

*Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica

A. Malet
J. Paradís



QVESITI ET INVEN
TIONI DIVERSE
DE NICOLO TARTAGLIA,
DI NOVO RESTAMPATI CON VNA
GIUNTA AL SESTO LIBRO, NELLA
quale si mostra daci molti li veder una Città inespugnabile.
LA DIVISIONE ET CONTINENTI DI TUTTA
l'opera nel seguente foglio si mostra notata.
CON PRIVILEGIO



ice

Institut de Ciències de l'Educació
Universitat de Barcelona

Col·lecció Documents - 67

Grup d'Història i Didàctica
de les Matemàtiques

Antoni Malet (Barcelona, 1950)
és llicenciat en matemàtiques per
la Universitat de Barcelona des
del 1973 i catedràtic d'institut
des del 1975. Ha estat becari
del govern francès a l'IREM de
Lyon durant el curs 1976-77.
Ha preparat una traducció
de l'obra Galois que publicarà
properament la Societat
Catalana de Ciències.

Jaume Paradís (Barcelona, 1950)
és llicenciat en matemàtiques per
la Universitat de Barcelona des
del 1974. Des del 1977 és
catedràtic d'institut. Va treballar
dos anys a l'Escola d'Enginyers
de Camins de Barcelona, on
realitzà una recerca sobre
"Anàlisi espectral pel mètode
de màxima entropia", treball
que fou presentat a diversos
congressos i ha estat motiu de
la publicació d'un llibre amb
J. J. Egozcue l'any 1979.

Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica (1478-1545)

volum I

**GRUP DE HISTÒRIA I DIDÀCTICA DE LES
MATEMÀTIQUES**



Fotografia de la portada: Nicolas Tartaglia i portada d'una edició renaixentista de l'Aritmètica de Broadwardine.

Contraportada: Primera pàgina de l'aritmètica catalana del 1482, el primer llibre de Matemàtiques publicat a la Península Ibèrica.

Edicions de la Universitat de Barcelona
Avgda. de Xile, s/n.
Barcelona - 28

Dipòsit Legal: B. - 10.196 - 34
I.S.B.N.: 84 - 7528 - 127 - 3
Disseny coberta: Teresa Jordà
Imprimeix Barnagràfic, S. A.
Diagonal, 253
Barcelona - 13
Abril, 1984

Els orígens i l'ensenyament
de l'àlgebra simbòlica
(1478-1545)

volum I

Antoni Malet
Jaume Paradís



PUBLICACIONS I EDICIONS DE LA
UNIVERSITAT DE BARCELONA

1984

La recerca sobre la naturalesa no s'ha de realitzar seguint axiomes i legislacions vanes, sinó d'acord amb els fets. Perquè la nostra vida no té necessitat ni de bogeries ni de suposicions vanes, sinó d'escoltar-se tranquil·lament, i en tots els problemes s'obté la màxima serenitat si els resollem segons el mètode de les múltiples explicacions basades en els fenòmens, admetent aquelles que siguin versemblants. Però quan s'accepta una explicació i se'n refusa una altra que està d'acord amb l'experiència, aleshores és evident que hem abandonat els límits de la ciència de la naturalesa i hem caigut en la mitologia.

(Fragment de Lletra a Pitocles)

Epicur

PRESENTACIÓ

És una idea plenament acceptada que els processos de construcció i elaboració dels coneixements, tal com han esdevingut històricament, constitueixen una informació insubstituïble sobre les característiques pròpies d'aquests coneixements. La història de la ciència es veu, amb aquesta perspectiva, com una disciplina que ultrapassa els àmbits de l'erudició, i fins i tot de la cultura general, per esdevenir una eina fonamental per a reflexionar sobre què és el coneixement i com es constitueix. Aquest és el pressupòsit general que ens ha fet aparellar en aquestes pàgines, ja des del títol, la història i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica.

Darrera de l'orientació que donem al nostre ensenyament sempre hi ha una concepció, una idea feta, d'allò que estem ensenyant i de com s'arriba a aprendre. Això no deixa de ser una veritat general, per molt que no tothom s'hagi parat a reflexionar sobre la seva visió particular dels coneixements que transmet, o per molt que no tothom sigui conscient que les seves classes estan així condicionades. En aquests casos no succeeix sinó que la influència dels factors citats sobre la pràctica professional és del tot incontrolable.

La filosofia de les matemàtiques que informa, i que destil·len, gairebé tots els manuals i llibres de text avui en circulació entre nosaltres, interpreta aquesta ciència com una cosa immutable, en què no cal sinó seguir el fret fil del raonament deductiu que va col·locant peça a peça, totxo a totxo, els diferents resultats matemàtics. En surten unes matemàtiques que semblen tancades, que no resolen altres problemes que els que elles mateixes creen, d'una manera que no pot semblar sinó artificial. En alguns períodes de la història de les matemàtiques ha predominat l'esperit organitzador, sistemàtic i rigorista, n'han estat els fruits més notables els Elements d'Euclides i les modernes síntesis formalistes de N. Bourbaki i els seus epígons. En d'altres períodes ha predominat l'esperit innovador, creatiu i heurístic, menys preocupat pel rigor que per aprofitar el potencial de nous conceptes i mètodes, és el cas del desenvolupament del càlcul infinitesimal durant el segle XVIII. La filosofia avui més estesa, com dèiem abans, es fonamenta en el desconeixement o la subvaloració dels mètodes propis d'aquests períodes innovadors i poc sistemàtics. Així queda potenciada i reforçada una visió de les matemàtiques essencialment *lineal*: les matemàtiques són la cadena de resultats obtinguts a partir d'uns axiomes segons una seqüència d'inferències lògiques.

Una de les finalitats d'aquest treball és fer veure, estudiant un període històric concret, fins a quin punt es parcial aquesta concepció. Sovint hi ha hagut múltiples i molt

estrany camins per a elaborar una teoria matemàtica; hi ha hagut dificultats que han quedat ocultes quan els resultats s'estructuren axiomàticament; hi ha hagut diferents metodologies que s'han enfrontat; existien problemes-clau, molt específics, que guiaven el procés de descobriment; línies que unien subterràniament diferents teories matemàtiques que acabarien convergint en un tronc comú. Així és la història viva de les matemàtiques, i d'això estan fetes elles mateixes.

D'aquella concepció lineal de les matemàtiques en surt un ensenyament també lineal. En essència, es tractarà d'explicitar, rigorosament, els axiomes de partida i de demostrar, rigorosament, els successius resultats que se'n deriven. Això, que és una traïció a l'esperit real del treball matemàtic, és, alhora, una barbaritat pedagògica. No podem reduir l'aprenentatge de les matemàtiques, especialment als nivells bàsic i mitjà, a la memorització acumulativa de resultats i de demostracions que han quedat, moltes vegades, buits de contingut a força de formalització i de rigor.

Enfront d'aquesta concepció lineal de l'ensenyament, volem reivindicar l'aprenentatge com a redescobriments. Enfront de la metodologia formalitzant i deductivista que acompanya aquella concepció, fem nostres les implicacions metodològiques del *principi genètic*. Com es sabut, aquest principi proclama que el desenvolupament intel·lectual d'un individu, i, conseqüentment, el procés individual d'adquisició de coneixements, produeix *grosso modo* els diferents estadis històrics d'evolució del coneixement humà. Pel que fa a les matemàtiques, la virtualitat d'aquesta idea i la necessitat d'aplicar-la seriosament a l'ensenyament han estat proclamades per personalitats com H. Poincaré i F. Klein, i, al nostre país, per J. Rey Pastor i P. Puig Adam.

Això atorga una funció didàctica molt precisa al coneixement de la història de les matemàtiques. El procés històric de constitució d'uns coneixements sovint ha estat la manera més fàcil com aquests coneixements podien arribar-se a constituir. Aquest procés sempre informa d'allò que va ser més difícil de superar abans d'arribar a un resultat satisfactori; també informa de quines van ser les motivacions per a arribar a superar el marc anterior. La història de les matemàtiques proporciona així, idees que són directament utilitzables com a idees didàctiques. Idees que permetran bastir un ensenyament sobre les provatures, les intuïcions, els tempteigs,...; un ensenyament més a prop de transmetre la il·lusió de crear que no pas de provocar l'avorriment dels espectacles incomprensibles.

* * *

La formació de l'àlgebra simbòlica es produeix en un període d'uns 150 anys, des de finals del segle XV fins a la publicació de *La Geometria* cartesiana (1637), la primera obra que utilitza el llenguatge algebraic modern. L'embalum que ha anat prenent el material recollit que hi fa referència, així com les característiques del compromís adquirit amb l'I.C.E. de la Universitat de Barcelona, ens han portat a no esperar més i a publicar la part del nostre treball corresponent a la primera meitat del període esmentat. Esperem publicar ràpidament la segona part de la nostra anàlisi.

Aquest llibre té quatre parts. La primera conté una aproximació històrica als orígens de l'àlgebra simbòlica i a algunes obres importants del període considerat. Si alguna cosa té d'original l'orientació que hem donat a aquesta part, és la preocupació per analitzar, directament dels originals, obres que són unànimement considerades fonamentals per a la història de les matemàtiques.

Amb això perseguïem poder disposar d'elements de primera mà per a analitzar com han aparagut i s'han desenvolupat certs conceptes essencials de l'àlgebra. Aquesta anàlisi està continguda a la part II.

La tercera part conté l'explotació didàctica del material recollit a les dues primeres, aplicada a alguns temes.

La part IV és una col·lecció de problemes, seleccionada de les obres d'aritmètica i d'àlgebra medievals i renaixentistes estudiades. Principalment, hem agafat problemes amb un enunciat tal que, o bé podien tenir un interès històric, o bé ens han semblats susceptibles de ser utilitzats a classe.

Les referències a la Bibliografia es fan pel nom de l'autor, acompanyant-lo de la data de publicació de l'obra, si se'n cita més d'una.

El fet que uns pocs autors espanyols haguessin estudiat la història de la ciència, i en particular la història de la nostra ciència, ha estat un ajut tant més remarcable que petit era el seu nombre. No volem deixar de dir quant important ha estat per a nosaltres el punt de partida que aquests estudiosos, gairebé des de l'anonimat (almenys pel que fa al seu reconeixement universitari i institucional), ens han proporcionat. En cert sentit, podem dir que aquesta obra ha estat possible gràcies a J.A. Sánchez Pérez, F. Vera, J. Millàs Valli-crosa, J. Rey Pastor i P. Puig Adam i als seus rars continuadors. A tots ells, gràcies.

Agraïm a l'I.C.E. de la Universitat de Barcelona el suport que hi hem trobat, i les facilitats de tota mena que hem rebut en la realització d'aquest treball. Volem agrair, particularment, la col·laboració de la Srta. M^a Lluïsa Martín. Sense el seu ajut eficient per a enfrontar-nos amb les rovellades estructures burocràtico-administratives de biblioteques i altres institucions, el nostre treball hagués estat molt més lent i difícil.

Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica (1478-1545)

Els capítols d'aquesta part contenen la història de la primera època de l'àlgebra renaixentista, l'època que va des del moment de l'aparició dels primers llibres impresos de matemàtiques fins a mitjan segle XVI. Les dates que utilitzem per enquadrar el període estudiat, 1478 i 1545, són, com totes les dates que hom utilitza per subdividir la història, referències absolutament convencionals. La història particular d'aquestes dues és la següent: el 1478 va ser impresa a Europa la primera de les aritmètiques mercantils, les obres que generarien l'àlgebra sincopada renaixentista. El 1545 fou publicada l'*Ars Magna* de Cardano, la primera obra on l'àlgebra apareix com una branca diferenciada de les matemàtiques: la que fa l'estudi general de les equacions.

La nostra anàlisi d'aquest període ha estat dirigida segons dues direccions principals, la que porta a establir l'*origen* de l'àlgebra simbòlica, i la que permet descobrir la *metodologia pròpia* d'aquells treballs primitius. Això potser explicarà l'estructura no estàndard que hem donat a les nostres pàgines. Els dos primers capítols contenen els antecedents medievals àrabs i europeus del nostre període. Després estudiem les aritmètiques comercials, uns llibres sovint oblidats a les històries generals de les matemàtiques, sense els quals és incompreensible la formació de l'àlgebra. Ens entretenim, a continuació, a estudiar el context històric i cultural del període en qüestió, situant d'una manera general les obres i autors més interessants. Els tres capítols següents estan dedicats, respectivament, a Chuquet, Tartaglia i Cardano, amb la pretensió d'explicitar fins on és possible els trets més importants de les seves obres respectives. El darrer capítol, específicament dedicat a Espanya, no conté cap informació essencial per a la història general de les matemàtiques. Això no obstant, en tenir a les mans un material adient, localitzat gairebé sense proposar-nos-ho quan regiràvem els fons d'algunes biblioteques, ens va semblar convenient posar a l'abast del públic algunes dades d'interès sobre la nostra pobra història científica.

CAPÍTOL 1:

LA TRADICIÓ ARITMÈTICA I ALGEBRAICA DELS ÀRABS

Tots els autors d'històries generals de les matemàtiques s'han preocupat de subratllar l'important paper jugat pels àrabs en el desenvolupament de l'àlgebra i la trigonometria. A les línies que segueixen intentarem fer un resum de les principals aportacions aritmètico-algebraiques fetes pels àrabs, aportacions que tan decisives esdevindrien per a preparar el terreny de la futura eclosió de la matemàtica a l'Europa renaixentista.

El punt de partida de l'aritmètica àrab es troba fonamentalment en l'herència dels últims matemàtics grecs, com Diofant, i en la influència procedent de les tècniques dels matemàtics hindús.

L'obra de Diofant (S. III?) passà als àrabs a través de la traducció que en va fer la matemàtica Hypatias (s. IV d.C.), qui afegí comentaris propis a l'obra, sent possible que llavors tingués lloc la pèrdua dels llibres de l'Aritmètica de Diofant que falten (n'han restat 6, d'un total de 13). El saqueig i incendi de la Biblioteca d'Alexandria abona la hipòtesi que en aquest esdeveniment s'acabessin de perdre els pocs exemplars que hi havia de l'obra de Diofant. Tot sembla indicar, segons l'estudi fet per Paul Tannery¹ (les notes es troben al final del capítol), que els diferents manuscrits existents sobre l'obra de Diofant deriven, tots ells, de la traducció realitzada per Hypatias.

L'altra font dels àrabs és l'obra matemàtica realitzada pels hindús. Aquests van abordar una quantitat considerable de problemes variats, per als quals tenien certes regles de resolució; unes regles que, malgrat que eren sense demostració, van anar-se convertint amb el temps en l'entramat sobre el qual es construï l'àlgebra retòrica dels àrabs, que a les portes del Renaixement acabà passant a Europa. De la matemàtica hindú assenyalarem tan sols que en l'obra d'Aryabhata (s. VI) es troben ja les fórmules per a sumar progressions aritmètiques, la resolució d'equacions de segon grau i d'equacions lineals indeterminades amb dues incògnites, i que sovint utilitza les fraccions contínues.

La matemàtica hindú viu la seva època d'or al segle VII, amb l'obra de Bramagupta. Aquest matemàtic enuncia les regles algebraiques de les operacions amb negatius, i utilitza abreviatures per a cada una de les diferents incògnites que intervenen en un problema. Fa servir símbols similars per representar quadrats o bé arrels quadrades. Distingeix els nombres negatius mitjançant un punt, i les fraccions ja les escriu com nosaltres, però sense la ratlla de separació (v. gr. $\frac{3}{4}$). Per últim, cal dir que dóna la solució entera completa de l'equació: $ax \pm by = c$, amb a , b , c enters, i arriba a discutir les solucions de l'equació indeterminada: $ax^2 + 1 = y^2$ (sempre amb coeficients concrets).

L'element essencial introduït pels hindús, i que revolucionà les bases del càlcul aritmètic, correspon, sense cap mena de dubte, a l'ús del sistema decimal de posició emprat per a descriure els nombres². No es pot precisar en quina data exactament s'adoptà aquest criteri de numeració, però podem dir que al segle VIII ja era d'ús generalitzat als escrits matemàtics. El document més antic en què apareix el zero junt als altres numerals és de l'any 738. És difícil d'avaluar la transcendència d'una innovació d'aquestes característiques, i fins i tot plantejar-nos per on haguessin transcorregut els descobriments matemàtics sense aquesta aportació hindú. El cas és que la matemàtica grega fou incapaç de superar aquest hàndicap, i tota la riquesa dels problemes de computació quedà en estat embrionari.

La Floració Cultural Àrab

Després de l'època de decadència de la cultura hel·lènica i de la desaparició de l'últim gran centre cultural, que fou Alexandria, el saber dels grecs anà reconstruint-se lentament a partir de traduccions anteriorment fetes al voltant de les obres d'Aristòtil, Hipòcrates i Euclides. La dipositària fonamental d'aquest saber era Síria, i els monjos d'aquest país van ser els qui es preocuparen d'anar recomponent els manuscrits salvats del desastre.

L'any 762, el califa Almansur establí la seva cort a Bagdad, transformant aquesta ciutat en un gran emporium cultural. Durant una època molt dilatada aquesta ciutat es convertirà en el principal centre protagonista de producció científica, i d'una reconstrucció considerable del saber dels antics grecs. Tanmateix, per la situació geogràfica privilegiada de Bagdad, aquesta ciutat s'alimentà dels corrents de pensament matemàtic procedents de l'Índia, així com del saber dispersat de la cultura hel·lènica.

El primer matemàtic aritmètic destacat fou Muhammad ibn Musà al-Hwarizmi, (m. 850), que després d'un viatge a l'Índia retornà a Bagdad (830) i escrigué el famós tractat d'àlgebra titulat *Hisāb al-jabr wal-muqābala*, del títol del qual derivarà l'actual denominació "àlgebra". En aquest llibre al-Hwarizmi exposa, als sis primers capítols, la forma de resoldre els sis tipus d'equacions de segon grau, a saber: $ax^2 = bx$ (no considera com solució l'arrel nul·la); $ax^2 = c$; $bx = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $bx + c = ax^2$. Les arrels negatives tampoc no són acceptades, i tan sols es consideren dues solucions quan aquestes són positives.

El llenguatge algebraic emprat és, a tots els passatges de l'obra, de tipus retòric, característica que es mantindrà al llarg dels anys pels matemàtics àrabs, perdent-se els pocs vestigis de caire simbòlic que es troben a l'obra de Diofant o en l'obra dels hindús.

Pel que respecta a la solució de les equacions de segon grau, es important fer notar que al-Hwarizmi recolza la prova de la fórmula de resolució mitjançant una construcció geomètrica, qüestió aquesta que és susceptible d'interpretar-se com una influència directa dels mètodes exposats als llibres d'Euclides, que esdevingueren una referència constant a totes les obres àrabs.

Així podem observar la construcció geomètrica que presenta al-Hwarizmi per justificar la resolució de l'equació $x^2 + 10x = 39$. Traçar un quadrat de costat x i completarlo amb quatre rectangles de costats $2\frac{1}{2}$ i x , tal com s'aprecia a la figura. L'àrea de cada un dels altres quadrats que resten fins a completar el quadrat gran és de $6\frac{1}{4}$.

La llargada $2 \frac{1}{2}$ dels quatre rectangles correspon a $\frac{1}{4}$ del coeficient de x . La suma de totes les àrees és:

$$x^2 + 4 \cdot 2 \frac{1}{2}x + 4 \cdot 6 \frac{1}{4} = x^2 + 10x + 25$$

i com que $x^2 + 10x = 39$, en total el quadrat gran té àrea $39 + 25 = 64$, i en conseqüència el seu costat és 8. Així doncs, el costat x buscat és $8 - 2 \cdot 2 \frac{1}{2} = 3$.

Per als altres tipus d'equacions de segon grau també s'inclouen construccions geomètriques apropiades a cada cas.

Els restants capítols de l'àlgebra d'al-Hwarizmi tracten sobre regles d'operacions aplicades a expressions binomials de la forma: $(a + b)(a - b)$; $(a + b)(a - c)$, ... i tota una sèrie de problemes variats procedents directament d'autors grecs.

L'altre llibre important d'al-Hwarizmi porta com a títol de la traducció llatina: "*De numero Indorum*", i, com el seu mateix nom indica, versa sobre l'exposició de la forma de numeració hindú, així com les diferents regles per a procedir al càlcul de les quatre operacions elementals d'aritmètica; aquestes regles, en el transcurs del temps, s'anomenarien "algorismes", mot que s'ha conservat fins als nostres dies.

Al-Hwarizmi, al pròleg del llibre d'àlgebra que composà a instàncies del califa Almamún, expressa la intencionalitat de l'obra així:

"... per facilitar les operacions que es presenten en afrontar les necessitats de la vida, sense cap altre fi superior" (citat per Vera (1947), p. 31). Davant d'aquesta modesta intenció, no deixa d'astorar-nos que aquest llibre fos el punt de referència fonamental de tots els matemàtics que es proposaren desenvolupar l'aritmètica i l'àlgebra, i que conservés plena vigència fins al segle XVI, quan a Europa se supera l'estadi d'elaboració del llibre³ de l'autor àrab.

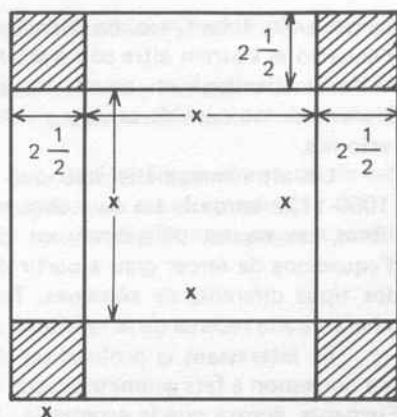
Un altre matemàtic de primera fila que dedicà bons esforços a l'àlgebra fou Tàbit ibn Qurra (aprox. 835-901). Aquest matemàtic esmerçà una gran part de la seva activitat a les traduccions del grec a l'àrab, i al mateix temps realitzà una gran tasca universal d'investigació. Les seves contribucions a l'aritmètica són nombroses, destacant una fórmula notable que ve a dir, en llenguatge modern: "si a, b, c són nombres primers i si $a = 3 \cdot 2^n - 1$, $b = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ i $c = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$, llavors $2^n a b$ i $2^n c$ són nombres amigables (recordem que dos nombres són *amigables* si la suma dels divisors de cada un és igual al valor de l'altre).

Tàbit fou el primer matemàtic que va resoldre les equacions de grau tercer; ho va fer per consideracions purament geomètriques, que no conduïen a valors numèrics explícits.

A partir del segle X, la ciència àrab oriental començà a enderrocar-se, i tan sols destaquen com a matemàtics àrabs sorgits de l'Orient les figures de Aboûl-Wafâ (933-998) i Abenyunus (979-1008).

Aboûl-Wafâ s'encarregà de traduir l'aritmètica de Diofant, comentà l'obra del seu antecessor al-Hwarizmi, i deixà una escola de comentaristes de Diofant, que abordaren una gran diversitat de problemes diofàntics. Les seves altres aportacions importants corresponen a la trigonometria.

Al-Karhi (aprox. 1020), successor de Aboûl-Wafâ, prosseguí els treballs algebràics, sent el primer que abordà equacions resolubles de grau superior al segon, com les de la



forma: $ax^{2n} + bx^n = c$, on considerà només les solucions positives. Aquest mateix tipus d'equació el veurem altre cop tractat exhaustivament a l'obra de Nicolás Chuquet (1484). Al-Karhi abandonà en aquest tipus de problema, de forma explícita, la restricció de Diofant de no considerar com a solucions més que aquelles que corresponen a nombres racionals.

Un altre matemàtic àrab que no podem deixar de mencionar és Omar Khayyam (1050-1122 aprox.). La seva obra té característiques universals. Escrigué, a més d'altres llibres, un tractat d'àlgebra⁴, en el qual s'aborda, entre altres qüestions, la resolució d'equacions de tercer grau a partir de complicats artilugis que impliquen la utilització de dos tipus diferents de còniques. Tots aquests intents posen de manifest les dificultats inherents a la recerca de la resolució algebraica de les equacions de tercer grau.

Es interessant la profunditat de pensament d'Omar Khayyam, que ve a dir: l'àlgebra correspon a fets geomètrics, que són provats per les proposicions 5 i 6 del llibre II dels Elements, encara que la geometria i l'àlgebra difereixen aparentment i que l'àlgebra no ha de ser concebuda com un "truc" per a obtenir solucions de les incògnites. (cf. Collette, vol. 1, p. 126). Diem que aquesta afirmació té un punt de mira de gran abast, perquè encara que estem molt lluny de la fusió entre la geometria i l'àlgebra, que no es donarà fins a l'obra de Descartes, sí que ja entreveiem l'explotació de problemes geomètrics mitjançant l'àlgebra, cosa que obrirà el pas a un fort desenvolupament de la trigonometria.

Per concloure aquest petit resum històric direm que a la segona meitat del segle X, sota el mandat d'Abderramán III, comença a florèixer un nou gran centre cultural: la ciutat de Còrdova. L'extraordinari desenvolupament comercial que experimentà aquesta ciutat, així com l'esperit emprenedor i savi del califa, van fer possible la creació d'un gran empori, on es concentrà el més ampli saber universal anterior al Renaixement. El fill d'Abderramán III, Alháquem II, es dedicà a protegir la cultura i a ampliar la biblioteca del palau, convertida en taller de copistes, enquadernadors i miniaturistes. Es diu que la biblioteca arribà a tenir 400.000 volums.

La quantitat de matemàtics àrabs que en aquest període treballaren a Espanya és molt gran. No farem una anàlisi dels seus treballs, sinó que tan sols direm que molts d'ells contribuïren a trasvasar els coneixements matemàtics àrabs a l'Occident, tant a través de l'Escola de traductors de Toledo, com dels monjos del Monestir de Ripoll, però al mateix temps realitzaren treballs de contribució, sobretot en el terreny de la trigonometria i astronomia. Entre els treballs de Maslama⁵ de Madrid (m. ca. 1007), destaca el resum de les Taules d'Albaténio sobre les equacions dels planetes i una edició millorada de l'obra d'al-Hwarizmi; també edità un llibre d'Aritmètica mercantil i realitzà una edició comentada del Planisferi de Ptolomeu. Azárquiel, (ca. 1029-1087) amb la seva gran obra mestra "*El tractat de l'azafea*", donà un impuls decisiu als treballs de trigonometria i astronomia.

El Tractament dels Nombres en els Àrabs

És evident que una part essencial de la matemàtica àrab gira al voltant del còmput. L'extraordinari desenvolupament comercial que van experimentar certes ciutats àrabs, com Bagdad, i més endavant Còrdova, va propiciar que la matemàtica del càlcul jugués un paper social de primer ordre per tal d'assegurar el regular intercanvi de mercaderies. És per això que els nombres van ésser considerats en primer lloc com a eines de càlcul, i no tant com a expressions darrera les quals, per combinacions màgiques, es trobés l'explicació del Univers. L'opció elegida de desenvolupar el càlcul els conduí a cercar els algorismes més

apropiats per a cada una de les quatre regles elementals aplicades al sistema de numeració hindú.

L'addició era realitzada de la mateixa forma com ho fem a l'actualitat, encara que acostumaven a escriure sota la suma les unitats d'ordre superior resultants de la suma de cada columna de nombres.

La prova que feien per detectar algun possible error consistia a pendre restes de mòdul nou i veure si el resultat encaixava, advertint que la prova no era contundent.

La subtracció ve a ser essencialment igual que a l'actualitat, i la prova segueix sent la dels nous.

54986	Prova
3521	5
<u>58507</u>	<u>2</u>
11	7
54986	5
3521	<u>2</u>
<u>51465</u>	3

Per multiplicar empraven la taula del producte dels 9 primers dígit, però no completa, sinó tan sols la meitat, com s'observa al quadre adjunt. Per realitzar el producte de dos nombres d'un dígit, n'hi ha prou de cercar el més petit a la diagonal i el més gran a la columna de la dreta; el resultat del producte apareix a la columna del nombre més petit (el de la diagonal) i a l'alçada del nombre més gran (cercat a la columna de la dreta).

							2	1
						3	4	2
					4	9	6	3
				5	16	12	8	4
			6	25	20	15	10	5
		7	36	30	24	18	12	6
	8	49	42	35	28	21	14	7
9	64	56	48	40	32	24	16	8
81	72	63	54	45	36	27	18	9

Com podem observar, no es menciona que el producte és commutatiu, però s'utilitza aquest fet des del primer moment en què s'ensenya a multiplicar, com la cosa més evident del món.

S'expliquen a continuació tota una sèrie de recursos per a multiplicar per certs nombres determinats, com el 5, el 9, el 15. Exemple $n \times 15 \Rightarrow n \times 10 + \frac{n \times 10}{2}$, s'afegeix a n un zero a la darrera xifra, i a continuació al nombre obtingut se li suma la meitat d'ell mateix.

Els mètodes emprats per a multiplicar nombres de més d'una xifra entre si, són molt variats: mètode de la xarxa, del quadrilàter, d'Abenezra o de la copa, del castell, i de l'escac.

Exposarem tan sols el mètode de la xarxa, que és el més corrent, i el dit de la copa.

En el mètode de la xarxa es disposen els nombres als marges d'un rectangle, i els productes, xifra per xifra, al quadre interior corresponent, tenint compte de posar la xifra de les desenes a la part de dalt del quadre i la de les unitats a sota. Finalment, se suma en diagonal, i al marge inferior del rectangle s'obté el nombre resultant del producte:

Exemple: 248×864

	2	4	8	
2	1	3	6	8
1	6	2	4	6
4	2	4	8	4
	0	1	3	
	8	6	2	
	2	7	2	

Mètode de la copa: Exemple 864×248

	864	
	248	
1er	864	$2 \times 8 = 16$
	248	$2 \times 6 = 12$
	1628	$2 \times 4 = 8$
2on	864	$4 \times 8 = 32$
	248	$4 \times 6 = 24$
	16286	$4 \times 4 = 16$
	124	
	321	

La disposició de cada producte parcial ve determinada segons la regla convencional de col·locar-lo tan amunt i tan a l'esquerra com es pugui.

3er

8	6	4			
2	4	8			
1	6	2	8	6	2
1	2	4	8		
3	2	1	3		
6	4				
4					

$8 \times 8 = 64$
 $8 \times 6 = 48$
 $8 \times 4 = 32$

4art

8	6	4			
2	4	8			
1	6	2	8	6	2
1	2	4	8		
2	3	2	1	3	
1	6	4			
4	4	7			
2					

El resultat final s'obté sumant totes les columnes, començant per la dreta. El producte és el nombre disposat en forma de ve baixa.

L'algorisme de la divisió era bastant lent; per fer-nos-en una idea, exposem l'exemple que dóna Sánchez Pérez a la p. 147 de *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*, i que és tret de l'obra d'Alamulí, on es presenta la forma més primitiva de divisió; aquesta forma evolucionà paulatinament, fins a assemblar-se més a la nostra divisió actual. La part del quadre on diu "Aclaraciones" correspon a l'afegit de Sánchez Pérez, per tal de fer intel·ligibles les operacions intermèdies.

Aclaraciones		División				
Cociente		1	8	4	1	0
Dividendo	9	7	5	7	4	1
1 X 53	5	3				
Primer resto	4	4				
8 X 5 del 53	4	0				
Parte del resto		4				
8 X 3 del 53		2	4			
Segundo resto		2	1			
4 X 5 del 53		2	0			
Parte del resto			1			
4 X 3 del 53			1	2		
Tercer resto				5		
1 X 53				5	3	
Resto final					1	1
Quinto divisor					5	3
Cuarto divisor				5	3	
Tercer divisor			5	3		
Segundo divisor			5			
Primer divisor	5	3				

Un altre apartat de tractament numèric molt exhaustiu és el corresponent als nombres trencats i a les quatre operacions entre ells, així com a la regla de tres i als mètodes de proporcionalitat. Les regles d'una i dues falses posicions van ésser propícies per a abordar tots aquests tipus de problema. Molts dels problemes que es plantejaren tenen una forma similar a aquest que reproduïm:

"Zaid té 22 dinars, Omar en té 19 i Bakr en té 7. Reuneixen el diner i fan negoci, de manera que guanyan 12 dinars. Com se'ls han de repartir?". (Sánchez Pérez (1949), p. 166).

Un altre tipus de problemes està, directament relacionat amb qüestions d'herència, ja que la jurisprudència àrab, regida per l'Alcorà, obliga a certs repartiments proporcionals, en alguns casos molt complicats, segons la descendència i l'ascendència de la persona morta. De fet, els encarregats de discernir entre els repartiments d'una herència eren membres d'una classe especial d'aritmètics, i el seu treball constituïa una autèntica professió, s'anomenaven "faradís", i estaven ensinistrats per a resoldre tot tipus de repartiment proporcional, per complicat que pogués ser.

Els capítols de les aritmètiques àrabs dedicats a la radicació acostumen a ser complets. Ensenyen a multiplicar i a dividir arrels, incloent-hi els casos en què les arrels són d'índex diferent. Es plantegen fins i tot el problema de sumar i restar arrels quadrades. qüestió que resolen de la següent manera: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$ tenint en compte que l'arrel que apareix dins de l'altra arrel, en cas que no sigui exacta, l'aproximen per un nombre fraccionari. Coneixen els mecanismes formals de treure factors fora de l'arrel, o bé d'entrar-los dins de l'arrel.

Les relacions numèriques corresponents als quadrats màgics, nombres perfectes, abundants,..., que tant de predicament van tenir a l'Occident cristià, van jugar un paper secundari a la matemàtica àrab. En aquesta, en canvi, ocupà un lloc important, el problema de la divisibilitat dels nombres naturals. Varen trobar els criteris de divisibilitat de la divisió per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 i 11, segons la forma que s'explica actualment a les escoles. S'ha de destacar que fins i tot presentaren 2 criteris de divisibilitat per 7, un d'ells poc útil i basat en les restes de dividir les potències de 10 per 7, i un altre prou senzill que descriu Benalbana i que és així: si d'un nombre de diverses xifres es multiplica la primera de l'esquerra per 3, se li afegeix la segona, el resultat es torna a multiplicar per 3 i se li afegeix la tercera xifra, i així successivament fins a acabar les xifres del nombre donat, el nombre així obtingut i el proposat donen la mateixa resta en ser dividits per 7 (citat per Sánchez Pérez (1949), pág. 161).

Per acabar aquest apartat, cal dir que tant les progressions aritmètiques com les geomètriques tenen un tractament complet a les aritmètiques àrabs. La fórmula que presenten per a sumar les progressions aritmètiques és l'actual: $S_N = \frac{a_1 + a_N}{2} \cdot N$. Fan observar que l'addició dels primers senars genera la successió dels quadrats dels nombres naturals. Es plantegen i resolen, sense mètode explicatiu, la suma dels primers quadrats i la dels primers cubs segons les expressions:

$$\sum_{i=1}^N i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^N i^3 = \left(\sum_{i=1}^N i \right)^2$$

Totes aquestes fórmules no eren expressades sinó retòricament.

La Trigonometria. Una Motivació per al Desenvolupament de l'Àlgebra

Els àrabs foren uns entusiastes cultivadors de l'astronomia, i l'estudi de les evolucions dels astres els portaren a plantejar-se gran quantitat de problemes, problemes que generarien la trigonometria. En efecte, una primera qüestió que van haver de resoldre fou la mesura dels angles i, en conseqüència, l'elaboració precisa de taules de raons trigonomètriques. L'herència de què disposaven eren les taules que deixà Ptolomeu de mig en mig grau, relatives a la mesura de les cordes que agafen cada un dels angles considerats. Al mateix temps disposaven de les taules que elaborà l'hindú Aryabhata corresponents als sinus dels angles compresos entre 0° i 90° , pujant de $3^\circ 45'$ en $3^\circ 45'$. Aquest, d'una manera molt enginyosa, utilitzà una fórmula recurrent per al càlcul d'aquesta taula (cf. Guitel, p. 587)

$$\sin(m+1)a - \sin(ma) = \sin(ma) - \sin(m-1)a - \frac{\sin(ma)}{\sin(a)}$$

(cal tenir present que l'expressió dels sinus que utilitzava representava el producte del "sinus actual" pel radi). Aquesta fórmula, com és fàcil de comprovar, sols és vàlida si es verifica la relació: $2R(\sin a) \cdot (1 - \cos a) = 1$. Prenent, com va fer Aryabhata, $R = 3.438 =$ nombre de minuts d'una semicircumferència dividit per π , resulta ser $a = 229'$. Per això és fàcil d'entendre per què construí la taula començant per l'angle de $3^\circ 45'$, que equival a $225'$. L'error que en resulta als càlculs que presenta és més petit que una cinquemil·lèsima.

Amb aquests precedents, els àrabs es van plantejar l'elaboració de taules més "afinades", o sigui d'interval d'angle més petit, i esteses a altres raons, com els cosinus i les tangents (que ells anomenaven "ombra invertida").

La construcció d'una taula de sinus no és tasca gens fàcil, sobretot si hom no disposa de computadores i no es pot fer ús dels més moderns desenvolupaments en sèrie, que els àrabs estaven molt lluny de poder utilitzar. Els problemes de còmput de les taules de les raons trigonomètriques van comportar una gran riquesa de treballs paral·lels, de naturalesa algebraica. En efecte, el còmput pràctic d'una taula exigeix bàsicament dues coses: cercar la raó trigonomètrica de l'angle més petit possible i trobar una fórmula recurrent per a calcular les raons dels altres angles, igualment espaciats, a partir de les raons del més petit. Aquesta doble labor és la que es proposaren els matemàtics àrabs.

La recerca de les relacions entre les diferents raons trigonomètriques esdevingué, d'aquesta manera, una font constant d'expressions i relacions algebraiques. Van trobar les expressions corresponents als sinus i cosinus de la suma d'angles, qüestió que resolva el problema de fer algorísmica la confecció de les taules a partir de conèixer les raons trigonomètriques de l'angle més petit. I aquest darrer fou el problema més difícil que van haver de resoldre. La qüestió era poder determinar el valor del sinus d'un grau amb la màxima precisió possible. Hem de dir que tal labor els portà a descobrir una gran quantitat de relacions algebraiques, algunes molt útils i que van subsistir, i d'altres menys afortunades que s'han quedat per sempre més en els manuscrits de l'època. Les fórmules més interessants que coneixien corresponen a: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$; $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A$

$$\sin B; \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

escrites naturalment en versió moderna.

Una reconstrucció moderna del procés que els portà a calcular el valor de $\sin 1^\circ$ pot ser el següent (probablement els àrabs van procedir mitjançant construccions geomètriques):

Coneixien el valor exacte del $\sin 30^\circ$ a partir de la construcció geomètrica del triangle equilàter. El valor del $\sin 18^\circ$ es pot trobar així: $\sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ$; $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$; emprant les expressions dels sinus i cosinus dels angles dobles:

$$\cos 18^\circ = 2 \cdot (2\sin 18^\circ \cos 18^\circ) (\cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ)$$

i simplificant per $\cos 18^\circ$ queda:

$$1 = 4\sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) = 4\sin 18^\circ - 8\sin^3 18^\circ.$$

La qual cosa és equivalent a resoldre la equació de tercer grau: $8x^3 - 4x + 1 = 0$ que té l'arrel senzilla $1/2$. Dividint ara el polinomi per $x - 1/2$ en resulta el polinomi de segon grau:

$8x^2 + 4x - 2 = 0$, que té per arrels $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Com que $\sin 18^\circ$ no pot ser $1/2$, que és el de 30° , el valor que li ha de correspondre és el de $\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0,309017$.

Coneixent el valor de $\sin 30^\circ$, i a partir de la fórmula del sinus de l'angle meitat, es pot trobar el valor de $\sin 15^\circ$; a partir del coneixement dels sinus de 15° i 18° es pot calcular el valor del $\sin 3^\circ$. I aquí comença el veritable problema, que consisteix a trobar el $\sin 1^\circ$ a partir del $\sin 3^\circ$. Els matemàtics àrabs ja sabien que per a resoldre aquest problema (que no és sinó el problema de la trissecció de l'angle) era necessari trobar les solucions d'una equació de tercer grau: $x^3 + \frac{\sin 3}{4} = \frac{3}{4}x$.

La resolució algebraica de les equacions de tercer grau, com ja hem dit en apartats anteriors, no va ser abordada feliçment pels àrabs, i no es va aconseguir fins a la primera meitat del s. XVI per Tartaglia i Cardano. No obstant, és digne de menció el procediment que va utilitzar el matemàtic Olug-Beg per trobar una solució aproximada de l'equació anterior⁷. El seu procediment consistia en la recerca de solucions cada cop més aproximades, operant així:

Per a solucions molt properes al zero, com és el cas anterior, una primera aproximació de la solució x és igual al quocient: $\frac{\frac{\sin 3}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sin 3}{3}$ ja que x^3 es pot negligir. El valor de $\frac{\sin 3}{3}$ el calculem fins a un quocient Q i una resta R tal que R sigui de l'ordre de Q^3 . A continuació posem $x = Q + y$, i ara calculem y per aproximar-nos a la solució del polinomi $Q + y = \frac{4}{3}(Q + y)^3 + Q + \frac{R}{3}$; com que les potències de y es poden negligir, i R és del mateix ordre de magnitud que Q^3 , resulta:

$$y = \frac{4Q^3 + R}{3}, \text{ i així es reitera el procediment.}$$

Encara que el mètode de resolució és analític, per a portar-lo a terme és necessària una bona base de càlcul algebraic.

Olug-Beg publicà un llibre de Taules astronòmiques, traduït per L.A. Sedillot (Edició 1839 - París).

Sota els pressupostos anteriors, no deixa de ser una gran proesa que Abenyunus arribés a designar el valor de $\sin 1^\circ$ per: $1^\circ 2' 49'' 43''' 28^{\text{IV}}$ que difereix tan sols del veritable valor en 16^{IV} . De forma similar Aboûl-Wafâ (940-997), partint de subtils relacions i desigualtats trigonomètriques, trobà el valor de $\sin 30' = 0^\circ 31' 24''' 54^{\text{IV}} 55^{\text{V}}$, que difereix del real en menys d' 1^{V} , és a dir, en menys de 0,000000001 del radi. Mitjançant aquest valor, i pel procediment abans indicat, construí una taula de sinus de 10 en 10 minuts.

Aquesta íntima relació entre l'àlgebra i la geometria dels angles la retrobaria 600 anys més tard el matemàtic francès Vieta, en plantejar-se aquest mateix tipus de problemes. Vieta arribà més lluny en adonar-se que, de fet, el problema de la divisió d'un angle en n parts iguals anava associat al problema de trobar les arrels d'un determinat polinomi de grau n , de coeficients depenents tan sols de n ; aquesta qüestió li permeté resoldre en un moment un problema proposat per A. van Roomen, que consistia a trobar les solucions d'una equació polinòmica de grau 45, ja que va aconseguir fàcilment la solució a partir d'una taula trigonomètrica. L'aprofundiment d'aquest problema el conduí a trobar el que avui s'anomenen les fórmules de Moivre.

Com podem apreciar una vegada més, els precedents d'allò que seria la ciència moderna cal trobar-los als treballs desenvolupats pels àrabs. El camí de recerca matemàtica que van elegir era correcte, i ells van assentar les bases fonamentals del càlcul, tant aritmètic com algebraic. Sols restà pendent el pas decisiu de la simbolització algebraica, el qual, per diferents camins, es crearia al llarg del segle XVI a l'Europa Occidental, procés al que dedicarem l'atenció en capítols posteriors.

El Tractament Algebraic de les Equacions i les Seves Notacions

Ja hem dit abans que els àrabs van desenvolupar l'àlgebra retòrica, entenent com a tal aquella que descriu les operacions que cal anar fent per trobar el valor de la incògnita. D'aquesta forma resolien tot tipus d'equacions de primer i segon grau, sempre que tinguessin solucions positives. Malgrat que no van donar el pas a l'àlgebra simbòlica, sí que van explicitar les regles per a operar les diferents entitats matemàtiques que apareixien.

Els àrabs anomenaven *chai*, *mâl* i *Kâb*, respectivament, a la primera, segona i tercera potències de la incògnita. Segons Cajori, la majoria d'autors expressaven les potències superiors segons el principi multiplicatiu (*Kâl-mâl* designava x^6 ; *Kâb-Kâb*, x^9). D'altres utilitzaren el principi additiu (*Kâb-mâl* designava x^5 ; *Kâb-Kâb*, x^6). Per més detalls sobre les notacions àrabs es pot consultar el capítol 12, dedicat a la formació del llenguatge algebraic.

Feien la següent aclaració de la notació utilitzada:

"La quantitat que es multiplica per ella mateixa s'anomena *arrel* en aritmètica, *costat* en geometria, i *chai* (*cosa*) en àlgebra; el resultat se'n diu llavors quadrat"

(extret de l'obra d'Al Aamoulî, en la Traducció d'Aristide Marre, p. 15). A la mateixa obra, p. 36, podem veure el quadre que presenten per a realitzar els productes i divisions de les entitats matemàtiques així construïdes.

Taule de productes i divisions, amb simbologia moderna:

		MULTIPLICAND						
		$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	x	x^2		
DIVIDENT	x^2	1	x	x^2	x^3	x^4	x^2	MULTIPLICADOR
	x	$\frac{1}{x}$	1	x	x^2	x^3	x	
	1	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	x	x^2	1	
	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	x	$\frac{1}{x}$	
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{x^2}$	
		x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$		
		DIVISOR						

Exposem a continuació la forma amb què al-Hwārizmī introdueix la suma i el producte de les diferents potències de la incògnita (cf. Marre (1864), p. 70).

Pren com a punt de partida dos exemples numèrics en què intervenen expressions radicals:

$$(20 - \sqrt{200}) + (\sqrt{200} - 10)$$

$$(20 - \sqrt{200}) - (\sqrt{200} - 10)$$

Fa veure, amb ajuda d'una senzilla construcció geomètrica, que la primera expressió és igual a 10, i que la segona és $30 - \sqrt{800}$. Fet això passa a demostrar les dues igualtats següents:

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - x^2 - 10x$$

$$(100 + x^2 - 20x) - (50 + 10x - 2x^2) = 50 + 3x^2 - 30x$$

La demostració d'aquestes igualtats no la basa ja en una construcció geomètrica, sinó en la transposició de termes i simplificació dels que són iguals als dos membres, inaugurant així l'art del "cheber i almucábalā", que seria la regla d'or de l'àlgebra.

Ensenya com, només es poden sumar potències de la mateixa "espècie": "4 vegades māl i 2 vegades māl fan 6 vegades māl, però 2 vegades māl i 3 vegades Kâb no es pot posar d'altra manera" (Marre (1864), p. 71).

Ensenya a multiplicar, i acaba dient:

“Si un factor positiu i un altre negatiu, com “chai positiu” i “chai negatiu”, es troben en una multiplicació, dóna sempre un factor negatiu. Guardeu aquesta regla a la vostra memòria”. (Marre (1864), p. 73).

En un altre passatge aclareix la forma de procedir en les operacions:

“Si l'exemple és “deu i chai” per “chai menys deu”. Dieu doncs: chai multiplicat per chai és un mál positiu; 10 per chai és 10 chai positius; i menys 10 per chai és 10 chai negatius. Ara cancel·leu els positius pels negatius i resta tan sols 1 mál; menys deu per deu que són cent a restar del mál. En fi, tota l'operació dóna un mál menys 100 dirhems”. (Marre (1864), p. 72).

Aquestes regles per a l'àlgebra retòrica eren aplicades a diferents tipus de problemes, que a l'actualitat anomenem de planteig, com aquest extret de l'obra d'Al Aamouli:

“Si et diuen: Es compren 3 mesures de blat per deu unitats; es compren no se sap quantes mesures d'ordi per 12 unitats; es ven cada mesura de blat pel valor de cada mesura d'ordi; es ven cada mesura d'ordi pel valor de cada mesura de blat, i hi ha un excedent de 4 unitats. Quina quantitat d'ordi es comprà?” (p. 56).

Quant el tractament de les equacions de segon grau, ja hem dit abans que els àrabs no acceptaven les solucions negatives, i que sols consideraven les dues solucions quan aquestes eren positives. En canvi, van saber adonar-se de les regles operatòries que regien els productes de les diferències indicades. Així, trobem sovint l'aplicació correcta d'igualtats del tipus:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

És probable que aquest coneixement es recolzés, en primera instància, en construccions geomètriques, a l'igual com al-Hwārizmī justificava les expressions corresponents a la resolució de les equacions de segon grau.

És interessant calibrar la llista d'identitats algebraiques contingudes al *Tractat de Geometria* del jueu Abraham Bar Hiyya, conegut també per Savasorda (s. XII), tractat dedicat a la pràctica dels agrimensors. Obra comentada àmpliament per Millàs Vallicrosa i traduïda al català al Vol. III de la Biblioteca Hebraico-catalana. Any 1931. Al capítol primer d'aquesta obra s'exposen diverses identitats algebraiques, de les quals en mostrem algunes en notació simbòlica moderna:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$(a + b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$$

$$(a + b)^2 + a^2 = 2a(a + b) + b^2$$

$$(a^2 + b)^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$(a + x)^2 + x^2 = 2 \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{a}{2} + x \right)^2$$

Com comenta Vallicrosa, és el fet que els agrimensors, entre els seus instruments de mesura, no disposessin de goniòmetres o quelcom semblant, el que fa que en aquesta obra es demostrin els principals teoremes de la geometria sense utilitzar en cap moment el valor dels angles, sinó a partir de les longituds; la qual cosa obliga a desenvolupar una quantitat considerable d'identitats algebraïques, que la fan molt interessant.

Per últim direm que la traducció llatina d'aquesta obra, amb el títol de *Liber embadorum* (feta per Platò de Tívoli, l'any 1145) coincidí amb la primera versió llatina de l'àlgebra de al-Hwarizmi (feta per Robert de Chester). Ambdues obres representaven la primera irrupció de la ciència àrab a l'Occident.

Totes dues obres van ser directament utilitzades per Leonardo da Pisa, que es convertí en el primer algebrista de l'Europa medieval.

Breu Comentari al Compendi d'Àlgebra d'Abenbeder

Després d'haver exposat una panoràmica general dels treballs d'aritmètica i àlgebra abordats pels àrabs, creiem d'interès referir-nos a una petita obra que podria ésser considerada com prototipus d'una àlgebra elemental àrab. Ens referim al *Compendio de álgebra de Abenbeder*, que es troba manuscrit a l'Escorial, i que feliçment ha estat traduït al castellà per José Augusto Sánchez Pérez (Madrid-1916). Aquest manuscrit àrab és presumiblement del s. XII o s. XIII, i en ell estan exposats de forma molt didàctica els principals coneixements algebraics que posseïen els àrabs. L'exposició de l'índex pot donar-nos una idea de l'orientació global de l'obra:

Cap. I al VI. Equacions de primer i segon grau.

VII al XII. Operacions amb arrels.

XIII. Multiplicacions de potències i regla dels signes.

XIII bis. Problemes de l'apartat anterior.

XIV i XIV bis. Suma i resta de potències.

XV. Divisió de potències.

XVI. Regla dels signes (2ª part del cap. XIII).

XVII. Chéber i almocàbala.

La segona part del llibre està dedicada exclusivament a la resolució pràctica de problemes.

Creiem de molt interès els capítols dedicats a la radicació, per l'extraordinària claredat amb què estan exposades les regles del càlcul radical. És important destacar la nova concepció que permet als àrabs considerar una arrel un nombre com qualsevol altre, així com aplicar-los les quatre operacions aritmètiques. És important d'assenyalar l'obsessió per "tancar" la suma i la resta entre arrels, és a dir, per trobar la forma com la suma o la resta d'una arrel amb una altra es puguin expressar com una única arrel. Recordem que aquesta qüestió la trobem constantment reproduïda en el procés d'aprenentatge de qualsevol alumne que s'enfronta per primera vegada amb el mateix problema, amb la diferència que aquest, instintivament, tendeix a pensar que la suma de dues arrels és l'arrel de la suma.

Una altra qüestió que és interessant destacar a l'obra és el passatge en què es fa referència al càlcul dels productes de les potències de la incògnita. És clar el coneixement de la correspondència entre el producte de potències de la incògnita i la suma dels exponents, i que tot el problema es redueix a posseir una bona anotació que faci mecànica l'operació, i pugui ésser reduïda a un pur càlcul formal. Reproduïm a continuació un paràgraf en què s'expressa així la qüestió:

"Si se't diu: multiplica vint cubs per vint cubs, et resultaran quatre-cents, després suma l'exponent d'un cub, que és tres, amb l'exponent del altre cub, que és tres; et resultarà sis, diràs ara: la categoria sis és el cub-cub, i si vols pots dir quadrat-quadrat-quadrat, perquè cada quadrat té dos exponents, segons abans hem dit, mentre que cada cub en té tres. Així és que diràs: el resultat és de quatre-cents cubs-cubs, o de quatre-cents quadrats-quadrats-quadrats." (pp. 19-20).

NOTES AL CAPÍTOL DE LA TRADICIÓ MATEMÀTICA ÀRAB

1. Paul Tannery estudià a fons els diversos manuscrits existents dels sis llibres d'aritmètica de Diofant, i contribuï a una certa clarificació de la seva procedència en base a sis manuscrits fonamentals, a partir dels quals derivaven tots els altres. Al mateix temps restaurà gran part dels mots originals, que en el transcurs dels anys havien sofert profundes alteracions, portant a termini un autèntic treball de filologia. Les conclusions dels seus estudis sobre Diofant poden trobar-se a les seves *Mémoires Scientifiques* (París, 1912-24), als articles del vol. II. "Etudes sur Diophante" (pp. 367-399). "Les manuscrits de Diophante à l'Escorial" (pp. 418-432). "Sur une épigramme attribuée à Diophante" (pp. 433-439).
2. A l'obra de Sánchez Pérez *La aritmètica en Roma, en Índia y en Arabia* es troba una descripció exhaustiva de la introducció dels guarismes hindús, així com l'evolució que van experimentar fins a assolir la forma actual. També hi són descrits àmpliament els diferents algorismes emprats per a cada una de les operacions elementals.
3. L'obra aritmètico-algebraica d'al-Hwarizmi arribà a l'Occident cristià relativament aviat, a partir de diverses traduccions llatines. Un autor que prengué com a punt de referència l'obra d'al-Hwarizmi fou Leonardo da Pisa, el qual exercí una gran influència a l'etapa pre-renaixentista.
4. Existeixen diverses traduccions de l'obra d'Omar Khayyam, una al francès per Woepcke, *L'algèbre d'Omar al-Khayyam* (París, 1851), i una altra a l'anglès, editada per D.S. Kasir, l'any 1931, amb el títol: *The Algebra of Omar Khayyam*, New-York, Columbia Univ. Press, 1951.
5. Joan Vernet fa un estudi molt complet de l'obra de Maslama al llibre: *Las obras matemáticas de Maslama de Madrid*.
6. Per més detalls sobre l'elaboració de la taula de sinus d'Aryabhata es pot consultar el llibre de G. Guitel: *Histoire comparée des numerations écrites*. 1975.
7. Segons Florian Cajori, tal resolució és atribuïda al matemàtic àrab Atabeddin Jamshid (A Hist. of math. pp. 110). Segons l'article dedicat a la ciència àrab de la Història General de la Ciència dirigida per R. Tatón, firmat per A.P. Youschkevitch i altres, la resolució analítica de l'equació de tercer grau es deu al matemàtic al-Kashi, el qual, segons aquests autors, dóna el valor per al sinus de 1° de 0,017452406437283571 (expressat en sistema decimal), en el qual totes les xifres són exactes, i afegeixen que al-Kashi realitzà els seus càlculs amb fraccions sexagesimals.

CAPÍTOL 2:

LA TRADICIÓ ARITMÈTICA MEDIEVAL A EUROPA

Un tret interessant del Renaixement és la progressiva desvinculació del desenvolupament científic de les Universitats, centres on es trobava institucionalment el saber. Això respon a dos fenòmens complementaris: al costat de l'estancament dels mètodes i dels temes que centraven la reflexió escolàstica, s'havien produït uns canvis sociològics importants, i havien aparegut sectors i grups socials d'un extraordinari dinamisme, amb interessos culturals i tècnics d'un nou tipus.

És sabut que dins del marc de l'aristotelisme es feren aportacions força interessants a la Física durant el segle XIII i començaments del XIV, període que coincideix amb l'època de plenitud de la Universitat medieval (Cf. Crombie, especialment el capítol I del vol. 2, on es troba una descripció extensa i entusiasta de la ciència medieval). Aquest primer renaixement cultural i científic serà efímer, i ja a la segona meitat del tres-cents s'inicia l'anomenada *era dels manuals*, i amb ella la definitiva decadència de les escoles medievals: els millors copien textualment d'uns, els pitjors d'altres, però tots no fan sinó moure's dins d'una problemàtica esgotada. La descomposició de la cultura escolàstica durant el segle XV no ha estat descrita tan sols per autors que valoren sobremanera el hiatus cultural existent entre l'Edat Mitjana i el Renaixement (en aquest sentit, Cf. Garín, especialment pp. 243-270), sinó que fins i tot un autor com Crombie, que tant ha fet per revaloritzar la cultura científica dels escolàstics i la seva contribució a la Revolució Científica del segle XVII, reconeix que

"de hecho, ellas [la ciència medieval i la ciència de Galileo i Newton] no estuvieron conectadas por una continuidad ininterrumpida de desarrollo histórico. Hacia finales del siglo XIV llegó a su término el brillante período de la originalidad escolástica. Durante el siglo y medio siguiente, todo lo que París y Oxford produjeron sobre Astronomía, Física, Medicina o Lógica fueron monótonos epítomes de obras anteriores. En el siglo XV aparecieron en Alemania uno o dos autores originales, Nicolás de Cusa y Regiomontano. En Italia las cosas fueron mejor, pero más con el nuevo grupo de "artistas-ingenieros", como Leonardo da Vinci, que en las universidades." (vol. 2, p. 104).

Ha estat remarcat moltes vegades que la ciència medieval era una ciència sense aplicacions, o dit més exactament, les aplicacions de la qual no tenien un estatus comparable al de la pròpia ciència, i es desenvolupaven fora de la Universitat. Això no deixa de sor-

prendre vist amb ulls d'avui, però, fent-ho així, oblidem tant els interessos com el context cultural i teòric de l'època. Utilitzant una vegada més les paraules de Crombie:

"Pero los grandes problemas científicos y cosmológicos que abordaron eran raras veces enfocados por ellos en cuanto estrictamente científicos. El mayor problema de todos era el de la relación de la cosmología de la teología cristiana basada en la revelación y la de la cosmología de la ciencia racional dominada por la filosofía de Aristóteles. (...) Fue dentro de una estructura de Filosofía relacionada estrechamente con la Teología, y en particular con el sistema de los estudios universitarios dirigidos por clérigos, donde tuvo lugar el desarrollo central de la ciencia medieval." (vol. 2, pp. 108-9).

No podríem dir que les cultures científiques pre i postnewtonianes es distingeixen pel fet que aquesta ofereix models quantitius del món físic i aquella no. L'*Almagest* és un acceptable, per no dir un bon model astronòmic quantitatiu, capaç de *predir* amb un marge d'error menyspreable per a les necessitats de l'època. És la *desconnexió* entre un saber explicatiu propi de filòsofs, i un saber descriptiu-predictiu propi de navegants, astròlegs i confeccionadors de calendaris, allò que constitueix una de les característiques diferencials entre la ciència moderna i el coneixement clàssic i medieval. Dues classes de saber, el que explicava i el que predeïa, que no es diferenciaven tan sols pel seu objecte, sinó primerament per la diferent categoria que els atorgava la perspectiva epistemològica llavors dominant. Com ha assenyalat Hanson, és la desconnexió esmentada la que permet comprendre les dificultats que calia vèncer per a endegar la Revolució Científica:

"Una de las maneras de estimar la estatura de Copérnico (...) consiste en constatar que era a la vez lo suficientemente buen filósofo y lo suficientemente buen matemático como para buscar un único conjunto de *explicantia* integrados capaces de suministrar por su parte (1) al menos tanta precisión descriptiva y predictiva como las técnicas ptolemaicas al uso y (2) también de insertarlas en una explicación cosmológica de los cielos filosóficamente satisfactoria." (p. 194).

Les Matemàtiques a la Universitat Medieval

El que acabem de dir explica que l'ensenyament de les matemàtiques dins de la Universitat medieval no tingués sinó una funció preparatòria i complementària, marginal en qualsevol cas. Els estudis escolàstics havien recollit la matemàtica grega de manera força incompleta. La geometria i l'astronomia que s'ensenyaven només eren introduccions elementals a Euclides i Ptolomeu. Pel que fa a la part que ens interessa més directament, cal recordar que l'àritmètica ja havia estat la germana pobre de les matemàtiques gregues, on consistia en l'estudi d'algunes propietats dels nombres enters positius. El saber aritmètic de les escoles medievals derivava d'aquesta tradició, però en la seva versió més pobre, la numerologia pitagòrica, que posava l'accent en les infinites categories de nombres (quadrats, cubs, superficials, sòlids, perfectes, abundants, triangulars, tetragonals, piramidals,...) necessàries dins d'una metafísica que en feia la clau explicativa de l'Univers. Aquest saber havia estat transmès per Boècio, Isidoro de Sevilla, Alcuïno i uns pocs més pares de l'Església, els quals l'havien recollit dels escrits dels neopitagòrics, el més famós dels quals era Nicomaco de Gerasa (finals del segle I).

En el marc teòric de l'aristotelisme medieval, incapaç de connectar la reflexió científica amb la quantificació, els coneixements aritmètics servien gairebé exclusivament per a no deixar escapar cap de les subtilitats de les especulacions pitagòriques i platòniques. Aquests coneixements eren unes nocions elementals sobre proporcions i proporcionalitat, i unes versions més o menys desenrotllades de la teoria pitagòrica de nombres.



Fig. 1. Primera pàgina de l'aritmètica de Boeci en la seva edició del 1521. (Exemplar de la Biblioteca Universitària, Barcelona).

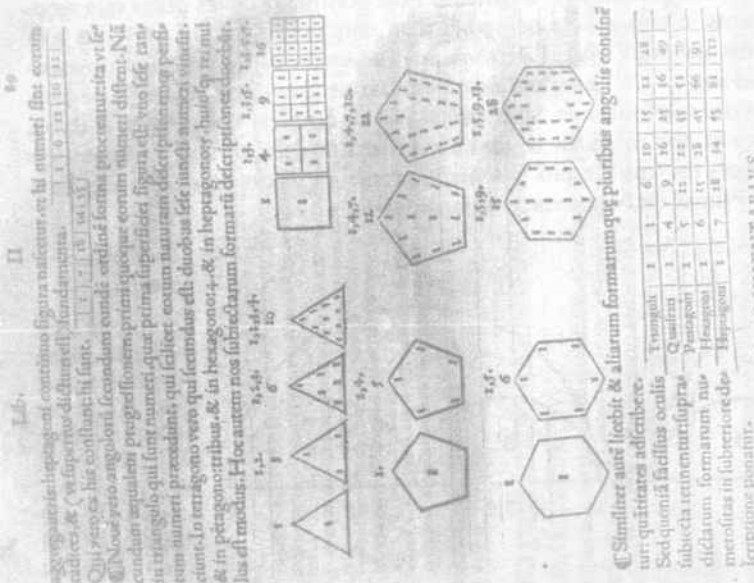


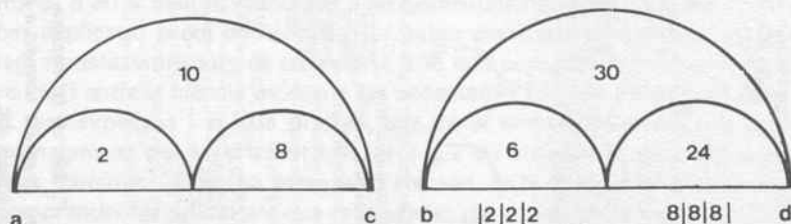
Fig. 2. F. 89r. de la mateixa obra de Boeci. Hom pot observar els nombres quadrats formats a partir dels senars, així com els nombres poligonals, etc.

a) *Jordanus Nemorarius (m. 1237?)*

Donarem una idea més precisa de l'orientació i del contingut de les obres que recullen aquests coneixements, citant alguns paràgrafs d'un dels textos encara utilitzats a la Sorbona a començaments del segle XVI, l'*Arithmetica* de Jordanus Nemorarius, un escolàstic del primer terç del segle XIII. Que l'obra de Nemorarius fos vigent 300 anys després d'haver estat escrita no diu tant sobre la Sorbona, el centre cultural europeu de la Baixa Edat Mitjana, com sobre el lloc marginal ocupat per les matemàtiques dins de la cultura medieval i sobre el procés de fossilització que aquesta cultura va conèixer. Els següents són extractes del Llibre Primer de l'esmentada obra de Nemorarius:

"Proposició Quarta

Si fos el primer del segon la mateixa part que el tercer del quart, seran el primer i el tercer la mateixa part del segon i del quart que el primer del segon."



El dibuix que acompanya l'enunciat és una reproducció exacta del que apareix a l'original citat. És interessant observar l'absència de mots específics per a designar operacions; a la suma, en particular, s'hi al·ludeix per la conjunció copulativa i.

L'enunciat anterior pot fer pensar que es tracta de demostrar

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$$

però la demostració fa veure que no és pas exactament aquest, el significat de l'enunciat:

"Sigui *a* el primer nombre, *b* el segon, *c* el tercer i *d* el quart. Ja que *a* és la mateixa part de *b* que *c* ho és de *d*, concebo *b* i *d* dividits en les mateixes parts. I ja que la primera d'un amb la primera de l'altre és igual que *ac* [es pot observar l'ús simbòlic de la juxtaposició per a indicar l'addició]; i semblantment la segona part amb la segona. I aquesta reunió [de parts] tantes vegades pot ser feta com el primer [és] dins del segon. Tantes vegades, per tant, el nombre igual *ac* podrà ser pres dins *bd* com *a* [és] dins *b*. Per la qual cosa *ac*, simultàniament primer i tercer per definició, seran igual a la mateixa part del segon i del quart que el primer del segon. Com estava proposat." (f. 2v)

Cal dir que l'ús de lletres per a representar un nombre qualsevol és un dels trets que fan històricament significativa l'*Arithmetica* de Nemorarius. Però aquest primer i tímid pas cap a la simbolització no va tenir seguidors ni conseqüències; quan Vieta, gairebé 400 anys més tard, va utilitzar sistemàticament lletres per a representar quantitats que podien ser conegudes, introduint així els paràmetres, ho va fer dins del procés de creació del llenguatge simbòlic algebraic, on havia esdevingut necessària la seva introducció, i sense que el llunyà precedent medieval li servís de res.

A la demostració que acabem de transcriure s'utilitza que els nombres b i d són iguals, respectivament, a k vegades els nombres a i c , i s'arriba a la conclusió que $b + d$ és igual a k vegades el nombre $a + c$. Com veurem ara mateix, això no vol dir que la proposició quarta demostrí que

$$\left. \begin{array}{l} b = k \cdot a \\ d = k \cdot c \end{array} \right\} \Rightarrow b + d = k \cdot (a + c)$$

"Proposició setena

Si totes les vegades que la unitat [és] dins del primer, altres tantes el segon [és] dins del tercer, totes les vegades que la unitat [és] dins del segon hi serà el primer dins del tercer."

Si pensem aquest enunciat modernament, i el traduïm al nostre llenguatge simbòlic, resulta la següent bajanada

$$\left. \begin{array}{l} a = a \cdot 1 \\ c = a \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow c = a \cdot b$$

Per tal que la proposició setena no esdevingui aquesta trivialitat incomprendible, cal introduir una distància considerable entre l'enunciat original i el nostre enunciat semi-formalitzat.

Encara que més endavant tornarem a analitzar aquesta qüestió, quedi clar per ara que els *problemes de notació* que cal resoldre per passar d'una expressió com "*dos és tres vegades dins de sis*" a " $6 = 2 \cdot 3$ " tenen una component conceptual considerable, malgrat que la manera usual de plantejar-los sigui en termes de "economia simbòlica" o de "grafisme acceptats per convenció".

L'*Arithmetica* de Jordanus conté resultats teòrics tals com que un múltiple d'un nombre perfecte o abundant és abundant, o que un divisor d'un nombre perfecte és deficient (un nombre és *perfecte* si és igual a la suma dels seus divisors altres que ell mateix; *abundant* si és més petit que aquesta suma, i *deficient* si és més gran).

Per situar correctament Jordanus Nemorarius potser cal afegir que ha estat considerat per alguns autors el fundador de l'escola medieval de mecànica (Cf. Boyer, p. 283). Ell i els seus deixebles, a partir de les obres menors d'Arquímedes, estudiaren el problema de la balança i el moviment de caiguda segons una trajectòria obliqua. El resultat més rellevant que assoliren fou la correcta resolució del problema de la caiguda per un pla inclinat. Leonardo da Vinci va fer servir aquests resultats que, segons Crombie, es convertiren en el punt de partida d'alguns dels progressos més espectaculars de la mecànica als segles XVI i XVII (Cf. vol. 1, p. 109). Diguem finalment que Jordanus Nemorarius és també l'autor d'una obra de matemàtiques més pròxima a l'orientació algebraica del àrabs, *De numeris datis*, on dóna una col·lecció de regles amb les quals troba, a partir d'un nombre donat, altres nombres relacionats amb ell per certes condicions, o demostra que un nombre que satisfà certes condicions està determinat. El següent exemple és extret del llibre de Boyer. Per demostrar que si un nombre donat es divideix en dues parts tals que es coneix el producte de les dues, llavors les dues parts estan determinades, Jordanus diu:

"Sigui abc el nombre donat i siguin ab i c les dues parts en què està dividit, i sigui d el producte conegut de les parts ab i c . Sigui e el quadrat de abc i sigui f quatre vegades d , i sigui g

el resultat de treure f de e . Llavors g és el quadrat de la diferència entre ab i c . Segui h l'arrel quadrada de g . Llavors h és la diferència entre ab i c . Des que h és conegut, c i ab estan determinats". (p. 284).

b) Thomas Bradwardine (1290? - 1349)

La contribució més original de l'escolàstica a les matemàtiques va venir de la mà de la física aristotèlica. El *Doctor profundis* d'Oxford, i més tard arquebisbe de Canterbury, Thomas Bradwardine, va formular de manera original el sistema de relacions que Aristòtil havia donat com a base de la dinàmica (la velocitat augmenta amb la força i disminueix amb la resistència). En el *Tractatus Proportionum* (1328) Bradwardine afirmava que la llei d'Aristòtil calia entendre-la així: si una proporció F/R produeix una velocitat v , per a obtenir una velocitat doble, $2v$, no cal $2F/R$, sinó $(F/R)^2$, i per a obtenir $\frac{1}{2}v$, cal $\sqrt{F/R}$.

Així, argumentava l'autor, quan $F = R$ la velocitat és necessàriament zero. La seva equació fou acceptada a Oxford i a París, i era tinguda per molts com "l'autèntica" llei aristotèlica del moviment. Segons J. Vernet, la font d'inspiració de Bradwardine haurien estat els *Aphorismi* del català Arnau de Vilanova, on es trobava la doble progressió aritmètica i geomètrica de l'àrab al-Kindi. Segons Crombie, el treball es basava en el teorema del llibre V d'Euclides on es demostra que si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, llavors $\frac{a}{c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$ (i no cita cap més possible font).

Bradwardine és encara l'autor d'una *Arithmetica*, d'orientació no llunyana a la ja comentada de Nemorarius, i també impresa a París el 1495.

c) Nicolas Oresme (1323-1382)

Nicolas Oresme, un escolàstic de París que va acabar de bisbe a Lisieux, és un pensador d'una gran originalitat a tots els terrenys on va treballar. Amb ell, la matemàtica escolàstica arribà a un dels punts més alts que podien ser assolits dins d'aquells plantejaments.

Per nosaltres té molt d'interès un dels aspectes més coneguts de la seva obra: la primera insinuació dels exponents fraccionaris. Els mètodes de Bradwardine varen influir en els autors més importants que vingueren després d'ell. Oresme, generalitzant la teoria de proporcions de Bradwardine, va escriure *De proportionibus proportionum* (ca. 1360) i *Algorismus proportionum*, on arribava a utilitzar, sense enunciar-les, regles equivalents a les nostres $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ i $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$. Per exemple, Oresme escriu:

"... es proposa una proporció que sigui dos terços de la quàdrupla; i ja que dos és el numerador, la mateixa serà un terç de la quàdrupla duplicada, o bé sisdecuplicada." (Cajori (1928), p. 91).

text que sempre s'ha entès que significa $4^{\frac{2}{3}} = (4^2)^{\frac{1}{3}} = 16^{\frac{1}{3}}$.

El fragment on apareixen els exponents fraccionaris citats per tothom és el següent:

"Una mitja [proporció] ha d'escriure's així $\frac{1}{2}$, una terça així $\frac{1}{3}$, i dues terces així $\frac{2}{3}$; i així les altres. I el nombre que és sobre la barra és dit numerador, i el que és sota la barra és



Venales repèrigitur in vico sancti iacobi ad yma
que dicitur marie virginis e regione sancti bñd cti.

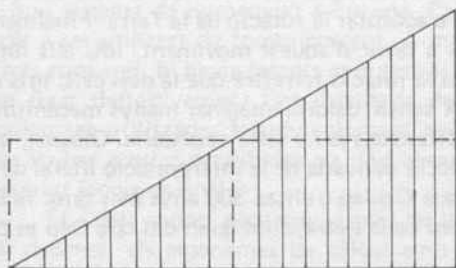
Fig. 4. Primera pàgina de l'Arithmètica de Bradwardine, edició de 1505, a París. (Exemplar de la Biblioteca de Catalunya, Barcelona).

dit denominador. La proporció dupla és escrita d'aquesta manera 2^1a , i la tripla d'aquesta manera 3^1a ; i així les altres. La proporció sesquialtera així és escrita $\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}$, i la sesquiterça $\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 3}$. La proporció una i dues terceres parts és escrita així $\frac{p \cdot 2}{1 \cdot 3}$. La proporció dupla i dues quartes parts és escrita així $\frac{p \cdot 2}{2 \cdot 4}$; i així les altres. La part mitja de la dupla (*medietas duple*) és escrita així $\frac{1 \cdot p}{2 \cdot 2}$, la part quarta de la dupla sesquialtera (*quarta pars duple sesquialtere*) és escrita així $\frac{1 \cdot p \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2}$; i així les altres." (Cajori (1928), vol. 1, pp. 91-92).

Oresme es va limitar a operar sempre amb proporcions. Fins i tot al text anterior és patent la distinció entre els *nombres* que figuren al numerador i denominador i les proporcions 2:1 (dupla), 3:1 (tripla),... que representa per 2^1a , 3^1a ,... Els que han estat anomenats exponents fraccionaris d'Oresme apareixen a les últimes línies, on expressa $\sqrt{2}$ i $\sqrt[4]{2} + \frac{1}{2}$ per $\frac{1 \cdot p}{2 \cdot 2}$ i $\frac{1 \cdot p \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 2}$, respectivament. Les fraccions 1/2 i 1/4 que designen radicació apareixen a l'esquerra de les proporcions afectades.

Podem conjecturar que Oresme es va limitar a operar amb proporcions perquè en tenia prou amb elles per a resoldre el problema físic que el preocupava, però també perquè només amb proporcions podien ser expressades les variacions contínues pròpies de l'especulació física. Els nombres, tal com havien estat heretats dels grecs, eren la mesura de les magnituds discretes. Les magnituds contínues, i més encara si sobre elles calia fer divisions i radicacions, no podien ser sinó proporcions geomètriques.

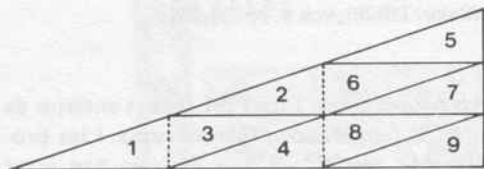
Al segle XIV va sorgir un mètode geomètric gràfic per a expressar les relacions funcionals primitives que els escolàstics començaven a manejar. Un tal Dumbleton, per exemple, fou un dels primers a emprar aquest mètode, aplicant-lo al problema de la variació de la intensitat o força de l'acció de la llum en funció de la distància a la font emissora (Cf. Crombie, vol. 2, p. 88). A París, fou aplicat a problemes cinemàtics per diversos autors, però qui va fer progressos més notables fou Oresme. El mètode emprat per aquests escolàstics perseguia relacionar la "intensitat" o "latitud" d'una "forma" (una "forma" era qualsevol quantitat o qualitat variable: el moviment, la llum, la calor,...) amb una "forma" invariable coneguda (generalment, la distància o el temps) que era anomenada l'"extensió" o "longitud". L'"extensió" es representava per una línia recta horitzontal, sobre la qual s'aixecaven perpendiculars proporcionals a la *intensio*. Oresme va assolir el seu èxit més gran en utilitzar aquests gràfics per representar el moviment uniformement accelerat o, com deien els escolàstics, *uniformement disform*. Un moviment d'aquest tipus es representaria per un triangle en què la base correspondria a l'interval de temps, i les velocitats, que augmenten linealment, serien les perpendiculars a la base. L'àrea del triangle representaria la distància recorreguda.



Una mica abans de 1335 havia estat demostrat a Oxford, aritmèticament, l'anomenat *teorema de la velocitat mitjana del Merton College* (el Merton era on ensenyaven els

autors de les primeres demostracions d'aquest resultat). El teorema diu que la distància recorreguda per un cos uniformement accelerat durant un interval de temps és igual a la recorreguda en el mateix temps per un cos que es mou a una velocitat constant igual a la

que porta el primer cos a l'instant intermedi de l'interval de temps. Amb la seva representació, Oresme va proporcionar una prova geomètrica d'aquest resultat al *De configurationibus Intensionum*. Com ja ha estat observat, allò que és interessant d'aquesta anàlisi és que condueix a la llei galileana del moviment uniformement accelerat. Del diagrama resulta clar que l'àrea corresponent a la primera meitat del temps és, proporcionalment a la segona meitat, com 1 és a 3. Si l'interval se subdivideix en tres parts iguals, les distàncies



corresponents estaran en la proporció 1:3:5. En general, com Galileu va observar, les distàncies són unes a les altres com els nombres senars, i ja que la suma dels n primers senars és el quadrat de n , la distància total recorreguda és proporcional al quadrat del temps. (Els textos claus sobre

bre el teorema del Merton i la generalització de Galileu es troben a Wartofsky, pp. 533-601).

La tercera faceta original d'Oresme ja no està estrictament lligada a la història de les matemàtiques, si bé no deixarem de mencionar-la per tal de donar una idea de quines eren les motivacions i preocupacions generals dels nostres autors, i del context en què treballaven. L'any 1377 Oresme va escriure el *Livre du ciel et du monde*, un comentari en francès al *De caelo* d'Aristòtil fet per encàrrec del rei Carles V de França, un rei amant de la cultura, per encàrrec del qual també va traduir al francès l'*Ètica*, la *Política* i l'*Economia* aristotèliques, que quedaven així més a l'abast, entenia el rei, dels membres de la seva cort.

Al *Livre du ciel...*, Oresme estudiava la hipòtesi de la rotació diària de la Terra. Va estar, en aquest sentit, el precedent més important de l'obra copernicana, llevat de les propostes heliocèntriques fetes a la Grècia clàssica. Oresme començava rebutant les objeccions derivades de l'experiència o de l'observació: Contra l'argument que *veiem* efectivament els cels moure's al voltant de l'eix polar, citava la *Perspectiva* de Witelo; només hi ha un moviment observable, que és el relatiu. Contra el vent que hauria de notar-se en sentit contrari al de rotació, argüia que l'aigua i l'aire participaven de la rotació de la Terra. Contra l'objecció que les fletxes o les pedres disparades verticalment no caurien al mateix lloc d'on haurien sortit, deia que la fletxa es veuria portada per la massa d'aire que es mou solidàriament amb la Terra, i per això tornaria al lloc de partida. Després d'això, Oresme analitzava les objeccions de "raó", que provenien del principi aristotèlic que un cos elemental havia de tenir un sol moviment natural, i que per a la Terra aquest moviment era rectilini i cap avall (un argument que encara fou utilitzat per Tycho Brahe contra Copèrnic). Oresme contestava convertint en *natural* la rotació circular de la Terra i els objectes en repòs damunt d'ella. Observava, a més, que pel que feia a les observacions, totes les taules i els còmputos serien els mateixos que els d'abans, si s'arribés a acceptar la rotació de la Terra. Finalment, Oresme proporcionava una sèrie d'arguments a favor d'aquest moviment, tots ells fonamentats en el fet que és més senzilla i perfecta la rotació terrestre que la dels cels; tots els moviments aparents tindrien lloc en el mateix sentit, caldria imaginar menys mecanismes explicatius, i en particular, la novena esfera dels estels ja no seria necessària. Oresme, que era bisbe, s'enfrontà decididament amb l'objecció derivada de la interpretació literal de la Bíblia, i ho féu amb arguments semblants als que Galileu utilitzà 300 anys més tard: la Sagrada Escripura no sempre pot ser presa al peu de la lletra, com quan diu que Déu es posa colèric, o s'arrepenteix,...

De tot això no és la cosa menys interessant que Oresme, després de raonar tot el que hem explicat, acabi defensant decididament la cosmologia aristotèlica, indicant que els arguments a favor del moviment de la Terra són persuasius, però no proven res. Sens dubte, Crombie té raó quan resumeix l'actitud d'Oresme dient que sotmetia incondicio-

nalment la raó a la revelació, alhora que —ell mateix ho deixa endevinar— feia servir la raó per confondre la raó, disminuint la confiança que se li podia tenir com a eina crítica contra la Teologia.

El tractat d'Oresme mai no fou imprès, i s'ignora si Copèrnic arribà a conèixer-lo. És interessant, tanmateix, que molts dels arguments manejats per Oresme a favor i en contra del moviment de la Terra varen reaparèixer, fil per randa, a l'època de Copèrnic i Galileu.

* * *

El naixement de l'àlgebra es produí lluny del món acadèmic, dins del corrent renovador provocat i representat per les aritmètiques mercantils. Però abans de parlar d'aquestes obres hem de mencionar els treballs de Leonardo da Pisa, (Leonardo Fibonacci), un contemporani de Nemorarius que és l'autèntic predecessor medieval de l'àlgebra renaixentista, tot i que mai no va ensenyar a cap Universitat, ni els seus llibres no van ser gaire coneguts a les escoles.

Leonardo Da Pisa (ca. 1180-1250)

Fibonacci (fill de Bonaccio) era el fill d'una mena de cònsul comercial de la ciutat de Pisa a ciutats del sud-est de la Mediterrània, sobre la principal ruta mercantil de l'època entre Xina i Europa. Sembla que des de jove Leonardo fou ensinistrat en les tècniques de càlcul mercantil dels àrabs, molt més avançades que les europees. Féu extensos viatges per Egipte, Síria i Grècia, i va recollir prou coneixements matemàtics per a elaborar una obra que ultrapassava de molt la capacitat d'absorció i reelaboració del context social, cultural i científic de l'Europa medieval. Ja ha estat descrita la producció matemàtica més important dels 300 anys que van de Fibonacci fins al 1500. Com ara veurem, aquesta producció no té res a veure amb la línia que assenyalava Fibonacci i que era la que tenia futur, la que acabaria generant l'àlgebra a través de les aritmètiques mercantils.

Leonardo da Pisa va escriure quatre obres, la més important de les quals és el *Liber abbaci*, on condensà els coneixements aritmètics i algebraics àrabs i orientals. L'obra, editada per primera vegada el 1202 i revisada el 1228, comença amb la descripció dels numerals indo-àràbics i és, si no el primer, sí el més important dels treballs que divulgaren el nou sistema de numeració a Europa. Cal tenir present, però, que el nou sistema trigà molt a ser utilitzat de forma corrent. A més de la inèrcia que afavoria la utilització de les xifres romanes, hi havia factors com les variacions en les formes de les noves xifres —no es van fixar definitivament fins l'arribada de la impremta— que induïen a confusió, i que podien ser utilitzades fraudulentament pels mercaders (de fet, les xifres indo-àràbigues van arribar a estar prohibides als documents mercantils d'algunes ciutats italianes a causa d'aquest inconvenient).

El *Liber abbaci* contenia, a més de la descripció del sistema de numeració posicional decimal, els algorismes de càlcul amb enters i fraccions més perfectes llavors coneguts. Explicava com calcular, numèricament, arrels quadrades i cúbiques, sent la primera vegada que apareixia a l'Occident cristià un algorisme pel càlcul d'aquestes últimes (Cf. Cajori (1980), p. 123). Ensenyava a resoldre equacions de primer i segon grau; plantejava problemes, determinats o indeterminats, als quals aplicava els mètodes d'una o dues fal-

ses posicions, així com els pròpiament algebraics. Acceptava dues solucions per a les equacions de segon grau, sempre que no fossin negatives o imaginàries. Els algorismes de càlcul i les equacions eren aplicats a la resolució de nombrosos problemes comercials, i en particular als de canvis monetaris. El llibre conté una famosa col·lecció de problemes, extreta de fonts àrabs i orientals. D'un d'ells surt la famosa successió de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, ..., $a_n, \dots$, sent $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. El problema és el següent: Quantes parelles de conills es produiran en un any, començant amb una única parella, si cada mes cada parella produeix una nova parella productiva a partir del segon més?

De l'any 1220 és la *Practica geometriae*, potser la seva obra menys interessant. Segons Boyer, es basaria en una versió àrab d'un llibre d'Euclides avui perdut, la *Divisió de figures*, encara que en ell és visible la tendència dels àrabs a utilitzar l'àlgebra per resoldre problemes geomètrics.

El *Flos*, de l'any 1225, conté problemes indeterminats que recorden els de Diofant: Tres homes posseeixen en comú una quantitat desconeguda de diners t ; la part del primer és $t/2$, la del segon $t/3$ i la del tercer $t/6$. Cadascun en pren a l'atzar una certa quantitat. El primer en pren x i en torna $x/2$, el segon en pren y i en torna $y/3$, el tercer en pren z i en torna $z/6$. De la quantitat *tornada*, cadascun ha de rebre exactament una tercera part per tal de tenir la seva part de la suma total. Leonardo demostrà que el problema és indeterminat i va donar la solució $t = 47$, $x = 33$, $y = 13$, $z = 1$. Però potser el que és més interessant d'aquesta obra és el tractament d'una cúbica: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, sobre la qual Fibonacci va provar la impossibilitat que tingués una arrel racional o una arrel de la forma $a + \sqrt{b}$, amb a i b racionals. Leonardo da Pisa trobà un valor aproximat de l'arrel positiva, però no explicà per quin mètode. El valor expressat en fraccions sexagesimals és 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40. Aquesta és l'aproximació més bona a una arrel irracional d'una equació algebraica mai no trobada a Europa fins a aquell moment, i fins tres-cents anys més tard.

També del 1225 és el *Liber quadratorum*, del qual existeix una traducció francesa a càrrec de Paul Ver Eecke (1951) i una altra en castellà feta a partir de l'anterior per José Babini.

El llibre consta de 20 proposicions que versen sobre problemes relatius a la teoria de nombres, i en els quals intervenen relacions entre nombres quadrats. Els mètodes de resolució tenen el seu punt de recolzament en la interpretació geomètrica dels nombres a partir de segments. La forma concreta de resoldre els problemes proposats correspon a un raonament aritmètic, ajudat per un esquema geomètric i descrit en llenguatge retòric.

La motivació que impulsà Leonardo da Pisa a escriure aquesta obra fou el problema que li proposà un tal Juan de Palermo, que consistia a trobar un nombre quadrat tal que, en sumar-li o restar-li cinc, donés un altre nombre quadrat. Problema que, en paraules de Fibonacci, pertany tant a la geometria com als nombres. El resultat de la recerca al voltant d'aquest problema donà lloc a aquestes 20 proposicions, i la solució al problema que originà el llibre es troba a la proposició XIV.

