) + \theta_Y Z$$

y

$$\tilde{\nabla}_Y e = -\theta_Y^* e + \nabla_Y^\perp e.$$

Demostración. Gracias a la descomposición de $\varphi^*(T\mathbb{R}^n)$ como suma de Whitney $\nu(TM) \oplus T^\perp M$ obtenemos que para $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que

$$\tilde{\nabla}_Y \nu(Z) = \pi(\tilde{\nabla}_Y \nu(Z)) + \pi^\perp(\tilde{\nabla}_Y \nu(Z)) = \nabla_Y \nu(Z) + \theta_Y Z$$

y, para $e \in \Gamma(T^\perp M)$

$$\tilde{\nabla}_Y e = \pi(\tilde{\nabla}_Y e) + \pi^\perp(\tilde{\nabla}_Y e) = -\theta_Y^* e + \nabla_Y^\perp e$$

como consecuencia del lema 3.1.4. □

3.3. Las ecuaciones de Gauss-Codazzi

Consideramos las descomposiciones obtenidas en la sección anterior.

$$\tilde{\nabla}_Y \nu(Z) = \nabla_Y \nu(Z) + \theta_Y Z \quad (3.3.1)$$

y

$$\tilde{\nabla}_Y e = -\theta_Y^* e + \nabla_Y^\perp e. \quad (3.3.2)$$

Ahora aplicamos $\tilde{\nabla}_X$ a la ecuación 3.3.1 y obtenemos

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \nu(Z) = \tilde{\nabla}_X \nabla_Y \nu(Z) + \tilde{\nabla}_X (\theta_Y Z)$$

y aplicando 3.3.2

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \nu(Z) = \nabla_X \nabla_Y \nu(Z) + \theta_X \nabla_Y \nu(Z) - \theta_X^* \theta_Y Z + \nabla_X^\perp \theta_Y Z.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \nu(Z) - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \nu(Z) &= \nabla_X \nabla_Y \nu(Z) + \theta_X \nabla_Y \nu(Z) - \theta_X^* \theta_Y Z + \nabla_X^\perp \theta_Y Z \\ &\quad - \nabla_Y \nabla_X \nu(Z) - \theta_Y \nabla_X \nu(Z) + \theta_Y^* \theta_X Z - \nabla_Y^\perp \theta_X Z. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X = \tilde{\nabla}_{[X, Y]}$$

ya que $\tilde{\nabla}$ es el pullback de una conexión de curvatura 0 y, por tanto, también tiene curvatura 0, llegamos a la ecuación

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) \nu(Z) + (\theta_X \nabla_Y - \theta_Y \nabla_X) \nu(Z) \\ &\quad - (\theta_X^* \theta_Y - \theta_Y^* \theta_X) Z + (\nabla_X^\perp \theta_Y - \nabla_Y^\perp \theta_X) Z. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando π y π^\perp a la ecuación anterior y usando las fórmulas

$$\pi(\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\nu(Z)) = \nabla_{[X,Y]}\nu(Z)$$

y

$$\pi^\perp(\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\nu(Z)) = \theta_{[X,Y]}Z$$

obtenemos que el tensor curvatura de la conexión ∇ es

$$R(X, Y) = \theta_X^* \theta_Y - \theta_Y^* \theta_X \quad (\text{I})$$

y además

$$\theta_{[X,Y]} = (\theta_X \nabla_Y - \theta_Y \nabla_X) + (\nabla_X^\perp \theta_Y - \nabla_Y^\perp \theta_X). \quad (\text{II})$$

De la misma manera, aplicando $\tilde{\nabla}_X$ a 3.3.2 y usando 3.3.1 obtenemos

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y e = -\tilde{\nabla}_X \theta_Y^* e + \nabla_X^\perp e = -\nabla_X \theta_X^* e - \theta_X \theta_Y^* e - \theta_X^* \nabla_Y^\perp e + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp e,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y e - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X e &= -\nabla_X \theta_Y^* e + \nabla_Y \theta_X^* e - \theta_X \theta_Y^* e + \theta_Y \theta_X^* e \\ &\quad - \theta_X^* \nabla_Y^\perp e + \theta_Y^* \nabla_X^\perp e + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp e - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp e. \end{aligned}$$

