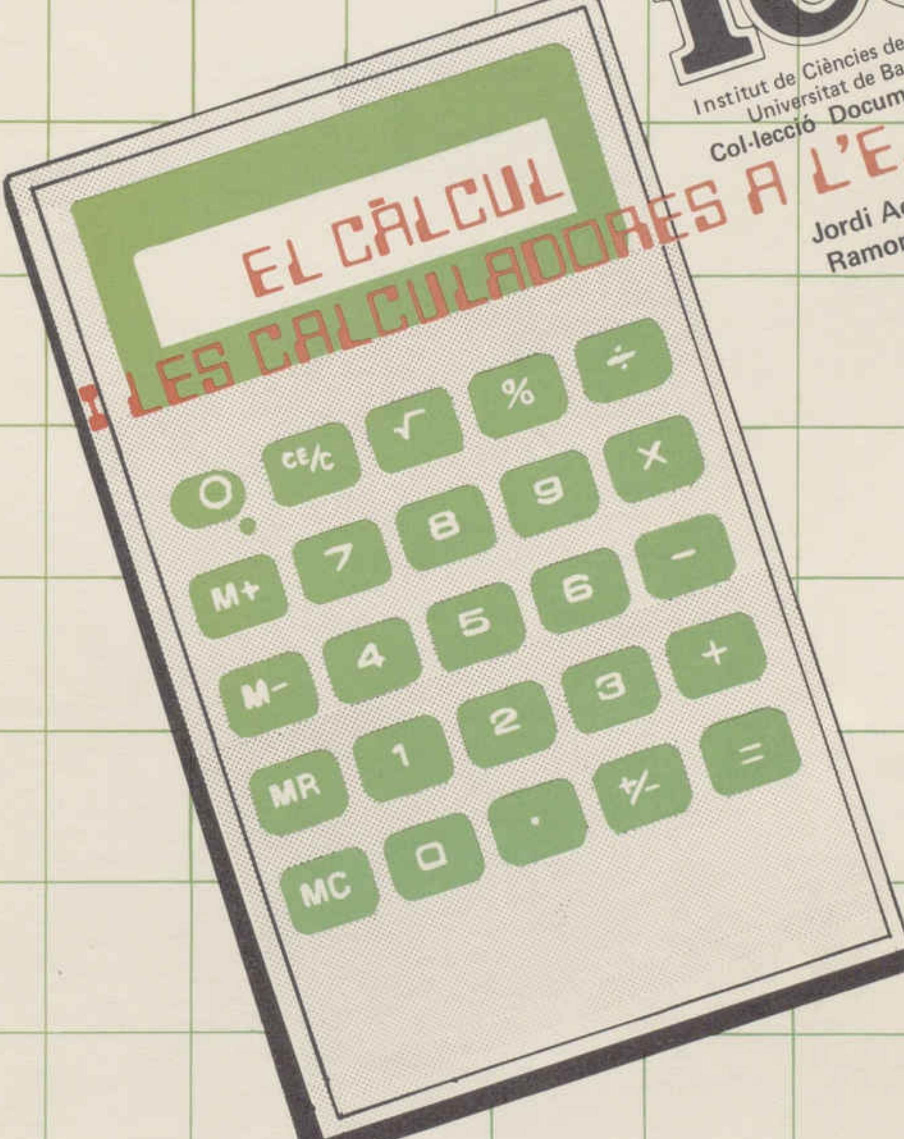
ice
Institut de Ciències de l'Educació
Universitat de Barcelona
Col·lecció Documents A 56

EL CÀLCUL I LES CALCULADORES A L'E.G.B.

Jordi Achon Masana
Ramon Cemeli Sala



EL CÀLCUL I LES CALCULADORES A L'E.G.B.

Jordi Achon Masana
Ramon Cemeli Sala

EL CÀLCUL I LES CALCULADORES A L'E.G.B.

publicacions
edicions
universitat
de barcelona

1982

publicacions
edicions
universitat
de barcelona

Publicacions de l'ICE Universitat de Barcelona
Director: Miquel Siguan
Composició: Margarida Fàbregas
ISBN: 84-7528-040-4
Dipòsit Legal B.: 38.504-1982
Imprimeix: Oliva de Vilanova, S. A.
Disseny gràfic: cesca simón

INTRODUCCIÓ

Durant el curs 1.977/78, l'I.C.E. de la U.C.B ens concedí una subvenció per a realitzar una recerca sobre la utilització de les calculadores a l'E.G.B.

L'enfoc del treball l'efectuàrem sobre la divisió natural que existeix entre el càlcul i les calculadores. És clar que la introducció de les calculadores a l'E.G.B. ha de comportar algunes modificacions a la metodologia didàctica del càlcul en qualsevol matèria científica. Les calculadores depassen l'ambit estricte de la matemàtica, malgrat que llur plataforma inicial sigui la classe de matemàtica, es per això que algun dels "programes" exposats s'han confeccionat en la classe de matemàtica i s'han emprat en la de Física.

D'altra banda vàrem intentar fonamentar des d'un punt de mira psicològic dos aprenentatges bàsics per a la utilització de les calculadores mecàniques i electròniques: el Sistema de Numeració i el concepte d'algorisme. Posteriorment, i gràcies a algunes crítiques del manuscrit original (1979), referem un capítol, durant l'any 1.980, el qual consta com un anex, al capdevall del treball.

Barcelona, Juny de 1.981

INTRODUCCIO

Durant el curs 1.977/78, l'I.C.E. de la U.P.B ens concedí una subvenció per a realitzar una recerca sobre la utilització de les calculadores a l'E.G.B.

L'enfoc del treball l'efectuàrem sobre la divisió natural que existeix entre el càlcul i les calculadores. És clar que la introducció de les calculadores a l'E.G.B. ha de suportar algunes modificacions a la metodologia didàctica del càlcul en qualsevol matèria científica. Les calculadores depassen l'àmbit estricte de la matemàtica, malgrat que llur plataforma inicial sigui la classe de matemàtica, es per això que alguns dels "programes" exposats s'han confeccionat en la classe de matemàtica i s'han emprat en la de Física.

D'altra banda vàrem intentar fonamentar des d'un punt de vista psicològic dos aprenentatges bàsics per a la utilització de les calculadores mecàniques i electròniques: el Sistema de Numeració i el concepte d'algorisme. Posteriorment, i gràcies a algunes crítiques del manuscrit original (1979), reférem un capítol, durant l'any 1.980, el qual consta com un annex, al capdevall del treball.

Barcelona, Juny de 1.981

SUMARI

AGRAÏMENTS

Agraïm a:

Mr. Joan Clerjon membre de l'I.R.E.M de Lió per llurs documentades orientacions fetes obertement i facilitant-nos el pas a quantes qüestions ens podien interessar al respecte i que donada la seva experiència en aquest camp, ens han estat inestimables.

M'Antoni Torrens, professor del departament d'Estadística i Probabilitat de la facultat de matemàtica de la U.C.B., per les seves orientacions.

En Salvador Pallarès i Martínez, professor de ciències del centre, l'adaptació a la nostra experiència de les classes de ciències així com colaboracions i oportunes suggerències.

TRADETEK, S.A. el préstec de l'ordinador i el programa fet especialment per a aquesta experiència així com la seva estimable col.laboració, sense la qual no s'hauria pogut realitzar l'esmentat treball.

En José Antonio Noya Maldonado programador de TRADETEK per l'interès demostrat en realitzar un programa adaptat repetidament a les nostres necessitats.

En Josep Capdevila la cessió desinteressada de màquines mecàniques i la constant informació sobre les possibilitats del mercat de calculadores i ordinadors.

La Maite Colen de 5è d'E.G.B. del Centre Pilot "C.N. Font d'en Fargues".

En Josep Vila Pellicé, mestre de 4art. d'E.G.B. del centre Pilot "C.N. Font d'en Fargues".

La Teresa Gol Perlàsia, mestra de 2on d'E.G.B. del centre Pilot "C.N. Font d'en Fargues".

N'Olegario López Paramio, encarregat dels audiovisuals al Centre Pilot "C.N. Font d'en Fargues".

1. DESCRIPCIÓ I APLICACIONS DIDÀCTIQUES
DELS SISTEMES MECÀNICS DE CÀLCUL

1.0. Introducció a la presentació dels diversos materials didàctics per a l'aprenentatge dels sistemes de numeració.

La finalitat fonamental que nosaltres atribuïm a aquests instruments es "materialitzar" en conceptes abstractes produïts per la ment humana.

És una realitat comprovada tant dins l'aula com fora d'ella, la dificultat que existeix en la comunicació humana. Les paraules i altres significants es buiden o canvien de significat en passar de l'emissor al receptor. Això és més important quan el missatge que volem transmetre no fa referència a cap realitat física sinó a creacions de la ment humana com són les ciències pures.

Els materials que presentem en aquesta primera part del treball són eines que permetran al mestre convertir en "manipulacions" les operacions mentals amb nombres. Aquestes manipulacions ensenyaran el nen amb molta més seguretat i rapidesa que qualsevol discurs del mestre. En el nostre cas concret el que nosaltres volem ensenyar és el nostre sistema de numeració, amb tot el que comporta.

1.1. Instrument

Material multibase.

<u>Descripció</u>

Cubets de 1 cm^3
Barres formades per 10 barres.
Cubs formats per 10 plaques.

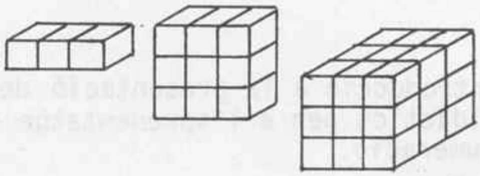
A més a més d'aquest joc especialment preparat per la base 10, hi ha jocs per les diferents bases en què les barres estan formades de 3, o 4, o 5 etc... cubets, les plaques de 3, o 4, o 5, etc... barres i els cubs de 3 o 4 o 5 plaques

Cubet 

Barra per la base 3

Plaça per la base 3

Cub per la base 3



<u>Utilització: Representació de quantitats</u>

Aquest material ens permet representar nombres de quatre xifres, o dit amb millor propietat, agrupar quantitats amb quatre ordres distints.

Suposem que volem representar una quantitat determinada seguint les regles d'agrupació de la base 3. Seguirem els següents pasos manipulatius.

1er. Cada unitat de la nostra quantitat serà representada per 1 cubet.

2on. Cada 3 cubets seran substituïts per una barra fins que quedi un nombre de cubets inferior a 3.

3er. Cada 3 barres seran substituïdes per un cub fins que quedi un nombre de barres inferior a 3.

4rt. Cada 3 plaques seran substituïdes per un cub fins que quedi un nombre de plaques inferior a 3.

Si una vegada obtinguda aquesta representació del nombre la volem convertir en l'escriptura usual base 3, n'hi haurà prou amb escriure al paper la xifra 0, 1, o 2 que representi el nombre de cubets que tenim en la representació amb material, immediatament a l'esquerra la xifra que representi el nombre de plaques i a la seva esquerra la xifra que representi el nombre de cubs. Obviament es poden suprimir les xifres no significatives que no en tinguin cap de significativa en els llocs situats a la seva esquerra.

Aquest material ens permet, doncs, representar quantitats amb un nombre d'unitats que es pugui representar amb quatre o menys xifres en els "nostres sistemes de numeració".

Tot el procés esmentat és reversible. Un nombre escrit sobre el paper el puc representar amb material i d'aquesta representació puc passar a una quantitat d'una magnitud donada que té el mateix nombre d'unitats que el nombre representat. Això de la reversibilitat ja sabem gràcies a en Piaget que és bàsic per a la definició de l'operació psicològica.

Les operacions aritmètiques

Amb aquestes representacions la suma es redueix a juntar les representacions de les dues quantitats i repetir els passos 2, 3 i 4 esmentats en l'apartat anterior.

És obvi el muntatge "manipulatiu" que suposa la resta i la multiplicació.

La divisió es farà repartint primer els cubs grossos, els que sobrin canviant-los per plaques i, junt a les plaques que ja teníem, repartir-les també i així succesivament fins als cubets.

Una variant millor, segons el nostre criteri, d'aquest material, són els cubs multibase de l'editorial Natam dels quals, pel que nosaltres sabem, no hi ha comercialització a Espanya.

La variant consisteix que els cubets, úniques peces existents, tenen un forat en cinc de les seves cares i una metxa en la sisena que permet encaixar-los construint les barres, plaques i cubs a partir dels mateixos cubets primitius.

Això suposa tres grans avantatges:

1.- Una vegada realitzat el primer pas manipulatiu dels assenyalats per a la representació de quantitats, és possible aïllar el nen amb el material necessitat, ja que a partir d'ara no haurà de fer substitucions sinó que anirà convertint per encaix cada 3 cubets (si treballa la base 3) en una barra, cada 3 barres en una placa, etc...

En no haver de substituir sinó encaixar fa que tots els errors que el nen pugui fer quedin materialitzats.

És possible veure una barra de quatre o qualsevol altre error que el nen facil. Queda eliminat l'error molt corrent en el nen insegur de 6 anys de fer malament les substitucions per barres, error irrecuperable ja que només el mestre "té conciència" que abans n'hi habia més o n'hi havia menys, però aquest més o menys no està materialitzat en el present.

2.- No tenir les barres, plaques, cubs preconstruïts fa que el mateix material serveixi per a treballar totes les bases. No és necessari, doncs, tenir un joc per a cada base.

3.-Pel mateix motiu no hi ha un límit teòric en el nombre de xifres a representar amb aquest material perquè ningú impedeix construir barres grans a partir dels cubs grans. El límit pràctic el determina el temps, espai i quantitat de material necessari en la representació de nombres molt elevats.

Una substitució interessant d'aquest material que alguns mestres hem fet servir en escoles pobres en recursos i que no perd pas gaires qualitats consisteix en xapes de botella i gots. Els grups que en el material multibase representen les barres aquí són representats per un nombre determinat de xapes (el que indica la base) dins de cada got.

Avaluació

Hem fet referència de l'esmentat material que, encara que molt conegut i utilitzat, és un exemple adient del que pretenem, i el primer que vàrem treballar.

Conceptes com són: la qualitat "nombre", els algorismes sistemes de numeració, "les que portem", els algorismes de les operacions aritmètiques, conceptes que per ésser una creació de la ment humana són difícils de transmetre mitjançant qualsevol llenguatge, queden convertides en objectes materials o amb operacions manipulatives. Aquestes experiències manipulatives seràn les que li ensenyaran les dificultats de cada operació aritmètica i li faran constuir el seu propi algorisme sense les perilloses dreceres de l'impacient mestre creador de confusionismes.

\- - - - - -

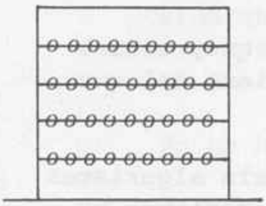
Un altre material que s'ha de considerar a part és el de les regletes Cousinet i altres materials que es mencionen en el treball "Introducción al concepto de número mediante magnitudes continuas" 1.976-77, dipositat a l'I.C.E. i realitzat per Ramon Cemeli i d'altres. Els diversos materials ideats i experimentats per aquest grup són materials que permeten, entre altres coses, treballar les magnituds contínues amb el mateix tractament que els diversos materials multibases esmentats més amunt, ens permet treballar les discretes.

1.2. Instrument

Àbac

Descripció

Existeixen distintes variants d'àbacs, el que nosaltres hem treballat amb els nens consisteix en 4 eixos aguantats per dos muntants pels que rellisquen 9 boles foradades.



La fila interior la denominàvem fila de les unitats.
La segona fila comptant des de baix la denominàvem fila de les deçenes.
La tercera fila de les centenes.
La quarta fila de les unitats de mil.

Utilització

Representació d'un nombre: Exemple: 327

Posició inicial: totes les boles tant a l'esquerra com es pot.

Es separen cap a la dreta 7 boles de la primera fila començant per baix o fila de les unitats.

Es separen cap a la dreta 2 boles de la fila de les deçenes.

Es separen cap a la dreta 3 boles de la fila de les centenes.

Comptar

Es parteix de la posició inicial o posició zero.

Per cada unitat que es compta es separa una bola de la fila de les unitats cap a la dreta. Si les nou boles d'aquesta fila ja estan a la dreta, es pasen les nou a l'esquerra i es corre cap a la dreta una de la fila de les desenes. Això equival també a comptar una unitat. Si les nou de les desenes també es trobessin ja a la dreta, aquest últim moviment (el de passar una bola de les desenes a la dreta) es subsituiria per córrer totes les boles de la fila de les centenes a la dreta, igualment si totes les boles de la fila de les centenes es trobessin a la dreta, aquest últim moviment sería substituït per passar totes les boles de la fila de les centenes a l'esquerra i una de la fila dels milers a la dreta.

Sumar
Exemple: 425 + 317

1.- Es representa el nombre 425 en l'àbac.
2.- Es compten 7 boles més sobre la fila de les unitats. Si s'acaben, comptar una bola equival a tornar-les totes nou a l'esquerra i córrer una a la dreta de la fila superior.
3.- Es compta una bola de la fila de les decenes. Si s'acaben comptar una bola equival a tornar-les totes nou a l'esquerra, córrer una bola a la dreta de la fila superior.
4.- Es compten 3 boles de la fila de les centenes. Si s'acaben, comptar una bola equival a tornar-les totes nou a l'esquerra i córrer una a la dreta de la fila superior.
5.- El nombre que hi ha representat en aquest moment en l'àbac és la suma dels dos donats.

Restar

1.- Es representa el minuend sobre l'àbac
2.- Es fan amb el substrahend els mateixos moviments que en el segon sumand de la suma però cap a l'esquerra. El nombre que queda representat en l'àbac és la resta.

Producte

Exemple: 215 x 34

1.- Es representa el nombre 215 a l'àbac
2.- Es suma 215
3.- Es suma 215
4.- Es suma 215
5.- Es suma 2150
6.- Es suma 2150
7.- Es suma 2150

El nombre representat a l'àbac és el producte.

Divisió

Exemple: 4725 : 36

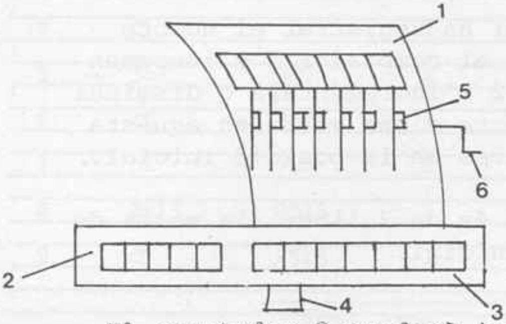
1.- Es representa el nombre 4725 sobre l'àbac
2.- Se li resta el nombre 3600 tantes vegades com això sigui possible, seguint els moviments indicats per la resta. El nombre de vegades que es fa aquesta resta equival a la xifra de les centenes del quocient.
3.- Del nombre resultant se li resta 360 tantes vegades com això sigui possible; aquest nombre serà la xifra de les desenes del quocient.
4.- Del nombre resultant se li resta 36 tantes vegades com això sigui possible; aquest és el nombre de vegades que equival a la xifra de les desenes del quocient. El nombre que queda a l'àbac és la resta de la divisió.