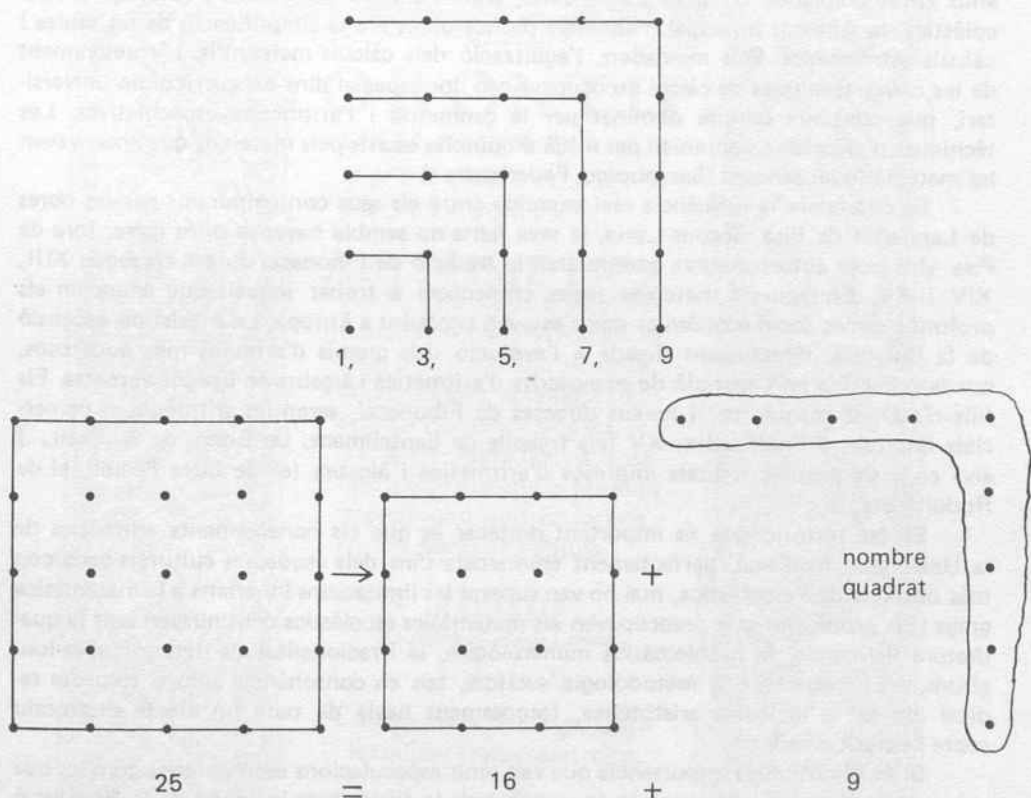
L'estil de resolució d'alguns problemes recorda el mètode emprat per Diofant, encara que Fibonacci no podia conèixer la seva obra sinó, en tot cas, mitjançant una versió indirecta dels àrabs. Per tal de veure la forma de procedir, exposem un paràgraf extret de la proposició I, en la qual es planteja la descomposició d'un quadrat en suma d'altres dos.

"Si volem fer una demostració geomètrica, disposarem conjuntament una quantitat qualsevol de nombres senars, en ordre creixent, a partir de la unitat, fins que el darrer nombre sigui un quadrat. Siguin AB, 1; BC, 3; CD, 5; DE, 7; EF, 9. D'aquí que, com que EF és un nombre quadrat i AE és el nombre quadrat 16 provenent del conjunt ordenat

dels nombres senars AB, BC, CD, i DE, el nombre total AF és, de la mateixa forma, un nombre quadrat. El nombre quadrat AF està així format pels dos nombres quadrats AE i EF'' (p. 30).

Tot el fil argumental precedent a aquest paràgraf, així com el que segueix, té per base l'esquema geomètric com és fàcil de constatar.

A les línies precedents havia posat de manifest que la suma de nombres senars consecutius, començant sempre per 1, dóna un quadrat, fet que es pot esquematitzar mitjançant l'esquema conegut ja pels grecs. Llavors la proposició es redueix a trobar aquells senars que, sent quadrats, permeten descomposar el quadrat gran en un altre de costat una unitat menys, més l'altre tros que es treu format per dos costats, i que també és quadrat per haver-lo escollit així.



Des del punt de vista notacional, la major part de l'obra de Fibonacci és retòrica. Fa servir els mots *res* i *radix* per designar la incògnita, el mot *census* per al quadrat de la incògnita, i *cubus* per al cub. Els mots *res* i *census* havien aparegut a la traducció llatina de l'*Àlgebra* d'al-Hwàrizmí atribuïda a Gerardo de Cremona; *res*, i també *radix*, apareixen a la versió llatina de la mateixa obra feta per Robert de Chester, el qual va proposar el mot *substantia* per al quadrat de la incògnita. Com veurem, els mots *cosa*, traducció italiana del llatí *res*, *census* i *cubus* constituïren la base de les primeres notacions de l'àlgebra quan deixarà de ser retòrica. Leonardo da Pisa expressa les potències superiors de la incògnita

utilitzant el principi additiu: x^6 és *cubuscubus* o bé *censuscensuscensus*. Les equacions són tractades a la manera retòrica. Per exemple, l'equació $2x^2 + 10x = 30$ apareix així: "dos census i deu radices equivalen a 30 denaris," (citat a Cajori (1928), p. 90). En la *Practica geometriae* apareix per primera vegada l'abreviació "R" o "R" per *radix*.

Valoració de Conjunt

Sense que es pugui parlar d'una exclusió radical entre la tradició escolàstica i la tradició mercantil, es pot mantenir que aquestes dues tradicions gaudien d'una entitat plenament diferenciada. La zona comuna a totes dues correspondria als llibres de càlcul amb xifres aràbigues, o *llibres d'algorismes*, segons el nom que rebien aleshores. Pels escolàstics, la finalitat principal d'aquestes petites obres era la simplificació de les taules i càlculs astronòmics. Pels mercaders, l'agilització dels càlculs mercantils. L'ensenyament de les noves tècniques de càlcul no ocupava cap lloc especial dins del currículum universitari, que continuà sempre dominat per la geometria i l'aritmètica especulatives. Les tècniques d'algorisme s'aprenien per mitjà d'opuscles escrits pels mateixos que ensenyaven les matemàtiques *serioses* (Sacrobosco, Peurbach,...)

Es desconeix la influència real exercida entre els seus contemporanis per les obres de Leonardo da Pisa. Segons Loria, la seva fama no sembla haver-se difós gaire, fora de Pisa. Uns pocs autors menors continuaren la tradició de Fibonacci durant els segles XIII, XIV i XV. En aquests mateixos segles comencem a trobar senyals que anuncien els profunds canvis socio-econòmics que s'estaven produint a Europa. La irresistible ascensió de la burgesia, directament lligada a l'evolució dels gremis d'artesans més poderosos, queda reflectida en l'aparició de manuscrits d'aritmètica i àlgebra en llengua vernacle. Els fills d'aquests manuscrits, i hereus directes de Fibonacci, seran les aritmètiques comercials impreses a finals del s. XV (els treballs de Santcliment, de Borgi, de Widman,...) així com els primers tractats impresos d'aritmètica i àlgebra (el de Luca Pacioli, el de Rudolff, etc...).

El fet històric que és important destacar és que els coneixements aritmètics de la Universitat medieval, perfectament emmarcats dins dels esquemes culturals cada cop més obsolets de l'escolàstica, mai no van superar les limitacions inherents a la matemàtica grega. Els *problemes* que preocupaven els matemàtics escolàstics continuaven sent la quadratura del cercle, la problemàtica numerològica, la irracionalitat de determinades longituds,... El respecte a la metodologia euclídia, tan en consonància amb el respecte radical atorgat a la lògica aristotèlica, forçosament havia de tenir un efecte destructiu sobre l'esperit creador.

Si és discutible la importància que van tenir especulacions escolàstiques com les que més amunt hem esquematitzat en la evolució de la Física i en la gènesi de la Revolució Científica, no ho és que la tradició aritmètica medieval es va morir per consumpció i estèrilment. No cal citar la quadratura del cercle d'Alberto de Sajònia (si el cercle es pot quadrar, l'esfera es pot "cubar", i recíprocament; transvasant dins un cub l'aigua continguda en una esfera, es veu que el segon problema és resoluble, per tant la mateixa cosa ha de dir-se del primer. Loria, vol. 1, p. 427) per comprendre que alguna cosa molt important havia deixat de funcionar dins dels esquemes clàssico-medievals. Durant els segles XV i XVI unes poques Universitats, especialment alemanyes, foren els centres d'un nou saber lligat a l'astronomia i a la trigonometria, però l'aritmètica escolàstica, atrapada en la pobresa dels seus recursos intel·lectuals i metodològics, enfront de les figures de Tartaglia, Cardano i Stifel no podia sinó oferir P. Sánchez Ciruelo o Oronci Finne, editors, el

primer, d'obers de matemàtics escolàstics medievals (París, 1945 i 1505), i autor, el segon, d'una *Arithmetica practica* (París, 1535) d'importància menyspreable al costat dels treballs d'àlgebra que eren realitzats contemporàniament.

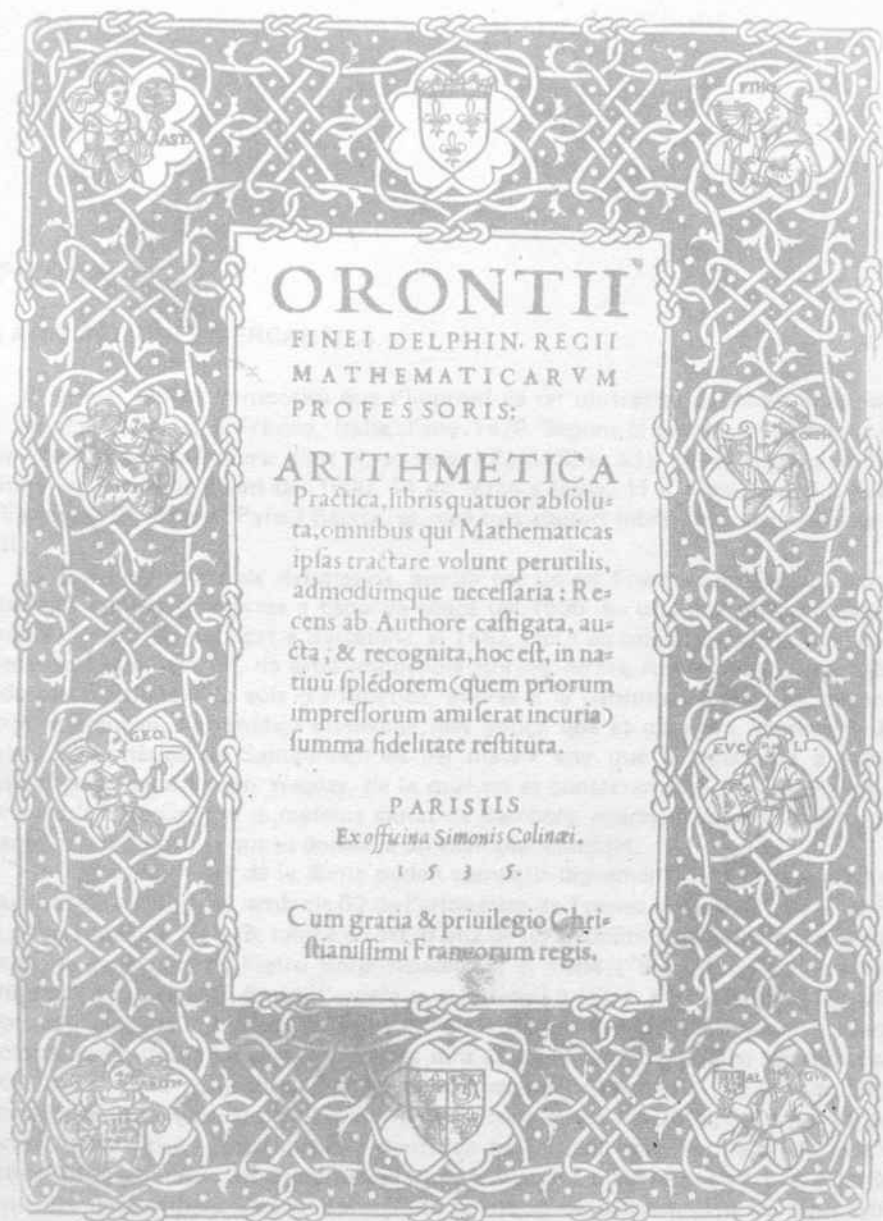


Fig. 5. Primera pàgina de l'*Arithmetica practica* d'Oronci Finné (París, 1535). Exemplar de la Biblioteca de Catalunya.

CAPÍTOL 3:

LES ARITMÈTIQUES MERCANTILS

El primer llibre d'aritmètica que s'imprimí va ser un tractat de matemàtica comercial, anònim, publicat a Treviso, Itàlia, l'any 1478. Segons el *Catalogue of Books Printed in the Fifteenth Century* (Part X, p. xxiv, i Part IX, p. x1), de la trentena de llibres d'aritmètica impresos abans del 1500, 14 ho foren a Itàlia, 11 a Alemanya, 2 a França, 1 a Espanya i un altre als Països Baixos; gairebé tots aquests llibres eren aritmètiques mercantils.

La *Suma de la art de Arismetica*, escrita per un tal Francesc de Sanctcliment, és l'aritmètica comercial impresa a Espanya abans del 1500. És un llibre molt notable, per diferents raons. Fou publicat a Barcelona, el 1482, escrit en català; del seu autor, malgrat les recerques que hem fet, ha estat impossible esbrinar-ne res. A més de ser l'únic incunable de matemàtiques, no sols d'aritmètica, imprès a la península Ibèrica, és, segons les nostres referències, l'aritmètica comercial més antiga que es conserva, després de la de Treviso. L'aritmètica de Santcliment és del mateix any que la publicada a Bamberg (Baviera) per un tal Ulrico Wagner, de la qual no es conserven sinó una desena de fulls esparsos. L'any següent, a la mateixa ciutat de Bamberg, aparegué una aritmètica comercial anònima de la que sí que es conserva un exemplar complet.

Els 136 fulls en 4rt de la *Suma* poden competir dignament, tant en quantitat com en qualitat de continguts, amb els 62 de l'aritmètica de Treviso, amb els 77 de la de Bamberg, i fins i tot amb els 118, també en 4rt, d'una de les aritmètiques més famoses d'aquest període, la veneciana de Pietro Borge, apareguda el 1484 ("the first great commercial Arithmetic" titulava D.E. Smith l'article que li dedicà a *Isis*, t. VIII, 1926). A falta d'una comparació acurada i minuciosa entre els texts de les diferents obres que acabem de mencionar, sens dubte les més importants dins d'aquest corrent, podem aventurar sense arriscar gaire en la conjectura que l'obra del nostre compatriota fou una de les més importants aritmètiques comercials escrites a Europa abans del 1500, i que només l'estat misèrrim de la nostra historiografia científica ha impedit que fos valorada pels més il·lustres historiadors de les matemàtiques de la mateixa manera que ho han estat la de Treviso, les de Bamberg i la de Borge. Que Francesc de Sanctcliment no sigui avui un desconegut es deu a L.C. Karpinski, el qual el recuperà per a la història a partir d'un catàleg d'incunables catalans i en publicà un estudi a *Osiris*, l'any 1936. Amb motiu del

Alor e gloria de deu e dela hu
mil uerge Maria mare sua co
mença lo libre appellat suma
de la art de Arismetica. Lo q̄l
diuisem en .iij. parts. çoes en nombrar
aiustar/restar/multiplicar/dimidiar/par
tir/regla de tres ab diuersitat de raons/ 2
panyes/cambis/barates trècats ab to
tes les .4. species/ sou de fi ab diuersitat
de billons/ de vna e oues falsees posicions
progressiōs/ e proporciōs. Deles quals
parts ho species breument empero a suf
ficiencia aci en lo present tractat parlafe

De nombrar e conèxer les figures.

Nombrar es lo nombre preposat en al
gunes figures comunes de paraula per
ceptiblement exprimir. / Altrament nom
brar es lo nombre en len teniment conce
but per hures comunes visiblement re
presentar. // E has de saber: que no son
mes de .io. chiffres. Car axi com lo nomb
re de .io. es lo primer nombre cōplit: lo qual
conte en si tota los nombres: que passen

Fig. 6. Primera pàgina de la *Suma de la art de arismetica* de Sanctcliment, Barcelona, 1482. (Exemplar de la Biblioteca de Catalunya, Barcelona).

500 aniversari de la impressió de la *Suma...* de Sanctcliment, vem descriure i analitzar aquesta obra en articles publicats a les revistes *L'Avenç* i *(Ciència)*.

Per veure imprès un altre llibre de matemàtiques a Espanya cal esperar fins al 1503, quan s'editen a València l'*Arithmetica* i la *Geometria* de Bradwardine (Cf. Rey Pastor, p. 155). I no en torna a aparèixer cap altre fins a la primera versió del *Tratado Subtilissimo de Arismetica y de Geometria* (León, 1512), també una aritmètica comercial, l'autor de la qual és el frare Juan de Ortega (o Horteja).

Que la majoria d'aquesta mena de llibres apareguessin a ciutats que eren centres comercials importants, amb nuclis de burgesia prou consistents, reflecteix una vinculació òbvia entre aquelles obres i el seu públic natural. Elles constituïen una eina de treball amb algunes de les funcions de les calculadores de butxaca d'avui: incloïen taules d'equivalències de monedes i mesures, ensenyaven els algorismes més ràpids per a fer canvis de monedes, ensenyaven regles de tres i repartiments proporcionals.



Fig. 7. Pàgina amb el títol del capítol dedicat als canvis de monedes a l'Arithmetica d'Ortega (f.41R., edició de Roma, 1515; exemplar de la Biblioteca Universitària de Barcelona).

La producció matemàtica, d'una certa matemàtica almenys, va quedar així lligada a les ciutats més riques i econòmicament desenvolupades, les d'Alemanya i les del Nord d'Itàlia, ciutats on treballaren els autors més importants d'aquest període. El següent quadre cronològic dóna idea de les edicions de les principals obres i de llur localització:

ANY	CIUTAT	AUTOR	LLIBRE	NACIÓ
1478	Treviso	Anònim	Tractat d'aritmètica	ITALIA
1482	Bamberg	Ulrico Wagner	Llibre de càlculs	ALEMANYA
1482	Barcelona	Francesc Sanctcliment	Suma de la art de Arismetica	CATALUNYA
1484	Venezia	Pietro Borgi	Arithmetica	ITALIA
1484	Lyon	Nicolas Chuquet	Le Triparty en la science des nombres	FRANÇA
1489	Leipzig	J. Widman	Tractat de càlcul	ALEMANYA
1490	Florença	F. Calandri	Arismetica	ITALIA
1494	Venezia	Luca Pacioli	Summa de arithmetica	ITALIA

L'obra de N. Chuquet només circulà manuscrita. Uns anys més tard, el 1520, se n'edità un mal plagi. La citem, tanmateix, perquè es tracta de l'obra més innovadora de tot el període que estem considerant. Més endavant l'analitzarem amb tota la cura que es mereix.

El contingut de les aritmètiques mercantils

A totes aquestes obres trobem uns continguts semblants: Descripció del sistema de numeració posicional de base deu, algorismes de les quatre operacions amb nombres enters positius, descripció dels nombres trencats i de les operacions amb ells, regles de tres, progressions i resolució de problemes (dels quals acostumaven a incloure'n una considerable col·lecció, molts d'ells d'aplicació directa a situacions comercials). Les obres més avançades contenien algorismes per a l'extracció d'arrels quadrades i cúbiques. La figura 8 reproduïx un fragment de l'Índex del *Tratado...* d'Ortega.

És interessant subratllar que aquests llibres foren els principals i gairebé únics difusors de les xifres indo-àrábiques. Ja hem dit que aquests guarismes eren coneguts a Europa des del segle XII, però que durant l'Edat Mitjana mai no van ser utilitzats correntment. L'extensió de l'activitat mercantil i la importància creixent dels mercaders —quantitativament i qualitativament— promocionaren el nou sistema de numeració i les tècniques annexes de càlcul; durant el segle XVI, però no abans, els àbacs varen desaparèixer pràcticament de l'Europa occidental.

El capítol de la subtracció acostuma a anar precedit d'una explicació sobre la manera de distingir quina és la més gran de dues quantitats. Com diu Sanctcliment, "Sostreure es leuar un nombre de un altre: que sia maior". (f. 10v). A continuació, sota el títol "Per conèixer de qui se fa la sustracció", dedica dues cares de foli a explicar com reconèixer el nombre més gran.

La dificultat considerable que l'algorisme de la multiplicació comportava, relacionat amb l'esforç necessari per a memoritzar les taules de la multiplicació per una xifra, quedava reflectida tant en el gran nombre de pàgines que totes aquestes obres dedicaven a donar nombrosos exemples de multiplicacions, com en els diferents algorismes que desenvolupaven, com també en les nombroses regles mnemotècniques, clarament dirigides a estalviar haver d'aprendre de memòria totes les taules completes. Quant al tractament dels algorismes i de les regles citades, la continuïtat amb la tradició àrab és absoluta (cf. pp. 16-19). Aquestes regles no eren demostrades, com tampoc no ho eren, d'altra banda, els algorismes de les quatre operacions.

La forma de divisió a l'Occident és essencialment la mateixa que la dels àrabs (cf. p. 19). La diferència més important rau en el fet que els algorismes més utilitzats a Europa a partir dels s. XV eliminen les restes parcials, que es fan de memòria, amb la qual cosa el nombre de xifres a manejar disminueix, en comparació amb els algorismes àrabs.

Els resultats no exactes de la divisió i de la radicació eren expressats amb fraccions; per exemple, Ortega calcula l'arrel quadrada de 55.702 i dona com a resultat $236 + 6/273$ (f. 22v; totes les cites de l'obra d'Ortega fan referència a l'edició de 1534).

Els quatre capítols dedicats a cadascuna de les operacions amb enters acaben insistint sobre la manera d'operar correctament amb quantitats mixtes. Diu Sanctcliment, per exemple, després d'explicar l'algorisme de la suma: "arans resta a posar algunes ajustacions [*sumes*] de carregues e de quintars de liures de onzes e de quarts" (f. 8v). En cap d'aquests capítols, ni tampoc en parlar de les operacions amb trencats, no es fa

Tabla.		Ellos
Tractado de reglas de compañías sin tiempo, fo.	124	este tract
Reglas de compañías con tiempo, fo.	138	a. signific
Reglas de testamentos, fo.	152	
Reglas de baratar o trocar sin tiempo, fo.	157	fol. 8. p.
Reglas de argenteria, e finezas de plata y oro, fo.	167	Folio. 14
Reglas de viages, fo.	183	Folio. 28
Reglas de vna falsa posicion, fo.	195	Folio. 31
Reglas de dos falsas posiciones, fo.	210	aredr
Tractado de Geometría, fo.	221	En la me
Fin de la tabla.		Folio. 3
		de lei
		fo. 53.
		Folio. 55
		Folio. 60
		Folio. 62
		de ade
		En la me
		Folio. 63
		+ de e
		Folio. 69
		En el me
		tre. 6. v
		Folio. 71
		En la me
		Folio. 72
		Folio. 73
		En la me
		re. los
		Folio. 93
		ga. 195
		Folio. 96
		fieten

Fig. 8. L'índex del *Tratado Subtilissimo...* d'Ortega. Ocupava l'última pàgina de l'edició de 1552. (Exemplar de la Biblioteca de Catalunya).

mentió de propietats de les operacions, tipus conmutativitat, distributivitat,..., malgrat que al càlcul i als problemes s'utilitzen àmpliament.

Els nombres trencats, una de les grans novetats conceptuals d'aquestes aritmètiques, són introduïts sense cap mena de definició, si entenem aquest mot en el sentit habitual dins l'argot matemàtic. Tota la definició que dóna Sanctcliment dels nombres trencats és:

"E sapies: que en tot nom trencat ha 2 nombres. lo un s'escriu debaix/ laltre dalt ab una barra en/mig. E aquell de dalt se nomena nonbrador. çoes que conte les parts trencades. E aquell de baix se appella denominador: que denomina e demostra les parts trencades quines

Com sia cosa molt necessaria a qualse-
vol: qui en aquest art desia entendre: la
primera cosa en aquesta specia saber a q
ta taula de cor: per ço la he aci figurada: q
muyenat nostre senyor deu e aquesta ha
de saber multiplicar partir e totes les al-
tres regles, car no seria possible en altra
manera nengu pogues apèdre alguna
specia ab perieccio.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	6	8	10	12	14	16	18	20	
12	3	4	5	6	7	8	9	10	
9	12	15	18	21	24	27	30		
6	3	4	5	6	7	8	9	10	
16	20	24	28	32	36	40			
14	5	6	7	8	9	10			
25	30	35	40	45	50				
5	6	7	8	9	10				
36	42	48	54	60					
6	7	8	9	10					
49	56	63	70						
7	8	9	10						
64	72	80							
8	9	10							
81	90								
9	10								
100									
10									

MVLTIPlicARE

	Via		Via	
1	1	1	4	5
2	2	4	4	6
3	3	9	4	7
4	4	16	4	8
5	5	25	4	9
6	6	36	4	10
7	7	49		
8	8	64		
9	9	81		
10	10	100		
1	3	6	5	6
2	4	8	5	7
3	5	10	5	8
4	6	12	5	9
5	7	14		10
6	8	16		
7	9	18	6	7
8	10	20	6	8
3	4	12	6	9
3	5	15	6	10
3	6	18	7	7
3	7	21	7	8
3	8	24	7	9
3	9	27	8	9
3	10	30	8	10

¶ Per sapere como se intende la dicta tabula hai de sapere: ch' semp
la prima figura verso la mano macha domada ad quilla de mezzo
donde dice via: & respondeno le vltime verso la mano derista: la
quale tabula bisogna sapere ad memoria como la Ave Maria.
¶ Nota che in lo multiplicare solamente sono necessarij doi nu-
meri vno e lo multiplicatore laltro e lo numero de quillo che desi-
deri multiplicare. Et per tanto te aniso che sempre lo multiplicato-
re deve essere mancho: & lo numero che desiari multiplicare de-
ue essere maiore: & colli medesimo hai de notare che lo numero
che vole multiplicare sempre ha de stare sopra perche esmaio-
re: & lo multiplicatore vole stare desotto mittedo lo numero de
sotto delo numero & la decena desotto dela decena: & la centena

Fig. 9. Taules de multiplicar de les aritmètiques de Sanctcliment (dreta) i Ortega (edició de 1515).

son çoes si son mitats ho terços ho quarts ho quintes e axi dels altres parts segons lo denomi-
nador: qui les denomina." (f. 54r i v).

A falta de definicions, l'accent està posat en el *significat* dels nombres i de les
operacions. Tots aquests autors s'entenen a explicar com pot ser expressat, amb uni-
tats més petites, per exemple, el valor d'un terç d'una lliura, o de 1/5 de 1/4 d'un quin-
tar,...

L'orientació i el contingut de les aritmètiques comercials són quasi idèntics als
dels seus antecedents més directes, les àlgebres àrabs i el *Liber abbaci* de Fibonacci. La
diferència més essencial rau en l'absència de mètodes pròpiament algebraics en el plan-
tejament i resolució de problemes.

El tractament dels problemes a les aritmètiques mercantils

Ja hem dit que aquestes obres contenien una gran quantitat de problemes, la majoria d'ells directament relacionats amb necessitats reals del mercader d'aquella època: problemes sobre el càlcul del valor real d'una mercaderia permutada (els problemes de *barates*), el càlcul dels impostos dels peatges (que es pagava en mercaderies), els problemes d'aliatges, la transformació d'unitats de mesura,... Cadascun d'aquests tipus era tractat separatament, donant-ne una recepta. La mateixa cosa es feia amb altres tipus de problemes que ho admetien, com els de velocitats. Vegem, per exemple, com ensenyava a resoldre aquests problemes l'*Aritmètica* de Treviso (Fig. 10):

1. *El regola de le vo cose che se cazano e po se cōzongeno e questa. che se dic multipli care li vo numeri per el numero de li passa auāzati e partire per la differentia che ne la grādeza de qlli vo numeri. Exemplo.*

Uno lieuro e auāti vn cane: el quale il caza: passa a meixura. i 5 o. et in tanto chel lieuro fa passa. 6. el cane ne fa passa. i 0. Domando: quanti passa hauera fatto el cane: quando zongera al lieuro. La differentia tra. 6. e. i 0. vien a essere. 4. che par more. De fa secondo la regola a questo modo.

i 5 0	
i 0	E passa. 3 7 5. hauera fatto il
i 5 0 0	cane: zōto chel fara al lieuro
passa. 3 7 5	

Se tu la vuol prouare: fa raxone quāti passa ha uera fatto el lieuro cosi.

i 5 0	
6	
9 0 0	E passa. 2 2 5. hauera fatto el
passa. 2 2 5	lieuro: quādo il cane fara zōto.

Jontra questi. 2 2 5. passa: li. i 5 0. Li quali el lieuro haueua de auantazo: fara. 3 7 5. Ecco come tra el corso del lieuro e lo auantazo che lhauaua: ha fatto tanti passa: quanti el cane. E cosi e compita. Unde nota de fare per quista via le simile raxone.

Fig. 10.

"La regla de les dues coses que es persegueixen i després s'ajunten es aquesta: que cal multiplicar els dos nombres [v_1, v_2 de passos recorreguts en un mateix temps] pel nombre de les passes avançades [d , la distància inicial] i partir [els dos nombres dv_1, dv_2 així obtinguts] per la diferència que hi hagi entre la grandor d'aquells dos nombres [$v_1 - v_2$ és a dir, que els espais recorreguts en el moment d'ajuntar-se són $\frac{dv_1}{v_2 - v_1}$ i $\frac{dv_2}{v_2 - v_1}$].

Exemple:

Una llebre és al davant d'un ca, el qual l'encalça; és 150 passes al davant d'ell i mentre la llebre fa 6 passes, el ca n'ha fet 10. Demano: quantes passes haurà fet el ca quan atraparà la llebre? La diferència entre 6 i 10 és 4, que és el partidó. Segons la regla $150 \times 10 = 1500$ [i $1500/4 = 375$]. I 375 passes haurà fet el ca quan haurà atrapat la llebre. (...)" (Boncompagni, p. 575).

Evidentment, l'obra inclou una regla diferent, explicada amb el mateix estil, per a poder resoldre els altres problemes de velocitats, els problemes en que els mòbils avancen un cap a l'altre (Cf. Boncompagni, p. 570).

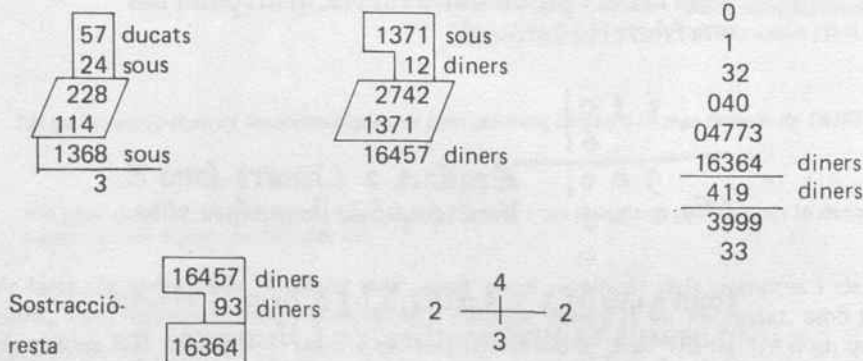
Diffícilment serà ultravalorat el paper jugat per la resolució de tota aquesta mena de problemes com a element generador del llenguatge i de les tècniques bàsiques algebraïques de resolució d'equacions. Aclarirem això amb un exemple extret de Sanctcliment (Fig. 11).

f. 93v "si 57 ducats 3 sous 5 diners valen 39 alfonsins 7 sous 9 diners: que val
94r ra 1 alfonsi?

Deus primerament fer dels 47 ducats 3 sous 5 diners de tot diners. e aço per tant com la menor quantitat en la rao son diners. E quan los dits ducats hauras tornats a diners: aiustaras los 3 sous 5 diners als diners: que son exits dels ducats. E quan la aiustacio sera feta levaras de la dita suma dels diners los 7 sous 9 diners dels alfonsins. e los diners quant seran resstats: partir los has per 39 alfonsins. e tant quant te exira de la partio: se/ra la valor del alfonsi.

94v

La pratica affigurada



Leoprotica affigurata.

[illegible]

E ad apparencia pratica vamente affigu-
rada que valtra quenda alfonfo. 419. a 7.
neca d'aleto. 59. parte de. 1. dimer lca. 23.
parte que fca per tot. 34. fous. 11. vñs
e. $\frac{1}{2}$. e 44. rrentanous de pugela. e es
feca. 11. fca volta prouar la rao n'es bona
Mafira la maior e al alfonsi per los. 39
alf. e fi fume rair cõ los dñs. q fou exto

La paz en los cambios

¶ E perque millor conegues la veritat de la regla, et veure aquells proua general: que multiplicat los 6. timbers per, 12. fons e, 11. diners e, 3. q. si fuma tant com lo fuma: que bauras partit flet fenyal: q. e bona. Simo fumate tant: que fumas menys ho mes: seria falsa. Item per ma tor veritat: que bauras multiplicat: si fuma: lo iust de la suma partida: 22. austers aquella, 7. fons, 5. diners, que bas leuat de la suma dels fons: que lon exa dels flozins, e si fumen ho toren en aqil primer gran de 5. flozins iusts: flet fenyal: que es bona e simo torna en lon de q. ont: seria falsa. E aqo pots veure baix en la pratica assignada.

72 tons	12 11 5 1/2
5676	66
Amibacio 76 56	72 676 0
Duma. 84 60 6	56
	776 76

Altra raó de canvió,

Di. 7. ducato. 3. sous. 4. diners val
39. 4. fenins. 7. sous. 9. diners: q val

de tota los dilataes: de bona, fino: fiet sen
yal: que sena falsa. E aco faras axi com
he mostrat en la pratica de la primera na
de cambio.

Ultrasono e cambi.

Si. 3. floriz e. $\frac{1}{2}$. balen. 2. scuts e. $\frac{1}{2}$: q
balra lecut?
A regla da present raõ es aquesta: que
trem rediir los. 3. floriz e. $\frac{1}{2}$. tot a mig
Item oquem reduir los. 2. scuts e. $\frac{1}{2}$. tot
a terços. E apas segurem la regla: per
viu: multiplica per simetreix e parteix: per
lo que d'figes labor. E perço fare d'ros
los migs fons bo diners: e partirem per
los. 7. terços. e tant quant ne vendia:
tant valdia quada terç de scut. E ago fa
ràs: legons acurats duns en patrics.

7 migs de flozi 4
3 6 6. nator ol. 1. 2. 2
44. diners 7
3 6 6 0 3 0 0
35 3 8 6 6 4 2 8
suma 3 8 6 6 6 6 6 6
7 6 6 6 7

ra Lalfonfi?

La prefer raio la passada son semblans
que totes per vn orre e regia se fan: que
noy ha neguna diferencia sino per la mo
neda: que la vnara son ducats e alfon /
fina e la altra son flozins e timbres, q
les soltraccions que les vnes eles altre s
fan son semblants. E aço pots veure de
tus en pratica.

A prática não é obrigatória.

E cus primeramente fer dolo. 57. Ducats
3. lous. 5. diners de tot diners. e aco per
tant com la menor quantitat en la rao lo
vintars. E quant los dits ducats baural
tornare a diners: auissar a los. 3. lo. 5.
diners als diners: que son cets dols
vintars. E quant la auissacio lera feta. lous
rao dols una suma cels diners los. 7. l.
5. diners dols alfonfins. e los diners qe
siran restats: partir los bas per. 59. alfo
fins. e tant quant te exira de la partio: le
ra la valor del alfonfi.

Fig. 11. El problema del valor de l'alfonís en ducats (folis 93v. a 95r.). A la línia 23 del foli 93v. (p. esquerra superior) comença l'enunciat: "Altra rao de cambis. Si .57. ducats .3. sous...". La resolució del problema descrita retòricament apareix a partir de la línia 10 del f. 94r. (p. dreta superior); "La pratica de la rao damunt dita. Deus primerament fer dels .57. ducats...". El primer text després de les operacions del f. 94v. (p. esquerra inferior) conté la solució: "E axi appar en la pratica damunt affigada: ...". És interessant observar l'algorisme primitiu utilitzat per a la divisió. En la transcripció d'aquestes operacions, inclosa en el text, hem indicat on apareixen la resta, el quocient, etc. (Exemplar de la Biblioteca de Catalunya, Barcelona).

Les operacions intel·lectuals anteriorment descrites no són sinó el pas previ a l'àlgebra simbòlica que regirà la resolució d'equacions. A més, són presents en la resolució del problema les dues regles que ja els àrabs havien identificat com allò essencial als raonaments algebraics. Això encara serà més patent si representem taquigràficament les operacions anteriors:

$$\begin{aligned} 57 \text{ duc} + 3 \text{ sous} + 5 \text{ diners} &= 39 \text{ alf} + 7 \text{ sous} + 9 \text{ din} \\ 16457 \text{ din} &= 39 \text{ alf} + 93 \text{ din} \\ 16364 \text{ din} &= 39 \text{ alf} \\ 1 \text{ alf} &= \frac{16364}{39} \text{ din} = 419 \text{ din} + \frac{23}{39} \text{ din} \end{aligned}$$

A més dels tipus de problemes ja esmentats, es dedicaven capítols específics a les múltiples aplicacions de la regla de tres (i, en general, de la proporcionalitat). Aquestes obres acostumaven a acabar explicant els mètodes d'una i dues falses posicions, amb els quals es podien resoldre problemes (expressables en forma d'equacions) de primer grau. Aquests mètodes els aplicaven a resoldre problemes "d'edats" ("Un fill té la meitat d'anys que son pare..."), de compra i venda ("Un mercader compra drap a 5 diners la cana, i el revèn...") i altres per l'estil. La importància que tenia la resolució de problemes en aquest context es posa de manifest en el fet de que el tros específicament dedicat a llur resolució mai no baixa del 60-70% de l'extensió del llibre. És aquesta una de les coses que millor pot caracteritzar aquestes obres, totes elles impregnades d'esperit utilitari i didàctic.

Potser cal dir que els mètodes d'una i dues falses posicions ja es troben dins de la tradició àrab, i que probablement llur origen cal buscar-lo en la matemàtica hindú del segle 5 ò 6. En qualsevol cas, foren les aritmètiques mercantils del segle XV les que els aplicaren exhaustivament, conduint-los fins a les mateixes portes de l'àlgebra. Dit en el nostre llenguatge, el mètode d'una falsa posició consisteix en el següent: Per resoldre l'equació $ax = b$, es prova amb un nombre x_1 (la falsa posició) generalment escollit de manera que els càlculs no esdevinguin llargs. Si dona $ax_1 = b_1$, llavors $x = \frac{x_1}{b_1} \cdot b$.

El mètode de dues falses posicions consisteix en el següent: per resoldre l'equació $ax + b = 0$, es prova amb dos nombres x_1 i x_2 (les dues falses posicions), escollits com abans. Si $ax_1 + b = y_1$ i $ax_2 + b = y_2$, llavors $\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2} = -\frac{b}{a} = x$. Per a acabar amb aquest apartat, podem veure com utilitza Juan de Ortega la falsa posició per resoldre un problema de geometria (Fig. 12):

f. 229v "Un hombre tiene una tierra cuadrada: la qual tiene por cada un quadrangulo 10 varas: este hombre quiere trocar esta tierra quadrada a otra redonda: demando que quantas varas tera por circuito la tal tierra redonda: faras assi: multiplica por si las 10 varas que tiene la tierra quadrada por cada quadrangulo y montaran 100 y tantas varas diras que tiene la tierra quadrada: pues busca un numero que quitandole sus tres catorzenas queden 100:"

Ortega sempre utilitza el valor aproximat de π , $3 + 1/7$. Agafant com a incògnita el diàmetre del cercle, es veuria conduït a l'equació $100 = \frac{22}{7} \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{11}{14} d^2$, que curiosament planteja així $100 = d^2 - \frac{3}{14} d^2$.

En hombre tiene vna tierra quadrada: la qual tiene por cada vn quadrangulo. 10. varas: este hōbre quiere trocar esta tierra quadrada a otra tierra redonda: demandando que quantas varas terna por circuito la tal tierra redonda: faras assi: multiplica por si las. 10. varas que tiene la tierra quadrada por cada quadrangulo 7 montaran. 100. 7 tātās varas diras que tiene la tierra quadrada: pues busca vn numero que quitandole sus tres catorzenes queden. 100: el qual hallaras en esta manera como por vna falsa posicion que buscaras vn numero que quitandole su septima parte: la tal parte sea. 10. el qual numero hallaras q̄ son

Reglas de geometria.

230

70. pues toma la septima parte que son. 10. 7 despues toma la mitad destos. 10. que son. 5. 7 pon los con los mesmos. 10. 7 serā. 15 7 estos. 15. son los $\frac{3}{14}$ porque tres catorzenes son vn setabo y medio: pues quita estos. 15. de los. 70. 7 quedará. 55. despues di por regla de 3. si. 55. son restados de. 70. de quien restará. 100. multiplica 7 parte como te he enseñado por regla de 3. 7 fallaras que restaran de. 127 $\frac{1}{11}$ 7 este es el numero que quitandole vn setabo y medio: o. 3. catorzenes que todo es vno restará. 100. ¶ Pues quita la rayz quadrada q̄ son. 11. 7 dos setabos a causa del roto: 7 tātās varas terna el diametro. ¶ Pues multiplica estos. 11. 7 dos setabos por. 3. 7 vn setabo: 7 verna ala multiplicacion. 35. varas 7 $\frac{3}{14}$ de vara: 7 tātās varas terna la tal tierra redonda por circuito: 7 assi diras que t̄bien terna la tal tierra redonda. 100. varas. Si lo quieres ver toma la mitad delas. 11. varas 7 $\frac{3}{14}$ de vara q̄ tiene la tierra por diametro q̄ son. 5. varas 7 $\frac{1}{14}$ de vara: 7 multiplica cōellos. 17. $\frac{16}{14}$ q̄ es la mitad delas. 35. varas 7 $\frac{3}{14}$ de vara que tiene por circuito: 7 hallaras que montan. 100. varas.

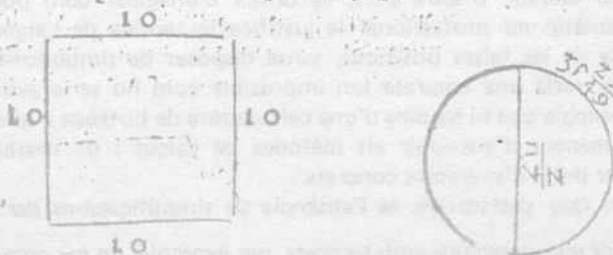


Fig. 12

f. 230r

“el qual hallaras en esta manera como por vna falsa posicion que buscaras vn numero que quitandole su septima parte: la tal parte sea 10 el qual numero hallaras que son 70. pues toma la septima parte que son 10 y despues toma la mitad destos 10 que son 5 y pon los con los mesmos 10 y seran 15 y estos 15 son los $\frac{3}{14}$ porque 3 catorzenes son un setabo y medio: pues quita estos 15 de los 70 y quedaran 55 despues di por regla de tres si 55 son restados de 70 de quien restaran 100 multiplica y parte como te he enseñado por regla de 3 y fallaras que restaran de 127 $\frac{3}{11}$ y este es el numero que quitandole un setabo y medio: o 3 catorzenes que todo es uno restaran 100. Pues quita la rayz quadrada que son 11 y dos setabos a causa del roto: y tantas varas terna el diametro. ...”

La metodologia de les aritmètiques mercantils

L'axiomatització i el caràcter deductiu de l'exposició dels coneixements és un tret característic de l'aritmètica grega del tot absent dels llibres d'aritmètica i d'àlgebra del primer Renaixement. Les obres d'aritmètica clàssica que van passar a l'Occident cristià, com les de geometria o qualsevol altre saber que pels grecs hagués tingut categoria filosòfica, contenien els resultats assolits durant el període creatiu (uns quants segles) de tot un cicle cultural acabat. Aquestes obres no pretenien sinó *organitzar sistemàticament* un saber conegut. Contrastant amb això, les aritmètiques del segle XV i començaments del XVI dediquen moltes més pàgines als problemes i a les aplicacions que a allò que podríem anomenar *teoria*, tot i que, com ara veurem, cal devaluar molt aquest mot en el context de les aritmètiques comercials.

Les definicions són utilitàries i descriptives, sense cap mena de preocupació per la generalitat o el rigor. Ja hem citat anteriorment la definició que dona Sanctcliment dels nombres trencats (pàg. 57). Un exemple tret d'Ortega és la següent definició de les progressions:

f. 25r 'Siguese que cosa sea progression natural.

La progression natural es aquella que comiença en vno: y va creciendo siempre vn punto en cada letra solamente assi como las figuras siguientes 1 2 3 4 5 6 7 8 9 en las quales puedes ver claramente que no suben mas de un punto.

.....

Que cosa sea progression en parte natural/y en parte no natural.

La progression en parte natural: y en parte no natural es aquella que va subiendo solamente vn punto: y puede començar en qualquier numero que querras sin que comience en vn punto como si començasses en las siguientes figuras: 8 9 10 11 12 13 y 6."

La definició descriptiva gairebé sempre va acompanyada d'una explicació sobre el significat del terme o del concepte introduït, o sobre l'ús que normalment se'n fa.

Dels diferents algorismes, regles i mètodes de resolució de problemes, mai no se'n dona la justificació teòrica. D'altra part, és difícil d'imaginar com podia ser posada a l'abast del matemàtic no professional la justificació teòrica de l'algorisme de la divisió, o de la regla de les falses posicions, sense disposar de simbolismes algebraics ni conceptes adequats; seria una empresa tan impossible com ho seria avui pretendre ensenyar tota la tecnologia que hi ha dins d'una calculadora de butxaca a qualsevol que hagi d'utilitzar-les. La manera d'introduir els mètodes de càlcul i de resolució és absolutament pràctica: per mitjà d'exemples concrets.

Un altre tret que destacarem és l'absència de simplificacions per generalització.

A l'hora d'introduir les operacions amb trencats, per exemple, un cas com $\frac{m}{n} + p$ mai no és considerat un cas particular de $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$, i tots dos s'expliquen, sempre a base d'exemples concrets, per separat. Quan Juan de Ortega ensenya a sumar progressions també tracta per separat els diferents tipus en que les ha dividides, i explica com sumar-les a través d'uns quants exemples i sense donar, ni tan sols retòricament, una fórmula o el seu equivalent. Aquestes obres exploten sistemàticament el principi d'anar dels casos particulars al cas general.

Aquest estil, que contrasta tant amb el nostre i amb els dels grecs, té al darrera els següents factors. Aquests llibres s'adreçaven a un públic sense cultura clàssica, no

acostumat ni a la retòrica ni a les subtileses lògiques. Era un públic que podia més aviat menysprear que no pas apreciar qualsevol cosa que pogués recordar l'escolàstica, la gran *demodée* de l'època. D'altra banda, la teoria de tot allò que s'explicava estava per fer (i ho havia d'estar durant molt de temps). Per qui estava interessat fonamentalment per la capacitat instrumental de l'aritmètica, que eren la majoria dels qui l'estudiaven en aquella època, hagués estat un contrasentit oferir-li, d'existir, definicions lògiques que res no li aportaven, com ho hagués estat la introducció de *simplificacions* com les que hem citat abans, que no sols no simplificaven els càlculs, sinó que moltes vegades els feien més llargs.

Aquests llibres no pretenien *organitzar* uns coneixements *valuosos en si mateixos*, sinó que pretenien *ensenyar* als comerciants a *utilitzar unes eines*. Potser la diferència d'objectius és allò que més aclareix la contraposició metodològica entre l'aritmètica grega i la del segle XV, i allò que millor fa entendre els trets d'ambdues. Des d'aquesta perspectiva, és evident que els dos tipus d'obres que hem analitzat van reeixir. El saber aritmètic grec es va conservar i va poder ser utilitzat en el seu moment. El nou saber aritmètic es va difondre i va generar l'àlgebra, l'eina que li permetria finalment tornar als orígens. Contra el que molts deixen entendre, només la història dirà si aquesta tornada és definitiva.

CAPÍTOL 4:

LES PRIMERES ÀLGEBRES RENAIXENTISTES

El Context i les Motivacions

Le Triparty en la science des nombres (1484), de N. Chuquet, i la *Summa di aritmetica, geometria, proporzioni e proporzionalita* (1494), de Luca Pacioli, són considerats els primers treballs moderns pròpiament algebraics escrits a Europa. És opinió indiscutida que són ells els qui inicien el desenvolupament de la línia i de l'esperit de treball que, passant per Vieta i per Descartes, determina completament l'aspecte de les matemàtiques posteriors. Aquestes dues obres no aparèixen aïllades; als 40 primers anys del segle XVI van ser editats uns quants llibres més de característiques semblants als esmentats. Començarem per intentar-nos explicar les necessitats que satisfieien aquestes obres i qui eren els seus autors.

L'Europa occidental de finals del segle XV i començaments del XVI era una regió en plena expansió econòmica. Per raons que no es coneixen prou bé, es va produir un augment demogràfic notable, el volum del tràfic comercial es disparà i la quantitat de productes manufacturats es va multiplicar. Peripècies i aventures com la circunnavegació d'Àfrica, o la travessia de l'Atlàntic, no eren sinó el reflex d'una demanda comercial qualitativament nova que havia convertit en obsoletes les caravanes terrestres per a intercanviar mercaderies amb Orient.

D'altra banda, durant l'Edat Mitjana s'havien produït una sèrie de troballes tècniques revolucionàries (el molí i les seves diferents aplicacions, la manivela, la biela,...); cap al 1500 el procés de mecanització estava endegat del tot. No es van produir més innovacions tècniques importants, però sí la difusió amplíssima de les que ja existien. Sarton ha subratllat l'explosió de noves necessitats matemàtiques que es produeix en aquesta època (cf. per exemple, Sarton (1965), p. 38). L'astronomia i la cartografia, associades als descobriments geogràfics, la mineria i la metal·lúrgia per a produir canons, l'arquitectura del nou tipus de fortificació adaptada a l'artilleria, són les més noves d'una sèrie d'activitats que configuren un context on la mesura pren una importància creixent. És el context que genera la coma i les xifres decimals, que es difondran —ràpidament— als anys 80 del segle XVI, reemplaçant als altres mètodes fins llavors utilitzats per a expressar aproximacions: les fraccions ordinàries en les aritmètiques comercials, i les

fraccions sexagesimals en l'astronomia i les taules trigonomètriques. Són aquests, evidentment, factors lligats de forma indissoluble a l'ampliació del concepte de nombre, plenament assumida per les aritmètiques comercials de l'època. Struik ha explicat clarament totes les repercussions econòmiques que podia tenir el nou saber:

"La posibilidad de obtener grandes beneficios en el nuevo sistema capitalista condujo a los comerciantes, así como a algunos de los príncipes, a cultivar la navegación y la astronomía. En las ciudades florecieron la aritmética, el álgebra y el nuevo arte de la teneduría de libros. La posibilidad de emplear máquinas con fines productivos estimuló la inventiva. El uso creciente de estas máquinas condujo al estudio de la mecánica, y ésta, a su vez, a la investigación de nuevos métodos en la matemática." (*La matemática, sus orígenes...*, pp. 20-21).

És sabut que la reforma humanista del segle XV —lligada a una nova visió de l'home— es va desenvolupar enfrontant-se en profunditat a una visió filosòfica de la funció de la lògica i del saber: "se trata [amb la reforma humanista] de refutar el reduccionismo de todas las artes y ciencias, y de toda la filosofía a dialéctica". (Garin p. 59). Aquest nou clima cultural actua sobre la reflexió científica demolint el marc de referència aristotèlic, tant des del punt de vista conceptual com metodològic. La revolució copernicana i els inicis de la Revolució Científica —treballs de Galileu inclosos— són incomprensibles fora d'aquest moviment de rebuig, fora d'aquest clima intel·lectual anti-aristotèlic, i predisposat a moure's per camins heterodoxos. La cultura del Renaixement mira cap enrera, però no indiscriminadament, recupera Plató contra Aristòtil, de la mateixa manera i amb els mateixos matisos que Arquímedes i Diofant contra Euclides.

Que l'Humanisme liquidés la pretensió d'identificar la *Veritat* amb aquella parcel·la de la cultura clàssica que l'escolàstica remenava amb tant de gust, que representés el final de l'obsessió per les argumentacions i llurs subtileses, que capgirés els valors i els interessos culturals, i que posés a l'abast del nou públic característic del Renaixement textos nous i capitals del saber clàssic, malgrat que expliquen en gran part *la manera* com es va produir la gènesi de l'àlgebra i *la forma* que va adoptar, no són sinó algunes de les línies de força que enquadren aquesta gènesi. Ni tan sols la revalorització de la idea platònica que l'Univers està estructurat matemàticament —una component clau del nou clima científic— es pot considerar l'antecedent directe del desplaçament de les matemàtiques, i molt particularment de l'aritmètica, de les funcions merament auxiliars i propedèutiques, que li havien estat assignades fins aleshores. Sempre que en aquesta època s'intenta matematitzar un problema físic o mecànic, es va a parar a la geometria dels *Elements* d'Euclides (tant pel que fa al tractament, com pel que fa als continguts utilitzats). És dins d'aquest marc que se situa el Leonardo da Vinci enginyer que troba, per exemple, el centre de gravetat de la piràmide —una de les seves contribucions originals a les matemàtiques. Quan Tartaglia escrigui la *Nova scientia* amb la pretensió de matematitzar la balística, començarà "por dar una serie de definiciones, a las que siguen suposiciones (axiomas) y juicios comunes de los que finalmente deduce las proposiciones de la ciencia nueva". (Koyré, p. 104; els subratllats són de l'autor).

La *Summa di aritmetica*,... serà probablement una de les poques obres d'àlgebra que ocupi un lloc destacat alhora dins de la història de les matemàtiques i dins de la història de l'economia. Segons els historiadors econòmics, les millores en el nivell de coneixements generals aritmètics, i en particular de la comptabilitat comercial jugaren un pa-



Fig. 13. Primera pàgina de la *Nova scientia* de N. Tartaglia, Venezia, 1537. Exemplar de la Biblioteca Universitària, Barcelona.

per important a finals del segle XV i començaments del XVI; utilitzant les paraules d'un d'ells:

'Se ha puesto particular acento en señalar la importancia del sistema de contabilidad por partida doble como factor del funcionamiento interno de los negocios; se había desarrollado en Italia en tiempos medievales y pasó al otro lado de los Alpes antes de 1500, en 1494 para ser exactos, cuando Luca Pacioli lo describió, prácticamente por primera vez, en su obra teórica *Summa di arithmetica*.' (Cipolla, p. 183).

Els primers tractats d'àlgebra no són, bàsicament, sinó aritmètiques avançades del tipus comercial. Es diferencien de les obres que hem analitzat al capítol anterior per l'extensió i l'aprofundiment amb què és tractat el càlcul amb radicals, i per incloure una part específicament dedicada al maneig de incògnites i al plantejament i resolució d'equacions. Tota la resta: capítols dedicats a la numeració, als trencats, als problemes..., inclosa la metodologia, és idèntica. Comparades amb les àrabs, aquestes primeres àlgebres europees es diferencien d'elles pel fet de contenir formalismes algebraics en estat embrionari. La descripció de les obres estudiades als capítols següents donarà una idea concreta del

contingut de les primeres àlgebres, així com de la manera primitiva de tractar i representar els conceptes algebraics.

L'àlgebra neix com un complement de les aritmètiques comercials, de les aritmètiques calculístiques; apareix com un instrument, complex i poderós, necessari per a la resolució de problemes. El desenvolupament dels mètodes algebraics és impensable sense el *brou de cultiu* format per una infinitat de problemes diversos, exigint cadascun d'ells una recepta particular, que cal tractar *numèricament*, i per als quals el model geomètric no és gens adequat. Pel que ja hem explicat de les aritmètiques mercantils, es pot entendre la simplificació notable que aportaven els mètodes algebraics, així com el camp que obrien a la resolució de nous tipus de problemes. Amb els anys, es va fer palès tot allò que tenien de fructíferes aquestes eines, i un interès cada cop més gran li fou concedit a l'estudi de l'*art de la cosa* en si mateix (la *cosa*, recordem-ho, era el mot italià que designava la incògnita). A partir del 1545, data de la primera edició de l'*Ars Magna*, de Cardano, es pot considerar que l'àlgebra, entesa com a la teoria de la resolució d'equacions, constitueix una branca autònoma de les matemàtiques. El procés va ser anàleg al que s'ha produït al segle present a partir dels primers ordinadors. Una eina de càlcul complexa i prenyada de possibilitats ha generat la Informàtica: l'estudi del processament electrònic de dades, en si mateix, ha esdevingut una ciència.

Aquestes primeres àlgebres, com totes les aritmètiques comercials, són editades en llengua vernacle, i no pas en llatí, malgrat que aquest era, i encara ho fou durant 150 anys, la llengua indiscutida de l'alta cultura. Les ciutats on tals obres apareixen són les capitals comercials, i no pas les capitals polítiques, ni les seus de prestigioses universitats: a Lyon, però no a París, a Florença i Venècia però no a Roma, a Nuremberg i a Leipzig, a Londres però no a Oxford. Eren obres adreçades a un públic molt diferent del que podien tenir Nemorarius, Oresme o els calculistes del Merton College. Un públic que majoritàriament no sabia llatí, les pautes culturals del qual no eren les clàssiques, i amb una escala de valors i unes preocupacions que tenien poc a veure amb l'Edat Mitjana o l'època clàssica.

Els autors d'aquestes obres, si no tots la majoria, apareixen nítidament diferenciats de l'élite intel·lectual hereua de la cultura medieval, i d'una forma o altra vinculats a les forces socials protagonistes de la transformació econòmica i cultural. No cal pensar en el cas límit de G. Cardano (1501-1576), místic heterodox, astròleg (la màgia és una de les modes més importants del Renaixement), jugador, vanitós, genial, que va dedicar l'*Ars Magna* a A. Osiander (un dels caparronets del luteranisme), i que tothom reconeix com una figura paradigmàtica del tarannà renaixentista. Luca Pacioli (1445-1514, també anomenat Luca del Burgo Sancti Sepulchri), va treballar de tutor dels fills d'un important mercader venecià; el seu amic Leonardo da Vinci li féu els gravats per al llibre de geometria *De divina proportione*. J. Widman (n. 1460), l'autor del primer llibre on apareixen impresos els signes " + " i " - ", segons tots els indicis no va fer més que incorporar a l'aritmètica una simbologia utilitzada a la pràctica mercantil (veure més endavant, p. 66); la seva obra es titula *Càlcul ràpid i elegant per a tots els futurs comerciants* (*Behènde vnd Rechnug auff allen Kauffmanschafft*). Tartaglia (1500?-1557), el primer a publicar un tractat sobre balística, és el geni autodidacta, fill d'una família que no li pot pagar estudis i a qui, en la disputa amb Cardano i Ferrari, aquests intenten humiliar adreçant-se-li en llatí, perquè saben que no el coneix prou per a contestar en la mateixa llengua. M. Stifel (1487-1567), l'autor del llibre d'àlgebra més important escrita a Alemanya durant el segle XVI (del qual féu una versió didàctica en alemany), era un antic monjo catòlic convertit en predicador militant del luteranisme. Un altre propagandista actiu del protestantisme fou R. Recorde (1510-1558), l'introduïdor de l'aritmètica mercantil a



Fig. 14. Primera pàgina de l'*Ars Magna* de Cardano (edició de les Obres completes, Lyon, 1663). L'obra comença amb una dedicatòria a A. Osiander. (Exemplar de la Biblioteca Universitària, Barcelona).

Anglaterra i el primer a proposar i utilitzar el símbol " $=$ "; va treballar acollit al mecenatge d'una Companyia comercial, a la qual dedicà moltes de les seves obres.

Hem assenyalat precedentment que l'aritmètica comercial no va ser als seus orígens la vulgarització d'un saber aritmètic de més alçada, elaborat a la Universitat, sinó un autèntic saber *alternatiu*, resposta a unes noves necessitats i elaborat, òbviament, per gent identificada amb les noves preocupacions. Contemporàniament a la *Summa...* de L. Pacioli, el 1495, s'editaven a París l'*Arithmetica* de Nemorarius i la de Bradwardine. L'edició de les obres estava feta per un espanyol, Pedro Ciruelo, (ca. 1470-1560) que en la apassionada polèmica sobre la ciència espanyola fou citat moltes vegades, pels apolo-gistes de la dita ciència, com a exemple de la fecunditat matemàtica de la raça. Deia Me-néndez Pelayo:

'mucho más conocido e importante es el libro de Pedro Ciruelo, egregio matemático y filósofo, autor del primer curso de ciencias exactas que poseyó España, y lumbrera de las Uni-versidades de París y Alcalá: hombre de espíritu claro y limpio de preocupaciones, a la vez que de natural cándido y de piedad sincera y acrisolada. Su obra se titula *Reprobación de las supersticiones y hechicerías*,...' (Historia de los Heterodoxos españoles, IV, p. 356).

L'obra que cita D. Marcelino és la particular contribució de l'autor a la lluita contra la magia i l'astrologia, un dels fenòmens característics de la mentalitat renaixentista. Círuelo, efectivament, fou un escolàstic que ensenyà a la Sorbona i a Alcalà, que edità les obres matemàtiques importants que havia produït l'escolàstica, i que va escriure, entre altres coses, un *quadrivium: Cursus quattuor mathematicarum artium liberalium*, Alcalà, 1516 (Cf. Rey Pastor, p. 155). Però tot això, aleshores, volia dir estar marginat del procés històric en marxa.

L'àlgebra fou el fruit més refinat d'una nova concepció característica del segle XVI, la de que les matemàtiques són imprescindibles per a manejar aspectes fonamentals de la vida social. És la concepció que hom pot reconèixer en el fet que esdevingués comuna i familiar la idea de combatre utilitzant la geometria (Hill, p. 82), o en l'enumeració que feia un famós tractat de les qualitats del perfecte comerciant: "Tenía que ser buen calígrafo, aritmético y contable, debía conocer bien las medidas, pesos y monedas de los países extranjeros, las aduanas, peajes, impuestos, tipos de cambio y fletes y debía saber de construcción y reparación de barcos y de navegación..." (Cipolla, p. 405). Però, per això mateix, les matemàtiques no eren considerades un saber acadèmic, sinó més aviat pròxim a les habilitats mecàniques pròpies de mercaders, navegants, arquitectes, constructors de vaixells i fabricants de canons. Entre els estudiants que s'adreçaven a les Universitats, les matemàtiques eren el patrimoni dels que semblaven massa obtusos per a reeixir en estudis de filosofia i teologia. Tanmateix, les matemàtiques ocupaven el lloc d'honor dels nous centres d'ensenyament: les escoles dels gremis, els tallers dels artistes-artesans (com el que va ser l'escola de Leonardo da Vinci), i els cursos finançats per les cada cops més poderoses companyies comercials.

En resum, als 70 anys que van de 1480 a 1550, l'àlgebra es constitueix en una nova branca de les matemàtiques, i la seva constitució, per les motivacions que té al darrera, pels qui la protagonitzen i per la manera com es realitza, és clarament la primera manifestació d'aquells poderós corrent d'idees que cristal·litzà en la Revolució Científica.

Autors i Obres Més Importants

Ja hem dit a l'apartat precedent que, pel que fa al pensament matemàtic, la història moderna europea s'inaugura amb *Le Triparty...*, manuscrit de Nicolas Chuquet aparegut a Lyon l'any 1484. Que l'obra no s'imprimís no pot ser valorat amb criteris actuals, ja que en aquells primers anys de la impremta encara existien tallers de copistes i eren nombrosos els llibres que només circulaven manuscrits. Tanmateix, les importants innovacions notacionals que *Le Triparty* contenia foren pràcticament ignorades, i seria difícil, avui, establir la seva importància exacta per al desenvolupament general de l'àlgebra. Això no obstant, l'obra en si mateixa és sens dubte el treball de matemàtiques més important escrit a Europa des del *Liber abacci* de Fibonacci fins l'*Ars Magna* de Cardano. El capítol següent conté l'anàlisi d'aquesta obra.

L'escola italiana

La Summa di aritmètica, proporzioni e proporzionalità (1494, 2^a edició el 1523) de Luca Paccioli va ser el tractat d'àlgebra més popular i conegut a Europa durant gairebé tota la primera meitat del segle XVI, així com l'obra que més va contribuir a difondre els nous temes que preocupaven als matemàtics. Per això mateix, va ser l'obra que va

determinar en gran part les notacions emprades a Itàlia, i als països que culturalment en depenien, fins pràcticament al 1600. L'obra està dividida en quatre parts: aritmètica, àlgebra, geometria i comptabilitat, sent aquesta última la que conté la descripció del sistema de comptabilitat per partida doble esmentada a l'apartat anterior. La *Summa* era una mena de recull enciclopèdic dels coneixements d'aritmètica i àlgebra continguts al *Liber Abacci*, a les aritmètiques mercantils i a les fonts orientals usades pels mercaders italians. La seva gran influència no és independent del fet de ser la primera obra impresa, completa i sistemàtica, que apareixia des que Fibonacci va escriure la seva. Des del punt de vista de l'originalitat, el tractat de Luca Paccioli ofereix molt poca cosa. La part d'àlgebra inclou els mètodes de resolució de les equacions de primer grau i de segon grau, i si bé els acompanya de demostracions geomètriques —una novetat respecte al tractament de N. Chuquet— les principals àlgebres àrabs ja contenien aquestes demostracions. El llibre d'àlgebra de Paccioli acaba amb l'afirmació que la resolució de les equacions cúbiques "és tan impossible en el present estat de la ciència com la quadratura del cercle" (Cajori, 1980, p. 133).

La contribució més important de la *Summa* cal buscar-la en les notacions. Malgrat que no són tan evolucionades com les de Chuquet, a l'obra de Paccioli es dona un pas endavant important, des de la simple i pesada retòrica dels àrabs i del mateix Fibonacci, cap a una simbologia específica de les relacions algebraïques. (Per una descripció extensa de l'obra de Paccioli, cf. Lòria, vol. 1, pp. 469-486).

Un algebrista italià del qual parlarem en estudiar l'evolució del llenguatge algebraic és Francesco Ghaligai. La seva *Practica d'arithmetica* és del 1521 i fou reimpressa el 1548 i 1552 (Cajori, 1928, p. 112).

Dos autors dels quals no han quedat sinó referències indirectes són Scipione del Ferro (ca. 1465-1526) i Ludovico Ferrari (1522-1565). Malgrat que van jugar un paper important en el descobriment dels primers mètodes coneguts per a resoldre per radicals les equacions de tercer grau (Ferro) i de quart grau (Ferrari), no es conserva cap publicació d'ells. Tot el que sabem dels seus treballs és el que en diuen —i és ben poc— Tartaglia i Cardano, els dos grans autors matemàtics italians de la primera meitat del segle XVI.

Tartaglia és l'autor dels *Quesiti et inventioni diverse* (Veneza 1546), una obra només parcialment dedicada a les matemàtiques, en la qual determinades qüestions d'àlgebra i geometria, i en particular la resolució de les equacions cúbiques que no tenen terme en x^2 , són tractades de forma molt poc sistemàtica. Aquesta és una de les principals fonts de referència sobre el conflicte entre Tartaglia, d'una banda, i Cardano i el seu deixeble Ferrari, de l'altra, sobre el mètode de resolució de les equacions cúbiques. Tant els *Quesiti* com els aspectes matemàtics del famós enfrontament són analitzats al capítol sisè. Tartaglia va morir deixant inacabat el *General Trattato di numeri, et misuri* (Veneza, 1556-1560), que havia de ser un compendi dels coneixements algebraics de l'època. Segons Hofmann, en aquesta obra es resolen alguns problemes de màxims i mínims, i en particular "se busca el máximo de x ($a^2 - x^2$), el qual se determina en forma de receta" (Vol. 1, p. 101). La intenció de l'autor era culminar l'obra amb la teoria de les cúbiques, però, encara que Tartaglia hagués tingut temps d'acabar l'obra, ja no hauria publicat cap resultat original, tota vegada que Cardano se li havia avençat amb l'*Ars Magna* des del 1545.

L'*Ars Magna* es pot considerar el primer tractat sistemàtic de teoria d'equacions de la història de les matemàtiques. Tant per l'amplitud de concepció, com per la perspectiva que obre, es pot considerar que assenyalava nítidament una frontera, la que separa l'àlgebra pràctica vinculada a les necessitats mercantils, de l'especulació algebraica superior. L'obra és analitzada al setè capítol.

Cardano també és l'autor d'una obra més elemental, en l'estil i les notacions de Luca Pacioli, la *Practica arithmeticae generalis*, publicada a Milà el 1539.

L'Escola alemanya

Els llibres d'àlgebra que apareixen a Alemanya durant la primera meitat del segle XVI són molt més nombrosos que els italians. Les diferències entre les produccions respectives són notables. Els alemanys no arribaran a elaborar resultats nous comparables a la resolució de les cúbiques i de les equacions de quart grau, ni assoliran el grau de desenvolupament teòric global que hom pot trobar a l'*Ars Magna*. La contribució alemanya no és per això menys valuosa, tota vegada que són ells els qui proporcionen l'impuls decisiu per a la creació dels simbolismes algebraics moderns.

F. Cajori ha estudiat acuradament l'origen dels símbols " $+$ " i " $-$ ", i aquí resumirem les seves conclusions (Cf. Cajori (1928), pp. 230-235). Com ja hem dit, el primer a utilitzar aquests signes en un llibre imprès fou J. Widman. Hi ha constància que aquest autor va estudiar uns manuscrits sobre àlgebra, avui conservats a la Biblioteca de Dresde, on els signes esmentats ja eren utilitzats. Des del punt de vista paleogràfic, sembla impossible assegurar quin és l'origen de la forma " $-$ "; pel que fa a " $+$ ", sembla incontestable que deriva d'alguna de les formes ornamentals de *et* als manuscrits llatins (es coneixen més de 100 abreviatures diferents d'aquesta conjunció). Els manuscrits estudiats per Widman fan servir el signe " $+$ " com a signe d'operació, però també de vegades en substitució de *et* a llocs on aquest mot no significa addició, sinó que fa de conjunció. El mateix Widman no restringeix l'ús dels símbols " $+$ " i " $-$ " als significats purament aritmètics: el " $+$ " també el fa servir de conjunció, substituint l'*et*, i el " $-$ " el fa servir com a signe de puntuació. És opinió bastant general que Widman va utilitzar dos signes que ja eren àmpliament coneguts pels seus lectors (no dona cap mena d'explicació especial del seu significat) perquè eren d'ús corrent dins de la pràctica mercantil.

El fet és que les aritmètiques i àlgebres alemanyes els contenen sistemàticament, i que ja a finals del segle XVI han desplaçat pràcticament els símbols *p* (ó algun derivat com *p̄*, *p.*, abreviació de *piu* o *plus*), i *m* (abreviació de *meno* o *minus*) que havien utilitzat tots els algebristes italians.

També és d'origen alemany el símbol per a la radicació $\sqrt{\quad}$, si bé la fixació de la forma definitiva i la victòria final sobre la R emprada pels italians fou més lenta. També son degudes als alemanys diferents temptatives interessants, però infructuoses, d'elaborar una bona notació per a la successió de potències de la incògnita. Tractarem més detalladament totes aquestes qüestions al capítol XI.

Malgrat que són molts els autors i obres alemanyes que caldria citar, començant per les àlgebres anònimes manuscrites que van constituir el fonament dels primers llibres impresos (Cf. Hofman, vol. 1 p. 110 i Cajori (1928), p. 231 i 234), nosaltres citarem quatre noms: Christoff Rudolff (ca. 1500-ca. 1545), autor d'una àlgebra (*Behend vund Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regehn Algebre so gemeincklich die Coss genent werden*) escrita en alemany i apareguda a Strasburg el 1525, és el primer autor d'un llibre imprès que fa servir una cosa semblant al nostre símbol $\sqrt{\quad}$.

Adam Riese (1492-1559) és l'autor que, segons Boyer (p. 309), més va influir perquè l'antic mètode de calcular, l'àbac, fos reemplaçat pel nou, el llapis i les xifres indo-aràbigues. També li pertany un *Coss* que mai no va ser imprès a l'època.

L'autor més notable d'aquest període és sens dubte Michel Stifel (ca. 1487-1567). La seva *Arithmetica integra* (Nuremberg, 1544) és considerada per tothom el llibre d'àlge-

bra més important escrit a Alemanya en tot el segle XVI. L'obra té un esquema conegut: una part dedicada a l'aritmètica dels enters i les fraccions, una segona dedicada al càlcul amb radicals i una tercera dedicada a l'àlgebra. Un dels aspectes més citats de l'obra de Stifel és la comparació entre les potències 1, 2, 4, 8,... de dos i el que avui en diem els exponents 0, 1, 2, 3,... Aquest resultat, així com el comentari que la suma d'exponents correspon al producte de les potències era un fet conegut i citat per tots els algebristes de l'època, els quals s'hi veien portats per la necessitat d'explicar el producte i la divisió de potències de la incògnita. Allò que és excepcional a l'obra de Stifel és que estengui la comparació a les potències corresponents a exponents negatius, relacionant $1/2$, $1/4$, $1/8$,... amb -1 , -2 , -3 ,... i que assenyali explícitament que la divisió en la progressió aritmètica correspon a la radicació en la progressió geomètrica:

"Additio in arithmetice progressionibus, respondet multiplicationi in geometricis... Substractio in arithmetice, respondet in geometricis divisioni... Multiplicatio simplex (id numeri in numerom) quae fit in arithmetice, respondet multiplicationi in se quae fit in geometricis... Divisio in arithmetice progressionibus, respondet extractionibus radicum in progressionibus geometricis. Et dimidiatio in arithmetice, respondet extractioni quadratae in geometricis" (citada per A. Mieli, vol. V, p. 89).

Un tal Simón Jacob (m. 1564) va reproduir gairebé literalment l'exposició de Stifel, i és en aquest llibre que Bürgi, com així ho manifesta ell mateix, es va inspirar per als seus treballs sobre logaritmes (comentat per Mieli, vol. V, p. 89). Aquesta és la base on tots els historiadors de les matemàtiques es recolzen per a afirmar que a l'obra de Stifel s'hi troba el germen del càlcul logarítmic. Ens sembla molt important subratllar el paper que juga el context en el desenvolupament d'aquestes idees. Les observacions de Stifel tenen poca volada quan queden restringides a progressions geomètriques de base 2, 3,... L'*existència dels logaritmes* es basa en la confecció d'una taula que permeti expressar tot nombre de 5 o 6 xifres com una potència d'una base donada. Només un nombre N molt proper a 1 podia donar una progressió geomètrica $1, N, N^2, N^3$,... de termes suficientment pròxims entre si per tal de "cobrir" amb la continuïtat adequada l'interval dels 100.000 primers nombres naturals; per això les primeres bases foren $0'9999999$ (la de Napier) i $1'0001$ (la de Bürgi). Aquesta més endavant fou modificada a $(1'0001)^{10000}$, una excel·lent aproximació del nombre e (cf. Klein, vol. 1, p. 218-219).

Un altre tret interessant de l'*Arithmetica* és la utilització de coeficients negatius dins de les equacions, cosa que permet a Stifel reduir els casos $x^2 + bx = a$; $x^2 + a = bx$,... a un de sol. Encara que Stifel considera els nombres negatius com *absurds*, i no els accepta com a arrels d'equacions, tenia una concepció prou clara del seu significat per a parlar d'ells com a "nombres ficticis que estan per dessota de zero", i que sorgeixen quan "nombres reals que estan per sobre de zero són sostrets de zero" (Cajori 1980, p. 141).

Stifel va publicar, el 1553, una edició revisada del *Coss* de Rudolff, en la qual incloïa la resolució de les cúbiques publicada per Cardano, i proposava certes innovacions notacionals. Ja a l'*Arithmetica*, Stifel havia trencat amb la pràctica, fins llavors habitual, de representar una segona incògnita per la lletra q (abreviació de *quantitas*), i va utilitzar en el seu lloc la simbologia: A, B, C ,...

Un seguidor de Stifel fou Johannes Scheubel (1494-1580). És autor d'una aritmètica (1545) i d'una edició dels sis primers llibres dels *Elements* d'Euclides (Basilea, 1550), que conté com a introducció una seixantena de pàgines sobre àlgebra. La importància d'aquesta obra rau en el fet que fou reimpressa a París el 1551, amb el títol d'*Algebrae compendiosa facilisque descriptio*, i que aquesta és la primera aparició a França dels símbols " $+$ " i " $-$ " i els altres símbols alemanys.

Altres autors

Hem de parlar, finalment, d'alguns autors de França i Anglaterra que, aprofitant el camí obert per alemanys i italians, feren algunes aportacions menors cap a la meitat del segle. Els treballs d'àlgebra contemporanis escrits en espanyol són estudiats al capítol 9.

Citarem en primer lloc l'autor anglès Robert Recorde (1510-1558), al qual devem l'actual signe " $=$ ". Recorde és autor, entre moltes obres de divulgació, d'una aritmètica comercial *Grounde of Arts* (Londres, 1541), i d'un llibre d'àlgebra, *The Whetstone of Witte* (Londres, 1557), on adopta l'essencial de les notacions germàniques, amb la innovació d'un símbol específic per a representar la igualtat. El símbol, que era més llarg que l'actual, trigà més d'un segle a ser adoptat i preferit a d'altres notacions.

Dels francesos J. Peletier (1517-1582) i J. Buteon (o Borrel, 1492-1572) podem transcriure el tractament d'uns sistemes d'equacions lineals 3×3 . El primer exemple, citat per Itard (p. 21) pertany a l'*Algebra* de Peletier (Lyon, 1554), i permet de comparar el plantejament i resolució de Peletier amb els d'un problema anàleg tractat per Chuquet (cf. p. 76). Els avantatges de l'automatisme associat a una bona notació ressurtien immediatament de la comparació. En particular, el raonament aritmètic de Chuquet no és utilitzable en el problema més general de Peletier, que no té idèntics els termes independents. L'enunciat del problema és el següent: "Tres homes tenen un nombre d'Escuts cada u: El primer, amb la $1/2$ dels dos altres, en té 32: El segon, amb la $1/3$ part dels dos altres, en té 28: El tercer, amb la $1/4$ del dos altres, en té 31: Quants en té cada u?". Peletier, emprant les notacions de Stifel per a les incògnites, planteja les equacions amb les lletres R , A i B, treu denominadors, i resol el sistema de la manera que permet veure el següent fragment:

"Disposem doncs les nostres tres equacions d'aquesta manera

I. $2R$ p. 1Ap. IB, iguals a 64

II. IR p. 3Ap. IB, iguals a 84

III. IR p. 1Ap. 4B, iguals a 124. Ajuntem la segona i la tercera: seran, per a la quarta Equació,

IIII. $2R$ p. 4Ap. 5B, iguals a 208. Per tant, comparant-la amb la primera Equació, pel fet que $2R$ són tant d'una part com de l'altra: la diferència de 64 a 208 (que és 144) serà igual a la diferència de 1Ap. IB a 4Ap. 5B. Per tant, traient 1Ap. IB de 4Ap. 5B: tindrem, per la cinquena Equació,

V. 3Ap. 4B, iguals a 144. Ajuntem la primera i la segona: tindrem, per a la sisena Equació,

VI. $3R$ p. 4Ap. 3B, iguals a 148. Ajuntem la primera i la tercera: tindrem, per a la setena Equació,

VII. $3R$ p. 2Ap. 5B, iguals a 188. ..." (Itard, p. 22. fig. 1).

Per acabar amb la descripció dels treballs corresponents a aquesta etapa, citem el plantejament d'un problema semblant, idèntic al ja esmentat de Chuquet, tal com apareix al llibre del francès Buteon (*Logistica quae et Arithmetica vulgo dicitur*, Lyon, 1559). Segons Itard, és un problema antic, que es remunta almenys a Diofant, tractat per tots els algebristes dels segles XVI i XVII. L'enunciat és el següent (Itard, p. 25): "Donada una suma qualsevol, trobar tres nombres, dels quals el primer amb la meitat, el segon amb el terç, el tercer amb el quart dels altres constitueixin cada u aquesta suma". El plantejament fa veure el sistema notacional d'aquest autor, on destaquen el signe d'igualtat "[$=$]" i l'addició expressada per juxtaposició; Buteon utilitzava generalment una P,

però la suprimia en casos com aquest que no involucren sinó termes positius. Més detalls sobre les notacions es donen al cap. 11.

‘Sigui 17 la suma donada [hom pot observar com un problema general és tractat per a un cas particular]. Poseu que el primer nombre demanat sigui IA, el segon IB, el tercer IC. Serà per tant IA, $\frac{1}{2}$ B, $\frac{1}{2}$ C [17 [nosaltres posariem $A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C = 17$]. I també IB, $\frac{1}{3}$ A, $\frac{1}{3}$ C [17. I també IC, $\frac{1}{4}$ A, $\frac{1}{4}$ B [17. I per segona equació teniu, com jo les ordeno, les tres equacions

2A . IB . IC [34

IA . 3B . IC [51

IA . IB . 4C [68

...”

A part de l'interès que puguin tenir les notacions, res de nou no hi havia als llibres d'àlgebra que hem esmentat en aquest apartat que no es trobés a les obres dels autors citats anteriorment. Només assenyalarem que Peletier no rebutja els nombres negatius amb la virulència pròpia de l'època: “vous voyez —diu— les nombres feincts au dessous de rien, n'estre sans usage; car par eux se fait la preuve des exemples et se montre la verification des reigles” (citad per Loria, vol. 2, p. 103). Sense utilitzar sistemàticament la idea, escriu algunes equacions emprant coeficients negatius, reduint un dels membres de l'equació a zero.

CAPÍTOL 5:

LE TRIPARTY EN LA SCIENCE DES NOMBRES DE NICOLAS CHUQUET

Algunes dades sobre l'obra i l'autor

L'obra de Nicolàs Chuquet és sense cap mena de dubte, la composició més original i més audaç que s'arribà a elaborar des de l'època d'or grega. Un simple cop d'ull a aquesta obra ens revela que una nova manera de fer matemàtiques s'ha inaugurat. Amb Nicolàs Chuquet la renaixença matemàtica està endegada. Poc sabem de la vida d'aquest personatge, exceptuant que era de París, i Batxiller en Medicina, i que la seva obra mestra fou escrita i acabada a Lyon l'any 1484.

El conjunt de l'obra és una anticipació dels problemes bàsics i de les pautes que se seguirien per a resoldre'ls, i que constituïrien a finals del segle XVI la bastida del llenguatge algebraic. Són tantes les innovacions simbòliques i metodològiques que hi podem trobar, que creiem de la màxima importància fer-ne un resum comentat.

Malauradament, l'obra de Chuquet no va conèixer cap impressió, i les còpies que en podien haver circulat difícilment haurien estat assimilades per altres autors, tota vegada que la profunditat de la seva concepció superava de molt el marc de l'època. Una de les còpies que arribà a mans del matemàtic Etienne de la Roche, serví perquè aquest en traqués bon profit, editant per compte propi un llibre titulat *L'arismetique nouvellement composée*, imprès a Lyon l'any 1520.

Etienne de la Roche copià una petita part de l'obra de Chuquet, donant a conèixer el simbolisme de les potències de la incògnita sobre la base dels exponents. Malgrat tot, l'obra de Chuquet conté una riquesa infinitament més gran que la recollida per Etienne de la Roche, riquesa que fou ignorada durant molts anys; en particular, el famós historiador de matemàtiques Montucla no l'esmenta en la seva voluminosa obra. No va ser fins a l'any 1881 que Aristide Marre l'edità al Bulletin de B. Boncompagni (T. XIV 1881). A aquesta edició cal referir les cites que fem al nostre estudi. M. Cantor és el primer autor que en una història general tracta amb cert detall el contingut de l'obra de Chuquet, a la que dedica les pp. 347-64, vol. 2, de la seva *Vorlesunge über Geschichte der Mathematik*.

L'obra de Chuquet consta de dues grans parts. La primera, anomenada pròpiament "Triparty en la science des nombres", i la segona, titulada "Les Applications des Rgles du

Triparty". Aquesta segona part consta d'una llista molt extensa de problemes aplicats a situacions comercials, així com alguns problemes d'entreteniments matemàtics. La majoria d'ells són resolts a partir de mètodes específicament algebraics.

El Triparty, com el mot indica, està dividit en tres parts. L'índex resumit de l'obra és el següent:

1a Part:

- Cap. 1. Tractament dels nombres enters. Les quatre operacions.
- Cap. 2. Tractament dels nombres trencats. (Regla general per a reduir nombres trencats. Estil i forma d'abreujar els trencats. Les quatre operacions amb trencats).
- Cap. 3. Progressions. Nombres perfectes. Nombres proporcionals i les seves propietats.
- Cap. 4. Regles de tres, d'una posició, de dues posicions, i d'oposició i remoció. Regla dels nombres intermedis.

2a Part:

- Cap. 1. Reducció de dues o més arrels d'índex diferents a un mateix índex.
- Cap. 2. Com les arrels es poden calcular i abreujar.
- Cap. 3 i 4. Com les arrels es poden sumar i restar.
- Cap. 5 i 6. Multiplicació i divisió d'arrels.

3a Part:

- I) Cap. 1. Les diferents classes de potències de la incògnita.
- Cap. 2 i 3. Com se sumen o resten dues o més expressions construïdes a partir de les diferents potències.
- Cap. 4 i 5. Producte i divisió de les potències.
- II) Cap. 1. Com s'ha de fer per trobar la incògnita d'una equació. Forma d'igualar els dos membres d'una equació.
- Cap. 2. Les quatre regles a seguir per resoldre les equacions.
- III) Aplicació pràctica de les regles i casos d'infinites solucions i d'altres que són "impossibles de resoldre".

L'índex ja ens pot donar una idea de l'envergadura de l'obra i la seva completeness en el tractament de l'àritmètica i l'àlgebra. Un examen seu acurat ens revelarà a més una profunditat de pensament difícil de trobar entre altres autors de la mateixa època.

Procedim a continuació a una anàlisi dels aspectes més importants d'aquesta obra.

L'àritmètica dels nombres enters i trencats

El tractament de les operacions entre nombres naturals correspon al mateix camí que van seguir els àrabs. A l'igual que ells, ensenya a multiplicar partint del coneixement de la meitat de la Taula Pitagòrica (la qual reproduïm aquí, amb les instruccions que l'acompanyem, p. 596) introduint ja la forma algorísmica actual de realitzar el producte.

Mostra la forma de multiplicar per potències de deu, mitjançant la col·locació de zeros a la dreta de l'altre nombre.

$$\begin{array}{r}
 6043 \\
 \underline{502} \\
 12086 \\
 \underline{302150} \\
 3033586
 \end{array}$$

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
3	3	4	5	6	7	8	9	0		
4	4	5	6	7	8	9	0			
5	5	6	7	8	9	0				
6	6	7	8	9	0					
7	7	8	9	0						
8	8	9	0							
9	9	0								
0	0									

¶ Pour entendre ce petit liuret Il convient

savoir que .1. qui est en marge a multiplie .1. qui est dedans le petit quarre et en est venu .1. qui est mys au dessoubz car.

1. foiz. 1. cest. 1. puis. 1. foiz. 2. font.

2. en tyrant a dextre. puis. 1. foiz. 3. font.

3. et ainsi continuât jusques a. 1. foiz. 0. qui est. 0. En aps. 2. qui est en marge au dessoubz de.

1. a multiplie .2. qui est dedans le petit quarre et en

sont venuz .4. qui sont mys au dessoubz car. 2. foiz. 2.

font. 4. puis 2. foys. 3. font. 6. puis. 2. foiz. 4. font. 8.

et ainsi continuant jusques a. 2. foiz. 0. qui font. 0. Et ainsi

doit on entendre le Residu.

¶ Item plus lon doit savoir que en multipliant l'on doit observer les rigles et statuz mys ou chapitre de addition ainsi et par la forme et maniere que cy apres senz Cestas que si par la multiplication dunc figure par

També exposa la forma de multiplicar a partir de la disposició dels nombres en rectangle, segons havien fet els àrabs.

	7	6	9	5	0	4	
8	5 6	4 8	7 2	4 0	0 0	3 2	
3	2 1	1 8	2 7	1 5	0 0	1 2	
4	2 8	2 4	3 6	2 0	0 0	1 6	
2	1 4	1 2	1 8	1 0	0 0	8	
1	7	6	9	5	0	4	
	6	4	1	9	2	7	9
	3	0	5	4	6	0	6
	7	5					

Ensenya a dividir de la mateixa forma que ja es feia a l'Occident europeu, i subratlla que la resta final de la divisió ha d'ésser més petit que el divisor, i que en cas contrari serà signe evident d'equivocació.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 87025 \\ \underline{5} \\ 17405 \end{array}$$

La definició que dóna de nombres trencats és aquesta (p. 604):

"Un nombre trencat és una part o més de 1, i ve designat per dos nombres, l'un situat sota l'altre i separats per una ratlla". Afegeix que el denominador ha d'ésser més gran que el numerador, perquè si no ja tindria una part entera. I encara diu que els enters poden ser considerats com si tinguessin denominador 1, amb mires a operar amb ells juntament amb trencats.

Després d'exposar els algorismes de les operacions amb trencats, mostra molts exemples concrets de com operar amb ells, com aquest que reproduïm:

"2/3 i 1/2 d'un terç, quina part és d'1? Resposta: Suma 2/3 amb 1/6, que és la 1/2 d'un terç, i tindràs 5/6. Ara parteix 5/6 per 1, que són els 5/6 d'1". (p. 616).