Como antes, de aquí sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{[X,Y]} e &= -\nabla_X \theta_Y^* e + \nabla_Y \theta_X^* e - \theta_X \theta_Y^* e + \theta_Y \theta_X^* e \\ &\quad - \theta_X^* \nabla_Y^\perp e + \theta_Y^* \nabla_X^\perp e + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp e - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp e. \end{aligned}$$

Aplicando las proyecciones π y π^\perp y observando que

$$\pi(\tilde{\nabla}_{[X,Y]} e) = -\theta_{[X,Y]}^* e$$

y

$$\pi^\perp(\tilde{\nabla}_{[X,Y]} e) = \nabla_{[X,Y]}^\perp e$$

llegamos a las ecuaciones

$$\theta_{[X,Y]}^* = (\theta_X^* \nabla_Y^\perp - \theta_Y^* \nabla_X^\perp) + (\nabla_X \theta_Y^* - \theta_Y \theta_X^*) \quad (\text{III})$$

y

$$R^\perp(X, Y) = \theta_X \theta_Y^* - \theta_Y \theta_X^* \quad (\text{IV})$$

donde R^\perp denota la curvatura de la conexión ∇^\perp .

3.4. Campos tensoriales de Gauss-Codazzi

En las secciones anteriores hemos partido de la existencia de una inmersión isométrica de una variedad riemanniana M en un espacio euclidiano para deducir las ecuaciones I-IV. Las vamos a denominar **ecuaciones de Gauss-Codazzi**. Nuestro objetivo será hacerlo de forma inversa.

Sea M una variedad riemanniana de dimensión m y ∇ la conexión de Levi-Civita en TM . Sea η un fibrado vectorial de dimensión k sobre M dotado de una métrica \hat{g} y una conexión $\hat{\nabla}$ compatible con la métrica \hat{g} con tensor de curvatura \hat{R} . Consideramos una aplicación bilineal simétrica

$$\theta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Gamma(\eta)$$

y

$$\theta_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Gamma(\eta)$$

el operador asociado dado por $\theta_X(Y) = \theta(X, Y)$. Sea

$$\theta_X^* : \Gamma(\eta) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

el operador adjunto. Diremos que θ es un **campo tensorial de Gauss-Codazzi en relación a g y \hat{g}** si θ y θ^* satisfacen las ecuaciones de Gauss-Codazzi reemplazando ∇^\perp y R^\perp por $\hat{\nabla}$ y \hat{R} ,

$$R(X, Y) = \theta_X^* \theta_Y - \theta_Y^* \theta_X \quad (\text{I})$$

$$\theta_{[X, Y]} = (\theta_X \nabla_Y - \theta_Y \nabla_X) + (\hat{\nabla}_X \theta_Y - \hat{\nabla}_Y \theta_X). \quad (\text{II})$$

$$\theta_{[X, Y]}^* = (\theta_X^* \hat{\nabla}_Y - \theta_Y^* \hat{\nabla}_X) + (\nabla_X \theta_Y^* - \nabla_Y \theta_X^*) \quad (\text{III})$$

$$\hat{R}(X, Y) = \theta_X \theta_Y^* - \theta_Y \theta_X^*. \quad (\text{IV})$$

Nuestro objetivo es probar que si θ es un campo tensorial de Gauss-Codazzi en una variedad riemanniana simplemente conexa, entonces existe una inmersión isométrica de M en un espacio euclidiano. También comprobaremos que el fibrado vectorial η es esencialmente $T^\perp M$, como podíamos esperar y además, veremos que θ es esencialmente el segundo campo tensorial fundamental para esa inmersión.

3.5. Teorema de inmersión Bonnet

En esta sección vamos a formalizar y probar el resultado enunciado arriba.