1.3. Instrument

CALCULADORA MINERVA

Descripció

En esquema podem considerar aquesta calculadora formada per 3 bombos comptador. Mitjançant els cursos 5 podem manualment marcar al bombo 1 el nombre que desitgem. Una vegada registrat un nombre en el comptador 1 si girem una volta a la dreta la maneta 6, aquesta quantitat quedarà acumulada, sumada a la que anteriorment estava registrada en el comptador 3 i registrada en aquest últim comptador.



El comptador 2 quedarà incrementat en una unitat per indicar que hem donat una volta.

Si la volta a la maneta la donem en sentit invers la quantitat que en aquest moment hi ha registrada en el comptador 1 es restarà de la del comptador 3 i el comptador 2 disminueix en una unitat.

Existeix un mecanisme per cada un dels comptador per igualarplos a zero. Aquests mecanismes no els mostrem a l'esquema per simplificar la seva comprensió. Per altra banda en distints models estan situats en distints llocs i el que a nosaltres ens interessa explicar aquí és la funció, no la construcció física.

També existeix un mecanisme per canviar el sentit del comptador 2 fent que compti les voltes de la maneta cap a l'esquerra i descompti les que dóna cap a la dreta. Aquest últim mecanisme es coloca automàticament en disposició de comptar les voltes de maneta donades en el sentit de la primera que en dóna després d'haver igualat al comptador 2 a zero mitjantçant el mecanisme pertienent.

El carro que soporta els bombos 2 i 3 es pot desplaçar cap a la dreta o tornar a l'esquerra mitjantçant la palanca (4) de forma que si desplacem el carro un lloc cap a la dreta la xifra de les unitats del bombo 1 encaixarà amb el de les desenes del bombo 3, la de les desenes amb la de les centenes, etc...

Així, si en el comptador 1 hi ha registrat el nombre 23, en donar la volta a la maneta el comptador 3 s'incrementarà en 230, mentre el comptador 2 s'incrementarà o disminuirà en 10 unitats, en resum, l'efecte d'una volta en aquesta posició del carro serà de deu voltes en la posició inicial.

Si el desplaçament del carro és de 2 llocs, la volta de maneta equival a 100 en posició inicial.

Utilització

Amb la descripció anterior i seguint pas a pas les operacions que es mostren a continuació es comprendrà millor el funcionament d'aquest tipus de màquina que amb qualsevol explicació.

La primera columna Moviment mitjançant un signe convencional determinat que fem en aquest pas.

Signes

c1	igualar a zero el comptador 1
c2	igualar a zero el comptador 2
c3	igualar a zero el comptador 3
↷	volta de manetas a la dreta
↶	volta de manetes a l'esquerra
a---→	desplaçar el carro a llocs a la dreta
a ←---	desplaçar el carro a llocs a l'esquerra
ct	igualar els 3 comptadors a zero i portar el carro a la posició 1
a	registrar el nombre en el comptador
0,000(2)	colocar 3 xifres decimals en el comptador 2 final
=	d'operació, resultat.

$854 + 367 + 2513 = 3734$

Nº.	Moviment	Pantalla	Carro	Contador dreta	Contador esquerra
1	ct	0	1	0	0
2	854	854	1	0	0
3	↻	854	1	854	1
4	Cl	0	1	854	1
5	367	367	1	854	1
6	↻	367	1	1221	2
7	cl	0	1	1221	2
8	2513	2513	1	1221	2
9	↻	2513	1	$\boxed{=3734}$	3

$7509 - 236 = 7.273$

1	ct	0	1	0	0
2	7509	7509	1	0	0
3	↻	7509	1	7509	1
4	c1	0	1	7509	1
5	236	236	1	7509	1
6	↺	236	1	$\boxed{=7273}$	0

$35 - 49 = 9.999.999.999.986$

1	ct	0	1	0	0
2	35	35	1	0	0
3	↻	35	1	35	1
4	cl	0	1	35	1
5	49	49	1	35	1
6	↺	49	1	$\boxed{=9.999.999.999.986}$	0

8534 x 498 = 4.249.932

Nº.	Moviment	Pantalla	Carro	Contador dreta	Contador esquerra
1	ct	0	1	0	0
2	8534	8534	1	0	0
3	↻	8534	1	8534	1
4	↻	8534	1	17068	2
5	↻	8534	1	25602	3
6	↻	8534	1	34136	4
7	↻	8534	1	42670	5
8	↻	8534	1	51204	6
9	↻	8534	1	59738	7
10	↻	8534	1	68272	8
11	→	8534	2	68272	8
12	↻	8534	2	153612	18
13	↻	8534	2	238952	28
14	↻	8534	2	324292	38
15	↻	8534	2	409632	48
16	↻	8534	2	494972	58
17	↻	8534	2	580312	68
18	↻	8534	2	665652	78
19	↻	8534	2	750992	88
20	↻	8534	2	836332	98
21	→	8534	3	836332	98
22	↻	8534	3	1689732	198
23	↻	8534	3	2543132	298
24	↻	8534	3	3396532	398
25	↻	8534	3	$\boxed{=4249932}$	498

8534 x 498 = 4.249.932

Nº.	Moviment	Pantalla	Carro	Contador dreta	Contador esquerra
1	ct	0	1	0	0
2	8534	8534	1	0	0
3	↺	8534	1	9.999.999.991.446	99.999.999
4	↺	8534	1	9.999.999.982.932	99.999.998
5	2 →	8534	3	9.999.999.982.932	99.999.998
6	↻	8534	3	836332	98
7	↻	8534	3	1.689.732	198
8	↻	8534	3	2.543.132	298
9	↻	8534	3	3.396.532	398
10	↻	8534	3	=4.249.932	498

875.435 : 397

1	ct	0	1	0	0
2	875.435	875.435	1	0	0
3	↻	875.435	1	875.435	1
4	c1	0	1	875.435	1
5	c2	0	1	875.435	0
6	397	397	1	875.435	0
7	3 →	397	4	875.435	0
8	↺	397	4	478.435	1.000
9	↺	397	4	81.435	2.000
10	←	397	3	81.435	2.000
11	↺	397	3	41.735	2.100
12	↺	397	3	2.035	2.200
13	←	397	2	2.035	2.200
14	←	397	1	2.035	2.200
15	↺	397	1	1.638	2.201
16	↺	397	1	1.241	2.202
17	↺	397	1	844	2.203

875.435 : 397

Nº.	Moviment	Pantalla	Carro	Contador dreta	Contador esquerra
18	↺	397	1	447	2.204
19	↺	397	1	$\boxed{\text{Reste 50}}$	$\boxed{=2.205}$
			47 : 9		
1	ct	0	1	0	0
2	47	47	1	0	0
3	↻	47	1	47	1
4	c1	0	1	47	1
5	c2	0	1	47	0
6	9	9	1	47	0
7	↺	9	1	38	1
8	↺	9	1	29	2
9	↺	9	1	20	3
9	↺	9	1	11	4
10	↺	9	1	$\boxed{\text{Reste 2}}$	$\boxed{=5}$
			33'4 x 2'13		
1	ct	0	1	0	0
2	33'4	33'4	1	0	0
3	00'0 (2)	33'4	1	0	0'00
4	↻	33'4	1	334	0'01
5	↻	33'4	1	668	0'02
6	↻	33'4	1	1.002	0'03
7	→	33'4	2	1.002	0'03
8	↻	33'4	2	4.342	0'13
9	→	33'4	3	4.342	0'13
10	0'000 (3)	33'4	3	4'342	0'13
11	↻	33'4	3	37'742	1'13
12	↻	33'4	3	$\boxed{=71'142}$	2'13

6897 : 31

Nº.	Moviment	Pantalla	Carro	Contador dreta	Contador esquerra
1	ct	0	1	0	0
2	6897'000000	6897'000000	1	0	0
3	3 →	6897'000000	4	0	0
4	↻	6897'000000	4	6897'000000000	1.000
5	c1	0	4	6897'000000000	1.000
6	c2	0	4	6897'000000000	0.000
7	31'00000000	31'0000000	4	6897'000000000	0.000
8	↺	31 "	4	3797'000000000	1.000
9	↺	31 "	4	697'000000000	2.000
10	←	31 "	3	697'000000000	2.000
11	↺	31 idem.	3	387'000000000	2.100
12	↺	31 "	3	77'000000000	2.200
13	←	31 "	2	77'000000000	2.200
14	↺	31 "	2	46'000000000	2.210
15	↺	31 "	2	15'000000000	2.220
16	←	31 "	1	15'000000000	2.220
17	0'0 (2)	31 "	1	15'000000000	222'0
18	↺	31 idem.	1	11'900000000	222'1
19	↺	31 "	1	8'800000000	222'2
20	↺	31 "	1	5'700000000	222'3
21	↺	31 "	1	$\boxed{R=2'600000000}$	$\boxed{=222'4}$

472 x 99

Nº.	Moviment	Pantalla	Carro	Contador dreta	Contador esquerra
1	1 ct	0	1	0	0
2	2 472	472	1	0	0
3					
4	3 ↺	472	1	9999999999528	99.999.999
5	4 2 →.	472	3	9999999999528	99.999.999
6	5 ↻	472	3	$\boxed{=46.728}$	99

En la columna Pantalla anotem el nombre que quedarà registrat en el bombo 1.

La columna carro ens indica la posició del carro que sosté el bombo 2 i 3.

La posició 1 (1), és la posició inicial.

La posició 2 és la posició en què cada volta de maneta equival a deu voltes de maneta donades en la posició 1.

En general, en cada posició n. el nombre de voltes de la maneta queda multiplicada per 10m.

En la columna comptador dreta apuntem el nombre registrat en el bombo 3.

En la columna comptador esquerra anotem el nombre registrat en el bombo 2.

(1).- Aquest número de posició es llegeix de la màquina.

- - - - -

1.4. Aplicacions didàctiques

L'ÀBAC I LA CALCULADORA MINERVA

L'àbac i la calculadora Minerva ens permeten estudiar quasi els mateixos algorismes que els blocs multibase però amb diferències fonamentals de les que destaquem:

En l'àbac i la calculadora Minerva, les manipulacions de l'operador adquireixen tanta força com el mateix material. En els blocs les quantitats i en grau menor els algorismes materialitzaven, aquí es converteixen fonamentalment en accions. El material és més representatiu i menys concret i les accions més complexes. Per altra banda té major potèn cia en el sentit que sense augmentar el nombre de passos manipulatius pot treballar nombres molt més elevats.

En totes aquestes característiques observem que l'àbac està entre els blocs multibase i la calculadora Minerva. A més la força motivadora de la calculadora és forta, no tant la de l'àbac que no deixa d'ésser un instrument amb fort tuf d'escola, de "joguina" didàctica. Destaquem no obstant que, encara que no ho detallem, tot el que hem fet amb la calculadora mecànica ho hem realitzat també amb l'àbac i té el gran aventatge que tota escola el pot tenir, ja que el poden construir els mateixos nens.

El material multibase és, doncs, un material simple que permet iniciar els sistemes de numeració o sigui iniciar l'escriptura de quantitats de més d'una xifra, i els algorismes de les operacions elementals amb exemples molt simples.

L'àbac i la calculadora mecànica permeten aprofundir aquests mateixos algorismes augmentant la complexitat dels exemples i facilitant llur automatització.

Creiem que on es manifesta més didàcticament útil aquesta calculadora és en l'aprenentatge de la multiplicació i divisió tant amb nombres naturals com amb decimals.

Hem conseguit recuperar l'aprenentatge de la divisió de naturals a nens de 2ª etapa que no havien adquirit aquest mecanisme amb considerable rapidesa seguint els següents passos:

1) Aprendre a sumar i restar utilitzant la màquina.

2) Apuntar tots els passos que es van realitzant a l'executar la suma o la resta en un imprès preparat a l'efecte tal com les sumes i restes de foli 23.

3) Apuntar en l'imprès els passos d'una suma i resta sense disposar de la màquina.

Quan el nen realitza bé aquest pas és que realment sap que fa la màquina en cada cas, coneix l'algorisme que utilitza la màquina i les possibilitats de cada mecanisme; no li calen doncs gaires explicacions si es pot barallar amb la màquina.

4) Aprenentatge de la multiplicació amb la màquina.

5) Còpia dels passos de la multiplicació a l'imprès.

6) Realitzar multiplicacions sobre l'imprès, sense utilitzar la màquina.

7) Li raonarem la divisió al nen sobre la màquina més o menys com a l'exemple següent:

   47:9 (aquesta divisió està feta en el full 26). Dividir es repartir. Anem a repartir 47 caramels entre 9 nens. Si no sabem dividir el que farem serà: Donar un caramel a cada nen. Gastarem per tant 9 caramels. Restem 9 caramels (donem una volta de maneta a l'esquerra). Hem donat una volta repartint un caramel a cada nen (comptador 2) i ens queden 38 caramels (comptador 3). Repartim un altre caramel a cada nen. Ens en queden 29 i n'hem repartit 2, etc...

   Hem repartir 5 caramels a cada nen i ens en queden 2. (Quan el reste és menor que el dividend, si l'alumne intenta continuar la divisió sona una campana de la màquina.

8) Practicar divisions de quocient petit amb la màquina.

9) Practicar divisions de quocient petit amb la màquina apuntant els passos a l'imprès.

10) Practicar divisions de quocient petit en l'imprès sense màquina.

11) Apuntar els resultats de la màquina amb el següent format:

```
 47 | 9
 -9 |----
----| 5
 38
 -9
----
 29
 -9
----
 2o
 -9
----
 11
 -9
----
  2
```

Realitzar divisions de quocient petit sobre el paper directament amb aquest format.

12) Realitzar amb màquina divisions més complexes tal com està desenvolupada en la pàg. 25 la divisió:

875.435 : 397

Raonarem amb el nen que per anar més de pressa farem paquets de milers, centenes, etc....

Recordarem que si el nen segueix restant sense correr el carro, quan el quocient és massa petit sona una campana i és possible corregir.

13) Idem copiant passos a l'imprès.

14) Idem sense màquina.

15) Utilitzar la següent expressió realitzant les divisions amb i sense màquina progressivament"

```
54897  | 374
- 374  |-----
17497  | 146
 -374
13757
 -374
10017
 -374
 6277
 -374
 2537
 -374
 2163
 -374
 1789
 -374
 1415
 -374
 1041
 -374
  667
 -374
  293
```

Els guionets sota les xifres del quocient indiquen el nombre de xifres abans de posar el 4 i el 6, doncs des del primer moment ja sabem que 1 és la xifra de les centenes ja que hem repartit 548 centenes a bosses de 100 caramels.

La concienciació d'aquest fet és important per la comprensió de l'algorisme de l'operació i evita l'error bastant generalitzat d'oblidar la xifra de les unitats quan aquesta és un zero.

6) Passar i practicar l'expressió definitiva:

```
52572  | 421
 -421  |-----
10472  | 124
 -842
 2052
-1684
  368
```

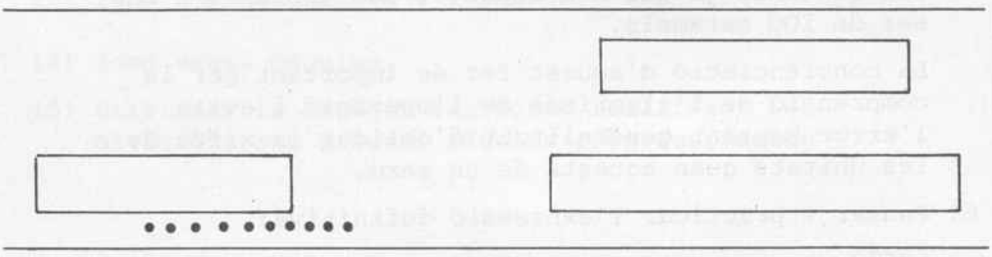
421 x 0 = 0
421 x 1 = 421
421 x 2 = 842
421 x 3 = 1263
421 x 4 = 1684
421 x 5 = 2105
421 x 6 = 2526
421 x 7 = 2947
421 x 8 = 3368
421 x 9 = 3789

La taula del divisor es copia o no segons el nen, en tot cas té tendència a desaparèixer.

Les xifres que encara no es treballen es poden arrossegar més temps o menys, també segons el nen.

Aquesta expressió que ens queda aquí, sense la taula nosaltres la considerem bona. El que se sent segur tendeix a no copiar les restes per imitació dels seus companys; però nosaltres no hi tenim cap interès.

Pels nens de primera etapa s'ha elaborat un altre tipus d'imprès més simple i suggeridor del dibuix de la màquina. Cada pas es representa així:



Cada requadre representa un dels comptadors: Pantalla, comptador de la dreta, comptador de l'esquerra. En els punts suspensius el nen explicarà en poques paraules el moviment a fer en lloc del signe convencional dels de 2a etapa.

Es pot observar fàcilment seguint les diferents operacions expressades en els impresos, com prescindint de la interiorització dels diferents algorismes operatoris, el fet d'omplir aquests impresos sense la màquina és un bon exercici de càlcul. Càlcul encara necessari a segona etapa i difícil de motivar.

La practica de la divisió i el raonament que n'hem fet, implicar exercitar la propietat associativa. En la multiplicació es practica l'associativa i la commutativa. En la pàgina 28 es veu una multiplicació realitzada utilitzant un procediment sensiblement més curt que l'ordinari, que implica un domini d'aquestes propietats i nocions intuitives de classe de resta.

La utilització de la màquina per nens que no tenien deficiències de càlcul ens ha permès profunditzar sobre totes aquestes propietats.

A setè curs hem utilitzat la calculadora mecànica per a introduir les classes de resta i la noció d'element simètric. Al full 23 hi ha la resta 35-49. Si intentem fer aquesta resta amb la màquina ens dóna el resultat 9.999.999.999.986 i farà sonar la campana. A partir d'aquí es pot comprovar com la màquina no treballa en el conjunt dels nombres naturals sinó en el conjunt de classes de resta mòdul 10.000.000.000.000 i que en aquest conjunt sí que són possibles les restes ja que tots els nombres tenen simètric.

La generalització ens porta a operar amb màquines imaginàries de diferent mòdul, una d'elles el rellotge. Hem trobat, doncs, un model fàcilment generalitzable.

Ha pogut observar [illegible] operacions [illegible] presentació de la [illegible] algorisme [illegible] sempre com [illegible] la multiplicació [illegible] càlcul [illegible]

La pràctica de la divisió i [illegible] que [illegible] fet, implica controlar [illegible]. En la multiplicació [illegible] producte) [illegible] comunicativa [illegible] de la pàgina [illegible] [illegible] sempre que [illegible] d'algunes propietats i nocions intuïtives de [illegible] càlcul [illegible]

La utilització de la màquina per fer que [illegible]

A més també cal utilitzar la calculadora [illegible] per [illegible] les classes de [illegible] fàcilment [illegible]. Al [illegible] 9.999. [illegible] en el conjunt de classes de [illegible] 10.000.000.000.000 [illegible] que [illegible] aquest conjunt [illegible] simple.