Defineix les progressions aritmètiques i ensenya a sumar els termes seguits, sense aportar cap novetat respecte a les altres aritmètiques de l'època.

Quant al capítol destinat a tractar sobre la classificació de les diferents categories de nombres, que a totes les obres de matemàtiques dels escolàstics constituïa el nucli central, al manuscrit de Chuquet ocupa un parell de pàgines, a les quals tracta molt breument dels nombres primers, dels perfectes, abundants i defectuosos, dels nombres amigables.

La teoria de proporcions entre nombres té un tractament exhaustiu, i una orientació exclusivament pràctica, la de resoldre tot tipus de problemes en què intervinguin diferents proporcions. A la p. 635 podem llegir un apartat titulat:

"Com, per la regla de tres, tot nombre pot ser dividit en diverses parts desiguals, constituïdes en la proporció que es desitgi".

Els exemples que trobem en aquest apartat són del tipus (p. 635):

"Vull dividir 100 en dues parts, en tal proporció com ho són 7 i 9. I per això fer, convé ajuntar 7 i 9, que fan 16, com a partidor comú. Després multiplica 100 per 7, que són 700 i divideix-los per 16, i tindràs $43 \frac{3}{4}$ com la part corresponent a 7. Multiplicant 100 per 9 i dividint per 16 tindràs $56 \frac{1}{4}$ com la part corresponent a 9.

$$\begin{array}{rcl} & 7 & \text{—} 43 \frac{3}{4} \\ 100 & \swarrow & \\ & 9 & \text{—} 56 \frac{1}{4} \\ & \underline{16} & \end{array}$$

Segueix la resolució de problemes mitjançant la regla d'una falsa posició (que ell anomena *d'una posició*). En aquest tipus de resolució de problemes existeix una total continuïtat entre la tradició àrab i les obres del renaixement matemàtic europeu.

Chuquet exposa, com a exemple d'aplicació de la regla, el següent:

- p. 638 "Vull trobar un nombre tal que, quan se li haurà afegit el seu igual i encara $1/2$, $1/3$ i $1/4$ d'ell mateix, tot sumat faci 17. Per això fer, poso un nombre escollit a voluntat com 12. Al qual li afegeixo 12, que és el seu igual, i encara 6, 4 i 3 que són la meitat, el terç i el quart de 12; tots junts fan 37, i jo no vull que facin més que 17; per tant dic, segons la regla de tres: si 37 em procedeix de 12, de quant em procedirà 17. Després multiplico i parteixo, tal com la regla de tres requereix, i trobo $5 \frac{19}{37}$, que és el nombre que volia trobar (...)"

A continuació es presenten problemes d'equacions lineals bastant més difícils, problemes que són abordats feliçment, sota un estil aritmètic digne d'encomiar si tenim en compte que són resolts sense l'auxili d'un simbolisme algebraic.

Creiem que és interessant reproduir un exemple on es posa de manifest com és possible desenvolupar un raonament aritmètic capaç de resoldre problemes no trivials sense mecanitzar les operacions intermèdies, és a dir, prescindint de l'auxili de l'àlgebra simbòlica. I a continuació deixarem plantejada la qüestió de si no serà un greu error didàctic presentar prematurament a l'ensenyament la resolució d'aquest tipus de problemes a partir dels recursos algebraico-simbòlics, on els aspectes del càlcul formal estan molt per damunt de la línia de pensament aritmètic, que al final acabarà per atrofiar-se.

Reproduïm l'exemple:

- p. 640 "Vull trobar 3 nombres de tal forma que el primer, junt a $1/2$ dels altres dos, faci 30. I el segon, amb $1/3$ dels altres dos, faci 30. I el tercer, amb $1/4$ dels altres dos, faci també 30. I per això fer, prenc a voluntat 12. Després, sobre 12 em fa falta trobar tres altres nombres tals que, quan del primer se'n treurà la $1/2$, resten 12. I del segon qui en treurà el $1/3$ resten 12. I del tercer qui en treurà el $1/4$ resten 12 ... i trobaràs (*que aquests nombres són*) 24, 28 i 16; que sumats fan 58, que cal dividir per un menys que el nombre dels nombres (*que el nombre d'incògnites*) que hom vol trobar. Ara bé, com que jo vull trobar tres nombres, em cal partir 58 per 2 i me'n vénen 29, dels quals em cal sostreure la posició, que és 12, i també els altres nombres trobats a partir de 12, que són 24, 18, 16 i em queda per al primer 17, i dels altres tres em queda 5, 11, 13. Els quals tres nombres són de tal naturalesa que 5, junt a la meitat dels altres dos, fa 17, i 11 sumat amb el $1/3$ dels altres dos fa 17, i 13 amb el $1/4$ dels altres fa semblantment 17. I jo volia tenir 30, per la qual cosa acudeixo a la regla de tres dient: si 17 me vénen de 5, de quant me vindran 30... (i troba els 3 nombres buscats: $8 \frac{14}{17}$; $19 \frac{7}{17}$; $22 \frac{16}{17}$)".

A continuació exposarem el raonament que s'ha seguit per resoldre el problema a partir de la transformació del sistema d'equacions inicial:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 30 \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z = 30 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + z = 30 \end{cases}$$

En lloc de 30 m'és igual resoldre-ho per a un nombre qualsevol, i després per proporció trobaré els valors adequats per a les incògnites. Reordenant les sumes dels nombres incògnites convenientment, es pot observar que les quantitats parcials

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z - \frac{1}{2} (y + z) = K \\ x + y + z - \frac{2}{3} (x + z) = K \\ x + y + z - \frac{3}{4} (x + y) = K \end{array} \right.$$

que hi ha dins el rectangle han d'ésser iguals i poso a voluntat que totes facin 12, amb la finalitat d'obtenir quantitats enteres per a la suma dues a dues de les incògnites.

$$\frac{1}{2} (y + z) = 12$$

$$\frac{2}{3} (x + z) = 12$$

$$\frac{3}{4} (x + y) = 12$$

$$y + z = 24$$

$$x + z = 18$$

$$x + y = 16$$

$$2 (x + y + z) = 58$$

$$x + y + z = 29$$

$$\text{Si } x + y + z = 29 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 29 - 24 = 5 \\ y = 29 - 18 = 11 \\ z = 29 - 16 = 13 \end{array} \right.$$

$$\text{A més } 29 - 12 = K$$

$$K = 17$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = 5 \cdot \frac{30}{17} \\ y^1 = 11 \cdot \frac{30}{17} \\ z^1 = 13 \cdot \frac{30}{17} \end{array} \right.$$

Els resultats d'aquestes sumes són 24, 18 i 16. La suma d'aquestes quantitats correspon a sumar dues vegades totes les incògnites. Pot observar-se al text de Chuquet el perquè diu que cal *dividir pel nombre d'incògnites menys una*, demostrant un coneixement profund d'aquest fet, que apunta a una generalització.

Després d'això ja és fàcil aïllar el valor de cada incògnita i el valor que s'obté per a la K. La solució final s'acaba d'obtenir per una simple regla de tres.

Amb aquest tipus de problemes es posa clarament de manifest que el raonament aritmètic havia arribat al límit de les seves possibilitats, i que en endavant cap més progrés no era possible en aquesta direcció sense emprar mètodes algebraics.

Chuquet acaba la primera part de l'obra exposant una forma original de trobar trencats situats entre altres dos, amb la finalitat de resoldre per aproximació certs proble-

mes del càlcul. El sistema de trobar trencats intermedis el basa en les següents desigualtats:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \dots \quad \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \dots$$

$$\text{Si } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{llavors} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Aquest procediment l'aplica al problema de resoldre l'equació de segon grau:

$$x^2 + x = 39 \frac{13}{81}$$

El mètode emprat per a resoldre l'equació no és altre que el basat en l'anomenat Teorema de Bolzano, o sia que en tota funció contínua, entre dos valors de "x" per als quals s'obtenen valors de la funció, un de positiu i un de negatiu, hi ha entremig d'aquells dos valors de la "x" un zero. L'aproximació cap a aquest zero la farà Chuquet a partir del mètode anterior.

Chuquet procedeix així per cercar la solució (p. 654):

$$x^2 + x = 39 \frac{13}{81}$$

x	$x^2 + x$
5	30 dóna menys que $39 \frac{13}{81}$, i ho indica posant $\tilde{m}$
6	42 dóna més, i ho indica posant pl.
$5 \frac{1}{2}$	dóna $\tilde{m}$
$5 \frac{2}{3}$	dóna $\tilde{m}$
$5 \frac{3}{4}$	dóna $\tilde{m}$
$5 \frac{4}{5}$	dóna pl

Aleshores el nombre buscat està situat entre $5 \frac{3}{4}$ i $5 \frac{4}{5}$. Prenent el nombre intermedi que resulta de sumar numeradors, i denominadors obtenim $5 \frac{7}{9}$ que substituït a l'equació fa exactament $39 \frac{13}{81}$, i així resulta ser la solució.

És sorprenent trobar a les pàgines d'un manuscrit de l'any 1484 un coneixement tan profund de les equacions polinòmiques, encara que de grau dos, coneixement en el qual, implícitament es juga amb la idea de funció, continuïtat, recurrència d'un càlcul,... Fet i fet, Chuquet presenta un algorisme per trobar les arrels de qualsevol polinomi, que

encara que no és el de convergència més ràpida, no difereix, quant a procés de recurrència, de les tècniques que s'apliquen avui dia per calcular les arrels d'un polinomi amb l'ajuda d'un ordinador.

El càlcul amb radicals

La segona part del Triparty és dedicada a l'estudi de les arrels i nombres composts de diferents arrels. Comença definint les arrels.

p. 654: "Arrel d'un nombre és un altre que multiplicat per ell mateix una vegada o més, segons l'exigència i la naturalesa [índex] de l'arrel, dóna exactament el nombre del qual és arrel".

Chuquet afegeix que hi ha arrels segones, terceres, quartes, i així indefinidament. Assenyala que l'arrel primera d'un nombre és ell mateix, i que es pot indicar així: $R^1 12$ és 12; $R^1 9$ és 9.

Per a l'arrel segona utilitza la següent notació:

$R^2 16$ és 4, i afegeix "tals arrels pels antics, són denominades arrels quadrades". (p. 655)

Pot observar-se, per la forma de notació i per l'abandó de l'antiga nomenclatura (quadrades, cúbiques) dels antics, com Chuquet ja apunta a una teoria d'arrels d'índex qualsevol, independitzada de tota interpretació geomètrica, i analitzada sota l'òptica del càlcul i de les regles d'operativitat aritmètiques. En conseqüència, encerta un tipus de notació molt útil i eficaç, que a Europa encara tardaria molt a imposar-se. Així, generalitza la notació de les diferents classes d'arrels de la forma *més natural*:

" $R^3 64$ és 4" [ja que 4 per 4 per 4 fan 64]
 " $R^5 32$ és 2", i així successivament (p. 655)

Més endavant introdueix les arrels compostes, com

"14 més $R^2 180$, que té per arrel segona $3 \bar{p} R^2 5$ [on $\bar{p}$ designa el mot "plus", més]" (p. 655)

La forma que utilitza per indicar arrel quadrada de 14 més $R^2 180$ serà aquesta:
 $R^2 14 \bar{p} R^2 180$ (p. 655).

Podem observar que el subratllat de Chuquet correspon a una espècie de parèntesi, i indica tota l'expressió que és afectada per l'arrel quadrada de l'esquerra. És el que avui posaríem així:

$$\sqrt{14 + \sqrt{180}}$$

Es important resaltar que apareix en aquesta obra un simbolisme molt eficaç, que facilitarà extraordinàriament les diferents operacions del càlcul, altrament impossibles de fer sense algun tipus de notació simbòlica. L'ús d'aquesta forma de parèntesi és perfectament rigorós i exempt d'ambigüitat, i com a notació el tornarem a trobar a l'obra de Rafael Bombelli, 70 anys més tard. Seria il·lusori pensar que aquest tipus de notació simbòlica nasqué a l'obra de Chuquet com a fruit d'una "idea feliç", ans al contrari, el seu ús va venir forçat per la necessitat de treballar de forma habitual amb expressions compos-

tes de diverses arrels, i aquesta perspectiva s'inscriu en el marc de recerca d'una teoria completa dels nombres radicals.

Chuquet ensenya com reduir arrels a índex comú:

Pren l'exemple de reduir les arrels $R^2 6$ i $R^3 7$, agafant com a índex comú el 6 i transformant-les en: $R^6 216$ i $R^6 49$, i especificant que els valors de les arrels no han sofert variació per aquest canvi d'índex.

Per a la reducció a índex comú d'arrels compostes procedeix de la mateixa forma, mostrant l'exemple:

$$R^2 \underline{5 \bar{p} R^2 3} \text{ i } R^3 \underline{4 \bar{p} R^2 6} \quad \text{transformades en:}$$

$$R^6 \underline{170 \bar{p} R^2 7.500 \bar{p} R^2 2.352} \text{ i } R^6 \underline{22 \bar{p} R^2 384}$$

A continuació ensenya les regles formals per a obtenir arrels d'arrels, procedint a multiplicar l'ordre de les arrels:

$$R^2 R^3 13 \text{ és } R^6 13 ; R^3 R^2 R^5 12 \text{ és } R^{30} 12$$

La part dedicada al càlcul de les arrels d'índex diferent ocupa diverses pàgines, i aquí torna a exposar un mètode original per al càlcul d'arrels quadrades, basat en l'aproximació a partir dels nombres trencats intermedis, que en apartat anterior ja havia exposat. Així, per trobar una bona aproximació d'arrel de sis, procedeix de la següent forma (p. 697):

$$\text{Per a } 2 \frac{1}{2} \quad \text{plus } \frac{1}{4} \text{ (vol dir que excedeix de 6, en } \frac{1}{4} \text{)}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{1}{3} \quad \text{moins } \frac{5}{9} \text{ (vol dir que manquen } \frac{5}{9} \text{ per a arribar a 6)}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{2}{5} \quad \hat{m} \frac{6}{25}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{3}{7} \quad \hat{m} \frac{5}{49}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{4}{9} \quad \hat{m} \frac{2}{81}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{5}{11} \quad \hat{m} \frac{3}{121} \text{ (sic!) El menys } \hat{m} \text{ ha d'ésser més: pl.}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{9}{20} \quad \text{pl}' \frac{1}{400}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{13}{29} \quad \hat{m} \frac{5}{841}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{22}{49} \quad \hat{m} \frac{6}{2401}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{31}{69} \quad \hat{m} \frac{5}{4761}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{40}{89} \quad \approx \quad \frac{2}{7921}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{49}{109} \quad \text{pl. } \frac{3}{11881}$$

$$\text{Per a } 2 \frac{89}{198} \quad \text{pl. } \frac{1}{39204}$$

"I qui vulgui continuar més endavant trobarà per a $2 \frac{881}{1960}$ [un excés de] pl. $\frac{1}{3841600}$ "".

Per al càlcul d'arrels quadrades de nombres compostos, procedeix així (hem simplificat certes expressions i operacions, però mantenim la retòrica original):

Qui vulgui extreure l'arrel quadrada de 14 pl R^2 180 ho pot fer d'aquesta manera: Prenem la meitat de 14 $\bar{p}$ R^2 180, que és 7 $\bar{p}$ R^2 45; 7 per 7 són 49; 49 menys 45 fan 4; l'arrel quadrada de 4 és 2; 7 més 2 són 9 i 7 menys 2 són 5, i prenent les seves arrels ens resta 3 i R^2 5, i en conseqüència l'arrel que volíem calcular: R^2 14 pl R^2 180 és 3 pl R^2 5. (p. 709).

Observem l'extraordinària base de càlcul i el coneixement d'operacions formals continguts en la forma de reconduir aquest problema. Presentem l'esquema que hi ha implícit, en termes de càlcul literal:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \quad \text{es vol reconduir a} \quad \sqrt{c} + \sqrt{d}$$

$$a \pm \sqrt{b} = (\sqrt{c} \pm \sqrt{d})^2 = c + d \pm 2\sqrt{cd} \quad \begin{cases} c + d = a \\ 4cd = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4d^2 - 4ad - b = 0 \quad ; \quad \begin{cases} d = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{b}{4}} \\ c = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{b}{4}} \end{cases}$$

$$\text{Concloent: } \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{b}{4}}} \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{b}{4}}}$$

Chuquet afegeix que això sols es pot fer quan $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{b}{4}$ té arrel racional exacta, i que en cas contrari cal deixar l'expressió R^2 $a \bar{p} R^2 b$.

Al capítol següent es planteja la possibilitat de sumar dues arrels quadrades per obtenir una altra arrel quadrada; qüestió aquesta que és abordada seguint la tradició àrab, i que correspon al recíproc del camí seguit a l'apartat anterior. La idea es redueix a l'equi-

valència de les dues expressions: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$ i el resultat es pot deixar en forma d'una única arrel sempre i quan ab correspongui al quadrat exacte d'un racional.

Però abans d'explicar aquest mètode exposa el que avui anomenem quadrat d'un binomi. I ho fa expressant-se així:

"Si al doble de la multiplicació d'un nombre per un altre li són afegits els dos quadrats d'aquells nombres, [*llavors*] l'arrel de tot el que en resulta és igual a la suma d'aquells dos nombres". (p. 712).

I a continuació diu que és aquesta proposició la que ens permet sumar dues arrels i obtenir una arrel única.

"Per sumar $R^2 2$ amb $R^2 18$ multiplica'ls, i obtens $R^2 36$, que s'ha de doblar i fan $R^2 144$, que són 12, que sumats a 2 i a 18 (...) fan $R^2 32$ ". (p. 712-713).

D'igual forma: $R^2 3 \bar{p} R^2 5$ és $R^2 \underline{3 \bar{p} 5 p} R^2 \underline{60}$ que és $R^2 \underline{8 \bar{p}} R^2 \underline{60}$.

I encara exposa un altre mètode per aconseguir "tancar" l'operació de sumar arrels, i que es basa en la identitat:

$$a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} (1 + \sqrt{9}) = \sqrt{2} \cdot 4 = \sqrt{32}$$

El mètode l'extén a altres arrels d'índex superior:

$$\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{6} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{48}{6}} \right) = \sqrt[3]{6} (1 + 2) = 3 \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{162}$$

I encara l'aplica a suma d'arrels compostes:

$$\begin{aligned} \sqrt{7 + \sqrt{5}} + \sqrt{175 + \sqrt{3125}} &= \sqrt{7 + \sqrt{5}} \left(1 + \sqrt{\frac{175 + \sqrt{3125}}{7 + \sqrt{5}}} \right) = \\ &= \sqrt{7 + \sqrt{5}} (1 + \sqrt{25}) = 6\sqrt{7 + \sqrt{5}} \end{aligned}$$

Després enuncia les regles dels signes, quan es tracta de sumar expressions compostes per radicals:

"Més i més, menys i menys, sumem
Mes i menys, restem". (p. 715).

Una gran quantitat d'exemples il·lustren l'aplicació de la regla (als següents tres exemples hem simplificat certes expressions i operacions):

La suma de $R^2 12 \bar{\wedge} R^2 7 \bar{\wedge} 10$ amb $R^2 5 p 3 \bar{\wedge} R^2 2$.

Segons allò dit sobre la regla dels signes dona $R^2 5 \bar{p} 3 \bar{\wedge} R^2 2 \bar{p} R^2 12 \bar{\wedge} R^2 7 \bar{\wedge} 10$ que abreujadament, sumant més 3 i $\bar{\wedge} 10$ fan $\bar{\wedge} 7$. I així s'obté, finalment:
 $R^2 5 \bar{\wedge} R^2 2 \bar{p} R^2 12 \bar{\wedge} R^2 7 \bar{\wedge} 7$. (p. 716).

A continuació exposa les regles dels signes, quan es tracta de restar expressions compostes de radicals, així com les regles per al producte i la divisió:

Qui vulgui multiplicar $R^2 7 \text{ } \tilde{m} R^2 2$ per $R^2 5$ plus $R^2 3$. Convé primer multiplicar $R^2 7 \text{ } \tilde{m} R^2 2$ per $R^2 5$ que fan $R^2 35 \text{ } \tilde{m} R^2 10$; després cal multiplicar $R^2 7 \text{ } \tilde{m} R^2 2$ per $\bar{p} R^2 3$ i fan $\bar{p} R^2 21 \text{ } \tilde{m} R^2 6$. Resulta en total, per a aquest producte: $R^2 35 \text{ } \tilde{m} R^2 10 \bar{p} R^2 21 \text{ } \tilde{m} R^2 6$. (p. 722).

Ensenya a dividir expressions compostes, segons el mètode actual de racionalitzar la fracció.

$R^2 108 \text{ } \tilde{m} R^2 21$ dividit per $6 \text{ } \tilde{m} R^2 7$ és $R^2 108 \text{ } \tilde{m} R^2 21$ per $6 \bar{p} R^2 7$ i tot dividit per 36 menys 7, o sigui per 29, quedant: $R^2 3888 \text{ } \tilde{m} R^2 147$ dividit per 29, que abreujat és $R^2 2523$ dividit per 29, quedant en total $R^2 3$. (p. 732).

Les regles de l'àlgebra

L'última part del llibre és dedicada a l'estudi de les equacions, i el seu tractament ja és específicament algebraic. Porta el títol: "La tercera i última part d'aquest llibre, que tracta de la regla dels Primers".

En aquesta part és on podem veure nítidament el caràcter de l'obra de Chuquet. És evident per ell, i així ho constata des del primer capítol, la gran importància d'emprar un simbolisme eficaç per denotar les distintes potències de la incògnita.

Presenta el que avui diem "monomis" de la següent forma:

Cada nombre pot ésser considerat com a quantitat estricta, i per així assenyalar-ho, diu Chuquet, es pot afegir un zero a la part superior del nombre, com per exemple 12^0 , 13^0 . Però cada nombre pot ésser considerat nombre primer d'una quantitat contínua, que altrament es diu nombre lineal, i s'indica així: 12^1 , 13^1 , ...; o bé nombre superficial, quadrat: 12^2 , 13^2 , ... i així successivament fins als ordres que es vulgui (12^0 vol dir 12; 12^1 vol dir $12x$; 12^2 vol dir $12x^2$; etc...).

"Els antics han dit coses al que jo denomino primer, i la figura utilitzada ha estat ρ . Als segons els han dit quadrats (*champs*), amb el signe π . Els tercers són anomenats cubs, distingits amb $\square$. I als quarts els anomenaven quadrat-quadrat (*champs de champ*) amb el caràcter $\pi \pi$ (...) aquestes denominacions no són suficients per a considerar totes les classes de nombres diferents, que són innumerables". (p. 737)

Podem observar, al mateix començament d'aquest capítol, l'abandó de la notació tradicional per a designar les potències de la incògnita, i l'ús per primera vegada dels nombres naturals per a expressar l'ordre de les potències. Tal forma de procedir no la tornarem a trobar fins a l'obra de Bombelli, 70 anys més tard. Chuquet es despreocupa de la notació clàssica, molt lligada en els seus orígens a la interpretació geomètrica, i centra el seu esforç a crear un tipus de notació eficaç des del punt de vista del càlcul. En certa manera intueix l'extraordinària potència d'un càlcul automatitzat emprant signes conuenients. És aquest canvi de perspectiva el que li permet arribar, almenys formalment, a treballar amb potències d'exponent negatiu.

Chuquet estableix un marc ampli d'operacions prenent com a base les potències naturals de la incògnita. I així diu:

"S'ha d'entendre que cada una de les classes dels nombres abans definits pot ésser

arrel segona, tercera, (...) i pot anotar-se així: $R^2 12^1$ (...) $R^4 13^5$, (...)” (p. 738). Afegint, tot seguit, que qualsevol expressió d’aquestes sense res més significa comptat en positiu, i si es vol fer comptat en negatiu, llavors cal afegir davant del símbol el mot “menys”; així: $\tilde{m} 12^0$ ò $\tilde{m} 12^1$ ò $\tilde{m} R^2 12^3$. A continuació arriba a expressar la notació dels exponents negatius, entenent per això el primer menys, el segon menys,... ($12^1\tilde{m}$; $12^2\tilde{m}$ diferents de menys 12 primers o menys 12 segons, indicats així: $\tilde{m} 12^1$; $\tilde{m} 12^2$).

Establerta una bona base notacional, passa a *definir* les operacions amb les expressions anteriors a partir dels següents exemples:

6^1 amb 10^1 fan 16^1 . I 8^2 amb 12^2 fan 20^2	$6x + 10x = 16x$; $8x^2 + 12x^2 = 20x^2$
8^1 amb $\tilde{m} 5^1$ fan 3^1 .	$8x - 5x = 3x$
10^1 amb $\tilde{m} 16^1$ fan $\tilde{m} 6^1$.	$10x - 16x = -6x$
Si els nombres són de diferents classes, per sumar-los es fa així:	
5^1 amb 4^2 fan $5^1 \bar{p} 4^2$. (p. 738-739).	$5x \text{ més } 4x^2 = 5x + 4x^2$

Per a la subtracció segueix la mateixa pauta

Si de 13^1 restem 5^1 quedarà 8^1 ; i si de 13^3 restem 20^3 quedarà $\tilde{m} 7^3$; i si de $\tilde{m} 8^4$ restem $\bar{p} 10^4$ quedarà $\tilde{m} 18^4$. Qui també eixirà $\tilde{m} 16^0$ de 12^2 obtindrà $12^2 \tilde{m} \tilde{m} 16^0$, que val tant com $12^2 \bar{p} 16^0$. (p. 739).

Per introduir el producte dóna la següent definició.

“Les regles del més i menys exposades a la segona part d’aquest llibre, al capítol de multiplicar les arrels han de ser recordades aquí. I amb elles, això que convé multiplicar nombre per nombre i sumar denominació amb denominació”. (p. 739)

Entre els exemples que exposa Chuquet, s’hi troba el següent.

“Qui multiplicarà 12^3 per 10^5 , ha de multiplicar primer 12 per 10, que fan 120, i després sumar les denominacions, que són 3 i 5, que fan 8. Així la multiplicació fa 120^8 ”. (p. 740).

Per justificar que els exponents se sumen utilitza una taula de les primeres 20 potències de 2, i repara que per multiplicar dos nombres d’aquest tipus n’hi ha prou de sumar els seus exponents i cercar a la taula el nombre que correspon a aquest exponent. Alguns historiadors de les matemàtiques han cregut veure aquí el germen del càlcul logarítmic, anterior a Stifel. La nostra opinió és que el naixement dels logaritmes es dóna en un context que no té res a veure amb aquest, i que l’essencial dels logaritmes no està tant en la relació entre producte de nombres-suma d’exponents, sinó en la concepció d’un còmput estès a tots els nombres de forma contínua, i que simplifiqui el temps d’efectuar productes i divisions. I el nucli de l’assumpte no és altre que el problema de confeccionar unes taules “quasi contínues”. No obstant, exposem íntegrament aquest apartat del llibre de Chuquet, i el lector jutjarà per ell mateix:

¶ Pour entendre la cause pour quoy denomiacion de nombre se adiouste avec denomiacion et pour auoir cōgnoissance de l'ordre des nombres dont a esté faite ceste faicté | mencion ou. p̄mier chapitre Il conuient poser pluſs nōbres p̄portionalz cōmancans a .1. constituez en ordonnance continuee cōme .1. .2. 4. 8. 16. 32. ec. ou .1. 3. 9. 27. ec.

Nombres	Denotacions	
1	0	« Maintenant conuient scauoir que .1. represente et est ou lieu
2	1	des nombres dōt le denota. ^{on} est .0. / 2 represente et est ou lieu
4	2	des premiers dont leur denotacion est .1. / 4. tient le lieu des
8	3	secondz dont leur denotacion est .2. Et .8. est ou lieu des tiers
16	4	.16. tient la place des quartz .32. repñte les quintz Et ainsi des
32	5	auls. « Or mainten qui multiplie .1. par .1. monte .1. et pour
64	6	tant que .1. multiplie par .1. ne se varie point ne aussi quelconque
128	7	nombre que ce soit multiplie par .1. nest augmente ne diminue.
256	8	Et pour ceste 9sideracion qui multiplie nombre par nombre Il en
512	9	vient nombre dont sa denotacion est .0. Et qui adioust .0. avec
1024	10	.0. fait .0. « En apres qui multiplie .2. qui est nombre pñier
2048	11	par .1. qui est nombre la multiplicacion monte .2. puis apñs qui
4096	12	adioust leurs denotacions qui sont .0. et .1. font .1. ainsi la
8192	13	multiplicacion mōte .2. ¹ Et de ce vient quant on multiplie nom-
16384	14	bre par pñiers vel e9. ^o Il en vient pñiers Aussi qui multiplie
32768	15	.2. ¹ par .2. ¹ Il en viēt .4. qui est nombre second Ainsi mōte la
65536	16	multiplicacion .4. ² « Car .2. multiplie par .2. font .4. et deno-
131072	17	miacion adioustee cestasβ .1. avec .1. font .2. Et de ce vient que
262144	18	qui multiplie premiers par pñiers Il en vient secondz. Pareillemt
524288	19	qui multiplie .2. ¹ par .4. ² Il en vient .8. ³ Car .2. par .4. mul-
1048576	20	tipliez et .1. avec .2. adioustez font .8. ³ Et par ainsi qui mul-
		tiplie pñiers par secondz. Il en vient tiers. Aussi qui multiplie
		.4. ² par .4. ² Il en vient .16. qui est nombre quart et pour ceste
		cause qui multiplie secondz par secondz Il en vient quartz « Sem-
		blement qui multiplie .4. qui est nombre second par .8. qui est
		nombre tiers montent .32. qui est nombre quint Et par ainsi .67.
		qui multiplie secondz par tiers vel e9. ^o Il en vient quintz Et tiers par quartz
		Il en vient .7. ^o et quartz par quartz Il en vient .8. ^o et ainsi des auls. « En
		ceste consideracion est maifeste vng secret qui est es nombres pporcionalz. Cest
		que qui multiplie vng nombre pporcional en soy Il en viēt le nombre du dou-
		ble de sa denotacion come qui mñtiplie .8. qui est tiers en soy Il en vient
		.64. qui est six. ^o Et .16. qui est quart multiplie en soy. Il en doit venir .256.
		qui est huyt. ^o Et qui multiplie .128. qui est le .7. ^o pporcional par .512. qui
		est le 9. ^o Il en doit venir 65536. qui est le 16. ^o .

A continuació ensenya a dividir expressions del tipus anterior, definint la regla de restar els exponents i dividir els coeficients (p. 742):

$$\begin{array}{lcl}
 72^o \text{ dividit per } 8^3 \text{ dóna } 9^{3\tilde{m}} & \left| \right. & \frac{72}{8 \times^3} = 9 \times^{-3} \\
 84^1 \text{ dividit per } 7^{1\tilde{m}} \text{ dóna } 12^2 & \left| \right. & \frac{84 \times}{7 \times^{-1}} = 12 \times^2 \\
 84^{3\tilde{m}} \text{ dividit per } 7^{2\tilde{m}} \text{ dóna } 12^{1\tilde{m}} & \left| \right. & \frac{84 \times^{-3}}{7 \times^{-2}} = 12 \times^{-1}
 \end{array}$$

Explica que aquestes regles dels primers serveixen per a cercar la cosa que s'ignora, a saber: 11. I ensenya a resoldre les següents equacions que es plantegen:

$$\begin{array}{l|l} 4^1 \text{ } \tilde{m} 6^0 \text{ igual a } 3^1, \text{ afegint } 6^0 \text{ a les dues parts tindrem} & 4x - 6 = 3x \\ 4^1 \text{ igual a } 3^1 \text{ } \bar{p} 6^0; \text{ restant } 3^1 \text{ a les dues parts es té} & 4x = 3x + 6 \\ 1^1 \text{ igual a } 6^0. \text{ (p. 743)} & x = 6 \end{array}$$

Chuquet arriba a explicar, en alguns casos simples, com es resolen equacions plantejades en forma de fracció algebraica:

"...Qui voldria partir $30 \frac{\tilde{m} 11}{12 \bar{p} 11}$ per 1^2 més 1^1 , tindria (...) $\frac{30 \tilde{m} 11}{12 \bar{p} 11}$. Ara pensem que aquesta diferència de nombre (sic) fos igual o semblant a 3^0 . Convindria multiplicar l'una i l'altra parts per la manera més amunt dita, i es tindrà $30 \tilde{m} 11$ d'una part, i $3^2 \bar{p} 3^1$ de l'altra. Després cal donar 1^1 a l'una i l'altra parts a causa de $\tilde{m} 11$ que és en una d'elles, i es tindrà 30^0 d'una part i $3^2 \bar{p} 4^1$ de l'altra, que són ben igualades i abreujaes". (p. 745-746)

Explica la manera d'igualar i abreujar parts afectades per arrels, com el següent exemple. Per abreujar $R^2 \frac{4^2 \bar{p} 4^1}{12 \bar{p} 1}$ p 1 igual a 100, en primer lloc treu $2^1 \bar{p} 1$ de cada una de les parts, obtenint $R^2 \frac{4^2 \bar{p} 4^1}{12 \bar{p} 1}$ d'una part i $99 \tilde{m} 2^1$ de l'altra. Després multiplica cada part per ella mateixa i obté, per una banda, $4^2 \bar{p} 4^1$, i per l'altra $9801 \tilde{m} 396^1 \bar{p} 4^2$. I abreujant, resta per una part 400^1 i 9801 per l'altra. (p. 746)

Posa també l'exemple:

$$R^2 \frac{12^1 \tilde{m} 1^2}{12 \bar{p} 1} \text{ i } R^2 \frac{36 \tilde{m} 1^2}{12 \bar{p} 1} \quad (\text{multiplicant cada part per ella mateixa})$$

$$12^1 \tilde{m} 1^2 \bar{p} R^2 \frac{48^1 \tilde{m} 4^2}{12 \bar{p} 1} \bar{p} 1 \text{ i } 36 \tilde{m} 1^2 \quad (\text{sumant } 1^2 \text{ a cada part})$$

$$12^1 \bar{p} R^2 \frac{48^1 \tilde{m} 4^2}{12 \bar{p} 1} \bar{p} 1 \text{ i } 36 \quad (\text{restant } 1 \text{ de cada part})$$

$$12^1 \bar{p} R^2 \frac{48^1 \tilde{m} 4^2}{12 \bar{p} 1} \text{ i } 35 \quad (\text{traient } 12^1 \text{ de cada part})$$

$$R^2 \frac{48^1 \tilde{m} 4^2}{12 \bar{p} 1} \text{ i } 35 \tilde{m} 12^1 \quad (\text{multiplicant cada part per ella mateixa})$$

$$48^1 \tilde{m} 4^2 \text{ i } 1.225 \tilde{m} 840^1 \bar{p} 144^2 \quad (\text{sumant } 4^2 \text{ a les dues parts})$$

$$48^1 \text{ i } 1.225 \tilde{m} 840^1 \bar{p} 148^2 \quad (\text{sumant } 840^1 \text{ a les dues parts})$$

$$888^1 \text{ i } 1.225 \bar{p} 148^2. \quad \text{Fi de l'abreujament. (p. 747)}$$

En llenguatge modern:

$$\sqrt{12x - x^2} + 1 = \sqrt{36 - x^2}$$

$$12x - x^2 + \sqrt{48x - 4x^2} + 1 = 36 - x^2$$

$$12x + \sqrt{48x - 4x^2} + 1 = 36$$

$$12x + \sqrt{48x - 4x^2} = 35$$

$$\sqrt{48x - 4x^2} = 35 - 12x$$

$$48x - 4x^2 = 1.225 - 840x + 144x^2$$

$$48x = 1.225 - 840x + 148x^2$$

$$888x = 1.225 + 148x^2$$

És perfectament constatable el domini de les operacions bàsiques que hi intervenen, i la idea de reconduir l'equació a una expressió com més simplificada millor, amb la restricció que cada part corresponent a la potència de la incògnita resti amb coeficient positiu.

Explica les regles de resolució de les equacions de primer grau $ax = b$, o del tipus $ax^N = bx^{N-1}$; seguint la tradició àrab, les diferents formes en què apareixen les equacions de segon grau són tractades una per una, quant a la forma de resoldre-les. També aborda aquelles equacions del tipus: $ax^{2N} = bx^N + c$

Fa observar que quan ens trobem amb equacions del tipus 15^2 igual a 15^2 , llavors tots els nombres són solució, però si arribem a una equació com 12^1 igual a 8^1 , això significa que la raó és impossible i que no hi ha solució.

Segueixen molts problemes que condueixen a equacions amb radicals, com el que transcrivim:

p. 782 "Vull trobar un nombre tal que, dividit per 5, la R^4 del quocient sigui igual a $R^3 7$ ".

Forma de resolució: 11 dividit per 5 és $\frac{11}{5}$, i la seva arrel quarta $R^4 \frac{11}{5}$ que ha d'ésser igual a $R^3 7$. Reduint els índexs de les dues arrels: $R^{12} \frac{13}{125}$ igual a $R^{12} 2.401$; $\frac{13}{125}$ igual a 2.401 ; 1^3 igual a 300.125 . I el nombre cercat és $R^3 300.125$.

Exposem la forma de resoldre una equació que en notació moderna es:

$$x\sqrt{5} + \sqrt{7} = \sqrt{20}$$

Chuquet procedeix així:

$$1^1 \text{ per } R^2 5 \text{ és } R^2 5^2$$

$$R^2 7 \tilde{p} R^2 5^2 \text{ igual a } R^2 20 \text{ (Restem } R^2 7)$$

$$R^2 5^2 \text{ igual a } R^2 20 \tilde{m} R^2 7 \text{ (Multipliquem cada part per ella mateixa)}$$

$$5^2 \text{ igual a } 27 \tilde{m} R^2 560$$

$$1^2 \text{ igual a } 5 \frac{2}{5} \tilde{m} R^2 22 \frac{2}{5}$$

$$1^1 \text{ igual a } R^2 5 \frac{2}{5} \tilde{m} R^2 22 \frac{2}{5} \text{ que abreujat és } R^2 4 \tilde{m} R^2 1 \frac{2}{5}$$

$$x\sqrt{5} + \sqrt{7} = \sqrt{20}$$

$$\sqrt{5x^2} + \sqrt{7} = \sqrt{20}$$

$$\sqrt{5x^2} = \sqrt{20} - \sqrt{7}$$

$$5x^2 = 27 - \sqrt{560}$$

$$x^2 = 5\frac{2}{5} - \sqrt{22\frac{2}{5}}$$

$$x = \sqrt{5\frac{2}{5} - \sqrt{22\frac{2}{5}}} = \sqrt{4} - \sqrt{1\frac{2}{5}}$$

A la p. 799 tracta la resolució d'una equació on per primera vegada apareixen dues solucions, considerant com a vàlides totes dues:

$$R^2 6^2 \bar{p} 1^2 \text{ igual a } 24$$

$$R^2 6^2 \text{ igual a } 24 \tilde{m} 1^2$$

$$6^2 \text{ igual a } 576 \tilde{m} 48^2 \bar{p} 1^4$$

54^2 igual a $576 \bar{p} 1^4$; que aplicant la 4^a regla de resolució (mitjà = precedent + conseqüent) dóna les solucions:

$$R^2 \underline{R^2 153 \bar{p} 27} \quad i \quad R^2 \underline{27 \tilde{m} R^2 153}$$

$$\sqrt{6x^2} + x^2 = 24$$

$$\sqrt{6x^2} = 24 - x^2$$

$$6x^2 = 576 - 48x^2 + x^4$$

$$54x^2 = 576 + x^4$$

$$\text{Solucions: } \sqrt{\sqrt{153} + 27} \quad i \quad \sqrt{27 - \sqrt{153}}$$

A la p. 806 trobem un problema tal que el planteig de l'equació condueix a dues solucions, i Chuquet és veu obligat a establir un criteri que decideixi la validesa de cada una d'elles:

"Vull fer de 12 dues parts tals que l'una multiplicada per 12 sigui igual al quadrat de l'altra".

Chuquet posa que la part més petita sigui 1^1 ; l'altra serà $12 \tilde{m} 1^1$. La igualació de les dues parts serà

$$12^1 \text{ igual a } 144 \tilde{m} 24^1 \bar{p} 1^2$$

$$144 \bar{p} 1^2 \text{ igual a } 36^1$$

I aplicant la regla corresponent obté la solució $18 \bar{p} R^2 180$ per a una de les parts de 12, la qual cosa no pot ser. És per tant que, segons la regla de resolució, cal que de 18

restem R^2 180. Així, la més petita part de 12 que buscàvem és $18 \sqrt[3]{R^2 180}$; 1 l'altra part serà $R^2 180 \sqrt[3]{6}$.

Aquí trobem un passatge molt curiós, com a comentari de Chuquet:

- p. 806 "Campano, que fou solemne geòmetra i comentador d'Euclides pensava que tals càlculs no es podien fer per raó del nombre, així com ho diu o comenta en bastants apartats, fins i tot al referent al llibre 9 d'Euclides, al final de la proposició 16".

A continuació exposa molts problemes on s'accepten com a vàlides les dues solucions, comprovant sempre que efectivament ho són sense més que substituir els valors trobats a l'equació, i veient que la igualtat resulta certa.

Chuquet acaba el llibre amb les paraules següents:

- p. 814 "Falta encara, per a perfeccionar i completar aquest llibre, trobar regles i cànons generals per a tres diferències (*potències diferents de la incògnita*) de nombres inigualment distants. I encara per a quatre o més diferències, siguin igualment o no separades les unes de les altres. Les quals (*equacions*) són deixades per a aquells qui més endavant hi voldran aprofundir. I així, a l'honor de la Gloriosa Trinitat, és acabat aquest llibre, el qual, per raó de les seves tres parts generals, titulo Triparty. I per haver estat fet per Nicolàs Chuquet, parisenc, Batxiller en Medicina, l'anomeno el "Triparty de Nicolàs en la science des nombres". El qual fou començat, desenvolupat i acabat a Lyon sus le Rosne, l'any 1484".

La resta del llibre és un ampli recull de problemes (f. 148-f. 324), dels quals A. Marre tan sols publicà fins al f. 210.

Potser és interessant d'assenyalar que una vintena d'aquests exercicis provenen d'una aritmètica en llengua d'oc que es conserva, manuscrita, a la Biblioteca Nacional de París. El manuscrit és original de Pàmies, l'actual Pamiers, una ciutat a prop de Foix, i es pot datar de la meitat del s. XV. Marre va remarcar la concordança d'enunciats entre els problemes de Chuquet i els del manuscrit de Pamiers, reproduint en la seva edició del *Triparty* els enunciats de Pamiers utilitzats per Chuquet. Alguns dels problemes més interessants els trobarà el lector a la part final d'aquest llibre.

Per últim, volem deixar constància de la nostra estranyesa per la poca atenció que encara rep la *Triparty*, després de la seva publicació ara fa 100 anys. Pensem que no es valora suficientment la creació d'un model de llenguatge algebraic, completament independent de la geometria i capaç de funcionar per si sol en el tractament general del càlcul radical i de les equacions (simbolització del parèntesi per a l'arrel, índex natural per a l'arrel i la potència de la incògnita, regles per a la transformació de les equacions,...), i que al mateix temps dóna la interpretació de solucions negatives en problemes de tipus comercial. I en canvi es concedeix una importància fora de lloc al fet que en alguna rara ocasió apareixin nombres negatius aïllats en un membre d'una equació, quan això no seria sinó la conseqüència lògica d'haver desenvolupat formalment un càlcul algebraic de manera prou extensa com perquè una "falla" d'aquest tipus no porti al final de tot a un resultat fals.

Si bé les contribucions de Chuquet al camp de la resolució d'equacions són escasses, mereix, per l'originalitat i audàcia de la seva obra, figurar en un lloc d'honor en el camp de l'elaboració del llenguatge i càlcul algebraics.

CAPÍTOL 6:

L'OBRA MATEMÀTICA DE NICCOLÒ TARTAGLIA

Algunes dades biogràfiques

La vida i obra de Tartaglia, al igual que la de Cardano, estan indissolublement lligades al Renaixement. Són, tots dos personatges productes característics d'una època plètòrica, en estat d'efervescència i trastocament dels antics valors econòmics i socials, polítics i culturals, jurídics i científics. Un món nou pugnava per sortir de les cendres d'un passat que es remunta a l'Alta Edat Mitjana, enmig d'un present que viu l'intercanvi d'idees i mercaderies entre civilitzacions llunyanes geogràficament les unes de les altres. Aquest període històric, que porta a les entranyes la configuració que adquirirà el món modern a l'Occident, es caracteritza per un extraordinari dinamisme social, per un vitalisme que floreix a tots els ordres de la vida, i per una sed d'aventura que s'estén des de les àrees del comerç a les dels descobriments geogràfics, des de la invenció d'artilugis mecànics a la reputació dels descobridors científics. La competitivitat entre els homes arriba a fites molt altes i així no és d'estranyar, en el marc d'aquesta societat, els desafiaments entre científics, per tal de veure qui sorgia triomfant d'una polèmica entre doctes. El més famós d'aquests duels sense espasa fou l'establert entre Tartaglia i Ferrari, al qual més endavant ens referirem.

Niccolò Fontana, nasqué aproximadament a començaments del segle XVI i la seva activitat omple la primera meitat d'aquest segle fins a la seva mort, que ocorregué l'any 1557. Segons explica ell mateix als *Quesiti et inventioni diverse*, nasqué de família molt humil, i fou ferit de petit, l'any 1512, quan les tropes que comandava Gastó de Foix entraren a Brescia; resultat de les ferides fou que mai més no va poder parlar de forma normal, pel que li va quedar el malnom de Tartaglia (Quec). Cal dir, potser, que mai no s'averگویí d'aquest mot, i que fins i tot l'adoptà com a sobrenom, amb el qual signava les seves obres. Tingué una educació autodidacta, pel seu propi esforç, fora de les escoles d'aprenentatge, cosa que explica que no aprengué a escriure en llatí i que sempre utilitzés l'italià vulgar. Es dedicà a l'ensenyament i fou professor a Verona (1521-23), a Màntua (1526), a Venezia (1534), a Brescia (1548) i finalment a Venezia on morí.

És precisament al novè llibre on trobem variats comentaris de tipus històric que permeten seguir el fil del descobriment de les solucions de les equacions de tercer grau. Tartaglia explica a l'índex el contingut i objecte del novè llibre:

"Al novè llibre es dóna la regla i la manera de saber resoldre variats i diversos casos sobre qüestions d'Aritmètica, de geometria i de la Pràctica especulativa de l'art magna, dita àlgebra i almucàbala, vulgarment anomenada la Regla de la cosa, i fins i tot es tracta de la Regla de cosa i cub igual a nombre, retrobada pel present Autor, i semblantment de quadrat i cub, i dels seus altres associats, coses que els savis jutjaven impossibles [de resoldre]".

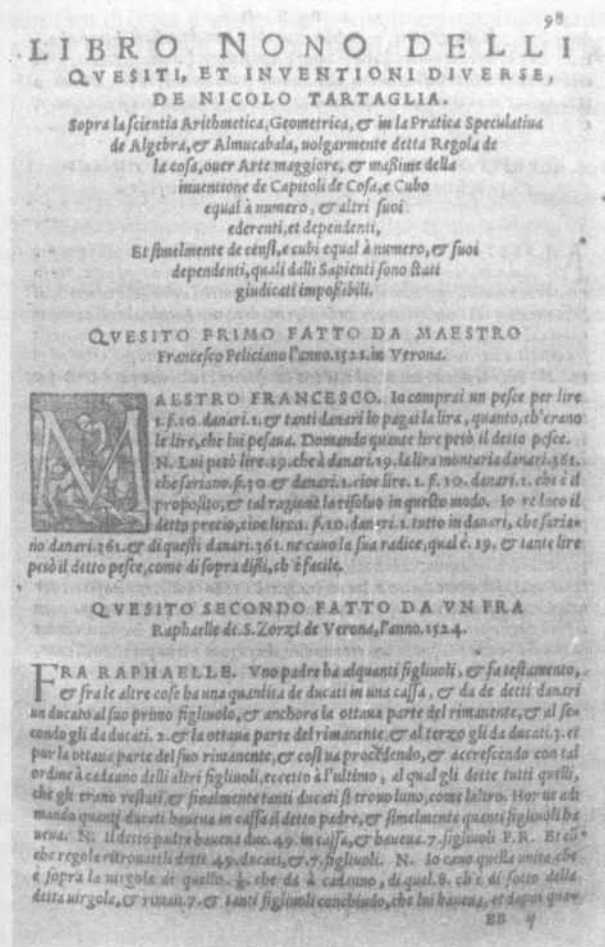


Fig. 16. Començament del novè llibre dels Quesiti. A sota mateix del títol exposa genèricament els continguts de què tractarà. Pot observar-se l'estructura amb què apareixen els diferents QUESITI, on fa constar la procedència dels problemes i l'any.

Segons les dades extretes d'aquest llibre, tot sembla indicar que Scipione del Ferro, professor de matemàtiques a Bolonya, trobà (l'any 1506, segons Tartaglia, o l'any 1515, en opinió de Cardano) una manera de resoldre l'equació cúbica del tipus: $x^3 + px = q$. No publicà la forma de resolució, trobada per ell, sinó que la mostrà al seu deixeble Antonio Maria Fiore. Els papers de Scipione del Ferro foren heretats més tard pel seu cunyat i

successor Annibale della Nave, que ensenyà a Bolonya fins a 1550. Tant Fiore com Della Nave es despreocuparen de fer pública tal descoberta. Els papers de del Ferro no han estat trobat fins ara.

Segons ens refereix Tartaglia al Quesito XIV del llibre 9^è dels *Quesiti*, un tal Zuanne de Coi, professor de Brèscia, li va proposar l'any 1530, de resoldre dues qüestions que conduïen a respectives equacions cúbiques.

“Mestre Zuanne: Trobeu un nombre, el qual, multiplicat per la seva arrel més 3, em faci tot plegat 5. Altrament, trobeu-me 3 nombres amb la condició que el segon sigui dos més que el primer, i que el tercer sigui també dos més que el segon, i que multiplicats el primer pel segon i aquest producte pel tercer faci 1.000. Niccolo Tartaglia: vós m’heu enviat aquests dos problemes, com a cosa impossible de resoldre, o bé ignorada per vós mateix, perquè procedint per l’àlgebra el primer condueix a qui opera a un cub més tres quadrats igual a 5 [$x^3 + 3x^2 = 5$] i el segon a un cub més 6 quadrats més 8 coses igual a 1.000 [$x^3 + 6x^2 + 8x = 1.000$], els quals capítols, fins als temps actuals, han estat jutjats per Fra Luca i d’altres com impossibles de resoldre mitjançant una Regla general...”, i Tartaglia segueix més endavant:

f. 101 v.: “I per a mostrar-vos que d’això n’estic segur, m’ofereixo a dipositar 10 ducats contra 5 a que vós no sabríeu resoldre aquests dos casos que m’heu proposat a partir d’una Regla general...”.

I encara Tartaglia afegeix:

“Jo no dic que tals casos siguin impossibles, encara que el primer, aquell del cub i del quadrat igual al nombre, estic convençut d’haver trobat la seva Regla general mes per ara la vull callar prudentment; i del segon, aquell del cub i quadrat i cosa igual a nombre, confesso no haver pogut, fins a aquest moment, trobar una regla general, però amb això no dic ni vull dir que sigui impossible de trobar, malgrat que fins ara no hagi estat trobada”.

Al Quesito XXV, Tartaglia diu que un tal Antonio del Fiore, assabentat que Tartaglia havia afirmat resoldre certes equacions cúbiques de forma general, el qualifica d’impostor, replicant Tartaglia estar en possessió de la forma de resolució de les cúbiques: $x^3 + px = q$, i $x^3 = px + q$. A. Fiore desafià Tartaglia, sota el compromís de dipositar tots dos una certa quantitat de diners en presència d’un notari; aquesta quantitat se l’emportaria aquell qui resolgués bé més problemes d’un total de 30 que cadascú proposaria a l’altre, en un termini màxim de 40 dies. Tartaglia els resolgué tots en menys de dues hores, i Fiore a penes va aconseguir donar alguna resposta correcta.

Tartaglia rememora el desafiament comentant els problemes que es van proposar l’un a l’altre:

“El primer dels 30 problemes que li vaig proposar diu:

Trobar una quantitat que sigui irracional, i que multiplicada per la seva arrel més 40 faci un nombre racional i discret”.

Els quatre primers problemes conduïen a les següents equacions:

$$1^{\circ}) x^3 + 40x^2 = p$$

$$3^{\circ}) x^3 + 4x = 13$$

$$2^{\circ}) 30x^2 = x^3 + p$$

$$4^{\circ}) x = 3x^3 + 10$$

Un any després del desafiament entre Tartaglia i Fiore i amb data 12-9-1535, Zuanne de Coi torna a enviar a Tartaglia tres problemes, un dels quals consisteix a descomposar 20 en tres parts en proporció geomètrica, i tals que el producte dels dos primers faci 8, problema que Lluís Ferrari, deixeble de Cardano, havia aconseguit resoldre.

En agost de 1536 un tal Vincenti proposà a Tartaglia el problema de trobar un nombre que, multiplicat per la seva arrel quadrada augmentada en 6, donés 100, problema idèntic a un dels proposats per Coi l'any 1530.

Al Quesito XXXI trobem el text d'una carta que Cardano envià a Tartaglia (2-1-39), per mitjà d'un llibreter, on li diu que, sent coneixedor de la disputa establerta entre Tartaglia i Fiore, i estant a punt de publicar una obra, voldria incloure-hi la regla per a resoldre la equació de tercer grau —deixant constància del nom del seu descobridor—; per tant, li demana la informació precisa de tal qüestió, i al mateix temps li sol·licita els enuncis dels famosos 30 problemes de la contesa. Cardano acaba la carta demanant-li si pot resoldre una llista de 8 problemes, entre els quals hi ha aquests:

- 1er) Partir 10 en quatre parts contínues proporcionals, i que la primera part sia 2.
- 4rt) Problema que condueix a resoldre l'equació: $2x^2 + 2x^3 = 10$.
- 8è) Trobar un nombre que multiplicat per la seva arrel més 3 faci 21.

Tartaglia contesta a Cardano dient-li que aquestes qüestions provenen de Zuanne de Coi i que corresponen a equacions del tipus $x^3 + px^2 = q$, que Zuanne no sap resoldre, però que ell té la regla particular de resolució de tals qüestions. En la mateixa carta a Cardano, li exposa la llista dels 30 problemes que li foren proposats per Fiore, entre els quals hi trobem els següents enuncis:

- 1er) Trobar un nombre tal que, ajuntant-li la seva arrel cúbica, faci 6. [Problema d'equació $x + \sqrt[3]{x} = 6$, equivalent a $x^3 + x = 6$].
- 7è) Problema que condueix a l'equació $x + 2\sqrt[3]{x} = 13$, equivalent a resoldre $x^3 + 2x = 13$.
- 8è) Problema consistent a resoldre $x(13-x) = x^4$ que es redueix a: $x^3 + x = 13$.

La resta dels problemes es redueixen a resoldre equacions del tipus: $x^3 + px = q$, pel que no és d'estranyar que Tartaglia, coneixedor de la fórmula de resolució, els resolgués en menys de dues hores.

Al Quesito XXXII s'exposen diverses cartes creuades entre Cardano i Tartaglia.

Al Quesito XXXIII trobem una carta de Cardano a Tartaglia (13-3-39) on s'invita a aquest últim a anar Milà per visitar el marquès de Vasto, que és un conegut protector de pensadors i científics.

Al Quesito XXXIV Tartaglia explica el resultat de la seva visita a Milà, on s'allotjà a casa de Cardano, i que aquest li va pregar que li comunicés el secret de la resolució de l'equació de tercer grau, arribant-li a dir: "Us juro sobre els Sants Evangelis que, si em comuniqueu els vostres descobriments, no els publicaré, i els anotaré sols per a mi, i en clau, a fi que ningú no pugui comprendre'ls fins després de la meua mort". Tartaglia va cedir a tals precis, i va comunicar a Cardano la forma de resoldre les cúbiques, continguda als famosos versos que expliquen les successives operacions que cal efectuar.

Una versió lliure dels versos de Tartaglia és la següent:

LIBRO

Marchese, per che egli hor mai tre giorni ch'io son qua, et morire offese lo aspettare, tanto, ritornato che sia mi prometto dimostrarvi il tutto. M.H. Dopo che hauete deliberato da uolere ad ogni modo caualcare per fino à Veguana d.d.S. Marchese, mi uoglio dar una lettera da dar à sua Eccellentia, accio che quella sappia, che noi fetti, ma nanti che ue parteti, uoglio che mi mostrati la regola di questi nostri capitoli, come che me hauete promesso. N. Io son contento, ma uoglio che sappiati, che per potermi arcordare in ogni mia improvisa occorrentia tal modo operativo, lo l'ho ridotto in uno capitolo in rima, perche se io non hauessi usato quella cautella spesso me seria uscito di mente, et quantunque tal mio dire in rima non sia molto terso non mi ho curato, perche mi della che mi serua à ridurme in memoria tal regola ogni uolta, che io il dica, il qual capitolo ue lo uoglio scriuere de mia mano, accio che stati sicuro, che mi dia tal inuentione giusta, et buona.

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Troua di altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che l'lor prodotto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.
In el secondo de cotesti atti
Quando che l'cubo restasse lui solo
Tu offeruarai questi altri contratti,
Del numer farai due tal parti à uolo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in solo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme giointi
Et cotai somma fara il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congiointi.
Questi trouai, et non con passitar di
Nel mille cinquecenté, quattro e trenta
Con fondamenti ben sala d'è gliardi
Nella città dal mar intorno ceta.

Al qual capitolo parla tanto chiaro, che senz'altro essemplio credo che vostra Eccellentia intendera il tutto. M.H. Come se lo intendero, e l'ho quasi inteso per fino al presente, andati pur, che, come sarei ritornato, ue faro poi uedere se l'hauete inteso. N. Hor vostra Eccellentia se arcor di mo à non mancar della promessa fede, perche se per mala sorte quella me mancasse, cioe che me desse fuora questi capitoli, o sia in questa

Fig. 17. Folí 120v. dels Quesiti, on apareixen els famosos versos de Tartaglia amb la regla per a resoldre les cúbiques.

Quan el cub (x^3) més les coses (px) s'igualen a qualsevol nombre (q), troba'n dos que es diferencien en això ($u - v = q$), i que el seu producte sempre sigui igual al cub del terç de les coses ($uv = (\frac{1}{3}p)^3$). La diferència entre les seves arrels cúbiques valdrà la cosa

$$(x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}).$$

En el segon (cas), quan el cub resti sol (i.e., si $x^3 = px + q$), del nombre en faràs dues parts ($q = u + v$) que una per l'altra sigui el cub del terç de les coses; d'aquestes parts trobaràs les arrels cúbiques, i llur suma serà la incògnita.

El tercer ($x^3 + q = px$) es resol amb el segon, ja que per naturalesa són quasi conjunts.

Això vaig trobar el mil cinc-cents trenta-quatre, a la ciutat del mar entorn guarda-da (Venèzia).

Al Quesito XXXV, Tartaglia explica que Cardano li demana per carta més aclaracions sobre la resolució de l'equació cúbica, després de la seva entrevista a Milà, sol·licitant tot seguit la solució de l'equació: $x^3 + 3x = 10$. Tartaglia contesta exposant-li la forma exacta de resoldre-ho, i al final li diu que el bon resultat es deriva de la mateixa confiança que dona l'experiència, però que al mateix temps és fàcil de veure la regla a partir d'una construcció geomètrica, sense exposar-la en cap moment.

L'intercanvi de cartes entre Cardano i Tartaglia segueix durant un any: 12 i 27 de Maig (Ques. XXXVI); 10 i 19 de juliol (Ques. XXXVII); 4 i 7 d'agost (Ques. XXXVIII) i 18 d'Octubre del 39. L'última carta de Cardano, del 5 de gener de 1540, queda ja sense resposta, després d'haver-se refredat considerablement la relació entre ells.

La disputa entre Tartaglia i Ferrari (1547-1548)

La primera vegada que es publicà la resolució de l'equació cúbica fou l'any 1545, dins de l'obra d'àlgebra *Ars Magna* de Cardano. Tartaglia, molt enfadat per tal fet, i considerant que Cardano havia trencat el jurament que li va fer, desafia Cardano, però aquest refusà, i en canvi instiga Ferrari a enviar a Tartaglia un "cartello di sfida" (12-2-1547), disposant-se a dipositar 200 escuts, destinats al vencedor del torneig. Tartaglia contestà acceptant, però amb la condició que Cardano prenguéss part en la disputa matemàtica.

[1]

[Tartaglia, Terza Risposta]

71

Fig. 18. Primera pàgina del 3er contra-cartello que Tartaglia envia a Cardano i Ferrari (p. 71 de l'edició facsimil, Brescia, 1974).

TERZA RISPOSTA

DATA DA NICOLO TARTALEA BRISCIANO

Al Eccellente M. Hieronimo Cardano Medico Milanese, &
Lector Publico in Pavia.

Et al Eccellente messer Lodouico Ferraro delle Mathematiche
Lector publico in Melano, Con la resolutione, ouer
Risposta de. 3. 1. Quesiti, ouer questioni da
quelli altri proposti.



Eccellente m. Hieronimo, & voi messer Lodouico alli. 1. di Aprile vi dedi risoluta risposta allo vostro secondo Cartello, Et con quella vi indirizai Quesiti, ouer Questioni. 3. 1. con offerta che se voi ambidui insieme con che altro vi pareste, me li resolueate in termine de giorni. 15. dapol la presentatione di quelli, che mi contentaua di perdere ducati. 25. de danari, & la mita delli mei restanti libri che tanto ve infestano, (per narrar in quelli la pura verita) liquali danari & libri ascendeuano alla somma de duc. 150. Et che se per forte voi non me sapeteate resoluer li detti Quesiti nel detto termine, io non voleua che voi fosti tenuti a perdere cosa alcuna, Et vi scrisi anchora che se per forte voi non li sapeteate resoluer costi in giorni. 15. vi concedeuo per manco vostra infamia che soluendoli anchor dapol el detto termine, vn mese, & anchor dui, o tutti, ouer parte de quelli, che potesti publicar le dette vostre solutioni al mondo. La qual mia risposta, & Quesiti fumo consignati alla S. de m. Ottauiano Scotto el primo di di maggio, Presente m. Dominico del q. Dona Cantor. Et adi. 3. del detto mese trouai la Signoria di m. Ottauiano Scotto, & lo adimandai se vi haueua mandata la detta mia risposta, & quesiti, quel mi rispose (presente a dui homini da bene) che il giorno auanti se era partito il portator di quella, che faria stato adi. 2. di maggio, talmente che tassando, 3. ouer. 4. giorni al detto latore per venire da Venetia a Melano, faccio conto che alli. 5. ouer al piu alli. 6. di maggio voi douesti riceuere la detta mia risposta, & quesiti. Et perche molti mei amici me reprendeua grandamente ogni giorno digando che io era stato troppo largo, & liberale a farue a d ambidui costi largo partito, & massime con liberta di poter mi far agiutare anchora a d altri, & conoscendo che me diceuano il vero, son stato per fin alli. 6. di giugno alquanto sussepo dubitando che non mi mandassi la resolutione di quelli nel termine a voi assignato. Dico per fin alli. 6. di giugno, perche io vi limitaua (come detto) giorni. 15. per risoluer li detti da

Hem consultat el contingut dels 6 cartells creuats entre Tartaglia i Ferrari, i la major part tracten menys de matemàtiques que de consideracions generals i provocacions. Totes les pàgines referides als *Cartelli* corresponen a l'edició facsímil (Brescia, 1974).

Un esquema resumit dels sis cartells, creuats, apart dels dos primers esmentats, és el següent:

CARTELL 2on Abril-47. Ferrari insisteix a fixar els terminis de la disputa.

27-4-47. Tartaglia li contesta que sí, i li proposa ja la resolució de 31 problemes.

CARTELL 3er 24-5-47. Ferrari contesta a Tartaglia amb un "cartello" ple d'injúries, proposant-li la resolució d'uns altres 31 problemes molt més complicats, i sembla ésser que alguns d'ells excedint les possibilitats de resolució de Ferrari.

23-6/9-7. Tartaglia contesta responnent 23 dels problemes que li han proposat.

CARTELL 4art 10-8-47. Ferrari segueix polemitzant i injuriant Tartaglia.

30-8-47. Tartaglia contesta les qüestions pendents de la llista de problemes anterior.

CARTELL 5è. Octubre. Ferrari resol alguns dels problemes proposats per Tartaglia sis mesos abans.

Tartaglia contesta demanant-li que es fixi d'una vegada la data del desafiament verbal.

CARTELL 6è. 14-7-48. Ferrari contesta a Tartaglia elegint la data del 10-8-48 per a realitzar el duel, a la càtedra Giordino dels frares recol·lectes de Milà.

Comentarem, com a part més interessant dels "cartelli", alguns dels problemes que es van proposar, i la forma concreta en què es van resoldre.

Els 31 problemes plantejats per Tartaglia es distribueixen, segons matèries, de la següent forma:

- 17 Problemes de geometria plana
- 3 qüestions de geografia matemàtica
- 1 pregunta de geometria sòlida
- 10 problemes d'aritmètica i àlgebra.

La majoria dels 17 problemes de geometria plana es refereixen a construccions geomètriques que utilitzen una sola obertura de compàs, és a dir amb radi fix. Els precedents d'aquests estudis es remunten a Abul Wāfa (940-998), A. Durero (1471-1528), Leonardo da Vinci (1452-1529) i Scipione del Ferro (1465-1526).

Entre els problemes d'aritmètica i àlgebra trobem els següents:

Probl. 22-25. Proposa el càlcul d'arrels d'índex cinc, sis, set i onze.

22. Calcular l'arrel d'índex cinc del nombre 9999999999, amb una regla general que permeti aproximar el resultat cada cop més, segons es vulgui, i tal que amb la mateixa regla es pugui calcular la mateixa arrel de $5/8$ i finalment de $242\frac{1}{2}$.

25. El mateix que els anteriors, amb regla general de la Radice terza relata propinqua de 9999999999, i finalment de $8/7$ i de $177148\frac{1}{2}$. (Es refereix al càlcul de l'arrel onzena aproximada).

26. Esbrinar si la quantitat "7 piu RR 63.000 piu RR 10.240 piu R 360" té arrel d'arrel o no, demanant que en cas afirmatiu sigui calculada mitjançant regla general, i aplicable a tot quatrínomi.

equilatre, & il lato di cadauna di dette base e. 4. adomando l'area corpora
 di questo corpo.

22. Ve adimando anchora che cō tegola gñale me ritrouati, ouer cauati la
 radice relata propinqua de. 999999999. cioè con la regola generale de
 formar vn rotto del residuo che auanzara di sopra a tal estrattione, laqual
 regola sia la sua propria, & generale laqual serui non solamente nelle estrat
 tioni delle dette radice propinque nelli numeri sani, ma anchora nelli rotti,
 & nelli sani & rotti essempi gratia con la medesima regola cauati me anchora
 la Radice relata propinqua de $\frac{1}{8}$ & similmente de $24\frac{1}{2}$.

23. Anchora ve adimando che cō la sua propria regola generale come det
 to di sop̃ me cauati la radice cuba quadra propinqua de 999999999, &
 similmente de $\frac{7}{8}$ & anchora de $728\frac{2}{3}$.

24. Anchora adimando che me sia cauata con regola generale (come detto
 di sopra) la Radice propinqua, seconda relata de 999999999, & simil
 mente de $\frac{5}{7}$ & similmente de $2186\frac{1}{4}$.

25. Anchora ve adimando che me cauati con regola generale la Radice
 terza relata propinqua de 99999999999, & similmente de $\frac{2}{3}$ & simil
 mente de $177148\frac{1}{2}$.

26. Anchora ve adimando se questa quantita (cioe. 7. piu $\frac{1}{2}$, 63000. piu
 $\frac{1}{2}$, 10240 piu $\frac{1}{2}$, 360) ha radice de radice, ouer non, & hauendola ve
 adimando che me la cauati con regola generale, che ne serui in tutti li qua
 drinomi, ouer cinque nomi che hanno $\frac{1}{2}$.

27. Anchora ve adimando se questa quantita (cioe. 7. piu Radice relata
 4031250. piu $\frac{1}{2}$ relata 20000000. piu $\frac{1}{2}$ relata 258000 piu $\frac{1}{2}$ relata 5000
 00000) ha $\frac{1}{2}$ relata, ouer no, & hauendola ve adimando che me la cauati
 con regola generale, qual ne serua in tutti li cinque nomi, ouer, 6. nomi ch
 hanno $\frac{1}{2}$ relata.

28. Anchora ve adimando che me sia partito, 10. p $\frac{1}{2}$ relata, 5. piu. $\frac{1}{2}$. qua
 dra, 3. cioè trouando el suo recifo come sapeti.

29. Anchora partitime 10. per $\frac{1}{2}$ relata, 5. piu $\frac{1}{2}$ cuba, 3. cioè trouando pur
 prima el suo recifo.

30. Anchor partitime, 10. per. $\frac{1}{2}$ relata, 5. piu $\frac{1}{2}$, 3. come detto cioè trou
 uando el suo recifo.

31. Io mi trouo, 27. cucu. piu. 36 primi relati piu. 54. secōdi relati piu. 8.
 cubi equal a 1000 ve domando se questo capitolo (& altri simili) e solubile
 le p regola gñale, ouer no, & essendo solubile ve adomando ch valse la cosa.

Dapoi scritta vi faccio intendere che se per sorte voi non sapesti risolve
 re li sopraferitti mei casi cōi nel detto termine de. 15. giorni dapoi la pres
 entatione de quelli vi concedo (per manco vostra infamia) che soluendo
 li anchor dapoi el detto termine vn mese, & anchor dui o tutti, ouer parte,
 che possiati publicar le dette vostre solutioni, intendendo pero senza alcun
 mio interresso di precio ne di honore.

F I N I S.

Fig. 19. Reproducció dels 10 últims problemes dels 31 que Tartaglia va proposar a Ferrari al segon
 contra-cartello. Es fàcil d'observar als enunciats precedents l'exigència de trobar regles generals per a
 resoldre, tant els problemes aritmètics plantejats, com els algebraics. La majoria d'aquests problemes
 no eren exercicis d'una teoria feta, sinó que corresponien a una etapa d'elaboració d'aquesta teoria, on
 intervenien, cada cop més, identitats algebraiques d'enunciat general (p. 58 de l'edició facsimil, Bres
 cia, 1974).

La tradició d'aquest tipus de problema, però menys general, està en els àrabs, que utilitzaven l'expressió: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + \sqrt{4ab}}$.

Tartaglia planteja la resolució de la qüestió 26 a partir de la identitat algebraica:

$$(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^4 = a + b + \sqrt[4]{256 a^3 b} + \sqrt[4]{256 a b^3} + \sqrt{36 ab}$$

d'on l'arrel quarta que es demana resulta ser: $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$.

Als problemes 28-30 planteja racionalitzar les fraccions:

$$\frac{10}{\sqrt[5]{3} + \sqrt{3}}; \quad \frac{10}{\sqrt[5]{5} + \sqrt[3]{3}} \quad \frac{10}{\sqrt[5]{5} + \sqrt[4]{3}}$$

tècnica que es basa en l'aplicació de la identitat algebraica:

$$a^5 + b^5 = (a + b) (a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$\frac{1}{a + b} = \frac{a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4}{a^5 + b^5}$$

de manera que desapareix l'arrel cinquena del denominador, i ja sols queda una arrel quadrada fàcil de racionalitzar.

El problema 31 és el més específicament algebraic, i diu:

31. "Tenim 27 cucu piu 36 primi relati piu 54 secondi relati piu 8 cubi equali a 1.000; es demana si això és resoluble per regla general o no, i en cas d'ésser resoluble es demana quant val la'cosa'" (p. 58; la cursiva és nostra, per a conservar l'expressió original de l'equació).

El problema correspon a una equació de grau novè:

$27x^9 + 36x^5 + 54x^7 + 8x^3 = 1.000$ que és reduïble a una cúbica mitjançant l'extracció d'una arrel cúbica: $3x^3 + 2x = 10$.

Ferrari, al cinquè cartello, contesta la majoria d'aquests problemes utilitzant, és clar, el coneixement d'identitats algebraiques i les regles de la resolució d'equacions cúbiques.

La resposta al problema 31 ve referida al 5^è cartello en aquests termes:

Ferrari: "Jo dic que aquest capítol i d'altres similars, que com aquest tenen arrel cúbica, són resolubles de forma general, i en faig la prova dient: si 27 cucu piu 36 primi relati piu 54 secondi relati piu 8 cubi són iguals a 1000, llavors l'arrel cúbica d'aquesta composició, la qual és 3 cu piu 2 co., serà igual a R cuba de 1.000, que és 10. Llavors 1 cu piu dos terços co seràn iguals a tres i un terç. Seguint el capítol de trobar la cosa, valdrà R V cu R 2 575 (V vol dir universal, i juga el paper d'indicar que l'arrel primera comprèn tota l'expressió) fent això vint-i-nou, menys un i dos cinquens".

Els 31 enuñciats de Ferrari es troben al tercer "cartello", i els tipus de problemes es distribueixen així:

- 7 Problemes d'àlgebra
- 13 de geometria
- 7 d'Astronomia
- 1 d'Arquitectura
- 3 qüestions de filosofia.

9. Descrivete tre porzioni di circoli inequali, le quali tutte e tre incominciano da un punto, et finiscano sopra una linea retta, et siano sequenti, e questo di modo che li doi spazij da esse et la linea retta contenuti, siano eguali insieme.
10. Varruio, al libro nono capitolo nono, insegna doi horologi anaporic, trovati da Ctesibio per conoscer l'hore usate da Romani senza sole, Addimanda l'isposizione intelligibile et chiara di quelli.
11. Dato che sia un settore, et un circolo maggiore di quello del settore. Tagliatemi fuor di detto circolo una superficie, contenuta da due linee rette et equidistanti et da doi archi del circolo, qual superficie sia eguale al settore.
12. Proposte due linee inequali, Partitemi ciascuna in due tal parti, che le minor parti siano eguali, e la maggior parte della minor sia media proportional fra le parti della maggiore.
13. Addimando la dimostrazione geometrica che nelli astrolabi il zodiaco faccia l'effetto che nella sphaera.
14. Proposto che sia un triangolo et un punto di fuori, tiratemi da quel punto una linea che taglia un terzo del triangolo verso la punta.
15. Trouatemi doi numeri, che giunti insieme facciano quanto il cubo del minore con la multiplicatione del triplo suo nel quadrato del maggiore: et il cubo del maggiore con il triplo suo nel quadrato del minore faccia . 64. piu del aggregato di detti doi numeri.
16. Addimando che con il minor numero di sphaere che sia possibile, le quali facciano ciascuna il suo moto perfetto sopra i soi poli, mi saluate il moto dell'extrema sphaera secondo Alfonso, non partendosi da i principi dell'Astrologhi.
17. Fatemi di otto due tal parti, che'l prodotto dell'una nel altra multiplicato nella lor differenza, faccia piu che possibil sia, dimostrando il tutto.
18. Dimostratemi la sesta del primo d'Euclide ostensivamente.
19. Vi propongo un triangolo che ha doi lati quali giunti fanno . 20, la base è un piu del catheto, et una delle parti è . 5. ui addimando quanto è la base.
20. Addimando la dimostrazione geometrica perche nelli astrolabi li almicanzari cosi signati, fanno l'effetto che fanno nella sphaera.
21. Trouatemi sei quantita continue proportionali dall'unita, et tali, che'l doppio della seconda con il triplo della terza sia eguale alla radice della sesta.
22. Quanto appartiene alla mathematica, Addimando l'isposizione di quel luogo del Timeo di Platone, quale al latino incomincia . Fuit autem talis illa partitio. fin a quelle parole . Postquam igitur secundum creatori. et c.
23. Egli è un cubo, che li soi lati et superficie giunti insieme, sono eguali alla quantita proportionale fra il detto cubo et una delle sue superficie, s'addimanda la quantita d'esso cubo.

Fig. 20. Reproducció parcial de la llista de 31 problemes que Ferrari proposà a Tartaglia al tercer Cartello. Un cop d'ul als enunciats permet veure la diversitat de problemes que es plantegen. Alguns d'ells, aparentment geomètrics, com el N° 19, acaben resolent-se per mètodes algebràics. D'altres, com el N° 15, fan intervenir identitats algebràiques, com la que resulta de desenvolupar el cub de la diferència de dos nombres, cosa que permet reduir el problema a resoldre una equació cúbica. En llenguatge modern seria:

$$x + y = x^3 + 3xy^2, 64 + x + y = y^3 + 3yx^2; 64 = (y - x)^3, y - x = 4; y = x + 4$$

$2x + 4 = x^3 + 3x(x + 4)^2$. La solució de la cúbica dona un dels nombres. (p. 67 de l'edició facsimil, Brescia, 1974).

Hi ha 3 problemes d'àlgebra que condueixen a equacions de tercer grau, i que Tartaglia contesta correctament. Altres 3 d'àlgebra es redueixen a resoldre equacions de quart grau, i Tartaglia els reserva per a discutir-los al duel verbal.

Com a exemple d'aquests problemes exposarem:

Problema 26. "Trobeu-me sis quantitats contínues proporcionals, tals que la primera i sisena juntes facin 6, i la segona i tercera juntes facin 2" (p. 68).

Problema 17. "Feu-me de 8 dues parts, tals que el producte d'una per l'altra, multiplicat per la seva diferència, faci el màxim possible, demostrant-ho tot". (p. 67).

Tartaglia contesta aquest problema, al tercer "cartello", així:

"Us contesto [*al vostre Quesito 17*] que la major part farà 4 piu $R\ 5\frac{1}{3}$ i la part més petita 4 menys $R\ 5\frac{1}{3}$, el producte és $10\frac{2}{3}$, que per la diferència, que és $R\ 21\frac{1}{3}$, fa $R\ 2.423\frac{7}{27}$, i afegeix Tartaglia que aquest és un dels resultats que ell ja coneixia, i amb els quals els altres pensaven sorprendre'l. (p. 91).

Algunes característiques de la matemàtica de l'època

Al marge de la històrica disputa entre Tartaglia i Ferrari, i de l'agitació que acompanyà el descobriment de la resolució de les equacions de tercer grau, creiem que és important comentar certs aspectes d'aquest període de la matemàtica renaixentista italiana.

Una primera característica a destacar en aquest període correspon al procés de maduració dels mètodes algebraics, concebuts cada cop més com eines per a la resolució general de problemes. La traducció dels problemes de planteig al llenguatge algebraic, on s'aplicaran regles automàtiques de resolució, s'aferma en detriment de les regles particulars de resolució, corresponents als mètodes àrabs d'una falsa posició i dues falses posicions. Malgrat que no se superés l'estadi de l'àlgebra sincopada, i no aparegués un simbolisme més eficaç, és clar que en aquest període germinen i es desenvolupen un ventall molt ampli de relacions i identitats algebraiques, que s'utilitzen en un marc variat de problemes. En efecte, el desenvolupament del càlcul formal i de l'àlgebra porta directament al descobriment d'identitats com $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$. Tant l'expressió d'aquestes identitats, com la justificació que es fa d'elles, vénen referides en llenguatge retòric, i sempre aplicades a nombres concrets, i en cap moment no apareix una simbologia identificable a una fórmula matemàtica moderna. Aquestes identitats són directament utilitzades per a resoldre problemes diversos, com el de racionalitzar fraccions del tipus: $\frac{10}{\sqrt[5]{5} + \sqrt{3}}$.

Identitats que no són justificades a partir de construccions geomètriques, sinó a partir de les lleis del càlcul formal, com es posa de relleu en l'explicació que fa Ferrari de per què es verifica sempre la igualtat: $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$.

Ferrari diu: "Això esdevé així perquè, a causa de la proporcionalitat, tots els altres factors resultants de la multiplicació s'abateixen els uns amb els altres (restant només els dels extrems)".

La segona característica a destacar és l'algebrització dels clàssics problemes de geometria plana. L'aplicació sistemàtica dels mètodes algebraics als problemes de geometria

permet resoldre'n alguns que d'altra forma no podien ésser resolts. Així, per exemple, trobem als *Quesiti* la següent qüestió:

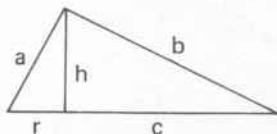
"Ques. XVII. Problema fet pel Mestre Alessandro Venetiano l'any 1523 a Verona, el qual era del parer que no es podia resoldre.

... Sigui un triangle de tres costats desiguals, la base del qual és 10, i la seva perpendicular 8, i els altres dos costats junts fan 20. Es demana quant fa cada un dels dos costats per separat."

La solució que proposa Tartaglia consisteix a aprofitar dues proposicions extretes dels llibres d'Euclides, proposicions que permeten establir les següents igualtats:

$$r = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

$$\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \right)^2 + h^2 = a^2$$



La primera d'elles és equivalent a la més moderna del Teorema dels cosinus, i la segona correspon al Teorema de Pitàgores. Plantejades les dues igualtats, i dient al costat més petit x , l'altre costat serà $20-x$, i al problema es redueix a resoldre les equacions:

$$r = \frac{x^2 - (20-x)^2 + 10^2}{2 \cdot 10} = 2x - 15$$

$$(2x - 15)^2 + 8^2 = x^2$$

D'on apareixen les solucions corresponents al costat més petit i al més gran.

Entre la llista de problemes que es plantegen als desafiaments, n'hi ha molts de geometria que corresponen a resoldre equacions de segon i tercer grau.

La tercera característica matemàtica d'aquest període és la perspectiva d'utilitzar l'àlgebra, no per resoldre problemes específics, sinó universals. Hi ha plena consciència que és possible un tractament general de certs problemes, un tractament que superi l'enginy original per a cada problema particular. És per això que quan es proposen problemes els uns als altres, no sols es demanen de resoldre'ls, sinó a més de trobar la *regla general* per a poder resoldre qualsevol problema d'aquell mateix tipus. En definitiva, els mètodes generals esdevenen ells mateixos un problema d'importància excepcional a resoldre.

En conseqüència, hi ha un esforç de tots els matemàtics per a intentar sintetitzar de forma ordenada els distints coneixements de caràcter algebraic, amb mires a establir un marc de teoria general que englobi les diferents regles algebraiques descobertes. Aquest esforç el culminarà Cardano a la seva obra *Ars Magna*, publicada l'any 1545. Paral·lelament, Tartaglia té al cap també l'elaboració d'una gran obra enciclopèdica que, continuant l'estil de Luca Paccioli, inclogui els darrers descobriments algebraics. El títol d'aquesta obra seria *General trattato di numeri e misura*, de la qual, en vida de Tartaglia, només es van poder publicar els dos primers volums (Veneza, 1556), que són els que tracten de la pràctica de totes les operacions, sense descuidar les pràctiques mercantils, progressions, arrels, proporcions i quantitats irracionals. Els altres quatre volums foren publicats, de manera pòstuma, l'any 1560, i tracten, el III i IV, de geometria, el V de la resolució de problemes amb una sola obertura de compàs, i el VI d'àlgebra, redactat per un altre matemàtic de l'època a partir dels apunts deixats per Tartaglia. Cal dir que el volum d'àlgebra, llastimosament, no exposa la teoria i resolució de les equacions de tercer grau.

El *General Trattato* fou traduït al francès per Guillaume Gosselin, París, 1578.

Si algun lector vol aprofundir sobre el contingut i caràcter de l'obra de Tartaglia, pot acudir directament al treball de Ettore Bortolotti, *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari, e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche*. Imola, 1926. Resums del qual han estat publicats als Vol. 5, 6, 8 del *Periodico di Matematica* (1925, 1926, 1928).

CAPÍTOL 7:

L'ARS MAGNA DE GEROLAMO CARDANO

Algunes dades sobre l'obra i l'autor

Gerolamo Cardano (Pavia, 1501-Roma, 1576) fou en vida un metge prestigiós; la seva reputació era tan gran que fins i tot fou cridat a Escòcia per a atendre una personalitat. Tanmateix, la figura de Cardano és difícilment assimilable dins dels esquemes avui convencionals. Era un home d'interessos múltiples, que va escriure sobre una infinitat de temes i que va viure agitada. Si bé al final de la seva vida, a Roma, era un membre destacat del Col·legi de metges, i cobrava una pensió del Papa, altres períodes de la seva biografia —com quan va estar empresonat per deutes— són menys edificants. Existeix una versió anglesa de l'autobiografia de Cardano, *The Book of My Life* (New York, 1930), i l'estudi biogràfic més recent del personatge segons les referències de Witmer (p. xvii), seria d'O. Ore: *Cardano, the Gambling Scholar* (Princeton, 1953).

S'han perdut alguns dels treballs que Cardano deixà manuscrits, i en particular alguns sobre matemàtiques. Allò que ha estat conservat i editat, l'*Opera omnia* (Lyon, 1663), ocupa 10 volums, on s'hi pot trobar des d'una crítica a la física aristotèlica escolàstica fins a disquisicions teològico-filosòfiques (herètiques, no caldria sinó), passant per una autobiografia, obres de matemàtiques, medicina, astrologia,... Pel que fa específicament a les matemàtiques, sens dubte el llibre més important dels que va escriure Cardano és la *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis*. (L'Art Magna, o les regles de l'àlgebra). També és l'autor de la *Practica Arithmeticae* (1539), de l'*Ars Magna Arithmeticae* (possiblement escrita després de l'*Ars Magna* i abans del 1554), d'un petit llibre sobre jocs d'atzar (del qual existeix versió anglesa: *The Book of Games of Chance*, New York, 1961), del *De Regula Aliza* (1570), i d'un parell més d'obres menors sobre proporcions i propietats dels nombres.

La primera edició de l'*Ars Magna*, el 1545, es féu a Nuremberg. Una segona aparegué a Basilea el 1570. La tercera i última és la que apareix al volum IV de l'*Opera Omnia*. El text que nosaltres hem manejat, al qual cal referir totes les cites que farem, és la versió anglesa editada i traduïda per T.R. Witmer, que segueix l'edició de 1545, tot assenyalant les modificacions, mínimes, contingudes a la segona i tercera edicions.

Dels 40 capítols que constitueixen l'*Ars Magna*, els més ben coneguts són els corresponents a la resolució de les cúbiques, del XI al XXIII, i a la de les biquadrades, el XXXIX. Cal deixar dit que, contràriament al que han escrit alguns historiadors (per exemple, Bell, p. 126, i Turnbull, p. 47) Cardano no va fer passar per seves les contribucions de Tartaglia i de Ferrari. Encara que Cardano sempre puntualitza que Tartaglia mai no li va comunicar la demostració del seu resultat, en dos llocs diferents aclareix que aquest autor li va donar la regla per a resoldre les cúbiques quan ell la hi va demanar (pp. 8 i 9 i p. 96). A la p. 237, quan Cardano explica que existeix una regla general per a resoldre equacions de 4rt grau, precisa que el seu autor, Lodovico Ferrari, la hi va transmetre; també aquí subratlla, però, que una demostració geomètrica, que constitueix la part més delicada i teòrica del mètode, fou elaborada per ell mateix.

El contingut de l'*Ars Magna*

Els quatre primers capítols tenen un caràcter general i introductori. El primer és un capítol realment sorprenent, que contrasta amb el restant contingut de l'obra. Hi són citats, sense demostració, resultats teòrics de gran interès sobre els lligams entre arrels i coeficients. L'anàlisi detallada d'aquesta qüestió serà feta a l'apartat següent. En aquests primers capítols, Cardano fa una mena de repàs de totes les regles que explicarà, entenent per regla (fórmula diríem avui) cadascun dels conjunts d'operacions que cal emprar per resoldre els 22 casos diferents d'equacions quadràtiques i cúbiques que cita i els dos *casos derivats* que associa a cadascun dels anteriors; aquests no són sinó els que resulten de considerar equacions que, dit amb el nostre llenguatge, es poden reduir a equacions de 2on i 3er grau fent els canvis $x = y^2$ o $x = y^3$.

En aquesta primera part introductòria també s'explica com es poden utilitzar les equacions per resoldre problemes, i com cal plantejar-les a partir dels enunciat. S'insisteix en el fet que les equacions han de simplificar-se sempre tant com es pugui; en particular, si una potència de la incògnita és present a tots els termes, cal suprimir-la de tots ells. Cardano acaba assenyalant que les equacions sempre han d'escriure's amb tots els coeficients positius, canviant els negatius de costat si n'hi ha, i dividint tots els coeficients pel de la potència més gran de la incògnita.

El capítol V és dedicat a les equacions de segon grau. Inclou una demostració geomètrica per a cada una de les regles corresponents als casos $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$ i $x^2 = ax + b$. Després de les demostracions apareixen nombrosos exemples d'aplicació.