Teorema 3.5.1 (Teorema de inmersión de Bonnet). *Sea (M, g) una variedad riemanniana simplemente conexa de dimensión m y ∇ la conexión de Levi-Civita en TM . Sea η un*

fibrado vectorial de dimensión k dotado de una métrica \hat{g} y una conexión $\hat{\nabla}$ compatible con la métrica \hat{g} con tensor de curvatura \hat{R} y θ un campo tensorial de Gauss-Codazzi en M . Entonces existe una inmersión isométrica $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n = m + r$ y un M -isomorfismo de fibrados vectoriales $\alpha : \eta \rightarrow T^\perp M$. Además, el segundo campo tensorial fundamental para la inmersión φ corresponde a θ bajo el morfismo de fibrados α .

Demostración. Consideramos el fibrado vectorial $\xi = TM \oplus \eta$. Vamos a definir una métrica \tilde{g} en el fibrado ξ dada por

$$\tilde{g}((Z_1, \sigma_1), (Z_2, \sigma_2)) = g(Z_1, Z_2) + \hat{g}(\sigma_1, \sigma_2)$$

para todo campo $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$ y para toda sección $\sigma_i \in \Gamma(\eta)$, $i = 1, 2$.

Definiremos también una conexión lineal $\tilde{\nabla}$ en ξ como

$$\tilde{\nabla}_Y(Z, \sigma) = (\nabla_Y Z - \theta_Y^* \sigma, \hat{\nabla}_Y \sigma + \theta_Y Z).$$

Veremos ahora que la conexión $\tilde{\nabla}$ es compatible con la métrica \tilde{g} .

Lema 3.5.2. *La conexión $\tilde{\nabla}$ es compatible con la métrica \tilde{g} .*

Demostración. Tomamos $Y, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(\eta)$, tenemos

$$\begin{aligned} Y(\tilde{g}((Z_1, \sigma_1), (Z_2, \sigma_2))) &= Y(g(Z_1, Z_2) + \hat{g}(\sigma_1, \sigma_2)) = Y(g(Z_1, Z_2)) + Y(\hat{g}(\sigma_1, \sigma_2)) \\ &= g(\nabla_Y Z_1, Z_2) + g(Z_1, \nabla_Y Z_2) + \hat{g}(\hat{\nabla}_Y \sigma_1, \sigma_2) + \hat{g}(\sigma_1, \hat{\nabla}_Y \sigma_2) \end{aligned}$$

Por otra lado tenemos que

$$\begin{aligned} &\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y(Z_1, \sigma_1), (Z_2, \sigma_2)) + \tilde{g}((Z_1, \sigma_1), \tilde{\nabla}_Y(Z_2, \sigma_2)) \\ &= \tilde{g}((\nabla_Y Z_1 - \theta_Y^* \sigma_1, \hat{\nabla}_Y \sigma_1 + \theta_Y Z_1), (Z_2, \sigma_2)) + \tilde{g}((Z_1, \sigma_1), (\nabla_Y Z_2 - \theta_Y^* \sigma_2, \hat{\nabla}_Y \sigma_2 + \theta_Y Z_2)) \\ &= g(\nabla_Y Z_1, Z_2) - \hat{g}(\sigma_1, \theta_Y Z_2) + \hat{g}(\hat{\nabla}_Y \sigma_1, \sigma_2) + \hat{g}(\theta_Y Z_1, \sigma_2) \\ &\quad + g(\nabla_Y Z_2, Z_1) - \hat{g}(\sigma_2, \theta_Y Z_1) + \hat{g}(\hat{\nabla}_Y \sigma_2, \sigma_1) + \hat{g}(\theta_Y Z_2, \sigma_1) \\ &= g(\nabla_Y Z_1, Z_2) + g(Z_1, \nabla_Y Z_2) + \hat{g}(\hat{\nabla}_Y \sigma_1, \sigma_2) + \hat{g}(\sigma_1, \hat{\nabla}_Y \sigma_2) \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Lema 3.5.3. *La conexión $\tilde{\nabla}$ tiene curvatura 0,*

$$\tilde{R}(X, Y) = 0.$$

Demostración. Suponemos que $[X, Y] = 0$. De la definición de $\tilde{\nabla}$ obtenemos