La [illegible] està [illegible] màquines [illegible] de [illegible], una d'elles [illegible], un model [illegible].

2.- PSICOLOGIA DE L'APRENENTATGE DELS SISTEMES DE NUMERACIÓ

2.0. La Teoria de l'Equilibració de J. Piaget

Introducció

La seva conexió amb els sistemes de numeració

El perquè prenem aquesta teoria per a donar una explicació dels sistemes de numeració és per diverses raons:

a) Un sistema de numeració és una estructura de coneixement; estructura trivial, si es vol, però de gran importància a nivell social.
L'estructura del sistema de numeració és simple, i això és un fet important per qualsevol recerca: facilita molt el seu estudi.

b) Com a estructura de coneixement aquesta té una gènesi i el que es tracta és de determinar quina és la gènesi. Es a dir com es va formant al llarg del pensament infantil. Tan sols donarem els fets més generals; pero això són els més sòlids de comprovar.

c) Aquesta gènesi pot ser explicada o interpretada en termes d'equilibri entre l'anterior, estructures i la necessitat de trobar un mètode per a comptar.
Per exemple: és sabut que el sistema de numeració funciona per successius agrupaments partint d'una base. Si el que hom persegueix és poder expressar

la quantitat i només utilitza el primer agrupament (les desenes), aquestes poden ser, si es tracta de quantitats mínimament grans, de bell nou una quantitat poc manipulativa, i per tal causa la finalitat no s'acompleix, per tant existeix desequilibri entre l'estructura que s'ha aplicat (E_1 : la primera agrupació) i la finalitat que ha de complir aquesta.

d) Pensem que l'equilibration des structures cognitives ens pot proporcionar un quadre teòric des del qual poder explicar els sistemes de numeració.

L'exposició d'aquesta teoria l'efectuarem en dues parts: primeramente explicarem els conceptes de coordinables i d'observables, necessaris per a entendre el funcionament de l'equilibració de les estructures del coneixement, que és el que exposarem a continuació.

2.1. Els Coordinables i els observables

Aquests dos conceptes són fonamentals per a l'explicació que dóna en Piaget sobre el funcionament de l'equilibració.

Cal prendre un sentit més ampli que el que ens pot proporcionar l'etimologia dels dos mots, distingir entre què és observable i què vol dir coordinable; si en el primer la percepció i els instruments de registre hi prenen un rol important, en el segon no s'esdevé el mateix: la inferència hi juga el paper més important:

> "Un observable es lo que la experiencia permite comprobar mediante una lectura inmediata de los hechos presentes por sí mismos, mientras que una coordinación entraña inferencias necesarias y supera de este modo la frontera de los observables".

L'observable és doncs, el que el subjecte "creu" comprovar per la qual cosa un observable no és mai independent d'un o més esquemes d'assimilació, i els esquemes són preoperatoris o operatoris aplicats a la percepció.

En la concepció sistemàtica d'en Piaget sobre la "Jerarquia" que relaciona les diverses estructures de coneixement, un observable no és independent de coordinacions i observables del nivell anterior de la jerarquia. Així, el que és coordinable en un nivell pot esdevenir observable en un altre nivell. Una distinció fonamental i que lliga amb l'epistemologia d'en Piaget és que cal distingir entre els observables relatius a les accions del subjecte i els observables relatius als objectes" Tal distinció és clara de fer:

> "Por ejemplo, en el caso de la bola de arcilla transformada en bastón, interviene por lo menos un observable relativo a la acción, que concierne entonces al acto de estirar, y por lo menos un observable relativo al objeto, es decir, su alargamiento".

Evidentment el lector ha de remetre's a les obres d'en Piaget de caire experimental per a veure que l'exemple és adient dins de la seva obra

Respecte als coordinables, aquests no són considerats com a un inferència de generalització inductives, com pot ser el pas extensional que a partir d'unes comprovacions passa al generalitzador lògic pel que fa a les relacions observables sinó més aviat:

> "...de la construcción de relaciones nuevas que sobrepasan la frontera de lo observable: por ejemplo, la anticipación del hecho de que el choque de una bola A contra una bola B irá siempre seguida de un movimiento de B no se denominará coordinable, mientras

que este término se aplicará a la hipótesis de una transmisión de movimiento nunca es observable en sí misma".

De la mateixa manera que s'estableix la diferència entre observables relatius a les accions de subjecte i observables relatius als objectes, s'estableix també aquesta diferència entre els coordinables.

Les coordinacions relatives a les accions són preoperacions o operacions del subjecte, i les coordinacions entre els objectes és quan aquests actuen els uns sobre els altres, són operacions atribuïdes als objectes, és a dir, de models causals:

> "Un ejemplo del primer caso es el de la transitividad de relaciones establecidas por el sujeto. Un ejemplo del segundo caso es.... la transmisión del movimiento entre los objetos, que es tambien una especie de transitivad pero atribuida a los objetos mismos"

Resumint tindrem:

OBSERVABLES { Relatius a les accions del subjecte / Relatius als objectes

COORDINABLES { Relatius a les accions del subjecte / Relatius als objectes

2.2. El funcionament de l'equilibració

Veurem primerament les interaccions entre els observables del subjecte i els relatius als objectes. (Tipus I). Seguidament les interaccions entre observables i coordinables. (Tipus II), per a passar al model general sobre el funcionament de l'equilibració de les estructures del coneixement.

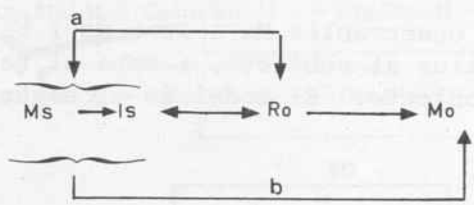
No ens extendrem molt, sinó que simplement donarem els models i una breu explicació.

a) Les interaccions entre els observables

Piaget distingeix entre els observables que intervenen dins d'una acció causal (Tipus IA) i els que intervenen en una acció lògico-matemàtica (Tipus IB).

Els models són els següents:

TIPUS IA:

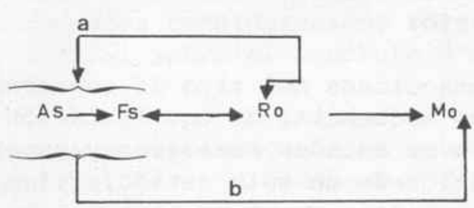


Ms: Moviment del subjecte en direcció a l'objecte
Is: Impuls fet pel subjecte sobre l'objecte
Ro: Resistència de l'objecte
Mo: Moviment de l'objecte

Per tal d'estalviar abstraccions que es prestin a confusions el model està elaborat sobre una de les experiències usuals de l'escola de Ginebre: el xoc de dues boles (13).

Tanmateix el model s'estén a les situacions causals que hom pugui imaginar.

TIPUS IB:



As: Activitat o operació del subjecte (seriació, classificació, etc.)

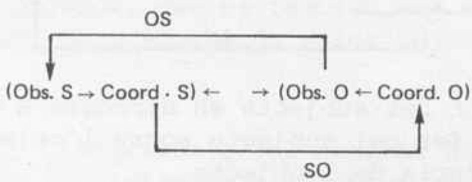
Fs: Aplicació de l'operació, forma imposada als objectes, etc...)

Ro: Resistència real o nula presentada pels objectes a aquesta reducció de forma, etc...

Mo: Modificació de la col.lecció d'objectes o enriqui_ ment amb una nova forma, ordre, etc....

b) Les interaccions entre els observables i els coordinables

Reunirem els observables Ms i Is o Ms i Fs sota el terme Obs. Si són relatius al subjecte, i sota el terme Obs. O si són relatius a l'objecte. El model és el següent:



←→ equilibri momentani, global, durador.

OS: regulació concernent als coordinables. Correspon a la presa de consciència de les accions del subjecte.

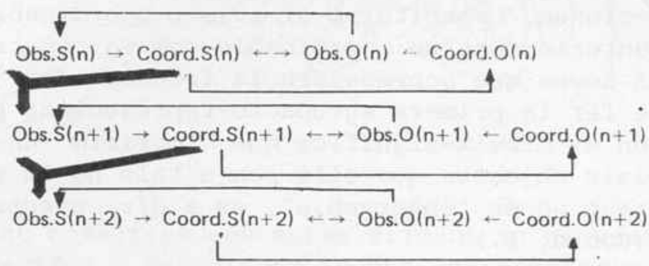
SO: regulació concernent als coordinables. Expressa el fet que el subjecte per a descobrir les relacions causals entre els objectes, o les lògico-matemàtiques es troba obligat a passar per les seves pròpies.

Aquest esquema es refereix a un únic estat, de tot el procés d'equilibració:

"... las interacciones del tipo II son constitutivas de un proceso secuencial de equilibración que afecta a un número n de estados sucesivos y supera por tanto la consideración de un sólo estado...."

Cal esmentar aquí que la concepció més àmplia d'aquesta referència rau en el concepte de sistema. Es notòria la coincidència entre la concepció de jerarquia de les estructures de coneixement i la concepció jeràrquica de la classificació dels sistemes de Bertalanffy, no és d'estranyar que en Bertalanffy estiqui entre altres en el membre del consell de consulta de l'escola de Ginebra

Així doncs, el model general de l'equilibració de les estructures de coneixement és:



2.3. Consideracions sobre el sistema de numeració

1. *Equilibri i sistemes de numeració*

Tractarem de fer a continuació una sèrie d'observacions dels sistemes de numeració, que considerem originals i emmarcades dins de la perspectiva teòrica, i per tant interpretativa d'una situació que s'esdevé dins del real, de l'escola d'epistemologia genètica de Ginebra.

Amb tals observacions, si bé algunes són elementals, pretenem posar en antecedent al lector, d'aquest marc teòric que hem resumit al començament, en aplicar-lo als sistemes de numeració.

És a dir: aquestes consideracions seran fetes partint de l'exposició inicial sobre el concepte d'equilibri d'en Piaget.

Imaginem, cosa necessària, que el que desitgem fer és comptar una quantitat, és a dir disposar d'un mètode de registre per a diferenciar dues quantitats d'objectes siguin o no de la mateixa espècie. Tal és la finalitat dels siste mes de numeració: distingir entre "alguns", un dels quantificadors de la lògica matemàtica, possibles que poden existir donades una sèrie de coleccions d'objectes als que aplicaríem, lògicament parlant, el quantificador "alguns".

Aleshores anomenarem OBSERVABLES els objectes que tenim com per exemple: x x x x x x x x x x

x x x x x x x x

La primera agrupació que fem, determinada per la base que seleccionem, constituirà el primer coordinable. Si hem definit anteriorment un coordinable com la construcció de relacions noves que sobrepassen la frontera de l'observable, el fet de fer la primera agrupació-representada per uns cercles en el dibuix-significa que "Imprimim" una relació als inicials objectes que ells com a tals no la posseeixen i que per tant no és "observable", es a dir: efectuem una coordinació (Coord. S.).

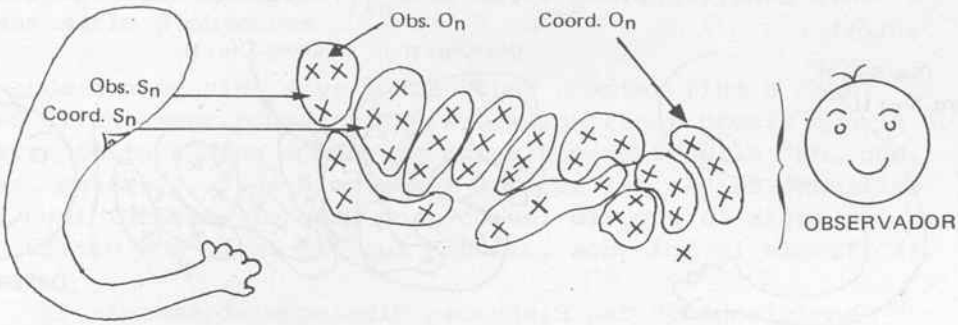
Tal coordinació o tal observació seran les del nivell n: Obs. S_n, coord. S_n.

Puix que normalment disposem d'alguna forma geomètrica de disposar els objectes, tal forma ve determinada a nivell operatori per la base, és a dir en la base tres pot ser un triangle, etc...

Tanmateix si aquesta forma geomètrica no és regular no té importància, la percepció que tenim d'una petita col. lecció d 'objectes, com acostumen a ser les bases, ve fixada per lleis de tipus de les Gestalt , per tant podem parlar amb propietat d'observables relatiús als objectes i per això són els objectes. Es evident que ens basem en els dos sentits del mot objecte: el referit a la matèria en si o a la cosa física, i el referit a allò que nosaltres estudiem o considerem.

Podem parlar, doncs, de coordinables i observables relatius als objectes: Obs. O_n i Coord. O_n

Això que hem dit podem esquematitzar-ho, seguint el dibuix de Von Foerster de la forma següent:



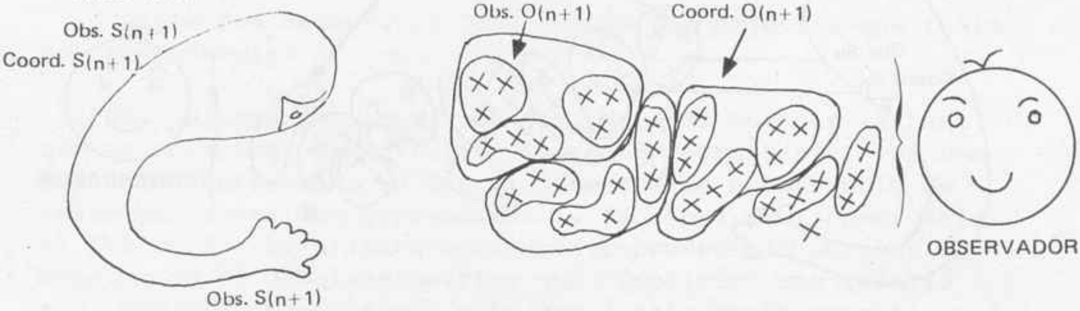
Evidentment nosaltres ens estem situant en el punt de mira d'un observador. Ens situem en una epistemologia incloent l'observador, per tant un tipus d'epistemologia circular intancada.

Bé les desenes són les estructures de coneixement del subjecte en aquest primer nivell.

Es evident que si ens aturessim aquí disposaríem d'un registre poc fiable, o vàlid per a quantitats petites, però com que el que ens hem proposat és una finalitat: la d'obtenir el registre necessari per a qualsevol quantitat de forma que ens sigui útil; hem necessàriament de fer quelcom per tal de no desequilibrar-nos entre el que un interlocutor ens entengui i el que volem dir-li respecte a la matització d'"alguns"

No és pràctic expressar totes les possibles quantitats a través de l'estructura semàntica que hem conferit als objectes amb la primera agrupació. Necessitem fer un observable de l'estructura (Obs. S_n Coord. S_n), per tant fem la segona agrupació, per tal causa els observables relatius al subjecte seran les desenes i els coordinables seran les agrupacions que farem amb les desenes.

Es a dir: Obs. $S_n \pm$ Coord. $S_{n \pm 1}$. Seguint amb l'esquema anterior



Arribats a aquest punt no tenim que remarcar la coincidència entre aquest enfoc dels sistemes de numeració i el model d'equilibració definit per en Piaget.

Per a veure més el concepte d'equilibració, de fet estem dient que els sistemes de numeració són formes de conducta que ens permeten comunicar les nostres matitzacions sobre el "alguns", veiem quan es produeix un desequilibri quan les coleccions d'objectes són tan grans -xifres microscòpiques, astronòmiques, etc.. que fan que aquest equilibri amb el real es trenqui.

En efecte les distàncies astronòmiques o atòmiques s'expressen en formes com $3,2 \cdot 10^{13}$, és a dir s'expresen les últimes agrupacions, existeix el mètode per a expressar-les el sistema de numeració-, però no s'utilitza més de recòrre a altres mètodes de la mètrica.

2. Com comptem

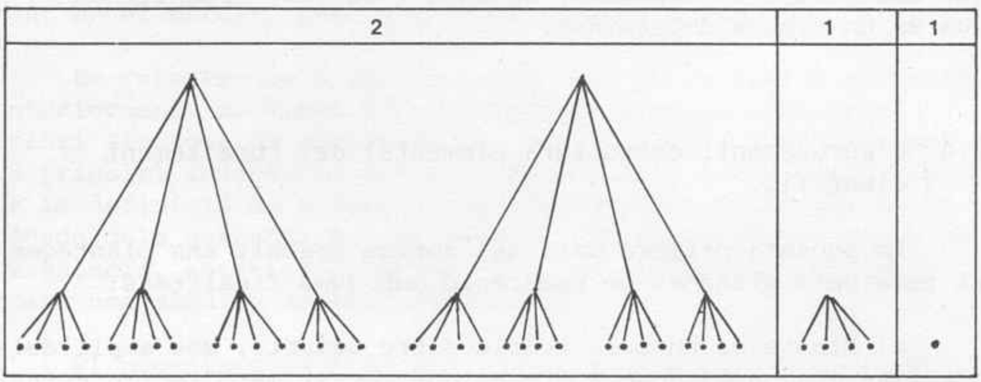
Cal fer aquesta diferència puix que comptem d'una forma derivada dels sistemes de numeració però que alhora oblida els sistemes de numeració, la qual cosa és molt interessant per la didàctica de la matemàtica

En efecte, hom compta "numerant", posant en correspondència biunívoca una sèrie de mots determinats pel codi fonètic i una sèrie d'objectes.

Un nen de cinc anys podrà saber comptar fins a cent, però dificilment podrá entendre el significat precís que la nostra cultura dóna a aquests mots. La cantarella "un, dos, tres, quatre,..." és simplement aplicar les regles senzilles del codi fonètic, la qual cosa no vol dir que el signe lingüístic com a tal estigui assolit, sobretot el significat.

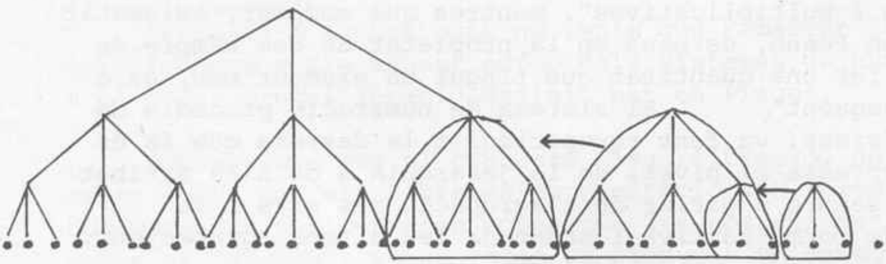
El sistema de numeració procedeix per "composicions auditives i multiplicatives", mentres que comptar, axiomatitzat per en Peano, es basa en la propietat de que sempre és possible fer una quantitat que tingui un element més, és a dir "el seguent" El sistema de numeració procedix de forma diferent: va fent agrupacions i la darrera que fa és la que expressa el nivell de la jerarquia a on s'ha arribat comencem sempre a parlar de l'agrupació més alta i va afegint de forma aditiva i ordenada les altres agrupacions.