Els capítols VI i VII preparen el tractament de les equacions cúbiques. Al VI, Cardano comenta que una declaració de Tartaglia sobre la demostració geomètrica que hom podia donar a la regla per a resoldre les equacions de 3er grau li va fer pensar que aquest era el camí que calia seguir (p. 52). Per poder seguir aquest camí demostra, sempre geomètricament, les identitats algebraïques corresponents als desenvolupaments de $(a + b)^3$ i $(a - b)^3$, aquesta última tractada en dos casos separats segons que $a - b$ sigui una quantitat positiva o negativa. Al capítol VII, titulat *Sobre la transformació d'equacions*, s'hi troba una demostració llarguíssima i absolutament geomètrica del canvi $x = A/y$, que permet transformar, conservant la N constant, $x^3 + ax^2 = N$ en $y^3 = by + N$, $x^3 = ax^2 + N$ en $y^3 + by = N$, i així 12 casos de transformació, fins a la de $x^5 + N = ax^3$ en $y^5 + N = by^2$. No cal dir que Cardano escriu els dotze casos i no dóna cap formulació general del resultat. El càlcul del nou coeficient de l'equació, un cop transformada, així com el càlcul de l'arrel de la primera equació a partir d'una arrel de la transformada ($x_1 = A/y_1$), estan

- 1 Numerus æqualis quadrato & rebus.
- 2 Numerus & res æqualis quadrato.
- 3 Numerus & quadratum æqualis rebus.

- 4 Numerus æqualis cubo & rebus.
- 5 Numerus & res æqualis cubo.
- 6 Numerus & cubus æqualis rebus.
- 7 Numerus æqualis quadrato & cubo.
- 8 Numerus & quadratum æqualis cubo.
- 9 Numerus & cubus æqualis quadrato.

Cap. II. De Numero omn. capit. 227

- 4 Numerus æqualis cubo & rebus.
- 5 Numerus & res æqualis cubo.
- 6 Numerus & cubus æqualis rebus æquatio prima.
- 7 Numerus & cubus æqualis rebus æquatio secunda.
- 8 Numerus æqualis quadrato & cubo.
- 9 Numerus & quadratum æqualis cubo.
- 10 Numerus & cubus æqualis quadrato æquatio prima.
- 11 Numerus & cubus æqualis quadrato æquatio secunda.
- 12 Numerus æqualis rebus quadrato & cubo.
- 13 Numerus & res æqualis quadrato & cubo.
- 14 Numerus & res & quadratum æqualis cubo.
- 15 Numerus & quad. æqualis rebus & cub. æquatio prima.
- 16 Numerus & quad. æqualis rebus & cubo æquatio secunda.
- 17 Numerus & cubus æqualis rebus & quad. æquatio prima.
- 18 Numerus & cubus æqualis rebus & quad. æquatio secunda.
- 19 Numerus & res & cubus æqualis quad. æquatio prima.
- 20 Numerus & res & cubus æqualis quad. æquatio secunda.
- 21 Numerus quad. & cubus æqualis rebus æquatio prima.
- 22 Numerus & quadrat. & cubus æqualis rebus æquatio secunda.
- 23 Numerus æqualis quad. & cubus quad.
- 24 Numerus & cubus quad. æqualis quad. æquatio prima.
- 25 Num. & cub. cubi æqualis cubo æquatio prima.
- 26 Num. & cub. cubi æqualis cubo æquatio secunda.
- 27 Numerus æqualis quad. quad. & cub. quadrati.
- 28 Numerus æqualis cubo quadrati & cubo cubi.
- 29 Num. & quadratum quad. æqualis cubo quadrati.
- 30 Num. & cubus quadrati æqualis cubo cubi.
- 31 Num. & cub. quad. æqualis quad. qd. æquat. prim.
- 32 Num. & cub. cubi æqual. cu. quad. æquat. secun.
- 33 Num. æqualis quad. & quadrat. quad. & cub. quad.
- 34 Numerus æqualis cubo & cub. quad. & cub. cubi.
- 35 Num. & quad. æqualis cubo quad. quad. & cub. quad.
- 36 Num. & cubus æqualis cubo quadrati & cub. cubi.
- 37 Num. & quad. & quad. quad. æqualis cubo quadr.
- 38 Num. & cubus & cubus quad. æqualis cubo cubi.
- 39 Nu. & quad. quad. æqual. qd. & cu. quad. æquat. p.
- 40 Num. & cu. quad. æqual. cub. & cub. æquat. pri.
- 41 Num. & quad. quad. æqu. qd. & cu. qd. æquat. sec.
- 42 Num. & cub. quad. æqual. cubi. & cu. cu. æqu. sec.
- 43 Num. & cub. quad. æqual. quad. qd. æquat. prim.
- 44 Num. & cub. cu. æqual. cu. & cub. quad. æqu. pri.
- 45 Nu. & cu. quad. æqu. quad. & quad. qd. æquat. sec.
- 46 Nu. & cu. cu. æqual. cu. & cu. quad. æquatio sec.
- 47 Nu. & quad. & cu. quad. æqual. quad. qd. æqu. pri.
- 48 Nu. & cub. & cub. cu. æqual. cu. quad. æquat. pri.
- 49 Nu. & quad. & cu. quad. æqual. qd. qd. æquat. sec.
- 50 Nu. & cu. & cu. cu. æqual. cu. quad. æquatio sec.
- 51 Nu. & quad. qd. & cub. qd. æqual. qd. æquat. pri.
- 52 Nu. & cu. quad. & cu. cu. æqual. cu. æquatio pri.
- 53 Nu. & quad. qd. & cu. quad. æqual. qd. æquat. sec.
- 54 Nu. & cu. quad. & cu. cu. æqual. cu. æquatio sec.

Fig. 21. Els 22 tipus d'equacions, segons la classificació de Cardano (pp. 226-227 del vol. IV de l'Opera Omnia. Exempler de la Biblioteca Universitària de Barcelona).

donats en forma de recepta, i les demostracions que les acompanyen no tenen res a veure amb el càlcul formal que avui fariem.

Els capítols IX i X estan dedicats als sistemes de dues equacions amb dues incògnites. La primera incògnita és anomenada *positio* o *res*, i la segona *quantitas*. El capítol IX, *Sobre una segona quantitat desconeguda, no multiplicada*, és dedicat als sistemes lineals. Cardano no fa cap estudi teòric, i es limita a resoldre problemes concrets que sempre condueixen a sistemes 2x2 compatibles i determinats. Tanmateix, sí que queda explicat de forma prou general, a través dels exemples, el mètode de reducció per a resoldre qualsevol d'aquests sistemes. El capítol X, *Sobre una segona quantitat desconeguda, multiplicada*, s'ocupa de sistemes 2x2 no lineals. El constitueixen una tirallonga de *Demostracions*, de les que extreu *Regles* com: si $x^2 = ax + by$, i si x es coneix, llavors $y = \frac{x(x-a)}{b}$, regla que ell enuncia així: "Sigui x el que vulgueu. Multipliqueu-lo per ell

mateix menys el coeficient de x i dividiu el producte pel coeficient de y . El quocient és el valor de y ." (p. 76). Evidentment, Cardano distingeix entre $x^2 = ax + by$ i $ax = x^2 + by$, la qual cosa fa que hagi de donar 25 regles diferents. Algunes són complicades, com: si

$$x^2 = axy + by, \text{ i si es coneix } xy, \text{ aleshores } x = \sqrt[3]{\frac{bxy}{2} + \sqrt{\left(\frac{bxy}{2}\right)^2 - \left(\frac{axy}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{bxy}{2} - \sqrt{\left(\frac{bxy}{2}\right)^2 - \left(\frac{axy}{3}\right)^3}} \quad (\text{p. 87}),$$

però la majoria són resultats com el primer esmentat, dels que avui anomenaríem trivials o evidents. Totes les demostracions que dona l'autor són exclusivament geomètriques, i les regles que sintetitzen el *modus operandi* en cada cas són exclusivament retòriques, com la que hem citat al començament. Subratllem, tot passant, el paper que havien de jugar expressions i regles com aquestes a l'hora de motivar una agilització de les notacions. El capítol acaba resolent, com exemple d'utilització d'aquestes regles, quatre problemes del tipus: "Trobar dos nombres tals que la suma de llurs quadrats sigui 100 i el producte d'un per l'altre sigui igual al doble de llur suma" (p. 92).

Amb el capítol XI, *Sobre el cub i la cosa igual al nombre*, comencen els 13 capítols dedicats a la equació de 3er grau, un per cadascun dels casos (en aquest ordre):

- | | | | |
|-------------------|---------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1. $x^3 + ax = N$ | 4. $x^3 = ax^2 + N$ | 7. $x^3 + ax^2 + bx = N$ | 10. $x^3 = ax^2 + bx + N$ |
| 2. $x^3 = ax + N$ | 5. $x^3 + ax^2 = N$ | 8. $x^3 + bx = ax^2 + N$ | 11. $x^3 + N = ax^2 + bx$ |
| 3. $x^3 + N = ax$ | 6. $x^3 + N = ax^2$ | 9. $x^3 + ax^2 = bx + N$ | 12. $x^3 + bx + N = ax^2$ |
| | | | 13. $x^3 + ax^2 + N = bx$ |

D'entrada, Cardano explica que Scipione del Ferro de Bolonya, trenta anys enrera, havia descobert la regla corresponent a aquest capítol i l'havia transmesa a Antonio Maria Fiore de Venezia, i que la disputa entre Tartaglia i Fiore va fer que el primer la descobrís pel seu cantó. Disposant de l'ajuda que representava conèixer la regla, afegeix Cardano, vaig trobar la demostració, la qual cosa fou molt difícil (p. 98).

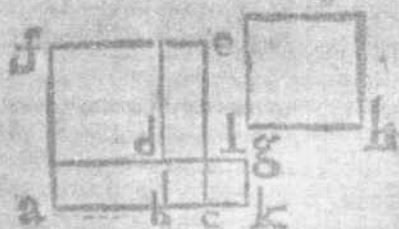
CAPVT XI.

De Cubo & rebus aequalibus Numero.

SCIPPIO Petrus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc invenit, tradidit verò Antonio Maria Florido Veneto, qui cum in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando venisset, occasionem dedit, ut Nicolaus invenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quaesivimus, eamque in modis, quod difficillimum fuit, redactam sic subicimus:

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli causa cubus gh , & sexuplum lateris g h aequale 20. & ponam duos cubos a e & e l , quorum differentia sit 20. ita quod productum a e lateris, in



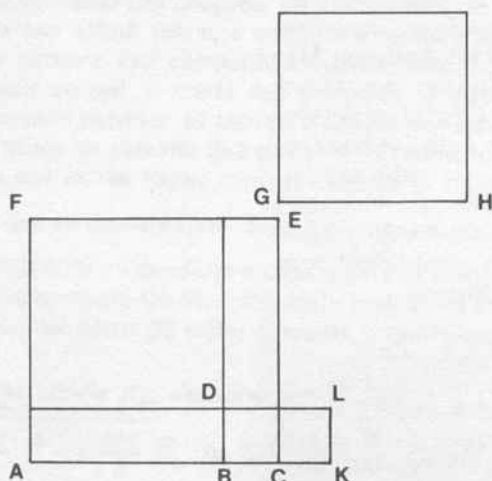
ek latus, sit 1. tertia scilicet numeri rerum pars, & abscindam eb , aequalem ex , dico, quod si ita fuerit, lineam ab residuum, esse aequalem gh , & ideo rei estimationem, nam de gh iam supponebatur, quod ita esset, perficiam igitur per modum primi suppositi

Fig. 22 Començament de la demostració sobre les equacions cúbiques transcrita al text. (Opera, vol. IV, p. 249).

Serà interessant reproduir al menys una de les demostracions, per tal de veure'n l'estil. Aquesta és la del capítol XI (pp. 96 a 99):

"Per exemple, sigui GH^3 més sis vegades el seu costat GH igual a 20 [$GH^3 + 6GH = 20$], i siguin AE i CL dos cubs, la diferència entre els quals és 20 i tals que el producte del costat AC i del costat CK és 2 [AE i CL representen dues quantitats u^3 i v^3 tals que $u^3 - v^3 = 20$ i

$uv = 2$; dues quantitats així sempre es poden trobar, amb els coneixements fins ara explicats, perquè les dues condicions sobre u i v condueixen a una equació de la forma $\alpha u^6 + \beta u^3 + \gamma = 0$, però Cardano no es preocupa d'explicitar aquestes minúcies], a saber, un terç del nombre de coses. Senyalant BC igual a CK dic que, fet això, la línia restant AB és igual a GH, i és per tant el valor de la cosa, (...).



Completo els cossos DA, DC, DE i DF, i així com DC representa BC^3 , així DF representa AB^3 , DA representa 3 vegades BC per AB^2 i DE representa tres vegades AB per BC^2 [Cardano està utilitzant la descomposició de $AC^3 = (AB + BC)^3 = \dots$ que ha explicat en un capítol precedent]. Per tant, tota vegada que AC per CK val 2, AC per tres vegades CK valdrà 6, el nombre de coses; per tant AB per 3 vegades AC per CK fa 6 vegades AB, (...). Ara, la diferència entre AC^3 i CK^3 (...) és 20, i a partir de la primera proposició del capítol sisè és la suma dels cossos DA, DE i DF. Per tant aquests tres cossos valen 20. Ara suposem que BC és negatiu,

$$AB^3 = AC^3 + 3AC \cdot CB^2 + (-BC)^3 + 3(-BC \cdot AC^2)$$

segons aquella demostració. La diferència entre $3BC \cdot AC^2$ i $3AC \cdot BC^2$, però, és [tres vegades] el producte de AB, BC i AC. Per tant, com ha estat demostrat, val 6AB; suma 6AB al producte de $3AC \cdot BC^2$, fent $3BC \cdot AC^2$. Però tota vegada que BC és negatiu, ara és clar que $3BC \cdot AC^2$ és negatiu i el restant, que és igual a ell, és positiu. Per tant $3CB \cdot AC^2 + 3AC \cdot BC^2 + 6AB = 0$ [val no res, *faciunt nihil*, diu Cardano]. Es veurà, per tant, que la suma de

$$AC^3 + 3AC \cdot CB^2 + 3(-CB \cdot AC^2) + (-BC^3) + 6AB$$

val tant com valgui la diferència entre AC^3 i BC^3 . Aquella [la suma] és 20, (...). Per tant, tota vegada que

$$AB^3 + 6AB = AC^3 + 3AC \cdot BC^2 + 3(-BC \cdot AC^2) + (-BC^3) + 6AB,$$

la qual cosa val 20, com ha estat provat, ells $[AB^3 + 6AB]$ valdran 20. Per tant, tota vegada que

$$AB^3 + 6AB = 20$$

i que

$$GH^3 + 6GH = 20$$

es veurà de seguida, i a partir del que es diu a I, 35 i XI, 31 dels *Elements* [d'Euclides], que GH serà AB. (...) [La proposició 35 del llibre I diu "Paralelograms que estan sobre la mateixa base i dins de les mateixes paral·leles són iguals"; i la 31 del XI diu: "Sòlids paral·lelepípedes que són de bases iguals i de la mateixa alçada són iguals"].

REGLA

Eleveu al cub un terç del nombre de coses; sumeu-li el quadrat de la meitat del nombre, i preneu l'arrel quadrada del tot. Fareu això dues vegades, i a un dels dos sumeu la meitat del nombre que ja havíeu elevat al quadrat, i de l'altre resteu la meitat del mateix. Tindreu llavors un *binomi* i el seu *epítome*. Aleshores, restant l'arrel cúbica de l'*apotome* de l'arrel cúbica del *binomi*, la resta que queda és el valor de la cosa." [és a dir, si $x^3 + ax = N$, la cosa

$$\text{valdrà } \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} + \frac{N}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{N}{2}\right)^2} - \frac{N}{2}}.$$

L'estil no és cap exemple de claredat i concisió, malgrat que per abreujar el paràgraf hem introduït els símbols "+", "-", "=", la notació exponencial i hem indicat el producte per juxtaposició. Cardano tot ho diu retòricament, sense utilitzar cap d'aquests recursos.

El capítol acaba amb uns quants exemples. A propòsit de l'equació $x^3 + 6x = 20$,

troba el valor $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$, i assenyalava que això és 2 "com és perfectament clar si se substitueix" (p. 100). A propòsit de l'equació $x^3 + 3x = 10$, que

dóna $x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$, fa la prova: eleva aquest valor al cub, li suma el seu producte per 3 i comprova que dóna 10. Part d'un càlcul semblant, expressat en el llenguatge retòric emprat per Cardano, és reproduït en la figura 23.

L'estructura dels dos capítols següents és la mateixa: una demostració geomètrica, una *regla*, i exemples. En el cas $x^3 = ax + N$, per al qual obté

$$x = \sqrt[3]{\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}},$$

Cardano obvia una dificultat que coneix perfectament. Al capítol I ha explicat que aquestes equacions, quan $\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$, tenen tres solucions diferents (cal sobreentendre, evidentment, reals). Aquí, davant d'una fórmula que en aquest cas no en dóna cap, es limita a dir: "(si $\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$) aleshores consulteu el llibre *De regula aliza*, annex en aquesta obra" (p. 103). En el cas $x^3 + N = ax$, afegeix una regla adicional per a calcular una segona arrel: si x_1 és una solució, llavors l'altra solució és:

$$x_2 = \sqrt{a - 3\left(\frac{x_1}{2}\right)^2} - \frac{x_1}{2} \text{ (p. 108).}$$

Els tres capítols següents, dedicats a Cub, Quadrat i Nombre, també són semblants entre ells. Cardano demostra, sempre geomètricament i sempre treballant sobre una equació específica, que agafant una nova incògnita de la forma $x \pm \frac{1}{3}a$ (a és el coeficient de x^2), l'equació es transforma en una dels tres tipus anteriors, utilitzant aleshores les regles corresponents.

Regula igitur est, pone numerum quadratorum, numerum rerum, qui cum 2. numeri propoliti æquantur cubo, & inuentari æliminationem in se ducto, à quo abire productione numerum quadratorum seu rerum, residuum est rei æliminatio. Exemplum, Cubus & 6. quadrata æquantur 16. dies igitur, cubus æquatur 6. rebus & 2. 16. æliminatio rei, est ex suo capitulo, 2. v. cubica 20. 10. 5. 2. 2. 5. 2. v. cubica 30. 10. 2. 2. 2. hanc in se ducto producet 20. v. cubica 12. 5. 2. 80. 5. 2. v. cubica 12. 10. 10. 5. 2. abinde 6. numerum rerum, residuum æliminatio quadratorum, 20.

80. m. 1. Idemque ex prima regula
operationis. Probatio est, ut in exemplo,
cubus 80 quater 3. conuenit: 1. elimina-
tio ex his regulis est, q. v. cubica 9⁷ p.
q. 89⁷ p. q. v. cubica 9⁷ m. q. 89⁷ m.
1. nobis igitur est hic constans ex septem
paribus.

Fig. 23. Un càlcul de Cardano amb radicals (p. 255, *Opera*, vol. IV). L'equació "cubus & quadrata 3.aequatur 21." ($x^3 + 3x^2 = 21$) és esmentada a la primera línia per sota de la menció "Exemplum" que figura al marge; a continuació figura el valor de la incògnita

"R. V. cúbica $9 \frac{1}{2} \bar{p}$. R_1 . $89 \frac{1}{4} \bar{p}$. R_1 . v. cúbica $9 \frac{1}{2} \bar{m}$. R_1 . $89 \frac{1}{4} \bar{m}$ l".

$$\left(\sqrt[3]{9\frac{1}{2}} + \sqrt{89\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{9\frac{1}{2}} - \sqrt{89\frac{1}{4}} - 1 \right)$$

A les línies restants, Cardano calcula el cub d'aquest trinomi i tres vegades el seu quadrat. El resultat de sumar aquestes quantitats és 21.

Els set capítols següents, dedicats als 7 casos de la cúbica completa, també tenen una estructura comuna. Es veu que fent $x \pm \frac{1}{3}a$ (sent a el coeficient de x^2), l'equació es transforma, o bé en una dels tipus $x^3 = M$, $x^3 = Mx$, o bé en una dels tres tipus estudiats en primer lloc.

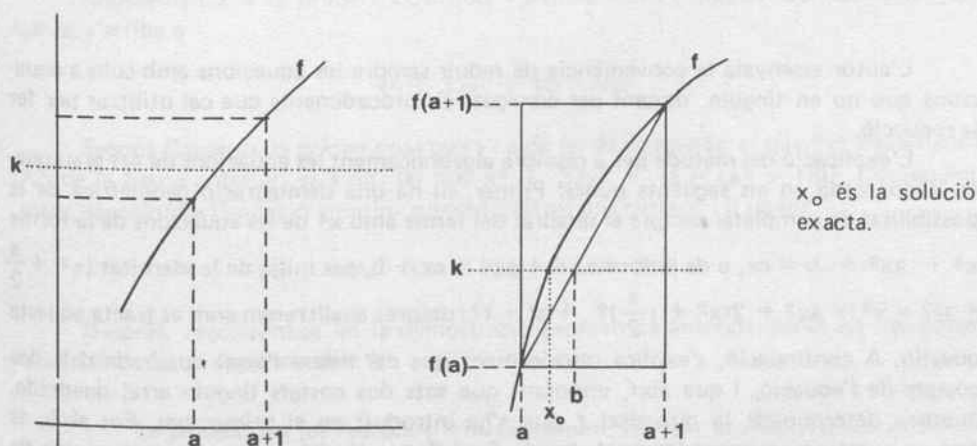
El capítol XXV, *Sobre regles imperfectes i particulars*, conté algunes receptes per a resoldre equacions que només es poden utilitzar si, per tampteig, es troben certes descomposicions dels coeficients o del terme independent. Direm alguna cosa d'aquest capítol més endavant, quan parlem de les relacions entre arrels i coeficients.

Els capítols XXIX a XXXVIII contenen la part més pràctica de l'*Ars Magna*. Són ells que fan païesa la connexió d'aquesta obra, de plantejaments eminentment teòrics, amb els llibres d'àlgebra que l'havien precedit. El capítol XXIX, *Sobre la regla del mètode*, comença dient: "Aquesta regla del mètode és anomenada així perquè ensenya el mètode per a elaborar tantes regles comercials com desitgeu" (p. 180). El mètode al que Cardano es refereix no és sinó el plantejament d'equacions.

El capítol XXX, *Sobre la regla àurea*, conté un mètode de càlcul de solucions aproximades. Referides a una equació polinòmica de la forma $f(x) = k$, les instruccions que dóna Cardano les expressaríem avui de la següent manera. Si hem trobat un enter a tal que $f(a) < k$ i $f(a+1) > k$, aleshores cal calcular $k-f(a)$ i $f(a+1)-f(a)$, i una segona aproximació (la primera sent a) és $a + \frac{k-f(a)}{f(a+1)-f(a)}$, que anomenarem b . Suposant que

$f(b) > k$, una tercera aproximació es trobaria calculant $\frac{k-f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$, i sumant aquesta fracció a a . Etc. Cardano no dóna justificació de la seva regla, que redueix a una successió d'instruccions expressades retòricament, així com tampoc no es preocupa d'unificar les diferents regles que emprava per a calcular aproximacions d'equacions com $x^2 + 20 = 10x$, que no tenen la forma $f(x) = k$.

Les idees que hi ha darrera del mètode de Cardano, expressades esquemàticament en llenguatge modern, són les següents.



La segona aproximació b es calcula substituint la corba f per la secant que uneix els punts d'abscissa a i $a + 1$. Això equival, com fa veure la segona figura, a la condició

$\frac{b-a}{k-f(a)} = \frac{1}{f(a+1)-f(a)}$. La tercera aproximació c es calcularà substituint la corba per la secant que uneix els punts d'abscissa a i b . Això equival a la condició $\frac{c-a}{k-f(a)}$

$= \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. Etc. Potser és interessant recordar aquí les paraules que Cajori va dedicar a aquest mètode: "El primer mètode imprès d'aproximació a les arrels d'equacions és el de Cardano, el qual el donava a l'*Ars Magna*, 1545, sota el títol de *regula aurea*. Es tracta d'una hàbil aplicació de la regla de "falsa posició", i és aplicable a equacions de qualsevol grau. Aquest modus d'aproximació era summament barroer, encara que això difícilment explica per què Clavius, Stevin i Vieta no van fer-ne referència". (Cajori (1980), p. 136).

Els capítols següents, cadascun dedicat a un tipus específic de problemes, fan veure com cal escollir la incògnita per tal d'obtenir l'equació més simple possible, o quins recursos poden utilitzar-se per simplificar les equacions. És patent en tots ells el pragmatisme de l'autor, i la preocupació per a completar la teoria que fins aleshores havia explicat amb els recursos tècnics adients per a la resolució efectiva de equacions concretes i específiques.

El llibre acaba pràcticament amb el tractament de les equacions de 4rt grau, contingut al capítol XXXIX. Cardano comença citant els 20 casos diferents que es poden presentar, i que són, en la nostra notació,

1. $x^4 = bx^2 + ax + N$
2. $x^4 = bx^2 + cx^3 + N$
3. $x^4 = cx^3 + N$
4. $x^4 = ax + N$
5. $x^4 + cx^3 = bx^2 + N$
6. $x^4 + ax = bx^2 + N$
7. $x^4 + cx^3 = N$
8. $x^4 + ax = N$
9. $x^4 + bx^2 = cx^3 + N$
10. $x^4 + bx^2 = ax + N$

11. $x^4 + bx^2 + ax = N$
12. $x^4 + bx^2 + cx^3 = N$
13. $x^4 + bx^2 + N = cx^3$
14. $x^4 + bx^2 + N = ax$
15. $x^4 + N = cx^3 + bx^2$
16. $x^4 + N = cx^3$
17. $x^4 + N = ax + bx^2$
18. $x^4 + N = ax$
19. $x^4 + cx^3 + N = bx^2$
20. $x^4 + ax + N = bx^2$

L'autor assenyala la conveniència de reduir sempre les equacions amb cubs a equacions que no en tinguin, donant per coneguts els procediments que cal utilitzar per fer la reducció.

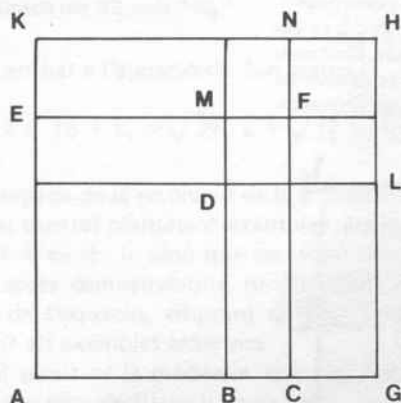
L'explicació del mètode per a resoldre algebraicament les equacions de 4rt grau queda condensada en els següents punts: Primer, hi ha una demostració geomètrica de la possibilitat de completar sempre el quadrat del terme amb x^4 de les equacions de la forma

$x^4 + ax^2 + b = cx$, o de la forma $x^4 + ax^2 = cx + b$, per mitjà de la identitat $(x^2 + \frac{a}{2} + t)^2 = x^4 + ax^2 + 2tx^2 + (\frac{a}{2})^2 + at + t^2$; després analitzarem com es tracta aquesta

qüestió. A continuació, s'explica retòricament que cal treure l'arrel quadrada dels dos costats de l'equació, i que així, imposant que tots dos costats tinguin arrel quadrada, quedarà determinada la quantitat t que s'ha introduït en el primer pas. Fet això, es podran extreure realment les arrels quadrades i l'equació s'haurà transformat en una de

segon grau. Sense donar cap més desenvolupament ni cap fórmula, Cardano comença a resoldre exemples.

La demostració geomètrica a què abans hem fet referència utilitza una figura idèntica a la que reproduïm. Cardano diu que el quadrat AD és x^4 , AB és x^2 i BC és la meitat del nombre de x^2 , o sigui $a/2$. Del dibuix, utilitzant proposicions d'Euclides, dedueix que



si a $x^4 + ax^2 + (\frac{a}{2})^2$ (que equival a la superfície del quadrat AD, més la dels rectangles ED i DC, més la del quadrat DF) se li suma $2tx^2$ (els rectangles CL i KM, anomenant t a la quantitat CG), aleshores, per completar el quadrat, encara s'han de sumar els nombres t^2 (la superfície FH) i $2t\frac{a}{2}$ (els rectangles FL i MN).

Utilitzarem un dels exemples de Cardano, el problema VIII d'aquest capítol (pp. 246 a 248), per fer veure tots els detalls de la resolució d'una equació de 4rt grau:

“Dividiu 6 en tres quantitats proporcionals (i. e. $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$) tals que la suma dels quadrats de la primera i de la segona és 4”.

Anomenant x a la primera quantitat i transformant l'equació, per tal de simplificar-la, s'arriba a

$$x^4 + 32x^2 + 16 = 48x$$

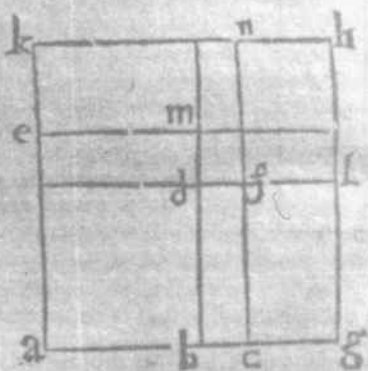
Segons Cardano, la primer cosa que s'ha de fer és completar el quadrat equivalent al AF de la figura anterior, és a dir, fer que $x^4 + 32x^2 + M = (x^2 + 16)^2$. Conseqüentment, transforma l'equació anterior sumant 240 als dos costats, i li queda

$$x^4 + 32x + 256 = 48x + 240$$

Després, recoltant-se en la demostració geomètrica anterior, suma els dos costats $2tx^2$ i $t^2 + 32t$, i aleshores diu:

“La primera part [de l'equació] té necessàriament, per tant, una arrel, i ja que volem que la segona, que és $2tx^2 + 48x + t^2 + 32t + 240$, també en tingui, multipliquem la primera part

Sit quadratum a f, diuisum in duo quadrata a d & d f, & duo supplementa d e & e f, & velim addere gnomonem k f g cuncitrea, vt remaneat quadratum totum a h, dico quod talis gnomon constabit ex duplo g & addere lineæ, in e a, cum quadrato g c, nam f g constat ex g e in e f, ex definitione data in initio secundi Elementorum, & e f est æqualis e a, ex definitione quadrati, & quia per 44. primi Elemento-



rum, k f est æqualis f g, igitur due superficies g f & f e constant ex g e, in duplum e a, & quadratum g c est f h, per coroll. 4. secundi Elementorum, igitur patet propositum, si igitur a d sit 1. quadratum, & e d sit d e, 1. quadrata, & d f 9. erunt b a 1. quadratum, & b e 3. necessarii. Cum igitur veluerimus addere quadrata aliqua, ad d e & d a, & fuerint e l & k m erit ad complendum quadratum totum necessaria superficies l n m, quæ vt demonstratum est, constat ex quadrato g e minores quadratorum dimidiatis, nam e j est superficies ex g e in a b, vt ostensum est, & a b est 1. quadratum, quia posuimus, a d 1. quadratum, f l vero 3e in a, sicut ex g e in e b, ex 42. primi Elementorum, quare superficies l n m, & est numerus ad 5. sicut

Fig. 24. Començament de la demostració geomètrica que és part essencial del tractament de les biquadrades (Opera Omnia, vol. IV, p. 294).

del trinomi per la tercera, i elevem al quadrat la meitat de la segona [Cardano s'està referint al fet que un trinomi $Ax^2 + Bx + C$ és un quadrat perfecte de la forma $(\alpha x + \beta)^2$ si Bx és el doble del primer pel segon, és a dir si $(\frac{Bx}{2})^2 = Ax^2 C$], i això fa

$$576x^2 = (2t^3 + 64t^2 + 480t)x^2$$

de la qual cosa resulta

$$288 = t^3 + 32t^2 + 240t."$$

Un cop aquí, remet al capítol corresponent per a resoldre equacions de 3er grau, i acaba afegint:

"Aleshores tindrem x^2 més 16 més aquesta solució [la que haurà estat trobada de l'equació de 3er grau] en un costat, igual a x amb un coeficient igual a l'arrel quadrada del doble de la solució descoberta, més l'arrel quadrada de la suma del quadrat d'aquesta solució amb ella mateixa multiplicada per 32, més 240."

És a dir, s'haurà arribat a l'equació de 2on grau

$$x^2 + 16 + t_1 = \sqrt{2t_1} x + \sqrt{t_1^2 + 32t_1 + 240}$$

on t_1 és la solució obtinguda de la resolució de la precedent equació de 3er grau.

Cardano acaba el capítol plantejant exemples que ja no són de les formes $x^4 + ax^2 + b = cx$ o $x^4 + ax^2 = cx + b$, sinó que no tenen el terme en x^2 al mateix costat que x^4 . Sense cap de les seves demostracions, ni cap plantejament general, Cardano canvia de costat els termes de l'equació, emprant coeficients negatius, i utilitza la mateixa tècnica que ha fet servir als exemples anteriors.

Amb un especial sentit de la modèstia, que cap historiador no ha deixat d'assenyalar, Cardano acaba la seva obra desitjant-li llarga vida:

"ESCRITA EN CINC ANYS, QUE PERDURI
NO MENYS MIL LENIS"

Alguns temes importants dins de l'Ars Magna

a) Les relacions entre arrels i coeficients

El llibre s'obre amb un capítol de característiques excepcionals. En ell, després de subratllar que un nombre positiu té dues arrels quadrades ("9 és derivable igualment de 3 i de -3, ja que un menys per un menys produeix un més", p. 9), comença un repàs de diferents tipus d'equacions, comentant el nombre de solucions que tenen. Les consideracions més llargues i acurades afecten les equacions cúbiques. Cadascun dels casos $x^3 + ax = b$, $x^3 + b = ax$,... és tractat separatament, enunciant si pot haver-hi arrels positives o negatives, i quantes de cada classe. Dóna regles, que afecten els coeficients, per a esbrinar-ho. Per exemple, quan considera les equacions de la forma $x^3 + a = bx$, Cardano precisa que

(i) Si $\frac{2}{3} b \sqrt{\frac{b}{3}} = a$, aleshores l'equació té dues arrels, una positiva i l'altra negativa, i la positiva és precisament $\sqrt{\frac{b}{3}}$. Afegeix que la solució *fictícia* (així anomena moltes vegades les solucions negatives) és la solució *vertadera* (positiva) de l'equació $x^3 = bx + a$.

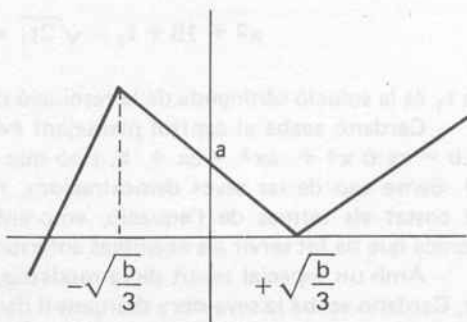
(ii) Si $\frac{2}{3} b \sqrt{\frac{b}{3}} > a$, aleshores l'equació té tres arrels, dues que són vertaderes i una tercera de fictícia.

(iii) Si $\frac{2}{3} b \sqrt{\frac{b}{3}} < a$, aleshores no hi haurà cap solució vertadera, però n'hi haurà una de falsa, igual a la vertadera de l'equació $x^3 = bx + a$.

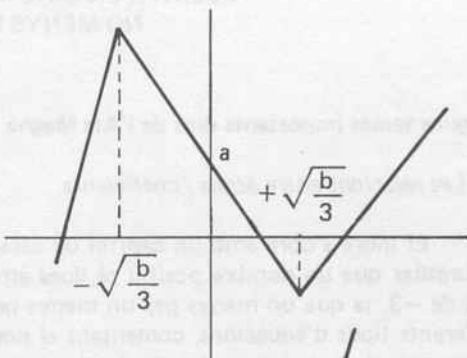
Cardano no dona cap demostració d'aquests resultats ni dels molts altres semblants que omplen el capítol, ni cap indicació de com els va trobar, ni menciona què és el que va fer que s'interessés per una classificació d'aquestes.

Amb coneixements que Cardano no podia tenir, aquests resultats es justifiquen fàcilment: si $x^3 - bx + a = y$, sent $a, b > 0$, la corba y travessa l'eix Y pel punt d'ordenada positiva a , és decreixent a l'interval $(-\sqrt{\frac{b}{3}}, +\sqrt{\frac{b}{3}})$, i creixent a les semirectes restants.

(i) Si $y(-\sqrt{\frac{b}{3}}) \cdot y(+\sqrt{\frac{b}{3}}) = 0$, aleshores un dels extrems, que per la condició $a > 0$ ha de ser forçosament el mínim, és una arrel; l'equació $x^3 - bx + a = 0$ té dues úniques arrels, i la positiva és doble.



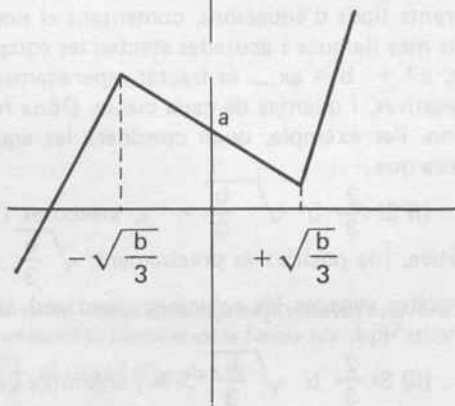
(ii) Si $y(-\sqrt{\frac{b}{3}}) \cdot y(+\sqrt{\frac{b}{3}}) < 0$, el màxim i el mínim estan per sobre i per sota, respectivament, de l'eix X , i els punts de contacte de la corba amb aquest eix són tres, dos de positius i un de negatiu.



(iii) Si $y(-\sqrt{\frac{b}{3}}) \cdot y(+\sqrt{\frac{b}{3}}) > 0$, els dos extrems estan situats per damunt de l'eix X i per tant l'equació té una única arrel, i és negativa.

Un càlcul senzill dona

$$y(-\sqrt{\frac{b}{3}}) \cdot y(+\sqrt{\frac{b}{3}}) = a^2 - \left(\frac{2b}{3} \sqrt{\frac{b}{3}}\right)^2$$



d'on resulten immediatament les condicions de Cardano per a caracteritzar les possibilitats anteriors.

Insistim en el fet que res, en el text de Cardano, no es pot interpretar com una justificació dels resultats que enumera, d'altra banda tan precisos. La temptació de pensar que aquests coneixements són d'origen empíric és forta, però una sèrie de consideracions sobre les arrels i els lligams entre elles, que Cardano va fent aquí i allà, fan sospitar que potser havia arribat a trobar, o almenys a comprendre, sense tenir-ne la demostració, certs resultats teòrics que no va explicitar. Així, quan enuncia la regla (ii) que hem citat precedentment, comenta el següent exemple:

"Per exemple, per $x^3 + 9 = 12x$ les solucions vertaderes són 3 i $\sqrt{5\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, i la tercera o falsa és la suma d'aquestes dues..." (p. 12)

Efectivament, l'anul·lació del coeficient de x^2 dona la relació $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, entre les arrels, relació a la qual es referiex Cardano en aquesta cita (la menció d'un nombre negatiu pel seu valor absolut és una pràctica corrent dins de l'*Ars Magna*). Si aquest paràgraf és interessant, encara ho són més les línies que el segueixen:

"D'aquesta manera, la solució fictícia restant, de la qual hem parlat a l'altre exemple [*s'està referint a l'equació $x^3 + 16 = 12x$, que ha posat com exemple a l'apartat (i), corresponent a equacions amb una arrel doble, i de la qual ha donat l'arrel negativa -4*] és la suma de les dues vertaderes, però tota vegada que les vertaderes són iguals una a l'altra, la fictícia és el doble de la vertadera".

Més endavant assenyala el paral·lelisme entre $x^3 + a = bx$ i $x^3 = bx + a$, i comenta sobre les darreres que la solució vertadera és el doble de la fictícia, de la mateixa manera que havia vist que la fictícia era el doble de la vertadera (p. 14).

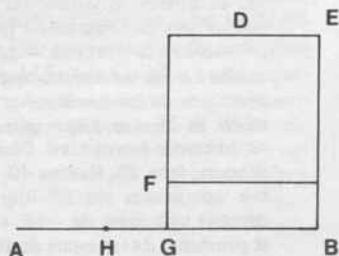
A la pàgina 17 hi trobem una altra acotació interessant:

"Sabeu, a més a més, que les solucions dels casos cub i quadrat igual a nombre, i de cub i nombre igual a quadrat, són tals que la diferència entre la solució vertadera i les fictícies sempre és el nombre de quadrats. Així, si $x^3 + 72 = 11x^2$, la solució falsa és $\sqrt{40 - 4}$ [*és a dir, $-(\sqrt{40 - 4})$*] i les vertaderes són $\sqrt{40 + 4}$ i 3 . La diferència entre $\sqrt{40 - 4}$ i $7 + \sqrt{40}$ és 11, el nombre de quadrats."

Ja al capítol V, el dedicat a les equacions de 2^{on} grau, la demostració corresponent a la regla per a resoldre les equacions de la forma $x^2 + b = ax$ utilitza el dibuix de la figura adjunta. El quadrat GE és el que té per costat la meitat de la longitud AB, la qual repre-

senta a , el nombre de coses; el rectangle FE representa el nombre b (quan b no es pot ficar dins del quadrat GE surten solucions imaginàries). GH és l'arrel quadrada de la superfície

FB $\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)$. Cardano afirma que demostrarà que tant BH com AH són arrels de l'equació, i afegeix:



"de la qual cosa se segueix que en aquest cas hi ha dues solucions vertaderes, i que llur suma és igual al nombre de coses." (p. 34)

Per acabar de citar totes les referències que es troben a l'*Ars Magna* sobre relacions entre arrels i coeficients, cal parlar d'un dels capítols que segueixen immediatament els dedicats a la resolució de les cúbiques, el XXV, on l'autor adverteix que certes equacions es poden resoldre per tempteig cada vegada que es constatin unes molt específiques descomposicions dels coeficients o del terme independent de l'equació. És notable que algunes d'aquestes regles són, pràcticament, les relacions entre arrels i coeficients que es verifiquen en els casos particulars considerats per Cardano. Aquest mai no indica com ha arribat a aquests resultats, ni moltes vegades no en dóna la demostració, però quan la dóna es tracta d'una comprovació geomètrica que no permet mantenir cap sospita que Cardano hagués enumat l'existència de les relacions generals entre arrels i coeficients. Per exemple, dóna sense demostració la següent regla: Si $x^3 = ax + N$ i si $XY = N$, i a més $X = \sqrt{a + Y}$, aleshores X és un arrel (p. 160). Les relacions generals entre les arrels x_1, x_2, x_3 de l'equació anterior i els seus coeficients són $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $N = x_1 x_2 x_3$, $a = -(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$. Fent $x_1 = -(x_2 + x_3)$ i substituint s'obté $a = x_1^2 - x_2 x_3$ ($x_1 = \sqrt{a + x_2 x_3}$) i $N = x_1 (x_2 x_3)$. Es a dir, les condicions de Cardano per a aquesta regla són haver trobat x_1 i $x_2 x_3$.

b) L'ús de nombres negatius i imaginaris

La principal referència als nombres negatius i imaginaris es troba al capítol XXXVII, *Sobre la regla de postular un negatiu*, on es discuteix el paper que juguen els negatius en la resolució de problemes. El capítol comença plantejant-ne alguns que comporten solucions negatives, però que "poden almenys ser verificades com positives" (p. 217), amb la qual cosa es refereix a la solució d'una equació com $x^2 = 4x + 32$, la solució negativa de la qual és la positiva de $x^2 + 4x = 32$. Segons Cardano, pot haver-hi problemes *vertaders* (sic.; però Cardano no dóna cap mena d'explicació del que ell entén per un problema vertader) amb solucions negatives, com aquest: "La dot de la muller de Francesc val 100 monedes d'or més que el que té el mateix Francesc, i el quadrat de la dot val 400 més que el quadrat del que ell té. Trobar la dot i el que té". (p. 218). És curiós veure com aquests problemes Cardano sempre els planteja agafant una incògnita negativa ("Suposem que Francesc té $-x, \dots$ ") amb la qual cosa obté una equació de solució positiva.

Cardano s'ocupa en segon lloc de les arrels quadrades de nombres negatius, l'ús de les quals, sense cap mena d'altre preàmbul, pretén il·lustrar amb el següent exemple:

"Si es digués: Divideix 10 en dues parts, el producte de les quals és 30 ò 40, és clar que aquest cas és impossible [pel que especifica a continuació, Cardano fa servir la identitat $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, així com el fet que agafant $a = 10/2$, $(a + b) + (a - b) = 10$, i agafant b de tal manera que $b^2 = a^2 - c$, els nombres $a + b$ i $a - b$ són dues parts de 10, el producte de les quals val c ; per això mateix, Cardano sap que el valor màxim d'un tal producte és 25, i que és impossible demanar que valgui 30 ò 40. Cardano continua dient:] Això no obstant, farem així: Dividim 10 en dues parts iguals, fent cadascuna 5. Aquesta la quadrarem, fent 25. Resteu 40, si voleu, dels 25 així produïts, com us he ensenyat al capítol sobre operacions del 6^è llibre [Cardano fa aquí referència a una obra seva d'aritmètica], deixant una resta de -15 , l'arrel quadrada de la qual, sumada o restada de 5, dóna les parts el producte de les quals és 40. Aquestes seran $5 + \sqrt{-15}$ i $5 - \sqrt{-15}$." (p. 219).

Cap. XXXVII. De Regula falsi 287

m. 1. pol.	100. m. 1. pol.
1. quad.	10000. p. 1. quad.
	m. 100. pol.
differentia	10000. m. 100.
pol. æqualis	400.

bus æquantur 10000. p. 1. quadrato, abice communia, habebis 9600. æqualia 100. positionibus. Igitur res est 48. & tantum habuit m. id est debiti, & dos erit residuum ad 100. scilicet 52. igitur Franciscus habuit 48. aureos debiti, sine vlllo capitali vel pecunia: & dos eius uxoris fuit 52. aureorum, & secus operando peruenires ad questiones difficilimas, ac inextricabiles. Talis modi etiam hæc est.

QVÆSTIO II.

Ego habeo aureos 12. plus Francisco, & cubus meorum est, 1161. aurei plus cubo Francisci, ponatur 1. res m. Francisco, ego habeo 12. aureos m. 1. positione duc ad cubum partes, fient 1. cubus m. & 1728. p. 36. quadratis m. 432. rebus m. 1. cubo, & horum differentia, est 1161. igitur 1. cubus m. p. 422. rebus p. 1161. æquabitur 1728. p. 36. quadratis m. 1. cubo, abice m. 1. cubum & 1161. ex vtrâque parte, fient 432. res æquales 36. quadratis p. 567. quare 2. quadratum p. 15 $\frac{1}{2}$, æqualia 12. rebus, igitur res est 1 $\frac{1}{2}$, & hoc habuit m. Franciscus, & ego 10 $\frac{1}{2}$ p. & tot sunt aurei quæsi.

QVÆSTIO III.

Et eodem modo, si dicam etiam sic, aurei mei sunt 12. p. quam illi Francisci. Et quadratum meorum est 128. p. cubo autem Francisci, dabimus rem vnam m. Francisci, ego verò habeo 12. aureos m. 1. res. & quadratum meorum erit 144. p. 1. res. & cubus Francisci, & hoc æquabitur

Quæ, sit a b linea, quæ dicatur 10. diuidenda in duas partes, quarum rectangulum debeat esse 40. est autem 40. quadruplum ad



10. quare nos volumus quadruplum totius a b, igitur fiat a d, quadratum a c, dimidijs a b, & ex a d auferatur quadruplum a b, absque numero, & igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex a c, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis x. m. 15. id est differentia a d, & quadrupli a b, quam adde & minue ex a c, & habebis quæsitum, scilicet 5. p. x. v. 25. m. 40. & 5. m. x. v. 25. m. 40. seu 5. p. x. m. 15. & 5. m. x. m. 15. duc 5. p. x. m. 15. in 5. m. x. m. 15. dimissis incruccionibus, sit 25. m. m. 15. quod est p. 15. igitur hoc productum est 40. natura tamen a d, non est eadem cum natura 40. nec a b, quia superficies est

5. p. x. m. 15.
5. m. x. m. 15.
25. m. m. 15. quad. est 40.

remota à natura numeri, & lineæ, proximus tamen huic quantitati, quæ verè est sophistica, quoniam per eam, non vt in puro m. nec in aliis operationes exercere licet, nec venari quid sit. Modus est, vt addas quadratū medietatis numeri numero producendo, & à re aggregati minus ac addas dimidium diuidendi. Exemplum, in hoc casu, diuide 10. in duas partes, producentes 40. adde 25. quadratum dimidij 10. ad 40. fit 65. abice 10. numerum. & restat 55.

Fig. 25. Pàgina del capítol de l'Àrs Magna dedicat als nombres negatius. A la columna esquerra apareixen les equacions del problema de la dot mencionat al text. A la columna de la dreta apareix el final del problema que condueix a quantitats imaginàries. Sobressurt el càlcul $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40$. (Opera, vol IV, p. 287).

Cardano fa alguns comentaris interessants sobre aquest problema. Assenyala que el producte de $5 + \sqrt{-15}$ per $5 - \sqrt{-15}$, deixant de banda allò que pugui haver-hi de tortuós o incompreensible en aquestes expressions, fa $25 - (-15)$, la qual cosa és 40. Afegeix que tot això és veritablement sofisticat, tota vegada que aquí no es poden realitzar les operacions que hom pot fer en el cas dels negatius, referint-se, sens dubte, a la impossibilitat de sumar, restar,... les expressions imaginàries a les reals. Només apareix un altre problema que condueix a solucions imaginàries; l'enunciat és idèntic a l'anterior, amb nombres canviats, i l'autor es limita a donar les solucions numèriques. Contrastant amb la llibertat d'esperit que palesa aquest desenvolupament, Cardano adverteix, al capítol dedicat a les equacions de 2on grau:

"Si el nombre $[b]$ no pot ser sostret del quadrat de la meitat del nombre de coses $[(\frac{a}{2})^2]$; s'està referint a la fórmula $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$, el problema és en ell mateix fals, i allò que ha estat proposat no pot ser." (p. 39).

El tractament de Cardano de les quantitats negatives i imaginàries és manifestament asistemàtic i contradictori. Tanmateix, el fet d'estudiar-les conjuntament, en un capítol que forma part d'una sèrie dedicada a tipus especials de problemes o d'equacions que admeten consideracions o recursos no estàndards, ens ajuda a comprendre l'estatus atorgat a aquestes quantitats en aquell estadi concret del desenvolupament del pensament algebraic: encara no eren objectes matemàtics dignes d'una reflexió teòrica; eren, essencialment, recursos tècnics i instrumentals esdevinguts imprescindibles en algunes situacions molt determinades, sense que per això la seva naturalesa es considerés homologable a la dels restants conjunts numèrics.

Entre les situacions que forçaven la utilització dels nombres negatius, dins de l'obra de Cardano n'hi ha una d'un tipus nou. Aquelles consistien generalment en problemes la solució negativa dels quals podia tenir una interpretació (com ara la d'un deute) coherent amb les relacions i la situació donades a l'enunciat. En els autors anteriors a Cardano es pot observar una actitud ambivalent, però definida, sobre les solucions negatives: són acceptades quan els pot ser donada una interpretació de les mencionades, i no ho són quan apareixen dins d'un problema d'enunciat purament aritmètic, com "Dividiu 10 en dues parts tals que...". Dins de l'*Ars Magna*, la situació és molt més confusa: les solucions negatives de les equacions sempre són tingudes en compte, amb independència de qualsevol interpretació, malgrat ser anomenades *falses* i *fictícies*, i malgrat la preocupació per considerar les solucions negatives d'una equació com les positives d'una equació associada. De fet, Cardano s'arriba a plantejar el càlcul, i el realitza, del cub d'una quantitat AB, que representa geomètricament, però que suposa negativa.

La situació de tipus nou que anunciàvem abans es produeix associada a les tècniques de transformació d'equacions. Ja hem dit que una equació de 3er grau amb terme x^2 , el coeficient del qual sigui a , es transforma en una sense terme en x^2 fent $x = y + \frac{1}{3}a$. Cardano, a propòsit de $x^3 + 21x = 9x^2 + 5$, que transforma en $y^3 + 4 = 6y$ posant $x = y + \frac{1}{3}a$, diu: "...hi ha tres solucions per a aquesta equació: la primera és 2, la segona $\sqrt{3}-1$, i la tercera, que és falsa és $-(\sqrt{3}+1)$. Suma aquestes a 3, un terç del nombre de quadrats, i tindràs aquestes solucions vertaderes 5, $2 + \sqrt{3}$ i $2 - \sqrt{3}$ ". (p. 133). Les solucions negatives de la equació transformada li donen solucions vertaderes de l'equació primitiva: des de dintre mateix de l'estret esquema conceptual en que l'àlgebra s'estava movent, començaven a sorgir arguments que feien inconsistents les seves limitacions.

c) L'orientació i la metodologia de l'obra

L'*Ars Magna* ja no és un llibre d'àlgebra del tipus del de Luca Pacioli, que, pel fet d'anar directament i primordialment adreçat a un públic no savi, suposava en el lector una absoluta ignorància de les tècniques aritmètiques i algebriques elementals, alhora que privilegiava els aspectes instrumentals i calculístics. Contràriament, aquesta obra de Cardano ha de ser considerada el primer tractat avançat de teoria d'equacions. Coneixements com la manipulació de radicals i d'incògnites (sumar-los, multiplicar-los, dividir-los,...), o com les identitats algebriques bàsiques, es donen per coneguts, i ja no hi són descrits. Les regles aritmètiques d'interès específicament mercantil, o bé ja no hi són (és el cas de les més elementals), o bé ja no ocupen el lloc principal que els primers llibres els atorgaven: per primera vegada apareixen amb l'estatus d'*aplicacions*.

Això no obstant, la connexió de l'*Ars Magna* amb les primeres àlgebres és manifesta. Ja hem parlat dels 10 capítols dedicats als aspectes pràctics de la resolució de problemes concrets, i de la menció explícita de les necessitats mercantils que en ells es fa. Tant o més significatiu és encara que l'àmbit de la teoria d'equacions, malgrat que Cardano ja en fa molta, continuï delimitat per una concepció de la funció de les equacions mateixes més pràctic-instrumental que no pas teòrica: les equacions encara no són concebudes sinó com un mètode per a resoldre problemes numèrics *particulars*. El lligam estret entre la resolució d'equacions i els problemes concrets ajuda a entendre que el zero fos ignorat —que no rebutjat— com una solució: és una solució tan trivial, que no té cap mena d'interès per als problemes que es plantejaven. Serà acceptat en un estadi més desenvolupat de l'àlgebra, més teòric, quan de tenir en compte les solucions nul·les depenguin coses com, per exemple, que una equació de grau n tingui n solucions, etc.

El caràcter d'obra transicional és particularment visible a la metodologia de l'*Ars Magna*. Sense tenir una estructura axiomàtico-deductiva, hi és present la preocupació per fonamentar lògicament els resultats enunciats (malgrat que algunes demostracions són incompletes des d'aquest punt de vista), així com la d'obtenir resultats generals. En particular, hi trobem moltes vegades justificació dels passos que es van donant per transformar una equació: "si hom resta dues quantitats iguals de coses iguals, tot quedarà igual", etc... Aquesta preocupació pel rigor i la fonamentació coexisteix tanmateix, amb trets propis de la metodologia didàctica i instrumental de les aritmètiques comercials. Alguns resultats, especialment els que es donen als 10 capítols ja mencionats al paràgraf anterior, només són explicats per mitjà d'exemples. Sense arribar a aquest cas límit, tots els resultats generals van sempre acompanyats d'exemples concrets il·lustratius. Els algorismes i regles de càlcul sempre són descrits en forma de recepta de fàcil aplicació. Alguns d'ells no estan demostrats, i d'altres passen amb la demostració d'un cas particular que s'aplica tranquil·lament en general, com per exemple $x^6 + N = ax$, que és pres com a representant de totes les equacions de la forma $x^m + N = ax^n$, $n < m$ (p. 68). 68).

La importància de l'*Ars Magna*

L'*Ars Magna* és una obra autènticament fonamental, però no pas pels resultats específics sobre la cúbica i la biquadrada, com sovint ha estat dit, sinó per tot allò que aclareix sobre les bases de la teoria d'equacions, i per tot allò que deixa entreveure.

La multiplicitat de regles d'expressió complexa —com les que donen les solucions de les cúbiques— i la multiplicitat de relacions aritmètiques generals, imprescindibles dins de la teoria que elaborava Cardano, constituïren una motivació fonamental per a la millo-

ra de les notacions i per a la seva adaptació a una sintaxi fructífera. L'*Ars Magna* feia evident l'absoluta necessitat de crear uns simbolismes algebraics eficients per tal de continuar avançant. Al mateix temps, va donar perspectives radicalment noves sobre els nombres negatius i imaginaris. Finalment, va fer paleses les limitacions del model demostratiu geomètric, utilitzant-lo fins gairebé al límit de les seves possibilitats. Les relacions entre arrels i coeficients, el nombre d'arrels associades a cada equació i les arrels dobles, foren resultats només entrevistos per Cardano, però enunciats amb prou nitidesa per a indicar amb claredat el nou camí que havien d'emprendre les recerques algebraiques. Són aquests trets els que fan de l'*Ars Magna*, amb tota justícia, l'obra que inaugura un nou període.

CAPÍTOL 8:

L'ARITMÈTICA I L'ÀLGEBRA A LA PENÍNSULA IBÈRICA AL SEGLE XVI

a) L'ARITMÈTICA. JUAN DE ORTEGA

Durant la primera meitat del segle XVI hi ha una sèrie de figures espanyoles que ensenyen matemàtiques a la Sorbona. Al costat de la ja esmentada de P. Ciruelo, sens dubte la més important, cal citar Juan Martínez Silíceo (ca. 1477-1557) (el segon cognom és la versió llatinitzada i refinada del vertader, Guijarro, del qual el seu propietari pensava que no era el més apropiat per a un doctor escolàstic), i Gaspar Lax (ca. 1487-1560). Tots dos publicaren obres a París, i més tard a Espanya, dins de la tradició escolàstica.

La primera aritmètica mercantil que es publicà en espanyol, i la millor de tot el període, és el ja esmentat *Tratado subtilissimo de Arismetica y Geometria* de Juan de Ortega. Unes quantes obres més d'aquests tipus aparegueren a la península, sobretot a partir de 1535. Llevat de la d'Ortega, són obres menors; citarem, només per l'específic interès cultural que puguin tenir, les aritmètiques publicades en català per Joan Ventallol, el 1521, i per Bernat Vila, el 1596.

El Tratado de Juan de Ortega.

Havent parlat en un capítol precedent del contingut de l'aritmètica d'Ortega, aquí intentarem explicar la seva importància històrica. Del seu autor es coneixen molt poques coses. Malgrat que Rey Pastor va fer un treball de recerca meticolós, tot el que va aconseguir saber queda condensat així: "Palentino de origen y dominico adscrito a la provincia de Aragón, enseñó Aritmética y Geometría en España e Italia durante muchos años, privada y públicamente." (Les principals dades biogràfiques i històriques que donem són extretes del llibre *Los matematicos españoles del siglo XVI*, pp. 67-81). La majoria d'historiadors el fan morir el 1567, data contestada a la font citada amb arguments força convincents que després comentarem. La llista d'edicions del *Tratado...* pot donar una idea de la importància que va tenir a l'època: León 1512, Lyon 1515, Roma 151, Messina 1522, Sevilla 1534, 1537, 1542, 1552 (publicada per Busto), Granada 1563 (publicada per La-

garto) i Cambray 1612. Utilitzant una referència de segona mà (Morgan: *Arithmetical Books*, London, 1847), Rey Pastor dóna la dada que la versió en francès apareguda a Lyon seria la primera aritmètica comercial publicada en aquesta llengua. Es tracta d'un fet que cal posar entre parèntesi, tota vegada que abans del 1500, segons el *Catalogue of Books printed in the XVth Century*, "una curta aritmètica comercial, també en francès, fou impresa per Balsarin a París" (p. xiv); les nostres recerques per a obtenir una referència més precisa d'aquest incunable han estat ineficaces.

El llibre d'Ortega va protagonitzar una polèmica entre historiadors il·lustres que el va fer famós. L'edició del 1534, que era una reelaboració de les anteriors, modificava els valors aproximats de les arrels quadrades que calia calcular en els problemes de geometria. Els nous valors reapareixien a les edicions del 1537 i del 1542, però a la del 1552 el *Tratado...*, "ahora de nuevo emendado con mucha diligencia por Gonçalo Busto de muchos errores que avia en algunas impresiones passadas" —com assenyalava la portada de la nova edició—, tornava a donar com a valors aproximats de les arrels quadrades els que figuraven en les edicions de 1512 a 1522. Ignorem com es va arribar a parar esment en un detall aparentment tan nimis; el fet és que les arrels quadrades de Juan de Ortega han interessat des de fa molts anys els historiadors de les matemàtiques, i ja a la dècada de 1880 se n'ocupaven Perott i Tannery (Cf. Sánchez Pérez (1929), p. 219). Eneström i Rey Pastor són els altres estudiosos que es van mirar amb lupa aquestes arrels quadrades.

Els valors aproximats que va donar Ortega a l'edició del 1534 són:

$$\begin{aligned}\sqrt{128} &\cong 11 + \frac{16}{51}, \sqrt{80} \cong 8 + \frac{17}{18}, \sqrt{297} \cong 17 + \frac{659}{2.820} \\ \sqrt{300} &\cong 17 + \frac{25}{78}, \sqrt{375} \cong 19 + \frac{285}{781}, \sqrt{135} \cong 11 + \frac{13}{21}, \sqrt{75} \cong 8 + \frac{103}{156} \\ \sqrt{756} &\cong 27 + \frac{109}{220}, \sqrt{611} \cong 24 + \frac{6.886}{9.585}, \sqrt{231} \cong 15 + \frac{151}{760} \\ \sqrt{800} &\cong 28 + \frac{197}{693}, \sqrt{4.100} \cong 64 + \frac{1}{32}, \sqrt{2.000} \cong 44 + \frac{2.079}{2.882}\end{aligned}$$

valors que són extraordinaris, perquè tots, menys dos, satisfan l'equació de Pell (i. e., si $\sqrt{A} \cong \frac{x}{y}$, aleshores $\frac{x^2}{y^2} - A = \frac{1}{y^2}$), i per tant representen una aproximació òptima. Segons Rey Pastor, la resolució general de l'equació de Pell no hauria estat trobada abans de Fermat.

Als folis 29r.-31v. (edició del 1534), Ortega explica l'algorisme d'extracció de l'arrel quadrada. En tots els detalls coincideix amb l'algorisme que encara avui figura als llibres de text de l'ensenyament bàsic. L'autor distingeix entre arrels quadrades exactes, "rayz quadrada verdadera", i les que no ho són, "aquella que no se puede llamar verdaderamente quadrada porque siempre sobra algo encima de aquella suma que quieres sacar la rayz". Per completar aquestes últimes, si $a^2 < A < (a+1)^2$, Ortega explica que cal prendre el valor $\sqrt{A} \cong a + \frac{r}{2a+1}$, sent $r = A - a^2$ la resta apareguda al càlcul del valor a per mitjà de l'algorisme mencionat. Aquesta aproximació per defecte, així com l'aproximació per excés obtinguda fent $\sqrt{A} \cong a + \frac{r}{2a}$, eren conegudes des de l'antiguitat, i no tenen

Fig. 26.



Primera pàgina de l'edició de Sevilla, 1552 (Biblioteca de Catalunya).



La primera pàgina del Tractado subtilissimo d'Ortega, a l'edició de Roma, 1515. (Exemplar de la Biblioteca Universitària de Barcelona).

cap interès especial. Els valors aproximats que apareixen a les primeres edicions estaven calculats atenent-se estrictament a la regla precedent; així obtenia:

$$\sqrt{128} \cong 11 + \frac{7}{23}, \sqrt{80} \cong 8 + \frac{16}{17}, \sqrt{300} \cong 17 + \frac{11}{35}, \text{ etc.}$$

Aquests valors, que concordaven amb el mètode descrit al propi llibre, eren els que van ser restablerts a l'edició de 1552 per Gonçalo Busto. Tota vegada que Ortega mai no va explicitar el mètode amb què havia calculat les aproximacions excel·lents de 1534, no podem ser massa rigorosos en jutjar Busto, un matemàtic sens dubte bastant menys competent que Ortega. Els treballs dels historiadors abans mencionats intentaven explicar-se per quin camí havien estat trobats aquells valors que satisfien sistemàticament l'equació de Pell. Contra la primera opinió de Tannery, assumida per Cantor a la seva història monumental, va prevaler la de Rey Pastor, el qual va fer veure que totes les aproximacions podien ser obtingudes molt senzillament per mitjà de la intercalació additiva. Com ha assenyalat Rey Pastor, el referent europeu més important d'aquest mètode es troba a la *Triparty* de Chuquet (cf. pp. 77 i 80-81).

El que hauria fet Ortega, segons aquesta conjectura, seria el següent. A partir, per exemple, de $17 + 11/35$ i $17 + 11/34$, aproximacions per defecte i excés de $\sqrt{300}$, calcularia la fracció $\frac{11 + 11}{35 + 34} = \frac{22}{69}$, compresa entre $11/35$ i $11/34$. Després de comprovar, elevat al quadrat, que $17 + 22/69$ és una arrel per defecte, calcularia la fracció $\frac{22 + 11}{69 + 34} = \frac{33}{103}$, compresa entre $22/69$ i $11/34$. Aleshores elevaria al quadrat $17 + 33/103$, etc.

D'aquesta manera calcularia les següents fraccions:

$$\frac{11 + 11}{35 + 34} = \frac{22}{69}$$

$$\frac{33 + 110}{103 + 343} = \frac{143}{446}$$

$$\frac{22 + 11}{69 + 34} = \frac{33}{103}$$

$$\frac{33 + 143}{103 + 446} = \frac{176}{549}$$

$$\frac{33 + 11}{103 + 34} = \frac{44}{137}$$

$$\frac{33 + 176}{103 + 549} = \frac{209}{652}$$

$$\frac{33 + 44}{103 + 137} = \frac{77}{240}$$

$$\frac{33 + 209}{103 + 652} = \frac{242}{755}$$

$$\frac{33 + 77}{103 + 240} = \frac{110}{343}$$

$$\frac{33 + 242}{103 + 755} = \frac{275}{858} = \frac{25}{78}$$

sent $17 + 25/78 = 17,320512$, una aproximació de $\sqrt{300} = 17,320508$ amb 5 xifres decimals exactes. Falta per aclarir si Ortega es va guiar per algun criteri teòric en utilitzar aquest mètode, com ho fa creure que les aproximacions calculades satisfaguin l'equació de Pell. D'això no en sabem res.

Hem de comentar finalment un parell de qüestions. La primera, ja anunciada, és que cal dubtar de la data de la mort d'Ortega que donen ordinàriament totes les fonts, l'any 1567, tota vegada que costa de creure que l'autor hagués acceptat, en vida, les esmenes que li féu Gonçalo Busto. La segona pretén aclarir i precisar la notícia que del frare dominic donen moltes de les obres que s'han ocupat de la història de la ciència espanyola en aquest període (Cf., per exemple, Vernet 1975 o López Piñero i altres 1976). Aquestes

obres diuen que el *Tratado*... conté un mètode original d'aproximació d'arrels que pot ser considerat una novetat teòrica d'interès. El llibre d'Ortega no inclou, malauradament, cap mètode original ni cap novetat teòrica d'interès sobre el càlcul d'arrels aproximades. Només inclou unes dades numèriques de difícil interpretació dins dels coneixements de l'època. En l'obra més recent de López Piñero (1983) aquest punt ja queda ben aclarit.

Per poguer valorar correctament les obres d'aritmètica mercantil de voltants del 1500, i molt en particular la d'Ortega, cal subratllar la importància excepcional que aquestes obres d'"intenció purament aplicada" tingueren per a l'evolució general de les matemàtiques. La intenció purament aplicada és una característica comuna i essencial a tots els treballs d'aritmètica i àlgebra contemporanis del *Tratado*, des del *Tripartit* de Chuquet fins al *Coss* de Rudolf. Com ja hem assenyalat, és anacrònic referir a l'època la contraposició teoria-aplicacions; això només serà possible després de l'*Ars Magna* de Cardano. Les aritmètiques mercantils no eren la *conseqüència* d'uns coneixements teòrics continguts a d'altres llocs: eren l'*origen* d'una teoria que es va explicitar a posteriori.

b) L'ÀLGEBRA. PEDRO NÚÑEZ y PÉREZ DE MOYA.

Sobre un fons constituït per escasses obres, mediocres i vicàries, tres són els autors que mereixen ser esmentats.

Marco Aurel.

El primer llibre d'àlgebra imprès a la península Ibèrica, encara que no pas el primer que s'hi escrivia, porta el següent títol: *Despertador de ingenios. Libro primero, de Arithmetica algebratica, en el qual se contiene el Arte mercantil, con otras muchas Reglas del Arte menor, y la regla de la cosa: sin la qual no se podra entender el decimo de Euclides, ni otros muchos primores, assi en Arithmetica como en Geometria, por Marco Aurel, natural Aleman*. Del seu autor no sabem sinó que era alemany, com ell mateix declara, i que l'any 1541, quan va publicar una aritmètica mercantil, ja residia i treballava com a mestre d'aritmètica a la ciutat de València.

L'*Arithmetica algebratica* aparegué a la mateixa ciutat el 1552. El contingut del llibre, segons Rey Pastor, és una versió, potser resumida però amb seguretat mal païda, de la *Summa* de Pacioli. Una cosa revela que Marco Aurel no era un matemàtic de primera ni de segona fila: per resoldre una equació del tipus $ax^2 + c = bx$ dona la fórmula $x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$, advertint que quan el nombre afectat per l'arrel no és positiu o zero, llavors la solució s'obté amb la mateixa fórmula posant $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$!!.

Pérez de Moya, del qual ara parlarem, va copiar a Marco Aurel l'error esmentat, juntament amb moltes altres coses. El tret més interessant i positiu de l'*Arithmetica algebratica* rau en els simbolismes que utilitza. El seu autor estava al corrent dels símbols propis de l'escola alemanya, i amb ells escriu el llibre. Així el "+", el "-" i els símbols de la radicació van aparèixer a Espanya relativament d'hora.

L'obra de Pérez de Moya és important pel que va representar des del punt de vista de la divulgació. La seva obra més notable, *l'Aritmetica Practica y Especulativa* (Salamanca, 1562), va conèixer no menys de 14 edicions en un període de 200 anys. Durant el segle XVI, quan encara no havia quedat antiquada, arribà a ser apreciada i molt coneguda fora d'Espanya per la seva part d'aritmètica (Cf. Rey Pastor, p. 104).

L'obra es divideix en 9 parts o "libros", desigualment extenses i rellevants. La primera i la segona són dedicades a les operacions amb enters i trencats, respectivament. La tercera "Trata de la regla de tres, y compañías, y testamentos, o partijas, y finezas de oro, y otras cosas tocantes al Arte, que dicen menor" (foli 66v.; les referències es fan a l'edició de 1675, Madrid). Els mètodes d'una i dues falses posicions encara s'expliquen en aquesta part. El *libro quarto* "Trata de algunas reglas de Geometria, pratica necessaria para el medir de las heredades" (f. 89r.): tota la preocupació és posada en el càlcul d'àrees. La cinquena part és una barreja-barreja, amb elements de la teoria pitagòrica de nombres ("del [número] superfluo, diminuto y perfecto" etc.), amb un capítol dedicat a "las consonancias y las disonancias de musica, y de sus definiciones" (f. 108v.), i amb un altre dedicat a la proporcionalitat. En aquest comença a manejar arrels, i amb elles apareixen algunes síncope. El capítol acaba proposant, i resolent amb receptes, problemes que condueixen a sistemes 2x2 no lineals. La part sisena "Trata reglas para contar sin pluma, y de reducir unas monedas Castellanas en otras" (f. 114v.).

Al foli 128r comença el "Libro septimo. En que se pone un compendio de la regla de la cosa, ò arte mayor". Tant per la seva extensió —60 folis sobre un total de 215, com pel poema i el prefaci de dues personalitats que l'encapçalen, aquesta era manifestament la part més important de l'obra en la intenció de l'autor. Pérez de Moya comença advertint que els símbols que introduirà per designar les potències de la incògnita "son inventados por causa de brevedad: y es de saber, que no es de necesidad, que estos, y no otros ayan de ser, porque cada uno puede usar de lo que quisiere, y inventar muchos mas,..." (f. 129v.). Els símbols que segueixen no tenen res a veure amb els italians, però tampoc no són pròpiament els alemanys. En cap moment no menciona els "+", "-", ni els símbols radicals. Afegeix que el lector farà bé de servir-se dels símbols esmentats "porque son mas breves", però que ell farà servir uns altres "caracteres"... "porque no avia otros en la Imprenta", i dona la llista de les síncope italianes:

n. per numero		R primero relato	(x ⁵)
co cosa	(x)	cecu . . . censo y cubo	(x ⁶)
ce censo	(x ²)	RR . . . segundo relato	(x ⁷)
cu cubo	(x ³)	ccce . . . censo de censo de censo	(x ⁸)
cce censo de censo	(x ⁴)	ccu . . . cubo de cubo	(x ⁹)

r. "quiere dezir rayz quadrada"; $\sqrt[4]{\quad}$ es representa per rr., i $\sqrt[3]{\quad}$ per rrr.

"p. quiere dezir mas", i "m. quiere dezir menos"... "el uno es copulativo, el otro es diminutivo", "ig. quiere dezir igual" (f. 131r.).

Després d'ensenyar a manejar radicals quadrats i cúbics, comença amb el que anomenem, avui, operacions amb polinomis. És interessant el capítol de la multiplicació. Per

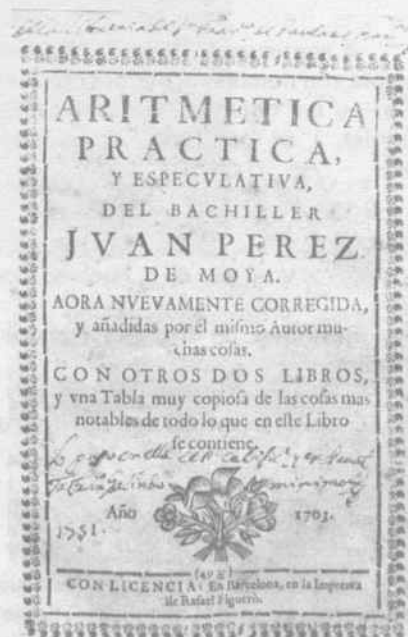
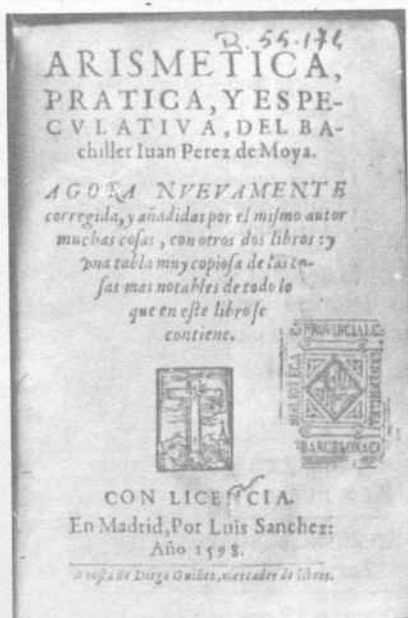
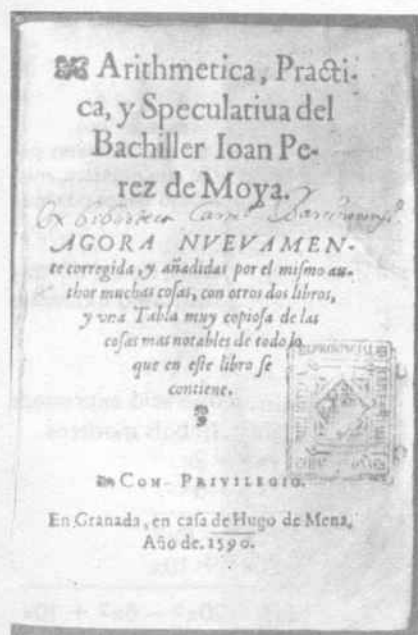


Fig. 27. Primera pàgina de quatre, de les múltiples edicions de l'Aritmètica pràctica de Pérez de Moya, la primera edició de la qual es remunta a l'any 1562. El pas dels anys es reflecteix perfectament en l'evolució de l'ortografia. L'exemplar del 1675 pertany a la Biblioteca de Catalunya, i els restants a la Biblioteca Universitària de Barcelona.

saber quin és el resultat de multiplicar "co. por ce. ò otros cualesquiera caracteres", dóna les instruccions següents (f. 148v.):

"... se tendrá cuenta con la tabla siguiente.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
n.	co.	ce.	cu.	cce.	r.	cecu.	rr.	ccce.	ccu.

Desta figura has de notar, que quando multiplicares en qualesquiera destos caracteres por otro, sumarás los numeros que los tales caracteres tuvieran sobre si, y lo que montare, mira sobre que caracter está otro tanto, porque aquel tal caracter será el producto de los dos multiplicados."

El següent és un dels exemples que posa del producte de polinomis; no cal dir que cap definició general o abstracta no n'és donada. L'algorisme és il·lustrat amb exemples explicats pas a pas, producte de monomi per monomi.

	Mateixa operació expressada amb símbols moderns
4.cu. m. 2.co.	$4x^3 - 2x$
3.co. m. 5.n.	$3x - 5$
m.20.cu. p. 10.co.	$12x^4 - 6x^2$
12.cce. m. 6.ce.	$-20x^3 + 10x$
m.20cu. p.12.cce.m.6.ce.p.10.co.	$12x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 10x$

A continuació, Pérez de Moya explica com manejar expressions de la forma (a i b sempre són nombres específics i positius) $a + \sqrt{b}$ i $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ("binomios"), i $a - \sqrt{b}$ i $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ("disjuntos" o "residuos"). S'ocupa de sumar-les, restar-les, multiplicar-les i dividir-les, i en particular de la racionalització. Per exemple, utilitzant la identitat $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$ sense cap mena de justificació ni d'explicació, trobem, al foli 136v:

"r. V. de 8.P.r.60 (...) sacando r. de este binomio (...) vendrá r. de 5.P.r. de 3." (f. 136v)

Restituïnt les síncopes i tenint en compte que "P" és una abreviació de *plus*, obtenim:

$r(aiz) \vee (niversal)$ de 8 más $r(aiz)$ de 60 (...) sacando $r(aiz)$ de este binomio (...) vendrá $r(aiz)$ de 5 más $r(aiz)$ de 3

és a dir, $\sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Als capítols que dedica a les equacions, malgrat que en tractar les de segon grau que poden tenir solucions imaginàries comet el mateix error que Marco Aurel, podem assenyalar un principi de classificació general que supera allò que normalment oferien les àlgebres d'aquest tipus. Pérez de Moya diu explícitament que el mètode per a trobar les solucions de $ax = b$, $ax^2 = b$, $ax^3 = b$, ..., és aplicable a $ax^{m+1} = bx^m$, $ax^{m+2} = bx^m$, etc. La formulació és molt enfarfegada, perquè tot això és dit retòricament. La mateixa cosa passa quan assenyalava que la resolució de les equacions de 2^{on} grau és aplicable a equacions de

Artículo septimo deste. IX. capit.
 Muestra restar binomios y residuos.

¶ En el restar haras como en el sumar, restando
 r. de r. (como se mostro en el artículo octavo, ca-
 pitulo quarto) y numero de numero y en lo del
 p. y m. como en el segundo artículo de lo octavo ca-
 pitulo del restar caracteres, como parece.

10. p. r. 18. 10. m. r. 18. 10. p. r. 18. 10. m. r. 18.

5. p. r. 2. 4. m. r. 2. 5. p. r. 18. 5. m. r. 18.

5. p. r. 8. 6. m. r. 8. 5. m. r. 1. 5. p. r. 8.

¶ Y desta suerte proseguiras en lo demas, segun
 todas las diferencias que con el p. y m. pueden
 venir.

¶ Nota si quieres de restar algun caracter, y no
 ouiere en la partida de arriba otro de su genero
 para restar la assentaras la misma quantidad que
 auia de restar d. baxo de la raya por resta, y tro-
 carle has la d. i. c. i. o. n. de la p. a. m. q. t. r. u. x. e. r. e. Cien-
 to d. e. x. i. r. q. u. e. si t. r. u. x. e. r. e. p. p. o. n. d. r. a. s. m. y. si a. u. p. o. n. d. r. a. s. p.
 Y si viniere arriba alguno q. y no ouiere
 abaxo que quitar della, poner le has quel d. por
 resta como arriba c. i. u. i. e. n. e.

Fig. 28. La resta de "binomios" a l'obra de Pérez de Moya. El primer càlcul, començant per l'esquerra, correspon a la resta de $10 + \sqrt{18}$ menys $5 + \sqrt{2}$. Per trobar el resultat, $5 + \sqrt{8}$, utilitza que:

$$\sqrt{18} - \sqrt{2} = \sqrt{18 + 2 - 2\sqrt{36}} = \sqrt{8}$$

(p. 265 de l'edició de 1590).

la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$, $ax^6 + bx^5 + cx^4 = 0$, etc. El nostre autor, com tots els de l'època, sempre ignora les solucions nul·les. Aquest capítol acaba explicant com es pot aplicar el que ha estat dit anteriorment a equacions de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $ax^6 + bx^3 + c = 0$, etc. Poc abans de concloure aquesta part dedicada a l'àlgebra, es parla dels problemes que exigeixen més d'una incògnita, sent introduïda "l.q", de "quantidad", per a la resolució dels mateixos.

La vuitena part de l'obra "Trata de algunos caracteres de cuentas, monedas, y pesos antiguos, juntamente con unas reglas para sacar las fiestas que dicen movibles" (f. 178v.). D'un dels seus capítols, el XXX, dedicat al calendari i al temps, no volem deixar de donar dues cites, malgrat que s'aparten del nostre tema. Al foli 188 s'hi diu: "contando desde la creación del mundo, hasta el año 1588 han pasado (segun opinión de Eusebio) 6.787 años.", quantitat que l'autor dóna per bona. Una mica més endavant apareix la següent relació d'unitats horàries: "Momento es la dezima parte del punto, o quarentena parte de hora. Uncia, o minuto, es una dezima parte del momento. Atome es $\frac{1}{43}$ de la uncia, y es lo que no recibe division, asi como el punto en la linea" (f. 191r.; el subratllat és nostre).

El "Libro nono", l'última part de l'obra, conté un diàleg entre dos estudiants, Antimaco i Sofronio, defensant l'un la importància de saber aritmètica, i argumentant l'altre que "no ay ninguno que no sepa contar, teniendo dineros".

Pedro Núñez (1502-1578).

El portuguès Pedro Núñez és l'única figura de talla present en el mediocore context que hem dibuixat. Després d'estudiar Filosofia i Medicina a Lisboa, fou anomenat, el 1529, Cosmògraf reial a la cort portuguesa. Professor de matemàtiques a Salamanca durant 6 anys, i després a Coimbra des del 1544 al 1561, aquí tingué com a deixeble a C. Clavius, el que després seria matemàtic famós i personatge decisiu en la reforma gregoriana del calendari. Núñez es va ocupar del problema del crepuscle mínim; segons Sánchez Pérez, "En ella [en l'obra *De crepusculis*, Lisboa, 1542] resuelve el problema del crepúsculo mínimo presentado por Bernouilli dos siglos después, y en la misma obra aparece propuesto el artificio del *nonius*, ..." (p. 215). Totes les obres de Núñez, llevat d'un parell que tot seguit comentarem, van ser publicades en llatí, l'autor sent anomenat aleshores Petrus Nonius. D'aquí el nom de l'aparell de mesura del qual Núñez va donar la idea essencial.

La tercera contribució important del portuguès a la ciència són les loxodromes. De les precises i acurades referències que dóna Ernst Crone, situant amb exactitud l'obra de Stevin, extraurem una àmplia cita que explica prou bé l'origen d'aquestes corbes i la contribució del cosmògraf portuguès:

"En resposta a qüestions que havien sorgit de la pràctica de la navegació, Pedro Nunes (...) va procedir a estudiar, el 1534, la línia de la superfície terrestre que és descrita per vaixells que segueixen un rumb constant, (...). Dibuixant línies així sobre un globus, va aconseguir determinar llur forma. Trobà que eren de característiques complicades. Pocs anys més tard, en el seu *Tratado em defensam da carta de marear* de 1537, va donar una definició i descripció d'aquestes línies, que anomenà *linhas dos rumos*. En la p. 143 afirma: "Les línies de rumb no són cercles, sinó corbes irregulars que van fent angles iguals amb tots els meridians pels quals passen". En aquest tractat l'autor subratlla la diferència entre navegar sobre aquesta línia i fer-ho sobre un cercle màxim. D'entrada, Nunes va pensar que aquestes línies es trobaven en el pol, però més tard es va desdir d'aquesta afirmació." (Stevin, vol. III, p. 491).

Núñez demostrava, particularment, que la distància mínima entre dos punts corresponia al cercle màxim, i no a la corba loxodròmica. Va desenvolupar la qüestió el 1566, publicant en llatí una versió ampliada del *Tratado em defensam...* En ella descrivia el *quadrante esferico flexivel*, un estri que permetia dibuixar loxodromes sobre un globus. Mercator (1512-1594), el cartògraf i constructor de globus terraquis, mai no hauria pogut idear la projecció que porta el seu nom —la que transforma loxodromes en rectes—, sense els treballs previs de Núñez. Per aquesta i altres contribucions, en particular al problema de la determinació de la longitud en alta mar, l'autor portuguès és considerat el fundador de la navegació científica.

Allò que més directament ens interessa de la seva producció, pel tema i per la vinculació a la història espanyola, és el *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (Amberes, 1567). El llibre s'obre amb una dedicatòria de l'autor al Cardenal-Infante D. Enrique, en portuguès i datada el 1564. Explica en ella que l'obra estava escrita des de feia 30 anys —dada acceptada per tots els historiadors— i que, encara que l'original estava en portuguès, "considerando que ho bem quanto mais cômum & universal, tanto he mais excellente, & porque a lingoa Castelhana he mais cômum em toda Espanha que a nosa, por esta causa aquis trasladar em lingoa Castelhana, ..." (f. aiii r.).

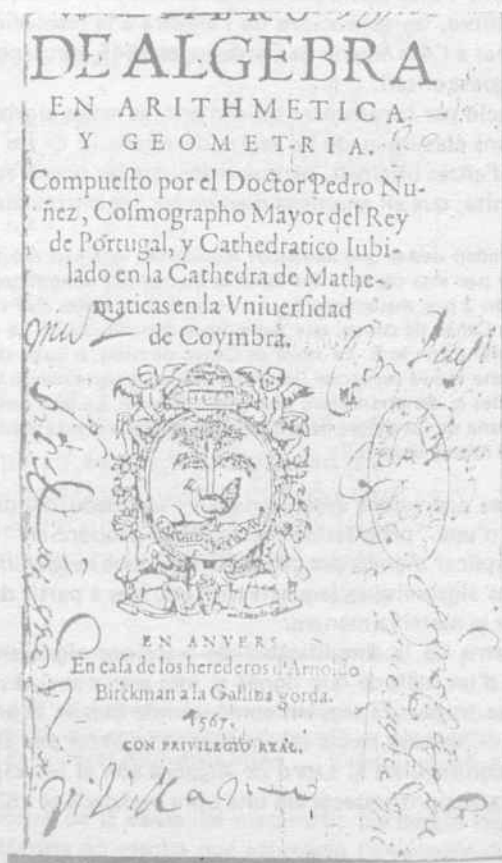


Fig. 29. Primera pàgina del *Libro de Algebra de Pedro Núñez* (Amberes, 1567). Exemplar de la Biblioteca Menéndez Pelayo de Santander.

Des del punt de vista dels continguts, el *Libro de Algebra* s'havia quedat antiquat en la data de la seva publicació, però des del punt de vista de l'orientació i de la metodologia, i per la manera de tractar punts delicats del nou saber algebraic, l'obra s'integra perfectament dins del context, conceptualment molt més desenvolupat, propi de l'últim terç del segle XVI. Tant és així que Stevin, el gran algebrista del segle junt amb Vieta, cita Núñez com un dels seus predecessors en la teoria d'equacions al costat de Cardano, Stifel i Bombelli (Stevin, vol. IIB, p. 474).

El *Libro de Algebra* es divideix en tres parts. La primera és dedicada a les equacions de 1^{er} i 2^{on} grau. La segona se subdivideix en tres altres parts: una dedicada a les operacions amb polinomis i fraccions algebraiques, una altra als radicals, i la tercera a les proporcions. L'última i tercera part principal de l'obra és dedicada als problemes; és la més extensa, omplint els folis 123 a 323 dels 341 que té l'obra. Una "Carta a los Lectores, la qual es censura de la Algebra de Nicolao Tartalla, ...", redactada possiblement al moment de la publicació, posa el punt final.