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y(Z, \sigma) = (\nabla_X W - \theta_X^* \tau, \hat{\nabla}_X \tau + \theta_X W)$$

donde

$$W = \nabla_Y Z - \theta_Y^* \sigma$$

$$\tau = \widehat{\nabla}_Y \sigma + \theta_Y Z.$$

Llamaremos

$$\Phi(X, Y) = \nabla_X W - \theta_X^* \tau$$

$$\Psi(X, Y) = \widehat{\nabla}_X \tau + \theta_X W.$$

Entonces

$$\Phi(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \theta_Y^* \sigma - \theta_X^* \widehat{\nabla}_Y \sigma - \theta_X^* \theta_Y Z$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y) - \Phi(Y, X) &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z - \nabla_X \theta_Y^* \sigma + \nabla_Y \theta_X^* \sigma - \theta_X^* \widehat{\nabla}_Y \sigma \\ &\quad + \theta_Y^* \widehat{\nabla}_X \sigma - \theta_X^* \theta_Y Z + \theta_Y^* \theta_X Z. \end{aligned}$$

Las ecuaciones I y III implican que

$$\Phi(X, Y) - \Phi(Y, X) = 0.$$

Por otro lado,

$$\Psi(X, Y) = \widehat{\nabla}_X (\widehat{\nabla}_Y \sigma + \theta_Y Z) + \theta_X (\nabla_Y Z - \theta_Y^* \sigma)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \Psi(X, Y) - \Psi(Y, X) &= \widehat{R}(X, Y) \sigma + \widehat{\nabla}_X \theta_Y Z - \widehat{\nabla}_Y \theta_X Z \\ &\quad + \theta_X \nabla_Y Z - \theta_Y \nabla_X Z - \theta_X \theta_Y^* \sigma + \theta_Y \theta_X^* \sigma. \end{aligned}$$

Las ecuaciones II y IV implican que

$$\Psi(X, Y) - \Psi(Y, X) = 0.$$

De todo esto concluimos que

$$(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X)(Z, \sigma) = 0$$

y por lo tanto

$$\widetilde{R}(X, Y) = 0.$$

□

Por el teorema 2.10, como $\widetilde{R} = 0$ y M es simplemente conexa existen $n = m + r$ secciones paralelas $\tilde{\sigma}_i$ en ξ tal que los vectores $\tilde{\sigma}_i(p)$ son linealmente independientes para todo $p \in M$. Más precisamente, fijamos un punto $p \in M$ y escogemos una base ortonormal v_1, \dots, v_m de $T_p M$ y una base ortonormal u_{m+1}, \dots, u_n en la fibra η_p . Fijamos los elementos $z_i \in \xi_p$ de la siguiente manera

$$z_i = (v_i, 0)$$

para $i \in \{1, \dots, m\}$ y

$$z_i = (0, u_i)$$

para $i \in \{m+1, \dots, n\}$. Entonces existen n secciones paralelas $\tilde{\sigma}_i$ en ξ tales que

$$\tilde{\sigma}_i(p) = z_i$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Y como la conexión $\tilde{\nabla}$ es compatible con la métrica \tilde{g} obtenemos que

$$\tilde{g}(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j) = \delta_i^j$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Escribiremos estas secciones como $\tilde{\sigma}_i = (Z_i, \sigma_i)$ con $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$ y $\sigma_i \in \Gamma(\eta)$. De la relación de paralelismo de las secciones $\tilde{\sigma}_i$ junto a la definición de $\tilde{\nabla}$ tenemos que

$$\nabla_X Z_i = \theta_X^*(\sigma_i) \quad (3.5.1)$$

y

$$\hat{\nabla}_X \sigma_i = -\theta_X(Z_i) \quad (3.5.2)$$

para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

Denotaremos ahora ω^i las 1-formas definidas por

$$\omega^i(X) = g(X, Z_i)$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 3.5.4. *Se cumplen los siguientes enunciados:*