Per exemple:



Hom fa les agrupacions i sempre -excepte en el cas d'un seguit de zeros- sobren altres agrupacions que no es poden agrupar en una altra agrupació d'ordre superior, com s'observa en el diagrama. Doncs bé, les que "compten" són les agrupacions que sobren, és a dir les que no estàn agrupades en un altre ordre superior i per mitjà d'una composició additiva ordenada: posar-les una al costat de l'altre formant un conjunt ordenat d'agrupaments diferents, però que alhora estan inclosos els uns dins els altres ateses les seves estructures.

Sobre el diagrama anterior podem representar aquestes consideracions:



Per tant la cantarella "un, dos, tres, quatre..." el que ens permet és construir aquesta totalitat organitzada que és un nombre determinat.

2.4. L'agrupament: estructura elemental del coneixement científic.

En aquesta primera part del nostre treball ens plantegem el tema dels sistemes de numeració amb dues finalitats:

a) Plantejar un marc teòric sobre aquests, més ampli dels que fins ara se'ls dona. Creiem que aquest marc teòric actual dels sistemes de numeració basat en les bases o potencia del sistema de numeració està o es presenta com a limitat a l'hora d'elaborar una teoria didàctica sobre l'aprenantatge dels nombres. És a dir: el que el mercat ens presenta per mitjà, fonamentalment, dels llibres de text són models praxiològics del marc teòric en el que actualment basem l'explicació dels sistemes de numeració, és a dir: les bases.

Exposarem que una de les estructures de la lógica actual o de les diverses tendències dels lògics, l'AGRUPAMENT, definit per Piaget, ens dóna o ens proporciona, un marc teòric més ampli que el de les bases, puix l'inclou allò sobre el qual basar l'explicació dels sistemes de numeració i conseqüentment la didàctica del nombre.

Cal dir, per a estalviar malentesos, que no pretenem desplaçar en absolut la didàctica actual sobre el nombre sinó que aquesta està simplement inclosa, creiem, en aquest plantejament.

b) Un cop presentem aquest marc teóric anirem a elaborar un model didàctic sobre l'ús que poden representar les màquines de calcular manuals, entenent per aquestes des de l'àbac fins a les típiques calculadores manuals desplaçades actualment en el mercat, però d'un important ús a l'escola.

En referir-nos a un model didàctic de la teoria elaborada anteriorment, no volem dir que aquesta s'hagi elaborat a priori sinó que ha sorgit de la confluència de dos fets, en un principi independents. El primer d'ells seria l'existència de la definició de l'estructura d'agrupament elaborada en la dècada dels quaranta per en Piaget. El segon d'ells seria la existència, anterior al primer fet, del mecanisme amb què opera una màquina de calcular manual.

El mecanisme satisfà les condicions de l'estructura de l'agrupament, de la mateixa manera que els nombres enters per l'operació d'addició satisfà les condicions de l'estructura de grup; en definitiva: el mecanisme de les màquines de calcular és una realització material de la forma en què procedeixen els sistemes de numeració. L'estructura d'agrupament és la definició d'aquesta forma.

Per a evitar confusions sobre l'enfoc d'aquest estudi és pertinent fer les següents precisions:

a) que ens referim a la "forma" d'efectuar les agrupacions dels objectes, pas anterior a l'associació dels símbols numèrics.

b) que pretenem interpretar les accions del subjecte sobre els "objectes" des de la teoria lògica d'en Piaget

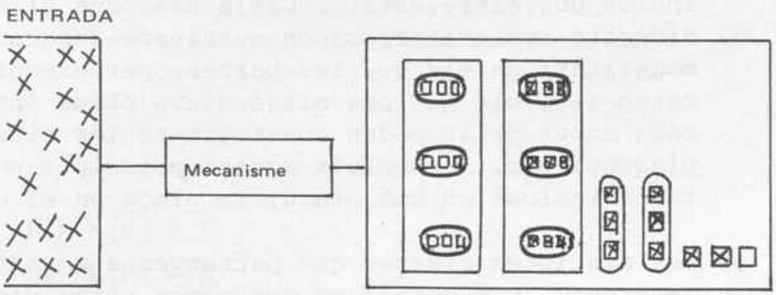
c) tenint per cert que els sistemes de numeració com a procediment d'agrupar els objectes, no són pròpiament objecte d'estudi de la matemàtica -la matemàtica estudia el nombre natural quam ja hi ha hagut la codificació i per tant opera sobre "signes" -el llenguatge que emprarem està pres de la lògica matemàtica en parti i en altra part del llenguatge definit per en Piaget.

d) pretenenm també donar i proporcionar un marc "teòric" suficientment ampli i que no presenti contradicció amb les accions del nen a nivell de parvulari sobretot. Més endavant incidirem en aquest punt.

e) ens remetrem en tot moment a aspectes de l'obra d'en Piaget, per la qual cosa un coneixement exhaustiu d'aquesta enriquirà i farà profitosa la lectura d'aquest estudi, si més no les referències bibliogràfiques poden aclarir qüestions que no quedin suficientment clares pel lector.

A efectes didàctiques, i només didàctics, presentarem al lector una mena de màquina ideal de la qual no en coneixem de moment el seu mecanisme intern de funcionament, a mena de "caixa negra"

Aquesta màquina té una entrada i una sortida. En la entrada hi ha una certa quantitat d'objectes i a la sortida ens presenta els objectes classificats d'una forma determinada.



(Fig. 1)

L'únic que fa la màquina és omplir cada casella petita i atribuir a cada objecte un predicat: "estar en la casella x". Més endavant veurem que aquest predicat és de fet una composició d'altres predicats elementals. S:observa que hi haurà sempre una correspondencia biunívoca entre els objectes d'entrada i els llocs que ocupen en la sortida -principi del concepte de nombre natural-.

Així doncs, sempre que una quantitat determinada d'objectes, no ens interessa quina, entra a la màquina surten classificats de forma jeràrquica en la sortida. Per cada quantitat diferent d'objectes, no ens interessa quina, l'estat de la sortida és diferent.

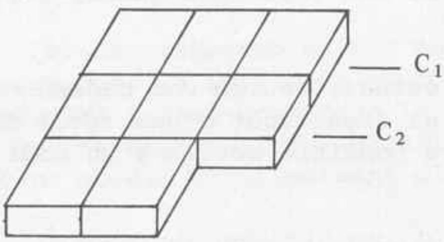
Més endavant, en un altre estudi, veurem com cadascun dels estats de la màquina són el significat d'una sèrie de símbols numèrics i que això será possible mercès a un codi determinat.

Si sense conèixer el mecanisme intern de la màquina volem saber els principis generals d'una classificació d'aqu-st tipus, observarem i seguirem a en Piaget en aquests principis que :

1) Suposada definida una classe total com tots els estats possibles de la sortida, observem que tota classe o subclasse es presenta "inclosa" en un altre classe. Sempre hi ha un estat de la màquina en el qual hi trobem inclòs un altre estat. Cal pensar que el material didàctic com ara els blocs multivase -en les seves dues modalitat: en els que les barres, per exemple, vénen ja fetes i en els que per mitjà d'uns claus inherents a cada cubet petit poden construir-se les altres barres, plaques, etc.. -compleix aquest principi: una barra es troba inclosa en una placa, la placa en el cub gros, etc..

2) Les distintes classes que pertanyen a un mateix nivell jeràrquic, els estats en què només estan plenes les caselles d'un mateix color, en els blocs serien les barres diferents, les plaques diferents, etc.. són "disjuntes" entre elles.

A nivell de percepció i no de simbolització, això és cert, una barra és una barra, diferent d'una altra. Si no fos així la manipulació seria impossible.



$\{B_2\} \cap \{B_1\} = \phi$

$\{C_2\} \cap \{C_1\} = \phi$

C = lloc cubet
B = lloc barra
P = lloc placa
M = lloc cub

Cal entendre que aquí ens referim a la posició dels objectes i que ens movem en un camp de pura percepció i manipulació que històricament deuria de produir-se abans que l'home comencés a crear el sistema de numeració que coneixem o emprem actualment, fins i tot aquesta idea ja està implícita en l'àbac: les boles de l'àbac ocupen un lloc i en funció d'aquest lloc hom li atribueix un "significat", aspecte que en aquest estudi no tocarem.

Alhora cada classe constitueix el "lloc comú" entre ells i la clase immediatament superior en la jerarquia així tenim que:

$$\{C\} \cap \{B\} = C$$

$$\{B\} \cap \{P\} = B$$

3) Les classes d'un mateix "rang" no poden ser caracteritzades sinó es per dicotomia, és a dir per absència o presència de caracters donats. Si en tot moment fem referència al "lloc perceptiu", és evident.

En una placa, una barra determinada només pot caracteritzar-se pel lloc que "no" ocupen les altres, és a dir: (amb cubets).

$$C_1^1 = \{C_2 \cup C_3\}$$

$$C_2^1 = \{C_1 \cup C_3\}$$

$$C_3^1 = \{C_2 \cup C_1\}$$

Si en lloc de prendre l'exemple dels blocs multibase ho fem amb un dels estats de la màquina s'esdevé el mateix: un lloc determinat de l"estat és només caracteritzat per oposició dels llocs restants.

4) Tot individu (lògic) que pertany a una classe determinada pertany a totes les clases precedents. En efecte, si un cubet petit està dins d'una placa, aleshores està dins d'una barra, és a dir:

$$C \subseteq B \subseteq P \subseteq M \;\ldots\ldots$$

Si $\{C_1\} \subseteq C$, aleshores:

$$\{C_1\} \subseteq C \subseteq B \subseteq P \subseteq M \;\ldots\ldots$$

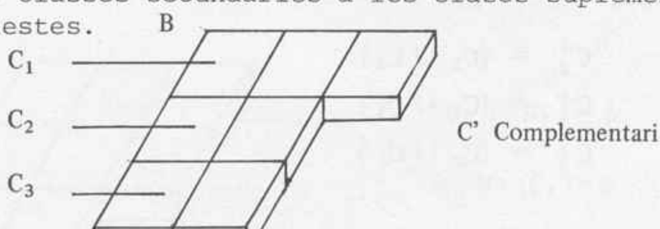
En els estats de la màquina s'esdevé el mateix: un lloc està alhora inciòs en un altre lloc.

5) La classificació suposa un cert principi "d'ordre" que definirem a continuació. Abans és necessari definir dos conceptes prèviament: Classes Primàries i Classes Secundàries i respecte a aquests dos conceptes establirem o definirem aquest principi d'ordre.

S'enten per classes primàries les clases de partida:

$$C \subseteq B \subseteq P \subseteq M \;\ldots.$$

i per classes secundàries a les clases suplementàries d'aquestes.



$$C'_1 = \{B'\{C_2 \cup C_3\}\}$$

Primaria = totes les del mateix rang.
Secundària= cada una

La diferència entre les classes primàries i secundàries potser no queda clara exposades d'aquesta forma, però si prenem un altre punt de mira potser quedarà més clar.

En efecte: A què li diem clases primaries? Al lloc de posició? No, sinó al fet que aquest lloc té, per dir-ho així, una "grandària" diferent a la grandària de la classes que l'inclou. En un mateix sac ficaríem totes les unitats de primer ordre, en un altre sac ficaríem totes les unitats de segon ordre que per altre banda inclouen, quan a "gradària", les unitats d'ordre anterior.

Les classes secundàries serien els llocs pròpiament dits sense atendre a altres criteris per a caracteritzar-les. Es en aquest aspecte que aquestes classes, que són del mateix rang, només es poden definir per la diferència entre la classe que les inclou de forma inmediata (B) i la unió entre les altres classes (C_2 VC_3). Aleshores hi ha un ordre entre les classes primàries, però no entre les classes secundàries, és a dir, seria un conjunt parcialment ordenat.

Aquests són els cinc principis que a judici d'en Piaget regeixen les classificacions d'aquest tipus (com són les clasificacions zoològiques, que són les que posa com a exemple).

Farem a continuació una distinció metodològica que pot ser útil per a interpretar adeqüadament l'esperit d'aquest estudi.

Mo hem dit absolutament res de com, a partir d'un estat determinat, hom pot engendrar o constuir un altre estat, que tindria un parangó amb el següent dels nombres naturals Sw moment ens limitem exclusivament al "procediment" que emprem per a classificar, que conssiteix esencialment en una posició espacial sense contingut determinat i fet per mitjà d'oposicions i posicions, el contingut al qual s'apliqui pot ser qualsevol, sempre i quan sigui "discret".

Per a entrar en el que segueix, utilitzaré un recurs didàctic que serà el següent: imaginem que un nen de parvulari està al davant d'una màquina com aquesta descrita anteriormen o que a d'efectuar classificacions dels objectes (de la mateixa manera que fa seriacions amb gometes) d'aquesta forma.

Suposem que té els quatre estats següents, que corresponen a quatre quantitats diferents:

El que platejarem a continuació és un tant complex d'interpretar sinó és a partir d'un enfoc entre "piagetà" i pragmàtic.

En efecte, no serà la mateixa la "percepció" gran problema de lapsicología d'un matemàtic, d'una persona normal del carrer i d'un nen de parvulari. Sobre el concepte de classe saben que no és el mateix definir-la per "comprensió" que per "extensió", mentre que un matemàtic, que pot ser un home del carrer, pot definir-la per comprensió. Si ens situem a la pell del nen -cosa que tothom que ensenya fa alguna vegada- proposem a continuació tres definicions d';en Piaget sobre el concepte de "classe" que corresponen a les percepcions que pot tenir un nen de parvulari, un nen de 4t.-5è curs i un nen de 8è. Piaget distingeix entre les classes "dèbilment estructurades" "semiestructurades" i "estructurades

Definició 1

Anomenarem clases dèbilment estructurades les clases en les quals els individus que pertanyen a una d'elles es relacionen entre sí per la possesió de certes qualitats comuns propies d'aquesta classe, sense que cap operació determinda permeti construir, a partir d'aquestes propietats b, les qualitats c, etc.., pròpies de la classe c, etc..., en les quals les classes B es troben incloses, ni tampoc les qualitats pròpies de les classes A incloses en B.

Definició 2

Considerem els objectes X_1, x_2, x_3, x_4, etc, seriats segons les seves diferències (x_1, x_2); (x_2, x_3), (x_3, x_4), etc. Si s'ha de $(x_1, x_3) = (x_1, x_2)$ o (x_2, x_3); (x_1, x_3) o (x_3, x_4) sense que existeixi cap operació que permeti composar les diferències (x_1, x_3), (x_1, x_4) a partir de la sola diferència (x_1, x_2) les classes:

$A = df\{x, x_2\}$ $B = df\{x_1, x_2, x_3\}$ $C = df\{x_1, x_2\ x_3, x_4\}$ etc.
les anomenarem semiestructurades.

Definició 3

Anomenarem classes estructurades a les clases en les quals a partir de les propietats -relacions- que caracteritza a una subclasse A, és possible, per mitjà d'operacions donades, composar les relacions característiques de les altres subclasses A', A", etc., així com les relacions que defineixen la classe tota B (o reciprocament, composar les propietats d'A', d'A", etc.., a partir de les B,

La hipòtesi bàsica d'aquesta part de l'estudi és que el nen, respecte a les seves percepcions "escolars" dels objectes, passa pels tres nivells de classe definits per en Piaget. Es a dir: en un principi un nen petit només distingeix entre cap, un, molts ipocs; la seva percepció d'un grup de quantitats està limitada perquè és una classe dèbilment estructurada. Es independent aquí el probleme de com codifica aquesta parcela de la realitat per mitjà de símbols cosa que requereix un altre estudi .

El que plantegem aquí no és una matemàtica de l'agrupació sinó un llenguatge demarc teòric que ens possibiliti una interpretació del que fa el nen quan efectua les agrupacions dels objectes. Tal teoria -n'hi pot haver més- ha de satosfer una condició perquè sigui vàlida per a utilizar-la a l'escola; que cap fet o acció del nen quan opera amb els agrupaments la posi en contradicció, en tal cas la teoria s'ha de rectificar.

Altrament també interessa que la formació del mestre inclogui aspectes teòrics, sense els quals no és possible operar amb qualsevol realitat: les teories no estan allunyades de la realitat, tornen d'on surten: del real.

Plantejarem, doncs, el problema clau d'aquest estudi:

¿Es possible dfinir alguna estructura (en el sentit que se li dóna en la matemàtica) de les relacions que estableix una persona quan "agrupa" una sèrie d'objectes amb finalitat numèrica?.

Plantegem una lògica de l'actuació humana, d'una actuació molt concreta. Tal lògica és d'indubtable interés per a l'ensenyament puix que en definitiva el que s'ensenya és a actuar sobre els objectes de les realitats diverses que ens envolten: numerar és en definitiva una actuació humana sobre els objectes.

Aquesta lògica és la desenvolupada per en Piaget i no només per ell . Seguint el model matemàtic per a definir una estructura necessitem un conjunt ben definit -que ja el tenim, els estats de la màquina- i una operació interna del conjunt.

En Piaget no concebeix el terme "operació" com el concebeix el matemàtic ($A \times A \rightarrow A$). Tenim el conjunt i ens faltarà definir el que s'entén per operació.

L'estructura que cercarem ha de tenir les següents característiques: "El problema és caracteritzar una estructura que conciliï la reversibilitat pròpia del grup amb el sistema d'encaixos limitats, pròpia del reticulat"

Per a fer un paral.lelisme els nombres naturals amb l'operació d'addició o de producte no tenen l'estructura de grups que com a característica forta tenen la reversibilitat (element invers) ; es tracta de cercar una estructura que posseeixi aquesta característica.

Cal definir el que Piaget entén per "operació". Abans, però cal definit dos conceptes claus necessaris per a entendre el concepte d'operació piagetià. Aquests són els de "forma" i "contingut" i "estructura".

Definició 4

El contingut d'una relació operàtoria està constituït per les dades, és a dir, els termes que poden ésser sustituïts, mentre que la forma és el que segueix inalterable en el curs de tals substitucions.

Per exemple:
En l'expressió 3 + 3 = 7, 3, 4, 7 són les dades o contingut, mentre que .... + ... = ... seria la forma. Així el contingut equival a la dada mentre que la forma equival a la construcció.