Un dels aspectes que reflecteix la vàlua matemàtica de Núñez és la seva concepció de l'àlgebra. Ja hem dit que a l'època en què va escriure el llibre, a començaments dels anys 30, l'àlgebra encara no tenia una entitat pròpia, apareixent merament com a un apèndix de l'aritmètica. La seva obra, en canvi, li atorga aquesta entitat, desenvolupant una teoria de les equacions i una teoria de les operacions polinòmiques, i situant clarament a part, al final del llibre, les aplicacions de l'àlgebra a la resolució de problemes. Ja hem vist que calgué esperar a l'*Ars Magna* de Cardano, el 1545, per trobar la primera obra impresa elaborada amb aquest criteri.

En la seva preocupació per fonamentar sòlidament les regles algebraiques, Pedro Núñez dona les demostracions clàssiques de les regles de resolució de les equacions de 1^{er} i 2^{on} grau, però n'afegeix d'altres originals, perquè troba que les primeres són poc rigoroses. Les potències de la incògnita, que ell anomena *dignidades*, les introdueix així (f. 24r. i v.):

"La primera cantidad destas que llamamos dignidades, que assi van ordenadas en proporcion, es la Cosa, y por essa causa le fue dada la unidad por denominación. La segunda es el Censo, al qual cupo 2 por denominación. La tercera es el Cubo que tiene 3 por denominación. La quarta es Censo de censo, que tiene 4 por denominación. La quinta se llama relato primo, cuya denominación es 5. La sexta es Censo de cubo, o Cubo de censo, y su denominación es 6. Por este modo proceden los Arithmeticos, y van criando las otras dignidades, y tiene cada una dellas la denominación, que la orden le da. La qual nos dize quantas proporciones tiene cada una de las dichas cantidades comparada con la unidad, de aquellas que la Cosa guarda con la misma unidad."

Les propietats de les operacions amb *dignidades* són deduïdes pas a pas i amb molta cura de les propietats d'una "progression de continua proporcion". Així demostra, en particular, que per multiplicar *dignidades* cal sumar les *denominaciones*. Les operacions amb polinomis i fraccions algebraiques (aquestes introduïdes a partir de la divisió de polinomis) són justificades de la mateixa manera.

A partir del problema de la simplificació de fraccions algebraiques, Núñez es va preocupar per la recerca d'un mètode que donés el més gran comú divisor de dos polinomis, mètode que ell no va trobar. El següent comentari de Stevin, el primer que va veure, el 1585, que l'algorisme d'Euclides podia ser igualment utilitzat per als polinomis, deixa clar que les temptatives contingudes al *Libro de Algebra* són el principal antecedent que va tenir, i fa veure fins a quin punt aquesta era una obra avançada el 1530:

"Petrus Nonius, al començament de la tercera part de la seva Àlgebra, estimava que llavors aquest problema [el de la determinació del m.c.d.] no estava inventat per regla general, per

Fig. 30. Un exemple de divisió de polinomis al Libro de Algebra de Nuñez (p. 32r).

$\frac{1}{2}$ de cosa p. 17. y restaran $1\frac{1}{2}$ los quales ya no se pueden partir, y nombraríe an por quebrado. De suerte que partida la dicha suma, la qual es doce cubos p. 18. centos, p. 27. cosas, p. el numero 17. por el partidor. 4. cosas, p. 3. lo que viene en la particion es .3. centos p. 2. co. y $\frac{1}{4}$ de cosa p. $5\frac{1}{2}$. p. $1\frac{1}{2}$. partidor. 4. co. p. 3. como por la obra parece, que aquy juntamos para mas facil doctrina.

$$\begin{array}{r}
 \text{Partidor. } 4. \text{ co. } \bar{p}. 3. \quad \left| \begin{array}{l} 12. \text{ cu. } \bar{p}. 18. \text{ ce. } \bar{p}. 27. \text{ co. } \bar{p}. 17. \\ 12. \text{ cu. } \bar{p}. 9. \text{ ce.} \\ \hline 9. \text{ ce. } \bar{p}. 27. \text{ co. } \bar{p}. 17. \\ 9. \text{ ce. } \bar{p}. 6. \text{ co. } \frac{1}{4}. \\ \hline 20. \text{ co. } \frac{1}{4} \bar{p}. 17. \\ 20. \text{ co. } \frac{1}{4} \bar{p}. 15 \frac{1}{2}. \\ \hline 1 \frac{1}{2}. \end{array} \right. \\
 3. \text{ ce. } \bar{p}. 2. \text{ co. } \frac{1}{4}. \bar{p}. 5 \frac{1}{2}. \bar{p}. 1 \frac{1}{2}. \\
 \text{par. } 4. \text{ co. } \bar{p}. 3.
 \end{array}$$

La prueva fera que multiplicando, 3. ce. p. 2. co. $\frac{1}{4}$ p. $5\frac{1}{2}$. p. $1\frac{1}{2}$. partidor. 4. co. p. 3. por el partidor haremos la suma principal.

$$\begin{array}{r}
 3. \text{ ce. } \bar{p}. 2. \text{ co. } \frac{1}{4}. \bar{p}. 5 \frac{1}{2}. \\
 4. \text{ co. } \bar{p}. 3. \\
 \hline 12. \text{ cu. } \bar{p}. 9. \text{ ce. } \bar{p}. 20. \text{ co. } \frac{1}{4}. \\
 9. \text{ ce. } \bar{p}. 6. \text{ co. } \frac{1}{4}. \bar{p}. 15 \frac{1}{2}. \\
 \hline 1 \frac{1}{2}. \\
 12. \text{ cu. } \bar{p}. 18. \text{ ce. } \bar{p}. 27. \text{ co. } \bar{p}. 17.
 \end{array}$$

Y acontesce muchas vezes, q̄ aun q̄ en la suma que se ha de partir, aya alguna dignidad mayor q̄ otra dignidad del partidor, con todo esso no se puede hazer particion por el modo de los enteros, assi como agora diximos, que las particio-

la qual cosa ell en descrivia alguna manera per tempteig. Nosaltres descriurem la seva legítima construcció, que será semblant a l'operació de la invenció de la més gran comuna mesura [el m.c.d.] de nombres Aritméticos entiers ..." (Stevin, vol. IIB, p. 577).

Una altra mostra de la vàlua del matemàtic portuguès rau en la consciència clara i explícita dels problemes no resolts que afectaven l'ampliació del concepte de nombre. Ja a la primera pàgina del llibre adverteix que "Numero en esta Arte se dize qualquiera quan-

tividad (...). Como quien dixiese 8, 9, 10, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{3}$, Raiz de 8, (...) Raiz de $8\frac{1}{4}$ '' (el subratllat és nostre). Quan comença la part dedicada als radicals, i ha d'introduir el concepte d'arrel quadrada, després d'assenyalar que no tots els enters tenen arrel quadrada entera, afegeix "Y por nos fue demonstrado en otra parte que el numero que no tiene raiz perfecta, y puntual, que sea numero, no la podra tener con quebrado, tomamos agora numero en su verdadero ser, que es colection de unidades (...). Por lo qual quando a numero no quadrado communmente assinamos por raiz numero con quebrado, essa tal raiz no puede ser perfecta y puntual, mas es propinqua. (...) y la diferencia es un poco mas, o un poco menos. De suerte que siendo por si misma multiplicada, hara el numero cuya raiz buscavamos, no precisamente, mas sera tan chica la diferencia, que para la practica de lo que se trata bien se puede tomar por raiz, y teniendo aun en esso escrupulo poderemos tomar otra mas propinca entre los terminos de mas y de menos. Pero aun que el numero no quadrado considerado en su actual y verdadero ser, el qual consiste en unidades de cosas separadas o discontinuas, carezca de perfecta raiz quadrada, como avemos dicho, considerandolo pero como continuo, en el qual esta en potencia todo numero, tera perfecta raiz quadrada." (f. 43v.-44r.).

Posa com exemple un quadrat que mesuri 6 "pies quadrados". El seu costat, diu, és mitjana proporcional entre una línia que mesuri 6 peus de llargada i una altra que mesuri un peu. "A este lado quadrado que impropriadamente se dize raiz, llaman communmente los Arithmeticos raiz sorda de 6. La razon del nombre deve ser, porque se puede dar en linea y mostrar a la vista, pero no se puede oyr lo que representa, y por esso la llaman sorda" (f. 44r.).

Al *Libro de Algebra* es proposa una notació interessant per a les arrels, malgrat que el 1567 ja no tenia virtualment possibilitats de triomfar sobre l'alemanya. Les arrels quadrades, cúbiques, quartes, ... són escrites així: 2R, 3R, 4R, 5R, ... El gran problema de la notació dels radicals (amb els símbols italians o amb els alemanys) sempre va ser la falta del parèntesi, és a dir, la manera de distingir *arrel de 3 més arrel de 5*, d'*arrel de (3 més arrel de 5)*. Un dels artificis més comuns va ser la "v" d'"universalis". Com diu Núñez

(f. 45v.): "R.v.R.9.ṗ.22 [$\sqrt{\sqrt{9} + 22}$] cuyo valor sera 5 porque R.9 es 3 que junto con 22 hazen 25 cuya raiz es 5". Els problemes venien quan calia distingir $\sqrt{\sqrt{5} + 3} + \sqrt{2}$ de $\sqrt{\sqrt{5} + 3 + \sqrt{2}}$. L'artifici que proposa Núñez l'explicarem amb el mateix exemple que ell utilitza. L'expressió L.R.9ṗ.R.4.ṗ.R.v.11.ṗ.R.25, a causa de la "L" del començament, que "liga" totes les arrels, significa $\sqrt{9} + \sqrt{4} + \sqrt{11} + \sqrt{25}$. En canvi "R.v.11.ṗ.R.25.ṗ.L.R.9.ṗ.R.4" ja nos haria otro sentido, porque parece que la palabra R.v. puesta en el principio alcanza todo, (...) y su valor sera raiz de 21" (f. 46r.), és a dir que l'expressió citada significa $\sqrt{11 + \sqrt{25} + \sqrt{9} + \sqrt{4}}$.

Les operacions amb radicals són tractades amb la cura que ja hem esmentat pel que toca a les demostracions i justificacions. Totes elles acaben —o comencen— amb alguna proposició dels *Elements* d'Euclides, especialment amb les referents a les proporcions, que és allò a què Núñez sempre refereix les quantitats que maneja. Aquesta és la raó, diu explícitament, de dedicar tota una part de l'obra a reescriure la teoria de proporcions (f. 66r.). Particularment interessant per a comprendre les limitacions del marc teòric arcaic en què es movia l'àlgebra, és el següent tractament d'una identitat algebraica. Després d'ensenyar com es poden racionalitzar denominadors del tipus $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ i $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ (però ell sempre maneja nombres concrets i positius), per

acabar, s'enfronta amb la racionalització de $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}$ (f. 64r.-65v.). Ell explica que cal multiplicar numerador i denominador per $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}$, i que a sota quedarà $5 + 3 = 8$. Núñez tradueix al llenguatge de mitjans proporcionals els termes $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{15}$ i $\sqrt[3]{9}$, per poder demostrar que els productes creuats d'ells per $\sqrt[3]{5}$ i $\sqrt[3]{3}$ s'eliminaran entre si *necessàriament*, és a dir, independentment que els nombres en joc siguin 5 i 3. En absència del llenguatge $\sqrt[3]{5^2}$, $\sqrt[3]{3 \cdot 5}$, etc., és notable que aquest recurs fos, si no l'únic, sí el que Núñez va trobar més adient per a establir la identitat.

A propòsit hem deixat per al final un dels detalls més interessants que hom troba al

Libro de Algebra. Núñez es proposa racionalitzar $\frac{\sqrt{4 + \sqrt{25}}}{\sqrt{1 + \sqrt{9}}}$ (f. 61v.; utilitzarem els

símbols moderns per agilitzar la transcripció), i multiplica a dalt i a baix per $\sqrt{1 - \sqrt{9}}$. Al denominador li apareix $\sqrt{-8}$, però no en fa cap comentari, i continua operant:

$$\frac{\sqrt{4 + \sqrt{25}} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{9}}}{\sqrt{1 + \sqrt{9}} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{9}}} = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{25}} - \sqrt{144 - \sqrt{225}}}{\sqrt{-8}} =$$

$\sqrt{-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{25}{64}} + \sqrt{2\frac{16}{64}} + \sqrt{3\frac{33}{64}}$. Un cop acabada la racionalització, fa observar que el quocient que havia proposat conté "numeros quadrados", i es pot calcular efectiva-

ment: $\frac{\sqrt{4 + \sqrt{25}}}{\sqrt{1 + \sqrt{9}}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$, i que el mateix resulta si s'opera a

$$\frac{\sqrt{4 + \sqrt{25}} - \sqrt{144 - \sqrt{225}}}{\sqrt{-8}} = \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-8}} = \sqrt{\frac{9}{4}}, \text{ o si s'opera a la última arrel. I acaba}$$

l'exemple puntualitzant:

"Pero a quien esto no quadrare, y tuviere escrupulo en el partir por R.m.8. [$\sqrt{-8}$] licencia le queda para convertir R.v.1.p.R.9 [$\sqrt{1 + \sqrt{9}}$] en esta R.v.R.9.p.1 [$\sqrt{\sqrt{9} + 1}$] que significa lo mismo, (...) y verna por partidor p.R.8. [$+ \sqrt{8}$] (...). Y quesimos obrar por aquel modo, para que sepamos, que siempre viene lo mismo. Pero mas inteligible es, la menor cantidad del reciso [de $1 - \sqrt{9}$] ser declarada por menos." (f.62v.).

El tractament anterior d'una quantitat imaginària és il·lustratiu de com aquestes quantitats no podien per menys que aparèixer en el transcurs de les cada vegada més complexes manipulacions algebraïques. No sabem si aquest tractament ens ha de fer considerar Núñez un innovador. Possiblement sí, tota vegada que ell i Cardano són dels pocs que s'atreveixen a mencionar les quantitats imaginàries. En qualsevol cas, és interessant subratllar el paral·lelisme entre les mencions que aquests autors en fan, i, molt particularment, el fet que, en tots dos, la conservació de les regles algebraïques formals, fins i tot quan deixen de tenir el sentit que habitualment els donem, sigui allò que fa manejables aquestes quantitats. També és interessant, però, que en absència d'un bon *referent*, d'un model al qual aplicar aquestes quantitats, les mencions no ultrapassin el nivell de la constatació d'uns resultats curiosos i sorprenents.

II

Consideracions sobre l'origen d'alguns conceptes aritmètics i algebraics

ADVERTÈNCIA

És sabut que la lògica dels processos històrics coincideix rarament amb la lògica que ordena els fruits d'aquests processos dins d'esquemes euclidis. És un fet, pel que fa a la història de les matemàtiques, que s'expressa ingènuament dient que el desenvolupament històric *no és lògic*. Són dues les oposicions que hi ha al darrera d'aquesta confrontació entre la història i la lògica. D'una banda, la que deriva del fet que la seqüència de resultats pròpia de la seva estructuració axiomàtico-deductiva és independent de la seqüència temporal. D'una altra, que aquí ens interessa específicament la que sorgeix de l'anàlisi del procés de formació de teories a la llum del *nostre* sentit comú; anàlisi en què les etapes d'aquest procés resulten difícilment comprensibles i explicables des de la perspectiva que dona el procés acabat.

La lògica pròpia, real, del procés de constitució de l'àlgebra simbòlica, com la de qualsevol altra doctrina, s'articula sobre motivacions i condicionaments de dues classes. Els que poden ser més fàcilment identificats i estudiats són els que depenen del context social on és elaborada la doctrina. Aquí utilitzem *context social* en un sentit ampli, referint-nos a preocupacions, necessitats, suggerències,... que tenen a veure amb les condicions socio-econòmiques, el clima cultural i ideològic, el nivell tècnic i el grau de desenvolupament d'altres sabers teòrics. En capítols precedents hem precisat fins on hem pogut els factors d'aquesta mena presents en la gènesi de l'àlgebra simbòlica. Però és evident que aquests factors no esgoten l'autonomia de l'elaboració teòrica, que no són, per dir-ho amb una imatge biològica, sinó una mena de matriu que condiciona la constitució i fa possible el desenvolupament del nou sistema conceptual. Les motivacions i condicionaments que constitueixen aquest substrat els podem anomenar *externs*. Molt més difícils d'aïllar i de descriure són els condicionaments que provenen directament dels conceptes en joc i de llurs relacions, i que fan que la constitució o el desenvolupament d'una teoria emprengui un camí, o camins, i no pas d'altres. Són aquests factors *interns* els responsables dels diferents graus de claredat o incomprensibilitat, d'evidència o de dificultat amb què ens apareixen els conceptes, en si mateixos i en llurs interrelacions.

Arribar a explicar completament com es va constituir l'àlgebra simbòlica cau del tot fora del nostre abast. Això no obstant, després d'escollir quatre aspectes que hem trobat prou significatius, hem gosat emprendre'n l'anàlisi amb la pretensió d'aconseguir, en primera aproximació si més no, un coneixement més profund i acurat de la gènesi de l'àlgebra simbòlica. Som conscients que el nostre intent d'interpretació de l'evolució del concepte de nombre, de l'aparició dels negatius, de l'elaboració dels primers símbols algebràics, i de l'evolució del concepte d'equació polinòmica, que són els quatre temes que analitzarem, ens conduirà a resultats provisionals i incomplets. Fins i tot és possible que algunes conclusions hagin de ser rectificades des de perspectives obertes per l'estudi de la darrera fase de constitució de l'àlgebra simbòlica, la de Vieta i Descartes. Però hem preferit córrer el risc d'equivocar-nos a deixar d'emprendre un camí que creiem fructífer.

CAPÍTOL 9:

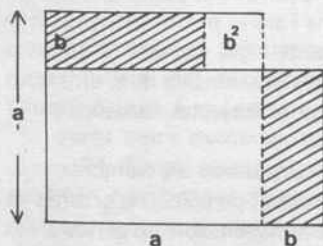
L'EVOLUCIÓ DEL CONCEPTE DE NOMBRE

La concepció grega dels nombres està íntimament vinculada a la geometria. És un problema de molta envergadura esbrinar quines foren les causes que propiciaren un desenvolupament de l'aritmètica, circumscrita bàsicament als enters, molt per sota de les conquestes realitzades al camp de la geometria. Sia perquè la perfecció del raonament lògic desenvolupat pels grecs trobés a la geometria el seu millor aliat o model, sia perquè els grecs no van disposar d'un sistema eficaç de denominació dels nombres, un sistema que facilités algorismes senzills per a resoldre els problemes del còmput, el cas és que l'aritmètica del càlcul restà endarrerida en relació a l'avenç global efectuat en matemàtiques.

Els grecs coneixien algunes relacions de caire algebraic entre certes operacions numèriques: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b); \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Aquest coneixement naixia directament de la pràctica empírica i de la constatació geomètrica, però en cap cas no eren fruit d'un estudi algebraic realitzat dins del camp numèric. Així és que les demostracions de les identitats anteriors eren de caire similar a les figures aquí reproduïdes:



a	ac	ab	a ²
b	bc	b ²	ab
c	c ²	bc	ac
	c	b	a

El model de demostració, per a totes les identitats d'aquest tipus, es basa en la construcció geomètrica, a l'igual que la demostració del Teorema de Pitàgoras inclosa als *Elements* d'Euclides. És precisament aquest model de demostració el que més gran influència exercirà, al llarg dels anys, entre les diferents civilitzacions.

Resulta obvi en aquest context que les primeres potències d'un nombre vinguessin definides pels mots "quadrat" i "cub", associades a la figura geomètrica corresponent, i que les potències superiors es derivessin, per composició, d'aquestes.

Fins a l'última etapa del període grec no apareixerà la figura de Diofant, extraordinàriament brillant, però aïllada dins del marc d'elaboració de la matemàtica grega; ell s'encarregarà d'edificar una nova aritmètica, que apunta directament a l'aparició de recursos algebraics o tècniques aritmètiques que escapen al tractament geomètric. De fet, Diofant subministrarà a la història futura quelcom més que un llibre, ja que el seu llegat més preciós serà un material de problemes aritmètics a resoldre que alimentarà la capacitat creativa dels matemàtics fins als temps de Fermat.

L'excepcional figura de Diofant requeriria una anàlisi més acurada, per tal de veure fins a quin punt la seva obra representa una ruptura metodològica amb l'etapa anterior. Hi ha certes dades que fan decantar-se per la resposta afirmativa. En efecte, exposarem algunes característiques específiques de la metodologia que trobem als sis llibres d'aritmètica.

1) L'obra no es presenta des d'un punt de vista de proposicions ordenades deductivament. De fet no hi ha cap enunciat "teòric", sinó que es presenten unes llistes graduals de problemes de caràcter algebraic, i a continuació la seva solució.

2) El fil conductor del raonament no és basa ja en la construcció geomètrica (l'obra no conté cap dibuix, exceptuant el llibre setè, de les figures poligonals); contràriament, pren cos definitiu l'entitat abstracte del nombre "desconegut" (incògnita), que Diofant anomena "arithmos", i amb el qual opera de la mateixa forma que si es tractés d'un nombre qualsevol conegut.

3) La notació simbòlica comença a prendre certa existència, encara que més com a taquigrafia, que no pas com a automatisme de càlcul, però configurant de forma clara el que més endavant s'entendria per una equació (la simbologia de Diofant és descrita a la p. 160).

Diofant rebutja sistemàticament qualsevol solució numèrica d'una equació si aquesta solució apareix en forma de radical. No en dóna cap explicació, sinó que simplement ho adopta com a un fet. El seu camp numèric és limita exclusivament a enters positius i a fraccions positives. Potser no estaria de més dir aquí que el paper que juguen els nombres trencats és similar al dels enters, sent així que uns i altres poden interpretar-se com a quantitats exactes d'una determinada unitat de mesura, sigui aquesta la unitat o una fracció de la mateixa. No seria aquesta una de les primeres ocasions en què, dins d'un llibre de matemàtiques, els enters i els trencats apareixen com objectes funcionalment equivalents (que poden desempenyar una mateixa funció)?

En contrast amb la forma en que els grecs tracten i consideren els nombres, trobem que els àrabs se serveixen dels nombres com a eina fonamental de càlcul. L'aritmètica del còmput experimentarà un avenç sense precedents, fent-se indispensable en certes àrees de la vida social àrab. En efecte, dins de la civilització àrab apareix l'excepcional figura de l'aritmètic professional (el faradís) encarregat d'assegurar la distribució de l'herència d'un difunt, segons el nombre i qualitat dels seus descendents i ascendents. La jurisprudència musulmana, derivada de la interpretació de l'Alcorà, estipula uns repartiments de tipus proporcional, però molt complicats, segons els vincles del familiar mort. No és d'estranyar que els serveis d'aquests primers matemàtics professionals abonessin el terreny

del desenvolupament estrictament aritmètic, de manera que van cristal·litzar diverses metodologies per a la resolució de problemes, des de la regla de tres fins als mètodes d'una falsa posició i dues falses posicions.

Per altra banda, cal considerar l'extensió que assolí el comerç arreu de l'Imperi àrab, amb la consegüent exigència d'una bona comptabilitat mercantil, que trobava en el sistema decimal la forma idònia per a realitzar les operacions aritmètiques elementals que intervenen en tota transacció comercial.

Aquest tipus de condicionaments socials i l'oportunitat d'haver adoptat el sistema decimal creat pels hindús (òptim per a abordar els problemes aritmètics abans esmentats) féu que el centre de gravetat es traslladés de la concepció del nombre al problema del còmput. La recerca dels algorismes més apropiats per a realitzar les distintes operacions numèriques donà aviat els seus primers fruits. Tanmateix, les aritmètiques àrabs presentaven, si bé no de forma explícita, una classificació de les diferents categories de nombres en funció dels algorismes de càlcul de cada una d'elles. D'aquesta forma tenien un tractament específic les següents classes de nombres:

Els nombres enters positius

Els nombres trencats

Els nombres mixtes (enters amb part trencada)

Els nombres radicals

Els nombres compostats de sumes radicals

Si la preocupació per definir cada classe de nombres és ben nímia, no ho és en canvi l'extensió explicativa que es dedica al seu càlcul. Les propietats de les operacions entre els nombres no mereixen cap tractament especial, tan sols se les utilitza quan convé per a calcular, sense més explicacions.

En aquest marc, i amb aquesta òptica de treball, els àrabs varen aconseguir sintetitzar d'una manera diàfana el comportament dels nombres quan aquests eren sotmesos a les diferents operacions numèriques, establint regles d'operativitat perfectament definides, com les dels signes *més* i *menys* quan hi intervenien productes. Aquestes regles no apareixien per a aprofundir dins els mecanismes de l'operativitat algebraica, sinó, primer, com a conseqüència natural de resoldre productes numèrics, com $5 - \sqrt{3}$ multiplicat per $7 - \sqrt{5}$, i després productes dins del marc de les transformacions d'equacions, com:

$$(x + 2)(x - 1) = 3; \quad x^2 + 2x - x - 2 = 3$$

Aquests tipus de regles mai no són justificades, sinó a través de la pràctica empírica.

En aquesta aritmètica operativa dels àrabs, els típics problemes de planteig troben el marc més natural de resolució, i el concepte de proporcionalitat és àmpliament desenvolupat. Les proporcions deixen ja d'ésser raons entre segments per a convertir-se en raons entre nombres, que expressen la comparança entre els seus valors aritmètics.

El Renaixement de la matemàtica europea es nodrirà d'aquesta concepció del nombre que permet qualsevol càlcul aritmètic, i com a punt de partida inqüestionable és considerarà, per sempre més, tant els nombres enters com els trencats, com els nombres mixtes, com els radicals, cada un d'ells susceptible d'ésser operat a través del seu algorisme corresponent.

Per ser ben precisos hauríem de dir que els àrabs fan ús d'una altra classe de nombres, les *fraccions sexagesimals*, que si no hem inclòs a la classificació anterior, no és per altra raó que pel fet que gaudeixen d'un status especial; és a dir, no són exposats a les aritmètiques àrabs al costat dels altres nombres, sinó que es fan servir per a parcel·les molt

concretes de la investigació científica, com pot ser l'astronomia i les taules trigonomètriques (sin $1^\circ = 1^\circ 2' 49'' 43''' 28''''$, donat per Abenyunus) al marge de la resolució de problemes aritmètics.

Alguns trets relatius als nombres trencats

És clar que els conceptes de nombres enters positius i trencats sorgeixen directament de l'activitat de mesurar, pesar, canviar una quantitat de diners d'una moneda a una altra, etc... Tant el significat dels enters com el dels trencats és intuïtiu, en la mesura que són imprescindibles per a comptar.

Anem a examinar amb una mica de detall quina era la concepció que es tenia dels nombres trencats, partint de la definició que es troba a l'aritmètica mercantil de Francesc de Santcliment i la que en dóna Chuquet al seu *Triparty*.

Transcrivim la manera d'introduir i definir els trencats de Francesc de Santcliment a l'obra *Summa de la art de arismetica*:

"Per saber i tenir coneixença del nombre trencat, el qual és necessari moltes vegades per fer qüestions de mercaderia i per altres coses".

...
"I has de saber que en tot nombre trencat hi ha dos nombres, un escrit a baix i l'altre a dalt, amb una barra enmig. I el de dalt es diu numerador, car compta les parts trencades. I el de baix es diu denominador, que denomina i mostra les parts trencades quines són, és a dir si són meitats o terços o quarts o quintos o d'altres parts, segons el denominador que les denomina".

La manera de fer intel·ligibles els trencats, tal com la veiem al paràgraf anterior, no és la d'una definició formalment ben feta, en el sentit de definir tots els termes que hi intervenen, sinó que més aviat parteix de la idea d'inculcar el seu significat més material, o sigui la forma de servir-se d'uns nombres per comptar parts trencades. La definició no és bona, però la idea intuïtiva és molt clara, i probablement la més útil des del punt de vista d'extreure els mecanismes d'operativitat per a tals nombres. L'essència del nombre trencat queda reduïda a la informació de la quantitat de vegades en què dividim la unitat, i la quantitat d'aquestes parts que agafem.

Exposarem a continuació la definició continguda al *Triparty* de Chuquet:

"Significat dels nombres trencats.

Nombre trencat es una part o més d'1, on hi ha dos nombres, un a dalt i l'altre a baix, amb una línia entre els dos, com tres quarts, que s'ha de posar així $\frac{3}{4}$, on 3, que és el nombre de dalt, es diu numerador, i 4, que és el de sota, es diu denominador, i convé sempre que el numerador sigui més petit que el denominador, ja que si fos igual o més gran, representaria 1 enter i encara més, no corresponent a la definició abans dita. I convé que els nombres enters no tinguin denominador, i tal vegada per conveniència, i per a emprar Regles més generals, en tractar-los amb trencats se'ls pot donar, a tots els nombres enters, 1 per denominador, i per això els nombres enters seran denominats per 1, així com els trencats seran denominats per 2, 3, 4 i per tots els altres nombres, com $\frac{12}{1}$, $\frac{13}{1}$, $\frac{20}{1}$, ... per als enters i $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, ... per als trencats".

Podem aquí també observar que aquesta forma de definir els nombres trencats està íntimament vinculada a la idea del valor numèric. Els trencats sols apareixen per completar la mesura entera, mai per ampliar els nombres enters en el sentit que aquests es puguin

considerar com un cas particular dels trencats. Pels matemàtics que elaboraven les aritmètiques mercantils havia de ser molt clar que era més entenedora la quantitat de 44 m. de tela i $2/13$ de m., que no pas el que és la mateixa quantitat, però expressada en la forma de $574/13$ m. de tela. La primera forma té un contingut informatiu directe molt més gran que la segona expressió, que no ens dóna directament una idea intuïtiva de la llargada que representa.

És, en conseqüència, aquesta òptica de "valor numèric" i no de quantitat abstracta la que preval en el tractament dels trencats, i així, tant les dades inicials de tot problema com els resultats finals eren expressats especificant la part entera del nombre i a continuació la part trencada, sense cap signe que els separés: $44 \frac{2}{3}$. I si s'introdueixen

nombres del tipus a/b , $a > b$, en el transcurs de la resolució d'un problema no és per altre motiu, com expressa clarament Chuquet, que per facilitar les regles algorísmiques establertes per als trencats.

Hem dit abans que fer recaure la definició dels trencats en allò que aquests signifiquen facilitava probablement la recerca dels algorismes operatius, la qual cosa es pot posar de manifest en examinar la forma de dividir els trencats. Santcliment procedeix a partir d'un raonament que podríem explicitar així:

La divisió aritmètica de dos trencats correspon a esbrinar quantes vegades un d'ells és més gran que l'altre, i per poder-los comparar cal reduir-los a una mateixa sub-unitat de mesura, o sigui a un comú denominador; feta tal cosa n'hi haurà prou de comparar els numeradors, i en conseqüència, l'operació de dividir es reduirà a la proporció de numeradors, prèvia reducció dels dos trencats a comú denominador. Els nombrosos exemples clarifiquen de forma de procedir en concret: $3/4$ dividit per $5/6$ és equivalent a $9/12$ dividit per $10/12$, que dóna $9/10$. La manera de procedir és molt més a prop dels significats concrets dels trencats i de l'operació de dividir, que no pas l'algorisme que procedeix a dividir a partir de l'invers del producte, la qual cosa pressuposa un coneixement de les estructures operatives en un estadi molt més formal.

Alguns trets relatius als nombres radicals

Els nombres radicals són tractats pels àrabs a l'igual que els altres nombres, i en conseqüència són admissibles com a solucions dels problemes, al mateix temps que es troba la forma concreta de poder operar amb expressions radicals. Al-Hwarizmi ja exposa les regles més importants per al seu càlcul:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad K \sqrt{n} = \sqrt{K^2 n}; \quad \frac{\sqrt{n}}{K} = \sqrt{\frac{n}{K^2}}, \dots$$

Al *Triparty* de Chuquet s'exposa, per primera vegada de forma sistemàtica, una teoria completa del càlcul amb radicals: la forma de reduir dues arrels a índex comú, la manera de multiplicar i dividir dues arrels qualsevol, la forma de resoldre l'arrel d'una arrel,... són les que actualment usem. I és precisament aquesta òptica de fer tan ampli com es pugui el ventall d'operacions entre radicals, la que el condueix a cercar la simbologia més apropiada per a indicar les arrels (ens remetem a l'exposició que es fa d'aquesta simbologia al capítol 5 dedicat a Chuquet i a l'11, dedicat a les notacions).

Comentarem aquí un aspecte del càlcul amb radicals que, si més no, és sorprenent des de l'òptica moderna. Tant els àrabs com Chuquet es preocupen de cercar la forma de

sumar o restar dues arrels, i ho fan de la següent manera:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm \sqrt{4ab}}$$

Chuquet fins i tot exposa una altra forma de fer-ho que és aplicable a arrels d'índex qualsevol (veure la part d'història, el capítol dedicat a Chuquet). Creiem que la insistència a aplicar aquest mètode, així com la via de la seva generalització, apareix avui dia com un fet un tan arbitrari o insòlit que mereix algun comentari.

Examinarem alguns dels exemples que trobem:

$$(1) \quad \sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2 + 18 + \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 18}} = \sqrt{2 + 18 + \sqrt{144}} = \sqrt{32}$$

$$(2) \quad \sqrt{2} + \sqrt{10} = \sqrt{2 + 10 + \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 10}} = \sqrt{2 + 10 + \sqrt{80}} = \sqrt{12 + \sqrt{80}}$$

Al primer cas la "regla" sembla justificada, ja que la suma de dues arrels ha conduït a una altra arrel única, i llavors, des del punt de vista del càlcul efectiu per aproximació de trencats, resulta més fàcil de "calcular" $\sqrt{32}$ que no $\sqrt{2}$ i després $\sqrt{18}$. Convé dir que en cap obra d'aquestes no s'utilitza treure factors fora de l'arrel i operar d'aquesta forma: $\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$. I que no apliquessin la regla de treure factors no vol dir que no la coneguessin, sinó que només trobaven convenient aplicar-la en el sentit invers, d'entrar factors dins de l'arrel.

La justificació d'emprar la regla al segon cas que hem exposar no és tan clara, ja que els inconvenients del càlcul efectiu de $\sqrt{2} + \sqrt{10}$ són semblants als del càlcul de $\sqrt{12 + \sqrt{80}}$. Creiem que la insistència a fer reiteradament aquest tipus d'operació pot obeir al següent:

Les operacions de sumar, restar, multiplicar i dividir entre nombres enters positius o trencats sempre condueixen a un resultat expressat en forma numèrica, sense deixar cap "operació indicada"; en canvi, al moment d'operar radicals això no és possible, malgrat que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ i que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, i llavors s'inventa un mètode per a "tancar" d'una o altra forma la suma i resta d'arrels. I així ja te un cert sentit dir que "l'arrel de 2 més l'arrel de 10 és l'arrel del nombre (12 més arrel de 80)". Seria el mateix argument que faria intel·ligible el perquè preferien deixar un resultat en forma de $\sqrt{32}$ que no $4\sqrt{2}$, sempre partint de la idea que és més definida l'arrel d'un nombre que no pas 4 vegades l'arrel d'un altre nombre.

Observem que el punt de vista anterior és molt diferent, encara que aparentment similar, al procés que té lloc sota una concepció moderna d'ampliació del camp numèric per a tancar una operació determinada. En efecte, la forma de procedir anteriorment exposada no amplia el camp numèric per tal de tancar una operació, sinó que busca un procediment de modificar l'operació numèrica de sumar, i obtenir al final una expressió única en forma d'arrel i equivalent a les dues arrels que volíem sumar. La forma de procedir està molt més a prop del desig de l'estudiant que, quan se li presenta la suma de $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$ i se li diu que dona $\sqrt{2} + \sqrt{5}$, es pregunta, però això quant és?, intentant cercar el resultat com a arrel d'un altre nombre, la qual cosa el deixaria completament satisfet. Desgraciadament, la temptació d'acabar-los sumant de qualsevol manera és massa gran en un primer estadi d'aprenentatge, i és molt freqüent trobar-se amb la invenció fatal $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$.

L'altre aspecte interessant a comentar dels radicals seria la qüestió relacionada amb la racionalització d'una fracció. A la pregunta de per què s'ensenya a racionalitzar i es transforma $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\frac{\sqrt{2}}{2}$, es troba la resposta òbvia de perquè és més senzill de

calcular un valor aproximat decimal prenent la segona expressió. Però a l'època que tractem es desconeixien les expressions decimals dels nombres, de manera que la motivació no podia ésser aquesta, i en canvi es racionalitzaven les fraccions. La forma de procedir era la mateixa que l'actual.

Es podria dir que a tots els llibres on apareix aquest tipus d'operació està en l'aire la idea que les operacions combinades entre diferents expressions radicals es poden conduir a la forma $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d} \pm e\sqrt{f}$, on a, b, c, d, e, f són trencats, i a arrels d'expressions d'aquest tipus. Tal qüestió no l'hem trobada en forma explícita a cap dels llibres consultats, però per la forma de procedir a tots ells s'endevina que aquest és el fil conductor de moltes de les operacions que s'hi tracten. En aquest aspecte, el nombre $\frac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$ s'entenia com una divisió indicada, i la racionalització no ho era en el sentit que més tard adquiriria, sinó que constituïa la forma concreta de realitzar la divisió per tal d'obtenir una expressió de tipus més elemental: $\frac{17}{23} + \frac{8}{23}\sqrt{2}$. La forma de procedir, i fins i tot el mètode formal per a fer-ho, no era altre que el que emprem per resoldre $\frac{a+bi}{c+di}$ dins del camp complex, per tal d'obtenir una expressió final en la forma: $A + Bi$.

L'enginy per a racionalitzar-dividir certes expressions radicals complicades va conduir al desenvolupament d'interessants relacions algebraïques, com es posa de manifest al *Cartello* (segona resposta) que Tartaglia envià a Ferrari en el famós duel entre els dos. Entre els 31 problemes que Tartaglia proposà al seu adversari n'hi ha tres (Nº 28, 29 i 30) que consisteixen a racionalitzar aquestes fraccions:

$$\frac{10}{\sqrt[5]{5} + \sqrt{3}}$$

$$\frac{10}{\sqrt[5]{5} + \sqrt[3]{3}}$$

$$\frac{10}{\sqrt[5]{5} + \sqrt[4]{3}}$$

El procediment que Ferrari segueix per a resoldre-les es basa en la identitat algebraica: $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$, d'on

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4}{a^5 + b^5} = \frac{\text{expressió radical}}{a^5 + b^5}$$

que aplicat a: $a = \sqrt[5]{5}$; $b = \sqrt{3}$ dóna lloc al denominador $5 + 9\sqrt{3}$, que ja permet racionalitzar segons el procediment conegut.

El més interessant de tot és que la identitat algebraica primera (naturalment no en lletres, sinó en les expressions radicals numèriques), ja no es justifica a partir de construccions geomètriques, com es feia gariré sempre a l'època de Ferrari, sinó que aquest recorre a l'explicació que, en efectuar el producte numèric, els termes intermedis que van apareixent es cancel·len l'un amb l'altre (segons la suma i resta de mateixes quantitats), i sols queden els nombres extrems. Pensem que aquesta explicació per a justificar la identitat és molt important, perquè permet posar de manifest de manera clara els inicis del que serien amb el temps les propietats del càlcul formal, i la seva validesa com a *eina demostrativa*.

A la figura 31 reproduïm aquest paràgraf de Ferrari perquè el lector pugui jutjar per ell mateix l'estadi concret d'elaboració matemàtica existent, on es barreja una àlgebra entre retòrica i sincopada, però on comencen a aparèixer certs recursos formals de caire elemental.

La uigesima ottaua, Anchora ue addimando che me sia partito, 10. per $\sqrt{x}$. rellata 5. piu $\sqrt{x}$. quadra, 3. cioè trouando el suo reciso come sapeti.

Per fare questa operatione, io trouo dietro a $\sqrt{x}$. quadra, 3. et $\sqrt{x}$. rellata prima 5. tre quantità con lor continue proportionali, le quali sono $\sqrt{x}$. rel. 25. partita per $\sqrt{x}$. 3. et $\sqrt{x}$. rellata 125. partita per $\sqrt{x}$. 9. et $\sqrt{x}$. rel. 625. partita per $\sqrt{x}$. 27. Dopo di ciò tutte cinque queste quantità à l'una per uia del men, et l'altra per uia del piu, di modo che facciano $\sqrt{x}$. quadra, 3. in $\sqrt{x}$. rel. prima 5. piu $\sqrt{x}$. rel. 25. partita per $\sqrt{x}$. 3. in $\sqrt{x}$. rel. 125. partita per $\sqrt{x}$. 9. piu $\sqrt{x}$. rel. 625. partita per $\sqrt{x}$. 27. et questo composito io l'addimando lo primo reciso, lo quale, a uolerlo multiplicare per $\sqrt{x}$. quadra, 3. piu $\sqrt{x}$. rel. prima 5. non accade à fare altro, che à multiplicare $\sqrt{x}$. quadra, 3. in $\sqrt{x}$. quadra, 3. et $\sqrt{x}$. rellata prima 5. in $\sqrt{x}$. rellata 625. partita per $\sqrt{x}$. 27. et questo aduiene per cioche, per causa della proportionalità tutte le altre multiplicationi se abbateno l'una l'altra. Si produce adunque di detta multiplicatione, 3. piu $\sqrt{x}$. rel. 325. partita per $\sqrt{x}$. 27. e perche necessariamente 325. ha la $\sqrt{x}$. rel. la quale e, 5. tal prodotto è equiualente a, 3. piu 5. partita per $\sqrt{x}$. 27. et questo è il medesimo con, 3. piu $\sqrt{x}$. 25. partita per $\sqrt{x}$. 27. il reciso del quale è, 3. men, $\sqrt{x}$. 25. partita per $\sqrt{x}$. 27. et questo addimando lo secondo reciso, lo quale è quello che multiplicato nel suo binomio, cioè in, 3. piu, $\sqrt{x}$. 25. partita per $\sqrt{x}$. 27. produce lo diuifore à numero il quale sarà 2. e due uinifettefimi. ch'è il proposito. Per cioche non accade à far altro che à multiplicare poi, 10. per gli antedetti due recisi, cioè prima per l'uno, et poi quelle ne uiene per l'altro, et l'ultimo auenimento si ha da diuidere per 2. e due uinifettefimi. e quello che da tal diuisione ne prouiene e la quantità cercata.

Fig. 31. La racionalització de $\frac{10}{\sqrt{3} + \sqrt{3}}$ per Ferrari. La justificació de la identitat algebraica utilitzada es troba a les línies 10-12 (p. 169, edició facsímil, Brescia, 1974).

Com a reflexió final, potser seria convenient subratllar el fet de la importància que van tenir aquestes manipulacions amb radicals, que per força havien de col·laborar favorablement al procés d'elaboració dels simbolismes algebraics i en la consolidació del càlcul formal.

Conclusions sobre l'evolució del concepte de nombre

Alguns trets interessants de l'aritmètica grega que deixaran de ser presents a l'aritmètica pròpia del Renaixement i dels primers tractats d'àlgebra europeus són els següents:

- Els nombres enters positius són *tots els nombres*.
- Els nombres interessen com a ens individuals que posseïxen propietats; l'especulació aritmètica grega se centra en aquestes propietats.

c) Les demostracions necessàries de resultats com $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, etc. tenen *exclusivament* una base geomètrica. Només en una fase tardana del desenvolupament algebraic apareixeran les demostracions formals.

A les aritmètiques del Renaixement es pot constatar un fet de la màxima importància: ja s'ha produït l'ampliació del concepte de nombre. Els enters positius han desaparegut com a marc de referència privilegiat, i es distingeix de manera natural entre nombres *enters* i nombres *amb escaig*. Tan nombre és 1, com $1 + \frac{1}{2}$, com $\sqrt{2}$, i qualsevol d'ells pot ser utilitzat a l'hora de resoldre un problema.

En aquestes obres, les propietats dels nombres ja no interessen, i la problemàtica numerològica ha estat oblidada. Aquest aspecte de la transmissió cultural, l'oblit de sabers i preocupacions, moltes vegades no és valorat adequadament. El desenvolupament de l'aritmètica en el Renaixement es va fer sense aprofitar coses valuoses que els grecs sabien, per exemple l'anomenat algorisme d'Euclides per al càlcul del màxim comú divisor. (Si bé l'enunciat clàssic, les Proporcions I i II del llibre VII dels *Elements*, no era algorímic, adaptar el resultat als algorismes del sistema de numeració decimal és una trivialitat. Per què això no es va fer és un interrogant, especialment si es pensa que el càlcul del m.c.d. i del m.c.m. havia esdevingut necessari per a les operacions entre nombres trencats). Però juntament amb els resultats rellevants d'aquell cos de doctrina, s'havien oblidat les preocupacions que l'havien inspirat i les limitacions sobre les que havia estat edificat. I possiblement aquest oblit era una condició *sine qua non* per a poder endegar la revolució aritmètica que ara estem analitzant.

Per l'autor del segle XV, els nombres i les operacions ja tenen un *significat*, que és funció del context en el qual apareixen i que cal saber utilitzar. Els nombres ja no són ens abstractes, classificats per les seves propietats en piramidals, triangulars, perfectes,... sinó que són més aviat operadors polivalents, dels quals no es dona cap definició i que, exclusivament a efectes de càlcul, es divideixen en enters, trencats, arrels no enters,...

Allò que interessa al mestre d'aritmètica del Renaixement és com utilitzar cada una d'aquestes classes de nombres per mesurar. Aquesta finalitat comuna sembla com si fos un nou principi unificador d'ens matemàtics que fins aleshores havien gaudit d'estatus, consideracions, i tractaments força diferents. Sigui com sigui, les *definicions* dels nombres naturals, de les proporcions geomètriques i de les arrels (també geomètriques) ocupen una posició completament secundària dins de l'aritmètica del Renaixement. Tan secundària, que la major part de vegades són completament ignorades, ja que fins i tot aquells autors que se n'ocupen ho fan recordant els orígens dels conceptes en qüestió, i concedint prioritat al tractament de les preocupacions aritmètiques d'àmbit pràctic-mercantil. Ens interessa subratllar que, des del punt de vista axiomàtico-deductiu, les aritmètiques del s. XV representen una ruptura amb les aritmètiques clàssico-medievals. Aquelles ens mostren, ficades dins d'un mateix sac i tractades de la mateixa manera, coses que aquestes distingien acuradament. Aquesta ruptura, també volem subratllar-ho, no va sorgir del desenvolupament d'elucubracions sobre els nombres naturals, o sobre les proporcions geomètriques, fetes respectant el marc teòric euclidi. Aquesta ruptura la van protagonitzar homes que van fer aritmètica tot oblidant la que havien fet Euclides i els seus epígons, i la van fer guiats per un context cultural i sociològic nou, aprofitant tant com van poder les possibilitats extraordinàries dels algorismes d'escriptura i càlcul que els àrabs havien transmès a Europa.

En aquesta evolució que estem descrivint cal reconèixer el paper jugat per les noves necessitats i motivacions socio-econòmiques. Ja hem parlat de la importància crei-

xent que adquiriren les tècniques bàsiques mercantils, i de la nova rellevància de la precisió en la mesura, pròpia d'una societat que coneixia un moviment expansiu de mecanització tècnica (pp. 59-60). Aquests factors són determinants en la configuració d'un marc extern que va estimular que es transformés la manera de concebre i de tractar els nombres.

Des del punt de vista de la dinàmica interna d'aquesta transformació, pensem que la revolució algorísmica associada a la introducció dels sistemes de numeració posicional va jugar un paper molt important.

Les operacions, especialment la multiplicació i la divisió, queden transformades pel fet de ser intensivament contemplades des de llur aspecte algorísmic. En particular, qüestions com ara la commutativitat del producte —que, pel fet de ser manejada aquesta operació en termes de “tantes vegades tal cosa”, havien de ser *demostrades* dins dels plantejaments clàssics— esdevenien preocupacions incomprensibles en el marc d'una aritmètica que introduïa el producte per una taula de multiplicar.

Disposar d'algorismes per a la divisió i la radicació, capaços de facilitar enormement el càlcul de valors numèrics aproximats de les proporcions numèriques i dels radicals, ha d'haver contribuït força a forjar una nova filosofia dels nombres i de llurs operacions, filosofia que hom troba en ple desenvolupament a les aritmètiques comercials del segle XV. En qualsevol cas, la possibilitat de manejar els nombres més formalment i menys geomètricament que abans no pot ser deslligada de la utilització d'un sistema de representació extraordinàriament flexible i d'un sistema de càlcul del tot autosuficient.

CAPÍTOL 10:

L'APARICIÓ DELS NOMBRES NEGATIUS

El primer coneixement històric que es té dels nombres negatius correspon a la cultura índia. Els nombres negatius eren designats posant un punt damunt del nombre. No hem tingut a les mans prou material per a estudiar en quin context foren acceptats aquests nombres, però, en qualsevol cas, aquesta primera aparició de les quantitats negatives restà aïllada, i no té importància des del punt de vista de la seva reaparició, al segle XVI, en el procés de constitució de l'àlgebra simbòlica.

Els àrabs van lograr sintetitzar d'una manera diàfana el comportament dels nombres quan aquests se sotmetien a diferents operacions barrejades, establint regles perfectament definides que actuaven com a fonament del càlcul aritmètico-algebraic. Així trobem enunciades les regles del més i el menys quan hi ha productes i divisions.

Al-Hwarizmi emprà amb soltura aquestes regles, que li permetien operar expressions radicals compostes, com:

$$(20 - \sqrt{200}) (20 + \sqrt{200}) = 400 + 20 \sqrt{200} - 20 \sqrt{200} - 200 = 200$$

Si bé es cert que hi ha un coneixement adequat del comportament de l'operació "resta", aquest saber no condueix per ell mateix a l'aparició del nombre negatiu. D'aquesta forma són rebutjades sistemàticament les solucions derivades d'una equació de segon grau quan aquestes corresponen a un nombre no positiu. Ni tan sols no es comenta la possibilitat d'una interpretació diferent; de fet, no és que el nombre negatiu apareixi i no s'accepti, es que no arriba ni a aparèixer.

El trànsit cap a l'acceptació dels nombres negatius el podem veure de forma molt clara a la *Triparty* de Nicolàs Chuquet. Analitzarem amb una mica de detall el tractament d'alguns problemes que condueixen a solucions negatives, per tal de treure'n certes conclusions.

A la pàgina 762 de l'edició d'A. Marre trobem la següent afirmació, referida a la resolució d'equacions de primer grau.

"Encara cal saber que, quan les parts d'una equació són igualades i que el partidor és menys, en aquest cas, això és senyal que tal raó és impossible".

"Exemple. Jo vull trobar un nombre tal que multiplicat per 20 i a la multiplicació sumant-hi

7, i deixat a part. I després aquest mateix nombre multiplicat per 30 i del producte restant-hi 9, el primer resultat i el segon estiguin en la proporció de 3 a 10".

"Per trobar aquest nombre poso 11^1 , que per 20 i sumant-hi 7 fan $20^1 \bar{p} 7$ d'una part; després multiplico 11^1 per 30 i en resto 9, que fan $30^1 \bar{m} 9$; d'on els $3/10$ fan $9^1 \bar{m} 2 \frac{7}{10}$, semblant a $20^1 \bar{p} 7$. Abreujant les parts, afegint $2 \frac{7}{10}$ a totes dues, tindrem $20^1 \bar{p} 9 \frac{7}{10}$ d'una part i 9^1 de l'altra. Restant 20^1 de cada part tindrem $9 \frac{7}{10}$ per nombre a partir i $\bar{m} 11^1$ per partidor. I com que el partidor és menys, això és senyal que el càlcul és impossible".

Com podem constatar en aquest fragment, és evident que Chuquet no pren en consideració una solució numèrica negativa. El fragment és extret del començament de la tercera part del llibre dedicat a la resolució d'equacions, i l'enunciat de l'exemple que posa és el corresponent a una relació entre nombres abstractes; és en aquest context on no és acceptada una solució negativa.

Altrament, al llibre d'aplicacions de les tècniques algebraiques a problemes de planteig, on les quantitats numèriques tenen significats perfectament definits, trobarem més d'un problema en què s'accepten solucions negatives. N'exposarem alguns, i el mateix comentari de Chuquet ens en donarà la interpretació.

"XXV. Un comerciant ha comprat 15 peces de drap al preu de 160 escuts, de les quals n'hi ha que costen 11 escuts la peça, i altres, 13 escuts. Quantes peces de cada preu ha comprat?"

"Resposta $\left[\begin{array}{l} 17 \text{ peces i } 1/2 \text{ del preu d'11 escuts la peça} \\ \text{i } \bar{m} 2 \text{ peces i } 1/2 \text{ del preu de 13 escuts la peça} \end{array} \right]$ "

Com podem apreciar a la resposta, les 15 peces en total estan compostes per $17 \frac{1}{2}$ d'una classe i $-2 \frac{1}{2}$ de l'altra, i Chuquet a continuació fa un aclariment d'aquest fet estrany:

"No obstant sembla, segons el sentit comú, que les raons com aquesta són impossibles. I la raó és: perquè qui parteix 160 escuts per 15 peces, surt la mitjana per peça a 10 escuts i $2/3$. Així, l'una per l'altra costen 10 escuts i $2/3$. I com que $10 \frac{2}{3}$ no està entre 11 i 13, d'aquí ve la impossibilitat, ja que en tals raons el preu comú, que és $10 \frac{2}{3}$, hauria d'ésser més gran que 11 i més petit que 13. I qui voldrà fer possible el problema haurà de fer un dels preus més petit que $10 \frac{2}{3}$ i l'altre més gran. No obstant, segons el rigor de la regla dels primers, es troba possible en tant que hi ha $17 \frac{1}{2}$ del preu d'11 escuts la peça i $\bar{m} 2 \frac{1}{2}$ de les del preu de 13. Que es pot entendre així: que el comerciant ha comprat 17 peces i $1/2$ en diners comptants i d'onze escuts la peça, que pugen a $192 \frac{1}{2}$ escuts. I 2 peces i $1/2$ les ha comprades i pres a crèdit de les del preu de 13 escuts, que valen 32 escuts i $1/2$. Així, aquest mercader no té més que 15 peces de drap que siguin pròpiament seves i no té més que 160 escuts, havent descomptat els $32 \frac{1}{2}$ escuts que ha de retornar (en forma de 2 peces i $1/2$ de les del preu de 13 escuts)". L'afegitó entre parèntesis és nostre.

En aquest problema, seguint el rigor de les regles de l'àlgebra (com diu Chuquet), apareix per primera vegada un nombre negatiu com a solució, però no un nombre negatiu

abstracte, que encara seria impossible de concebre, sinó un nombre negatiu de peces de tela, que Chuquet accepta com a solució possible a partir de la interpretació més o menys natural de "deure aquesta quantitat de peces de tela". Aquesta interpretació ve donada després d'haver aprofundit i comprés el perquè no pot aparèixer una solució positiva, com a conseqüència de les dades inicials del problema.

1157 XXXV. Vng marchant a achette .15. pieces drap le pris de .160. escus Dont Il en ya qui ont couste .11. escus. la piece et les ault^{rs} .13. escus. Asßmoult quantes Il en ya de chascun $\bar{p}s$.

Response : $\left[\begin{array}{l} 17 \text{ pieces } \frac{1}{2} \text{ du } \bar{p}s \text{ de } .11. \text{ escus la piece} \\ \text{et m. } 2. \text{ pieces } \frac{1}{2} \text{ du } \bar{p}s \text{ de } .13. \text{ escus la piece.} \end{array} \right]$

« Toutesfoiz Il semble selon lusaige cõmun que telles raisons comme ceste »
 « sont Impossibles. Et la raison si est car qui partyt .160. escus par .15. »
 « pieces Il vient a la part .10. escus $\frac{2}{3}$. Ainsi lune portant laultre elles »
 « ont couste .10. escus $\frac{2}{3}$. Et pour tant que .10. $\frac{2}{3}$. nest pas moyen entre »
 « .11. et .13. de ce vient limpossibilite. car en telles raisons le $\bar{p}s$ cõmun »
 « qui est .10. $\frac{2}{3}$. deuroit estre plus de .11. et moins de .13. Et pourtant qui »
 « la voudroit possibiliter Il conuiendroit que lung des $\bar{p}s$ fust moins de »
 « .10. $\frac{2}{3}$. Et laultre plus. Neantmoins selon la rigueur de la rigle des $\bar{p}$ miers »
 « elle se treuve possible en tant quil en ya .17. $\frac{1}{2}$. du pris de .11. escus »
 « la piece et $\bar{m}$. 2. $\frac{1}{2}$. du $\bar{p}s$. de .13. Que lon peult ainsi entendre que cellui »
 « m^ochant a achette .17. pieces $\frac{1}{2}$. a argent contant et de .11. escus la piece »
 « qui montent .192. ∇ . $\frac{1}{2}$. Et .2. pieces $\frac{1}{2}$. Il a achette et pris a creance du »
 « $\bar{p}s$. de .13. escus qui valent .32. esc.⁹ $\frac{1}{2}$. Ainsi cellui marchant na que .15. »
 « pieces drap qui soient pprement siennes et si na que .160. esc.⁹ les .32. »
 « escus $\frac{1}{2}$. quil doit rabatz ».

Exposem a continuació un altre problema, de característiques similars a l'anterior.

"XLIII. Un revenedor ha comprat unes pomes que li costen tants diners, que si les revèn a raó de 3 pomes per diner, guanya 15 diners. I si les revèn a raó de 4 pomes per diner, guanya 14 diners. Quantes pomes ha comprat i a quant li han costat?"

"Resposta: 12 pomes, que li han costat 0 $\bar{m}$ 11 diners".

"És a dir, que aquest revenedor les ha comprades i li han estat cedides de tal manera que, si les reven, el mateix a qui les ha comprades, li dona 11 diners que li devia i a més les 12 pomes. Que és equivalent a dir que el revenedor les ha comprades a un al qual devia 11 diners, que li ha dit: jo et dono els 11 diners [et cancello el deute] que em deus i a més les 12 pomes sempre que les revenguis als preus abans dits".

Les equacions, plantejades en forma de llenguatge algebraic simbòlic, serien:

x = pomes; y = preu total pagat

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - y = 15 \\ \frac{x}{4} - y = 14 \end{cases} \quad \frac{x}{12} = 1 ; \quad x = 12 ; \quad y = -11$$

Creiem que sobren comentaris respecte a la plena acceptació per part de Chuquet d'aquestes solucions negatives. Evidentment, una solució negativa sense més i més no és acceptable, però en la mesura que és susceptible d'ésser interpretada dins el model de la realitat extra-matemàtica del problema, llavors la solució negativa adquireix certificat d'existència.

Hom pot observar també que 5 diners menys 8 diners no és igual a $\tilde{m}$ 3 diners, sinó O $\tilde{m}$ 3 diners, que s'interpreta com tenir cap diner i encara deure'n 3. I aquí tornem a veure que no és la subtracció la que porta a l'existència del nombre negatiu, sinó que l'aparició d'aquest és justificada a partir d'una resta.

Podríem parlar aquí d'una fase d'existència parcial, interpretativa, per dir-ho d'alguna forma. El nombre negatiu en abstracte encara no existeix, però l'aparició d'un resultat del tipus 3 pomes menys 5 pomes té un cert significat, igual, no a menys dues pomes, sinó a dues pomes de menys.

Seguint més endavant, en problemes comercials Chuquet arriba a acceptar com a solució d'un problema la següent:

"XLV.....

Resposta: Ha invertit en pomes O $\tilde{m}$ 1 din. $\frac{13}{14}$ i n'ha adquirit O $\tilde{m}$ 15 pomes $\frac{3}{7}$. Ha invertit

en peres 13 din. $\frac{13}{14}$ i n'ha adquirit 83 peres $\frac{4}{7}$."

XLV. Vng reuendeur a employe .12. ds. tant en pōmes que poyres et en a eu autant pour le denier que le dess^o dit. Et si les a reuendues comme luy et a la fin a trouue .3. ds. de gaing. AsßmoIt quantz deniers Il a mys en pomes et quantes Il en a eu. Et aussi quantz deniers en poyres et quantes poyres Il a eu. (3)

Il a mys en pomes .0. m̄. 1. d. $\frac{13}{14}$.
 et en a eu .0. m̄. 15. pomes $\frac{3}{7}$.
 Response: [Il a mys en poyres .12. ds. $\frac{13}{14}$.
 et en a eu .83. poyres $\frac{4}{7}$.]

(Diguem aquí que Chuquet atorgava una importància específica a la introducció dels nombres negatius i el seu maneig. El problema de les 15 peces de drap que costen 160 escuts, en particular, el va copiar del manuscrit de Pamiers, on està plantejat amb els preus 9 i 13, sense solució negativa. Cal pensar que és deliberadament que Chuquet altera l'enunciat i l'aprofita per explicar com cal interpretar les solucions negatives i les qüestions que les produeixen. Cap dels llibres d'aritmètica de l'època, com tampoc cap dels primers llibres d'àlgebra, no incloïen problemes que conduïssin a solucions negatives; el mateix de la Roche, quan va copiar la *Triparty* en el 1520, va excloure del plagi els problemes amb solucions negatives que tant havien interessat Chuquet).

És el respecte que mereix *el rigor de la regla dels primers*, com diu Chuquet en una ocasió, allò que li permet acceptar quantitats negatives per a donar sentit a problemes que no en tenien en principi. En aquest aspecte, podem dir que l'acceptació de solucions negatives reposa en la credibilitat que mereixen les regles de l'àlgebra. Potser és interessant subratllar que aquesta ampliació del camp d'aplicació de les operacions algebraïques imposa necessàriament una ampliació correlativa del significat del llenguatge ordinari, o almenys de certes expressions i paraules; això és el que es preocupa de fer Chuquet, explicant de quina manera cal entendre els enunciats.

Almenys dins de l'obra de Chuquet, els nombres negatius aparèixen a partir de la conjunció de l'àlgebra i dels problemes de planteig. Per això mateix, en aquesta etapa no posseeixen encara categoria pròpiament numèrica. Alguns historiadors han volgut veure, dins de l'obra de Chuquet, un element revolucionari en l'ús de coeficients negatius per a les equacions. Si bé Chuquet escriu en alguna ocasió una equació com $4x = -2$, cal dir que es tracta de fets absolutament esporàdics. Chuquet continua plantejant sempre les equacions amb coeficients positius, i, el que és encara més significatiu, continua resolent les de 2on grau distingint els casos $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$, etc.

Seixanta anys més tard, dins de l'*Ars Magna* de Cardano, la manera de valorar i considerar els nombres negatius romanien essencialment no sistemàtica i fragmentària, amb una perspectiva, si no idèntica a la del *Triparty*, tampoc no gaire més evolucionada. Cardano continua classificant les equacions de 2on, 3er i 4rt grau segons la forma que adopten quan s'escriuen de manera que els coeficients quedin tots positius, i continua donant un algorisme de resolució diferent per a cadascuna de les classes d'equacions resultants.

La novetat revolucionària que conté l'*Ars Magna* és acceptar sempre les solucions negatives, fins i tot quan les equacions no deriven d'un problema l'enunciat del qual pot proporcionar una interpretació de la quantitat, amb signe menys, que n'és solució. Però aquest pas endavant es realitza conservant un marc molt arcaic: les solucions negatives són anomenades *falses* i *fictícies*, i llur estudi, com el de les quantitats imaginàries, és només el que correspon a recursos instrumentals que resulten necessaris en situacions específiques (cf. p. 120). Dins de l'obra de Cardano, com dins de la de Chuquet, les quantitats negatives no són encara pròpiament nombres, no són encara estudiats des d'un punt de vista altre que la manipulació *ad hoc*.

En aquesta etapa del desenvolupament de l'àlgebra, els autors no s'ocupaven sinó de "quantitats amb signe menys". El nombre negatiu, com una entitat susceptible de ser definida, manejada i relacionada en un pla d'igualtat amb els nombres positius, és una conquesta posterior, sens dubte indissociable de la progressió de la teoria d'equacions. És innegable que l'acceptació per part de Cardano de les solucions negatives de les equacions es fonamenta en la nova manera, per comparació amb els autors anteriors, com ell considera les pròpies equacions. Per ell, una equació ja és alguna cosa més que la traducció abreujada de les condicions numèriques derivades d'un enunciat; per ell les equacions són dignes d'estudi *en general*. I en la mesura que ho són, pot reconèixer l'existència de quantitats negatives que també satisfan l'equació, i que, a més, són útils per a establir certes relacions entre totes les solucions i els coeficients de l'equació (cf. pp. 118-120). Un aspecte particular que il·lustra prou bé la importància que va tenir la progressiva constitució d'una teoria d'equacions per a l'acceptació dels nombres negatius ja ha estat esmentat a la pàgina 120: Si $g(y) = 0$ era l'equació transformada de $f(x) = 0$ pel canvi $x = y + k$, les solucions negatives de $g(y) = 0$ podien ser imprescindibles per a trobar solucions positives de $f(x) = 0$. Fets d'aquesta mena, on les quantitats negatives jugaven un paper decisiu per a obtenir resultats en si mateixos indubitables, esdevingueren necessària-

ment arguments principals a favor dels negatius. Encara que aquí no entrarem en l'anàlisi d'uns fets que s'acompleixen en l'etapa final de constitució de l'àlgebra simbòlica, cal anticipar que la definitiva i plena acceptació dels nombres negatius ve lligada a la formulació del teorema fonamental de l'àlgebra i a la completa dilucidació de les relacions entre arrels i coeficients.

Cada cop que s'intenta donar una explicació a les dificultats que varen trobar els nombres negatius abans de ser plenament acceptats —dificultats realment sorprenents per a la nostra mentalitat—, es deixa entendre que no eren sinó el resultat d'una miopia estranya, provocada per no se sap quina mena de misticisme o de supersticions obscurantistes. L'anàlisi de les obres que hem estudiat, i especialment les de Chuquet i Cardano, ens permet conjecturar que, en absència d'una base de raonament altra que la geomètrica, i, molt particularment, en absència d'un càlcul formal susceptible d'aguantar el pes d'una deducció i proporcionar la convicció de veritat lògica, la dificultat real que s'oposava als nombres negatius era la falta d'un model que els donés significat.

Confirmant la importància de la dificultat que aquí assenyalem podem citar un text 200 anys posterior a la *Triparty* de Chuquet. Wallis, en el 1673, dedicava un capítol de la seva *Àlgebra* als *quadrats negatius i llurs arrels imaginàries*, en el qual, reconeixent la impossibilitat que algun nombre, negatiu o positiu, multiplicat per ell mateix produeixi un negatiu, indica el següent:

"Però també es impossible que cap quantitat, encara que no sigui un quadrat, pugui ser *negativa*. Tota vegada que no és possible que alguna *magnitud* pugui ser *menys que cap* cosa, o algun *nombre més petit que res*.

Però aquesta suposició (de quantitats negatives) ja no és ni inútil ni absurda, quan és correctament compresa. La notació algebraica estricta imposa les quantitats menors que cap cosa, però quan s'arriba a aplicar-les a la Física denoten una quantitat tan real com si el signe fos +, però que cal interpretar en sentit contrari.

Com per exemple: Suposant que un home ha avançat (de A a B) 5 iardes, i que llavors ha reulat (de B a C) 2 iardes, si es preguntés, quant ha avançat (en tot) quan és a C?, o, quantes iardes és ara més endavant que quan era a A? Jo trobo (restant 2 de 5) que ha avançat 3 iardes. (Perquè $+5 - 2 = +3$).



Però si, havent avançat 5 iardes cap a B, reula 8 iardes a D, i llavors es pregunta quant ha avançat quan és a D, o quant més endavant és que quan era a A, dic que -3 iardes. (Perquè $+5 - 8 = -3$). És a dir, ha avançat 3 iardes menys que cap cosa.

La qual cosa, parlant pròpiament, no pot ser (tota vegada que res no pot ser menys que cap cosa). Per tant el cas és impossible, en la línia AB *cap endavant*.

Però si (contràriament al que suposàvem) la línia des d'A fos continuada *cap endarrera*, trobaríem D 3 iardes *darrera* A. (Quan se suposava estar *davant* d'ell).

I així, dient ell ha *avançat* -3 iardes, no fem sinó dir allò que hauria de ser (en la forma ordinària de parlar), ell ha *retrocedit* 3 iardes; o, li falten 3 iardes per a ser tan endavant com quan era a A''.

Encara segueixen dos paràgrafs més donant voltes a la mateixa cançó. La cita és extreta del *Source Book...* de D.E. Smith, p.p. 46-47. La cursiva és de l'autor.

La cita havia de ser forçosament llarga, perquè part del seu interès rau en allò que té d'enfarfegada i reiterativa. És a través d'aquest anar amunt i avall, *omplint de significat* les quantitats negatives, i a través de les precisions i acotacions semàntiques (recor-

dem també les de Chuquet), com es veuen millor els principals obstacles que calia vèncer per a col·locar els negatius al mateix nivell que els positius.

Chuquet parla de les solucions negatives aparegudes en alguns problemes com de resultats que deriven directament del rigor de les regles dels primers; Wallis fa referència al caràcter de conseqüència necessària, imposada per l'observació estricta de les regles algebraïques, amb què se li apareixien les quantitats negatives. És també l'actitud que hom observa en Cardano quan opera amb arrels quadrades de negatius (cf. p. 120), o en Núñez quan fa el mateix (cf. p. 136). Tots aquests autors reconeixen l'existència de *regles operatives* que poden actuar sobre quantitats d'índole desconeguda, confusa si més no, regles que apliquen atenent-se a la conservació dels principis formals amb què són manejades les quantitats familiars.

La conservació de les regles d'operar, ja sia dins de situacions on el significat *original* de la regla s'ha perdut, ja sia actuant sobre objectes indefinits, resulta ser una condició *necessària* per a l'aparició i el maneig de quantitats noves, com les negatives o les imaginàries. Aquesta condició no és trivial ni es dóna de forma natural. Estudiant els llibres d'aritmètica clàssics o renaixentistes, i estudiant les àlgebres àrabs i europees anteriors al 1600, resulta que tots ensenyen a restar i cap, llevat d'excepcions notabilíssimes, no parla de nombres negatius. Això no és sorprenent des del punt de vista de la lògica del pensament natural. D'una banda, restar era una operació entre nombres positius, i, d'altra, no es pot treure d'una quantitat determinada una quantitat encara més gran que ella mateixa. Una operació com $+ 5 - (+ 8)$, no sols no té sentit sinó que és contradictòria referida al significat original de l'operació resta. Precisament per això, molts autors dels segles XV i XVI acompanyaven l'algorisme de la resta d'una sèrie de regles sobre l'ordenació dels nombres, regles, que no responien a cap interès abstracte sobre la relació d'ordre, sinó a una preocupació molt concreta sobre la manera de fer possible una resta. Que restar sigui "sumar l'oposat", és una definició que respon a una altra lògica i a un altre context.

Els nombres negatius no apareixen, per moltes restes que es facin, sense una transformació profunda de la filosofia de les operacions numèriques. Aquesta transformació té el caràcter d'una ruptura amb el significat original de l'operació numèrica, i implica una més gran autonomia de l'operació respecte dels seus lligams i relacions amb el camp numèric primitiu. Quan Chuquet i Wallis es refereixen al *rigor de la regla dels primers*, o a l'*estricta notació algebraica*, no fan sinó explicitar la consciència d'aquesta transformació, enunciant els principis que els permeten manejar les *noves* operacions. Podem conjecturar que aquestes noves operacions, versions generalitzades de les primitives suma, resta, multiplicació, divisió i radicació, pel que fa a la seva gènesi són inseparables de l'impuls formalitzador que acompanya la introducció dels radicals i dels primers símbols algebraics. Elles mateixes no serien sinó la primera plasmació, l'estadi més primitiu, de les regles operatives del càlcul formal.

La transformació de les operacions numèriques no fou sinó un aspecte del procés d'aparició dels nombres negatius. Perquè aquests fossin definitivament acceptats també calia resoldre el problema de la *identificació* de les noves magnituds, sorgides de les noves operacions. Com veurem al capítol següent, un dels centres d'interès epistemològic en la gènesi de l'àlgebra simbòlica es troba en la confrontació esquema geomètric/esquema formal. Els *Elements* d'Euclides continuaren sent, durant tot el segle XVI l'únic cos de proposicions al que podia ser referit legítimament un concepte o un raonament matemàtic. Això permet entendre l'extrema reserva amb què es fa referència a les quantitats negatives durant tot el període, així com el paper marginal, de truc tècnic, que els és atorgat. Els negatius no cabien dins del marc teòric clàssic, no hi tenien referent.

En resum, si els comentaris de Chuquet demostren la importància que tenia el significat conjuntural que un context específic donava a les quantitats negatives, per tal de fer-les versemblants, les vacil·lacions i la timidesa de Cardano palesen les enormes dificultats conceptuals que s'oposaven a la seva acceptació incondicional. Sembla possible conjecturar que la superació de les dites dificultats va de la mà amb el desenvolupament de l'àlgebra simbòlica, en el doble aspecte d'arribar a disposar de noves i més generals operacions i de trencar prou radicalment amb el substrat conceptual euclidi.

CAPÍTOL 11:

LA FORMACIÓ DEL LLENGUATGE ALGEBRAIC

A mesura que anàvem descrivint les principals contribucions fetes a l'àlgebra, des de Chuquet fins als anys 50 del segle XVI, hem citat aquí i allà algunes particularitats del llenguatge algebraic arcaic utilitzat pels autors de l'època. El desenvolupament d'aquells símbols primaris i inconnexes és molt complex i, quan es mira amb la mentalitat i els hàbits d'enguany, extraordinàriament paradoxal. Que en resultés una eina tan refinada i subtil, tan versàtil i poderosa com és el llenguatge algebraic modern, és només una de les diverses raons que fan interessant l'anàlisi del procés en si mateix. També podem citar les contribucions que una anàlisi aprofundida d'aquest procés feria genèricament al coneixement de la gènesi dels simbolismes no específicament matemàtics, així com al de la seva funció en la constitució dels esquemes lògics que no necessiten sustentar-se en un referent geomètric.

En aquest capítol pretenem fer una revisió una mica acurada de les diferents propostes notacionals que s'enfrontaren en el període mencionat. A la primera part descriurem els símbols emprats per les escoles i els autors més importants; a continuació analitzarem alguns trets que poden ser interessants per a la història i a la filosofia de les matemàtiques. Cal advertir que els límits superiors del període no han estat gaire escrupolosament respectats; això respon al propòsit de no deixar de mencionar obres i autors dels anys 60 i 70 que, si bé cronològicament són quasi contemporanis de Vieta, l'esperit i la filosofia de les seves notacions són els de Stifel o Cardano. Les notacions de Bombelli són citades perquè existeix un interessant paral·lelisme entre elles i les de Chuquet. A la Bibliografia esmentem les fonts originals que ens ha estat possible consultar. Hi ha llacunes importants, com l'absència d'àlgebres alemanyes de la primera època. Les referències indirectes provenen quasi totalment de l'obra fonamental i exhaustiva de Cajori *A History of Mathematical Notations*.

Els Antecedents

Diofant (s. 3 d.C.)

Diofant representava la incògnita per mitjà d'una lletra grega acompanyada d'un accent: ς' . L'origen d'aquesta representació ha estat molt discutit, existint diferents hipòtesis al respecte (cf. Cajori, pp. 70-74). Diofant només va disposar d'un símbol per a les quantitats desconegudes, i mai no va resoldre problemes utilitzant simultàniament dues o més incògnites diferents.

El producte de ς' per ell mateix (el que nosaltres representem per x^2) era representat per Δ^Y , i de vegades amb minúscules δ^u . El cub, x^3 , era representat per K^Y (κ^u). Les potències següents es representaven segons el *principi additiu*: $\Delta^Y \Delta$ (quadrat-quadrat) era x^4 , ΔK^Y (quadrat-cub) era x^5 , $K^Y K$ (cub-cub) era x^6 , etc.

L'addició era expressada per juxtaposició (però Diofant també juxtaposava els símbols algebraics i els seus coeficients, com ara fem). La multiplicació de nombres o de monomis entre si mai no es deixava indicada, sempre se'n donava el resultat; per això Diofant no té símbol per a la multiplicació. Per exemple, Diofant escriuria el polinomi $x^3 + 13x^2 + 5x + 2$ així ($1 = \alpha$, $13 = \iota\gamma$, $5 = \epsilon$, $2 = \beta$; la M era usada per a distingir el terme sense incògnita o una de les seves potències. L'exemple és extret de Cajori, p. 73): $K^Y \alpha \Delta^Y \iota\gamma \zeta \epsilon M \beta$.

Diofant sí que utilitzava, en canvi, un símbol per a la subtracció: Λ . No tenint símbol per a sumar, es veia obligat a col·locar tots els termes negatius d'una expressió junts, al final d'ella, després de tots els positius, per tant, Λ era, alhora, un parèntesi que permetia juxtaposar tots els termes que venien darrera d'ell, sense que calgués posar tants Λ com termes eren restats.

Es conjectura que Diofant utilitzava el símbol ι^o per a la igualtat, però, havent estat perduts els manuscrits originals, això no passa de ser una suposició.

La notació per a la divisió deriva de la notació per a les fraccions. Les fraccions unitàries, de numerador unitat, s'indicaven amb el denominador seguit d'un o dos accents, com si diguéssim $3''$ per $1/3$, etc. D'altres símbols eren eventualment usats en lloc dels accents, en particular χ . Per a les fraccions $1/2$ i $2/3$ existien símbols específics, una cosa que ja havien fet els egipcis. Una fracció ordinària podia ser representada de diverses maneres: escrivint el numerador sobre el denominador, sense barra, com $\frac{u^3}{\zeta}$ per $17/12$; o bé posant el denominador com ara posem els exponents, com $\iota\epsilon^\delta$ per $15/4$; o bé juxtaposant numerador i denominador, en aquest ordre, indicant aquest darrer com un denominador, de fracció unitària (i, per tant, atorgant a la juxtaposició valor de producte), com $\bar{\gamma} \delta'$ per $3/4$. Per escriure $1/x$, $1/x^2$, ..., Diofant fa servir el principi de les fraccions unitàries: escriu $\varsigma \chi \bar{\eta}$ per $8/x$, ó $\Delta^Y \chi \bar{\sigma}^u$ per $250/x^2$. Les fraccions algebraïques que tenien per denominador un polinomi més complicat eren escrites en forma semi-retòrica.

Algebra índia i àrab (ss. 7-15 d.C.).

La majoria dels algebristes àrabs van adoptar el *principi multiplicatiu* a l'hora d'expressar les potències de la incògnita. No es tracta d'una aportació original enfrontada al principi additiu de Diofant, sinó de l'adopció del principi utilitzat pels algebristes indis. Aquests anomenaven *varga* el quadrat d'un nombre (no cal dir que el mot citat és una transliteració del mot sànscrit corresponent; cf. Cajori, p. 80), i *g'hana* el cub. El producte de sis nombres iguals era anomenat *varga-g'hana* o *g'hana-varga* (el cub del

quadrat o el quadrat del cub); el producte de vuit nombres dóna *varga-varga-varga*, etc. Quan, amb les potències senars, el principi multiplicatiu esdevé inútil, el mot *gháta* (*producte*), juxtaposat a les mateixes expressions que acabem d'esmentar, transformava llur significació i les feia aplicables a les potències restants. Així, x^5 s'expressava per *varga-g'hana-gháta*, etc.

Les àlgebres àrabs més importants des del punt de vista històric, les que van poder influir en la gènesi de l'àlgebra renaixentista, eren exclusivament retòriques, i no recollien ni els símbols de Diofant ni els de les àlgebres índies. Llur influència, pel que fa als simbolismes, va quedar restringida a la transmissió dels principis additiu i multiplicatiu ja mencionats.

Nicolàs Chuquet (1484)

Aquí només recordarem l'essencial de les notacions emprades a la *Triparty* de Chuquet, notacions exhaustivament descrites al capítol 5.

Chuquet utilitza les abreviacions $\bar{p}$ i $\bar{m}$ dels mots *plus* i *moins* amb les funcions dels nostres “+” i “-”; no fa servir cap símbol ni cap síncopa per a la igualtat.

Les arrels són representades amb els símbols R^2 , R^3 , ..., equivalents als nostres $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$, ... Quan Chuquet aplica aquest símbol a expressions amb més d'un terme, fa servir el subratllat amb funcions de parèntesi. Per exemple, escriu $R^2 \cdot \underline{14.p.R^2 180}$ representant $\sqrt{14 + \sqrt{180}}$.

En aquest autor trobem una notació molt interessant per a les potències de la incògnita. Els exponents sense base de Chuquet, 12^2 per $12x^2$, 1^3 per x^3 , etc., es recolzen en el fet que mai no fa servir els exponents per a nombres específics: 2^3 mai no significa 8, sempre és $2x^3$. Des d'un punt de vista modern, allò que resulta més important és que Chuquet també consideri l'exponent nul i els exponents negatius, com ara 12^{1-m} per $12x^{-1}$, explicitant —sempre a base d'exemples particulars— que la suma i resta d'exponents corresponen a la multiplicació i divisió dels monomis.

Sobre les possibles fonts de Chuquet no podem sinó reproduir el que diu Cajori: “No existeixen indicacions que ell [Chuquet] hagués vist els manuscrits d'Oresme [sobre les notacions d'Oresme, cf. pp. 35 i 37] (...). L'única possible suggerència, que nosaltres coneguem, per a aquesta notació exponencial, pot haver arribat a Chuquet dels numerals Gobar, els Fihrist, i de l'escoli de Neofitus [Cajori fa referència a formes arcaïques d'expressió del principi posicional, en les quals un punt o un zero podia utilitzar-se de manera que $3^{\cdot}$ representava 30, i $3^{\cdot\cdot}$ 300, etc., o bé $2^{\cdot}$ representava 20, 0^{50} representava 500, etc.; cf. pp. 53-56 de l'esmentada obra de Cajori] (...) Si una tal connexió realment existís, no som capaços d'establir-ho”. (p. 100).

Una dada que cal retenir és que la família de símbols introduïda per Chuquet no creà escola. Ni tan sols quan li fou donada una difusió considerable, amb la impressió de l'obra de la Roche, el 1520, aparegueren d'altres obres adoptant les mateixes o semblants notacions. Des del punt de vista de l'evolució dels simbolismes algebraics, Chuquet i Diofant foren autors que, per nèixer massa d'hora, restaren solitaris, incompresos i dubtosament fructífers.

L'Escola Italiana

L'ús de les lletres p i m (amb títles o sense) per a representar els mots *plus* i *minus*, l'absència d'un símbol per a la igualtat (indicada per mots com *aequale*, *aequatur*, *est*,

fa,...), i la notació de les arrels, són els trets més comuns als matemàtics italians del segle XVI.

La notació més característica per a les potències d'una incògnita era:

<i>co</i> , abreviació de <i>cosa</i> ,	per x
<i>ce</i> , " " <i>censo</i> ,	per x^2
<i>cu</i> , " " <i>cubo</i> ,	per x^3

Les potències successives es representaven, segons el principi multiplicatiu, per juxtaposició d'aquests símbols:

<i>cece</i> (<i>censo di censo</i>)	per x^4
<i>cecu</i> (<i>censo di cubo</i>)	per x^6
<i>cecece</i> (<i>censo di censo di censo</i>)	per x^8 , etc.

És evident que aquest sistema obligava a introduir una regla addicional per a les potències primeres:

$p^{\circ}.r^{\circ}$. (<i>primo relato</i>)	era x^5
$2^{\circ}.r^{\circ}$. (<i>secundo relato</i>)	era x^7
$3^{\circ}.r^{\circ}$. (<i>terzo relato</i>)	era x^{11} , etc.

L'origen d'aquesta nomenclatura cal buscar-lo, segons conjectura Cajori, en els noms egipcis per a les successives potències de la incògnita: "La següent potència després de la quarta, és a dir, x^5 , els egipcis l'anomenaven "la primera indescriptible", ja que no és ni un quadrat ni un cub; (...) la setena era "la segona indescriptible", (...). Aquestes expressions per a x^5 i x^7 estan estretament relacionades amb el *primo relato* i *secundo relato* de Luca Pacioli que es troben a la seva *Summa* de 1494". (p. 85).

L'ús de *positio* (i l'abreviació *pos.*) en lloc de *cosa*, i de *quadratus* (*quad.*) en lloc de *censo*, és l'única variant que cal mencionar dins d'aquesta notació. La representació més usual d'una segona incògnita era *quantitas* (*quan.* o *qua.*). Per exemple, per a representar les equacions $60 + 20x = 100$ i $x^2 + 2x = 48$, respectivament, Cardano escrivia

$$\begin{array}{l} 60 \bar{p} 20\text{positionibus} \text{ aequalia } 100 \\ 1.\text{quad.} \bar{p} 2\text{pos.} \text{ aeq. } 48 \end{array}$$

La representació de les arrels presentà una vacil·lació important. Hi havia gairebé unanimitat sobre la R_x (o $R_x c.$) i R_x cub. (o $R_x c.$) per $\sqrt[4]{\quad}$ i $\sqrt[3]{\quad}$, respectivament. Pacioli representava les altres arrels segons el principi additiu:

R_x cuba de 64	per $\sqrt[3]{64}$	$R_x R_x R_x$ cuba	per $\sqrt[7]{(2 + 2 + 3 = 7)}$
$R_x R_x$ 120	per $\sqrt[4]{120}$	R_x cuba de R_x cuba	per $\sqrt[6]{(3 + 3 = 6)}$
		$R_x R_x$ cuba de R_x cuba	per $\sqrt[8]{(2 + 3 + 3 = 8)}$

Però els autors posteriors utilitzaren el principi multiplicatiu:

$$R_x \text{ rel di } 1/32 \text{ è } 1/2 \text{ (radice relata de } 1/32 \text{ és } 1/2, \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} \text{)}$$

QVÆSTIO III.

Fac ex 6. duas partes, quarum quadratorum aggregatum, sit æquale differentie cuborum. Pones maiorem 3. p. 1. positione, & minorem 3. m. 1. positione, sequere

3. pos. 1. pos.	9. p. 1. quad. p. 6. rebus.
3. m. 1. pos.	9. p. 1. quad. m. 6. rebus.
	18. p. 2. quad. aggregatum.
3. p. 1. pos.	17. p. 9. quad. p. 27. pos.
	p. 1. cub.
3. m. 1. pos.	17. p. 9. quad. m. 27. pos.
	m. 1. cu.
	differentia 54. pos. p. 2. cu.

questionem, habebis aggregatum quadratorum, 2. quadrata p. 18. & differentiam cuborum 2. cubos p. 54. positionibus, & hæc æquantur inuicem, igitur cubus & 27. positiones æquantur quadrato & 9. sequere capitulum, fiet rei ælimatio, id est differentie, R. v. cubica R. 702 $\frac{1}{3}$ p. $\frac{1}{27}$, m. R. v. cubica R. 702 $\frac{1}{3}$ m. $\frac{1}{27}$ p. $\frac{1}{3}$, quare partes erunt, 3 $\frac{1}{3}$ p. R. v. cubica R. 702 $\frac{1}{3}$ p. $\frac{1}{27}$ m. R. v. R. 702 $\frac{1}{3}$ m. $\frac{1}{27}$, & minor, 2 $\frac{1}{3}$ p. R. v. cubica R. 702 $\frac{1}{3}$ m. $\frac{1}{27}$ m. R. v. cubica R. 702 $\frac{1}{3}$ p. $\frac{1}{27}$.

QVÆSTIO IV.

Fac ex 8. duas partes, quarum productum maioris in minorem, proportionale sit, inter nonuplum maioris, & ipsam minorem. Pone partem primam 4. p. 1. positione.

Tom IV.

ra Binomiali, vel recte vocat, non in pte prij.

QVÆSTIO V.

Diuide 10. in duas partes, quarum quadrato primæ detracto ex 100. & quadrato secundæ detracto ex 97. residuorum æmenda, constituant 17. Si libet ad vitandum laborem, primò videbis via tentatiua an casus possibilis sit, hoc igitur cognito, pone primam partem 5. p. 1. positione, & reliquā 5. m. 1. positione, duc partes in se, & quadratum maius

5. p. 1. pos.	5. m. 1. pos.
25. p. 1. quad. p. 10. pos.	100.
25. p. 1. quad. m. 10. pos.	97.
75. m. 1. quad. m. 10. pos. resid.	
72. m. 1. quad. p. 10. pos. resid.	
17. m. R. v. 75. m. 1. quad. m. 10. pos.	
R. v. 72. m. 1. quad. p. 10. pos.	
364. m. 1. quad. m. 10. pos. m. R. v. 86700.	
m. 1156. quad. m. 11560. pos. 72. m. 1. quad. p. 10. pos.	
292. m. 20. rebus.	
R. v. 86700. m. 1156. quad. m. 11560. pos.	
86700. m. 1156. quad. m. 11560. pos.	
85264. p. 400. quad. m. 11680. pos.	
1436. p. 120. pos. æqual. 1556. quad.	
1556.	
quad. æqual. $\frac{1}{11}$ pos. p. $\frac{155}{119}$.	