1. $\sum_i \omega^i(X) Z_i = X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.
2. $\sum_i \omega^i(X) \sigma_i = 0$, para toda $\sigma \in \Gamma(\eta)$.
3. $\sum_i \omega^i(X) \omega^i(Y) = g(X, Y)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
4. $\sum_i \hat{g}(\sigma, \sigma_i) \sigma_i = \sigma$, para toda $\sigma \in \Gamma(\eta)$.
5. Las 1-formas ω^i son cerradas. Es decir, $d\omega^i = 0$, donde d denota la diferencial exterior.

Demostración. Tenemos que

$$\sum_i \omega^i(X) \tilde{\sigma}_i = \sum_i g(X, Z_i) \tilde{\sigma}_i = \sum_i \tilde{g}((X, 0), \tilde{\sigma}_i) \tilde{\sigma}_i = (X, 0)$$

ya que las secciones $\tilde{\sigma}_i$ son ortonormales y por lo tanto

$$\sum_i \omega^i(X) Z_i = X$$

y

$$\sum_i \omega^i(X) \sigma_i = 0,$$

con lo que demostramos 1. y 2.

Como $\omega^i(Y) = g(Y, Z_i)$, se sigue de 1. que

$$\sum_i \omega^i(X) \omega^i(Y) = \sum_i \omega^i(X) g(Y, Z_i) = g(Y, \sum_i \omega^i(X) Z_i) = g(Y, X) = g(X, Y)$$

y con esto demostramos 3.

Para demostrar 4 observamos que

$$\sum_i \hat{g}(\sigma, \sigma_i)(0, \sigma_i) = \sum_i \tilde{g}((0, \sigma), (Z_i, \sigma_i))(0, \sigma_i) = (0, \sigma)$$

y por lo tanto

$$\sum_i \hat{g}(\sigma, \sigma_i)\sigma_i = \sigma.$$

Nos resta demostrar 5. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $[X, Y] = 0$. Entonces

$$d\omega^i(X, Y) = X(\omega^i(Y)) - Y(\omega^i(X)).$$

Por 3.5.1 tenemos que

$$\begin{aligned} X(\omega^i(Y)) &= X(g(Y, Z_i)) = g(\nabla_X Y, Z_i) + g(Y, \nabla_X Z_i) = g(\nabla_X Y, Z_i) + g(Y, \theta_X^* \sigma_i) \\ &= g(\nabla_X Y, Z_i) + g(\theta_Y X, \sigma_i) \end{aligned}$$

y de la misma manera,

$$\begin{aligned} Y(\omega^i(X)) &= Y(g(X, Z_i)) = g(\nabla_Y X, Z_i) + g(X, \nabla_Y Z_i) = g(\nabla_Y X, Z_i) + g(Y, \theta_Y^* \sigma_i) \\ &= g(\nabla_Y X, Z_i) + g(\theta_X Y, \sigma_i). \end{aligned}$$

Restando $Y(\omega^i(X))$ de $X(\omega^i(Y))$ obtenemos

$$X(\omega^i(Y)) - Y(\omega^i(X)) = g([X, Y], Z_i) + g(\theta_Y X - \theta_X Y, \sigma_i) = g(\theta_Y X - \theta_X Y, \sigma_i)$$

ya que ∇ es la conexión de Levi-Civita y, por lo tanto, no tiene torsión. Como por θ es simétrico $\theta_X Y = \theta_Y X$ y entonces

$$X(\omega^i(Y)) - Y(\omega^i(X)) = 0$$

y por tanto

$$d\omega^i(X, Y) = 0$$

como queríamos ver. □

Como M es simplemente conexa, el grupo de cohomología de De Rham $H_{dR}^1(M) = 0$ y por tanto todas las 1-formas cerradas son exactas, luego existen funciones $f^i \in \mathcal{F}(M)$ tal que

$$df^i = \omega^i$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Ahora escogemos una base ortonormal e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n y definiremos $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\varphi(p) = \sum_i f^i(p) e_i$$

para todo $p \in M$.