Definició 5

Anomenarem operació a la transformació reversible d'una estructura en una altra, ja sigui per modificació de la forma o bé per substitució en relació al contingut

Cada estat de la màquina, cada forma que puguin assolir els blocs multibase, serà una estructura en la qual la forma seran les posicions i el contingut els objectes. Així és possible passar d'una estructura a una altra per mitjà d'una transformació (efectuada per un operador) i és possible transformar aquesta darrera estructura en la primera (per mitjà de l'operador invers a l'anterior). Heus ací com arribem a la "reversibilitat" del grup:

L'estructura cercada és la que afecta a classes semiestructurades però no a les classes estructurades (la major part de les classes amb les quals treballa el matemàtic són d'aquest tipus).

El nom que li posa en Piaget és d'AGRUPAMENT, nom que no és casual. Bé, tenint present les agrupacions amb finalitat númerica anirem definint l'Agrupament i les seves propietats verificant-les en el cas que treballem.

La definició d'agrupament citant a Piaget serà:

Sigui un conjunt U. Escollim un nombre finit de parts d'U, en aquest cas les classes A, A', B, B', C, etc. Anomenem C (U) al conjunt de parts d'U escollides, i convenim per altra part en què ∅ i U formen part de C(U). En aquestes condicions, a tot $x \in U$ li associarem dos operadors, un que establirem TX i que anomenarem operador directe i un altre que escriurem X que anomenarem operador invers. Establirem que per altre part T∅ i⊥ ∅ són un i el mateix operador, que escriurem simplement ∅.

Si escrivim + X en lloc de TX i -x en lloc de ⊥ X- ho podrem llegir:

+ x: posar els elements de la classe x.

- x: privar-se dels elements de la classe x.

Sigui després una llei de composició commutativa entre els operadors TX i⊥X, designada per o i una relació d'equivalència. que escriurem =.

En la classificació de la figura (2) l'expressió:

$$(TX) \circ (TY) = TZ$$

equivaldrà a:

$$(+ A) \circ (+ A') = (+ B)$$

En la forma d'agrupar dels sistemes de numeració (fig. 3) equivaldrà a:

$$(+A) \circ (+A) = +B$$

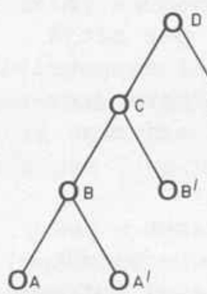


Figura 2

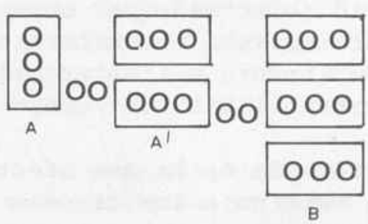


Figura 3

B) Calculadores científiques de butxaca

Ens agradaria trobar en el mercat una calculadora en què les funcions científiques fossin com a mínim les que es troben en el programa de segona etapa i com a màxim les que significarà posar els elements de la classe A i posar els elements de la classe A' equival a posar els elements de la classe B.

D'una forma general, designarem per E(U) una sèrie finita d'expresions de la forma:

$$(TX) \circ (TY) = TZ$$

és a dir composicions entre els llocs del sistema de numeració i definir un agrupament en U, sigui G (U) de la manera següent:

(G1)

Si $(TX) \circ (TY) = (TZ) \in E(U)$

Aleshores $(TX) \circ (TY) = (TZ) \in G(U)$

És a dir, tot element de E(U) és element de G(U)

Si prenem com a exemple un àbac, "córrer" una bola de la fila de les unitats de primer ordre i córrer les restants, equival a córrer una bola de les unitats de segon ordre.

(G2)

Si $(TX)\ (TY) = (TZ) \in E\ (U)$, aleshores

$$(\perp X) \circ (\perp Y) = (\perp Z) \in G(U)$$

És a dir l'equivalència obtinguda al reemplaçar en un element de E(U) els operadors directes pels inversos és un element de G(U).

En l'àbac "treure" un element de les unitats de primer ordre i els altres equival a treure un element de la fila de les unitats d'ordre immediatament superior.

(<u>G3</u>)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } (TX) \circ (TY) = (TZ) \in E(U) \text{ aleshores} \\ \quad (TX) \circ (TZ) = (TZ) \in G(U), \text{ i} \\ \quad (TY) \circ (TZ) = (TZ) \in G(U) \end{array}\right\}$$

La classe X queda o "s'absorbeix" en la classe Z, per això parlarem de lleis d'absorció per a parlar o referir-nos a aquests elements de G(U). Aquesta llei pot presentar alguna dificultat de comprensió si hom surt del pla purament "d'acció" i el traspassa al cap dels nombres naturals, ens referim a coses diferents. En l'àbac posar una bola de les unitats de primer ordre i després posar una bola de les unitats de segon ordre, equival a nivell "acció", del què fa el subjecte respecte a les seves pròpies accions; en executar la darrera acció, evidentment si corres una bola de les unitats de l'ordre <u>i</u>, és evident que han quedat ABSORBIDES en aquesta acció les accions d'haver corregut les boles de l'ordre (<u>i</u> - 1).

Aquesta llei és de fonamental importància per la comprensió del significat de "desena, centena, etc..."

(<u>G4</u>)

$$\begin{array}{l} \text{Si } (TX) \circ (TY) = (TZ) \in (EU), \text{ aleshores} \\ \quad (TX) = (TZ) \circ (\perp Y) \in (GU) \\ \quad (TY) = (TZ) \circ (\perp X) \in (GU) \end{array}$$

El significat en l'àbac és ben clar: córrer x boles de les unitats de primer ordre, és el mateix que haver corregut les complementàries de les unitats de primer ordre (X') en sentit invers.

(G5)

(TX) o (TX) = (TX). Parlarem de lleis tatològiques per a referir-nos a aquests elements. En l'àbac, encara que sembli una contradicció, repetir la mateixa acció, que es suposa que és córrer una altra vegada la "mateixa bola" és quedar-se en el mateix estat.

(G6)

$$(TX) \circ (\perp X) = \emptyset \in G(U) \text{ i } (TX)\ G(U) \circ \emptyset = (TX)\ (GU)$$

$\emptyset$ és l'operador idèntic de l'agrupament.

(G7)

Si $\alpha = \beta$ i $y = \delta$ són elements de G(U), aleshores

$$\alpha \circ \varphi = \beta \circ \delta \in G(U)$$

La composició membre a membre dels elements de G(U) és element de G(U). Finalment es dóna un "regle" de reemplaçament que ens autoritza a substituir un operador qualsevol per una composició que li sigui equivalent.

A partir d'aquí hom pot CALCULAR en aquesta estructura de la mateixa manera que els operadors ! ,.. calculen en els nombres naturals; la gran diferència és que l'agrupament està definit en el conjunt d'accions possibles que hom fa quan "agrupa" i les altres són operacions amb els símbols d'aquests agrupaments; ja no s'opera sobre agrupament sinó sobre "signes".

Ens trobem en una fase pre-nombre natural-codificat.

Es requereix un altre estudi similar a aquest per a entrar en la lògica de l'actuació humana quan manipula els signes. El quadre teòric d'aquesta lògica no és la d'en Piaget, sino la dels estudis Semiòtics d'Umberto Eco. La importància de l'agrupament és obvia pels ensenyants o mestres, que ensenyar uns conceptes matemàtics no és en absolut un problema matemàtic, valgui la redundància, un cop l'ensenyant "sap" en tota la seva profunditat el concepte matemàtic que vol ensenyar.

És en aquest aspecte que l'estructura de l'agrupament no s'emmarcar dins d'un conjunt matemàtic sinó de, en aquest cas, didàctic.

Seria com fer una lògica de l'actuació d'una persona quan està treballant en un àbac, blocs multibase, reflexs, etc.... si la veiem en un film mut. La persona que estudia l'acció d'aquest individu no sap absolutament res de nombres naturals, i, si se'ns amoïna massa, diré que es d'un altre planeta on no existeixen les matemàtiques.

Cal remarcar que el fet de prendre la lògica d'en Piaget com a model teòric rau en que no coneixem -potser existeixi- un altre model lògic que contempli aquesta realitat de les accions dels subjectes sobre els objectes quan s'els agrupa.

Piaget prossegueix i estudia les classes d'agrupaments que existeixen, segons ell; aquests, o són aditius o són multiplicatius, la qual cosa ens dóna motiu a poder interpretar la lògica de l'actuació humana que aplica els algorismes de la suma i producte, però això serà objecte d'un altre estudi.

3.- LA PROGRAMACIÓ DEL CÀLCUL

SISTEMES ELECTRÒNICS COMPLEXOS DE CÀLCUL

Classificquem en els següents apartats els sistemes electrònics complexos que hem treballat:

A) Calculadores senzilles de butxaca

B) Calculadores científiques de butxaca

C) Calculadores programables de butxaca

D) Microordinadors

Anomenem complexos a les calculadores i ordinadors en oposició als senzills sistemes electrònics que poden construïr els propis nens.

Tendim a que el nen que utilitza una màquina conegui el significat de totes les funcions que aquesta realitza. això, però, és només un ideal a tenir en compte.

Si prescindim de la norma anterior qualsevol tipus de màquines dels esmentats es pot utilitzar com del tipus anterior prescindint de les tecles que no interessin.

En les calculadores electròniques i especialment en les programables i els ordinadors, s'aconsegueixen plenament alguns dels objectius generals per a la utilització de calculadores perseguits per nosaltres, els que fan referència a la introducció del nen a una matemàtica més entroncada en el món actual.

Abans d'explicar les activitats que considerem interessants en cada tipus de màquina direm el model de què nosaltres hem disposat i els criteris de selecció d'aquest model.

Entre criteris i model no sempre hi ha correspondència plena, és que només esmentem els criteris que fan referència a les característiques tècniques de la màquina, però no les comercials, o simplements les nostres possibilitats. Tampoc considerem aquí la duresa dels distints aparells.

A. Calculadores senzilles de butxaca

Les funcions que nosaltres voldríem que tingués la màquina escollida per aquest apartat són:

-Les quatre operacions elementals

-Vàries memòries

-Entrada a les memòries operant amb les quatre operacions.

-Canvi de signe (simètric)

-Invers.

-Constant

-Parèntesi

En altres, simple comprovació de la comprensió del coneixement de la màquina.

Pot sorprendre a algú la inclusió de la logaritmació; però, fa temps que creiem que la comprensió de la potenciació no es pot assolir plenament sense les seves dos inverses, radiació i logaritmació i que els nens de segona etapa són capaços de calcular les arrels i logarismes senzills per tempteig que és la forma que dóna un coneixement intuitiu més complert. Naturalment no es tracta pas del càlcul a través de logaritmes i de l'ús de taules pròpies de l'ensenyament secundari.

Una vegada treballades totes les operacions elementals en els tres conjunts es prestaran expressions algebraiques de complexitat creixent. En aquestes expressions no és simplement important arribar a un resultat numèric, sinó fer-ho en el nombre menor de passos de la màquina. Aquí la nostra màquina no ensenya directament quin es l'ús del parèntesi, però la pràctica adquirida en la preocupació per entrar degudament les dades, fixa fàcilment el seu significat. Altra cosa és si com hem assenyalat al principi es treballa amb una màquina que té el parèntesi.

La Ti 57 en té. En qualsevol cas en combinació de les 2 màquines i el càlcul mental, el nen pot deduïr amb poca ajuda la utilització del parèntesi i tota la complexitat de les operacions més prioritàries.

Paral.lelament es resoldran problemes posant les seves operacions en llenguatge de la màquina, o sigui resolent les operacions en un full de màquina. Últimament, donant valors literals a les dades, es generalitzen problemes antològics, cercant d'altres problemes que es puguin resoldre amb la mateixa sèrie d'operacions. Aquest últim pas, és un bon element en l'adquisició de l'algorisme de distint tipus de problemes i una bona preparació per l'albegra i prepara el pas a les màquines programables i ordinadors.

Nº	TECLA	PANTALLA	CTE.	MEMÒRIA
		45 + 13 = 58		
1	OFF	-	-	-
2	ON	0	-	0
3	45	45	-	0
4	+	45	+45	0
5	13	13	+13	0
6	=	$\boxed{58}$	+13	0
		64 x (-32) = -2048		
1	OFF	-	-	-
2	ON	0	-	0
3	64	64	-	0
4	x	64	x64	0
5	32	32	x32	0
6	+/-	-32	x(-32)	0
7	=	$\boxed{-2048}$	x(-32)	0
		$12^4 = 1728$		
1	OFF	-	-	-
2	ON	0	-	0
3	12	12	-	0
4	x	12	x12	0
5	=	144	x12	0
6	=	$\boxed{1728}$	x12	0

Nº	TECLA	PANTALLA	OPE.	MEMORIA
	4 - { 7 - (3+2) } = 2			
1	OFF	-	-	-
2	ON	0	-	0
3	2	2	-	0
4	+	2	+2	0
5	3	3	+3	0
6	=	5	+3	0
7	+/-	-5	+3	0
8	+	-5	-5	0
9	7	7	+7	0
10	=	2	+7	0
11	+/-	-2	+7	0
12	+	-2	-2	0
13	4	4	+4	0
14	=	$\boxed{2}$	+4	0

Nº	TECLA	PANTALLA	C.K.	MEMÒRIA
	$7 \times 2^5 + 3 + 2^7 + 2 \times 11 = 377$			
1	OFF	–	–	–
2	ON	0	–	0
3	7	7	–	0
4	x	7	x7	0
5	2	2	x2	0
6	=	14	x2	0
7	=	28	x2	0
8	=	56	x2	0
9	=	112	x2	0
10	=	224	x2	0
11	M+	224	x2	224
12	3	3	x2	224
13	M+	3	x2	227
14	2	2	x2	227
15	=	4	x2	227
16	=	8	x2	227
17	=	16	x2	227
18	=	32	x2	227
19	=	64	x2	227
20	=	128	x2	227
21	M+	128	x2	355
22	11	11	x2	355
23	=	22	x2	355
24	M+	22	x2	377
25	MR	$\boxed{377}$	x2	377

que el nen pot entendre a aquesta edat.

El que ens va decidir pel model de calculadora CASIO fx 39 fou el càlcul amb nombres racionals que es troba en poquíssims models.

Ės el tipus de calculadores del qual tenim menys coses a dir. Li hem donat les següents utilitzacions:

1) Motivació per l'estudi de noves funcions. Això pel duir i que s'ha pogut introduïr mitjançant la calculadora, com en la introducció de funcions que no estaven dins de la nostra programació i que la maquina i l'interès que ha despertat en els nens ha impulsat a introduïr unes vegades amb tots els nens altres amb un grup reduït especialment interessant. Recordem que ha estat en aquesta calculadora on hem pogut introduir el parèntesi.

Una vegada una funció ha estat introduïda en aquesta calculadora s'ha elaborat per part dels nens la seqüència de tecles o passos necessaris per a resoldre-la amb la Ti 1025. La qual cosa permet interioritzar l'algorisme o sigui que mitjançant les 2 màquines es permet tancar el cercle: motivació-comprensió.

2) Autocorrecció: En totes les funcions de la màquina i molt especialment en les operacions amb trencats, els ha estat possible als nens crear exercicis, realitzant-los i corregint-los ells mateixos amb la corresponent avantatge tan pel treball individualitzat com amb grup autònom.

3) Realització de problemes i problemes tipus més complexos que els realitzats amb les calculadores Ti 1o25.

C) Calculadores programables de butxaca.

Descripció de calculadora programable.- Aquests tipus de calculadores podem considerar-les petits ordinadors de butxaca. En síntesi, operen de la següent manera:

Hi han 2 mòduls o formes de funcionament; mòdul de treball i mòdul de programa, seleccionables mitjantçant un interruptor o tecla.

En el mòdul de treball es comporta com una calculadora científica, i es poden realitzar les funcions matemàtiques de totes les seves tecles menys unes poques que funcionen exclusivament en el mòdul programa. En el mòdul programa, les tecles que pulsen no provoquen un càlcul immediat de la funció demanada, sinó que queda memoritzada, realitzant-se totes de cop quan s'ordena el programa gravat en mòdul de treball; aquest programa es pot repetir tantes vegades com es vulgui.

Així, doncs, la màquina pot memoritzar tota una sèrie de passos, igual que nosaltres els ajuntàvem a l'imprès per la Ti 1025.

Existeixen a més a més algunes ordres lògiques, que es poden intercalar dins del programa i que permeten saltar ordres, repetir-ne (bucles) i fins i tot seleccionar un grup o altre segons els valors que vam prenent les variables (presa de decisió).

MODELS UTILITZATS:

Les calculadores utilitzades en aquest cas són:

Ti programable 57 amb les següents característiques:
-50 memòries de programa (passos de programa)

-8 memòries dades

-Sistema algebraic A.O.S.

Hevilet Packard 33 E amb les següents característiques:

-50 memòries passos de programa

-8 memòries dades

-Sistema lògic R.P.N.
Ti programable 59 amb les següents característiques:

-480 memòries passos de programa
-6 memòries dades.

-Sistema algebraic A.O.S.

-Cada 8 memòries passos de programa, es poden canviar per 1 memòria dades.
-Cartes magnètiques.

La HP 33 E és més completa quant a funcions la qual cosa, junt amb el seu sistema algebraic, dóna major potència operatòria en els mateixos passos de programa que la Ti 57 però el seu sistema algebraic és poc comprensible pels alumnes, per tenir menor paral.lelisme en la notació algebraica i es un sistema poc freqüent en les calculadores que s'acostumen a utilitzar al nostre país. El sistema A.O.S. és el de totes les altres calculadores electròniques que portem anomenades en aquest treball encara que no ho hem especificat.

En general, la Ti programable 57 serà la millor quan hagin de programar els nens i la H, P, 33 E quan hagi de programar el mestre.

La calculadora Ti programable 59 és molt semblant a la Ti programable 57 però amb major potència i amb la aventatge que els programes elaborats es poden gravar en una carta magnètica i tenir-los disponibles sempre, sense necessitat de tornar a entrar-los pel teclat.

Utilització a la classe:

A part de la funció de calculadora científica que ja queda definit en el capítol anterior, com a calculadora programable té dues possibilitats de treball didàctic, (els mateixos que un ordinador):

a) Activitats en què l'alumne utilitza la màquina amb un programa preparat pel mestre.

b) Activitats en què l'alumne es programa la màquina.

Activitats del tipus a:

(1) Exercicis programats de càlcul.

Com a exemple d'aquest tipus de programes adjuntem el programa que titulem "multiplicacions programades".

El mestre entra el programa i en la memòria 2, el nombre que indica el grau de dificultat a què el nen ha arribat. (L'arrel quadrada d'aquest nombre és aproximadament l'ultima taula que el nen domina).

El nen prem la tecla R/S i li sortiran per la pantalla 2 nombres prem el producte d'aquests 2 nombres i altra vegada R/S en la pantalla apareix el producte correcte amb un guió d'identificació al davant a fi de que el nen comprovi dos nobres més per multiplicar i tornar a iniciar-se el cicle indefinidament.