A a detra-

Fig. 32. Plantejament i resolució d'una equació amb el llenguatge algebraic sincopat italià (p. 277 del vol. IV de l'Opera de Cardano).

$$R_x \text{ terza rel di } 1/2048 \text{ è } 1/2 \left(\sqrt[11]{\frac{1}{2048}} = \frac{1}{2} \right)$$

$$R_{xqc} \text{ (radice quadrata-cuba) per } \sqrt[6]{}, \text{ etc.}$$

Pacioli fou el primer a utilitzar les arrels *universals*, una manera primitiva de distingir $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ i $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. Per exemple, $\sqrt{\sqrt{20} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}$ ho escrivia així: $R_x v. R_x 20 \frac{1}{4} \tilde{m}. \frac{1}{2}$, on la v que segueix la primera R_x és l'abreviació d'*universalis*. Quan les expressions atectades per les arrels es van anar fent més i més complicades, esdevingueren necessàries notacions més precises. Cardano va introduir la *radix ligata*, LR .7.pR .10; significava $\sqrt{7 + \sqrt{10}}$, així com la utilització d'un espai en blanc assenyalava el final d'una arrel universal.

Pacioli va proposar d'altres notacions per a les potències de la incògnita, i el mateix va fer Ghaligai. Aquest, el 1521, introduïa el següent sistema de símbols: *cosa*, $\circ$ (x); *censo*, $\square$ (x^2); *cubo*, $\boxplus$ (x^3); $\square$ di $\square$, $\circ \square \square$ (x^4); *relato* $\boxminus$ (x^5); *pronico*, $\boxplus$ (x^7); *trónico*, $\boxplus$ (x^{11}), etc... Si podem entendre bé que un sistema així no trobés seguidors, són menys evidents les raons que dificultaren l'adopció de la següent notació de Pacioli:

$R_x p^a$ (<i>radix prima</i>)	per x^0
$R_x 2^a$ (<i>radix secunda</i>)	per x^1
$R_x 3^a$ (<i>radix terza</i>)	per x^2 , etc.

És una notació en la qual no es verifica $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, sinó $a^n \cdot a^m = a^{n+m-1}$.

Això que hem dit fins ara potser ja dona una idea del caràcter bàsicament anàrquic de les primeres etapes de la gènesi dels símbols algebraics. Però encara podem mencionar un altre tret, sorprenent per al lector fet a les precaucions rigoristes pròpies del tractament modern de les notacions. Pacioli no sols podia expressar una mateixa cosa amb símbols diferents, sinó que podia utilitzar un mateix símbol per expressar coses diferents. Potser el cas més notable és el de la " R_x ", la qual, segons Cajori ha fet veure minuciosament, arriba a tenir 5 significats diferents. Dos ja han estat mencionats: " R_x cuba de 64", etc., i " $R_x p.a$ ", etc. Un tercer significat és el que apareix a la frase "recca.3.a R_x .fa.9" per "eleva 3 al quadrat, fa 9"; és a dir, $R_x R_x cu.$, $R_x R_x$ cuba,... signifiquen segona, tercera, cinquena potència,... Aquest tercer significat només es dona parlant d'operacions a realitzar. Un quart paper de la R_x és el de la incògnita: "la mità d'un censo e 12 dramme sonno equali a 5 R_x [*radici*]" per $\frac{1}{2} x^2 + 12 = 5x$. En un marge apareix un cinquè paper de la " R_x ", però aquest, per aïllat, no té importància. És evident que, en aquesta primera època de l'àlgebra, la relació entre el símbol i el seu significat, determinat gairebé sempre pel context en què s'inserta el símbol, era molt més flexible que en èpoques posteriors.

Bombelli

Bombelli fou el darrer algebrista italià d'importància del segle XVI. La seva *Algebra*, que conté diverses innovacions notacionals interessants, fou publicada a Venècia el 1572, però fou escrita almenys una vintena d'anys abans.

Al llibre de Bombelli, tal com fou imprès, apareix un antecedent mol directe dels nostres parèntesis: l'ús de dues "L", marcant el començament i el final de les expres-

sions afectades per arrels. Així escriu $\sqrt[3]{\sqrt{68+2} - \sqrt{68-2}}$ posant

$$RqLRcLRq68p.2 \text{ J mRcLRq68m2 J J}$$

Potser la novetat més interessant de *L'Algebra* de Bombelli, pel que fa a les notacions, és que hi retrobem, amb la restricció important de no considerar sinó exponents positius, la notació exponencial de Chuquet. Per exemple, l'equació $24 - 20x = 4x^2 - 16x + 16$, és escrita així

$$\overset{1}{24.m.} \overset{1}{20} \quad \text{Egual a} \quad \overset{2}{4.m.} \overset{1}{16.p.} 16.$$

Desconeixem si es té constància provada que Bombelli sofrís la influència directa de Chuquet, però podem conjecturar que aquesta influència existí en base a quatre coincidències notables. Una és la notació exponencial. Les restants només són constatables al manuscrit original de *L'Algebra*, el qual, com ja hem dit, cal considerar com a mínim dels primers anys 50 del segle XVI. En ell, les "L" que fan de parèntesi no són sinó els extrems d'una mena de caixa contenint l'expressió afectada per l'arrel. Per exemple,

Bombelli escriu $\sqrt[3]{12 - \sqrt{-1069 \frac{17}{127}}}$ així

$$R^3 \left[12 m. R \left[0 m. 1069 \frac{17}{127} \right] \right]$$

expressió que recorda immediatament els subratllats de Chuquet. Les altres dues coincidències també són paleses en aquest exemple: Bombelli empra el símbol R^3 per expressar una arrel cúbica, i no escriu un nombre negatiu aïllat, sinó que posa $0 - 1069 \frac{17}{127}$.

La notació exponencial de Bombelli, com les "L", no tingué cap ressò a Itàlia, on les àlgebres que continuaren apareguent fins a finals del segle XVI restaren fidels a les notacions de Pacioli i Tartaglia. La idea dels exponents sense base seria recollida i desenvolupada per Simon Stevin de Bruges.

L'Escola Alemanya

L'ús dels símbols "+" i "-" (sobre l'origen d'aquests símbols, cf. pp. 66), l'absència d'un símbol per a la igualtat, i la notació de les arrels, són els trets més comuns als algebristes alemanys de la primera meitat del segle XVI. Les notacions més característiques per a les potències de la incògnita eren

Q (dragma o nombre)		/3 (sursolidum)	per x^5
x (radix)	per x	yc (zensicubus)	per x^6
z (zensus)	per x^2	b3 (bissursolidum)	per x^7

c (cubus)	per x^3	zzz (zenszensdezens)	per x^8
zz (zensdezens)	per x^4	c c (cubus de cubo)	per x^9

Es tracta manifestament del mateix principi utilitzat pels italians, amb variacions de nomenclatura i amb l'adopció de simbolismes que, des del punt de vista formal, podem considerar més evolucionats que les síncopes italianes. Aquests símbols, que aparegueren impresos per primera vegada en el *Coss* de Rudolff del 1525, provenien dels textos d'aritmètica i àlgebra, manuscrits, que circulaven a Alemanya des de l'últim terç del segle XV; foren adoptats pels principals autors i utilitzats comunament durant la primera meitat del segle XVI, malgrat la presència d'altres notacions alternatives que després citarem.

Per representar una segona incògnita s'utilitzava la *q* de *quantitas*. La idea de Stifel, apareguda a finals del període a l'*Arithmetica integra* (1544), de fer servir les lletres majúscules A, B, C,... quan eren necessàries diferents incògnites, també tingué alguns seguidors. En aquest cas, el quadrat de la incògnita B es designava per Bq.

La notació per a les arrels que esdevingué majoritària també era exposada en el *Coss* de Rudolff del 1525. Amb diverses modificacions fou adoptada per nombrosos autors alemanys i anglesos, proporcionant finalment el símbol modern. Els símbols del *Coss* de Rudolff eren:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{\quad} & \text{per } \sqrt[2]{\quad} \\ \sqrt[3]{\quad} & \text{per } \sqrt[3]{\quad} \\ \sqrt[4]{\quad} & \text{per } \sqrt[4]{\quad} \end{array}$$

La variant més interessant d'aquesta notació fou proposada per Stifel a l'obra ja esmentada del 1544:

$$\sqrt{z} \text{ per } \sqrt[2]{\quad}, \sqrt{c} \text{ per } \sqrt[3]{\quad}, \dots \text{ etc.}$$

Un punt al costat del símbol radical feia aquí el mateix paper que la *v* de *universalis* per als italians. Així, $\sqrt{\cdot} 12 + \sqrt{140}$ significava $\sqrt{12 + \sqrt{140}}$, mentre que $\sqrt{12} + \sqrt{140}$ significava $\sqrt{12} + \sqrt{140}$. Alguns autors afegien un segon punt al final de l'expressió afectada per l'arrel.

Finalment cal mencionar, malgrat que no arribaren a quallar, alternatives interessants a la notació, ja mencionada, per a la sèrie de potències de la incògnita. La proposada per Grammateus el 1518 gaudia, des del punt de vista algorísmic, d'uns avantatges evidents sobre la notació mencionada anteriorment. El nombre desconegut era anomenat per Grammateus la *prima quantita*, i així resultava:

pri (prima)	per x	4 ^a , quart.	per x^4
2 ^a , se. (seconda)	per x^2	5 ^a , quit.	per x^5
3 ^a , ter (terza)	per x^3	6 ^a , sex	per x^6 , etc.

En una obra de divulgació del 1545, Stifel proposava el mot *sum* per a designar una incògnita, i les successives juxtaposicions per a indicar les successives potències: designava x^2 per *sum:sum*, etc. Stifel s'explicava així: "Quan haig de multiplicar 6*sum:sum:sum* per

12sum:sum:sum, faig: 12 vegades 6 fan 72sum:sum:sum:sum:sum:sum:” (Cajori, p. 143). Com diu Cajori, la inelegància de la notació resulta d’un esforç per fer el tema fàcil. Stifel mai no va utilitzar aquesta notació en posteriors publicacions, però va reintroduir la mateixa idea, el 1553, en allò que ell anomenava la *progressió còssica*:

0	1	2	3	4	...
1	1A	1AA	1AAA	1AAAA	...

Scheubel, l’any 1550, després d’explicar les notacions alemanyes clàssiques, assenyalava que els ordinals proporcionen una nomenclatura i unes notacions més fàcils de manejar, i en proposava unes molt properes a les de Grammateus:

Ra	(<i>radix</i>)	per x
Pri.	(<i>prima quantitas</i>)	per x^2
Se.	(<i>secunda quantitas</i>)	per x^3 , etc.

Scheubel justificava aquests noms assenyalant que el *zensus* (x^2) serà la *prima quantitas* perquè sorgeix d’una multiplicació ($x \cdot x$), la *secunda quantitas* sorgeix de dues multiplicacions ($x \cdot x \cdot x$), etc.

Alguns símbols francesos i anglesos de mitjan segle XVI

Tant a França com a Anglaterra, l’àlgebra es desenvolupà tard, a partir de mitjan segle XVI. A Anglaterra, les notacions alemanyes no trobaren cap resistència important i esdevingueren hegemòniques durant tota la resta del segle. Cal citar només les innovacions simbòliques proposades per Recorde i els Digges. Del primer repetirem aquí les paraules amb què introduïa, el 1557, el símbol per a la igualtat que encara fem servir:

“I per evitar la tediosa repetició d’aquestes paraules: és igual a: (...) posaré un parell de paral·leles, o línies bessones d’una mateixa longitud, així: $\parallel$, perquè dues coses no poden ser més iguals.” (Cajori, p. 165).

Aquest símbol fou un de més al costat de tots els que hem anat esmentant, i els que esmentarem, sense que esdevingués d’ús comú fins al final del segle XVII.

Leonard i Thomas Digges, el 1579, a la mateixa obra on proposaven una alternativa a les notacions alemanyes, per considerar-les poc adients, introduïen sense cap mena d’explicació un signe d’igualtat. El símbol apareixia de cop a la p. 51, després d’haver expressat la igualtat retòricament a les anteriors. El símbol era $\bowtie$. Amb les seves notacions, l’equació $x^2 = 6x + 27$ s’escrivia

$$1 \bowtie 6 \text{ } \text{ } + 27$$

Malgrat haver estat publicada a París, el 1551, *L’Algebra* de Scheubel, on s’utilitzaven les notacions alemanyes, la influència d’aquestes a França fou considerablement més petita que a Anglaterra. L’autor més receptiu a aquestes notacions va ser J. Peletier, el qual les va adoptar íntegrament, exceptuant els “+” i “-”, que represen-

tava a la italiana, i el x per a la incògnita, que representava per R . A continuació es compara l'escriptura d'un sistema d'equacions lineals 3×3 amb les notacions modernes i amb les de Peletier, tal com apareixen a la seva obra de 1554:

$$\begin{array}{ll} 2R.p.1Ap.1B, \text{ egales a } 64 & 2R + A + B = 64 \\ 1R.p.3Ap.1B, \text{ egales a } 84 & R + 3A + B = 84 \\ 1R.p.1Ap.4B, \text{ egales a } 124 & R + A + 4B = 124 \end{array}$$

A la mateixa obra, en presentar les notacions per a les potències de la incògnita, Peletier desenvolupa fins a la potència 16 la taula

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots \\ 1, & R, & R^2, & c, & R^3, & \beta, & \dots \\ 1, & 2, & 4, & 8, & 16, & 32, & \dots \end{array}$$

i anomena els nombres de la fila superior *exponents* dels signes de la segona fila.

J. Buteon, el 1559, s'aparta molt radicalment de les notacions alemanyes. Utilitza, com Peletier, les $A, B, C, \dots$ per designar diferents incògnites, i la P i M italianes. Per a les potències de la incògnita elabora un sistema de símbols ($\rho, \diamond, \varnothing, \dots$) que pretén la regeometrització de l'àlgebra. Per exemple, l'equació $\frac{1}{8} x^3 + 2 = 218$, l'escriu

$$\frac{1}{8} \square P^2 [218]$$

El símbol $[$, que fa d'igualtat, esdevé $]$ als darrers passos de l'equació:

$$1 \square [1728] \quad \text{per} \quad x^3 = 1728$$

$$1 \rho [12] \quad \text{per} \quad x = 12$$

La influència italiana encara és més clara a l'obra de G. Gosselin (1577). *Latus* és el nom de la incògnita, i L, Q, C els símbols per a x, x^2, x^3 . Les potències superiors es formen segons el principi multiplicatiu i duen els noms italians. Una equació com $12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + 2x^2$ tenia aquest aspecte

$$12LM1QP48 \text{ aequalia } 144M24LP2Q$$

Les variacions més importants respecte de les notacions italianes apareixen lligades al fet que la L de *latus* també es fa servir de signe radical, amb les mateixes regles que els italians aplicaven a la R . De manera semblant a com ho havia fet Pacioli, Gosselin distingeix entre $9L$, que representa $9x$, i $L9$, que representa $\sqrt{9}$.

* * *

Hem descrit amb una certa cura els orígens del llenguatge algebraic. Del període cobert només sobreviuran els símbols $+$, $-$ i $=$; la simbologia restant, així com la síntesi final que conduirà al llenguatge modern, són fruits d'un altre segle d'evolució,

del qual podem donar aquí una idea esquemàtica. Ens hem aturat a les portes d'una cinquantena d'anys decisius, els que van de 1580 a la publicació de *La Geometria* de Descartes, dominats per les contribucions fonamentals de Vieta i del mateix Descartes. Amb Vieta, les expressions algebraïques esdevenen modernes en el sentit que el rigor i la generalitat amb què són emprades són molt pròxims als actuals. Això no obstant, Vieta encara fa anar una simbologia primitiva, sense signe d'igualtat, sense exponents ni signes radicals, etc. Stevin i Girard utilitzen a fons la notació de Chuquet, heretada a través de Bombelli, explicitant la possibilitat d'ampliar-la i d'expressar les arrels per exponents fraccionaris; a les seves obres, però, només es menciona aquesta possibilitat, sense extreure'n gaire profit. L'obra de Descartes (1637) conté la notació actual, amb dues variants menors: sempre escriu xx , aa ,... en lloc de x^2 , a^2 ,..., i fa servir com a signe d'igualtat $\propto$. Que Descartes, a la data mencionada, hagués arribat a una síntesi feliç de les notacions que empraven els seus contemporanis no vol dir que a partir d'aleshores el seu sistema notacional s'imposés sense dificultats. Foren necessaris 60 ó 70 anys més de lenta decantació per tal que les convencions cartesianes, amb la substitució del $\propto$ pel $=$, esdevinguessin el llenguatge algebraic emprat universalment.

ALGUNS TRETS DEL PROCÉS DE FORMACIÓ DEL LLENGUATGE ALGEBRAIC

Si comparem les primeres àlgebres europees del Renaixement amb les fonts àrabs que les varen inspirar o amb les àlgebres àrabs que els eren contemporànies, no trobarem sinó una diferència essencial: les primeres començaven a desenvolupar un sistema simbòlic, altre que el llenguatge ordinari, específicament adreçat a representar els objectes algebraics i llurs relacions. El fenomen és sorprenent, i no deixa de presentar facetes paradoxals. A partir de l'any 1500, i en un interval de pocs anys, diferents matemàtics de diferents ciutats, països i cultures —en una època en la qual l'intercanvi científic era escàs i lent,— es posen, alhora, a crear símbols algebraics. L'anarquia i la disgregació notables que caracteritzen el procés serien així les conseqüències gairebé obligades de les seves condicions inicials. Tanmateix, costen d'explicar els 200 anys llargs que passen abans de produir-se la unificació definitiva de les diferents alternatives simbòliques. Un dels fenòmens més sorprenents associats a aquesta duració extraordinària és que, sovint, les que acabarien sent solucions definitives a un problema notacional foren ignorades per la majoria dels autors, malgrat haver-les conegut, i tardaren molts d'anys a imposar-se.

Donar una explicació completa de la manera com es va constituir el llenguatge algebraic modern, és a dir, descobrir la lògica interna del procés de formació, exigiria la col·laboració d'especialistes en disciplines força allunyades de les matemàtiques —particularment de la psicologia genètica— i cau del tot fora de les nostres possibilitats actuals. Això no obstant, podem aïllar o subratllar alguns trets que no per parcials deixen de ser interessants.

Condicionaments tècnics i sociològics

L'aparició de la impremta i la difusió de volums impresos a partir de mitjan segle XV és indissociable d'una transformació en el sistema predominant de transmissió cultural. El volum imprès simbolitza perfectament el declinar de la transmissió oral de la cultura i l'ascensió de l'escripta, així com la nova importància, quantitativa i qualitativa, dels sectors socials directament implicats en el procés de transmissió cultural.

Els passos inicials cap a la formalització, visibles a les àlgebres europees de voltants del 1500, i la fogarada de propostes notacionals que es dona a mitjan segle, representen l'aparició d'uns simbolismes tan idonis per la comunicació escrita com inadequats per a ser transmesos oralment. Un llenguatge sintètic, poc redundant, que disposa de símbols específics que es combinen segons regles pròpies, difícilment pot ser útil fora d'un context on la facilitat de plasmació i reproducció gràfica no estigui assegurada.

La impremta va ser el vehicle propi del nou llenguatge algebraic en el sentit que acabem d'explicar, i per aquest mateix fet en condicionava el desenvolupament. Als seus orígens, la impremta fou un negoci no susceptible de ser portat més que per un nombre molt reduït d'individus. Això per dues raons, una d'econòmica i una de tècnica. El preu de cost d'un llibre era elevat, especialment a causa del paper, que costava, per a una edició normal (de 600 a 800 exemplars), diverses vegades més que el cost de l'utilatge fix del taller. "En tales circunstancias —conclou D. Sella després de donar les dades anteriors— la edición de un libro estaba a menudo fuera de las posibilidades financieras de un pequeño impresor, le podía arruinar mucho antes de recuperar su inversión..." (Cipolla, p. 317). D'altra banda, la impremta tingué característiques d'indústria de punta. Els procediments metal·lúrgics per a elaborar els petits tipus mòbils de les lletres i els altres signes gràfics, així com tots els artificis del procés d'impressió, foren considerats des del començament secret industrial. Tot això explica, en particular, que els tallers d'impressió s'estenguessin al nostre país de la mà d'un reduït nombre de mercaders alemanys, generalment associats amb algun indígena (cf. Bohigas i Amadeu, pp. 14-15).

En aquest context, les limitacions tècniques que podien dificultar o oposar-se a les innovacions simbòliques s'endevinen fàcilment. És aquest un factor que potser cal tenir en compte per a explicar que a Alemanya, la pàtria de la impremta i la regió capdavantera en el seu ús i perfeccionament, es produïssin uns simbolismes molt més desenvolupats que a Itàlia. Si el llenguatge algebraic italià, fins i tot el d'una obra tan madura i avançada com l'*Ars Magna* de Cardano, no va superar el nivell de les síncopes o abreviacions de paraules durant tot el segle XVI, a Alemanya, contràriament, des dels anys 20 veiem en acció la concepció del símbol algebraic com un ens autònom, plenament diferenciat del mot —la representació simbòlica dins del llenguatge comú— que designa el concepte matemàtic.

La hipotètica influència d'aquests factors tècnics en el desenvolupament del llenguatge algebraic es pot relacionar amb l'autèntica explosió de nous simbolismes que es produeix a partir de mitjan segle XVI, quan l'evolució de les tècniques d'impressió ja havia arribat a una nova maduresa. Aquesta influència ens ha estat suggerida per unes paraules ja esmentades de Pérez de Moya (cf. pp. 127). Per justificar l'ús de síncopes italianes en lloc de símbols "mas breves", diu explícitament que la impremta no disposava de "caracteres".

La funció dels primers símbols algebraics

Els símbols algebraics utilitzats durant el període estudiat són considerats pels matemàtics de l'època d'una manera essencialment diferent de la nostra. Avui, una identitat com $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ troba la seva justificació més indiscutible en el càlcul formal del producte $(a + b)(a + b)$. Hem ajustat les combinacions dels símbols algebraics a regles prou definides com per trobar del tot acceptables les conseqüències del càlcul formal; hem eliminat les ambigüitats en el significat dels símbols i hem delimitat el seu camp d'aplicació de tal manera, que confiem en les conclusions derivades de raonaments

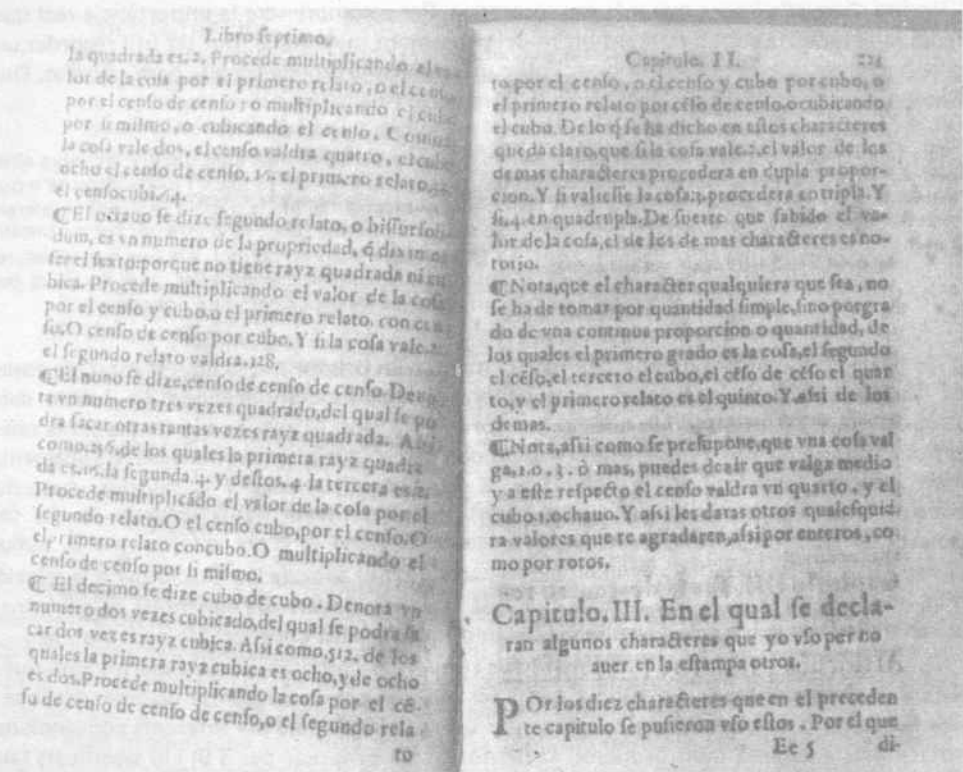


Fig. 33. El títol del capítol III del llibre d'àlgebra de Pérez de Moya és tota una declaració d'impotència tipogràfica: "En el qual se declaran algunos caracteres que yo uso por no auer en la estampa otros" (p. 221 de l'edició de 1590).

fets únicament sobre els símbols, raonaments fets fins i tot oblidant allò que els símbols simbolitzen. Per entendre la història de les matemàtiques, és important no oblidar que aquesta confiança és un producte essencialment modern, que aquesta confiança és aliena, amb seguretat, a les matemàtiques anteriors a Vieta. L'algebrista del Renaixement pensa geomètricament, i d'enlloc més que de la geometria obté alguna garantia sobre la veritat de les relacions que usa. Per ell no existeix altra manera que la geomètrica de demostrar la identitat que abans hem mencionat. En canvi, el matemàtic d'avui està acostumat a concebre les relacions numèriques des de llur aspecte formal, i és un autèntic virtuós a l'hora d'aprofitar fins al final totes les possibilitats dels símbols algebraics i de llur sintaxi. Per això acostuma a constatar, entre encuriolit i divertit, la possibilitat de donar un model geomètric a les implicacions i relacions que ell fonamenta en principis completament diferents; quan ho fa, però, no deixa de pensar quant més precisos i satisfactoris són els actuals plantejaments, i que els rectangles o els quadrats no són, en el fons, sinó un model o representació d'una veritat la plenitud de la qual és inexpressable i incompreensible geomètricament.

Encara que cada cop més debilitat, el substrat geomètric dels esquemes conceptuals va funcionar durant tot el 1500, i només això explica algunes de les característiques de

l'àlgebra d'aquella època que més ens sorprenen. Per a comprendre la importància real que tenia la geometria com a referent últim del pensament matemàtic, pot ser útil recordar un dels paràgrafs que obra l'*Ars Magna*, l'obra més evolucionada de les que hem estudiat. Diu Cardano, justificant el contingut del seu llibre (p. 9):

"Encara que podria afegir una interminable sèrie de regles i un llarg discurs fet sobre elles, conclourem la nostra detallada consideració amb la [*equació*] cúbica, i de les altres se'n parlarà, àdhuc amb generalitat, però merament de passada. Ja que la posició (*positio*) es refereix a una línia, el quadrat a una superfície i el cub a un cos sòlid, seria insensat per part nostra continuar més enllà d'aquest punt. La Naturalesa no ens ho permet. Així, com es veurà, totes les qüestions fins a la cúbica, inclosa, estan totalment demostrades, però les altres que afegirem, o bé per necessitat o bé per curiositat, no les explicarem sinó pobrament."

La conseqüència que ens interessa comentar en primer lloc d'aquest estat de coses és l'escassa potència conceptual dels símbols i de llurs combinacions. La funció dels símbols era molt més gràfica que no pas formalitzadora, i l'autonomia de les seves operacions i combinacions, respecte del referent geomètric, terriblement limitada. Bàsicament, eren recursos enginyosos per a agilitzar el llenguatge i alleugerir la retòrica. Aquesta consideració dels símbols algebraics primitius es manifesta múltiplament. A ella cal referir les paraules amb què Recorde presenta el signe = ("per estalviar-me la tediosa repetició de les paraules: és igual a:..."), així com el fet que la notació per a la relació d'igualtat fos una de les que més va costar d'unificar. Ja hem vist que molts autors introdueixen el seu signe o s'arreglaven prou bé amb mots o amb abreviacions com *esq.*, *aeq.*,...

Dins d'una consideració semblant dels símbols és comprensible la llibertat amb què, dins d'una mateixa obra, un símbol podia ser utilitzat per a representar objectes matemàtics diferents, o la que permetia representar un mateix objecte per diferents convencions notacionals a pàgines molt properes. Un autor podia proposar per a 91 i 19 significats tan diversos com $9x$ i $\sqrt{9}$, respectivament, perquè sabia que el context sempre aclariria amb quin sentit calia interpretar els símbols. Que el context jugui moltes vegades un paper determinant per a aclarir i fixar el significat concret amb què és utilitzat un símbol, és un tret directament heretat del llenguatge ordinari, en el qual aquesta funció del context és constant, decisiva i imprescindible.

Un exemple d'un altre tipus per a il·lustrar la poca densitat formal que hi havia darrera dels primers símbols algebraics és el següent. Cardano, per explicar la manera de plantejar, amb l'ajuda de la *cosa*, el problema de descomposar 10 en dues parts de manera que la diferència de llurs quadrats sigui 60, diu: "Tota vegada que no sabem quina quantitat és la gran i quina és la petita, prendrem la petita com a incògnita" (p. 27). Aquest nivell de precisió sabem nosaltres que és inútil; sense fer-ne res de la distinció, plantejarem el problema així $x^2 - (10 - x)^2 = 60$. Però Cardano necessita saber quina és la petita per a poder escriure aquesta resta. La relació del nombre denominat *cosa* amb el problema-contexte és tan forta, que no pot prescindir de tantes coses com nosaltres a l'hora de plantejar-lo.

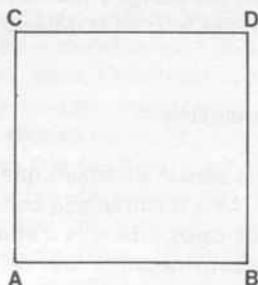
Les notacions exponencials primitives

Potser un dels llocs on és més evident la necessitat de l'esquema geomètric per als raonaments algebraics d'aquesta primera etapa és el capítol de l'*Ars Magna* que s'ocupa de la resolució de les equacions reduïbles a cúbiques introduint una nova incògnita $y = x^2$, o $y = x^3$. Cardano comença el capítol així (p. 155):

"DEMOSTRACIÓ.

Sigui, per exemple, cub quadrat i sis vegades quadrat quadrat igual a 100 ($x^6 + 6x^4 = 100$), i sigui cub quadrat el cos ABCD, que té una alçada AB, la qual serà, per tant, un quadrat, tota vegada que hem suposat que és el cub d'un quadrat. És evident, aleshores, que la superfície ABCD és el quadrat d'un quadrat, tota vegada que suposem que AB és un quadrat. Per tant, per hipòtesi, sis vegades la superfície ABCD i el cos ABCD igualen 100.

Suposem, per tant, que AB és la cosa. Aleshores el cos ABCD serà el cub i la superfície ABCD serà el quadrat. (...) Per tant el cub de AB i sis vegades el quadrat de AB serà igual a 100. Per la qual cosa AB serà conegut d'acord amb les regles pròpies."



És evident en aquest fragment la necessitat de referir completament al model geomètric la consideració d'una nova incògnita, i de deixar dit i aclarit quin és l'ens geomètric que li correspon. Pròpiament parlant, no hi ha un canvi de variable $y = x^2$, hi ha una mena de linealització de x^2 que permet imaginar un cub construït a partir de x^2 i permet de ficar, així, x^6 i x^4 dins del model geomètric familiar.

Això proporciona una nova perspectiva sobre les primeres notacions exponencials i llur sintaxi. Podem conjecturar que una dificultat important que es devia oposar a la interpretació additiva de *censocubo* (segons la qual 2, de *censo*, + 3, de *cubo*, donen la potència 5) seria la de trobar una imatge geomètrica escaient per al producte d'un quadrat per un cub. El principi additiu emprat més endavant, sense exponents, per Vieta i Fermat, exigeix una concepció molt més nítidament aritmètica de les magnituds manejades. De fet, aquestes poden ser fins i tot considerades representacions de magnituds geomètriques, com feia Vieta, però les operacions entre elles han de ser concebudes de forma completament independent de la geometria per a poder veure els avantatges de la sintaxi additiva. Entre altres coses, va haver-hi un desplaçament del centre d'interès, des de les magnituds en si mateixes a les operacions entre elles, darrera de l'evolució notacional que va permetre a Vieta i a Fermat escriure $AB^2 \cdot AB^3 = AB^5$ més o menys així ABqu per ABcu igual a ABqucu.

Dificultats com les que acabem d'analitzar expliquen en gran part el persistent rebuig que van trobar tots els intents, i foren nombrosos, d'introduir una notació i una nomenclatura que aprofitessin la seqüència natural de formació de les potències. Però possiblement també van influir altres factors en el fet que no quallés una proposta tan feliç com la de Chuquet, repetida per de la Roche, o en el poc ressò que van tenir idees de Pacioli, Grammateus, Stifel o Scheubel en subratllar adequadament la relació entre x^n i n , i de retruc la relació entre el producte de potències i la suma de exponents.

En una primera etapa, al període ara estudiat, segurament fou un factor important el camp limitat d'aplicacions en el qual es movien els llibres d'àlgebra. Llur principal preocupació era la resolució d'equacions, i els càlculs amb polinomis o amb fraccions algebraïques no tenien altre objecte que preparar i transformar les equacions per convertir-les en una per a la qual existís algorisme de resolució. En aquest context, poc es podia veure la necessitat o l'interès de disposar d'una notació adaptada al maneig de potències

d'ordre qualsevol. Encara que per nosaltres més inconvenients, les notacions que foren d'ús més comú s'adaptaven prou bé al maneig de potències de grau petit, no superior a 6, així com a les transformacions d'equacions del tipus $x^4 + ax^2 + b = 0$, etc. en equacions de segon grau. Per a una notació més abstracta i general eren escasses, si existien, les ocasions en què esdevenia realment necessària. En una segona etapa, al període dominat per Vieta, en certa manera el problema quedava invertit. Com ha subratllat Cajori, una àlgebra amb una única incògnita pot fer seva la notació d'exponents sense base proposada per Chuquet-Bombelli-Stevin molt més fàcilment que una àlgebra més evolucionada, en la qual la pluralitat de paràmetres en joc obliga a mantenir els noms per a les potències de cada incògnita fins que no es té la idea feliç de la notació cartesiana.

Càlcul formal versus raonament geomètric

La gran dificultat que exigia pensar altrament que en termes geomètrics es constata per tot arreu en aquest període. Una manifestació concreta n'és un tret que sempre ha cridat l'atenció: la multiplicitat de casos diferents d'equacions d'un mateix grau, equivalent al prejudici contra els coeficients negatius. Des del punt de vista de la demostració dels algorismes de resolució, resultava molt més senzill raonar sobre figures diferents que fer raonaments diferents sobre una mateixa figura, i més quan aquests raonaments exigien el recurs enutjós de manejar longituds negatives. Des del punt de vista de les solucions, és natural que una equació de tipus $x^2 + ax + b = 0$ (amb $a, b > 0$) no tingués cap interès, tota vegada que manca manifestament de solucions positives. S'ha dit de vegades que les solucions nul·les, en aquesta època, eren rebutjades. Estrictament parlant, això no és cert. Les solucions nul·les eren purament i simplement *ignorades*, mai no eren mencionades, cosa que no es pot deslligar de l'aspecte que ara comentem.

Una altra manifestació concreta de la poca consistència del llenguatge algebraic de l'època és la importància que totes les àlgebres concedien a la comprovació de resultats. La resolució d'un problema, i poc importava que hagués conduït a una equació de 1er, de 2on o de 3er grau, sempre anava seguida d'una prova: es realitzaven les operacions necessàries per a verificar que la solució trobada acomplia les condicions exigides a l'enunciat del problema. Aquest és un procés que avui negligim perquè ens assisteix el convenciment a priori que la correcta transformació d'equacions i la correcta aplicació dels algorismes de resolució fan *equivalents*, des del punt de vista aritmètic, l'equació de partida i l'expressió " $x =$ al nombre solució".

L'absència de càlcul formal provoca desviaments i obliga a prendre camins que avui meravellen. Cardano demostra, citant Euclides i omplint una trentena de línies, que la proporció (*ratio*) entre $3BC \cdot AB^2$ i $3AB \cdot BC^2$ (AB i BC són quantitats que Cardano representa per segments) és la mateixa que existeix entre AB i BC , és a dir $\frac{3BC \cdot AB^2}{3AB \cdot BC^2} = \frac{AB}{BC}$.

Pérez de Moya necessita *demostrar* que la suma dels quatre nombres $9 + \sqrt{75}$, $3 + \sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$ i $9 - \sqrt{75}$ (que ell escriu de manera molt més retòrica) és 24. Contràriament al que moltes vegades ha estat dit des de perspectives no històriques, nosaltres pensem que allò que totes aquestes coses evidencien no és tant que l'esquema geomètric representés un obstacle per a l'avenç de les matemàtiques com que la implantació del càlcul formal va associat a una discontinuïtat epistemològica notable.

En particular, les voltes llarguíssimes que Cardano ha de donar per a fonamentar lògicament el resultat ja citat, o les que necessita una regla com: si $x^2 = ax + by$, aleshores $y = x(x - a)/b$, allò que realment posen de manifest és que l'evidència que nosaltres

atorguem a aquestes fórmules no és sinó la que a nosaltres ens produeix l'automatisme familiar del llenguatge emprat. I arribem a creure que aquesta evidència no és fruit d'un procés d'aprenentatge, no és fruit del costum, sinó que és una evidència intrínseca a la notació. El càlcul algebraic modern té un valor inapreciable: respectant les regles que determinen allò que es pot fer i allò que no es pot fer amb els símbols, resulta que dels símbols mateixos mai no arribarà a sorgir una incoherència. Encara més, quan el plantejament simbòlic d'una qüestió és correcte, les conseqüències obtingudes per aplicació correcta de les regles de combinació dels símbols proporcionen informació vàlida sobre la qüestió. Aquesta vida pròpia, aquesta autonomia del llenguatge algebraic que avui ens és tan familiar, és el que ens fa considerar evidents, ara, resultats que no ho eren fa quatre-cents anys. Molts dels més fermes judicis sobre l'evidència, o el caràcter d'inmediats de certs resultats matemàtics (que sempre resulten estranyament poc evidents per a qui aprèn matemàtiques) es basen sobre un raonament viciat, la fal·làcia del qual pot resultar més entenedora des de la perspectiva en què ens hem situat. D'una banda, es creu que l'automatisme és evident perquè la relació matemàtica ho és, però, d'una altra, es recolza l'evidència d'aquesta en l'automatisme del llenguatge en si mateix. D'una banda no es concedeix prou entitat i contingut específic a tot allò de nou que representa cada relació per qui la ignora i ha de trobar-la o aprendre-la, i, d'una altra, no es concep el llenguatge algebraic amb tota l'autonomia que tot llenguatge té, especialment des del punt de vista sintàctic.

Expressió retòrica i formalismes

Un dels grans avantatges del nostre sistema simbòlic és que fa possible condensar en fórmules generals una infinitud de relacions o resultats particulars. D'aquesta característica se n'extreu tant de profit, juga modernament un paper tan important en qualsevol enunciat matemàtic, que és fàcil arribar a pensar que aquesta fou la finalitat per a la qual foren creats els símbols algebraics. Referint-nos una vegada més a l'obra més teòrica i menys practicaire de totes les que hem examinat, a l'*Ars Magna* de Cardano no apareix, amb símbols, ni una sola equació general. Mai no hi trobem, tampoc, una expressió

com $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ni qualsevol altra d'aquest tipus. Això no vol dir que els autors de l'època no enuncieassin con resoldre una equació *qualsevol* de 2on grau, això vol dir que mai no els van fer falta ni paràmetres ni símbols per a expressar resultats equivalents a les nostres fórmules simbòliques. Per descriure la resolució d'una equació de la forma $x^2 + bx = c$, es deia: preneu la meitat del nombre de coses ($b/2$), calculeu el seu quadrat, i a aquest sumeu-li el nombre (c); calculeu l'arrel quadrada d'aquesta suma, i a l'arrel resteu-li la meitat del nombre de coses; el valor de la resta serà la cosa (les instruccions són equivalents a $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$, que, operant, dóna la fórmula més familiar $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$).

Els antecedents immediats de les fórmules foren les receptes purament verbals que descrivien, retòricament, un conjunt d'instruccions amb els passos successius a efectuar. Només anys més tard, ja fora del període que hem estudiat, es van arribar a sintetitzar les receptes en símbols algebraics. La gènesi de les fórmules subratlla una ambivalència important: elles són l'expressió sintètica d'una successió d'operacions a realitzar per obtenir un nombre, i, alhora, el nombre que resultarà en efectuar-les. Caldria veure

fins a quin punt el pas de la retòrica als símbols va ser motivat per raons que no tenien res a veure amb la precisió o l'economia, els avantatges decisius amb què habitualment es justifiquen les fórmules. El fet és que quan l'àlgebra es preocupava essencialment de la resolució pràctica d'equacions concretes, cap de les fórmules que serveixen per a resoldre-les no apareixia com a tal.

L'absència de paràmetres és potser el símptoma més evident que els algebristes d'aquest període no es preocupaven de precisar la generalitat dels seus resultats, com ho farien els d'èpoques posteriors. Diferents recursos retòrics permetien enunciar resultats d'una certa generalitat, però les demostracions dels enunciat, si no eren geomètriques, es limitaven a ser la demostració d'un cas particular. Cal subratllar, en particular, l'absència de símbols equivalents als nostres x^n i $\sqrt[n]{}$ fins i tot en aquells autors que van trobar símbols pròxims als nostres x^2 , x^3 , x^4 , etc. i $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, etc. Com ja hem observat en referir-nos a la notació de les potències, la manca d'una notació evolucionada no es pot deslligar de la falta d'interès per manejar *en general* la potència d'una incògnita, o per manejar *l'arrel qualsevol* d'un nombre. Molts dels símbols emprats o proposats a l'època ens semblen inconvenients perquè ja tenim al cap la necessitat d'una notació que sigui *general*, que serveixi per a fer raonaments generals sobre famílies generals d'objectes matemàtics, cosa que no devia ser cap preocupació essencial per als algebristes de l'època.

Resum i Algunes Conclusions

Seria difícil de dir si, al període considerat, es realitza una progressió substancial en l'ús dels símbols algebraics. Aquests evolucionen innegablement, però tot sembla indicar que no hi ha cap ruptura nítida entre la filosofia simbòlica de Pacioli o Rudolff i la de Cardano o Stifel. Deixant de banda les intuïcions d'alguns autors sobre la importància d'un simbolisme eficient, o el sentiment que alguns poden haver tingut sobre la superioritat de les seves pròpies notacions respecte de notacions rivals, no és gens evident que cap a la meitat del segle XVI la formació del llenguatge algebraic hagués atès un estadi qualitativament diferent al de les primeres àlgebres sincopades. Tot aquest període sembla constituir un primer estadi ben delimitat, les característiques nuclears del qual cal referir a dos eixos principals. Un, la *funció* que és assignada als símbols algebraics, indissociable de l'*acció* que realitzen al si de les matemàtiques; dos, el *caràcter geomètric* de l'estructura lògica que els sustentava i articulava.

La funció essencial que fa néixer els símbols algebraics, i una de les raons que els lliguen al llenguatge retòric ordinari, és abreujar l'expressió i simplificar el maneig de certes tècniques algebraiques. Els símbols i llurs combinacions no són emprats sinó per a resoldre equacions, operar amb radicals, i, en la mesura en què fa falta per a simplificar i transformar equacions, per a multiplicar i dividir polinomis. Això és indissociable del fet que la *cosa*, la incògnita, *no era una variable*. En aquest estadi, els símbols que denotaven quantitats desconegudes mai no són utilitzats en sentit funcional. En particular, la idea de funció polinòmica és absent de tot arreu, així com ho és la idea d'expressar objectes geomètrics (circumferències, etc.) per mitjà de fórmules.

Tota vegada que s'utilitzaven mètodes de càlcul d'arrels aproximades que es basaven a donar diferents valors a la incògnita, acostant-se a la solució per tempteig (com els desenvolupats per Chuquet i Cardano, cf. p. 77 i p. 111-112), es podria objectar que la *cosa* entesa com a variable, i les expressions polinòmiques enteses com a funcions, són realitats implícitament presents ja a les primeres àlgebres. La distància entre els

conceptes en joc en el recurs tècnic esmentat i els necessaris per a tractar una quantitat desconeguda com a una variable és tanmateix considerable. És una distància molt superior, sens dubte, a la que separa els mètodes citats dels mètodes pre-algebraics de falsa posició. Tant els uns com els altres no fan sinó efectuar certes operacions amb nombres concrets, i del resultat, un altre nombre concret, deduir-ne informació sobre la situació de la solució (que és un altre nombre determinat). Que això admet una formulació breu i menys enfardegada en termes del concepte de funció, és evident. Però no ho és gens ni mica que aquest concepte fos *necessari* per a poder utilitzar aquells mètodes. El concepte de funció conté la idea de relació global, general, entre conjunts numèrics: la idea que a *qualsevol* nombre dels d'una certa classe hi queda associat un altre. En particular, això no es podia fer en aquest estadi amb el concepte de nombre tan poc sòlid i tan emboirat, tan poc depurat, de què es disposava. Allò que els mètodes de càlcul aproximat esmentats demostren és que certs recursos que troben el seu marc d'expressió més idoni en el llenguatge funcional neixen abans, i amb independència, del llenguatge que després els acotxarà.

Hi ha altres aspectes que confirmen que els símbols emprats per a designar x , x^2 , x^3 ,... representaven un nombre particular i concret, i no pas un nombre qualsevol, que la incògnita representava un nombre desconegut però perfectament determinat. Això explicaria la falta d'interès quasi absoluta, en tot el període, a trobar una notació que explicités la dependència, la relació funcional, entre la incògnita i les seves potències. Tant els símbols italians, com els alemanys, com les temptatives individuals més interessants, palesen una indiferència realment sorprenent al respecte. Les notacions més avançades, com la de Chuquet, arriben a respondre a la necessitat de relacionar les potències amb llur ordre, però ningú no sembla preocupat per relacionar la potència amb l'ordre i *amb la base*, cosa inexplicable en un context on la variació de la base fos significativa. Sembla clar, i es tracta d'una opinió que la psicologia de la intel·ligència deu poder confirmar, que associar a un símbol un nombre, i realitzar amb aquest símbol operacions aritmètiques com si fos un nombre, és desigualment difícil si el símbol es pensa associat a un nombre concret que si es pensa que el símbol representa un nombre genèric, un nombre que pot ser qualsevol nombre. També és clar que un cop en disposició de manejar variables, tant és manejar-ne una com cinc; que la *cosa* no seria una variable quedaria així confirmat per l'absència de paràmetres en l'etapa que hem estudiat.

Un aspecte particular de les diferències radicals que separen l'àlgebra pre-paramètrica de la que és capaç de raonar sobre paràmetres és l'elecció de lletres per a representar quantitats variables. És una convenció avui tan utilitzada, els individus amb formació universitària científica hi estan tan familiaritzats, que esdevé borrós el caràcter convencional d'aquest sistema notacional. Tan borrós, que molts professors d'àlgebra de nivell primari o secundari arriben a oblidar que és una convenció que cal aprendre. Per això mateix aquí volem subratllar que es tracta d'una convenció que, històricament, s'imposa tard i amb dificultats. Diverses circumstàncies demostren que és una convenció poc natural, els avantatges de la qual no són, d'entrada, gens ni mica evidents. Durant molt de temps, la segona incògnita va ser representada amb un recurs del mateix tipus que la primera: una *q* de *quantitas*, paral·lela a la *p* de *positio* o a la *co* de *cosa*; els problemes amb més de dues incògnites eren assenyadament evitats. En diversos moments de la primera meitat del segle XVI varen aparèixer propostes notacionals obertament a-literals, quan no anti-literals. Per exemple, la de Galighai, les de Buteon, les dels Digges. La idea genial de Chuquet, represa per Bombelli, en particular, marginava les lletres com a recurs notacional. Cap als anys 50 del segle, sorgeix a Alemanya la idea de representar les incògnites, quan n'hi ha moltes, per A, B, C,..., però aquest recurs no s'imposa i no

desplaça l'antiga notació. Per als problemes que només necessitaven una incògnita es continuaren utilitzant els símbols clàssics α , β , ..., i als problemes que n'exigien més d'una es representava la primera per α , ..., i les secundàries per A, B, C, ..., Stifel, el que més lluny va anar en aquesta direcció, l'any 1553 escrivia les progressions còssiques (cf. p. 167) corresponents a diferents lletres A, B, C, ..., explicitant fins i tot la possibilitat d'utilitzar qualsevol altra lletra. Tanmateix, ni Stifel ni cap dels seus contemporanis o deixebles mai no van utilitzar aquesta notació. Caldria esperar 75 anys perquè l'anglès Harriot, un antecedent directe de Descartes, utilitzés extensament la mateixa idea. Per valorar completament aquest aspecte, Koyré feia una comparança clarivident de l'algebrista amb el gramàtic: "El pensamiento del aritmético y del algebrista del Renacimiento se mantiene al nivel del gramático, es un pensamiento semiconcreto; se sigue la regla general, pero se opera con casos concretos: palabras o números. Por ello, la notación expresa de la incógnita —introducida por Vieta y perfeccionada por Descartes— señala una etapa decisiva en la historia de la notación y en la historia del pensamiento algebraico mismo. En efecto, refleja el paso del grado de abstracción del gramático al del lógico puro;..." (Taton, vol. II, p. 64).

Aquest pensament semi-concret al·ludit per Koyré és l'espectre determinant que endevinem darrera de l'omnipresència de l'esquema geomètric, el segon dels eixos principals que mencionaven al començament. Que la perspectiva geomètrica fos hegemònica significa, bàsicament, que el referent principal i decisiu dels objectes matemàtics manejats era llur versió euclídia: quan calia pensar els nombres, les operacions aritmètiques, la radicació, ..., i raonar sobre ells, es feia per mitjà del que aquestes coses eren dins del *Elements*. En particular, els *Elements* eren l'única font que proporcionava la convicció de veritat lògica, i constituïen l'estructura deductiva a la que calia referir obligadament la demostració de qualsevol resultat. Aquest pensament semi-concret, que encara no pot prescindir de la geometria, és al darrera de la noció de nombre incompletament desenvolupada i del raquitisme del llenguatge algebraic.

Estrictament parlant, les notacions emprades durant tot aquest període no van constituir pròpiament un llenguatge. Els dos trets més significatius que han de ser mencionats al respecte són la insuficiència de la sintaxi i la manca de generalitat de les solucions simbòliques adoptades. La insuficiència sintàctica troba la seva manifestació més evident en l'absència de parèntesis i de multiplicacions indicades. En particular, si prescindim de la proposta ambígua de Stifel en la progressió còssica, la multiplicació per juxtaposició no apareix en tot el període. Per això l'eliminació del 1 que acompanya la incògnita és tardana. "1co." era originalment una cosa molt semblant a les nostres expressions "1 pt." o "1 Km.", a les quals el caràcter bàsic de cardinal que té el nombre ens impedeix eliminar-lo. El pas de $1x$ a x és una convenció no natural, conseqüència d'un efecte de reflux de la progressiva constitució de la sintaxi, que va permetre eliminar redundàncies que no ho eren al començament.

Hem de parlar, finalment, del caràcter inconnex i ambigu que tenien les solucions notacionals proposades en aquest període. Si la representació simbòlica podia ser redundant i ambígua, o podia manca d'una sintaxi prou general, era perquè no hi havia al darrera cap pretensió de rigor ni de generalitat. La funció vertebradora del raonament que va tenir després, la va heretar directament de l'esquema geomètric quan aquest va ser substituït per l'esquema formal. En aquest primer estadi, als símbols algebraics no els calia sinó adaptar-se bé a cadascun dels problemes concrets a resoldre, sense que existís la necessitat que constituïssin un llenguatge capaç, en potència, *sense alterar el valor dels seus símbols ni la significació de llurs combinacions*, de ser utilitzat en diversos problemes diferents. Podríem dir, amb una imatge potser barroera, que els símbols alge-

braics, inicialment, no pretenien ser sinó un retall que s'adaptés bé a una parcel·la de raonament numèric —essencialment algorísmic. Només a l'etapa final de formació del llenguatge algebraic esdevingué evident l'interès que podia tenir que el llenguatge algebraic fos un vestit capaç d'embolcallar, alhora, tots els raonaments numèrics, sense haver d'adaptar-se cada cop a classes particulars d'ells.

CAPÍTOL 12

EVOLUCIÓ DEL CONJUNTE D'ELEMENTS ALGEBRAIC I DE LES SEVES OPERACIONS

El conjunt d'elements algebraics és el conjunt de tots els elements que poden ser obtinguts a partir d'un conjunt inicial d'elements, mitjançant les operacions algebraiques. Aquesta definició és una mica vaga, però és la que més s'aproxima a la realitat. En la pràctica, els elements algebraics són els que poden ser obtinguts a partir d'un conjunt inicial d'elements, mitjançant les operacions algebraiques. Aquesta definició és una mica vaga, però és la que més s'aproxima a la realitat.

El conjunt d'elements algebraics és el conjunt de tots els elements que poden ser obtinguts a partir d'un conjunt inicial d'elements, mitjançant les operacions algebraiques. Aquesta definició és una mica vaga, però és la que més s'aproxima a la realitat. En la pràctica, els elements algebraics són els que poden ser obtinguts a partir d'un conjunt inicial d'elements, mitjançant les operacions algebraiques. Aquesta definició és una mica vaga, però és la que més s'aproxima a la realitat.

El conjunt d'elements algebraics és el conjunt de tots els elements que poden ser obtinguts a partir d'un conjunt inicial d'elements, mitjançant les operacions algebraiques. Aquesta definició és una mica vaga, però és la que més s'aproxima a la realitat. En la pràctica, els elements algebraics són els que poden ser obtinguts a partir d'un conjunt inicial d'elements, mitjançant les operacions algebraiques. Aquesta definició és una mica vaga, però és la que més s'aproxima a la realitat.

El conjunt d'elements algebraics és el conjunt de tots els elements que poden ser obtinguts a partir d'un conjunt inicial d'elements, mitjançant les operacions algebraiques. Aquesta definició és una mica vaga, però és la que més s'aproxima a la realitat. En la pràctica, els elements algebraics són els que poden ser obtinguts a partir d'un conjunt inicial d'elements, mitjançant les operacions algebraiques. Aquesta definició és una mica vaga, però és la que més s'aproxima a la realitat.

CAPÍTOL 12:

EVOLUCIÓ DEL CONCEPTE D'EQUACIÓ POLINÒMICA I DE LES SEVES SOLUCIONS

Es podria pensar que el concepte d'equació neix directament del planteig de certes relacions numèriques que sols poden ser satisfetes per un valor determinat o per uns pocs valors de la incògnita que es tracta de calcular. No obstant, res més lluny de la realitat. Seria difícil determinar la primera data en què l'home es planteja resoldre una equació, però podem dir que la qüestió de resoldre equacions sorgeix en estadis molt primaris de la civilització, i com a necessitat de solventar certs problemes d'indole pràctica.

L'historiador George Sarton, al seu llibre *Història de la Ciència* (p. 88), explica que en una tauleta babilònica d'argila conservada al Louvre (AO 6770), tauleta que data dels anys 2000 a.C., es presenta el problema de determinar la quantitat de temps que ha de passar perquè una determinada quantitat de diners prestada a l'interès compost del 20% dupliqui el capital prestat. Problema que consisteix a resoldre l'equació exponencial $(1,20)^x = 2$, i, curiosament, la resposta que ve a la tauleta d'argila és exacta: 3 anys i 4/5 d'any. No hi ha constància de la forma com van procedir per trobar-la, encara que és de suposar que la solució fou trobada de forma empírica, per tempteig. L'exemple posa de manifest que els problemes de les equacions no sorgien des d'un punt de vista intern de les matemàtiques, sinó per fer front a les necessitats generades per la vida social.

Així, foren els calculistes sumeris els primers a resoldre distints problemes en què intervenien equacions polinòmiques de primer i segon grau. El fet de ser uns experts calculistes ha suggerit a l'historiador Neugebauer que disposaven d'un mètode per a reduir les equacions cúbiques a una forma normal, que resolien per aproximacions a partir d'una taula de valors on es computaven els resultats de $n^2 + n^3$, però això no deixa d'ésser una conjectura. Segui com sigui, els sumeris van tractar les diferents equacions que es plantejaren des d'una perspectiva d'aproximació a les solucions, i van disposar de les fórmules que resolien les equacions de primer i segon grau.

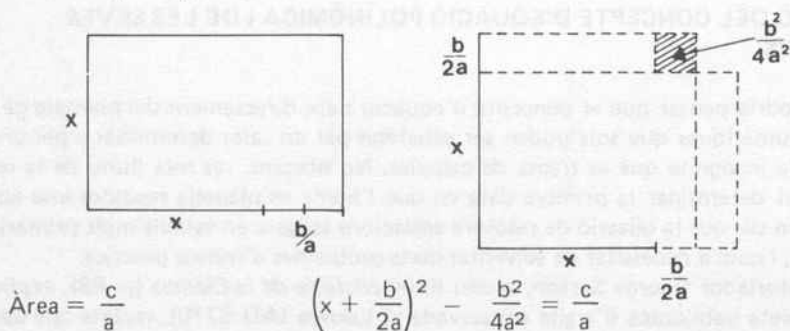
Contràriament, els grecs van enfocar el problema de les equacions de primer i segon grau des d'una òptica geomètrica. El seu esperit, molt més lògico-deductiu, els portà a demostrar les fórmules aplicables a través dels models geomètrics. Fins i tot resulta interessant aprofundir en la metodologia que guia el pensament de Diofant en resoldre les equacions de segon grau. Analitzarem la forma de resoldre un problema concret, per tal de veure que encara que en cap moment no es presenta un esquema geomètric, aquest és subjacent en el seu discurs de raonament retòric.

A la qüestió XXVII, del primer llibre de l'Aritmètica, proposa el problema de trobar dos nombres que sumin 20 i tals que el seu producte faci 96. Diofant procedeix així: suposa que la diferència entre els dos nombres buscats sigui de 2 aritmos (la incògnita); o sigui que el nombre més gran és 10 més 1 aritmo, i el més petit 10 menys 1 aritmo; el producte dels dos fa 100 menys 1 aritmo quadrat, que ha d'ésser igual a 96; i en conseqüència, 1 aritmo val 2 unitats i els dos nombres buscats són 12 i 8 respectivament.

Transcriurem a continuació les operacions realitzades sota un model geomètric i en forma general:

El problema és resoldre una de les formes d'equació de 2^{on} grau: $ax^2 + bx = c$, plantejat sota l'aspecte que el primer membre sigui un producte de dos segments desconeguts (que formaran un àrea rectangular) i el segon un nombre quadrat (àrea quadrada).

L'equació inicial és equivalent a $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$, que es transforma en el producte de longituds $x \left(x + \frac{b}{a} \right) = \frac{c}{a}$.



Com que el rectangle s'ha de transformar en un quadrat, utilitzarem el quadrat que té per costat la semilongitud dels segments x i $x + \frac{b}{a}$, és a dir, el quadrat de costat $x + \frac{b}{2a}$. La relació entre l'àrea d'aquest quadrat i la del rectangle anterior és que l'àrea del quadrat excedeix la del rectangle en el quadrat de costat $\frac{b}{2a}$, d'on l'àrea del quadrat de costat $x + \frac{b}{2a}$ és igual a la del rectangle d'àrea $\frac{c}{a}$ més l'àrea del quadrat de costat $\frac{b}{2a}$; d'aquí que

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a}}, \text{ d'on es deriva la fórmula } x = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a}}.$$

Diofant, en el fons, segueix aquest procediment, que li queda simplificat per haver triat adequadament la incògnita a utilitzar.

De totes formes, la resolució d'aquests problemes, en si mateixos, no constitueixen els començaments de l'àlgebra, sinó més aviat tècniques concretes per a resoldre alguns determinats problemes de planteig. L'inici de l'àlgebra se situa històricament en la formulació i pràctica de les regles del *cheber i almucâbala*, per a resoldre les equacions de primer i segon grau. Al-Hwarizmi assenyalaria, en aquest sentit, el començament d'un llarg camí que conduiria a les estructures algebraïques modernes. No obstant, creiem convenient reflexionar i aprofundir sobre el caràcter de les operacions intel·lectuals que entren en joc en la resolució de les equacions de primer i segon grau; pot ser que, després de tot, els inicis de l'àlgebra no siguin tan nítids com estableixen certs historiadors de les matemàtiques.

Intentarem posar en relleu que la pràctica de resolució d'equacions ve precedida, tant cronològicament com conceptualment, per certes estructures subjacents a les equacions, i que corresponen a diferents graus d'abstracció de problemes simples. Assenyalarem tres estadis bàsics d'operativitat, que configuraran l'estructura operativa de les regles de l'àlgebra.

A) Un primer estadi correspon a la resolució de problemes aritmètico-comercials, i que no són aliens del tot al planteig d'equacions. Entre ells hi hauria els problemes d'equivalència de diners expressats en monedes diferents, on es tracta de trobar el valor d'una determinada moneda en relació a les altres (Veure pàg. 52); o bé els problemes corresponents a quantitats de pesos i mesures de mercaderies expressats en unitats diferents,...

És convenient constatar en aquests tipus de problemes diverses qüestions:

1º) Que per a sumar una quantitat de diners, expressada en diferents monedes, amb una altra, l'operació és feta a partir d'ajuntar les quantitats de monedes d'una mateixa "qualitat". Ex. Qui vol sumar 3 ducats, 5 sous i 12 diners amb 2 ducats i 7 diners, ha de procedir sumant ducats amb ducats, sous amb sous i diners amb diners, d'on resulta 5 ducats, 5 sous i 19 diners. Forma de procedir idèntica que quan es planteja sumar diferents monomis.

2º) Que quan es té una equivalència de diners expressats en diferents monedes, es passa a una altra equivalència més simplificada sense més que treure quantitats iguals dels dos membres, sempre i quan siguin de la mateixa "qualitat". Ex. Qui vol simplificar l'equivalència: 57 ducats, 3 sous i 5 diners igual a 39 alfonsis, 7 sous i 9 diners, procedirà a sustreure 3 sous i 5 diners de tots dos membres, obtenint: 57 ducats iguals a 39 alfonsis, 4 sous i 4 diners.

3º) Que per a desembarassar el valor d'una moneda respecte a les altres és necessari fer l'operació anterior amb la finalitat d'aïllar aquesta moneda en un membre de l'equació.

Aquesta pràctica, natural dins del terreny mercantil, és un antecedent que donarà sentit a les regles del *cheber i almucâbala*, aplicades a la resolució d'equacions polinòmiques.

B) Un segon estadi de la pràctica anterior el trobarem a les operacions numèriques entre els nombres radicals. Així per exemple, les regles per a sumar: $3 + \sqrt{5}$ amb $4 + 2\sqrt{5}$ fan $7 + 3\sqrt{5}$ o bé multiplicar: 4 per $3 + 2\sqrt{5}$ és $12 + 8\sqrt{5}$.

Aquestes operacions, estrictament numèriques, abonaran el terreny per a trobar els procediments que facin tractables les equacions. I també de la pràctica d'aquestes operacions entre nombres radicals compostats apareixeran les regles dels signes. És seguint precisament aquest punt de referència com al-Hwarizmi introdueix la manera d'operar expressions amb diferents potències de la incògnita (Veure pàg. 24).

C) El tercer estadi el constitueixen les expressions polinòmiques més abstractes, on les igualtats ja no són numèriques, sinó que corresponen a la recerca d'un o dos nombres que les verifiquen. I aquest estadi de treball serà el que es manifestarà extraordinàriament fèrtil per a la creació matemàtica, donant lloc amb el temps a la teoria d'equacions. Així doncs, les equacions polinòmiques no neixen al marge de les operacions que s'estableixen en altres camps numèrics, o fora del si dels problemes mercantils. Tampoc no apareixen en un primer estadi les expressions polinòmiques (com a entitats autònomes) separades de les equacions. De fet, la teoria de polinomis com a tal ni es planteja, i quan ocasionalment es fa, no és sinó en la perspectiva d'estudi de la resolució d'equacions polinòmiques de primer, segon i, circumstancialment, de tercer grau. És clar que, en la mesura que intervenen les operacions elementals en el transcurs del planteig i resolució de les equacions polinòmiques, es plantegen les operacions entre polinomis, encara que de vegades aquestes operacions queden confuses dins l'ampli context de transformació

d'una equació en una altra. Analitzarem l'exemple concret d'un problema que és resolt aplicant les regles de l'àlgebra, per tal d'extreure'n certes observacions.

Ex. Si un nombre més 5 unitats es divideix per aquest mateix nombre menys dues unitats, obtenim 4, quant val aquest nombre?

La successió d'operacions que intervenen en la resolució del problema, utilitzant l'àlgebra simbòlica, que permet veure-ho més clar, (encara que el procés d'operacions de l'àlgebra retòrica dels àrabs fos exactamen el mateix) és:

Equació del problema: $\frac{x+5}{x-2} = 4$

$$x + 5 = 4(x - 2)$$

• Multiplicant els dos membres per $x - 2$

$$x + 5 = 4x - 8$$

$$5 = 3x - 8$$

• Restant la incògnita als dos membres

$$13 = 3x$$

• Sumant 8 als dos membres

$$x = \frac{13}{3}$$

• Fent 3 vegades més petit cada membre

Aquestes idees senzilles són les que van emprar els àrabs eficaçment, i que van donar lloc a les regles del *cheber i almucàbala*. Des d'un punt de vista conceptual és prou evident i lògic que en aquella forma de procedir es passés d'una igualtat a una altra, però el que no és tan obvi és que es passés a una *igualtat equivalent a l'anterior*, ja que aquesta equivalència sols ho és des del punt de vista de la resolució de l'equació. Aquest és el descobriment més important del nou art inaugurat pels àrabs, i que permet, fins a cert punt, automatitzar el procés a partir d'unes regles perfectament definides, oblidant el contingut concret de la incògnita, per a retrobar-lo al final del procés.

La forma de procedir de Diofant era essencialment diferent, ja que la transformació d'una equació en una altra sempre era feta a partir del raonament aritmètic no automatitzat, cosa que obligava a arrossegar constantment el significat de cada una de les equacions intermèdies. És fàcil de veure el canvi de perspectiva introduït pels àrabs respecte a Diofant, només considerant la manera de procedir per a resoldre un problema concret

com l'abans esmentat, d'equació $\frac{x+5}{x-2} = 4$.

Metodologia de Diofant:

Si l'arítmio més 5 unitats, dividit per 1 arítmio menys dues unitats, ha de donar 4, vol dir que 1 arítmio més 5 unitats ha de ser igual a 4 arítmios menys 8, el que és equivalent a dir que 3 arítmios menys 8 són 5 unitats, i per tant, 3 arítmios són 13, i el nombre buscat ha de ser tres vegades més petit que 13, o sigui 13/3.

Metodologia dels àrabs:

1 chaï més 5 partit per 1 chaï menys 2 és 4 (Multiplicar els dos membres de la igualtat per 1 chaï menys 2)

1 chaï més 5 igual a 4 chaï menys 8 (Restar 1 chaï als dos membres)

5 igual a 3 chaï menys 8 (Sumar 8 unitats als dos membres)

13 igual a 3 chaï (Segons la regla de resolució de les eq. de 1^{er} grau)

1 chaï és 13/3.

Però en canvi, en cap ocasió no es procedia calculant el resultat de dividir $x + 5$

per $x - 2$, la qual cosa també els hagués permès resoldre el problema, segons la successió d'operacions:

$$\frac{x+5}{x-2} = 4 ; 1 + \frac{7}{x-2} = 4 ; \frac{7}{x-2} = 3 ; x-2 = \frac{7}{3} ; x = \frac{7}{3} + 2 = \frac{13}{3}$$

Fins al Renaixement no apareixen els algorismes per a dividir un polinomi per un altre, i l'operativitat entre polinomis queda reduïda als algorismes per a sumar, restar i multiplicar; la qual cosa no és d'estranyar, si tenim en compte que la divisió esdevenia innecessària en el marc de resolució d'equacions que es plantejaven. Aquesta estricta operativitat de polinomis anava associada a la teoria de com passar d'una equació polinòmica a una altra equivalent, que junt al problema de resolució d'equacions polinòmiques simplificades al màxim (sense monomis del mateix grau als dos membres de l'equació) constituïen els tres aspectes bàsics de l'àlgebra àrab, els quals s'englobarien dins el que seria la "Teoria de resolució d'equacions de primer i segon grau".

Resumint, doncs, el tractament de la teoria es reduiria a dues qüestions fonamentals:

A) Com conduir tota equació inicial a una altra del tipus $P(x) = Q(x)$, tal que tots els coeficients de $P(x)$ i $Q(x)$ siguin positius, i que a més no apareixin als dos costats de la igualtat incògnites afectades de la mateixa potència.

B) Com resoldre de forma automàtica $P(x) = Q(x)$, amb totes les variants possibles que es poden presentar.

Les dues qüestions s'havien de resoldre dins d'un marc molt limitat, com era la no existència dels nombres negatius, cosa que dificultava extraordinàriament els processos a seguir.

Per a abordar A) n'hi ha prou amb la idea que en una igualtat qualsevol de coses es pot afegir, treure o multiplicar una mateixa quantitat als dos membres de la igualtat i sempre s'obté una altra igualtat equivalent.

Les regles de com reconduir una equació qualsevol a la seva forma més reduïda A) són completes, i resolen fins i tot els casos en què alguns polinomis queden afectats per radicacions.

Per altra banda, l'avenç global del desenvolupament de la teoria de resolucions d'equacions B) serà abordat amb èxit pels matemàtics italians a la primera meitat del segle XVI (Cardano, Tartaglia, Ferrari). Les formes de procedir que Cardano exposa a l'*Ars Magna* estan encara impregnades de construccions geomètriques, però cada cop més, en el transcurs de certs problemes, van apareixent entitats "anormals", fruit dels càlculs formals, que van prenent autonomia pròpia i digna atenció (Veure nombres negatius en l'obra de Cardano). Durant una etapa de límits indefinits coexistiran, a les obres dels autors matemàtics, els recursos del càlcul formal, que pugnen per desenvolupar-se plenament, absorbint en el procés de la seva consolidació tota millora notacional, i al mateix temps les demostracions de caire geomètric, que sovint justifiquen i reforcen els mateixos càlculs formals, els quals, per si sols, encara no tenien prou valor demostratiu. I és que la ruptura epistemològica entre la concepció geomètrica i el càlcul formal no es farà sinó d'una manera molt lenta i evolutiva, de tal forma que a les mateixes obres de Vieta i Stevin encara trobem la interpretació geomètrica en el planteig d'una equació, amb l'exigència que aquestes verifiquin la regla dels "homogenis"; és a dir que una equació com $x^3 + bx^2 + cx = d$ s'entén com una igualtat de sòlids (volums), representant cada monomi el següent: x^3 és un cub de costat x ; bx^2 és un paral·lelepípede de base quadrada de costat x i altura b ; cx és un paral·lelepípede d'àrea quadrada c i altura x i d no és més que un cub de volum d ; i així es procedeix a interpretar totes les equacions, siguin del grau que siguin.

La potencialitat que, com a eina de treball matemàtic, representava el tractament automatitzat de les equacions no va passar per alt als matemàtics occidentals de finals del segle XV i començaments del XVI. Hi havia la plena consciència que allò representava un estadi de treball qualitativament diferent a totes aquelles tècniques concretes de resolució de problemes aritmètics a partir dels mètodes de una falsa posició, dues falses posicions, per oposició i remoció, etc... Que s'entreveia que s'estava davant d'una nova metodologia revolucionària, que anava a capgirar completament el tractament dels problemes, ho demostra el següent paràgraf entusiasta de Chuquet, extret del *Triparty*, en començar el tercer capítol, dedicat a l'àlgebra:

“Però, de totes les regles tractades abans, la que esdevé meravellosa per excel·lència és la regla de l'àlgebra (règle des premiers), que realitza tot allò que les altres fan i encara innumerables càlculs més d'inestimable profunditat. Aquesta regla és la clau d'entrada i la porta dels abismes que hi ha en la ciència dels nombres”.

Era evident que s'havia arribat a un filò que prometia ser molt ric, i que anava a ser explotat pels millors cervells de l'occident renaixentista.

Les bases d'un plantejament global en la forma d'enfocar l'estudi de les equacions polinòmiques les trobem per primera vegada a l'obra de Chuquet. Si en un primer estadi, i vinculat a la dita teoria de resolució d'equacions de primer i segon grau, els polinomis tenien la seva referència en llur interpretació geomètrica, i les distintes fórmules de resolució es basaven en un model geomètric, serà Chuquet qui procedirà a una primera independització d'aquesta teoria de la seva interpretació geomètrica, assentant les bases per al desenvolupament del càlcul formal entre polinomis. És aquest enfocament ampli el que el condueix a cercar les formes notacionals més convenients i pràctiques per a facilitar el càlcul formal. D'aquesta manera, la seva notació no diferirà en l'essencial de la notació cartesiana (llevat de la inconveniència de no poder treballar més que amb una sola incògnita).

III

Propostes dictàctiques per a l'àlgebra elemental

CAPÍTOL 13:

CONSIDERACIONS GENERALS

La renovació didàctica i pedagògica

Des del moment que l'educació escolar va començar a ser una realitat d'importància social considerable, i des del moment, en particular, que calgué difondre àmpliament el coneixement científic, va adquirir interès el fet d'escollir adequadament la metodologia a seguir en l'aprenentatge d'aquest coneixement. En els darrers 75 anys, el fenomen anterior no ha fet sinó aguditzar-se, conjuminant-se amb una autèntica explosió de nous resultats i noves formulacions científiques.

La preocupació didàctica ha acompanyat gairebé sempre els intents de renovació pedagògica, nombrosos des de la Revolució Francesa. Des de l'*Emile* rousseauià, passant per Pestalozzi i Herbart, fins a Maria Montessori, una sèrie d'idees sobre un ensenyament respectuós de l'individu, que fomenti les seves potencialitats, que el faci íntegre i integrat a la societat,... van anar evolucionant i prenent cada vegada més cos, fins al punt que difícilment, avui, trobaríem algun programa educatiu que deixés d'acceptar-les. Una de les novetats interessants aparegudes en aquest corrent d'idees, durant el segle present, ha estat la nova consideració donada a certs factors molt directament lligats al saber científic: capacitat d'observació, importància de la manipulació i de l'experimentació, del contacte amb la naturalesa,... Sens dubte, una de les manifestacions concretes més interessants d'aquest esperit fou l'Institut-Escola.

Pel que fa estrictament a l'ensenyament de les matemàtiques, en els anys de transició entre els segles XIX i XX ens cal mencionar dos matemàtics d'alçada, que protagonitzaren iniciatives importants. Felix Klein, autor entre altres coses d'aquella revolució de la geometria coneguda com *el programa d'Erlangen*, va intervenir activament en la reforma dels plans d'estudi de l'ensenyament mitjà, proposant, contra l'opinió conservadora, que hi fos integrada una introducció al Càlcul Infinitesimal. Va escriure una obra remarcable dedicada als professors de matemàtiques d'aquest nivell, posant al seu abast els coneixements de la matemàtica més moderna. Defensor del mètode genètic, Klein hi enfocava molts dels temes des de la perspectiva donada per la forma com aquests temes s'havien desenvolupat històricament. Fruit d'aquella empresa regeneracionista dirigida per Rey Pastor, la Biblioteca Matemàtica, és la traducció castellana d'aquesta obra valuosa, *La matemàtica elemental, vista desde un punto de vista superior*.

Un altre eminent matemàtic preocupat per l'ensenyament que també es pronuncià a favor del mètode genètic fou H. Poincaré. Les següents són paraules que va escriure a *Ciència y método*:

"...Sens dubte que és costós per un mestre ensenyar allò que no el satisfà completament, però la satisfacció del mestre no és l'única finalitat de l'ensenyament; ha de preocupar-se primer de què és l'esperit de l'alumne, i què es desitja fer d'ell. Els zoòlegs pensen que el desenvolupament embrionari d'un animal resumeix en un temps molt curt tota la història dels seus avantpassats, des dels temps geològics. Sembla ésser que succeeix el mateix en el desenvolupament dels esperits. L'educador ha de fer passar el nen per on han passat els seus pares; més ràpidament, però sense deixar-se cap etapa. D'aquesta manera, la història de la ciència ha de ser la nostra primera guia". (p. 99)

Molts matemàtics posteriors han estat partidaris d'adoptar punts de referència semblants per estructurar l'ensenyament de les matemàtiques. Al nostre país, Rey Pastor i Puig Adam feren un notable treball d'elaboració de material destinat a renovar-ne la didàctica. Les seves obres, en tants aspectes admirables, reflecteixen aquesta preocupació per la història de la disciplina i per l'actitud activa del qui aprèn, que són les millors garanties d'un treball didàctic valuós. Potser poques coses siguin tan simptomàtiques del clima d'esterilitat cultural dels 40 anys inacabables del franquisme com el fet que l'obra d'aquestes dues personalitats, que va merèixer el reconeixement internacional, i fins i tot del "Ministerio de Educación Nacional", no sigui avui un patrimoni viu de tots nosaltres. Tot al contrari, moltes de les pàgines que la contenen, arraconades per aquell bluf i aquella fullaraca de les matemàtiques dites *modernes*, avui no podem trobar-les sinó dins la pols d'alguns fons de biblioteca.

L'aprenentatge com a redescobriment

Aprendre alguna cosa, especialment quan aquesta cosa és complexa, és, en algun sentit, reconstruir-la per nosaltres mateixos. Entendre alguna cosa, en el mateix sentit, és tenir la capacitat de sintetitzar-la creadorament. No és altra la raó per la qual l'individu, en l'assimilació espontània de molts conceptes, reproduceix en certa manera el camí recorregut històricament per arribar a incorporar aquests conceptes al saber comunitari. Per aquest motiu, els redescobriments dels fets (de la solució d'un problema, de l'enunciat d'un teorema,...) per part de l'individu és allò que millor el prepara per a assumir íntegrament els continguts d'una teoria matemàtica. Per aquest motiu, també, allò que proporciona un més gran aprofundiment de la matèria estudiada no és la seva exposició ordenada lògicament, sinó l'enfrontament directe amb els problemes més importants.

La pregunta *què vol dir saber matemàtiques?* admet respostes molt diverses. Possiblement tantes com la pregunta *què és essencial en el quefer matemàtic?* Per uns, el que és important és conèixer els principals teoremes, les definicions més importants, els contra-exemples més notables, les demostracions més interessants; per d'altres, potser tenir un bon coneixement de les aplicacions de les matemàtiques i de llurs possibilitats reals; per d'altres, encara, potser la capacitat de resoldre problemes,...

Tothom està d'acord que dins de les matemàtiques hi ha dos aspectes d'activitat complementaris, i que tots dos tenen el seu just lloc. L'un correspon al procés de recerca i d'elaboració d'una teoria, on intervien la improvisació, la intüició, les analogies, les provatures dels més variats recursos, els atzucacs, i on els resultats apareixen per vies a vegades tortuoses, i quasi sempre de forma desordenada (o almenys no ordenada en el sentit més lògic de la paraula). Un altre procés, que és posterior cronològicament i de

naturalesa completament diferent, consisteix a afinar els resultats de la recerca anterior, ordenant-los. És en aquest darrer estadi d'elaboració intel·lectual quan s'intentarà fonamentar els resultats trobats sobre unes bases fermes, donant rigor a cada un dels raonaments emprats en la recerca dels teoremes; aquests s'abrigaran sota un rigorós llenguatge formal, implecable des d'un punt de vista lògic i convincent per tota persona que gaudeixi d'una formació matemàtica. Es farà més, encara: s'ordenaran els resultats trobats en forma de lemes previs i teoremes, sota una estructura lògica, i concatenats de tal manera que la metodologia deductiva permeti anar passant d'un d'ells a un altre amb la màxima economia de temps i grafisme, s'eliminaran aquells resultats tangencials que no tinguin un interès global des del punt de vista de la teoria general, i, per últim, es presentarà la teoria d'una forma més o menys acabada, intentant deixar els mínims interrogants, o qüestions no resoltes. Tot estarà aleshores a punt per a poder escriure un llibre titulat, modestament, "Introducció a la teoria de..."

Dins del procés de desenvolupament de les matemàtiques és prou clar que totes dues activitats matemàtiques ressenyades són necessàries, i que es complementen de tal forma que l'una sense l'altra aviat arribarien a les seves fronteres naturals. Però si hem fet aquesta divagació és per poder-nos plantejar en quina mida caldrà utilitzar aquests dos aspectes de les matemàtiques *en el seu ensenyament*.

Tradicionalment, a l'ensenyament ha predominat de forma excessiva el segon aspecte de la tasca matemàtica, però en una versió molt limitada i infantil: els resultats ja venien estructurats des dels llibres, o els estructurava el professor. Si això era possible, aquest fenomen encara es va aguditzar més a la darrera etapa de "matemàtiques modernes". Aquesta opció ha comportat que l'estudiant no pot intervenir de forma activa en el seu propi procés d'aprenentatge, i el força a una actitud purament passiva i receptiva. S'ha demanat a l'estudiant que se circumscriu a aprendre els principals teoremes d'una teoria i a saber fer exercicis, per tal de veure si havia assimilat correctament el tema.

Evidentment, amb l'esquema *teoria ordenada* → *exercicis banals d'aplicació* s'ha aconseguit ampliar els programes, però pel camí s'han perdut molts dels elements més interessants que hom pot extreure de l'ensenyament de les matemàtiques. De fet, se li ha escamotejat a l'alumne el tipus d'activitat més apassionant: la recerca, la provatura, la conjectura d'una determinada relació, la joia de trobar per si mateix un camí que s'endevina ple de possibilitats,... És clar que tot això és un luxe si l'ensenyament cal fer-lo amb un cronòmetre a la mà i a contra-rellotge. Ara bé, si una de les fites més importants de l'ensenyament és suscitar la curiositat per a aprendre, i la satisfacció que depara el coneixement de les coses, serà important no oblidar la part més creativa de l'activitat matemàtica.

Pensem que seria un pas molt important, per tal de remuntar l'apatia que sovint envaeix les aules, recuperar part de la frescura mental que comporten els petits descobriments matemàtics en els quals poden participar els nostres alumnes. És en aquest sentit que ens plantejem desenvolupar, als propers capítols, alguns recursos didàctics extrets a partir del coneixement de com es va desenvolupar l'aritmètica i l'àlgebra.

La nostra intenció és posar en relleu aquelles qüestions susceptibles de ser redescobertes per l'alumne, configurant el marc òptim de problemes i exercicis que pot presentar el professor a tal fi. Al mateix temps, procurarem d'analitzar aquells conceptes més complexos que presenten dificultats ocultes i que requereixen un tractament més lent i pacient, per tal que l'alumne els cossi correctament. Cal no perdre de vista que molts conceptes que per nosaltres són *naturals*, a base d'haver-nos-hi anat familiaritzant, no ho són pas a l'estadi psicològic de l'adolescent.

Advertim, d'entrada, que els temes que presentem no estan provistos ni de l'estructura lògica impecable pròpia dels llibres de text (cosa que no ens importa gens ni mica), ni del nivell de concreció pròpia d'un material ja a punt de ser utilitzat a classe (cosa que lamentem i que procurarem esmenar més endavant). El material que oferim no és per a ser seguit al peu de la lletra; és molt més un croquis, un conjunt d'idees i suggerències, que un quadre acabat.

CAPÍTOL 14:

LA INTRODUCCIÓ DELS NOMBRES TRENCATS I LES OPERACIONS AMB ELLS

Puntualitzacions que es desprenen des del punt de vista de la història

a) Els trencats són definits a partir del seu servei, i en conseqüència la definició es recolza en el significat directe d'aquests nous nombres (veure les definicions que donen Sanctcliment i Chuquet, pàg. 144). El naixement dels trencats no respon a la idea d'ampliació dels enters per a tancar les operacions elementals entre ells (resolució de $3x = 2$), perspectiva molt moderna que contempla les categories de nombres des del punt de vista de la seva estructura algebraica, sinó que els trencats apareixen com a eina per a poder mesurar, pesar i valorar quantitativament objectes de la realitat que no són expressables a partir dels enters.

b) Els trencats juguen un paper funcionalment equivalent als enters, en la mesura que tots ells es refereixen sempre a unitats de mesura exactament entera, ja sigui prenent la unitat de mesura, o bé una part "exacta" d'ella. És a dir, el valor numèric assignat a un mateix objecte real tant pot venir donat per un nombre enter com trencat (3/4 de Kg. de sucre és equivalent a 750 grs. de sucre; 1/4 d'hora és equivalent a 15 minuts,...). Després de tot, l'equivalència funcional es retrobarà en el desenvolupament de la teoria de nombres, on serà equivalent investigar moltes proposicions dins del camp dels enters o el dels racionals (és equivalent demostrar l'últim Teorema de Fermat en el camp dels enters o en el dels trencats,...)

c) Els algorismes operatius entre trencats es deriven directament de la interpretació i significació dels trencats com a ens numèrics, tals que per a ser operats requereixen haver estat comparats a partir d'una sub-unitat de mesura que quedi compresa, simultàniament i de forma exacta, dins de les sub-unitats determinades pels denominadors dels trencats a operar. La idea de fraccions equivalents i reducció a comú denominador no pot desvincular-se del càlcul amb trencats, així com l'ordenació de trencats requereix comparar-los a partir d'establir sub-unitats de mesura comunes.

d) Els trencats apareixen històricament com a nombres *absolutament apropiats* per a aproximar solucions del càlcul numèric (ex. càlculs d'arrels no exactes) i d'equacions. Fins i tot són desenvolupats diferents algorismes de recurrència a tal fi (veure Chuquet, pàg. 77-79).

Les diferents opcions possibles per a presentar el tema dels nombres racionals

A grans trets, podríem dir que hi ha dues formes essencialment diferents de presentar els nombres racionals: una és la que contempla la classe dels nombres racionals des d'un punt de vista lògic, i una altra que ho fa des d'un punt de vista intuïtiu, vinculat a la significació numèrica dels trencats i als algorismes operatius.

L'ensenyament de les matemàtiques a la darrera etapa, coneguda sota el nom d'*ensenyament de les matemàtiques modernes*, ha donat especial relevància a presentar els nombres, des de l'òptica de les estructures algebraïques assentades sobre els conceptes de la Teoria de Conjunts, inaugurada amb G. Cantor. En aquesta perspectiva, les diferents classes de nombres s'han organitzat segons una escala d'inclusió, o millor dit d'ampliació del camp numèric, fent intervenir com a element primordial el tancament de les operacions suma i producte, cosa que origina la classificació $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, amb el corresponent quadre d'estructures algebraïques:

$\mathbb{N}$, + monoïde

$\mathbb{Z}$, +, · anell

$\mathbb{Q}$, +, · cos

$\mathbb{R}$, +, · cos complet

$\mathbb{C}$, +, · cos complet, on cada polinomi de coeficients complexos té tantes arrels com indica el grau del polinomi.

Es podria pensar que aquest punt de vista en la forma de presentar els nombres és molt recent, però no és el cas, tota vegada que a començaments d'aquest segle molts llibres de matemàtiques de caire enciclopèdic ja incloïen una exposició d'aquest tipus (presentació axiomàtica dels nombres i les seves operacions, encara que sense incloure l'estructura algebraica), com es pot apreciar a l'Enciclopèdia d'àlgebra elemental i anàlisi de H. Weber (1906) o a l'obra de Burkhardt (cf. F. Klein, p. 42-Vol I).

És de destacar que matemàtics com H. Poincaré ja advertien fa 80 anys dels perills que suposaria una introducció prematura en l'ensenyament dels mètodes axiomàtico-deductius, en temes tan importants com els nombres. A l'obra *Ciencia y método* (p. 95) trobem el següent paràgraf, referit a la introducció dels nombres racionals:

"...A les escoles primàries, per definir un fracció es parteix una poma o un pastís; es fan a trossos, per descomptat, per mitjà del pensament i no en la realitat, ja que presumeixo que els fons de l'ensenyament primari no permeten tal dispendi. A l'Escola Normal, al contrari, o a les Facultats, es dirà: una fracció és el conjunt de dos nombres enters separats per una ratlla horitzontal; es definiran les convencions que poden transformar aquests símbols; es demostrarà que les regles d'aquestes operacions són les mateixes dels càlculs dels enters, i es constatarà, finalment, que efectuant, d'acord a aquestes regles, la multiplicació de la fracció pel seu denominador, dóna lloc al numerador. Això està molt bé, ja que s'encamina a joves, familiaritzats de molt de temps amb la noció de fraccions, a força d'haver partit pomes o altres objectes, joves l'esperit dels quals, afinat per una forta educació matemàtica, ha arribat a poc a poc a desitjar una definició purament lògica. Però, quin no seria el desconcert del principiant a qui volguéssim servir tals definicions?"