Tenemos que

$$d_p\varphi(v_p) = \sum_i d_p f^i(v_p)e_i = \sum_i \omega^i(v_p)e_i \quad (3.5.3)$$

para todo $p \in M$ y $v_p \in T_pM$. Por la afirmación 3. del lema anterior

$$\langle d_p\varphi(v_p), d_p\varphi(u_p) \rangle = g(v_p, u_p)$$

para todo $p \in M$ y $v_p, u_p \in T_pM$. Luego φ es una inmersión isométrica.

Hemos demostrado la existencia de una inmersión isométrica φ de M en \mathbb{R}^n . Nos encontramos en la siguiente situación,

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\varphi} & T\mathbb{R}^n = M \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

idéntica a la del inicio de la sección 2. Como antes, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & d\varphi \\ & & & & \curvearrowright \\ TM & \xrightarrow{\nu} & \varphi^*(T\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\pi_2} & T\mathbb{R}^n \\ & \searrow \bar{\pi} & & & \downarrow \pi' \\ & & M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ & & \swarrow \pi_1 & & \end{array}$$

Recordamos que podíamos descomponer $\varphi^*(T\mathbb{R}^n)$ en suma de Whitney $\nu(TM) \oplus T^\perp M$. Lo que queremos probar a continuación es la existencia de un M -isomorfismo de fibrados α entre η y $T^\perp M$.

Definimos funciones λ^i en η como

$$\lambda^i(z) = \hat{g}(z, \sigma_i(\pi_\eta z))$$

para todo $z \in \eta$, dónde $\pi_\eta : \eta \rightarrow M$ denota la proyección del fibrado vectorial η . Recordamos también que podemos identificar la fibra sobre un punto p de M en el fibrado $\varphi^*(T\mathbb{R}^n)$ con la fibra sobre $\varphi(p)$ en $T\mathbb{R}^n$. Usaremos esta identificación para definir el M -morfismo $\alpha : \eta \rightarrow \varphi^*(T\mathbb{R}^n)$ como

$$\alpha(z) = (p, \sum_i \lambda_i(z)e_i)$$

para $z \in \eta$ y $p = \pi_\eta z$. Tenemos que

$$\begin{aligned} g_\varphi((p, d_p\varphi(v_p)), \alpha(z)) &= \langle d_p\varphi(v_p), \sum_i \lambda_i(z)e_i \rangle = \sum_i \omega^i(v_p)\lambda^i(z) \\ &= \sum_i \omega^i(v_p)\hat{g}(z, \sigma_i(p)) = \hat{g}(z, \sum_i \omega^i(v_p)\sigma_i(p)) = 0 \end{aligned}$$

por la afirmación 2. del lema anterior, donde g_φ denota la métrica pullback por la inmersión φ . Por tanto, $\alpha(z) \in T_p^\perp M$. Además, por la afirmación 4. del lema anterior, para $u, v \in \eta_p$ tenemos

$$\begin{aligned} g_\varphi(\alpha(u), \alpha(v)) &= \left\langle \sum_i \lambda_i(u) e_i, \sum_i \lambda_i(v) e_i \right\rangle = \sum_i \lambda^i(u) \lambda^i(v) \\ &= \sum_i \hat{g}(u, \sigma_i(p)) \hat{g}(v, \sigma_i(p)) = \hat{g}(u, \sum_i \hat{g}(v, \sigma_i(p)) \sigma_i(p)) = \hat{g}(u, v). \end{aligned}$$

Y por tanto, α es un morfismo inyectivo. Luego tenemos un M -isomorfismo de fibrados vectoriales

$$\alpha : \eta \xrightarrow{\cong} T^\perp M.$$

Lo único que falta ver es que la inmersión φ induce la conexión ∇ y que el segundo campo tensorial fundamental para φ corresponde a θ bajo el morfismo α .