Quan el nen deixa la màquina, el mestre recull de la memòria 2 el grau de dificultat a què el nen ha arribat.

Les multiplicacions que la màquina ordena al nen es seleccionen aleatòriament dins del grau de dificultat que es considera superat pel nen. Segons el nen entri "resultats correctes" o no, el nombre de la memòria 2 augmenta o disminueix.

El que aquí mostrem amb la multiplicació es pot fer amb qualsevol operació o càlcul numèric que convingui.

(2) Simulacions didàctiques.

Creiem que aquesta és realment la gran aplicació dels ordinadors i quan aquests no es poden tenir de les calculadores programables. En aquest cano sabem que treballa l'I.R.E.M de Lyon.

Incluīm 4 programes de simulació i n'explicarem llur utilitat.

"Simulació daus"

Algunes de les experiències de probabilitat que el nen pot fer mitjançant daus o menedes sovint no poden realitzar-se, per manca de temps, o per l'excessiva monotonia que representaria, un nombre de vegades suficientment elevat per a conseguir resultats fiables o que el nen faci intuītivament el salt qualitatiu que va de la idea de freqüència a la de probabilitat.

En el programa que hem realitzat si canviem l'ordre nº 10, per "R/S" en lloc de "pausa" la calculadora s'ens converteix en un dau electrònic en què cada vegada que pulsem la tecla "R/S" surt en pantalla un nombre natural entre 1 i 6, un dau còmode per ésser utilitzat en una classe; a més, en qualsevol moment podem preguntar quantes vegades ha sortit un determinat nombre a la memòria que el té, o sigui prement la tecla "RCL" "4" ens dirà quantes vegades ha sortit el 4.

Això de treure un nombre d'una memòria no té cap dificultat si estan avessats a emprar calculadores.

Tal com el programa ve ajuntat, els nombres, van sortint consecutivament sense enecessitat de prémer nosaltres cap tecla i quan volguem interrompre el programa premens "R/S". A les memòries tenim igualment contact el nombre de vegades que ha sortit cada xifra.

Realment els treballs amb daus utilitzant adquest material ha resultat molt més complerts i motivadors que els mateixos treballs realitzats en cursos anteriors sense aquests mitjans.

-Simulació 2 monedes.

Hauríem volgut fer un programa per poder tirar 2 daus al mateix temps i memoritzar la suma de puntuacions però per això les màquines Tl 57 i HP 33 de què nosaltres disposàvem en aquell moment no eren suficientment potents (50 passos de programa i 8 memòries de dades), vàrem realitzar el mateix amb monedes. A la cara li vàrem donar el valor 2 i a la creu el valor 1.

Adjuntarem el programa amb el títol d'aquest paràgraf.

-Descobrir una llei.

Realitzada una experiència varies vegades al laboratori, observat el fenomen i compresa la seva mecànica caldria repetir l'experiència un nombre elevat de vegades per disposar de les dades suficients per intuir i comprovar la llei matemàtica que segueix aquest fenomen. Això no té interès ja que demana molt de temps. La calculadora mitjançant un programa adquat ens pot facilitar aquesta dada amb dos possibilitats.

I) El mestre ha programat la llei i constants. L'alumne introdueix a la màquina la variable independent i la màquina li facilita la dependent.

II) El mestre només ha programat la llei sense les constants. L'alumne introdueix parelles de dades experimentals i a partir d'aquí la màquina calcula les constants i segueix com el cas anterior.

Aquesta activitat la detallarem quan parlem de l'ordinador, perquè és amb aquest estri on realment es pot realitzar. Nosaltres ho hem provat amb els 2 tipus d'aparell.

Adjuntem alguns programes per aquest tipus de simulació.

La HP 33 E realitza incorporat com a funció matemàtica calcular la funció que passa per diversos punts quan aquesta és una recta. No cal, doncs, programar-la.

Activitats del tipus b

(1) Resolució de problemes.

El nen ja ha realitzat aquesta activitat amb els altres tipus de calculadores treballades abans; és capaç d'elaborar tota una sèrie d'ordres o passos per resoldre problemes. sèrie generalitzable a problemes del mateix tipus. Caldrà només que premi aquestes ordres en "mòdul programació" i la màquina estarà programada per aquest tipus de problemes. En la pràctica hi ha petites dificultats quant a l'entrada de dades o sigui que cal una curta exercitació.

Aquesta activitat comporta un nivell d'abstracció semblant al plantejament d'equacions i presuposa la utilització dr fòrmules.

(2) Reconstrucció de programes.

A través de la seva utilització. O sigui, veient funcionar un programa cal ser capaç de reconstruīr una sèrie d'ordres que donin el mateix resultat. El programa "simulació proporcionalitat directa" l'han produīt diversos alumnes.

Traduccions

A partir d'un programa realitzat amb un dels models de calculadora programable passar-lo a l'altre. (Per alumnes interessats).

Aquesta activitat la podríem [illegible]

[illegible]

La HP 41 C [illegible] calcular la funció que passa per [illegible] de una recta. [illegible]

Aplicacions del Nivell 3

(1) Resolució de problemes.

[illegible] tota una sèrie d'ordres o passos per resoldre problemes. [illegible]

[illegible]

A través de la nova utilització, [illegible]

Traduccions

A través d'un [illegible] calculadora programable [illegible]

Programes lògics

Elaboració de programes no estrictament numèrics en els quals intervenen també funcions lògiques:

-Jocs o "programes imitació" del què ha fet el mestre.

NOM DEL PROGRAMA: Simulació 2 monedes.

[illegible] : Ramon Camelí. MODEL : [illegible] 57

19-II-197[illegible] RESUM DE PROGRAMA

DESCRIPCIÓ DEL PROGRAMA
Acció simulada.
Tira 2 monedes a l'aire.
La cara és representada pel nombre 1.
La creu pel nombre 2.
La segona moneda es distingueix de la primera pel signe.
Suma els valors dels nombres de les 2 monedes i compta el
nombre de vegades que surt cada resultat. La suma es dis-
tingeix del valor de cada moneda per que surt amb [illegible] zeros
decimals.

COM EMPRAR-LO

PAS	POLSAR	PANTALLA	COMENTARIS
	Posar en marxa (R/S). Deixar funcionar un temps i exami-		
	nar els resultats de les memòries 2,3...		
	Canviar l'ordre nº 21 per R/S es pot fer funcionar tira-		
	da per tirada.		

TECLA	PAS	CÒDIG
RCL 0	00	33 0
x^2	01	23
INV int	02	-49
SUM 0	03	34 0
x	04	55
2	05	02
+	06	75
1	07	01
=	08	85
int	09	49
x	10	55
RCL 5	11	33 5
+/-	12	84
STO 5	13	32 5
=	14	85
Pause	15	36
$x \geq t$	16	76
GTO 1	17	51 1
INV SUM 1	18	-34 1
RCL 1	19	33 1
Fix 2	20	43 2
Pause	21	36
INV FIX	22	-43
-	23	65
2	24	02
=	25	85
$x = t$	26	66
GTO 2	27	51 2
$x < t$	28	-76
GTO 3	29	51 3
1	30	01
SUM 4	31	34 4
RST	32	71
Lbl 1	33	86 1
STO 1	34	32 1
RST	35	71
Lbl 2	36	86 2
1	37	01
SUM 3	38	34 3
RST	39	71
Lbl 3	40	86 3

1	41	01
SUM 2	42	44 2
RCL 0	43	33 0
√x	44	34
STO 0	45	32 0
RST	46	71

MEMÒRIES	
0	1'2
1	de treball
2	nº de tirades sumen 2
3	nº tirades que sumen 3
4	nº tirades que sumen 4
5	−1
6	
7	1

Els valors de les memòries 0,5 i 7 han d'ésser introduïts abans de posar en funcionament el programa.

[illegible] A: Simulació dau.

[illegible]: [illegible] MODEL: TI [illegible] 57

14-XII-1[illegible] REGISTRE DE PROGRAMA A.

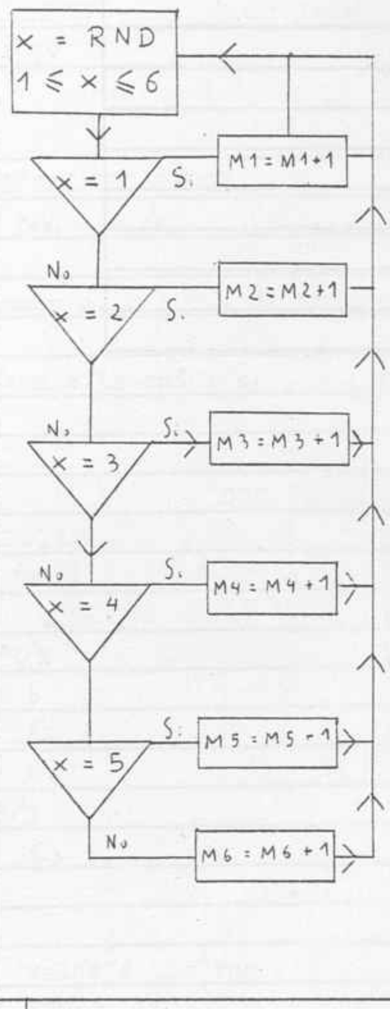
DESCRIPCIÓ DEL PROGRAMA

Simula un dau, van sortint alternativament nombres entre 1 i 6.

A cada una de les memòries del 1 al 6 es compta quantes vegades ha sortit el nombre corresponent.

Seguint l'ordre 10 per R/S funciona una tirada CADA vegada que es polsa R/S.

DIAGRAMA DE FLUIX/NOTES



TECLA	PAS	CÒDIG
RCL 0	00	33 0
x^2	01	23
INV int	02	-49
SUM 0	03	34 0
x	04	55
6	05	06
+	06	75
1	07	01
=	08	85
int	09	49
Pausse	10	36
$x < t$	11	-76
GTO 1	12	51 1
$x = t$	13	66
GTO 2	14	51 2
−	15	65
2	16	02
=	17	85
$x < t$	18	-76
GTO 3	19	51 3
$x = t$	20	66
GTO 4	21	51 4
−	22	65
2	23	02
=	24	85
$x < t$	25	-76
GTO 5	26	51 5
1	27	01
SUM 6	28	34 6
RST	29	71
Lbl 1	30	86 1
SUM 1	31	34 1
3	32	03
INV SUM 0	33	-34 0
RST	34	71
Lbl 2	35	86 2
1	36	01
SUM 2	37	34 2
RST	38	71
Lbl 3	39	86 3
SUM 3	40	34 3

MEMÒRIES

0	nº decimal	n	
1	nº de 1	Σy	
2	nº de 2	Σy^2	
3	nº de 3	Σx	
4	nº de 4	Σx^2	
5	nº de 5	Σxy	
6	nº de 6		
7	2		

[illegible]	41	71
[illegible] 4	42	[illegible]6 4
[illegible]1	43	[illegible]1
[illegible] 4	44	34 4
[illegible]	45	71
[illegible] 5	46	36 5
[illegible] 5	47	34 5
[illegible]	43	71
	49	

NOM DEL PROGRAMA: Simulació de proporcionalitat directa.

PROGRAMADOR : Ramon Jemeli. MODEL: TI PROGRAMABLE 57

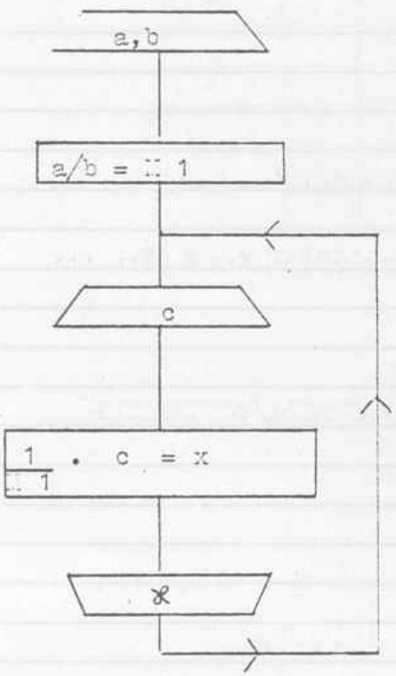
8-II-1979 REGISTRE DE PROGRAMA.

DESCRIPCIÓ DEL PROGRAMA
$a/b = c_1/x_1 = c_2/x_2$ ....
I) Donats a, b i c_1, c_2 trobar x_1, x_2, x_3, ...
II) Donats la raó i c_1, c_2, c_3 ... tobar x_1, x_2, x_3, ...

COM OPERAR-LO

PAS	POLSAR	PANTALLA/COMENTARIS
I) 1	GTO 1	
2	a	
3	R/S	
4	b	
5	R/S	
6	c_1	copiar x_1
7	R/S	
8	c_2	copiar x_2
	. . .	
II) 1	valor de la rao	
2	STO 1	
3	RST	
4	c_1	copiar x_1
5	R/S	
	. . .	

DIAGRAMA DE FLUX/NOTES



TECLA	PAS	CÒDIG
x	00	55
RCL 1	01	33 1
1/x	02	25
=	03	85
R/S	04	81
RST	05	71
Lbl 1	06	86 1
:	07	45
R/S	08	81
=	10	85
GTO 1	09	32 1
Clr	11	15
R/S	12	81
RST	13	71
	14	

MEMÒRIES			ETIQUETES	
0		n	0	
1	Raó	Σy	1	comença el prog.
2		Σy^2	2	
3		Σx	3	

Lbl 4	00	86 4
SBR 2	01	61 2
STO 7	02	32 7
Pause	03	36
SBR 2	04	61 2
Prd 7	05	39 7
R/S	06	81
x=t	07	66
GTO 1	08	51 1
2	09	02
INV Prd 2	10	-39 2
INV Prd 0	11	-39 0
Lbl 1	12	86 1
RCL 7	13	33 7
+/-	14	84
Pause	15	36
-	16	65
1	17	01
=	18	85
:	19	45
RCL 2	20	33 2
=	21	85
INV SUM 2	22	-34 2
GTO 4	23	51 4
RCL 2	24	33 2
R/S	25	81
RST	26	71
Lbl 2	27	86 2
RCL 2	28	33 0
INV int.	29	-49
INV y^x	30	-35
3	31	03
x	32	55
RCL 2	33	33 2
$\sqrt{x}$	34	24
SUM0	35	34 0
=	36	85
int.	37	49
INV SBR	38	-61

NOM DEL PROGRAMA: M. C. M.

PROGRAMADOR : Ramon Cemeli. MODEL: TI PROGRAMABLE 57

25-II-1979 REGISTRE DE PROGRAMA

DESCRIPCIÓ DE PROGRAMA
Troba el m. c. m. de dos nombres de a i b.

COM USAR-LO		
PAS	POLSAR	PANTALLA/COMENTARIS
1	RST	
2	a	
3	R/S	
4	b	
5	R/S	copiar m. c. m. a i b
6	a_1	
7	R/S	
8	b_1	
9	R/S	copiar m. c. m. a_1 i b_1
	. . .	
	S´aconsella entrar primer el nombre petit.	

R/S	03	31
STO 2	04	32 2
Lbl 1	05	35 1
RCL 2	06	33 2
SUM 3	07	34 3
RCL 3	08	33 3
:	09	45
RCL 1	10	33 1
=	11	85
STO 7	12	32 7
int	13	49
$x \neq t$	14	-66
GTO 1	15	51 1
RCL 3	16	33 3
R/S	17	31
[illegible]	18	71
	19	
	20	
	21	

NOM DEL PROGRAMA: [illegible]

PROGRAMADOR : Ramon Comellà. MODEL: TI PROGRAMABLE 57

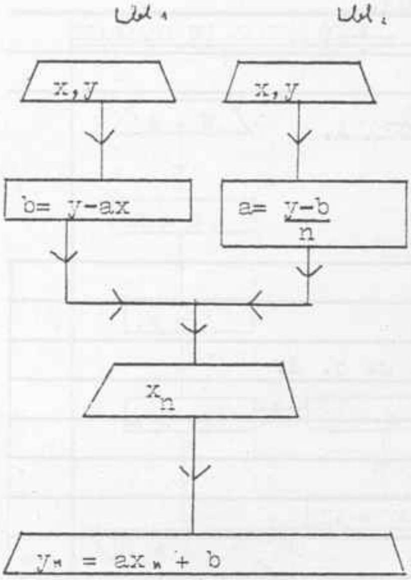
11-II-1979

REGISTRE DE PROGRAMA.

DESCRIPCIÓ DEL PROGRAMA
$y = ax + b$
I) Donada una parella (x, Y), a, x_1, x_2, ... trobar y_1, y_2 ...
II) Donada una parella (x, y), b, x_1, x_2 ... trobar y_1, y_2 ...
III) Donats a, b, x_1, x_2, x_3 ... trobar y_1, y_2, y_3 ...
COM EMPRAR-LO

PAS	POLSAR	PANTALLA/COMENTARIS
I	a; STO 1; GTO 1; x; R/S;	y; R/S; x_1 ; R/S; (copiar y_1);
	x_2 ; R/S; (copiar y_2)....	
II	b; STO 2; GTO 2; x; R/S; y; R/S; x_1 ; R/S; ...	
III	a; STO1; b; STO2	
	RST; x_1 ; R/S; . . .	

DIAGRAMA DE FLUX/NOTES



TECLA	PAS	CODIG
x	00	55
RCL 1	01	33 1
+	02	75
RCL 2	03	33 2
=	04	85
R/S	05	81
RST	06	71
Lbl 1	07	86 1
x	08	55
RCL 1	09	33 1
=	10	85
STO 3	11	32 3
R/S	12	81
−	13	65
RCL 3	14	33 3
=	15	85
STO 2	16	32 2
RST	17	71
Lbl 2	18	86 2
STO 3	19	32 3
(	20	43
R/S	21	81
−	22	65
RCL 2	23	33 2
)	24	44
:	25	45
RCL 3	26	33 3
=	27	85
STO 1	28	32 1
Clr	29	15
RST	30	71
	31	
	32	
	33	

MEMÒRIES			ETIQUETES
0		n	0
1	a	Σ_y	1 Prog. 1
2	b	$\Sigma_{y'}$	2 Prog. 2
3		Σ_x	3
4			4

NOM DEL PROGRAMA: MÀXIM COMÚ DIVISOR.

PROGRAMADOR: Lluis Damía Sales (14 anys).

MODEL: H. P. PROGRAMABLE 33 E

6-5-1979 REGISTRE DE PROGRAMA.