I una mica més endavant diu:

"He pres exemples tan extrems, que cap mestre no podria somniar anar tan lluny".

Poc es podia imaginar el senyor Poincaré que en el curs de dues generacions s'acabaria experimentant en carn viva el que ell desestimava com a disbarat didàctic, impensable de portar a la pràctica.

Pensar en la possibilitat que es puguin introduir els nombres racionals, com la classe d'equivalència de parells ordenats de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, a nois que no portin molt de temps treballant i operant amb trencats, és una idea més que il·lusòria. I si malgrat tot es procedeix així, i es defineixen per convenció les operacions de sumar i multiplicar aquests nombres, és possible que l'alumne acabi recitant de memòria que els racionals són un cos, però que ningú no cregui que això el facultarà per a plantejar i abordar problemes en què intervinguin els conceptes de proporcionalitat, descomptes, aliatges, etc..., i en definitiva tots aquells problemes que donen sentit a tractar amb ens numèrics més amplis que els enters.

Tampoc no sembla satisfactòria la introducció dels nombres racionals com operadors sobre $\mathbb{Z}$, on operar amb a/b significa multiplicar per a i dividir per b , que si bé facilita la comprensió de l'algorisme del producte (com a composició d'operadors), deixa en l'aire l'algorisme de la suma, acabant per adoptar el conveni (més o menys justificat):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Arribats a aquest punt s'imposa una reflexió al voltant del divorci creixent que s'ha establert entre la gènesi dels trencats i les síntesis modernes que s'han anat fent respecte als diferents nombres. És un fet innegable l'evolució que sofreixen els conceptes matemàtics, així com la transformació de les idees que ens formem de certs objectes matemàtics que són considerats de diferents formes en el transcurs de les èpoques. També és clar que les grans síntesis que periòdicament s'han de fer de tots els conceptes i elements que intervenen en el quefer dels matemàtics, han de revelar una depuració d'elements accessoris a les matemàtiques, depuració que genera graus creixents d'abstracció, i negar aquest fet seria tancar als ulls al caràcter dinàmic de l'elaboració de la matemàtica. Ara bé, una qüestió és posar en ordre el cúmul de coneixements matemàtics anteriors, i l'altra és pensar que el producte depurat sigui l'òptim com a eina i referència per a l'ensenyament de les matemàtiques. Esperar que coincideixi la lògica de la reestructuració interna de les matemàtiques amb la lògica d'aquell qui per primera vegada s'enfronta a un procés d'aprenentatge és, si més no, un acte audaç i temerari.

Pensem que és un error pedagògic intentar enfocar l'aprenentatge de les matemàtiques a partir d'aquells elements que són propis de la seva fonamentació i síntesi. A aquell qui comença un camí d'estudi no el preocupa quin és el trajecte global del mateix, ni si aquest està exempt de contradiccions lògiques, o si les definicions que utilitza són rigorosament precises; el que vol és copsar quines possibilitats dóna aquella línia de treball, trobar resultats palpables per ell mateix, ser capaç d'utilitzar el màxim de recursos que té a les mans en cada moment, i tan sols després d'un bon recorregut pel tema el seu esperit estarà en condicions de plantejar-se la coherència de tot allò construït anteriorment. En una paraula, la tasca de reordenar i polir vindrà després. I és que, en definitiva, l'aprenentatge se sustenta més en raons psicològiques que no pas lògiques, i el que convé és presentar els problemes i temes des del punt de vista de l'interès i comprensió d'aquell qui els ha de treballar. Els processos d'abstracció han de tenir lloc en el transcurs del treball, però no en el punt de partida. L'abstracció ha d'esdevenir una necessitat, però no una imposició.

Retornant al tema dels trencats, és interessant la valoració que en fa Felix Klein després de comparar els avantatges i desavantatges de la versió clàssica, intuïtiva, i la moderna, de caire lògic, quan s'apliquen a l'ensenyament.

...Segurament l'exposició moderna és més pura, però, en canvi, és també més pobre. Ja que, de tot el que l'exposició clàssica ens dóna d'una vegada, l'altra sols ens en dóna una meitat:

la introducció abstracta, completament lògica, de certs conceptes aritmètics—dits trencats— i les operacions amb ells; però resta sense resoldre encara una segona qüestió, totalment independent d'aquella i no menys important: Es podran aplicar, a les magnituds intuïtivament mesurables, aquestes teories dels trencats, deduïdes d'una forma tan purament lògica?" (Pàg. 42).

Per la nostra part segons els estudis que hem fet sobre la manera com, històricament, han estat manipulats els nombres trencats, aquesta manera s'adiu amb la formació psicològica de l'alumne, tota vegada que els trencats troben de forma natural el model de les magnituds mesurables de la mateixa manera que, en un primer estadi, també l'alumne necessita fixar els nous conceptes en objectes materials concrets. Sols després d'una llarga manipulació amb trencats, on els algorismes operatius sorgeixen espontàniament de les seves pròpies significacions, es pot passar a una contemplació més abstracta dels nombres racionals, que no pot anar deslligada de les operacions del càlcul formal i del càlcul literal. Creiem convenient desplaçar el punt de vista lògic a l'etapa d'estudis universitaris.

A les pàgines següents intentarem de fer un resum del quadre d'exposició, que a títol orientatiu podria servir per a introduir els trencats i el desenvolupament de les operacions amb ells.

La introducció dels nombres trencats i les operacions amb ells.

Respecte a aquest tema hem de dir, abans de res, que ja hi ha elaborat i editat un material didàctic molt en consonància amb el desenvolupament històric dels trencats. Ens referim als apunts editats pel Grup Zero de Barcelona, sota el títol *La mesura i els nombres*, quadern de treball que al nostre judici respon al que hauria de ser una línia d'aprenentatge que respecti els condicionants psicològics i conceptuals del noi.

Per la nostra part farem un petit resum del que podria ser una forma d'introduir els trencats i de manipular-los per tal d'extreure'n els algorismes de les quatre operacions, sense deixar de recomanar, com a exposició més precisa i concreta, la continguda als materials citats del Grup Zero de Barcelona.

Pensem que l'esperit del alumne està preparat molt aviat per a comprendre intuïtivament la noció de nombre trencat, encara que només sigui perquè d'alguna forma, i a fora de l'escola, ja n'ha sentit a parlar, en el llenguatge que utilitza l'home del carrer en la seva comunicació habitual. El paper del mestre no serà altre que fer adonar d'aquestes expressions que el noi ja ha sentit dir, encara que sense parar-hi una atenció especial, i conduir-lo a una reflexió sobre el seu contingut i significat numèric:

"Falten tres quarts d'hora perquè vingui en Ramon".

"Posim mig Kg. de vedella".

"Aquest pantà està a dos terços del seu nivell màxim".

Es pot començar la introducció dels trencats demanant als alumnes que trobin d'altres exemples similars i que explicitin els continguts numèrics que hi apareixen, és a dir, que expliquin en el seu llenguatge quines quantitats els suggereixen els exemples anteriors, i fins i tot com les obtindrien de forma constructiva, quan els problemes així ho requereixin. Es pot proposar, en aquest estadi introductori, el problema clàssic de repartir un pastís a parts iguals entre dos nois i tres noies, demanant als alumnes com el resoldrien a la pràctica, i que contestin a la seva manera quina part de pastís s'ha emportat cadascú, o bé quina part de pastís ha correspost a les tres noies.

Les qüestions anteriors han de posar de manifest a l'alumne que cada nombre trencat, per a ser nomenat, necessita dos nombres enters (tres-quarts; un sisé; dos-terços,...), que el primer nombre juga un paper i el segon un altre, i, després d'haver deixat clara aquesta qüestió, nosaltres donarem la convenció d'escriure abreujadament els trencats de la forma habitual $3/4$, $1/6$, $2/3$,... especificant de nou els significats dels numeradors i denominadors. És convenient en aquest moment proposar a l'alumne que situï uns quants trencats com a longituds dins d'un segment pres com a unitat de mesura, per tal de reforçar els significats del numerador i denominador.

Posem de manifest que, d'una manera natural, no apareixeran fraccions amb numerador més gran que el denominador, ja que la idea primària de trencat apareix per a completar la mesura no entera. En canvi, sí que apareixeran els nombres *mixtes*, com a quantitats que tenen una part entera i encara una altra part que no arriba a u, però que és expressable, almenys de forma aproximada, per un trencat. Els nombres mixtes faran la seva aparició en problemes com el de mesurar la taula prenent com a unitat de mesura la longitud de la llibreta, o bé la longitud de la classe expressada a partir de la de les rajoles del terra. Nosaltres afegirem la forma d'escriure abreujadament aquests nombres mixtes:

$7 + 2/3$ (i no $7 \frac{2}{3}$, que es pot confondre amb un producte indicat).

A continuació poden plantejar-se a l'alumne exercicis de comparació de diferents trencats o nombres mixtes, segons la seva quantitat, és a dir l'ordenació de menys a més de diferents trencats, idea que, treballada a poc a poc, ha de conduir a la recerca d'una sub-unitat comuna de mesura, que permeti de comparar les quantitats dels numeradors. La manera concreta de fer-ho no hauria d'apartar-se del model geomètric de les longituds, que ofereix una clara manipulació i al mateix temps permet visualitzar la forma concreta de determinar una sub-unitat de mesura que quedi exactament compresa en les sub-unitats de mesura anteriors. Les relacions aritmètiques que això comporta (reducció a comú denominador) han de ser extretes a partir de la traducció de les manipulacions geomètriques al camp de l'aritmètica dels enters. En cap cas al revés. Naturalment que al final d'aquest procés l'alumne tan sols es guiarà per la forma o mecànica de procedir per a efectuar la reducció a comú denominador, però és important que no perdi de vista el significat de què fa, com ho fa, i per què ho fa.

Desenvoluparem amb una mica de detall l'apartat anterior, a fi d'exposar un model concret d'aprenentatge en la línia dels mètodes heurístics:

Un esquema de desenvolupament heurístic

Problema de partida.

"Es tracta de comparar els dos trencats següents: $3/5$ i $4/7$. Anem a veure quina de les dues quantitats és més gran, i quant més gran és".

Professor. Pensem en el significat de $3/5$ i de $4/7$; en podem deduir alguna cosa respecte a quina de les dues quantitats és més gran?

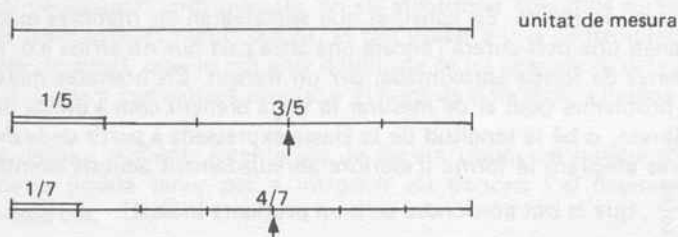
Alumnes. (Després d'una estona de pensar). Ens és difícil de comparar. (No saben explicar el perquè, i les respostes són confuses). A mi em sembla que és més gran $4/7$, ja que després d'haver dividit la unitat en 7 parts, n'agafem 4, que és més que el numerador de $3/5$.

Un alumne més eixerit replica: El que dius no és del tot cert, ja que per una banda dividim la unitat en 7 parts i n'agafem 4, però per l'altra banda dividim

la unitat en cinc parts, cada una de les quals és més gran que les anteriors i encara que només n'agafem 3 (en lloc de 4), és possible que el total de longitud agafada sigui més gran que l'altra.

Professor. Sembla que no hi ha acord. Per què no provem de fer una representació gràfica dels dos trencats, segons hem après a fer, i potser veurem alguna cosa que ens permeti de comparar-los?

Alumnes. Dibuixant, amb certa expectativa de si això resoldrà definitivament el problema).



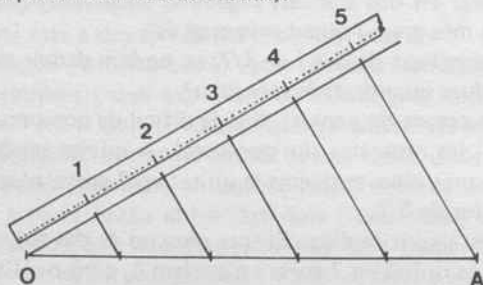
Desil·lusió general. Aquests trencats sembla que tinguin la virtut d'amagar expressament quin dels dos és més gran!

Es reproduïxen novament les discussions de quin dels dos és més gran. Els dibuixos no concorden exactament. Els alumnes ja estan demanant que el professor faci d'àrbitre respecte a quin dels seus dibuixos és el més correcte.

El professor intervé dient:

Fixeu-vos que un problema ens ha portat a un altre. Fins ara no hem tingut necessitat de representar amb tota fidelitat un trencat (en teníem prou de fer-ho grosso modo). En aquest problema necessitem trobar un mètode rigorós i sistemàtic, per tal de situar exactament cada trencat dins de la unitat de mesura. Us exposaré directament aquest mètode per tal que tots disposem de la mateixa manera de fer-ho.

Per dividir la unitat, per exemple en 5 parts iguals, procedirem així: dibuixarem una recta que parteixi d'un extrem del segment que volem dividir en 5 parts iguals, en un angle qualsevol. En aquesta recta, i a partir del vèrtex comú O, posarem un regle graduat i assenyalarem 5 punts igualment distanciat (podem utilitzar, per exemple, la pròpia unitat de mesura del regle). Després unirem l'últim punt, corresponent a les 5 unitats marcades al regle, amb el punt A de l'extrem de la nostra unitat de mesura, i a continuació farem paral·leles a la recta que va del 5 al A, a partir dels punts que senyalen el 1, 2, 3, i 4, paral·leles que ens determinaran les divisions del segment OA en 5 parts iguals. (Per justificar el mètode ens sembla que no cal apel·lar al Teorema de Tales, sinó a una certa intuïció a partir del mateix dibuix).



El professor, després d'haver acabat l'exposició del mètode per a dividir un segment a parts iguals, torna a situar el problema de partida al punt on l'havien deixat els alumnes. I els pregunta: on resideix la dificultat principal per a poder comparar directament $3/5$ i $4/7$?

Alumnes. En la dificultat de fer un dibuix exacte.

Professor. Oblideu-vos per un moment del mètode que us he ensenyat, que, a part de les dificultats de portar-lo a la pràctica fidelment, ens seria impensable d'aplicar a fraccions del tipus $300/501$ i $400/701$.

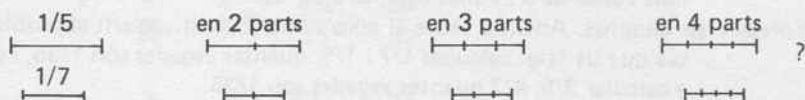
Alumnes. Només ens faltaria haver de dividir un segment en 701 parts iguals!

Professor. Insisteixo, on està la dificultat principal per a comparar $3/5$ i $4/7$?

Un alumne. En el fet que, en dividir el segment en 5 parts per una banda i en 7 parts per l'altra, les sub-unitats de mesura no són comparables entre si.

Professor. La idea és aquesta, però diguem de moment que les sub-unitats de mesura $1/5$ i $1/7$ no són fàcilment comparables. Aquesta és la dificultat principal a vèncer. I en conseqüència, resoldre el problema inicial serà equivalent a trobar una sub-unitat de mesura més petita que $1/5$ i $1/7$, i tal que càpiga un nombre exacte de vegades dins dels segments de longituds $1/5$ i $1/7$, respectivament. Us suggereixo que us ajudeu d'un dibuix, si creieu que us pot servir per trobar aquesta sub-unitat de mesura que cal buscar.

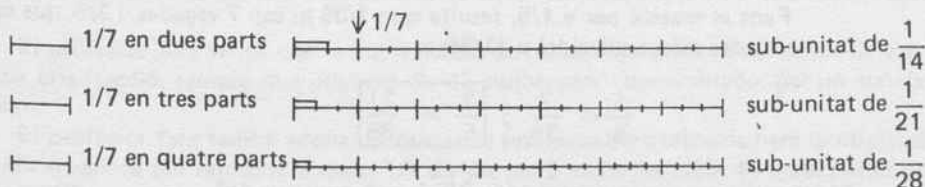
Alumnes. (Diferents temptatives. Van dibuixant els segments $1/5$ i $1/7$ i els divideixen en diferents parts iguals:



La falta de mètode presideix la majoria de sub-divisions. La qüestió es complica. Sembla que s'arriba a un atzucac.

Els alumnes han treballat simultàniament en la divisió dels segments $1/5$ i $1/7$ i no troben cap subdivisió comuna. S'imposa una mica d'ordre.

Professor. Anem per parts. Intentem de trobar totes les sub-unitats de mesura del segment $1/7$, i fem una taula de valors on expressarem les longituds dels segments que s'obtenen en dividir $1/7$ en dues parts iguals, en tres parts...



Les sub-unitats del segment $1/7$ corresponen a segments de longituds:

Parts en què es divideix $1/7$	2	3	4	5	6	7	8
Longitud de les sub-unitats obtingudes	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{56}$

Feu el mateix per trobar les sub-unitats de $1/5$, expressant-les de forma ordenada com abans:

Parts en què es divideix $1/5$	2	3	4	5	6	7	8
Longitud de les sub-unitats obtingudes	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{40}$

El professor pregunta: Hi ha alguna sub-unitat comuna?

Alumnes. (Tots). Sí, la de longitud $1/35$.

Professor. Esteu segurs de que no n'hi hauria cap més?

Alumnes. (Passa una bona estona). Un d'ells: si continuéssim subdividint probablement en trobaríem més. Sí, ara ho veig, les sub-unitats s'obtenen a partir dels múltiples de 5 i de 7; per això hem trobat el 35, i també, de continuar les taules, trobaríem el 70, i el 105,...

Professor. Ara sembla que estem en el bon camí; hem resolt la dificultat principal. Resulta que cercar la sub-unitat que quedi compresa exactament dins dels segments $1/5$ i $1/7$ equival a cercar múltiples comuns a 5 i a 7 (o sigui 35, 70, 105,...) i llavors les longituds d'aquestes sub-unitats seran $1/35$, $1/70$, $1/105$,... Per més comoditat i per tal de treballar amb el mínim de subdivisions agafarem el múltiple comú de 5 i 7 més baix, és a dir 35.

Professor als alumnes. Anem a veure si això resolt definitivament el problema. Sugerència que us faig: calculeu $1/7$ i $1/5$, quantes vegades són $1/35$, i després arribeu a calcular $3/5$, $4/7$ quantes vegades són $1/35$.

Alumnes. (Ja sense gaires dificultats). $1/35$, quantes vegades cap dins de $1/7$? Mirant la taula que hem fet abans, veiem que $1/35$ ha sortit de dividir el segment $1/7$ en 5 parts iguals, i en conseqüència $1/7$ ha de ser 5 vegades $1/35$, és a dir $1/7$ és igual a $5/35$. Com que $4/7$ és 4 vegades més que $1/7$, resultarà que $4/7$ seran 4 vegades $5/35$, o sigui $20/35$.

$$\frac{1}{7} = \frac{5}{35} ; \boxed{\frac{4}{7} = \frac{20}{35}}$$

Fent el mateix per a $1/5$, resulta que $1/35$ hi cap 7 vegades, i $3/5$, que és tres vegades més, equivaldrà a $21/35$.

$$\frac{1}{5} = \frac{7}{35} ; \boxed{\frac{3}{5} = \frac{21}{35}}$$

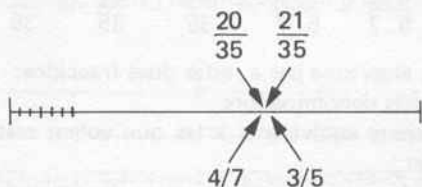
Els alumnes ara contesten tots que $3/5$ és més gran que $4/7$.

El professor no s'acontenta amb això; vol saber més, i pregunta: en quant sobrepasa $3/5$ a $4/7$?

Els alumnes pensen una estona i ràpidament un d'ells contesta, sense vacil·lar, que el sobrepasa en $1/35$.

El professor planteja tornar al principi del problema i proposa altre cop representar els dos trencats $3/5$ i $4/7$ dins del segment que fa d'unitat de mesura. Els nois, almenys la majoria, ja prefereixen utilitzar la sub-unitat de mesura comuna i fan la divisió del seg-

ment unitat en 35 parts iguals, prenent en cada cas 20 i 21 parts de les 35 que tenen



Ara, tots els alumnes comprenen quina era la causa que feia que hi hagués confusió a la primera representació. Els dos trencats estaven molt a prop, i era difícil de discernir (sense utilitzar una sub-unitat comuna de mesura) quin quedava a la dreta i quin a l'esquerra.

El professor recapitula tot el que s'ha fet, i planteja les següents equivalències:

Pregunta: d'on ha sortit el 35?

Resposta: De fer el mínim comú múltiple entre 5 i 7.

Pregunta: d'on han sortit el 20 i el 21?

(Pausa. Reconstrucció ràpida i operativa del problema)

$$\frac{1}{7} = \frac{5}{35} ; \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{35} = \frac{20}{35}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{7}{35} ; \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{35} = \frac{21}{35}$$

El professor sintetitza:

"Si multipliquem el denominador d'una fracció per un determinat nombre, també hem de multiplicar el numerador pel mateix nombre, per tal d'obtenir una fracció equivalent a l'anterior".

Heus aquí la idea de fraccions equivalents. El professor pot proposar com a exercici trobar 10 fraccions equivalents a les utilitzades en la resolució del problema anterior: $3/5$ i $4/7$.

El professor farà veure que la equivalència de fraccions ens permetrà també de simplificar una fracció, sempre que puguem dividir numerador i denominador per un mateix nombre.

El professor farà també adonar-se que en la resolució del problema hem multiplicat i dividit fraccions per nombres enters: $1/7$ dividit per 5 ha donat $1/35$; 4 vegades $5/35$ ha donat $20/35$

$$\frac{1}{7} : 5 = \frac{1}{35} ; 4 \cdot \frac{5}{35} = \frac{20}{35}$$

Per últim, s'ha acabat fent una resta entre els trencats $3/5$ i $4/7$

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{1}{35}$$

Passos intermedis realitzats:

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35} - \frac{20}{35} = \frac{1}{35}$$

Heus aquí un primer algorisme per a restar dues fraccions:

- 1) Cercar el m.c.m. dels denominadors.
- 2) Cercar dues fraccions equivalents a les que volem restar, amb el denominador comú abans buscat.
- 3) Restar els numeradors, conservant el mateix denominador.

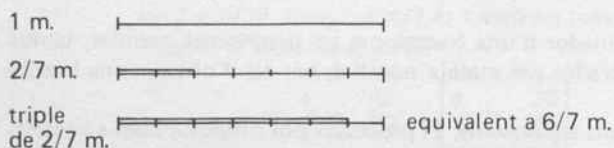
El professor plantejarà com a nou problema trobar la forma de procedir per a sumar dos trencats. Pot servir també com exemple:

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$$

Fins aquí hem tractat de presentar una manera concreta i heurística de desenvolupar una part dels trencats. A partir d'ara ens limitarem a exposar la línia de treball dels altres algorismes, prescindint del detall amb què hem tractat l'apartat anterior, i deixant per al professor l'adopció dels mètodes heurístics que cregui convenients.

L'algorisme del producte de nombres trencats.

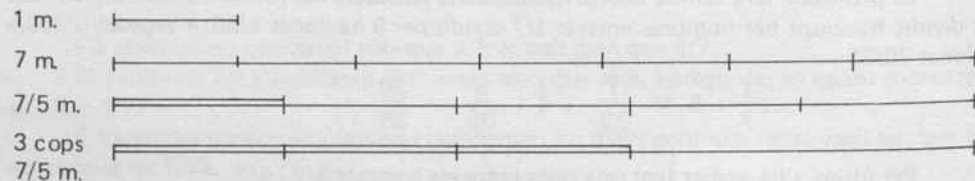
El producte de trencats comporta més dificultats (encara que l'algorisme és el més senzill) i convindrà presentar-lo als alumnes molt lentament i per parts. Es pot començar el tema plantejant la resolució de problemes que impliquin el producte d'un enter per una fracció. Per exemple: quant és el triple de $\frac{2}{7}$ de metre? El problema pot ser resolt pels alumnes sense més que reflexionar en el concepte de fracció que pot ser representada gràficament, fer el triple del segment obtingut i traduir finalment les operacions geomètriques al camp de l'aritmètica, més o menys seguint el següent esquema:



Operacions aritmètiques

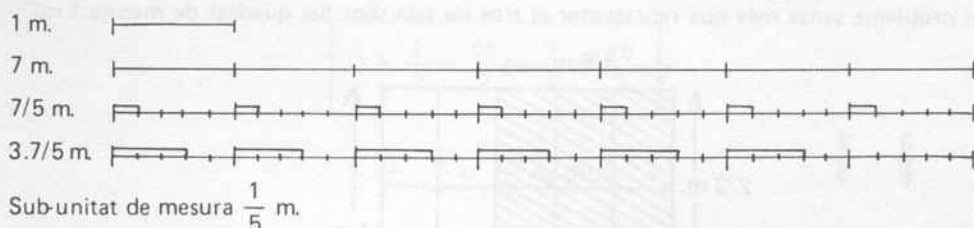
$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7} \text{ m.}$$

Es pot seguir amb problemes com aquest: Quant fan $\frac{3}{5}$ parts de 7 metres?, que no voldrà dir altra cosa que dividir 7 m. en 5 parts iguals i agafar-ne 3. Si l'alumne parteix de la representació gràfica, com abans, convindrà que remunti certs paranys que trobarà:



Però, quina és aquesta longitud?, a quines sub-unitats està referida? Són traduïbles les manipulacions geomètriques al camp de l'aritmètica? En quin moment hem

perdut la sub-unitat de mesura? Si la sub-unitat de mesura havia d'aparèixer en dividir els 7 m. en cinc parts, per què no ho provem de fer d'una altra manera, com per exemple dividint cada un dels 7 m. en cinc parts i després agafant 3 de aquestes parts?



Quantes d'aquestes n'hi ha? Tantes com 3.7, és a dir, 21.

Quina longitud total representa? 21 vegades $\frac{1}{5}$ de m., és a dir $\frac{21}{5}$ m. = 4 m. + $\frac{1}{5}$ m.

Operacions aritmètiques efectuades:

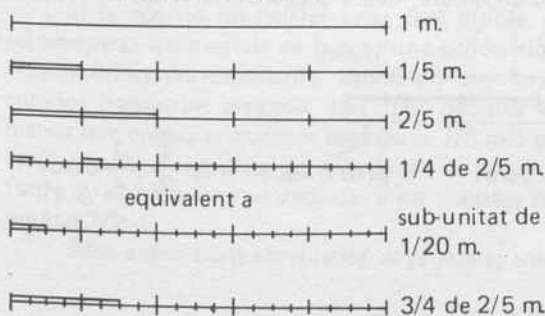
$$\frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}$$

El següent pas vindria donat per problemes que comportessin el producte de dos nombres trencats. Als manuals d'aritmètiques mercantils del Renaixement podem observar que a aquest tipus d'operació se li dedica un nombre molt considerable de pàgines, la qual cosa ens porta a pensar que l'adquisició de l'estructura operativa del producte, quan es refereix a nombres trencats, no és trivial, i que requereix una introducció pacient i sistemàtica. En aquests manuals trobem una insistència molt gran a abordar problemes del tipus: Quan fan tres quartes parts de $\frac{2}{5}$ de metre? Els exemples similars són nombrosos a tots els manuals.

L'exposició didàctica de la resolució de tals problemes hauria de seguir les mateixes pautes anteriors. Com abans, torna a ser convenient que l'alumne primer resolgui el problema manipulant longituds geomètriques, i que després tradueixi les manipulacions efectuades al camp de l'aritmètica, per tal d'extreure l'algorisme corresponent. Més o menys el quadre operatiu pot ser el següent:

Manipulació geomètrica

Quant és $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ de metre?



Longitud equivalent a 6 sub-unitats

de $\frac{1}{20}$ m., és a dir $\frac{6}{20}$ m.

Operacions aritmètiques associades

La nova sub-unitat de mesura (denominador) s'ha obtingut en dividir $\frac{1}{5}$ de m. en quatre parts iguals, resultant ser $\frac{1}{20}$ m.

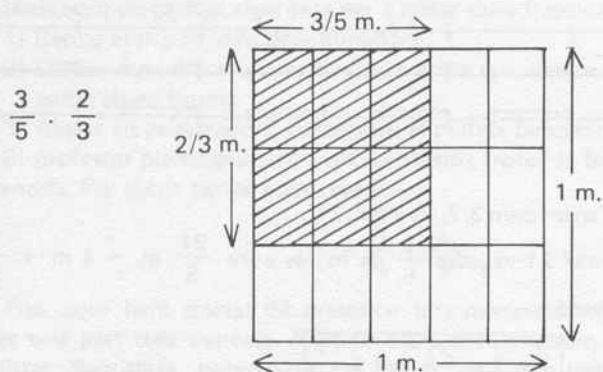
$\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{5}$ resulta ser 2 sub-unitats de $\frac{1}{20}$ m.
és a dir $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20}$.

$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ resulta ser 3 · 2 sub-unitats de $\frac{1}{20}$ m.
és a dir: $\frac{6}{20}$ m.

ALGORISME:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20}$$

Una altra forma de presentar l'estructura operativa del producte entre trencats és a partir del model de les àrees. Per exemple: quina és l'àrea d'una peça de tela que medeix $\frac{3}{5}$ de m. de llarg per $\frac{2}{3}$ de m. d'ample? Es pot induir l'alumne a resoldre gràficament el problema sense més que representar el tros de tela dins del quadrat de mesura 1 m^2 :

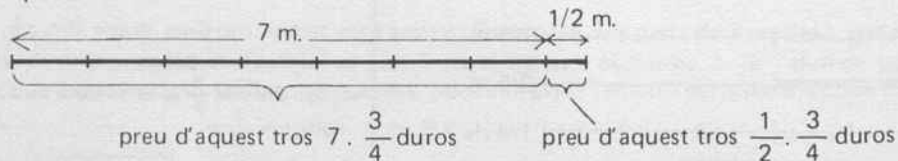


El quadrat d'àrea 1 m^2 queda dividit en tants rectangles *iguals* com indica el producte de denominadors, i la part d'àrea que correspon al rectangle ombrejat, de costats $\frac{3}{5}$ per $\frac{2}{3}$, està formada per tants rectangles petits com indica el producte de numeradors; en conseqüència, si la sub-unitat de mesura és $\frac{1}{15}$ i tenim 6 d'aquestes sub-unitats, el trencat que representa la part ombrejada és $\frac{6}{15}$. L'algorisme que es desprèn per al producte és, doncs:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

Es pot acabar aquest apartat proposant a l'alumne que trobi la forma d'efectuar un producte entre un nombre mixt i una fracció, com per exemple: Quants duros val un tros de corda de 7 metres i mig, sabent que cada metre de corda costa tres quarts de duro?

Es pot orientar l'alumne a partir d'un dibuix, que li suggereixi efectuar el producte per parts:



Preu total de la corda: $7 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$

Forma sintetitzada d'operar: $(7 + \frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{4} = 7 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} + \frac{3}{8} = \frac{42}{8} + \frac{3}{8} = \frac{45}{8} = 5 + \frac{5}{8}$ duros. És a dir 5 duros i encara 5 vuitenes parts de duro. Arribats a aquest extrem, és convenient ja posar de manifest a l'alumne que, per

raons simplificadores, es pot transformar un nombre mixt en una espècie de trencat, de numerador més gran que el denominador, de la següent forma:

$$7 + \frac{1}{2} = \frac{14}{2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{45}{8} \text{ de duro}$$

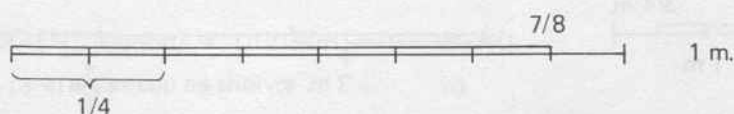
L'algorisme de la divisió entre trencats

Quant a la divisió, creiem que el més convenient no és introduir-la com la operació inversa del producte, qüestió que mai no queda prou clara a l'alumne, que sols s'ho creu en un autèntic acte de fe, amb l'esperança d'aferrar-se al mecanisme formal que li permet efectuar divisions entre trencats.

Pensem que la via més natural per a iniciar-se a la divisió entre trencats correspon a la que van seguir aquells mercaders del Renaixement en els seus contractes de venda de mercaderies. Procedien de la següent manera:

Volem veure, per exemple, quantes vegades és més gran una tela que amida $7/8$ de metre que aquella que amida $1/4$ de metre, problema equivalent al resultat de dividir $7/8$ entre $1/4$.

Representem gràficament els dos trencats i plantegem-nos gràficament quantes vegades cap $1/4$ dins de $7/8$.



A cop d'ull, aquest cas es pot resoldre dient: 3 vegades i mitja més gran.

Si la qüestió no hagués estat tant visible, el camí més natural a seguir hagués estat comparar-los a partir de buscar una subdivisió més petita que la determinada pels dos denominadors corresponents, subdivisió que faria de denominador comú. A l'exemple anterior haguéssim procedit així: Dir quantes vegades és $7/8$ més gran que $1/4$ és el mateix que contestar quantes vegades és $7/8$ més gran que $2/8$, i com que ambdós trencats estan referits a una mateixa sub-unitat de mesura, i per a un trencat en tenim 7 i per a l'altre 2, el problema es redueix a dir quantes vegades és 7 més gran que 2, que té per resultat $7/2$.

Amb expressions abreujades, el procés és aquest:

$$\frac{7}{8} : \frac{1}{4} = \frac{7}{8} : \frac{2}{8} = \frac{7}{2}$$

$$\boxed{\frac{7}{8} : \frac{2}{8}} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} : \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \boxed{\frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 2}}$$

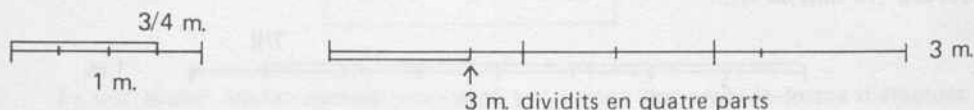
I si per guanyar temps ens quedem amb el resultat final, eliminant el pas intermedi de reduir a comú denominador, la regla algorísmica que ens resulta correspon a la coneguda multiplicació en creu.

Exposats els quatre algorismes que permeten operar trencats amb trencats, hem d'insistir que sols la pràctica de resolució d'una gran diversitat de problemes, extrets preferentment de la vida real, serà el que permetrà a l'alumne consolidar els diferents algorismes operatius, i, el que és més important, reafirmar el concepte de nombre trencat, emprant-lo adequadament en cada situació concreta susceptible de ser tractada amb aquests nombres.

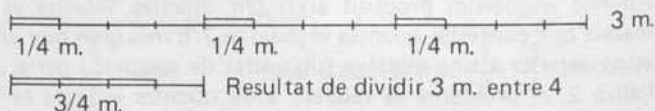
La divisió entre enters, els nombres trencats i els nombres mixtos

En moltes ocasions es fa inconscientment correspondre un nombre trencat a una divisió entre enters, i viceversa. Per exemple es diu " $3/4$ és el resultat de dividir 3 entre 4". Ara bé, la coincidència no es donarà en l'alumne sinó a través de la reflexió, i en conseqüència el procediment més natural serà aquell que formuli la qüestió en forma de problema a resoldre. Per exemple:

"Si hem definit $3/4$ com la magnitud que resulta de dividir la unitat en 4 parts i agafar-ne 3, ens resultarà el mateix que agafar 3 unitats i dividir-les en quatre parts?". La resolució del problema decidirà l'equivalència entre el trencat i la divisió de dos enters. Insistim que la pregunta pot ser trivial per a nosaltres, però que no ho és per a la psicologia del noi, que encara no ha assimilat l'estructura del trencat com una divisió entre enters, i potser no convé anticipar-li la resposta, sinó deixar que l'alumne raoni la qüestió, cosa que probablement farà a partir d'una construcció geomètrica de segments:



L'equivalència sols es posarà de manifest si dividim els tres metres d'una determinada manera: dividint cada metre en quatre parts i agafant després un quart de cada un i ajuntant-los:



També es pot procedir de la següent manera:

Per una banda tenim $3/4$, que vol dir 3 vegades $1/4$.

Per altra banda tenim 3 dividit per 4 ($3:4$), i volem veure si les dues quantitats numèricament coincideixen.

El primer resultat $3/4$ el tenim expressat en quarts (com a sub-unitat de mesura). Per establir la comparança podem intentar expressar 3 en quarts, resultant que 3 són 12 vegades $1/4$.

Ara el problema de la divisió de 3 entre 4 es redueix a dividir 12 quarts entre 4, que resulta ser 3 quarts (de la mateixa manera que 12 avellanes dividides en quatre parts donaria 3 avellanes a cada part). Resumint doncs, tenim que 3 dividit entre 4 és equivalent numèricament a $\frac{3}{4}$.

El raonament es pot sintetitzar simbòlicament en aquestes igualtats:

$$3 : 4 = 12 \cdot \frac{1}{4} : 4 = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Així, la divisió no exacta entre nombres enters trobarà en el marc dels trencats l'eina fonamental per a poder realitzar la divisió de forma exacta. En efecte, reprenent el mateix model de longituds, pot tornar-se a plantejar als alumnes que calculin quants metres de tela tocaria en un repartiment de 10 m. entre tres persones, i com farien a la pràctica tal repartiment.

Allò que abans corresponia a dividir $10 \overline{) 3}$ donava per resposta (associada a aquesta divisió): tocaria a 3 metres per a cadascú i quedaria encara 1 metre a dividir entre els tres. Ara la resposta es converteix en una única expressió, abreujada així: $3 + \frac{1}{3}$ de metres de tela per a cadascú.

La prova que la divisió estava ben feta, abans era:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{QUOCIENT} & \times & \text{DIVISOR} & + & \text{RESTA} & = & \text{DIVIDEND} \\ 3 & \times & 3 & + & 1 & = & 10 \end{array}$$

Ara la prova es convertirà en:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{QUOCIENT (trencat)} & \times & \text{DIVISOR} & = & \text{DIVIDEND} \\ (3 + \frac{1}{3}) & \times & 3 & = & 10 \end{array}$$

Aquesta identificació entre nombres trencats i divisió entre nombres enters és la que permetrà més endavant justificar la identificació entre nombres trencats i nombres decimals.

Introducció als nombres decimals i identificació entre trencats i decimals.

En un estadi mental una mica més desenvolupat es pot plantejar als alumnes la necessitat d'unificar tots els trencats a partir d'expressar-los com a sumes de les subdivisions successives de 10 en 10 (ampliació del sistema decimal per a nombres més petits que u). $\frac{3}{4} = \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$, que per més comoditat escriurem així: $\frac{3}{4} = 0'75$, indicant 7 les dècimes i 5 les centèsimes.

La qüestió ha de presentar-se íntimament vinculada a la reunificació que es va fer històricament, pel que es refereix a determinar internacionalment unes mateixes unitats de pesos i mesures: el metre, decímetre, centímetre, mil·límetre,... i el Kilogram, Hectogram,... gram, decigram, centigram, mil·ligram,... Es pot fer adonar a l'alumne que no

totes les mesures de magnituds a la vida real són fetes a partir de les subdivisions de 10 en 10, com per exemple que les subdivisions de l'hora són fetes de 60 en 60, a l'igual que les mesures dels angles en el sistema sexagesimal.

Aquesta introducció als nombres decimals pot ser feta de forma heurística sense més que plantejar un problema de mesura (utilitzant un regle graduat) i propostant fer el mateix de forma teòrica a partir del significat de nombre trencat. Per exemple:

Agafem un segment de longitud $\frac{4}{7}$ de decímetre, representant-lo gràficament a la llibreta de la forma més fàcil possible (prendre 1 dm., dividir-lo en 7 parts iguals i agafar-ne 4). Un cop senyalat aquest segment anem a mesurar-lo a partir de les sub-unitats pròpies del regle graduat. Quines són aquestes sub-unitats? El centímetre i el mil·límetre.

Quina part de 1 dm. és 1 cm.?: la dècima part. $1 \text{ cm.} = \frac{1}{10} \text{ dm.}$

Quina part de 1 dm. és 1 m.m.?: la centèsima part. $1 \text{ m.m.} = \frac{1}{100} \text{ dm.}$

Són concebibles sub-unitats encara més petites que aquestes? Com les construiríem, pel mateix procediment d'anar subdividint cada vegada per 10?

Proveu ara de mesurar el vostre segment $\frac{4}{7}$ dm. amb aquestes sub-unitats. Quant us dóna?: 5 cm. i un poc més, millor dit, aproximadament 5 cm. i uns 7 m.m.

Anem ara a fer el mateix que hem fet amb el regle, però raonant a partir del concepte de fracció. Les sub-unitats que prendrem seran les mateixes que les del regle, és a dir: $\frac{1}{10}$ dm., $\frac{1}{100}$ dm., $\frac{1}{1.000}$ dm. Es pot començar preguntant als alumnes: Podríeu calcular (no mesurar) quantes vegades hauríeu de prendre la longitud $\frac{1}{10}$ dm. per aproximarnos al màxim al segment $\frac{4}{7}$ dm. sense sobrepassar-lo? Dit d'una altra manera, quantes vegades cap $\frac{1}{10}$ dins de $\frac{4}{7}$?: seran tantes com indiqui la part entera de la divisió de $\frac{4}{7}$ entre $\frac{1}{10}$, és a dir, la part entera de $\frac{40}{7} = 5 + \frac{5}{7}$; o sigui $\frac{4}{7}$ és 5 vegades $\frac{1}{10}$ i encara una mica més:

$$\frac{4}{7} = \left(5 + \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10} + \frac{5}{70}$$

Ara de nou podem fer el mateix per a la part que ens ha sobrat, i que no arriba a $\frac{1}{10}$. Calculeu la següent subdivisió, $\frac{1}{100}$, quantes vegades cap dins de la part sobrant anterior $\frac{5}{70}$.

$$\frac{5}{70} : \frac{1}{100} = \frac{500}{70} = 7 + \frac{1}{7}$$

$$\frac{5}{70} = \left(7 + \frac{1}{7}\right) \frac{1}{100} = \frac{7}{100} + \frac{1}{700}$$

Recapitulant tot el que hem fet, tenim que:

$$\frac{4}{7} = \frac{5}{10} + \frac{5}{70} = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{700}$$

Si continuem un pas més amb les subdivisions 1/1.000 tindrem que:

$$\frac{1}{700} : \frac{1}{1.000} = \frac{1.000}{700} = 1 + \frac{3}{7}$$

$$\frac{1}{700} = \left(1 + \frac{3}{7}\right) \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000} + \frac{3}{7.000}$$

És a dir, l'aproximació del segment 4/7 fins a les mil·lèsimes de dm. és:

$$\frac{4}{7} = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1.000} + \frac{3}{7.000}, \text{ sent } \frac{3}{7.000} \text{ la part que queda per a seguir aproximant}$$

Heus aquí una forma concreta per a anar aproximant qualsevol trencat a partir de les sub-unitats que van de deu en deu divisions.

A continuació es pot proposar als alumnes que efectuïn la divisió entre 4.000 i 7, segons l'algorisme que tots coneixen:

$$\begin{array}{r} 4.000 \overline{) 7} \\ 50 \underline{571} \\ 10 \\ 3 \end{array}$$

I se'ls pot preguntar si hi ha alguna relació entre les xifres que apareixen al quocient i els numeradors que havien trobat abans, corresponents a les subdivisions de deu en deu. L'aprofundiment d'aquesta qüestió ha de conduir a justificar l'algorisme més ràpid per a aproximar trencats a partir de les subdivisions pròpies del sistema decimal.

Per altra banda, pot justificar-se la notació decimal de la coma que s'utilitza per separar la part entera de la que no ho és, sense més que posar en relleu que:

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{1.000} \frac{4.000}{7} = \frac{1}{1.000} \left(571 + \frac{3}{7} \right) = \frac{571}{1.000} + \frac{3}{7.000}$$

i com que per dividir per 10 es desplaçava la coma un lloc cap a l'esquerra, i en dividir per 1.000 ho fèiem desplaçant-la tres llocs, guiant-se ara pel mateix procediment, tenim que:

$$\frac{571}{1.000} = 0,571$$

que no voldrà dir altra cosa que el trencat aquest no té part entera, i que representa la quantitat de 5 dècimes, més 7 centèsimes, més una mil·lèsima.

La senzillesa de l'algorisme de pas dels nombres trencats a la seva expressió decimal justifica donar-lo en una etapa que es pot situar en un any o dos després d'haver introduït els trencats. Per altra banda, el costum estès de treballar amb el sistema mè-

tric decimal facilitarà la comprensió dels nombres decimals, reafirmant per mitjà d'ells la idea de mesura.

S'ha d'anar molt amb compte de no abusar excessivament de la pràctica d'operacions entre nombres decimals com a substitució de l'operatòria entre trencats, pràctica tan temptadora amb la presència de les calculadores de butxaca, però que pot arruïnar l'adquisició d'una soltura operativa entre trencats; aquesta soltura operativa ha de servir per a aspectes de treball matemàtic posterior, com el càlcul radical, fraccions polinòmiques,... i, en cas de no haver-se consolidat en la pràctica dels trencats, pot quedar sotmesa a un procés d'atròfia irreversible.

* * *

És possible que aquesta forma de treball, per introduir els nombres trencats, requereixi més temps que no pas aquella altra que parteix d'una definició abstracta i presenta els algorismes d'una manera completament formal; però en canvi la inversió de temps ve compensada per una sedimentació lenta del concepte de nombre trencat, i una comprensió del marc de problemes en què s'utilitzen aquests nombres. Per la nostra part ens limitarem a constatar les deficiències que observem en l'aprenentatge d'aquest tema. En una prova, realitzada a l'Institut de Batxillerat "Barri Besós", el curs 1982, feta a 160 alumnes que havien acabat la etapa d'EGB., els resultats correctes de la part de trencats van ser els següents:

Quants minuts són $\frac{2}{5}$ de hora? Contesten correctament un 44%

Efectuar les operacions: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ Contesten correctament un 19%

Els resultats són prou eloqüents per a intentar i alentir d'altres vies d'introducció als trencats.

CAPÍTOL 15:

PAPER DELS PROBLEMES DE PLANTEIG. PROPORCIONALITAT DIRECTA

Deixant de costat tots aquells aspectes de la matemàtica elemental concernents a l'operativitat i al càlcul, ens trobem que els problemes de planteig ofereixen una àmplia gama de qüestions, susceptibles de desenvolupar al màxim els recursos propis del pensament matemàtic. És aquest capítol que proporcionarà per primera vegada als alumnes la sensació que els mètodes matemàtics són una bona i potent eina de resolució per a un extens ventall de problemes extrets de la vida corrent.

La forma concreta d'abordar aquest tema determinarà fins a cert punt l'actitud dels alumnes a l'hora d'enfrontar-se més endavant a problemes de més envergadura. En aquest apartat cal desenvolupar a fons certes pautes de conducta que ja no hauran d'abandonar-se més en el quefer de l'aprenent de matemàtiques: saber llegir bé els enunciats dels problemes, organitzar les dades informatives dels enunciats, tenir clar què és el que ens demanen a l'enunciat i si hi ha alguna relació directa entre què ens demanen i què ens donen com a punt de partida; el tempteig de possibles vies de resolució del problema; la comprovació del resultat final i la coherència que té dins de l'enunciat global del problema; el desenrotllament del sentit d'aproximació,... Si no som capaços de desenvolupar aquests hàbits en l'alumne i en aquesta fase, no ens estranyem que més endavant l'alumne enfront d'un nou problema, es limiti a preguntar-se: i quina fórmula s'haurà d'aplicar per resoldre aquesta qüestió?, o bé que comenci a fer operacions a la babalà, sense saber on va, però amb la falsa esperança que al final surti el resultat esperat de forma miraculosa.

Els problemes de planteig integren un dels apartats matemàtics que requereix més cura i més temps de dedicació, per tal d'aconseguir una assimilació adequada, per part de l'alumne, de tots aquells hàbits abans referits. És en el tractament d'aquests problemes on l'alumne ha d'abastar un estadi de pensament pre-algebraic, suficientment ampli per a poder donar el salt definitiu i treballar a partir d'un determinat moment amb eines més abstractes, que corresponen als principis de l'àlgebra simbòlica. En certa manera aquests problemes han de permetre passar gradualment per les següents etapes: raonaments aritmètics, àlgebra retòrica, àlgebra sincopada i àlgebra simbòlica; però no sols això, sinó que el tipus de problemes tractats suscitaran a l'alumne nocions noves i forçosament desdibuixades, com les de funció, linealitat, variable, continuïtat,..., que encara quedaran molt lluny del seu tractament matemàtic.

Pensem que aquest és un capítol clau per a assentar unes bones bases per a l'assimilació futura de l'àlgebra, i que el perill més gran que es presenta en el seu desenvolupament és anar massa de pressa, sense esperar l'evolució mental de l'alumne, abocant damunt aquest les eines últimes de treball abans d'haver esgotat les vies naturals de pensament i les possibilitats de raonament aritmètic.

La llista de problemes de planteig que pot utilitzar el professor és molt variada, i comprendria els clàssics problemes d'aixetes, mòbils, rellotges, obrers, correus, sous, herències,... així com alguns bonics problemes d'entreteniment matemàtic. Podria ser d'interès recuperar l'antiga classificació dels problemes de planteig que contenen les primeres aritmètiques. Els problemes caldria resoldre'ls pels mètodes particulars adients a cada una de les classes (els mètodes s'expressarien retòricament, i serien el resultat d'haver resolt prèviament molts problemes del mateix tipus). La justificació dels mètodes es faria en un àmbit molt concret, sense que necessàriament fossin utilitzats els conceptes moderns que intervenen en els problemes. Per exemple, no cal el concepte general de *velocitat*, que permet unificar els problemes de mòbils i els d'aixetes. El concepte primitiu utilitzat a l'aritmètica de Treviso, en substitució del modern de *velocitat* (nombre de passes en intervals de temps iguals, no necessàriament especificats) pot ser un bon recurs per a manejar aquesta mena de problemes *abans* de donar cap definició de la velocitat com a distància (en unitats convencionals) per unitat de temps (convencional).

La Introducció del Concepte de Proporcionalitat.

El punt de partida d'una bona part dels problemes de planteig el constitueix el concepte de proporcionalitat, concepte que l'alumne hauria d'adquirir, no tant a partir d'una correcta definició, sinó a partir de la resolució de problemes senzills com el següent:

"Si amb 120 ptes. puc comprar 3 bombetes, i en necessito 60, quantes ptes. em faran falta?"

Problemes com aquest no requereixen haver-ne fet d'altres anteriorment perquè l'alumne pugui abordar-los sense cap més arma que el seu propi pensament. Seria del tot ridícul oferir fórmules, abrigades sota un esquema teòric i general, per a abordar problemes d'aquesta senzillesa. Deixem que cada alumne desenvolupi lliurement els seus propis esquemes de pensament natural i espontani, i no castrem d'entrada els recursos dels alumnes, que precisament són el que es tracta de potenciar!

Si deixem fer als alumnes per ells mateixos, és molt probable que al problema anterior apareguin dos camins possibles que condueixen a la solució. L'un consistirà a trobar primer el preu de cada bombeta, i després multiplicar-lo per 60. L'altra procedirà dient: com que he de comprar 60 bombetes, que són vint vegades més que 3 bombetes, em costaran 20 vegades més que 120 pesetes, és a dir 2.400 pesetes.

Tant un raonament com l'altre porten a ampliar dues quantitats proporcionalment o linealment, a partir de multiplicar-les per un mateix nombre, fins que un dels resultats coincideixi amb un altre del requadre:

Ptes.	Bombetes	
120	3	
.....	60	

multiplicant per 20 (120 passa a 2.400)

↓

← multiplicant per 40 (60 passa a 2.400)

Podem fer adonar als alumnes de les relacions que hi ha entre els diferents nombres que intervenen en el quadre de dades, fent certes preguntes adients respecte als mètodes de resolució.

La primera forma de resoldre el problema ha consistit a esbrinar el preu de cada bombeta, i després hem calculat el preu de les 60 bombetes. Podem preguntar: Es verificarà la relació

$$\frac{120}{3} = \frac{2.400}{60} \text{ ? , i, què expressa cada un d'aquests quocients?}$$

La segona forma de resoldre-ho s'ha basat a veure quantes vegades són més 60 bombetes que 3 bombetes, per, a continuació, dir que tantes vegades més serà el preu de les 60.

Preguntem: Es verificarà la relació $\frac{60}{3} = \frac{2.400}{120}$? , i què expressa cada un d'aquests quocients?

Aquestes i altres qüestions aniran paulatinament configurant el marc operatiu propi de les proporcions.

Quan parlem d'*augmentar linealment certes quantitats*, estem utilitzant un llenguatge inintel·ligible per a l'alumne, ja que aquesta expressió adquireix sentit en el marc de l'estudi de les funcions lineals que tenen per gràfic una recta, i d'aquí el nom. Creiem que no és el camí més adequat estudiar per primera vegada les nocions de proporcionalitat entre quantitats, o la variació de certes quantitats, mantenint la proporcionalitat entre elles, a partir de la idea de funció, cosa que implica la noció de variable i la de relació entre variables, conceptes prou abstractes per a no constituir un recomanable punt de partida. Realment el camí de desenvolupament conceptual ha d'anar al revés, és a dir, tractar, a partir del raonament aritmètic, les nocions primàries de proporcionalitat; després a partir de l'assimilació de la mecànica i de la forma d'operar aquests problemes, han d'aparèixer paulatinament els recursos que més endavant prendran cos dins del marc de l'àlgebra retòrica. En definitiva, creiem convenient que l'estudi del concepte de proporcionalitat es faci sota l'imperatiu de no utilitzar en cap moment la idea d'incògnita-representada-per-una-lletra, i molt menys encara la de variable o funció.

Els problemes de planteig que corresponen a l'estudi de la proporcionalitat han d'integrar l'estadi pre-algebraic, que amb el temps fructificarà dins del marc de la teoria d'equacions polinòmiques. És per això que no creiem recomanable la resolució dels problemes de proporcionalitat a partir dels mecanismes automatitzats de la Regla de Tres, o almenys no fer-ho fins a l'últim moment, quan ja s'ha culminat l'estudi de la proporcionalitat. La raó de no fer-ho ens sembla evident, ja que, què hi ha sota la forma de procedir que resol el problema a partir d'aquesta regla?

$$\begin{array}{r} 120 \text{ ————— } 3 \\ x \text{ ————— } 60 \end{array} \quad x = \frac{60 \cdot 120}{3}$$

Per l'alumne no hi ha res més que això: una lletra, un producte "creuat" de nombres i una divisió, ja que tota regla sistematitzada representa una economia de pensament, al mateix temps que emmascara les raons que condueixen a aquesta regla. Així és que la regla resolutiva sols és vàlida, quan ja s'han entès perfectament els motius que condueixen a ella. Fet i fet, el millor seria que, després de resoldre molts problemes d'aquests, fossin els propis alumnes els que en tot cas adoptessin la mecànica de la regla, sense haver-los-la explicada.

Després d'haver resolt uns quants problemes de proporcionalitat on intervenen parelles de nombres, es poden plantejar d'altres problemes on apareixen proporcions entre més nombres, com per exemple:

"Tres amics inverteixen les quantitats següents per comprar caramels: en Pere inverteix 100

ptes., en Joan 50 i en Miquel 10. Sabent que per la suma total de diners els n'han donat un kilo i mig, com s'hauran de repartir els caramels?."

La gamma d'aquests problemes extrets de la vida real és molt àmplia, i és convenient fer-ne molts per tal que s'assimili bé el concepte de proporcionalitat i l'operatòria que porta associada. A la quarta part d'aquest llibre es poden trobar uns quants d'aquests problemes, extrets de les primeres aritmètiques mercantils. Els problemes de percentatges, o els d'aliatges, poden ser un bon recurs. Per exemple:

"Es vol fer el màxim d'una beguda en què intervenen tres ingredients en aquesta proporció: 1 Kg. de sucre, un quart de Kg. de suc de llimona, i 100 grams de rom. Es disposa d'un sac de sucre de 50 Kgs., una garrafa de 5 Kgs. de suc de llimona i 3 botelles amb un Kg. de rom cada una. Quina quantitat total màxima de producte podrem fer, i quina quantitat de cada ingredient faria falta?."

Si els alumnes, davant d'un problema d'aquest tipus, no veiessin cap camí de resolució, se'ls pot suggerir que calculin la quantitat de llimona i rom que els faria falta per a consumir els 50 Kgs. de sucre, càlcul que no es basa més que en els recursos tractats anteriorment.

1 Kg. de sucre $\frac{1}{4}$ Kg. de suc de llimona $\frac{1}{10}$ Kg. de rom

Amb 50 Kgs. de sucre, necessitaríem 50 vegades més cada quantitat:

50 Kgs. de sucre $\frac{50}{4} = 12 + \frac{1}{2}$ Kgs. de llimona $\frac{50}{10} = 5$ Kgs. de rom

A la llum dels resultats és evident que per a fer una tal barreja ens faltaria més suc de llimona i rom que els que tenim.

Amb 5 Kgs. de suc de llimona, quina quantitat dels altres productes faria falta? Les respostes ara ja seran ràpides:

5 Kgs. de suc de llimona, quants quarts de Kg. contenen?: $5 : \frac{1}{4} = 20$

En conseqüència, podríem fer la barreja, integrada per:

20 Kgs. de sucre 5 Kgs. de suc de llimona 2 Kgs. de rom

Com que tenim més de 20 Kgs. de sucre i més de 2 Kgs. de rom, aquesta serà la quantitat màxima de producte que podrem fer:

(esgotant tot el suc de llimona i sobrant-nos 30 Kgs. de sucre i 1 Kg. de rom)

Si a continuació preguntéssim als alumnes quina és la mínima quantitat de productes que hem de comprar per tal de fer la barreja i liquidar les existències dels tres ingredients base, podrien raonar ja així:

Han sobrat 30 Kgs. de sucre i 1 Kg. de rom. Per a 30 Kgs. de sucre farien falta $30/4$ de Kgs. de suc de llimona i $30/10$ de Kgs. de rom, i com que tenim 1 Kg. de rom sobrant, en total hauríem de comprar 7 Kgs. i mig de suc de llimona i 2 Kgs. de rom.

En aquest cas, quina quantitat total de producte obtindríem?

27 Kgs. d'abans, més $30 + 7 + \frac{1}{2} + 3 = 40 + \frac{1}{2}$, fan en total $67 + \frac{1}{2}$ Kgs.

Per tal de veure totes les operacions que han entrat en joc, es pot proposar als alumnes que confeccionin una taula dels distints resultats parcials obtinguts:

	Sucre	Suc de Llimona	Rom	Total de la barreja
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{27}{20}$
1 ^a op.	1			
	20	5	2	27
2 ^a op.	30	$7 + \frac{1}{2}$	3	$40 + \frac{1}{2}$
Total	50	$12 + \frac{1}{2}$	5	$67 + \frac{1}{2}$

Se'ls diu que observin detingudament el quadre, i se'ls poden fer les següents preguntes:

Com es passa de la primera línia a la segona?

Com es passa de la primera línia a la tercera?, i a la quarta?

Si la quarta línia l'hem obtinguda sumant la segona i la tercera, quines són les relacions entre les quatre línies?

Quina quantitat d'ingredients exactes necessitaríem per a obtenir 30 Kgs. de la barreja?

Com ho faríem?

També dins del capítol de problemes sobre barreges, és interessant estudiar la realització del pas d'unes quantitats fraccionàries a unes altres que, mantenint la proporció, siguin enteres. Per exemple: si per a fer una barreja ens han passat una fórmula que ens indica que fan falta quatre productes, amb les quantitats per cada un d'ells de $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{8}$ i $\frac{3}{5}$ de Kg. i volem saber la mínima quantitat de barreja que hem de fer si disposem d'una balança que només pot pesar quantitats de Kgs. exactes, com ho faríem?

Després d'haver posat en relleu que per conservar les proporcions s'ha de multiplicar totes les quantitats pel nombre, n'hi haurà prou de multiplicar totes les quantitats pel mínim comú múltiple de tots els denominadors, obtenint el resultat de 210, 80, 35 i 168 Kgs. respectivament. Se'ls pot fer reflexionar que el procés hagués estat el mateix que reduint les fraccions a comú denominador mínim i prenent les quantitats indicades pel numerador.

També són molt apropiats els problemes d'herències, com per exemple:

"Un senyor deixa estipulat al seu testament les següents instruccions: De tota l'herència es faran tres parts iguals. Una d'elles serà per a la seva muller; una altra part serà repartida a parts iguals entre la seva muller i tots els seus fills, i l'altra part serà repartida entre tots els seus fills, de tal manera que les noies rebin doble que els nois. Si l'herència és de 100.000 ptes., com s'hauria de fer aquest repartiment, si en morir el senyor, a part de la muller, tenia dues filles i tres fills."

És evident que tots aquests problemes es poden fer utilitzant els principis més rudimentaris de l'àlgebra, fent-hi intervenir una lletra per representar la incògnita, però és més instructiu en aquesta fase del procés d'aprenentatge desenvolupar els recursos exclusivament aritmètics. La resolució podria venir donada per un raonament més o menys així:

De cada 3 ptes. 1 pta. per la muller
 1 pta. a repartir entre els 5 fills més la muller (Toca $\frac{1}{6}$ per cap)
 1 pta. a repartir entre 5, però doble per a les noies

El repartiment de la tercera part s'hauria de fer així: per cada pta. que reben els nois, en reben 2 les noies, és a dir:

Un noi 1

Un altra 1

Un altra 1

Una noia 2

L'altra noia 2

De cada 7 ptes. reben 1 cada noi i 2 cada noia.

Així doncs, de cada pta. en reben $\frac{1}{7}$ cada noi i $\frac{2}{7}$ cada noia.

Veiem ara el repartiment que es farien de 3 pessetes:

La muller: $1 + \frac{1}{6}$ ptes.

Cada noia: $\frac{1}{6} + \frac{2}{7} = \frac{19}{42}$ ptes.

Cada noi: $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42}$ ptes.

Ara bé, com que el repartiment és de 100.000 ptes. en lloc de 3, n'hi haurà prou de multiplicar cada una d'aquestes quantitats per $100.000/3$, obtenint per al repartiment:

La muller $(1 + \frac{1}{6}) \cdot \frac{100.000}{3} = \frac{700.000}{18} = 38.888 + \frac{8}{9}$ ptes.

Cada noi $\frac{13}{42} \cdot \frac{100.000}{3} = \frac{1300.000}{126} = 10.317 + \frac{29}{63}$ ptes.

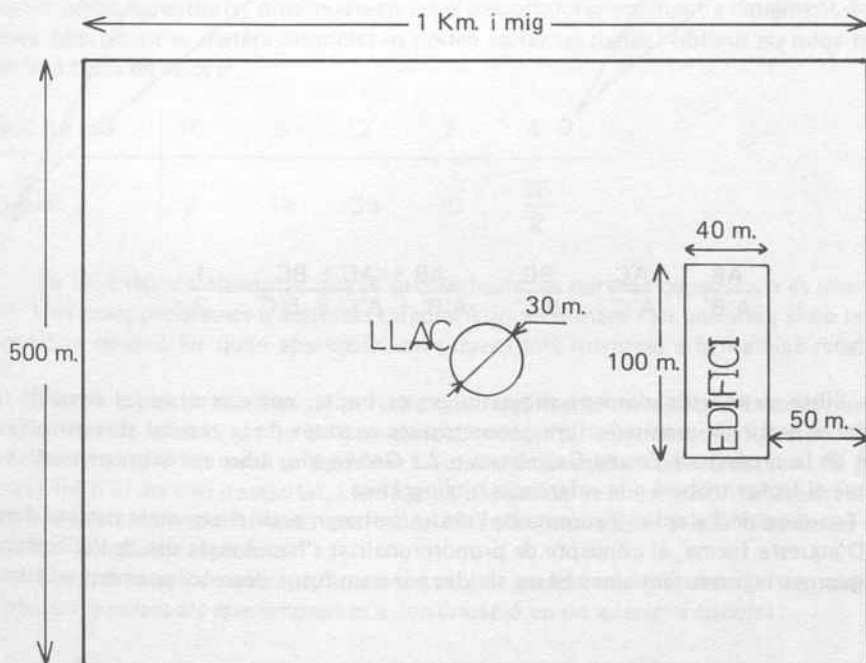
Cada noia $\frac{19}{42} \cdot \frac{100.000}{3} = \frac{1900.000}{126} = 15.079 + \frac{23}{63}$ ptes.

Aquesta forma de procedir, molt semblant als mètodes d'una falsa posició, està molt més a prop del pensament natural de l'alumne, i el desenvolupament d'aquests mètodes és el que millor prepararà el camí cap a l'àlgebra. Per altra banda, pensem que no és inútil l'entreteniment amb aquesta aritmètica de la proporcionalitat, ja que és precisament aquí on s'incubaran molts dels conceptes que més endavant seran tema d'estudi, i que trobaran els seus fonaments en aquest capítol, com les semblances en el pla, les raons trigonomètriques, l'estudi de les funcions lineals, l'estudi de vectors, etc.

La Introducció a l'Estudi de les Semblances en el Pla.

El problema de les semblances en el pla trobarà en aquest capítol el marc més natural per al seu desenvolupament. No hi ha per què separar els problemes d'augmentos o reduccions proporcionals entre quantitats aritmètiques o magnituds geomètriques. Les tècniques i l'operativitat associades a ambdós problemes són les mateixes, i en conseqüència cal abordar-les conjuntament.

No és necessari començar el problema de les semblances en el pla a partir de les figures geomètriques més senzilles, però també més abstractes, com els triangles, i després anar generalitzant. Pot ser molt més suggerent pels nois oferir-los un problema de reducció d'escala, dibuixant el plànol d'un parc de la zona on hi ha distints objectes que caldrà representar en el model reduït, tot conservant les proporcions. Per exemple, se'ls pot proposar que representin en un paper mil·limetrat, i en les màximes dimensions possibles, un parc rectangular de 1 Km. i mig de llarg per 500 m. d'ample, en el qual hi ha, al centre, un llac rodó de diàmetre 30 m., i en un extrem un edifici que mideix 100 m. de llarg per 40 d'ample, centrat, tal qual s'observa a l'esquema següent:

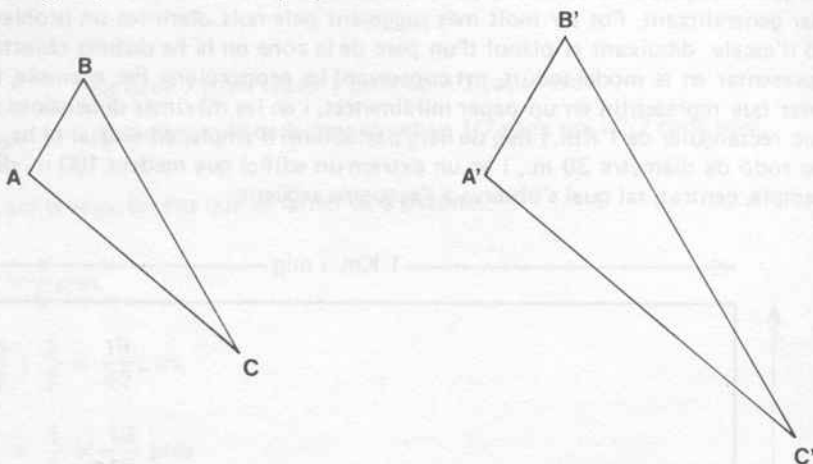


Als alumnes se'ls pot proposar que representin el mateix dibuix en un paper mil·limetrat de 20 cm. per 30 cm., de tal manera que la representació conservi les proporcions reals que hi són descrites. Al marge del paper mil·limetrat se'ls pot dir que hi indiquin la reducció d'escala efectuada, en passar de les dimensions reals a les del dibuix seu.

Aquest tipus de problemes, i d'altres similars, resulten bastant atractius pels alumnes, ja que estimulen la capacitat de manipulació geomètrica, així com l'ús d'una aritmètica elemental posada al servei d'un projecte concret. Després d'una certa pràctica en dibuixos senzills se'ls pot proposar que facin el mateix per presentar la distribució d'espais de la seva pròpia casa, feta a proporció i en paper mil·limetrat.

L'avantatge de començar per problemes d'aquest tipus rau en el fet que l'alumne pot desplegar una activitat manipuladora d'objectes, activitat que pot estimular la seva curiositat a interessar-se pel problema geomètric més general de les semblances, al mateix temps que de forma intuïtiva ja veurà la necessària conservació dels angles. Després d'uns

quants exemples com els anteriors, pot passar-se a l'estudi, més abstracte, de les transformacions de triangles que conservin les proporcions.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{1}{2}$$

Un llibre extraordinàriament suggestiu on es tracta, entre d'altres, el tema de les semblances a partir de manipulacions geomètriques extretes de la realitat que envolta al noi, és el de la professora Emma Castelnuovo, *La Geometria*, llibre recentment traduït al català i que el lector trobarà a la referència bibliogràfica.

El Teorema de Tales i el Teorema de l'altura trobaran aquí el seu marc natural d'exposició. D'aquesta forma, el concepte de proporcionalitat s'haurà estès des de l'aritmètica fins a la geometria, assentant unes bases sòlides per a un futur desenvolupament en altres temes.

Algunes Qüestions Sobre la Proporcionalitat Inversa.

Els problemes on intervé la proporcionalitat inversa ofereixen d'entrada una dificultat de comprensió considerable per a l'alumne. L'estructura de l'enunciat escapa fàcilment als esquemes intuïtius i psicològics del noi, que està acostumat a manipular objectes per als quals és vàlida la relació: *a més quantitat d'aquesta cosa, més de l'altra*. No és aquí recomanable abordar directament el típic problema d'aixetes o qualsevol altre similar, o si de cas es pot provar de fer sense esperar que del templeig dels alumnes sorgeixi quelcom fructífer o productiu que s'aproximi a la solució del problema. Sí que en canvi es poden abordar problemes més senzills, on s'evidenciïn situacions en què es manifesta que *a més quantitat d'una cosa, menys de l'altra*, a efectes de trencar la preponderància de l'altre tipus de pensament, molt més arrelada en la ment del noi.

Es podria començar aquest apartat amb un problema com aquest:

"Un obrer, treballant 10 hores al dia, acaba una feina en 7 dies. Quants dies tardaria a acabar-la si sols treballa 5 hores cada dia?"

Una qüestió més o menys com aquesta, pot endegar, en la ment de l'alumne, distints mecanismes de pensament i tractament del problema, sense condemnar-lo a la passivitat per falta d'iniciativa.

Els uns contestaran directament, sense fer cap operació i donant la resposta correcta, tot dient que l'han resolt "per lògica" (els alumnes tendeixen a confondre la lògica amb el sentit comú).

D'altres potser procediran de forma més cauta i més sistemàtica, dient que, si per a acabar la feina fan falta $10 \cdot 7 = 70$ hores, resultarà que, treballant 5 hores cada dia, necessitaran $70/5 = 14$ dies per a acabar tota la feina.

Tant per uns com pels altres es refermarà la idea que en alguns problemes, en augmentar certes quantitats, disminueixen les altres proporcionalment a l'augment de les primeres. Mantenint el mateix enunciat es poden variar les dades i obtenir els nous resultats; fent una taula de valors:

Hores per dia	10	5	2	7	4
Dies	7	14	35	10	$\frac{35}{2}$

És fàcil llavors constatar que el producte de les parelles de resultats es manté constant. Uns pocs problemes d'aquestes característiques donaran als alumnes, si no la idea, sí la pràctica de què fer quan apareguin unes quantitats sotmeses a la mateixa relació anterior.

Per als típics problemes de proporcionalitat inversa creiem que és molt convenient abordar vies de solució on no calgui usar cap incògnita, i en conseqüència s'obviï el planteig d'una equació i la seva solució. No ho creiem convenient per dues raons: la primera, perquè no n'hi ha cap necessitat, i la segona, perquè cal reforçar prioritàriament els mecanismes de raonament aritmètic, que esdevindran la base sobre la qual s'edificarà més endavant el llenguatge algebraic.

Els problemes de correus, aixetes, etc..., es podran tots ells abordar per raonaments aritmètics, similars als que emprarem a continuació en un exemple concret:

"Una aixeta omple un dipòsit en 45 hores, i una segona aixeta tarda a omplir-lo 48 hores; es pregunta el temps que tardarà a omplir-se el dipòsit si s'obren simultàniament les dues aixetes".

En 1 hora, la primera aixeta omple $1/45$ de dipòsit

En 1 hora, la segona aixeta omple $1/48$ de dipòsit

Entre les dues aixetes, en 1 hora omplen $\frac{1}{45} + \frac{1}{48} = \frac{93}{2.160}$ de dipòsit

Tardaran tantes hores com vegades càpiga la part $\frac{93}{2.160}$ de dipòsit en el dipòsit, és a dir:

$$1 : \frac{93}{2.160} = 23 + \frac{21}{93} \text{ hores.}$$

Aquesta és una forma de tractament prou generalitzable a una diversitat de situacions, però no és l'única. Així, també pot ser interessant de resoldre aquest problema de la següent forma:

Anem a calcular quin serà el temps mínim que ha de passar perquè les dues aixetes omplin simultàniament un nombre exacte de dipòsits. Problema que fàcilment s'identifi-

ca amb la qüestió de trobar el mínim comú múltiple entre 48 i 45, que és 720. Així, podem dir que, en 720 hores, una aixeta ompliria 15 dipòsits i l'altra n'ompliria 16. Entre totes dues aixetes omplirien, en 720 hores, exactament 31 dipòsits, és a dir que per a omplir un dipòsit en necessitarien 31 vegades menys, o sigui $\frac{720}{31} = 23 + \frac{7}{31}$ hores.

Es pot fer adonar als alumnes de la coincidència d'operacions en treballar en una via de raonament o en l'altra, sense més que fer un quadre comparatiu de les operacions que intervenen en els dos casos.

No volem desenvolupar més aquests aspectes concernents a les possibilitats dels raonaments aritmètics per no fer-nos reiteratius, però sí que volem acabar subratllant que, si no fós perquè existeix la possibilitat d'aquest tipus de raonament, mai no s'hagués històricament travessat el llindar matemàtic que condueix a les tècniques algebraiques, les quals fonamenten el seu bon funcionament en aquesta aritmètica elemental. Dependrà de com s'hagin aprofitat aquests recursos aritmètics, que el procés d'aprenentatge de l'àlgebra fet pels alumnes sigui sòlid i coherent, o bé que adopti la forma d'una arbitrarietat convenient per a fer certs problemes.

No volem deixar d'incloure en aquest apartat una experiència molt suggestiva sobre el tema de la proporcionalitat, realitzada per Puig Adam, i explicada per ell mateix. Hem trobat extraordinàriament encertada la reflexió final que fa P. Adam, referent a les pautes seguides pels alumnes en l'assimilació dels coneixements, i el respecte admirable que demostra P. Adam cap a les primeres manifestacions espontànies del noi envers l'expressió dels conceptes que ha assimilat (Puig Adam, pp. 328-330):

"Empecé escribiendo en el encerado las dos sucesiones de números

2	4	6	10	12	
0,5	1	1,5		3	4

y después de indicar a los alumnos que las copiaran en su cuaderno, les dije que llenaran los dos lugares vacíos (superior e inferior) con los números que creyeran habían de convenir para el caso.

La lucha de los niños con el misterio suscitado por los dos huecos, ha resultado sumamente interesante. Dos de ellos han acertado inmediatamente; pero a los demás no les resulta tan fácil, y lo atribuyo a un posible defecto de planteamiento. La sucesión 0,5; 1; 1,5 suscita una idea de progresión que invita a poner 2 a continuación. Resulta muy curioso que, al darse cuenta de que este 2 ya no corresponde al 10 de encima, intercalan entre el 6 y el 10 un 8, completando las progresiones así:

6	8	10
1,5	2	2,5

con lo que ya aciertan con el número 2,5 correspondiente al hueco inferior. Asimismo muchos empezaron escribiendo en el hueco superior 14, en vez de 16, arrastrados por la progresión 10, 12. Sin impacencias he terminado logrando que aciertan los doce alumnos de primer año con los que opero, salvo uno.

Mientras los rezagados rectificaban sus errores, he propuesto otras dos sucesiones para los adelantados

0,3	0,9	1,5	3	6
1	3		10	20

que han resuelto bien.

La pregunta "¿Cómo habéis resuelto el problema?" ha originado las contestaciones más variadas e interesantes, en las que aparece latente toda la teoría de la proporcionalidad, que los niños no habían estudiado todavía, y que ha surgido al calor de la situación planteada.

La solución por progresión rectificada ha sido la más general y espontánea, pero las equivocaciones que ha originado han suscitado, como generalización natural, la comparación por razón entre números de cada sucesión. Así, un niño me dice: "Veo que 4 es el doble de 2 y que 1 es también el doble de 0,5. Veo que 6 es el triple de 2 y que 1,5 es también el triple de 0,5. Como 10 es cinco veces 2 debo escribir debajo cinco veces 0,5."

Otros niños, en cambio, se fijan en las razones entre números que se corresponden en vertical y me dicen: "0,5 es la cuarta parte de 2 y también 1 es la cuarta parte de 4. Debajo del 10 debo escribir la cuarta parte 2,5. Encima del 4 debo escribir cuatro veces 4."

Otro observa que 6 es la suma $2 + 4$ de los números que le preceden en la fila y que también debajo 1,5 es la suma de $1 + 0,5$. Como 10, me dice, es la suma $4 + 6$, he escrito debajo la suma $1 + 1,5 = 2,5$.

Se ve, en resumen, que, con este juego, los niños han descubierto: 1.º) la igualdad de razones entre pares de números de las dos series, 2.º) la razón constante entre los números correspondientes de una suma y otra serie y 3.º) la correspondencia en la suma.

El profesor puede hacer explícitas estas propiedades o contentarse en el primer curso con la adquisición implícita de ellas y su aplicación correcta. Como se ve, los niños van mucho más allá de lo que podemos figurarnos; la dificultad principal a estas edades es la manifestación consciente y explícita de sus poderosas intuiciones; pero, ¿qué prisa hay en ello? Los adultos tenemos tendencia a confundir el saber con el saber expresar. Y aunque es cierto que quien sabe expresar un concepto con claridad lo domina, no es menos cierto que, al forzar prematuramente una expresión correcta *no espontánea*, no se consigue otra cosa que fomentar un memorismo palabrero vacío de sentido para el niño.

Por mi parte me limito de momento a escribir las igualdades de razones que los niños habían descubierto, a llamar *proporciones* a tales igualdades de razones y a decir, en consecuencia, que las dos sucesiones de números se llaman *proporcionales*."

CAPÍTOL 16:

PROBLEMES GENERALS CONCERNENTS A LA DIDÀCTICA DEL LLENGUATGE ALGEBRAIC

L'aprenentatge del llenguatge algebraic: un problema didàctic a descobrir

En els 150 anys que durà el procés bàsic de formació del llenguatge algebraic hi hagué un primer estadi clarament definit, que hem estudiat al capítol 11, del qual volem destacar una sèrie de particularitats:

i) El referent bàsic dels ens algebraics i de les seves relacions és el model geomètric de les magnituds i de les operacions contingut als *Elements* d'Euclides. Hi ha operacions algebraiques *automatitzades*, però són molt poques, només les referents al càlcul amb radicals i a la multiplicació de polinomis (on queden inclosos els productes de ce per ce , o de x per x ; etc.). En particular, distingien problemes de geometria pràctica que avui podem unificar gràcies a una fórmula simbòlica. Per exemple, el càlcul de l'àrea d'un rectangle, coneguts els costats, i el càlcul de l'alçada d'un rectangle, coneguts l'àrea i la base, eren dos problemes que es resolien independentment, raonant pas a pas a partir de les nocions geomètriques bàsiques; en cap moment, en el període mencionat, no es podrà utilitzar que de $A = ba$ es dedueix $a = A/b$. Les poques operacions automatitzades vénen justificades (quan es justifiquen, cosa que no sempre passa) a partir d'un referent geomètric.

ii) Des del punt de vista de la *utilització*, el llenguatge algebraic només era emprat per al càlcul amb magnituds radicals i per al plantejament, transformació i resolució d'equacions.

iii) La funció que hom assignava als símbols algebraics estava íntimament relacionada amb la seva utilització principal: eren recursos gràfics per a agilitzar el llenguatge, alleugerir la retòrica i simplificar així la resolució d'equacions; això, junt amb el càlcul radical, semblen ser les principals motivacions, si no les úniques, que conduïren als primers símbols algebraics.

iv) Quant als símbols emprats, destaquen com a poc conflictius els corresponents a "+" i "-", que només coneixen dues versions, l'alemanya i la italiana. No va ser sinó al final del període al que fem referència que varen aparèixer alguns símbols es-

pecíficament adreçats a representar la igualtat. Si bé les propostes foren molt diverses, el paper que jugaren en tot el procés global sembla de molt poca importància.

v) Predomini molt clar de les notacions per a representar les potències de la incògnita basades en el principi multiplicatiu. Encara que només va haver-hi dues notacions majoritàriament emprades, foren nombroses les propostes alternatives. Amb independència d'elles, però, foren d'ús universal els coeficients acompanyant la incògnita i les seves potències per juxtaposició, si bé aquesta disposició no tenia al darrera cap idea que correspongués a la simbolització del producte en general.

vi) Al llenguatge algebraic primitiu hi ha unes *absències* tan significatives i importants com els anteriors trets comuns. Hi eren absent les *variables*, els símbols amb funció paramètrica, i, de forma derivada, les fórmules simbòliques expressant relacions numèriques (àrees, volums, solucions d'una equació de 2on grau, etc.). El seu lloc estava ocupat per regles completament retòriques que, exceptuant raríssimes ocasions, mai no utilitzaven lletres per a designar els nombres genèrics que hi intervenien. També hi eren absents els productes indicats (tant de les expressions polinòmiques com de les expressions radicals), així com els parèntesis. Els símbols emprats, finalment, no eren necessàriament unívocs.

Recordar això ens permetrà subratllar que, en contra d'una de les creences més fermament arrelades en els llicenciats en matemàtiques, el llenguatge algebraic modern no té res de *natural* ni d'*evident*. Així ho testimonien la polivalència original dels símbols, el temps que fou necessari per a l'adopció generalitzada d'un llenguatge únic acceptat per tothom, la competició entre diferents solucions gràfiques (igualmente eficaces) per a representar una mateixa cosa, i la funció que originalment protagonitzava el llenguatge algebraic (funció tan diferent de l'actual).

Tenir això present és absolutament imprescindible per a poder comprendre els problemes didàctics reals que existeixen en aquest camp. Ja hem comentat a la part II (p. 238) que al segle XVI podia ser necessària una pàgina per a *demostrar* el resultat que nosaltres escriuríem $(9 + \sqrt{75}) + (3 + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3}) + (9 - \sqrt{75}) = 24$. Avui, aquest és un resultat evident perquè reconeixem la forma $(a + b) + (c + d) + (c - d) + (a - b)$ i podem prescindir de gran part del càlcul numèric concret. Com dèiem ara mateix, res no és tan fals com creure que una evidència d'aquest tipus és natural, o, recíprocament, que els alumnes pels quals no resulta evident són rucs. L'evidència que nosaltres atorguem a certes relacions o combinacions de símbols algebraics és fruit d'un procés d'aprenentatge, d'un costum, d'un hàbit que, de tan incorporat com està als nostres esquemes intel·lectuals, ha deixat de semblar una cosa apresada per a semblar una capacitat innata. Com hem vist al capítol 11, només tenint en compte la component *convencional* de les solucions simbòliques que integren el llenguatge algebraic es poden entendre moltes de les anomalies que presenta la seva gènesi. Representar un nombre desconegut per una lletra és una convenció; suposar que una lletra representa un nombre indeterminat també és una convenció, i diferent de l'anterior; eliminar el nombre 1 quan hauríem d'escriure $1x$, representar el quadrat de x per x^2 , etc. etc., no són *maneres naturals* de representar els conceptes i les relacions esmentats, sinó artificis simbòlics que la comunitat científica va anar trobant, junt amb d'altres, i que per mitjà d'un procés de més de 200 anys arribà a estructurar sòlidament entre si, adoptant-los, finalment, com a únic conjunt legítim de símbols algebraics.

El que hem dit fins ara podria resumir-se dient que cal que el professor deixi de considerar el llenguatge algebraic com una mena de transliteració natural, dictada pel sentit comú, òbvia com si diguéssim, de certs conceptes i relacions aritmètics o algebraics. És aquesta una advertència tant més necessària que l'actitud avui predominant al

respecte és terriblement fàcil i còmoda. Tant pels programes oficials d'E.G.B. i de B.U.P., com pels llibres de text corresponents, com per la majoria de professors, els problemes didàctics que comporta arribar a dominar el llenguatge algebraic simplement no existeixen. Es pressuposa que els símbols emprats i la sintaxi que els lliga no té cap secret especial i que no és qüestió sinó de "fixar-s'hi una mica". De forma parcial, sense cap idea de conjunt que presideixi el procés, l'alumne anirà trobant a diferents cursos diferents coses a aprendre sobre els símbols matemàtics. Sovint les trobarà, a més a més, *desfigurades*: el maneig de quantitats radicals és fàcil que l'hagi d'aprendre com un subapartat d'un capítol dedicat a l'exponenciació; un polinomi molt possiblement serà, d'entrada, una successió quasi nul·la; l'objectiu d'operar amb fraccions algebraïques és, segons els llibres, trobar l'estructura de cos de què gaudeixen; etc. etc.

És sabut que resultats reputats evidents o fàcils, com que $(a + b)^2$ NO ÉS $a^2 + b^2$, o el desenvolupament de $(3x - \frac{1}{3})^4$, etc., resulten estranyament difícils als nostres alumnes. També son conegudes les dificultats considerables que troben els alumnes del primer curs de B.U.P. per a dominar la mecànica del càlcul literal quan aquest ultrapassa els límits de les expressions trivials (per exemple, quan es tracta d'operar i simplificar fraccions algebraïques). En general, és extraordinàriament elevat el nombre de vegades i d'alumnes per qui una fórmula "ben apresada de memòria" resulta inaplicable a casos o problemes particulars que s'aparten, per poc que sigui, de l'exemple al qual la fórmula va ser aplicada pel professor quan la va explicar. Aquests exemples, i molts d'altres que després anirem comentant, palesen que l'aprenentatge del llenguatge algebraic és un problema didàctic d'envergadura i que requereix un tractament específic que, avui per avui, no li és donat. Nosaltres pensem, a més, que es tracta d'una insuficiència privilegiadament responsable del bloqueig de molts alumnes cap a les matemàtiques, d'una insuficiència, per tant, de conseqüències pedagògiques greus. Amb paraules de Polya,

"No sólo los malos alumnos de una clase muestran aversión por el álgebra; esto puede ocurrirles a estudiantes inteligentes. Siempre hay algo de arbitrario y artificial en una notación; es pesada tarea para la memoria el aprender un nuevo sistema. Un alumno inteligente puede negarse a ello si no capta la razón. La aversión que muestra hacia el álgebra está justificada si no se le han dado ocasiones frecuentes de constatar por la experiencia la ayuda evidente que el lenguaje de símbolos matemáticos puede ofrecer a la mente. Ayudarle en tal experiencia es un deber importante del profesor, diremos incluso esencial, nada fácil por lo demás." (Polya, p. 133; el subratllat és de l'autor).

Hem parlat fins ara de l'errònia creença en el caràcter evident de les notacions algebraïques; també hem parlat de la necessitat que aquestes siguin ensenyades sistemàticament i organitzadament. Ens cal parlar, finalment, d'un defecte que no perjudica específicament l'ensenyament de l'àlgebra, sinó el de les matemàtiques en general, malgrat que els seus efectes en el nostre camp són particularment desastrosos. Ens volem referir a la fascinació que sent qualsevol professor de matemàtiques pels plantejaments generals que subsumeixen i engloben diferents casos particulars. És aquesta una component tan important de la mentalitat i de la filosofia didàctica implícita compartida per la majoria dels qui ensenyem matemàtiques, que difícilment se'n podria trobar d'altra que configurés i determinés encara més les classes de matemàtiques que avui es donen. És aquesta mentalitat, per exemple, la que avantposa la definició general de funció, i l'estudi de les funcions *en general*, a la definició i estudi d'aquelles funcions particulars que l'alumne arriba a conèixer i manejar. Això no sols s'aplica a les funcions polinòmiques, racionals, trigonomètriques, etc., sinó també, molt ridículament, a les pro-

gressions. Costa de veure, realment, què aclareix del concepte de progressió aritmètica, què aporta al coneixement de les seves propietats, començar parlant d'*aplicacions* entre dos conjunts qualssevol A, B , anomenar *successions* les aplicacions de N en R , i dir que les *progressions aritmètiques* són aquelles successions que queden determinades per fórmules del tipus $x_n = an + b$. La importància que aquesta mentalitat té a l'hora de desfigurar les qüestions relatives a l'ús dels símbols i paràmetres, en general, i les relatives a les fórmules simbòliques, en particular, exigeix que ens aturem a analitzar-la.