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ usando 3.5.3 podemos escribir $d\varphi(X)$ como

$$d\varphi(X) = \sum_i \omega^i(X) e_i = \sum_i g(X, Z_i) e_i = \sum_i \tilde{g}(d\varphi X, d\varphi Z_i) e_i.$$

Sea ahora $Y \in \mathfrak{X}(M)$ aplicamos $D_{d\varphi(Y)}$ a la expresión anterior y obtenemos

$$\begin{aligned} D_{d\varphi(Y)}(d\varphi(X)) &= D_{d\varphi(Y)} \left(\sum_i \tilde{g}(d\varphi X, d\varphi Z_i) e_i \right) = \sum_i D_{d\varphi(Y)} (\tilde{g}(d\varphi X, d\varphi Z_i)) e_i \\ &= \sum_i \tilde{g}(D_{d\varphi(Y)} d\varphi X, d\varphi Z_i) e_i + \sum_i \tilde{g}(d\varphi X, D_{d\varphi(Y)} d\varphi Z_i) e_i \\ &= \sum_i g(\nabla_Y X, Z_i) e_i + \sum_i g(X, \nabla_Y Z_i) e_i = \sum_i \omega^i(\nabla_Y X) e_i + \sum_i g(X, \theta_Y^* \sigma_i) e_i = \\ &= \sum_i \omega^i(\nabla_Y X) e_i + \sum_i \hat{g}(\theta_Y X, \sigma_i) e_i. \end{aligned}$$

Como antes, observamos que podemos escribir $d\varphi(\nabla_Y X)$ como

$$\sum_i \omega^i(\nabla_Y X) e_i = d\varphi(\nabla_Y X).$$

Por otro lado, por definición de α tenemos

$$\alpha(\theta_Y X) = \sum_i \hat{g}(\theta_Y X, \sigma_i) e_i.$$

Y por tanto,

$$D_{d\varphi(Y)}(d\varphi(X)) = d\varphi(\nabla_Y X) + \alpha(\theta_Y X),$$

o equivalentemente, podemos descomponer ∇_Y^φ como

$$\nabla_Y^\varphi = \nu(\nabla_Y X) + \alpha(\theta_Y X),$$

la parte tangencial y la parte normal respectivamente, donde ∇^φ denota la conexión pullback por φ de la conexión euclidiana D en \mathbb{R}^n .

Esto completa la prueba del teorema de inmersión de Bonnet. □

Bibliografía

- [1] A. CAP y J. SLOVÁK, *Parabolic Geometries I*. Mathematical Surveys and Monographs. AMS. Vol. 154. 2009.
- [2] A. ZINGER, *Notes on Smooth Manifolds and Vector Bundles*. Stony Brooks University notes. 2010.
- [3] C. HOPPER y B. ANDREWS, *The Ricci Flow in Riemannian Geometry*. Lecture notes in mathematics. Springer. 2010.
- [4] D. HUSEMOLLER, *Fiber Bundles*. Graduate texts in mathematics. Springer. Vol. 20. 1994.
- [5] J. M. LEE, *Manifolds and Differential Geometry*. AMS. Vol. 107. 2009.
- [6] J. M. LEE, *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate texts in mathematics. Springer. Vol. 176. 2018.
- [7] J. M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate texts in mathematics. Springer. Vol. 218. 2013.
- [8] K. A. FROYSHOV, *Vector bundles and connections*. University of Oslo notes.
- [9] S. KOBAYASHI y K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry Vol. I*. Interscience Publisher. 1963.
- [10] W. GREUB, *Connections, Curvature and Cohomology Vol. I*. Academic Press. 1972.
- [11] W. GREUB, *Connections, Curvature and Cohomology Vol. II*. Academic Press. 1973.
- [12] W. GREUB, *Gauss-Codazzi tensor fields and the Bonnet immersion theorem*. *Collectanea Mathematica*. 1976, 147-162.