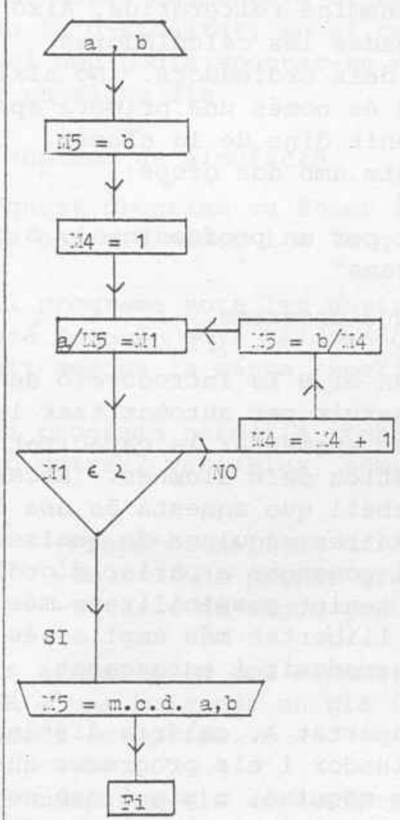
DESCRIPCIÓ DEL PROGRAMA

Donats dos nombres trobar el seu m. c. d.

COM EMPRAR-LO

PAS	POLSAR	PANTALLA/COMENTARIS
	RST, a, R/S, b, R/S, (copiar m. c. d.), a., R/S,	
	b., R/S, (copiar m. c. d.)...	
	S'aconsella entrar primer el nombre més petit	

DIAGRAMA DE FLUIX/NOTES



TECLA	PAS	CÒDIG
	00	
STO 6	01	23 6
R/S	02	74
STO 3	03	23 3
RCL 3	04	24 3
STO 5	05	23 5
1	06	1
STO 4	07	23 4
RCL 6	08	24 6
RCL 5	09	24 5
÷	10	71
STO 1	11	23 1
Int	12	15 32
RCL 1	13	24 1
x=y	14	14 71
GTO 23	15	13 23
1	16	1
STO+4	17	23 51 4
RCL 3	18	24 3
RCL 4	19	24 4
÷	20	71
STO 5	21	23 5
GTO 08	22	13 08
RCL 5	23	24 5
R/S	24	74
GTO 01	25	13 01
	26	

MEMÒRIES

0		n
1	de treball	Σy
2		Σy^2
3	b	Σx
4	de treball	Σx^2
5	de treball	Σxy
6	a	

3.4. MICROORDINADORS

Quan expliquem les activitats desenvolupades a la classe amb l'ordinador podem semblar unamica reiteratius. Això és perquè hem utilitzat moltes vegades les calculadores programables com a substitutes dels ordinadors. No així l'ordinador del què creiem això és només una primera aproximació de les utilits que pot tenir dins de la classe. Dividim aquí també les activitats amb dos grups:

A) El programa és preparat per un professional, o bé el mestre prepara el programa"

B) És el propi alumne el que programa.

Tant en l'apartat A, com en el B la introducció de la màquina a la classe no té que servir per automatitzar la classe sino tot el contrari, per augmentar la capacitat creativa i la imaginació matemàtica dels alumnes. Encara que ja es desprèn de tot el treball que aquesta és una de les nostres preocupacions a l'entrar màquines de qualsevol tipus a classe, ho remarquem al començar a parlar d'ordinadors perquè aquesta eina tot i tenint possibilitats més diversesm i per tant donar una llibertat més àmplia, és més perillós voler deixar tot més arrodonit i encarcarat.

Entre els programes de l'apartat A, caldria distinguir l'exenyament programat per ordinador i els programes que permeten un cert diàleg alumnes-màquina, o sigui que no estan exactament predeterminats els exercicis i els passos que es seguiran; aquí entrarien els programes de simulació.

Donarem un exemple de cada un d'ells

Programa de càlcul:

Al posar en marxa el programa, sortia a pantalla la pregunta: Vols fer càlcul? Si la resposta era afirmativa, l'ordinador seguia preguntant: En quin conjunt numèric? N,Z, D.Q. Quina operació?. Suma, resta, multiplicació, divisió? Quina fitxa? Una vegada contestades aquestes preguntes sortia el nombre de la fitxa. Si les respostes eren correctes augmentava el nombre de la fitxa i en conseqüència la d-ficultat, en el cas contrari disminuïa; al final el nen podia apuntar-se el nombre de la fitxa per seguir un altre dia.

Programa de simulació.

Aquest programa va ésser el centre de la nostra experiència amb ordinador i a la que vàrem dedicar més temps.

El programa sota les nostres orientacions fou elaborat per José Antonio Noya Maldonado, programador de Tradetek i corregit segons la marxa experimental aconsellada.

El programa permetia treballar experimentalment la relació entre 2 variables, sempre que aquesta fos un d'aquests casos:

- -Proporcionalitat directa o inversa.
- -Equació de primer grau
- -Equació de segon grau

Es treballaven amb alumnes de 8è les lleis de HOKE, la caiguda d'una bola per un pla inclinat, controlant temps i distàncies en òptica.

Es marcaren els següents passos.

Repàs dels conceptes d'aplicació i funció.

Adquisició o repàs dels conceptes de variable independent i variable dependent.

Resolució de problemes de proporcionalitat.

Donada una funció, construcció de taules de valors.

Presentació i explicació de l'apunt "Programa simulació amb microordinador que adjuntem

Paral.lelament a la classe de ciències s'iniciaren estudis sobre electricitat i efectes de les forces de OHM i HORSE.

En el moment oportú, apareix l'ordinador a classe els nens que han fet l'experiència vàries vegades, entenen llur significat, però desconeixen encara la llei o funció matemàtica.

Les 3 o 4 parcelles de dades que han obtingut experimentalment, les entren a l'ordinador, el qual, amb aquestes dades calcula les constants, el tipus de funció ja l'havia introduït el mestre previament. A partir d'aquí, l'ordinador simula la continuació de l'experiència, a cada força que el nen entra a l'ordinador (en el cas de la llei de HORSE) l'ordinador dibuixa a la pantalla una molla més o menys allargada segons el cas i dóna l'allargament de la molla. (En el cas de les altres experiències també surt el dibuix oportú).

Quan els alumnes creuen tenir suficients valors, la màquina els dóna 4 forces de les que ell tindrà que calcular els allargaments. Els nens deixen l'ordinador a un altre equip, i intenten inferir la llei. Una vegada creuen tenir elaborada la llei, calculen amb ella els allargaments i tornen a l'ordinador el qual recorda les constants i els valors que els hi ha donat. Els nene entren els allargaments i si aquests són incorrectes la màquina torna a iniciar el procés de simulació. Si era correcte a la màquina pregunta la fòrmula i la impressora, imprimeix un full pel mestre amb totes les dades del treball realitzat per aquest equip. Adjuntem també una còpia d'un d'aquests fulls.

En quant a activitats del tipus B, de forma lliure alguns nens han realitzat programes. Concretament un alumne ya realitzat un programa de càlcul molt semblant a l'enumerat més amunt.

A manera d'avaluació direm que comprensió de la propor cionalitat i les equacions de primer grau a 7è i de les equacions de segon grau a 8è ha estat considerablement supe rior a la de cursos anteriors, i els exàmens finals quelcom més reeixits en la part algebraica. Això no és cap data científica, però a nosaltres ens ha semblat indicativa.

No obstant el que nosaltres valorem de l'entrada d'aquestes eines en la classe no és una adquisició major o menor d'un programa, que sens dubte es poden obtenir amb moltes i distintes metodologies tant o més bones. Valorem positivament:

- -El treball amb una matemàtica i uns instruments presents en el món del treball.
- -La forta motivació.
- -La vivència per alguns alumnes de la matemàtica més com un hobby que com un àrea.

Per altres que les matemàtiques són unes de les matèries que agraden a altres persones com ho pot ser per ell l'esport la música, la pretecnologia, etc.., aquesta vivència ha estat indiscutiblement present en la nostra escola aquest curs.

Al departament de matemàtiques hi havia gent a totes hores de 8 del mati a 10 del vespre si els mestres ho permetien, i molts nens feien les seves "investigacions" a casa seva.

-La màquina és un instrument independent del mestre i de l'alumne, en front a ell, mestre i alumne descubreixen constantment noves possibilitats. El mestre no ho sap tot; això crea una dinàmica molt d'acord amb l'esperit de la nova llei d'educació però poques vegades aconseguida.

DATOS PERSONALES: 8 Bl. 14. 26. 27-4

CONSTANTES : A= 18,6 B= 0,060

FORM. del ALUMNO: y= x.0,06 + 18,6

MENSAJE : HEMOS RESTADO LA LONGITUD NORMAL DEL MUELLE DE LA LONGITUD QUE SE OBTIENE CON UNA FUERZA DE 50 P. PARA SABER LA RAZON QUE ES 0,006 LO MULTIPLICAMOS POR X.

PUNTUACIÓN : 4

X = 50	Y = 21,6
X = 0	Y = 18,6
X = 100	Y = 24,6
X = 150	Y = 30,6
X = 200	Y = 30,6
X = 200	Y = 20,22
X = 27	Y = 22,38
X = 63	Y = 17,1
X = -25	Y = 20,7
X = 35	Y = 18,60006
X = 1E-03	Y = 17,82
X = 13	Y = 18,611986
X = 321	Y = 7,73999998
X = -181	Y = 7,73999998
X = -181	

X = 43,1519392 Y = 21,3091164 CORRECTO

X = 457,099572 Y = 46,0259743 CORRECTO
X = 79,9538686 Y = 23,3972321 CORRECTO
X = 38,0545826 Y = 20,883275 CORRECTO

4.- ANOTACIONS:

4.1 Notes sobre el concepte d'algorisme en didàctica

S'enten per algorisme un conjunt ordenat d'accions, realitzades per un home o per una màquina, que porten a un resultat en concret; que, repetint-lo tantes vegades com es vulgui, el resultat sigui idèntic.

Per exemple: tot el conjunt ordenat d'accions que hom realitza en engegar un cotxe constitueixen un algorisme. Se suposa que el cotexe engegarà sempre, és a dir, és un cotxe ideal.

És força popular, per exemple l'algorisme d'Euclides per a trobar el m.c.d. de dos nombres.

Pot considerar-se, sense caure en un reduccionisme, com un algorisme, el conjunt d'accions que un nen ha de realitzar per a resoldre un problema.

Lluny de les aportacions de la cibernètica la didàctica és parcialment la noció d'algorisme d'aprenentatge. Si es considera a la cibernètica com "una ciencia interdisciplinaria de l'acció finalitzada " és a dir que la cibernètica aplicada a la didàctica tendirà a reconstruir les accions d'un infant en "aprendre" un concepte.

L'ensenyament programat és, potser, amb totes les crítiques que té, una de les aportacions més importants de la cibernetica a la didàctica, llurs algorismes seran doncs, l'objectiu primordial de part substancial dels programes escolars.

Ens seria necessari poder descriure formalment el concep te d'algorisme.

Ara bé aquesta definició serà diferent si el camp al qual s'aplica és matemàtic, didàctic, informàtic, etc,

En matemàtica i en informàtica el concepte d'algorisme està en l'actualitat suficientment definit com per poder aplicar-lo.

No sempre s'esdevé el mateix en didàctica, perquè el llenguatge emprat no sap distingir entre llenguatge objecte i metallenguatge; hihan recents intents en el camp de la didàctica com els d'en Frank; Landa , però no disposa d'una teoria formal acceptada per tots els interessats en l'ensenyament.

Tant el matemàtic com l'informàtic utilitzen en la definició del concepte d'algorisme una màquina. La del matemàtic són anomenades màquines de Turing que són artefactes ideals dels quals no interessa el seu funcionament intern, ni la seva naturalesa sinó tan sols el que fan. La màquina de l'informàtic és un computador electrònic de la que se sap llur funcionament, la seva naturalesa i les seves produccions.

El mètode analògic de la cibernètica es basa en establir un isomorfisme entre les dues màquines. Existeixen definicions de les produccions de les màquines, la qual cosa permet definir un isomorfisme.

Aquest mateix mètode s'ha aplicat a l'estudi del sistema nerviós d'un èsser vivent.

Actualment es treballa en aquesta línia de recerca que consisteix a abordar el funcionament del S.N. com isomorf al d'un gran i complex ordinador. Així es compara una neura amb un microprocessador. Salvant les distàncies entre les diferents naturaleses de la neurona i del microprocessador, l'isomorfisme s'estableix entre la forma de l'informació.

D'aquí a intentar explicar l'aprenentatge com a un sistema d'informació amb memòria programada, memòria d'arxiu i un sistema operatiu, hi ha un pas metodològicament molt conflictiu. És en aquesta encreuada a on es troben alguns corrents psicològics

Així, doncs, la "màquina" del didàctic no és la de l'informàtic ni la del matemàtic, però té, encara que de forma intuïtiva, semblances o analogies evidents.

El problema rau en definir el que s'entenia per "aprenentatge" intel.ligent.

No pretenem tampoc donar una visió general de les diverses teories psicològiques; i cibernètiques de l'aprenentatge escolar.

A l'escola no sols "s'aprenen" conceptes o continguts; s'aprenen metodologies de recerca (no enjudiciarem cap d'aquestes, doncs, no és el nostre objectiu).

Ara bé, seguint a en Landa, distingim entre situacions algorítmiques i situacions heumòtiques i ens referim a l'aprenentatge en situacions algorítmiques.

Aleshores, l'aprenentatge escolar d'aquest tipus consistiría, des del punt de vista de discent, a la sèrie ordenada d'accions que realitza sobre uns objectes per tal de donar-los una organització estable i equilibrada en funció d'una necessitat, és a dir d'una motivació.

El docent regula aquesta organització per mitjà dels recursos didàctics de que disposa.

Un recurs didàctic pot ser entés de moltes maneres però malgrat tot, fixarem un sentit ben precís que no esgota les possibilitats de qualsevol cosa de convertir-se en un recurs didàctic.

Prendrem el sentit definit per en Frank.

Aquest sentit és el que ens proporcionen les màquines d'ensenyar. És el recurs didàctic més formalitzat, segons la informació que tenim, dels coneguts.

Frank, l'anomena "Algorisme d'aprenentatge", aquest algorisme és el que regula l'aprenentatge d'un nen davant d'una màquina que l'ensenya.

"Un algorisme d'aprenentatge és un triplet:"

$$1 = (\alpha, \beta, \gamma,)$$

A on: α és un conjunt de sèries, d'etapes d'aprenentatge és a dir un conjunt de sèries de signes tals, que el sistema ensenyament les prepara entre dues reaccions del sistema ensenyat.

β és el conjunt de reaccions possibles del sistema ensenyat que ha de distingir el sistema ensenyant (el docent).

$$\gamma : F\ (\beta) \longrightarrow F\ (\alpha)$$

Una aplicació designada com a Macroestructura d'A de totes les series finites de reaccions de l'alumne en la sèrie de les etapes d'aprenentatge corresponents. El conjunt imatge $\gamma(F(\beta) = M$ s'en diu el conjunt de camins d'aprenentatge corresponents a 1 de tal manera que representa una aplicació exhaustiva, representable per una relació del conjunt de tots els comportaments possibles de l'ensenyat sobre el conjunt dels canvis previstos.

És evident que una petita computadora pot "regular" l'aprenentatge de part dels programes escolars. La computadora com a sistema de control és molt cara en l'actualitat i només s'utilitza en alguns centres experimentals i a vegades és adquirida per centres privats econòmicament potents.

S'ha de distingir, doncs, entre un algorisme d'aprenentatge, tal com el definit, i un algorisme que és objecte d'aprenentatge per part d'un infant.

També hem de distingir la sèrie ordenada d'accions que fa l'infant en l'aprenentatge. A posteriori i amb un cert marge d'error pot elaborar-se a priori, partint però d'una mínima experiència, pot definir-se un algorisme heurístic que serà la pròpia conducta del discent. En efecte, les accions ordenades del nen seran tempteigs i una sèrie seguida de temteigs poden ésser descrits de forma algorítmica.

En resum tindrem que existiran tres classes d'algorismes en el procés d'ensenyament.

"El docent utilitza un algorisme d'aprenentatge que regula l'algorisme heurístic que fa servir el nen quan aprèn un algorisme objecte"

Podem arribar a tenir així una concepció sobre la didàctica de la matemàtica amb forca possibilitats d'èsser formalitzable, no pretenem abarcar tots els aspectes que tracta de manera poc sistemàtica la didàctica de la matemàtica, però almenys ens sembla que aquest aspecte pot ser formal si tenim en compte que:

1) La teoria d'autòmates, com els tractats per Lentin i Grossepen en l'obra "Grammaires Formelles" -que de fet és un dels corrents didàctics alemanys-Frank 1960- que pot proporcionar-nos un llenguatge formal per a informar els algorismes d'aprenentatge.

2) Les màquines de Turing, ens podem formalitzar el concepte d'algorisme-objecte. En efecte, la hipòtesi bàsica sobre la qual descansa la teoria d'algorismes diu que:

"Tots els algorismes poden donar-se en la forma motius funcionals i executar-se per la màquina de Turing corresponent".

No ens estendrem sobre el concepte de màquina de Turing hi ha una amplia bibliografia sobre el tema-, però sí direm que Turing (1930) va ser el primer que va donar una definició formal del concepte d'algorisme dins de la lògica matemàtica.

És un camp matemàtic del qual ara no podem fer una introducció.

3) Finalment l'Heurística ha desenvolupat una metodologia clara i que empra el llenguatge de la matemàtica i de la informàtica, amb el qual es poden definir sense ambiguïtats les conductes infantils a les quals ens referim; és a dir: els algorismes heurístics.

4.2. Notes sobre una finalitat de les calculadores programables a l'escola.

Ja hem vist a l'anàlisi dels sistemes didàctics de càlcul normal, com es podia elaborar un programa molt simple, però amb un llenguatge definit, per a sumar, restar, multiplicar, dividir, etc., i quina era la seva aplicació als infants de 1ª etapa d'E.G.B. i eventualment a 2ª etapa (recuperació).

Aquest programa seria un algorisme objecte.

El nen adquireix o aprèn el funcionament de la màquina mercès al seu tempteig i a les indicacions del mestre, és a dir aplica un algorisme heurístic que és regulat per l'algorisme d'aprenentatge que utilitza, encara que sigui de forma intuïtiva, el mestre.

Fixem-nos en un punt:

En la calculadora Minerva, l'algorisme -objecte pot ser concebut, i així s'esdevé, com a "programa" per a una màquina.

És evident que l'algorisme heurístic ha de transformar-se en algorisme-objecte, però aquesta transformació no la podem abordar encara.

Vist així la cosa podem entreveure quina serà aquesta finalitat. En efecte aprendre significaria, capdavall, poder parlar, utilitzant un llenguatge definit, sobre un algorisme objecte.

Parlar, en aquest sentit, voldrà dir programar.

Un cop un nen ha après a resoldre una classe determinada de problemes matemàtics, ha de poder expressar aquesta solució i una bona forma d'expressió matemàtica és la forma de programar les calculadores electròniques programables.

Es evident que s'ha d'aprendre el llenguatge dela màquina però aquest resulta senzill, si el nen comprèn el sentit matemàtic de cada tecla que la memòria programa.

Cadascuna de les graduacions de les calculadores programables les hem realitzat segons l'aprenentatge d'aquest llenguatge.

Barcelona, Octubre de 1.979

5. ANEX: ANÀLISI FORMAL DE L'APRENENTATGE DEL SISTEMA DE NUMERACIÓ

ANALISI FORMAL DE L'APRENENTATGE DEL SISTEMA DE NUMERACIÓ

INTRODUCCIO

Aprendre a comptar no és una empresa fàcil pels menuts. Es alarmant el percentatge, que intuïm força elevat, d'estudiants de la segona etapa de l'E.G.B. que presenten dificultats en la comprensió de, sobretot, l'algorisme de la divisió. Les arrels d'aquesta deficiència rauen, sens dubte, en l'aprenentatge del sistema de Numeració. Els infants aprenen ràpidament la cantarella"ú, dos, tres... disset,... vint-i-quatre,... etc", però la pràctica escolar mostra que sovint l'enteniment del determinat, per exemple, "cent-vint-i-cinc" és poc analític. Això implicarà fortes conseqüències en l'aprenentatge dels algorismes de càlcul derivats del Sistema de Numeració.

En aquest primer article exposssarem una sèrie de reflexions entorn del concepte de Nombre Natural, des de la perspectiva de la seva Didàctica. Aquesta òptica és força diferent, atès el seu objecte, de la Matemàtica, però evidentment, no pot bandejar-la.

Els Naturals estan integrats en el llenguatge i constitueixen un subsistema d'aquest. Són signes "lingüístics" que expressen l'acció simbòlica o factual de la intel.ligència.

La Didàctica dels Naturals ha de definir els conceptes que pretén ensenyar. Resulta que a mida que aquests són més elementals, la matemàtica els aborda amb un mètode axiomàtic; és clar que aquest no pot ser el de la didàctica.

En primer lloc reflexionarem al voltant dels sistemes de numeració. Seguidament situarem les aportacions de J. Piaget a la psicologia (o psico-pedagogia, com més s'estimi) de l"aprenentatge escolar del Nombre.

En definitiva ens preguntarem:

Qué és un Sistema de Numeració?

Què vol dir aprendre a comptar?

Finalment ens agradaria constatar que aquest no és un treball acabat.

1. Què és un sistema de numeració?

Sembla clar que un sistema de numeració implica dues activitats simultàniament: una organització que imposem als objectes, i l'elaboració d'un codi que permeti expressar, i per tant comunicar, cadascuna de les diferents quantitats sense possibilitat d'ambigüitat.

1.1. El mètode d'organització

Intentarem donar una expressió precisa del método amb què organitzem els objectes amb la finalitat de comptar-los.

Sigui N un conjunt finit i P (N) el conjunt de les seves parts.

Escollim un $B \in P(N)$ tal com:

a) $\emptyset \neq B$, i $B \neq N$.

b) Per tot $x \in N$, $B \neq x$

La condició b és obvia, no pot existir un sistema de numeració de base 1 en el mètode de les Agrupacions. Considerem a continuació els següents subconjunts:

$-P_1 \subseteq P(N)$, definit: $P_1 = \{X \in P(N) / X$ és equipotent a $B.\}$

$-P'_1 \subseteq P_1$, que satisfà:

1.-Per a tot X, Y de P'_1, $X \cap Y = \emptyset$, ó, $X = Y$

2.- Si $X \in P_1 \setminus P'_1$ aleshores existeix $Y \in P'_1$ tal que: $X \cap Y \neq \emptyset$

De 1 i 2 és desprèn que P'_1 no és únic. És a dir, quan agrupem els objectes per a llur comptabilitat és totalment arbitrària la inclusió d'un objecte en aquesta o aquesta altre agrupació. Cadascun dels objectes és equivalent a qualsevol altre en tant que són una unitat. En aquesta mena de partició observem que:

1) Si $\bigcup_{X \in P'_1} X \neq N$, aleshores existeix un subconjunt d'N, E_o, definit de la següent manera:

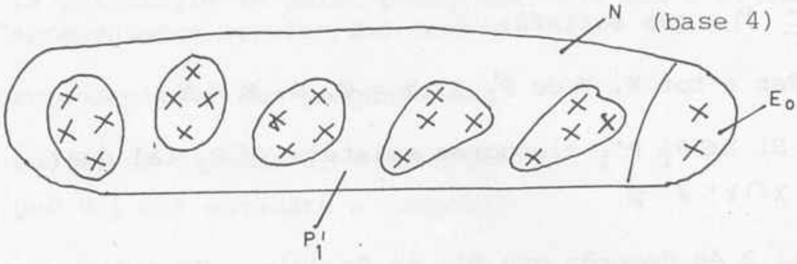
$$E_o = C_N \left(\bigcup_{X \in P'_1} X\right) = N / \bigcup_{X \in P'_1} X$$

Si $\bigcup_{X \in P'_1} X = N$, aleshores $E_o = \phi$ A més $N = E_o \cup \left[\bigcup_{X \in P'_1} X\right]$

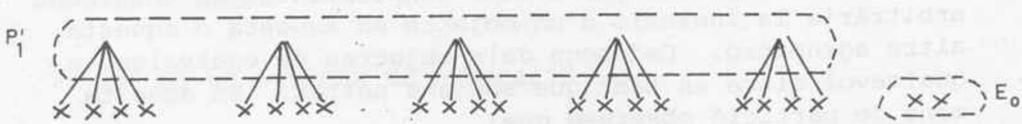
11) E_o no pot ser equipotent a B, ni contenir cap subconjunt que ho sigui.

D'aquesta manera hem arribat a la construcció de les unitats de primer ordre -les desenes en el nostre sistema-. A B se l'anomena "representant base del S. de N.

L'expressió gràfica del que hem fet fins ara pot ser:

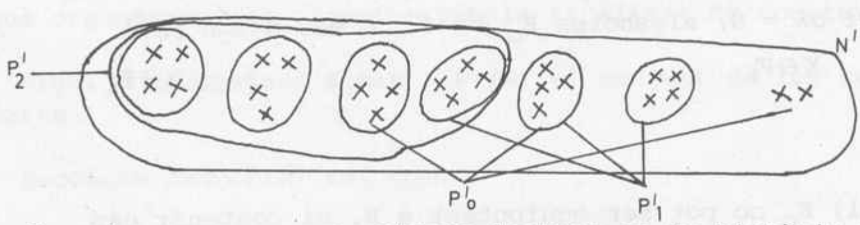


o bé,



Si sobre P'_1 considerant $P(P'_1)$, poden definir P_2 i P'_2 seguint el mateix procediment i obtenint d'aquesta forma E_1. La condició b inicial fa que el nombre dels P_1 i P_1 sigui finit.

D'aquesta manera hem arribat a dotar a N d'una determinada organització. Gràficament:



Sorprèn veure en una primera lectura de la història dels S. de N. la coincidència de moltes civilitzacions en organitzar les quantitats d'aquesta manera. Les diferències rauen en els codis que elaboraren.

1.2. Els codis numèrics

El concepte de codi és molt ampli i són moltes les ciències que l'han integrat. Adoptarem la següent definició:

"Un Codi és una funció que associa un conjunt de "trets semàntics", un conjunt de combinacions específiques de símbols".

Cal ser prudents amb l'ús del llenguatge matemàtic quan s'aplica a objectes d'altres ciències de caràcter empíric. En concret el concepte de codi està força estudiat en la Teoria de la Informació, en Lingüística, en Semiótica, etc. Aquest concepte té, sens dubte, un important paper per a jugar en la Didàctica.

Definirem, i amb això guanyarem precisió, els "trets semàntics" amb termes matemàtics. Aquests són coordinacions psicològiques amb les quals podem abstreure característiques o propietats dels objectes. Dit d'una altra manera són les "significacions" amb què construïm els objectes. Concretem-ho.

Hom ha actuat sistemàticament sobre una col.lecció d'objectes, l'ha transformada i es disposa a elaborar un sistema de significacions a partir del producte de la seva acció. No totes les civilitzacions han construït el mateix sistema de significacions, malgrat que actuarem, majoritàriament, de la mateixa forma. Fem un petit parèntesi i pensem en els nens de 1er. i 2on d'E.G.B. En el suposat cas que manipulin qualsevol material didàctic que pugui agrupar-se -Blocs encaixables, segrons, fitxes etc.- ¿Quina significació li han de donar al producte de les seves accions per a aconseguir una comprensió intel.ligent dels Nombres?

El primer tret (α) consistirà a significar el propi mètode, la propia acció.

El quart ϵ, distingirà el que podríem anomenar com a "equipo multiplicativa" -potenciació- entre els elements d'un ordre determinat i els d'una unitat d'ordre superior.

Resumint:

α : selecciona el mètode de les agrupacions.

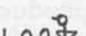
β : distingeix el caràcter additiu de les diverses unitats d'ordre sobrants.

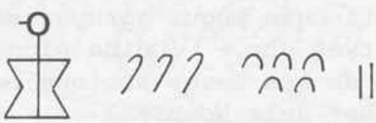
γ : $C(E_1)$ $C(B)$

ϵ :Equipotència multiplicativa.

Un codi numèric no té perquè considerar tots aquests trets semàntics, i el que és més greu: la interpretació de la "percepció" que un nen té de 125 no té perquè considerar aquests trets si no ha tingut un aprenentatge intel.ligent del sistema de numeració.

Però prenem un exemple de la història: el codi del jeroglific egipci. Aquests agrupaven els objectes de la mateixa forma que nosaltres, la qual cosa és important per a retenir-la, però el codi el construïen només amb els trets α i β.

Empraven els símbols:  etc. La funció del codi podría esboçar-se aixi: "s'associa un per a cada unitat d'ordre zero sobrant; un per a cada unitat d'ordre sobrat de primer ordre i així succesivament". 1352 s'escriuria:



L'ordre dels símbols és totalment accidental, qualsevol permutació d'aquests indica la mateixa quantitat. Malgrat això en els papirus empraven l'ordre exposat anteriorment.

El codi expressa només les composicions additives: no é estrany que els algorismes del càlcul aritmétic dels egipcis li donessin a l'addició un paper preponderant.

Veiem seguidament, i per tal de comparar, el "rol" que juguen aquests trets. Podem definir-lo a traves d'S:

$$S= \{(P'_{o}\ \ P'_{1}), \ldots .(P'_{i} + P_{i+1}), \ldots (P_{L} + P_{L+1})\}$$

en,

I.- $P'_{o} = N$

II.- $P'X_{1+1} = \phi$

III.- Si $x \; EP'_{1}$', aleshores:

1.- $X \in P(P'_{i-1})$

2.- X és equipotent a B.

3.- Per a tot X,Y de P_{i}, $X \cap Y = \phi$ ó, X=Y

IV.- No existeix cap subconjunt de P'_{L} equipotent a B.

Ens distingeix cadascun dels elements de cada agrupació. Ens distingirà totes les unitats, desenes, centenes etc. que hi ha en una quantitat. Per exemple, en 125 hi ha 1 centena, 12 desenes i 125 unitats.

El segon tret (β) distingirà les unitats d'un ordre determinat que no han quedat agrupades en l'ordre immediatament superior.

Així en 125 hi ha una centena que no ha quedat agrupada en els milers ($P_{L+1}=\emptyset$). "desenes que no han quedat agrupades en qualsevol de les centenes possibles, i així succesivament. Nosaltres "comptem" amb les unitats d'ordre que "sobren".

així a cada parella d'S podem asociar-li un conjunt E_1, definit:

$$E_i\, E_1 = C_{Pi}\ (UX) \atop \quad x\ \ P'_{i+1}$$

El tret diferencia de S el conjunt S':

$$S' = \{E_o, \ldots.\ E_i, \ldots..,\ E_L\}$$

Un tercer tret (γ) significarà que cap element de S' té un subconjunt equipotent a B. És a dir, no poden "sobrar" tants elements com tingui la base.

En el nostre codi, la comprensió intel.lgent de qualsevol no ve determinada pel "teorema fonamental de la numeració".

$$N = a.x^n + b.x^{n-1} \ldots.. + c.x^1 + d.x^o$$

$$\text{on } a,b,\ldots.,c,d < x$$

Els trets que donen suport al correcte enteniment d'un N qualsevol són: α i β que queden expressats per cadascun dels termes del polinomi; queda reflectit per la condició al teorema, i queda dit en les succesives potències d'x.

Queda clar, també, que la diferència entre la combinatòria no hi juga puix que hom necessita inventar nous símbols cada vegada que es sobrepassa un ordre.

Aquestes són, en termes generals, les diferències entre els sistemes posicionals i els que podríem anomenar "additius"

1.3. L'Algorisme del Sistema de Numeració

El llenguatge té incorporat l'algorisme per a comptar La cantarella a la qual aludíem en el començament es apresa ràpidament pels nens. Però cal distingir quan aquesta recitació és intel.ligent. Això té un interès, com veurem en càlcul elemental.

Quan comptem una col.lecció d'objectes sense cap organització significativa anem prenent indiferenment els elements i els associem a cadascun dels elements ordenats de la cantarella (el nom de cadascun dels Naturals).

És obvi que aquest procediment no és el mateix que l'esmentat anteriormen, és una aplicació bijectiva entre els elements de la col.lecció i el conjunt ordenat dels noms de cada nombre Natural. Aquest procediment podria fer-se amb un altre ordre i només caldría definir unes altres regles de formació dels noms. En esència: aquest és l'algorisme de la numeració, basat en la propietat axiomatitzada per en Peano) que cada nombre té un següent, o que sempre es pot afegir un objecte a qualsevol col.lecció.

Hom pot comptar, també, amb l'algorisme resultant del métode de les agrupacions. La didàctica "compta" d'aquesta altra forma, i el codi lingüistic deriva del métode esmentat, sols unes quantes excepcions confirmen la regla (setze, onze, el quatre-vingt del francès, etc...).

Sembla plausible, doncs, un enfoc de la didàctica dels nombres que aprofiti les troballes de la Semiótica i de la Lingüística.

2.- Què vol dir aprendre a comptar?

La segona resposta interessa al mestre i al psicòleg interessat en aquest tema. De tots són conegudes les aportacions de la Piscologia Genètica sobre la concepció infantil del Nombre.

No sempre se situen aquestes aportacions de forma adient en el context escolar, perquè no sempre coincideixen els interessos del mestre i del psicòleg.

Les dues obres més importants de J. Piaget sobre aquest tema són:

"Essai de lógique operatoire" i
"La genese du nombre chez l'enfant"

En la segona d'aquestes s'aborda una excel.lent metodologia; la construcció psicològica del nombre de forma espontània -és a dir, sense mediació de l'aprenentatge escolar-. Com diu Claperade a la presentació, J. Piaget aconsegueix situar el problema en unes coordenades originals respecte als seus coetanis. Caldrà esbrinar quines son aquestes i si coincideixen amb les de la didàctica.

Els dos resultats més notoris d'aquesta obra són:

-que la construcció espontània del nombre natural implica "conservació" de l'equipotència entre conjunts independenment de la seva percepció concreta.

-que el nombre natural és el producte d'una "síntesi operàtoria entre les relacions d'equivalència i les d'ordre".

Partint d'aquests resultats, entre d'altres, Piaget intentà a l'Assaig la construcció d'un sistema lógic que expressés aquesta concepció epistemològica del nombre.

Definí una "estructura", l'Agrupament, que, en paraules seves, és un intremig entre el reticle i el grup de la matemàtica. L'obra és complexa d'entendre per dificultats de llenguatge. Crize i Apostel intentaren dona una correcta expressió lógica d'aquesta, però no aconseguiren formalitzar el caràcter dialèctic de la Lògica Operatòria. Wermuz publicà un curt article en què aconseguia formalitzar alguns punts d'aquesta lógica, en concret de la teoria del "succesor immediat". Altres autors han intentat coordinar aquesta estructura amb les concepcions dels matemàtics constructivistes però han traslladat el problema que ens ocupa a altres camps.

Aquests dos treballs d'en Piaget cal emmarcar-los també en el seu context històric. Entronquen amb la cél.lebre discussió sobre la naturalesa del nombre natural. Fregue, Rusell, Poincaré, etc. dediquen part dels seus estudias a aquesta temàtica. Piaget basà el disseny de les seves famoses "proves" en la concepció del nombre que resulta d'aquesta ja històrica discussió. Aportà l'aspecte psicològic a l'epistemologia del nombre.

Però cal preguntar-se també pels trets d'aquesta discussió i si aquests esgoten la totalitat de "l'acció de comptar".

La cardinalitat és una propietat inherent als conjunts. Hom diu que dos conjunts tenen el mateix cardinal si aquests són "coordinables". La coordinació significa l'existència d'una bijecció entre els conjunts.Piaget comprovà que fins a una certa etapa del desenvolupament infantil, aquesta bijecció depenia de la percepció, de tal manera que si es modificava algun element del camp perceptiu aquesta no es conservava.

La diferenciació entre la potència dels conjunts era possible pels subjectes de la recerca quan aquests integraven simultàniament les relacions d'ordre i de classificació.

Von Neumann va concebir una elegant manera de poder definir cadascun dels nombres naturals. Així:

-zero és el nom del cardinal del conjunt buit:

$$0: C(\emptyset)$$

-U és el nom del cardinal d'un conjunt que només conté a Zero,

$$1: C(\{0\})$$

-Dos és el nom del cardinal d'un conjunt que conté a 0 i 1.

$$2: C(\{0,1\})$$

i així succesivament.

D'aquesta menera V. Neumann respecta els principis d'una correcta definició alhora que explicita els resultats de l'esmentada discussió.

El lector haurà endevinat a hores d'ara la nostra intenció. En efecte, prenem cadascuna de les definicions anteriors i observarem que si adoptem una altra sèrie de símbols i unes regles de formació diferents els procediments restaran idèntics" Encara més, si disposem d'una memòria potent, no serien necessaries les regles de formació, bastaria en servar l'ordre en què disposem dels noms.

Això vol dir quel'expressió concreta de cada nombre, en definitiva, del codi, no interessa a la concepció matemàtica d'aquest. Les dues obres esmentades de Piaget entenen al nombre d'aquesta manera, en què el codi no intervé i per tant les expressions concretes tampoc.

Els estudis de J. Piaget ens proporcionen una correcta interpretació parcial de l'acció de comptar, puix que la cardinalitat és necessària per la construcció del codi -cadascuna de les unitats d'un ordre determinat són equipotents, amb caràcter multiplicatiu, a la base escollida.

És clar que resulta perillós basar la Psicologia de l'Aprenentatge del nombre natural només en les aportacions de la Psicologia Genètica.

Aprendre a comptar significarà l'adquisció de la cardinalitat, però codificada.

Hem dit a la introducció que aquest no era un treball acabat, ens sentirem satisfets si hem aconseguit <u>situar</u> el problema que ens ocupava.

Barcelona, setembre de 1.980

PERFUNDET OMNIA LUCE
publicacions
edicions
universitat
de barcelona