Casos generals i casos particulars

"Quan compreu la fórmula general sabreu resoldre tots els casos particulars". La popularitat d'aquesta cançoneta revela el desconeixement dels problemes didàctics reals que s'amaguen darrera de les *fórmules generals*. Desconeixement que no és sinó el negatiu de la importància hipertròfica assolida per les *demonstracions* de les dites fórmules. Analitzem alguns exemples concrets:

i) Les equacions de 1er y 2on grau

La resolució de l'equació general de 2on grau gairebé sempre precedeix l'estudi dels diversos casos particulars que es poden presentar. La primera cosa que hom acostuma a fer és dir que les dues solucions d'una equació de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es dedueixen de l'expressió $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. El que és habitual, aleshores, és que el professor preguntant "D'on surt això? Per què són aquestes les solucions?", i tot seguit es posi a demostrar la fórmula *completant el quadrat*, o sigui partint de $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ i posant $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$, etc. Un cop demostrada la fórmula arriba l'hora de les aplicacions: l'alumne ha de resoldre diferents equacions concretes. Amb sort, després de resoldre'n unes quantes de "normals" anirà a parar a equacions incompletes: $3x^2 + 12x = 0$, etc. El resultat el coneix tothom: és aquesta plèthora d'alumnes que sempre s'equivoquen amb els signes quan apliquen la fórmula general i que resolen $3x^2 = 12$ fent $x = \frac{-0 \pm \sqrt{0 + 144}}{6}$.

El problema de la fonamentació lògica de la fórmula general ha desplaçat, a l'esquema anterior, el problema de la correcta i completa comprensió de l'algorisme de càlcul que la fórmula sintetitza. Per valorar justament quin dels dos problemes és didàcticament més important, hauríem d'avaluar sense pors ni prejudicis el rendiment que realment es treu de l'actual predomini de la demostració sobre el càlcul. Per nosaltres és evident que el paper d'aquella s'ha de relativitzar molt. De fet, la majoria dels alumnes són incapaces de comprendre el seguit d'equivalències formals en què la demostració es basa, són incapaces de veure el seu significat més primari (ignoren que quan se substitueixen les arrels en l'expressió $ax^2 + bx + c$ el resultat numèric és, realment, zero), i l'han oblidada pocs dies després d'aprendre-se-la de memòria, si en algun moment de debilitat van arribar a fer-ho. (No podem, doncs, sinó alabar al professor que s'adona que els alumnes no estan gens interessats en la demostració i, amb molt bon criteri, es decideix a

guanyar un quart d'hora de classe i no donar-los la pallissa). En canvi, pensem que cal revaloritzar un problema sovint negligit: la fórmula que dona les arrels *no representa una fórmula general sinó a posteriori*, quan l'alumne ja sap què ha de fer siguin quins siguin a, b i c (positius, negatius, trencats, irracionals,...).

En el mateix sentit cal repensar l'organització que habitualment es dona a l'ensenyament de les equacions de 1er i 2on grau. Aquelles *han de* precedir a aquestes perquè són més fàcils, diuen. El que és més fàcil és l'establiment de les respectives fórmules generals de resolució, però qualsevol mestre sap que és molt més fàcil resoldre una equació com $x^2 + 7x + 12 = 0$ que una equació com $\frac{x-3}{5} - \frac{3}{5}x - \frac{2-x}{10} = x - 5 + \frac{1-3x}{2}$, en la qual la sintaxi simbòlica involucrada és d'una complexitat molt superior. Dedicarem el capítol 18 a les equacions de 1er i 2on grau.

ii) Els polinomis

Moltes vegades els polinomis són introduïts per successions quasi nul·les. La definició per successions tal vegada serveix per a aclarir l'estructura de les àlgebres de polinomis, alhora que és un plantejament elegant i sintètic que permet definir amb una economia relativa (relativa perquè ve després d'haver fet molta despesa) les operacions entre polinomis d'una manera molt general. Per un alumne de Batxillerat, però, aquesta presentació és un embalum de conceptes impossible de justificar. Des d'un punt de vista pràctic, d'allò que convé que l'alumne sàpiga fer, no aporta res. Per a arribar a dominar la mecànica de les operacions amb polinomis (i no es tracta d'això, en aquest nivell?) caldrà anar pas a pas, començant per la significació dels monomis, justificant la necessitat de deixar les seves sumes indicades, veient com obtenir regles per a multiplicar-los, estudiant la regla $a^n a^m = a^{n+m}$, etc. (Però tot això s'haurà de fer, igualment, encara que els alumnes hagin partit d'una definició *general* de la suma, del producte,...!). Una complicació teòrica està clarament justificada si permet aclarir algun punt important que, sense ella, queda confús i facilita o provoca errors en els alumnes. En absència d'una causa així, com en aquest cas, ens inclinem davant de la presentació clàssica. El deure del professor és fer de l'aprenentatge la feina més agradable i planera possible: prou difícils són les coses que ensenyem, per afegir-hi complicacions innecessàries!

iii) Les fórmules de la Combinatòria

Potser aquest és un dels temes on es veu més clarament tot el que d'inútil hi ha en la cançoneta dels casos particulars que s'entenen per la fórmula general.

Les fórmules per a comptar el nombre de permutacions, variacions i combinacions són fàcilment recordades pels alumnes, encara que és proverbial que mai no saben si allò que tenen al davant és un problema de combinacions o és de variacions. L'ensenyament tradicional, de forma semblant a allò que passava amb les equacions de 2on grau, es preocupa per la demostració de les fórmules generals $P_n = n!$, $V_{n,m} = n(n-1)\dots(n-m+1)$,

$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \dots$. Aquí, com abans, una falsa perspectiva impedeix situar correctament el problema didàctic. Quin valor poden tenir aquestes demostracions quan resulta que els alumnes confonen unes amb les altres les permutacions, les variacions i les combinacions? Com es pot comptar allò que no se sap què es?

El problema didàctic, aquí, rau en la capacitat combinatòria, es dir, en la possibilitat que un individu tè de construir, realment o virtualment, però utilitzant un mètode sistemàtic, totes les possibilitats en joc (variacions, combinacions o permutacions) i acabar de fer-ho amb la seguretat que cap possibilitat no ha estat oblidada. És aquest un tema molt complex, perquè està molt condicionat pel desenvolupament intel·lectual de l'alumne, al qual dedicarem el capítol 19.

iv) El binomi de Newton

Segons l'ensenyament tradicional, allò que és didàcticament important sobre la fórmula $(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \text{etc.}$ és la seva demostració. Com que de rigorosa no n'hi ha sinó una, aquest plantejament condueix a buscar una versió didàctica d'una demostració per inducció. És clar, però, que la fórmula que dona la potència del binomi no apareix al programa de 1er de B.U.P. amb l'objectiu de disposar d'una excusa per a enfrontar els alumnes amb una demostració per inducció. Ni el nivell dels alumnes no ho permet, ni seria aquesta la demostració més escaient per a fer una cosa així. És innegable, d'altra banda, la importància que té que els alumnes sàpiguen aplicar la fórmula

general citada a expressions com $\left[\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}} \right)^{1/3} - \frac{\sqrt{3}}{5} y^2 \right]^3$: és una tècnica que necessi-

taran contínuament, dintre i fora de la nostra assignatura. Al mateix temps, i això demostra la inconsistència del plantejament tradicional, un domini tècnic del càlcul literal com el que acabem d'esmentar és absolutament imprescindible en la demostració per inducció de la fórmula general. Aquest domini apareix, d'aquesta manera, com una cosa prèvia i independent del procés de fonamentació lògica a què ens referim.

L'experiència demostra, ja ho hem dit, que una fórmula general pot ser perfectament coneguda (de memòria) i ser, al mateix temps, perfectament inutilitzable fora de casos d'aplicació trivial. És aquest punt de vista, lligat als problemes del càlcul concret, allò que fa absolutament pertinents totes les distincions possibles entre el binomi especificat més amunt i el binomi $(x + 2y)^2$. Si bé des del punt de vista de les operacions matemàtiques en joc els desenvolupaments d'ambdós resulten equivalents, és clar que el que a nosaltres ens interessa és *com* fer-los equivalents pels nostres alumnes, com fer que aquests avancin cap al domini dels símbols. Podríem dir que un dels principals objectius didàctics és que els alumnes arribin a entendre que binomis tan dispars com els dos anteriors poden ser citats, tots dos, per una expressió tan sintètica com $(a + b)^2$.

Arribar a utilitzar correctament la fórmula $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$, per complicats que siguin els valors numèrics i literals amb què es presenti, hem vist que és un dels autèntics problemes didàctics que s'amaguen darrera del binomi de Newton. Però no és l'únic, tota vegada que és possible donar als alumnes l'oportunitat d'arribar a descobrir una fórmula general aparentment tan complicada. Això es pot fer de la següent manera.

Farem calcular als alumnes, multiplicant $(x + a)$ per si mateix tantes vegades com calgui, els desenvolupaments de $(x + a)^3$ i $(x + a)^4$, i escriurem a la pissarra

$x + a =$	$x + a$	1 1
$(x + a)^2 =$	$x^2 + 2ax + a^2$	1 2 1
$(x + a)^3 =$	$x^3 + 3x^2a + 3xa + a^3$	1 3 3 1
$(x + a)^4 =$	$x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$	1 4 6 4 1

Amb això a la pissarra es pregunta quin serà el desenvolupament de $(x + a)^5$, i els alumnes, després d'una vacil·lació, dicten correctament el desenvolupament. La vacil·lació es produeix a causa dels exponents. Tenen molt clar que el començament serà $x^5 + 5a$ per una potència de x , però necessiten un punt de reflexió per trobar la regla "*la suma dels exponents sempre serà igual a l'exponent del binomi*", que arriben a enunciar per analogia amb els desenvolupaments anteriors. Un cop explicitada es pot buscar, en el mecanisme dels productes realitzats, una explicació de la mateixa.

El pas següent serà demanar-los que dictin $(x + a)^6$, la qual cosa ja faran sense greus problemes. Fins aquí s'haurà avançat sense gaires dificultats. Convé subratllar suficientment el caràcter hipotètic dels últims desenvolupaments: els hem escrit suposant que les coses són tan boniques i estan tan ben organitzades, que els coeficients coincideixen amb la fila corresponent del triangle de Tartaglia. Es pot demanar als alumnes (vigilant que la feina no es faci tediosa) que comprovin la veritat de la conjectura per als exponents 5 i 6.

El pas següent és el més difícil: la introducció dels nombres combinatoris en els desenvolupaments. Els preguntem quin serà el desenvolupament de $(x + a)^{10}$. La reacció de la classe és d'avorriment: ja saben com fer-ho, i el càlcul dels nous coeficients se'ls presenta com una feina mecànica que ja no aporta res. Insistim, aclarint que, per fer-ho més curt, no cal que calculin els nombres concrets que apareixeran com a coeficients. Comencen a dictar $(x + a)^{10} = x^{10} + 10x^9a + \dots$ i s'aturen. Aleshores escrivim a la pissarra, al costat del primer triangle de Tartaglia, un altre amb l'expressió simbòlica dels seus elements:

1	1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
1	2	1	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
1	3	3	1	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
1	4	6	4	1	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

No es produeix cap reacció positiva fins que no assenyallem que els coeficients de $(x + a)^{10}$ seran els de la desena fila del triangle, i que aquesta està formada per $\binom{10}{0}$, $\binom{10}{1}$, $\binom{10}{2}$, etc. Aleshores un alumne diu que el coeficient de x^8a^2 serà $\binom{10}{2}$; a partir d'aquí, la fórmula queda fixada sense problemes.

Encara que nosaltres vàrem indicar que la conjectura feta era certa, i que s'acomplia fos quin fos l'exponent, ni cap alumne féu gran cas de la nostra tranquil·litzadora confirmació, ni en sortí cap d'interessat per una demostració de la hipòtesi feta. Això, ben mirat, no és sorprenent; es necessita molta familiaritat amb els esquemes intel·lectuals, i una gran confiança en les idees abstractes per, d'entrada, malfiar-se d'una cosa que entra per la vista, i, a continuació, anar a buscar-ne la confirmació en una realitat tan immaterial com són els arguments i les construccions lògiques. És aquesta una actitud de gran maduresa intel·lectual, que no és fàcil de trobar en els nostres alumnes. El professor, davant d'això, pot optar per incloure o no la demostració. La nostra opinió, ja ho hem dit abans, és que cal relativitzar molt el paper de les demostracions.

v) Els paràmetres

Ja hem comentat en el capítol 11 que foren necessaris més de 150 anys per tal que els millors caparronets de 4 ó 5 generacions acceptessin la solució convencional de representar nombres desconeguts per lletres, i que creessin per a elles un càlcul formal que pogués expressar totes les operacions numèriques amb rigor. Existeixen d'altres consideracions que ho confirmen, però això sol ja ens hauria de fer imaginar que les idees involucrades en aquesta substitució del càlcul i de les operacions numèriques pel càlcul literal són d'una gran complexitat. Si la substitució mencionada s'analitza de prop, no es deixa de veure que implica una autèntica mutació dels esquemes lògics que suporten el pes dels raonaments: aquells no són els mateixos quan actuen sobre el càlcul literal que quan ho fan sobre operacions numèriques. Els raonaments mateixos passen de tenir un contingut i uns referents geomètrics a ser formals.

Les diferències que existeixen entre els esquemes lògics que cal utilitzar en cadascun dels contextos literal i numèric són detectables en la pràctica didàctica. Malgrat que tothom ha advertit que les dificultats per a fer raonar als alumnes (especialment els d'E.G.B., però també els de 1er de B.U.P.) varien substancialment segons que els enfrontem amb un problema amb dades numèriques o literals, serà interessant reproduir aquí unes dades de Gaston Mialaret. Els alumnes havien de resoldre tres problemes que no eren, des del punt de vista formal, sinó un mateix problema: 1) En Pau diu a en Pere: tinc 63 francs més que tu; si reunim els nostres diners, tindrem en tot 379 fr. Quina quantitat té en Pau i quina té en Pere? 2) Calcular dos nombres sabent que sumats fan 250 i que restant el petit del gran s'obté 160. 3) Calcular dos nombres coneixent llur suma i llur diferència (és a dir, $x + y = a$, $x - y = b$). Els resultats eren (Mialaret, p. 68, els nombres expressen tant per cent de respostes correctes; els cursos pertanyen al Segon Grau francès):

	4rt curs	3er curs
Forma 1	58	71
Forma 2	42	64
Forma 3	11	27

Aquestes diferències tan marcades no fan sinó traduir les diferències notables entre els recursos intel·lectuals que cal posar en joc per resoldre cadascun dels problemes: recursos intel·lectuals, no cal dir-ho, que en molts casos són *inensenyables* perquè depe-

nen directament del desenvolupament intel·lectual de l'individu (associat a l'edat). És un fet mal conegut que, per un simple problema d'edat, la immensa majoria d'alumnes d'E.G.B. (i molts de 1er de B.U.P.) no disposen dels recursos intel·lectuals necessaris per a realitzar el raonament hipotètic-deductiu que acompanya indefectiblement el fet de prendre com a punt de partida *un nombre qualsevol a* (ja que el raonament tindrà com a base la hipòtesi "si *a* té les propietats que té qualsevol ens que pugui ser anomenat nombre, aleshores..."). La conseqüència n'és que els professors de matemàtiques, preocupats per donar generalitat a les seves exposicions i demostracions, i convençuts que *quan els alumnes compreguin la fórmula general sabran resoldre tots els casos particulars*, no ens privem en absolut de fonamentar la introducció de conceptes i el desenvolupament dels temes en fórmules simbòliques plenes de paràmetres. A la pràctica, això vol dir que quan el professor empra lletres passen dues coses: uns alumnes imaginem la *a* substituïda per un 3 ó un 2, per un nombre concret, i segueixen el raonament que hom volia fer general aplicant-lo a un cas concret; i d'altres, simplement, tanquen els ulls i desconnecten.

* * *

Les raons anteriors ens fan pensar que la idea de subordinar, didàcticament, els casos particulars als generals és profundament incorrecta. El problema didàctic important relacionat amb qualsevol fórmula no és la seva demostració, és el seu significat, o, millor dit encara, són *els seus significats particulars*. La lingüística moderna ha estudiat a fons l'error que consisteix a creure que un element d'un llenguatge (p. e., un concepte matemàtic) pot ser incorporat per un individu sense fer-li conèixer les diferents *funcions* que l'element en qüestió realitza. És evident que si volem ensenyar a un estranger a utilitzar el ver FER, donar-li'n una definició de diccionari serà perdre el temps; el que caldrà serà ensenyar-li que hom pot dir: fer camises, fer bondat, fer bon temps, fer l'amor, fan la pel·lícula tal, fer tard, fer sol, fer punyetes, fer goig, fer nosa..., i que hi ha altres coses que NO es poden dir, malgrat que en la seva llengua les digui amb aquest verb. Tota la definició que podem donar de FER és aquesta: la llista de les seves funcions admissibles i de les inadmissibles. L'ensenyament que confia en les virtuts didàctiques "d'un enfocament general", que busca les definicions més generals possibles que sintetitzin els resultats, cau en l'error del diccionari. Però així és l'ensenyament predominant, el resultat del qual ha estat molt gràficament descrit per Mialaret:

"¿Cuántos niños concienzudos saben la teoría y son incapaces de hacer el problema más elemental? (...). Estos niños parecen guerreros que han comprado armas de las que no se saben servir. Repiten fórmulas verbales vacías de sentido para ellos y son incapaces de darles el menor contenido." (Mialaret, p. 107).

A condició de modificar molt profundament alguns dels actuals plantejaments, no saltres pensem que és possible remediare aquest mal endèmic de l'ensenyament de les matemàtiques.

Una proposta utòpica

Sense cap mena de precaució, als textos més elementals d'E.G.B. apareix la simbologia conjuntista ($A = \{x/..., etc.\}$), la notació funcional ($f(x) = ...$), es fan anar tranquil·lament les lletres com a paràmetres, etc. Això es fa "per introduir els alumnes en el

llenguatge matemàtic modern" (és que per introduir algú en el xinès se'l posarà davant de 100 pàgines amb els ideogrames de la més refinada literatura?), també "per introduir hàbits de rigor en l'expressió" (com es pot demanar rigor en una cosa que és impossible d'entendre?) i, sobretot, perquè tota aquesta simbologia es considera imprescindible per a poder parlar de matemàtiques: els professors estan tan acostumats a fer anar els conceptes des del punt de vista de la seva definició i de la seva expressió formal, que ni tan sols és pensada la possibilitat de fer altrament.

Qualsevol mestre sap per experiència quant que costa als alumnes d'aprendre a llegir, i que no es pot confondre aquest aprenentatge amb la tècnica de lletrejar. La lectura, com a assimilació del contingut conceptual del missatge escrit, exigeix del lector un procés de reconstrucció personal d'allò que diuen els mots emprats i la sintaxi que els lliga. Ara bé, tots els mestres d'E.G.B. i de B.U.P. sabem que molts dels nostres alumnes, si bé lletregen amb més o menys fortuna gairebé tots els mots d'alguna de les nostres llengües, difícilment arriben a desvelar tots els matisos i precisions d'un text escrit, per poca que sigui la seva complexitat. Si les dificultats són tan grans quan els alumnes s'enfronten amb el llenguatge ordinari, què no passarà quan es trobin davant de relacions i enuncisats de gran abstracció que, a més, cal llegir a partir d'un codi simbòlic no trivial!

La conseqüència de tot el que hem dit fins aquí és una proposta sense cap virtut, ara per ara: cal eliminar el llenguatge algebraic dels dos primers cicles de l'E.G.B., i cal introduir-lo, progressivament, en el seu tercer cicle. Quedi clar que això apunta a l'eliminació d'una simbologia tan fora de lloc a l'E.G.B. com adequada per a expressar, amb rigor i precisió, les idees subtils i complexes en què ha desembocat l'alta especulació matemàtica. A aquest fenomen no li és aliè el fet que en els darrers 20 anys, per un curiós trastocament de l'ordre lògic i de l'ordre d'aprenentatge, aquestes idees —àlgebra de conjunts, estructures algebraiques,...— hagin inundat els programes de matemàtiques de l'ensenyament bàsic i mitjà; però aquesta és una altra història. L'eliminació dels símbols algebraics de l'E.G.B. no es refereix sinó a aquells recursos simbòlics que queden forçosament fora de l'abast de les possibilitats intel·lectuals dels alumnes d'aquest nivell. No afecta, en particular, als símbols numèrics i aritmètics, ni a la simbolització geomètrica, ni als recursos gràfics i simbòlics que poden aparèixer i poden ser utilitzats com a resultat de l'orientació creativa d'una didàctica específicament adreçada a fer descobrir als alumnes el valor i la utilitat de la simbolització.

Enfront de la introducció prematura, desorganitzada i sobtada dels simbolismes algebraics, nosaltres estem per una introducció progressiva, sistemàtica i adaptada al desenvolupament intel·lectual del nen-noi que tenim per alumne. És molt important entendre bé què vol dir "progressivament" en aquest context; no es tracta pas d'introduir aquest any aquest símbol, el que ve aquests altres, i així successivament. El caràcter progressiu cal entendre'l referit molt més a la *manera d'utilitzar* els símbols que al nombre de símbols introduïts. El llenguatge algebraic no ha de ser d'entrada (insistim: *no pot* ser-ho, en aquesta edat) un conjunt de símbols articulat per unes regles de càlcul pròpies. Per exemple, quan hem escrit $A = bh$ en substitució d'*Àrea igual a base per alçada*, suposem que en són conseqüències òbvies $b = A/h$ i $h = A/b$; i no ho són! Ens ho sembla perquè sobreposem, a una fórmula que expressa un contingut geomètric, els esquemes operatius abstractes del llenguatge algebraic ($a = bc \Leftrightarrow a/b = c$, etc.) que l'alumne encara no domina. No domina aquest automatisme però pot arribar a entendre, raonant sobre el cas concret, que si el producte de la base per l'alçada és l'àrea, cal dividir l'àrea etc. (ni més ni menys, això és el que fan tots els algebristes del període històric estudiat, des de Tartaglia a Pedro Núñez). El coneixement d'equivalències formals com $a = bc \Leftrightarrow b = a/c$, serà el resultat final del procés d'aprenentatge, mai no pot ser un punt de partida.

D'entrada, els símbols algebraics que representen les incògnites i llurs potències han de ser utilitzats amb una funció essencialment gràfica i simplificadora, lligada a l'escriptura d'equacions. Només amb el temps donarem als símbols la mecànica que permet, operant amb ells, prescindir del raonament efectuat directament sobre els conceptes en joc.

Per a introduir adequadament als alumnes en el llenguatge algebraic cal donar-los un marge molt ampli de temps, però es pot començar d'hora, cap als 11-12 anys. Caldrà, en fer-ho, donar un gran marge de llibertat i acceptar, al començament, formes primitives d'expressió simbòlica que els alumnes potser inventaran. No seran precises, úniques, rigoroses ni econòmiques, però hauran fet comprendre als alumnes, molt més eficaçment que qualsevol altra cosa, el problema de la simbolització. És fonamental prescindir de les variables i els paràmetres, que seran l'última cosa a introduir: la completa assimilació d'aquesta idea és un símptoma inequívoc d'una educació matemàtica ja molt avançada. Les expressions retòriques han de jugar un paper molt important, precedint i preparant les fórmules simbòliques escrites amb símbols literals. Aquestes seran el punt d'arribada de l'ensenyament bàsic.

Per a introduir adequadament els alumnes en el llenguatge algebraic cal, finalment, donar als casos particulars tota la importància que tenen en la construcció d'una fórmula general. Devaluada la preocupació per la memorització i per la demostració, queda com a cosa important assegurar que els alumnes en coneguin el significat. Això passa, fonamentalment, per preocupar-se de fer precedir l'anàlisi de la situació concreta-particular al contacte amb l'enunciat general; i passa, de manera potser encara més important, pels procediments heurístics que permeten als alumnes de trobar, ells mateixos, les dites fórmules.

El lloc del càlcul radical

Als tres capítols següents donem un desenvolupament alternatiu concret d'alguns dels temes dels quals hem criticat la presentació tradicional. Estan dedicats, respectivament, al càlcul amb radicals, a les equacions de primer i segon grau i a un mètode heurístic per a trobar les fórmules de la Combinatòria.

Un programa que recollís la necessitat d'introduir el llenguatge algebraic amb la filosofia que hem exposat hauria de reconèixer al càlcul amb quantitats radicals (sempre que quedés completament destriat del càlcul amb exponents fraccionaris) una importància particular en la introducció de les tècniques algebraiques. Històricament, és evident el lligam entre aquest tipus de càlcul i el relatiu al maneig d'incògnites. Les raons les podem endevinar fàcilment. Des del punt de vista de les operacions aritmètiques, la incògnita i les seves potències i les quantitats radicals tenen semblances evidents. També es diferencien dels nombres enters i trencats en coses semblants. Des del punt de vista algorísmic i pràctic, les operacions entre trencats es "tanquen" de forma natural. No és difícil sumar, restar, multiplicar i dividir trencats; a més, totes aquestes operacions sempre condueixen a nombres trencats. La combinació operativa d'enters i trencats tampoc no comporta cap dificultat especial. Quan són sumats, restats, ... enters amb trencats, el resultat és sempre un trencat. Tot això, per descomptat, no és sinó la conseqüència del fet que en el concepte de nombre trencat no hi intervé cap operació nova: un trencat és allò que resulta de dividir a parts iguals i agafar unes quantes d'aquestes parts.

Les operacions entre radicals, com les operacions amb incògnites, ja no es poden "tancar". Una cosa més el seu quadrat no admet ser expressada com una magnitud

simple: cal deixar-ho indicat, i pensar-ho com una operació a realitzar posteriorment. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es pot arribar a expressar com un sol radical, però serà un radical formalment diferent obtingut per una laboriosa-artificiosa operació no directa. Les operacions de suma i resta d'enters amb radicals o amb incògnites cal deixar-les indicades.

La diferència conceptual entre $2 + 1/2$ i $2 + \sqrt{2}$ és notable. La primera expressió es pensa de manera prou natural com *una* quantitat (sigui la longitud d'un segment, sigui un nombre de coses qualsevol que poden ser subdividides); la segona es pensa de manera natural com *dues* coses que cal afegir. Aquesta segona és, en aquest sentit, una operació *indicada*, una operació que pot admetre una continuació per tal d'arribar-ne a capir el significat més en concret. Si bé la diferència conceptual entre $2 + x$ i $2 + \sqrt{2}$ és notable (la primera expressió és una operació que *només* pot pensar-se com a operació indicada, possible, però no com una operació real, actual), les diferències operatives i algorísmiques entre les quantitats representades per aquestes dues expressions, en canvi, són irrellevants comparades amb els mecanismes comuns que cal posar en joc per sumar-les, multiplicar-les, etc., entre si i amb els nombres enters i trencats. Un punt de contacte fonamental entre el càlcul amb incògnites i el càlcul radical és, finalment, que ambdós es recolzen en, i utilitzen, els mecanismes de composició de potències ($a^n a^m = a^{n+m}$ i $(a^n)^m = a^{nm}$).

Si el càlcul amb radicals acompanya, o precedeix lleugerament, la introducció del càlcul amb incògnites, ambdós aprofiten una sèrie de novetats algorísmiques que són dificultats considerables per a l'alumne: consideració d'ens numèrics no homogenis la suma dels quals ha de quedar indicada, distributivitat de la multiplicació, imposada per les operacions amb les quantitats anteriors, presència de coeficients, regles dels signes i aparició de les identitats notables ($(a+b)^2 = \dots$, etc.). Començarem, doncs, per veure en concret com desenvolupar el càlcul radical segons els nostres plantejaments.

CAPÍTOL 17:

EL CÀLCUL AMB RADICALS

Com hem dit al capítol precedent, el càlcul radical és la introducció natural al càlcul algebraic. Això sol li dona un valor didàctic inapreciable, valor que cal afegir a l'interès intrínsec que aquest càlcul ja té com a part imprescindible del llenguatge matemàtic. Nogensmenys, cal reconèixer que a l'edat en què nosaltres proposem introduir-lo, per a alumnes de 12 anys, és difícil trobar una motivació convincent d'aquests conceptes i de les tècniques associades. Tant més difícil que la difusió de les calculadores de butxaca ha modificat essencialment l'interès directe que podien tenir per al càlcul numèric moltes regles de manipulació de les quantitats radicals. És menys problemàtic arribar a trobar problemes geomètrics i situacions més o menys versemblants on calgui utilitzar arrels quadrades, cúbiques,...; en aquest sentit són model·lics els exercicis que proposa el Grup Zero al llibre *La mesura i els nombres*. Aquests exercicis han de jugar un paper important obrint el tema.

Això no obstant, el càlcul radical precisaria d'elements motivadors més específics. Encara que no sabem resoldre el problema de manera satisfactòria (i potser mai no en sabrem), podem assenyalar una solució parcial. Aquest tema, després d'unes poques classes dedicades a la introducció del concepte d'arrel (amb els continguts que es mencionen al primer apartat del capítol), caldria enfocar-lo amb l'esperit propi de l'aprenentatge modern de les llengües vives. No hauria de considerar-se una unitat tancada que ocupa una successió de classes sense solució de continuïtat, sinó que caldria plantejar-lo explícitament com un conjunt de regles que cal arribar a memoritzar i a utilitzar automàticament dins de contextos de complexitat cada cop més gran. El càlcul radical hauria de ser el primer contacte de l'alumne amb els formalismes algebraics; el seu tractament, conseqüentment, no hauria de ser el d'una cosa que s'explica d'una vegada per totes: cap llenguatge no es pot explicar d'una vegada per totes. Les regles que articulen el càlcul radical cal anar-les desenvolupant per estadis, tal com s'especifica al segon apartat d'aquest capítol, des d'un primer nivell molt concret i particular fins a situacions molt complexes que deixin l'alumne a les portes del càlcul formal. El procés d'introducció d'aquestes regles ha de ser forçosament llarg, però no té per què ser gruixut: es pot aconseguir que els alumnes assoleixin un bon nivell de comprensió i automatització, fent simultània i paral·lela la introducció d'aquestes regles amb el desenvolupament

dels altres temes que constitueixen el curs. En una paraula, es tractaria de reservar una part d'un parell o tres de classes setmanals per a anar introduint-les.

La Introducció del Concepte d'Arrel Numèrica

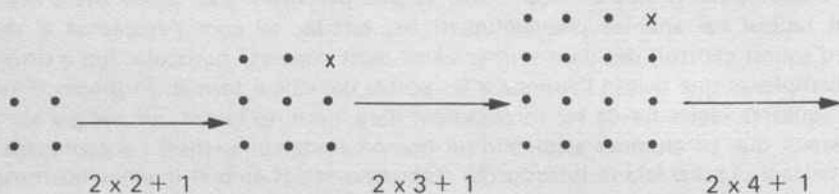
Una i altra vegada, en manejar radicals, els raonaments es recolzen en les relacions $(\sqrt{a})^2 = a$ i $\sqrt{a^2} = a$. Els alumnes manifesten sovint més dificultats de les previsibles a assimilar-les. Això es pot atribuir, sense gaires dubtes, a no haver introduït aquests conceptes com calia, associats a un algorisme de càlcul. La millor manera de fer entenedor el concepte d'arrel és proporcionar a l'alumne un mètode que li permeti calcular efectivament arrels. Els símbols $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, o $\sqrt{1369}$, per molt que se sàpiga que l'arrel quadrada de a és un nombre que, elevat al quadrat, dóna a , estan buits de significat mentre l'alumne no els pugui relacionar amb el marc de referència dels nombres que ell ja coneix. Per això pensem que cal revaloritzar com a elements didàctics els mètodes de càlcul aproximat.

Tot seguit ens ocuparem de l'algorisme clàssic d'extracció d'arrels quadrades. Per a les arrels d'ordre superior, sens dubte el camí més indicat sembla ser l'aproximació per tempteig, per mitjà de successives subdivisions d'un interval, mètode que alguns autors anomenen l'algorisme babilònic: situada, per exemple, la $\sqrt[3]{15}$ entre 2 i 3, s'agafa el punt mig $\frac{1}{2}(2 + 3) = 5/2$; es comprova si aquest valor és una aproximació per excés o per defecte de l'arrel buscada ($(5/2)^3 = 15 + 5/8$), i es calcula la següent aproximació agafant el nou punt mig $\frac{1}{2}(2 + \frac{5}{2})$; etc.

La idea de l'algorisme babilònic és d'una gran simplicitat, i es pot utilitzar des del primer moment per calcular arrels quadrades. Això no obstant, l'algorisme clàssic admet una presentació heurística molt interessant, trobada per Puig Adam. A la descripció de la seva experiència (Puig Adam, pp. 322-327) especifica que fou realitzada amb alumnes de l'antic Primer de Batxillerat (alumnes d'11-12 anys).

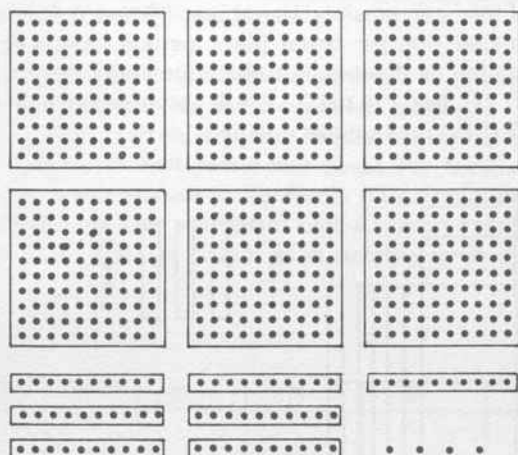
En un primer moment, Puig Adam fixava el llenguatge: començava per preguntar el valor de 5.5, 6.6, ..., introduïa la paraula *quadrat*, preguntava aleshores pel quadrat de 5, de 6, ..., i després pel '*nombre el quadrat del qual és 49, 64, ...*'; aquí introduïa el mots *arrel quadrada*, amb els quals preguntava '*quina era l'arrel quadrada de...*'. No cal subratllar la importància que té aquesta primera etapa, per molt reiterativa que pugui semblar. Els conceptes nous i llur nomenclatura necessiten ser utilitzats durant un temps pels qui els aprenen, per tal de ser ben assimilats.

En una segona etapa, Puig Adam introduïa les arrels enteres i la resta, recolzant-se en la manipulació de petites peces amb les quals podien formar-se quadrats. L'autor aprofitava la formació successiva dels quadrats de costats 2, 3, 4, ... per preguntar en cada cas quantes peces li calen per a fer el quadrat següent: quantes per a fer el quadrat que en té 9 a partir del que en té 4, etc.

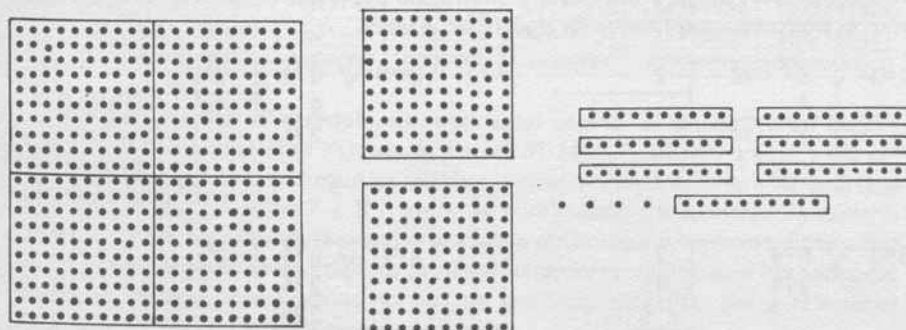


A partir d'això queda establert que la resta, en calcular una arrel entera, sempre ha de ser més petita que $2n + 1$, ja que si fos igual, es podria formar el quadrat de costat $n + 1$. El que hem dit fins ara no té a veure específicament amb l'algorisme de càlcul d'arrels quadrades mencionat anteriorment, encara que en constitueix la base imprescindible. De fet, però, es tracta d'un plantejament suggerent i molt intuïtiu, que soluciona molts dels problemes que acostumen a acompanyar l'assimilació del concepte d'arrel numèrica.

La tercera etapa és l'especialment dedicada a la introducció del càlcul d'arrels quadrades. Puig Adam presenta als alumnes el nombre 674 format a base de petites peces:



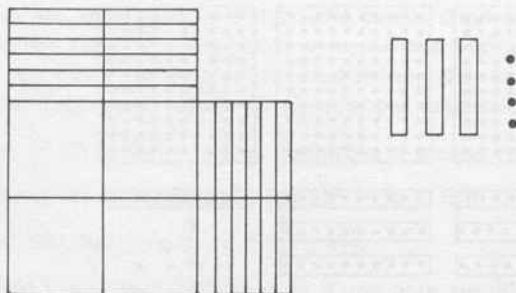
Una idea és, evidentment, desfer tota la configuració i procedir com abans, formant el quadrat més gran possible; però també és molt intuïtiva la idea de formar un quadrat amb quatre centenes. Això condueix a la configuració a partir de la qual



hom pot destacar una primera regla operativa: *L'arrel quadrada entera de les centenes dóna el nombre de desenes de l'arrel*. La resta obtinguda és formada clarament per 2 centenes i les 7 desenes i 4 unitats originals. Es pot escriure, amb això, el primer pas de l'esquema clàssic.

$$\begin{array}{r} \sqrt{6 \quad 74} \quad 2 \\ 4 \\ \hline 2 \quad 74 \end{array}$$

A continuació, cal explotar la idea d'afegir tires (desenes) al quadrat ja obtingut, per tal d'obtenir el més gran possible. Han sobrat 27 tires (i 4 unitats), i hem d'afegir al quadrat que ja tenim *dues* tires per costat (dues, perquè aquesta és l'arrel quadrada de les centenes, o sia el nombre de desenes, ja trobat, que tindrà l'arrel), i les hem d'afegir a dos costats. Per tant, 27 cal dividir-lo per 2. $27 : 2 = 13$, i trobem que hom pot afegir 6 tires al quadrat, havent sobrat 3 tires i les 4 unitats originals.



Queda, finalment, el forat del cantó, per a omplir el qual necessitem 6. $6 \times 6 = 36$ peces. Com que només en tenim 34, hem trobat que 2 desenes i 6 unitats és una arrel per excés del nombre proposat. Si busquem una arrel per defecte, haurem de quedar-nos amb 2 desenes i 5 unitats. El quadrat més gran que podrem formar amb elles tindrà un total de peces igual a: les quatre centenes que hem posat al començament, més 4×5 desenes (tires) que hem afegit a dos costats, més 5×5 peces que omplen el forat del cantó. Amb això es pot completar l'esquema algorítmic clàssic:

$$1^{\text{er}}) \quad \sqrt{6 \quad 74} \quad 2 \\ 4 \\ \hline 2 \quad 74$$

$$2^{\text{on}}) \quad \sqrt{674} \quad 2 \begin{array}{l} \\ 4 \end{array} \quad \text{DOBLAR} \\ 4 \quad 274 \quad \text{(perquè el quadrat} \\ \quad \quad \quad \text{l'augmentarem per} \\ \quad \quad \quad \text{dos costats).}$$

$$3^{\text{er}}) \quad \sqrt{674} \quad 2 \\ 274 \\ \hline 45 \\ \times 5 \\ \hline 225$$

$$4^{\text{rt}}) \quad \sqrt{674} \quad 25 \\ 274 \\ \hline - 225 \\ 49$$

(400 més 225 és el nombre de peces que té el quadrat més gran que es pot formar).

RESTA. El càlcul ja no continua, perquè la resta és més petita que $2 \times 25 + 1$.

Puig Adam acaba la descripció d'aquesta experiència amb unes paraules que ens agradaria citar, pel que tenen de magnífica síntesi d'una filosofia de l'ensenyament de les matemàtiques que mai no hagués hagut d'oblidar-se:

"Este procedimiento... suministra una demostración intuitiva de la regla de extracción de la raíz cuadrada, que es, a nuestro juicio, tan rigurosa como pueda serlo la demostración abstracta tradicional y que penetra, en cambio, mucho más hondamente en la estructura interna de la operación. No siempre una demostración basada en la reducción a verdades anteriores, cualidad característica de las demostraciones de la escuela griega, es la que traduce las esencias de la propiedad demostrada, ni mucho menos la más adecuada desde un punto de vista didáctico. Para los matemáticos orientales, demostrar era reducir a la evidencia directa, la cual percibe el niño mejor que un encadenamiento lógico, del que no suele ver ni el alcance ni la necesidad." (Puig Adam, pp. 326-327).

La mateixa cura amb què Puig Adam ha introduït el concepte d'arrel quadrada ha de ser utilitzada per a introduir les arrels cúbiques, quartes,..., sense que en cap moment sigui necessari parlar d'arrels n-èsimes. Aquest és un concepte d'un altre nivell, que només cal introduir en un marc teòric més elevat. Per familiaritzar els alumnes amb aquests conceptes, cal encarregar-los la confecció d'una taula com la següent, amb la qual és molt interessant realitzar una sessió oral d'exercicis de la forma "Quina és la 3ª (4ª,...) potència de 4 (5,6,...)? "Quin és el nombre la 5ª (3ª, 4ª,...) potència del qual és 32,...?".

PO (qua- (cubs)
TÈN drats)

CIES	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
NOM- BRES									
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60166176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

Un cop aquí, després d'introduir els mots *arrel quarta, cinquena,...*, cal insistir una vegada més en preguntes com "Quina és l'arrel 3ª (4ª,...) del nombre...?". No cal dir que són plenament pertinents preguntes relatives a arrels no enteres, sobre les quals cal preguntar la localització ("entre 7 i 8", etc.). A continuació cal plantejar la qüestió simbòlica, i escriure els resultats de la sessió oral amb la simbologia introduïda. El resultat més fonamental d'aquesta primera etapa és la reciprocitat de la potenciació i la radicació al nivell numèric concret. Els alumnes no han de tenir cap dificultat per a relacionar ambdós conceptes quan s'apliquen a nombres concrets.

Una qüestió que acostuma a ser tractada en introduir els radicals és el caràcter irracional de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. Totes les demostracions d'irracionalitat són demostracions per reducció a l'absurd, un mecanisme intel·lectual de què no es disposa fins als 14-15 anys (com a mínim: cf. Piaget, pp. 257-258 i pp. 297-312). D'una altra banda, el

problema de la irracionalitat respon a les preocupacions i als objectius d'un altre context, el de la clarificació conceptual dels distints conjunts numèrics, i no pas a la preocupació per a introduir els alumnes, elementalment, als automatismes d'un càlcul. Per això pensem que aquestes demostracions no són especialment pertinents a l'hora de fer aquesta introducció.

Tal com nosaltres pensem aquest tema, el que és important és arribar a familiaritzar l'alumne amb un concepte nou, fent-li conèixer algunes propietats elementals. En aquest context, i amb aquest objectiu, la notació exponencial fraccionària tampoc no hi pinta absolutament res. Aquesta notació representa *un altre* problema, que no faria, superposat al nostre, sinó complicar-los tots dos innecessàriament. Els exponents fraccionaris són un refinament que aporta no res al concepte en qüestió, i que només és útil (allí és, més ben dit, imprescindible) dins de la problemàtica de les funcions exponencials. Podem advertir, en particular, que la bona adquisició dels conceptes del càlcul radical converteix l'adquisició de la notació exponencial fraccionària en un fàcil exercici de traducció d'una notació a l'altra.

És evident, al mateix temps, que el tractament de les propietats de les arrels a través dels exponents fraccionaris (p.e., $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$ perquè $\sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, etc.) desenfoca el problema didàctic real. Des del punt de vista del significat o del contingut conceptual del símbol $\sqrt{a}$, etc., existeix una justificació directa (directament relacionada amb el significat) que és la que interessa que l'alumne faci seva: és aquesta justificació la que permet aprofundir la comprensió dels conceptes en joc. Aquests no han de quedar tancats i limitats per les seves definicions; han de ser una cosa viva, de la qual es puguin extreure conseqüències, i que pugui ser relacionada amb d'altres conceptes. Només si un concepte es fa treballar i actuar esdevé una eina eficaç, capaç, per això mateix, d'ampliar les possibilitats d'acció d'una intel·ligència en formació que l'adquireixi.

Quan les arrels es fan funcionar per medi d'exponents fraccionaris, estem substituint el funcionament del concepte d'arrel per la mecànica algorísmica d'una notació, el lligam de la qual amb el problema matemàtic que es tracta de resoldre no pot ser comprès per l'alumne. Volem subratllar que l'objecció més gran que oposem als exponents fraccionaris no és que el càlcul radical, amb ells, es redueixi a una sèrie de receptes i de trucs algorísmics. El càlcul radical, com gran part de les matemàtiques, sempre va a parar, es faci com es faci, a una sèrie de receptes i de trucs algorísmics. La nostra crítica apunta al fet que els exponents fraccionaris i les justificacions que els donen suport escamotegen i desvirtuen el *contingut conceptual* de les receptes i dels trucs algorísmics.

La Introducció del Càlcul Radical

La introducció del càlcul radical es pot dividir en tres etapes o nivells, clarament diferenciats. Correspondrien, respectivament, als darrers cursos de l'ensenyament bàsic. Al primer, que anomenarem nivell A, seran introduïdes regles bàsiques per al maneig de radicals (obtenció d'arrels del mateix índex, multiplicació d'arrels, etc.); al segon, nivell B, s'ensenyarà a manejar les quantitats de la forma $a \pm b \cdot \sqrt[n]{c \pm d \cdot \sqrt[n]{e \pm \dots}}$. El darrer nivell, C, constitueix el lligam del càlcul radical amb el càlcul formal-literal.

A. INTRODUCCIÓ DE LES REGLES BÀSIQUES

i) Multiplicació d'arrels del mateix índex

La resposta d'un alumne normalment constituït al problema de calcular el producte de $\sqrt{2}$ per $\sqrt{3}$ serà obtenir una aproximació de $\sqrt{2}$, una de $\sqrt{3}$, i multiplicar-les. Per justificar la regla del producte de radicals poden ser utilitzats els arguments de l'economia en el càlcul d'arrels quadrades, de l'afebliment de l'error, i de l'interès de disposar d'una regla que hom pot utilitzar fins i tot quan els nombres que intervenen en el càlcul no són actualment o directament coneguts. Que l'èmfasi recaigui en un o l'altre dels arguments dependrà del nivell i dels coneixements dels alumnes.

Cal començar amb uns exercicis preparatoris sobre les potències d'un producte. Per exemple, cal proposar als alumnes que calculin el quadrat de "5 per $\sqrt{3}$ " (subratllem que no cal tenir gaire pressa en la introducció del producte indicat per juxtaposició). En el cas que aquests exercicis desconcertessin massa els alumnes, perquè no sapiguessin fer funcionar l'associativitat, es pot retrocedir una mica més i començar amb exercicis del tipus "5 per 3 multiplicat per 7", "5 per 3 multiplicat per 2 per 3", etc. No cal dir que els enunciats generals ("recordeu que el producte té la propietat commutativa i associativa", "recordeu que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ", etc.) no tenen aquí cap valor ni utilitat: aquests enunciats generals són, precisament, la manera de formular a un nivell d'abstracció superior (per tant, d'una manera *més difícil*) allò que pretenem que els alumnes sàpiguen aplicar. En aquests exercicis amb nombres enters que acabem de mencionar, és important subratllar que aquests productes múltiples es poden realitzar "en qualsevol ordre", i, seguidament, aplicar això mateix al càlcul de "5 per $\sqrt{2}$ multiplicat per 3 per $\sqrt{2}$ ", etc.

Quan els alumnes ja poden trobar que el quadrat de $\sqrt{2}$ per $\sqrt{3}$ és 6, cal conduir-los, fent preguntes escaients, al punt que ells mateixos enuncien que $\sqrt{2}$ per $\sqrt{3}$ és $\sqrt{6}$. Una sèrie d'exercicis d'aquests tipus ha de conduir a extreure la regla " $\sqrt{2}$ per $\sqrt{3}$ és igual a $\sqrt{2 \text{ per } 3}$ ", la formulació general de la qual, en forma retòrica ("el producte de les arrels quadrades de dos nombres és l'arrel quadrada del producte dels nombres") és una feina molt interessant, que ha de ser proposada als propis alumnes. En la sèrie d'exercicis que condueixen a la regla general, així com en la sèrie que ha de consolidar l'automatisme, són importants els que proporcionen resultats simples, com $\sqrt{2}$ per $\sqrt{8} = 4$, etc.

El pas següent serà el problema anàleg referit a arrels cúbiques. Generalment, els alumnes endevinaran la regla general, de la qual s'haurà de demanar la formulació retòrica. La demostració de la regla, aquí, ja té un interès molt relatiu, i només cal entretenir-s'hi en cas de demanar-ho els alumnes mateixos. Sí que són importants, evidentment, els exercicis de consolidació de la regla amb arrels cúbiques, quartes, ... Allò que no ha d'aparèixer, d'acord amb la filosofia amb què estem treballant, són les arrels n-èsimes. Cal quedar-se al nivell que "la mateixa regla val, sigui quin sigui l'índex de l'arrel".

Un problema que sovint plantegen els mateixos alumnes és l'aplicació d'una regla semblant a l'anterior al producte d'un nombre per una arrel: elevat 3 per $\sqrt{2}$ al quadrat obtenim 18, d'on 3 per $\sqrt{2} = \sqrt{18}$, etc. Aquest és un bon exemple de l'economia conceptual que, de vegades, comporten els raonaments heurístics respecte dels formals: el mateix mecanisme que proporciona la solució d'un problema condueix a solucionar-ne un altre que habitualment queda separat del primer. És evident que l'actitud del professor no serà la de conservar artificialment la separació, sinó que aprofitarà l'oportunitat d'obtenir la regla per a introduir factors dins de les arrels. Més endavant tornarà a aparèixer aquesta

regla que permet, en cert sentit, "realitzar l'operació" de multiplicar un nombre per un radical.

Tota aquesta part ha de tenir com a epíleg una pregunta adreçada als alumnes: "Així com $\sqrt{2}$ per $\sqrt{3}$ és $\sqrt{6}$, podríeu trobar alguna arrel que fos igual a $\sqrt{2}$ per $\sqrt[3]{3}$, és a dir, que expressés el producte de dues arrels d'índexs diferents?". Serà important analitzar acuradament les respostes (falses) que els alumnes donaran. Sempre n'hi haurà que aventuraran que $\sqrt{2}$ per $\sqrt[3]{3}$ és $\sqrt[3]{2}$ per 3 ó $\sqrt[5]{2}$ per 3, etc. Cal entretenir-se a comprovar que aquestes respostes, són falses. En aquest moment, una revisió dels passos que ens han conduït a la regla ja trobada permetrà subratllar per què en ella és fonamental que les arrels tinguin el mateix índex.

El pas següent serà proposar el problema d'esbrinar si és o no veritat que $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$. Molt probablement, la idea d'elevat al quadrat (que dona $2 = \sqrt[6]{64} = 2$) i d'elevat a la sisena potència (que dona $8 = \sqrt{64} = 8$) sorgirà dels mateixos alumnes. La mateixa cosa es farà amb la relació $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$, a partir de la qual cal deixar que els alumnes es tornin a enfrontar amb el producte de $\sqrt{2}$ per $\sqrt[3]{3}$. Un cop resolt aquest problema es pot explicitar (plantejant, si cal, un problema semblant però prou diferent) la necessitat de trobar un mètode general per a obtenir arrels d'índexs iguals. Aquest mètode, cal advertir als alumnes, el trobarem donant un rodeig i estudiant altres propietats de les arrels.

ii) Radicació consecutiva

Cal començar amb uns exercicis preparatoris sobre la potenciació consecutiva. Els alumnes tindran al davant la taula amb les 10 primeres potències que ja han utilitzat precedentment. Començarem per demanar-los que calculin la segona potència de la tercera potència de 5 (5 ó un nombre encara més gran és més interessant que un nombre petit). El que cal esperar és el càlcul, fet manualment, de 125 per 125. El professor, amb la taula mencionada al davant, pot anar donant el resultat de productes per l'estil, 64 per 64, la quarta potència de 81, el quadrat de 729, etc. Els alumnes no trigaran a endevinar quin és el truc que fa servir, i aleshores hauran d'enunciar retòricament la regla per a obtenir quina potència correspon a la composició de potències.

Un cop coneguda la regla, cal demanar-los-en una justificació. Per a fer-ho, serà convenient proposar l'anàlisi d'un cas simple, com el cub del quadrat de 2, dirigint l'atenció dels alumnes cap al nombre de vegades que utilitzen 2 com a factor per obtenir el resultat final. Volem subratllar que la comprensió de la presentació ordinària d'aquest fet,

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ perquè $(a^n)^m = (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \cdot \dots \cdot (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) = a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^{n \cdot m}$, pressuposa la possibilitat de realització de l'exercici que nosaltres proposem als alumnes, amb l'inconvenient addicional d'una notació molt sofisticada, que és, en si mateixa, un obstacle conceptual de tanta envergadura com la relació entre les potències i llur ordre, que és allò que estem intentant ensenyar, i amb el desavantatge addicional que l'actitud de l'alumne és molt més passiva que la que els obliquem a tenir quan els proposem penetrar en la comprensió de l'estructura d'un cas concret.

A continuació, cal plantejar el problema del significat d'una expressió com $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$. Els demanarem que arribin a enunciar que aquest és un nombre que elevat al cub dona $\sqrt{2}$, i, a continuació, que és un nombre que elevat primer al cub i després al quadrat dona

2. A partir d'exercicis d'aquests han de formular retòricament la regla $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$. És important que els alumnes es familiaritzin amb ella en les dues aplicacions possibles

que la regla té: tant en exercicis del tipus "Escriu amb una única arrel $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}}$, etc.", com en exercicis de l'estil "Descomposa l'arrel $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[8]{3}$, $\sqrt[9]{5}$, etc. en tantes radicacions consecutives com puguis" (i en particular, "Descomposa $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[7]{3}$, en tantes radicacions consecutives com puguis"). Aquí es poden proposar problemes de comparació: "Ordena de més gran a més petit els radicals $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[9]{100}$, $\sqrt[6]{25}$, etc."

iii) Obtenció d'arrels d'índex comú

Els alumnes han comprovat anteriorment, per càlcul directe, que $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$ i que $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$. Ara cal tornar a plantejar aquests exemples, però per demanar-hi una justificació indirecta de les igualtats; una justificació, es pot indicar, que es recolzi en allò que acabem de veure sobre la manera de descomposar una arrel en radicacions consecutives. Un cop explicat el mecanisme $\sqrt[6]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{8}}$, cal mantenir els índexs 2 i 3 i proposar exercicis de transformació en arrels d'índex comú 6, de l'estil $\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{7}$, etc. A continuació, cal preguntar si $\sqrt{2}$ i $\sqrt[3]{3}$ es podrien transformar en arrels d'índex comú 5, o 8, o 9, i arribar a explicitar que el l'índex comú final ha de ser un múltiple dels dos índexs de partida.

El pas següent ja serà posar els alumnes enfront de dos radicals nous, com $\sqrt[4]{3}$ i $\sqrt[5]{2}$, i el professor haurà de guiar-los fins a trobar els radicals equivalents d'índex 20 amb una sèrie metòdica de preguntes: "Quin pot ser l'índex comú?", "A quina potència cal elevar 3 per transformar $\sqrt[4]{3}$ en un radical de la forma $\sqrt[20]{\quad}$?", etc. Amb un o dos exercicis d'aquests ja es pot arribar a explicitar un mètode general per a obtenir dos radicals d'índex comú a partir de dos radicals qualsevol: "Eleva el nombre d'una de les arrels a la potència que indica l'índex de l'altra arrel. Després, eleva el nombre de l'altra arrel a la potència igual a l'índex de la primera arrel. I, finalment, multiplica els dos índexs i tindràs l'índex comú".

Ens interessa subratllar que en aquesta transformació ja hi ha prou dificultats conceptuals com per a afegir-hi una complicació addicional amb la introducció del mínim comú múltiple dels índexs. D'introduir aquest concepte, la complicació algorísmica de tot el procés augmenta, i es corre el risc que l'embalum de regles i de coses a fer sigui massa considerable. Risc tant més real que el concepte de m.c.m. és d'una gran complexitat i els algorismes de càlcul associats són generalment incompresos pels alumnes d'aquesta edat. En qualsevol cas, només volem assenyalar que *no és necessari* introduir aquest refinament de càlcul per a assegurar la bona assimilació dels conceptes en joc, sense negar la possibilitat de fer-ho si el nivell d'un grup concret d'alumnes ho permet, o si el desenvolupament d'una classe ho aconsella. Sempre hi ha una simplificació, però, que es pot introduir en el mètode general anterior; és la que fa referència a dos radicals $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[m]{b}$, l'índex d'un dels quals és múltiple de l'altre. En aquest cas, la regla simplificada és prou evident i senzilla com per a poder-la introduir sense cap mena de complicació.

iv) Multiplicació i divisió de dues arrels qualsevol

Reprendre el tema de la multiplicació d'arrels, després de la volta donada, haurà de servir per a repassar les regles operatives del producte d'arrels del mateix índex i del producte d'un nombre per una arrel. Però servirà també per a introduir un punt de vista nou a la última qüestió mencionada. El producte d'un nombre per una arrel, ara,

pot ser tractat de la forma habitual: $5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50}$, etc. Veure o justificar un resultat des de perspectives diferents és una de les millors maneres de reforçar l'eficàcia d'aquest resultat com a eina teòrica.

La divisió d'arrels del mateix índex podrà aprofitar, possiblement, que els alumnes ja disposen d'una certa idea del funcionament dels radicals. Per això, la regla $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ serà molt més una conjectura a provar que una relació a descobrir. La demostració només caldrà explicitar-la per a arrels d'índexs 2 i 3.

En aquest apartat, els exercicis de consolidació són d'una importància molt gran. Caldrà, d'una banda, fixar uns automatismes per mitjà d'exercicis sense complicacions, com $\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{9}}$, ..., on només es tracta d'aplicar mecànicament la regla i de simplificar el trenat que apareix a l'arrel final. Després, hauran d'aparèixer casos en què la simplificació modifiqui la situació familiar als alumnes; aquí caldrà tractar amb molta cura els exercicis com $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, que condueixen a resultats com $\sqrt{\frac{1}{4}}$, la significació dels quals serà explicada als alumnes. Un altre cas és el constituït per la divisió d'una arrel per un nombre $\frac{\sqrt{6}}{3}$, etc. Finalment, caldrà ocupar-se dels casos $\frac{3}{\sqrt{6}}$, etc. Els alumnes tendeixen a generalitzar els mètodes apresos, per això tractaran espontàniament els exercicis que nosaltres anomenem de *racionalització* d'una forma diversa: de la mateixa manera que $\frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, faran $\frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ en lloc de $\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{36}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$. No cal dir que és un mètode a respectar sempre que surti, especialment si es té en compte que el nostre procés de racionalització, en aquest context, *no és pertinent*. Aquest procés no apunta a la divisió, sinó a l'eliminació de l'arrel del denominador (una motivació que, en el punt en què estan els alumnes, no pot semblar sinó capriciosa), i presuposa que certes operacions amb els radicals es deixaran indicades, la qual cosa és, precisament, la contrària de la que fins ara hem estat ensenyant a classe. Ambdues coses, racionalització i maneig de radicals amb coeficients, constitueixen part essencial del nivell següent.

* * *

Com és evident, el desenvolupament que proposem de les nocions en joc és lent. Això respon al convenciment que qualsevol precaució és insuficient a l'hora de prevenir les destrosses d'ordre didàctic i pedagògic provocades per una prematura i precipitada presa de contacte amb els simbolismes algebràics. Totes les relacions que expressem tan clarament i concisament, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a}$, etc., ni són fàcils ni la seva expressió és curta i clara, si no és per a qui ja les coneix bé. Pensada per a expressar i facilitar uns certs automatismes de càlcul, aquesta notació *s'automatitzarà sola* en mans de l'alumne que l'ha feta seva memoritzant-la, sense haver comprès les relacions que expressa. Per això creurà que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ (perquè no, si $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$?!?).

Encara existeix un altre factor que recomana prudència i lentitud quan ensenyem totes aquestes coses. Un sol enunciat formal o simbòlic, pel seu mateix caràcter general i abstracte, fa referència a diferents regles concretes, a diferents situacions de càlcul numèric concret. En particular, una fórmula pot tenir dos sentits de lectura de significats algorísmics diversos. Per exemple, la fórmula $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}$, si es llegeix de $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}$ cap a $\sqrt[n \cdot n]{a}$, en la pràctica de l'alumne serveix per a una cosa; si es llegeix de $\sqrt[n \cdot n]{a}$ cap a $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}$, en servirà per a unes altres. Això no és sinó un exemple particular de l'estaticitat dels simbolismes, estaticitat que és normal que tinguin si han d'expressar identitats formals; però estaticitat que cal oposar, didàcticament, al *dinamisme algorísmic* que tenen les formulacions retòriques.

B. EL Càlcul Radical amb Nombres "COMPOSTOS"

En aquesta etapa, l'alumne tindrà el primer contacte amb la majoria dels recursos més importants del llenguatge algebraic modern: operacions indicades, coeficients, parèntesis, regles dels signes i identitats notables. Tot això vindrà imposat per les operacions sobre quantitats de la forma $a \pm b \sqrt[n]{c} \pm d \sqrt[n]{e} \dots$. Valorant la necessitat que tenen els alumnes de batejar amb un nom específic allò que exigeix unes regles de càlcul específiques, anomenarem aquestes quantitats *nombre compostos* (el nom que els donava Nicolas Chuquet).

i) Suma de nombres compostos. Coeficients

Per la majoria dels alumnes és decebedor que $3 + \sqrt{2}$, o $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, no sigui un altre radical. Aquesta actitud no ha de ser considerada un símptoma de debilitat lògica, de falta de sentit comú, o que el caparronet dels alumnes està estructurat de manera inversemblant. Pensar que alguna regla hi haurà per a fer $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt[n]{d'alguna cosa}$, més aviat és propi d'un cap ben organitzat que no pas del contrari. Els hem ensenyat que una cosa així sempre és possible quan es tracta de multiplicar o dividir; a més a més, i aquesta és una raó encara més íntimament lligada a la lògica natural, al sentit comú, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ no és, de fet, sinó l'enunciat d'una qüestió: "sumeu $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$ ". A l'alumne li costa entendre que ha de deixar les coses així perquè, des del punt de vista del càlcul numèric, que és el punt de vista amb què l'alumne sempre ha treballat fins ara, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ no és pròpiament una operació, sinó el seu anunci.

Els algebristes del Renaixement que hem estudiat a la primera part d'aquest llibre mai no utilitzen coeficients en el càlcul radical. La regla per a expressar la suma de radicals iguals (regla que no enuncien en general) els permet escriure (sense lletres) $\sqrt{a} + \sqrt{a} = \sqrt{4a}$, $\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} = \sqrt{9a}$, etc. Aquest tret és una de les coses que més sorprenen quan es llegeix per primera vegada un text d'aquella època. Es tracta, però, d'una manera de fer comprensible si abandonem els prejudicis derivats de la familiaritat amb la nostra notació. Si posem $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{27}$, a més d'escriure una cosa que és veritat estem dient que podem calcular el triple de $\sqrt{3}$ calculant l'arrel quadrada de 27: des del punt de vista algorísmic, aquesta expressió és clarament no tautològica. Des del mateix punt de vista, si posem $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, és com si no haguéssim fet res. Aquest caràcter tautològic que tenen els símbols a $\sqrt{b}$ (a un enter) és, didàcticament, una dificultat. L'avantatge essencial de la nostra regla $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ se situa en una perspectiva diferent de la que fins ara ha organitzat

el càlcul amb radicals. Es tracta d'una regla útil perquè introdueix una simplificació notacional imprescindible en el marc *dels formalismes*. D'entrada, per tant, es tracta d'una regla que pot semblar artificiosa a l'alumne.

Aquest canvi de perspectiva ha de ser explícit si volem evitar equívocs i desconcerts. En particular, cal enfrontar-se amb les temptatives espontànies dels alumnes per a trobar una regla del tipus $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{2 + 3}$, assajant-ne tantes com calgui i comprovant llur falsedat.

Cal explicar, molt especialment, que aquest canvi de perspectiva obliga a modificar el tractament que fins ara ha estat donat al producte d'un nombre per un radical. Es pot partir d'un problema com "Sumeu $3x\sqrt{2}$ amb $5x\sqrt{2}$ ". Els alumnes que apliquin correctament el que han après fins ara faran " $3x\sqrt{2} + 5x\sqrt{2} = 8x\sqrt{2}$ "; la suma val $\sqrt{18} + \sqrt{50}$ ". Els coeficients han de ser introduïts a partir d'aquesta qüestió bàsica, i el professor ha de ser molt conscient que està exigint dels alumnes un canvi en els seus costums intel·lectuals. Per tal de distanciar-lo del context que li era habitual i facilitar-li la comprensió dels algorismes que cal introduir per al càlcul amb coeficients, potser és convenient introduir una situació com la següent. "Disposem d'unes quantes boles de fusta, totes elles idèntiques entre si. En pesem una i trobem que el seu pes és 3,751 g". Multiplicar 5 per 3,751 és una resposta òbvia a la pregunta de com calcular, sense utilitzar balances, el que pesen 5 d'aquestes boles. Demanarem als alumnes que escriguin l'operació (no el resultat) que cal realitzar. "Abans d'haver tingut temps de fer aquesta multiplicació —afegirem— agafem tres boles més. Escriviu l'operació que faríeu per calcular-ne el pes. Ara digueu quina operació faríeu per calcular el pes de totes 8 boles, i si cal fer els productes $5 \times 3,751$ i $3 \times 3,751$ per trobar el pes total".

La introducció del càlcul amb coeficients anirà acompanyada de la fixació definitiva de la forma $2\sqrt{2}$ (en substitució de 2 per $\sqrt{2}$ o de $2x\sqrt{2}$). L'eliminació del símbol de la multiplicació es pot fer abans d'arribar aquí si es veu que pot ser ben assimilada pels alumnes. El criteri sempre serà, en qualsevol cas, evitar que el llenguatge algebraic arribi a convertir-se en un seguit de convencions notacionals deslligades de les operacions numèriques que representen.

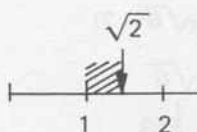
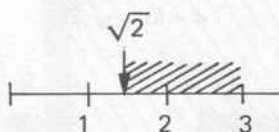
Al costat dels exercicis adreçats a consolidar el càlcul amb coeficients, els exercicis més interessants d'aquesta part seran els que exigeixen a l'alumne la *traducció* dels enunciats i expressions retòriques a expressions simbòliques. Ens referim a exercicis en què l'alumne, després d'haver escoltat, o preferentment llegit, expressions semi-retòriques com "Sumeu $5 + \sqrt{3}$ amb 7", hagi d'escriure simbòlicament l'operació a realitzar.

Aquest és el context més escaient per a plantejar la tècnica de simplificació de radicals per reducció de l'índex ($\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, etc.) i la tècnica d'extracció de factors dels radicals. No ens entretenim en aquestes qüestions perquè pensem que amb el que hem dit precedentment queda prou ben dibuixat el tractament que caldrà donar-los. Sí que subratllem, però, la conveniència d'associar la seva presentació al context en què l'alumne pot utilitzar-les directament i immediatament.

ii) Subtracció de nombres compostos. Parèntesis

De bon començament, els exercicis proposats es limitaran a la subtracció o bé de nombres o bé d'un sol radical de nombres compostos ("Resteu 5 de $7 + \sqrt{2}$ ", "Resteu $3\sqrt{2}$ de $1 + 5\sqrt{2}$ ", etc., però no "Resteu $1 + \sqrt{2}$ de $3 + 2\sqrt{2}$ ", etc.). En aquest primer moment cal consolidar el càlcul amb coeficients i amb quantitats no homogènies, sense barrejar els temes molt més complexos lligats a les regles dels signes. Són especial-

ment interessants els exercicis que condueixen als casos $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$ etc. i als casos $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, etc. No hem d'oblidar que si bé aquestes situacions són casos *particulars* des de la nostra perspectiva (que és la del càlcul formal), des de la perspectiva de l'alumne, limitada per una concepció encara molt estreta de les operacions aritmètiques i dels simbolismes, es tracta de situacions noves que *amplien* aquesta concepció encara limitada. També és interessant demanar la representació geomètrica de quantitats com ara $3 - \sqrt{2}$, $\sqrt{2} - 1$ etc.

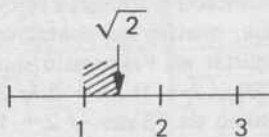


El desenvolupament d'aquest tema no pressuposa el coneixement dels nombres negatius, ni resultarà obligat fer-ne menció, malgrat que s'hi introdueixen les regles dels signes. Com ha estat explicat a la part II d'aquesta obra, la subtracció i les regles dels signes associades a ella són conceptes molt més primaris, molt més concrets, que l'estructura operativa que sustenta els nombres negatius. Aquests són, en algun sentit, el resultat de portar fins a les últimes conseqüències les regles algebraiques de la subtracció. Per això té tant d'interès la presentació didàctica d'un càlcul evolucionat, amb quantitats de signe menys, de manera prèvia a la introducció del negatiu. A la pràctica, això vol dir que podrem treballar amb coses com $(3 - \sqrt{2}) - (4 - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ sense haver-nos d'enfrontar amb la gran dificultat de construir $\mathbb{Z}$.

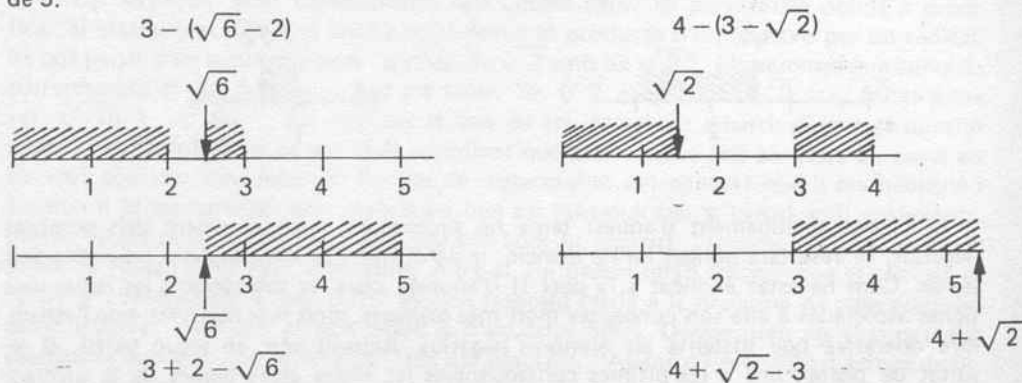
Un cop els alumnes puguin resoldre qüestions com $1 + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$, $5 + 3\sqrt{2} - 3$, etc., cal enunciar coses com "Resteu de $3 + 5\sqrt{2}$ el nombre $2 + \sqrt{2}$ ". Per les raons que més amunt ja hem explicat, cal entretenir-se especialment en casos com " $2 + 3\sqrt{2}$ menys $2 + \sqrt{2}$ ", o " $5 + 3\sqrt{2}$ menys $3 + 3\sqrt{2}$ ".

Els parèntesis han de ser introduïts a partir de problemes de traducció d'enunciats retòrics, com els anteriors, a expressions simbòliques. Quan demanem als alumnes que escriguin l'enunciat de l'operació a realitzar, és quasi segur que obtindrem expressions com $3 + 5\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}$. Sense corregir l'error, cal demanar que facin la mateixa cosa amb l'enunciat "De $3 + 5\sqrt{2}$ resteu-ne 2 i sumeu-hi $\sqrt{2}$ ". Ha de ser de la comparació, feta pels mateixos alumnes, de situacions així que ha de sorgir de manera natural la necessitat d'un símbol addicional per a donar precisió als enunciat simbòlics. És molt interessant no donar ràpidament la solució simbòlica "()" i deixar que els alumnes en busquin una. L'assimilació d'una novetat és molt millor quan l'esperit s'ha preparat prèviament buscant-la.

Per introduir les regles dels signes cal plantejar una situació senzilla, com "De 3 resteu $\sqrt{2} - 1$ ". La imatge geomètrica juga aquí un paper molt important:



El resultat de la resta plantejada es pot obtenir de dues maneres. Amb el dibuix al davant, la més lligada a la lògica del que s'enfronta al problema sense altres coneixements és la que "veu" que el resultat serà $2 +$ alguna cosa, i que aquesta cosa és el que va de $\sqrt{2}$ a 2, és a dir, $2 - \sqrt{2}$. El resultat és, per tant, $2 + 2 - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$. L'altra manera fa servir que tant serà treure de 3 la diferència entre $\sqrt{2}$ i 1, com treure $\sqrt{2}$ de 4 ($= 3 + 1$). Aquesta darrera és la que proporciona la comprensió de la regla general: per calcular $3 - (\sqrt{6} - 2)$, tant serà treure de 3 la diferència entre $\sqrt{6}$ i 2, com treure $\sqrt{6}$ de 5.



La comprovació dels resultats obtinguts ha de portar els alumnes a enunciar la regla que regeix la descomposició i abreviació d'una operació indicada com $3 - (\sqrt{6} - 2)$, obtenint així la regla per a "desfer un parèntesi amb un signe menys al davant".

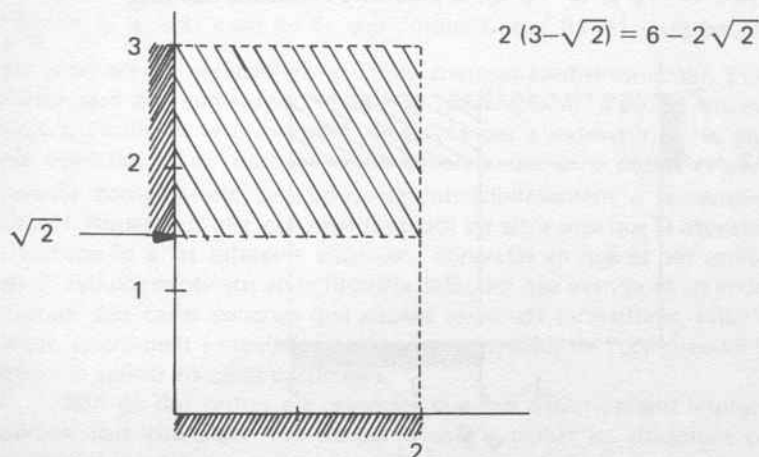
Cal plantejar, finalment, exercicis que comportin sumes de dues quantitats negatives, com ara $3 - \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)$. El significat de $-\sqrt{2} - \sqrt{2}$, com a subtracció successiva d'una mateixa quantitat, conduirà a la regla $-\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$, etc. Convé acabar el tema amb una sèrie d'exercicis fets només a partir de les regles trobades i extretes de les situacions anteriors. Aquest serà el moment en què es podran introduir, ja sense el perill d'una mala assimilació, una sèrie de recursos mnemotècnics que ajudin a fixar les regles anteriors ("Per sumar dos nombres amb signe menys, cal sumar els coeficients i posar signe menys", etc.).

iii) Producte de nombres compostos. Identitats notables

Els primers exercicis que caldrà plantejar en aquest apartat seran de multiplicacions d'un nombre enter per un nombre compost. Aquí tornen a ser molt importants els exercicis de traducció d'enunciats retòrics a expressions simbòliques: "Multipliqueu 3 per $2 + \sqrt{2}$, per $3 - \sqrt{2}$, per $\sqrt{7} + \sqrt{5}$, etc.", els quals permetran insistir altra vegada en la necessitat imprescindible dels parèntesis, ampliant i aclarint la seva funció. Per a justificar la importància que cal concedir a aquests exercicis que anomenem de *traducció*, potser és convenient recordar que, mentre les operacions amb radicals eren enunciadades amb paraules, no hi havia ambigüitat en l'expressió que exigís parèntesis: les paraules sobren per a distingir coses com $3(\sqrt{2} + 1)$ i $1 + 3\sqrt{2}$. Des de la perspectiva del càlcul numèric, d'altra banda, la substitució de "3 per $\sqrt{2} + 1$ " pel simbolisme " $3(\sqrt{2} + 1)$ " aporta ben poca cosa. Aquestes foren les raons principals per les quals els parèntesis i les multiplicacions indicades (que no apareixen per res en el tractament renaixentista dels radicals) foren els darrers recursos simbòlics que s'incorporaren al llenguatge algebraic en

el seu procés de creació. Nosaltres, no cal dir-ho, no pretenem dissenyar un procés didàctic a base de refer mimèticament el procés històric, però sí que considerem molt important tenir en compte les dificultats que aquest procés ens mostra.

El model geomètric esdevé una eina molt important en el tractament del producte, tal com nosaltres el proposem. El producte de $3 - \sqrt{2}$ per 2, per exemple, ha de ser calculat pels alumnes a partir de l'esquema.

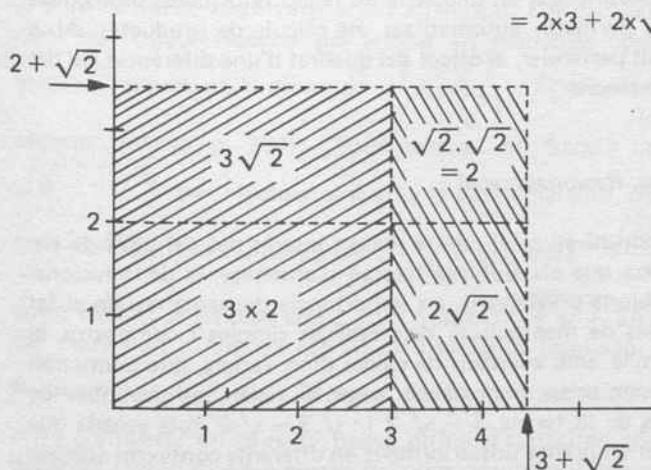


La distributivitat, com ja hem comentat anteriorment de l'associativitat, no és una cosa a *utilitzar* en aquests exercicis, sinó a *aprendre*.

Un esquema semblant servirà per a introduir els productes de la forma $(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$.

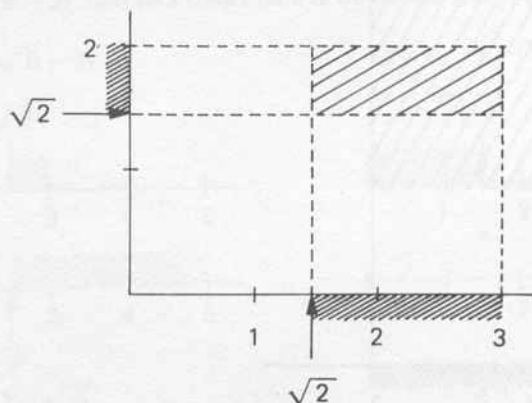
$$(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) =$$

$$= 2 \times 3 + 2 \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$



D'ells se'n podrà obtenir, com a cas particular, al qual cal dedicar una atenció especialíssima, l'expressió per al quadrat d'un nombre compost. Evidentment, l'esquema geomètric és el que ha de permetre als alumnes trobar l'expressió general d'un quadrat, com $(2 + \sqrt{2})^2$, i els ha de conduir a enunciar retòricament allò tan familiar de "El quadrat del primer, més..."

Diguem, finalment, sense entretenir-nos més en els detalls d'un procés que pensem que ja he quedat prou explicitat, com obtenir les regles per al producte de signes. A partir d'un producte com $(2 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$, es dibuixarà l'esquema habitual.



A partir d'ell, es preguntarà quant valen les àrees dels rectangles que hi apareixen, inclòs el rectangle total d'àrea 2×3 . Es demanarà que indiquin els rectangles les àrees dels quals s'expressen "de manera simple", és a dir, com a molt, pel producte d'un nombre per un radical. El resultat $6 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2$ es deduirà de l'observació que el quadrat de costat $\sqrt{2}$ és comú als rectangles d'àrees $3\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$, i és restat dues vegades en posar $6 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$.

Aquests exercicis han de desembocar en una sèrie de regles retòriques, obtingudes pels mateixos alumnes, que els permetin automatitzar els càlculs de productes. Això mateix s'aplicarà, de manera molt particular, al càlcul del quadrat d'una diferència i al del producte d'una suma per una diferència.

iv) Divisió de nombres compostos. Racionalització

Aquest últim tema del segon nivell és el que té menys interès des del punt de vista heurístic. L'única tècnica nova que els alumnes hauran d'aprendre, la de la racionalització, utilitza resultats ja establerts prèviament. La importància del tema rau en el fet que, conegudes ja totes les regles de manipulació dels radicals simples i compostos, el professor podrà enfrontar l'alumne amb exercicis de càlcul molt variats, que permetran consolidar el domini dels automatismes. Importància especial tenen les tècniques de racionalització de denominadors de la forma $3 - \sqrt{2}$ i $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, tota vegada que tècniques del tot anàlogues seran emprades posteriorment en diferents contextos (divisió de nombres complexos, càlcul de límits, etc.)

Es pot pensar, erròniament, que informacions com $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, i $\frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{5 - \sqrt{3}}} = \sqrt{5 - \sqrt{3}}$ són qualitativament equivalents des del punt de vista lògic. És una creença errònia que prové de confondre l'equivalència *formal* amb l'equivalència lògica. És evident que els dos enunciats anteriors es poden sintetitzar en l'expressió formal $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$, així com ho és que l'individu que ha fet seves les dues igualtats concretes anteriors les reconeixerà en l'únic enunciat formal esmentat. El que és fals, i d'aquí l'error que ara comentem, és que la *contemplació* d'aquest enunciat formal proporcioni a l'individu la informació necessària per a esdevenir, a les seves mans, un esquema operatiu en els diversos casos concrets que se li poden referir. Hem subratllat la paraula *contemplació* per oposar-la intencionadament a la *comprensió* de l'enunciat formal. Aquesta última, clarament, no pot ser altra cosa que la capacitat de reconèixer-lo i d'utilitzar-lo a les diferents situacions concretes en què es pot utilitzar. D'aquí el *sense sentit* fabulós contingut en la filosofia didàctica que avantposa els enunciats formalitzats a l'estudi dels casos concrets que aquells enunciats formalitzen, i que insisteix, repetitivament, estèrilment i maniàticament, en la necessitat de "comprendre bé" la fórmula per a poder-la aplicar als casos particulars.

Són de dos ordres els obstacles que fan didàcticament impracticable el camí que parteix dels enunciats formals per a anar a trobar les situacions concretes. Un d'ells, el més fàcilment exemplificable, és el derivat de la feblesa operativa dels propis símbols algebraics durant el seu procés de consolidació i estructuració com a llenguatge, és a dir, fins que no arriben a ser-ne fixades unes regles de combinació o sintaxi. Per exemple, Chuquet, un dels autors que va crear una àlgebra simbòlica més desenvolupada abans de Vieta, s'entretén a calcular pas a pas, fent totes les operacions numèriques

necessàries, coses com que el quadrat de $\sqrt{5 + \sqrt{7}}$ és $5 + \sqrt{7}$, o que $\frac{6 + \sqrt{7}}{6 + \sqrt{7}} = 1$,

etc. Després de fer-ho, es detura a comentar que els mateixos resultats podien haver estat obtinguts utilitzant lògicament a fons els conceptes en joc. Fer les operacions, aquí, és com deixar-se enganyar per les aparences. Un dels exemples més colpidors de tot el camí que calgué recórrer per arribar als esquemes operatius formals el trobem, en el

mateix Chuquet, en el càlcul de $\frac{5 + \sqrt{7}}{\sqrt{5 + \sqrt{7}}}$. El seu desenvolupament és, en essència, el

següent: (Marre, p. 734): "Racionalitza" la fracció multiplicant a dalt i a baix per $\sqrt{5 - \sqrt{7}}$; per efectuar el producte del numerador, eleva al quadrat $5 + \sqrt{7}$ (que és $32 + \sqrt{700}$) i el multiplica per $5 - \sqrt{7}$; així obté $\frac{\sqrt{90 + \sqrt{2268}}}{\sqrt{18}}$, que opera intro-

duint 18 dins de les dues arrels. Així li surt $\sqrt{5 + \sqrt{7}}$. En aquest cas, Chuquet no afegeix cap comentari ni ofereix cap via alternativa de resolució. Sense plantejar-nos la qüestió, forçosament estèril, de si Chuquet mateix ignorava la identitat formal $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$, o si el va considerar un principi massa difícil d'explicitar, queda el fet inqüestionable de la distància radical que separa, des del punt de vista del pensament natural, aquesta identitat

d'una de les seves materialitzacions concretes possibles. El fet que el principi formal quedi completament emmascarat pel càlcul radical numèric, o que, sent realment possible arribar a *calcular* que $\frac{5 + \sqrt{7}}{\sqrt{5 + \sqrt{7}}}$ val $\sqrt{5 + \sqrt{7}}$, aquesta possibilitat mateixa sigui un

obstacle per arribar a trobar un altre camí (el formal), no fan sinó subratllar la diferència qualitativa entre els raonaments propis d'un context numèric i els que entren en joc en el càlcul formal.

Aquesta última consideració ens acosta al segon ordre d'obstacles de què parlàvem al paràgraf anterior. Des del punt de vista del desenvolupament intel·lectual de l'individu, les operacions lògiques que cal posar en acció per tal de moure's dins del càlcul formal amb plena comprensió dels seus esquemes operatius pertanyen, com la possibilitat de fer un raonament per reducció a l'absurd, a l'estadi més evolucionat de la intel·ligència. Un estadi, com ja hem dit anteriorment, que els individus no excepcionals no assoleixen abans dels 14-15 anys. Això significa, diguem-ho una vegada més, que fins i tot des del punt de vista de la seva *possibilitat*, cal renunciar al disseny d'arribar a fer entenedores les regles més elementals i concretes de l'àlgebra a partir de les propietats formals del càlcul simbòlic. Tot al contrari, aquestes només podran ser obtingudes per una intel·ligència ja prou madura que pugui fer-ne abstracció, que pugui extreure-les, de les regles operatives del càlcul numèric.

En aquest últim nivell d'introducció al càlcul radical, es tractarà de fer que els alumnes treballin amb combinacions radicals molt més complicades. D'una banda, això obliga a refinar i pulir el domini dels automatismes en joc, aplicant-los a casos complicats i excepcionals, o molt particulars o molt generals, aprofundint, per tant, en el seu

significat. D'una altra, serà enfront d'operacions com $\frac{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{7}}}{4\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{7}}}$, etc., que adquiriran

tot el seu valor, per l'economia que representen, els raonaments d'un nou estil que permet manipular aquestes expressions sense recórrer al càlcul directe. En aquesta última etapa es tracta, doncs, de portar els alumnes a treballar al nivell d'abstracció més elevat possible amb els materials disponibles, i d'aconseguir que arribin, ells mateixos, a formular els principis o identitats formals. Aquests principis no han de ser enunciats necessàriament amb lletres. Fer-ho així, o no, és una cosa que ha de decidir el professor segons el nivell de cada classe. Quedi clar, però, que l'eficàcia de l'aprenentatge no depèn bàsicament d'aquest aspecte. El que resulta fonamental no és la escriptura d'identitats formals, amb lletres o sense. El que resulta fonamental és la formulació de les regles que elles representen, feta pels mateixos alumnes, i feta a partir de la seva identificació en diverses situacions de menys generalitat. Només aquest aprenentatge fa òptima la capacitat de re-utilització (de "comprensió", com es diu ordinàriament) del càlcul formal.

Assenyallem, a continuació, els tipus més importants d'activitats que podem proposar als alumnes amb la finalitat esmentada.

i) Elevant al quadrat una expressió com $\sqrt{8} - \sqrt{2}$, resulta $8 + 2 - 2\sqrt{16} = 2$; per tant, $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Fent el mateix amb $3 + \sqrt{12}$, tenim $9 + 12 + 6\sqrt{2}$; per tant, $3 + \sqrt{12} = \sqrt{21 + 6\sqrt{2}}$. Aquest artifice permet, en casos particulars, simplificar expressions de la forma $a \pm \sqrt{b}$, i $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Servirà, a més, per a introduir expressions com l'esmentada $\sqrt{21 + 6\sqrt{2}}$, que suposa un grau de complicació més elevat que el que els alumnes havien vist fins ara. Es tractarà amb cura especial la distinció entre $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

i $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, entre $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ i $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, etc.

ii) Els exercicis anteriors poden ser aplicats a la comparació de radicals compostos.

Els radicals $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ i $\sqrt{8 + \sqrt{60}}$ són iguals perquè donen el mateix quan són elevats al quadrat. En canvi, el radical $\sqrt{8 + \sqrt{7}}$ és més gran que $\sqrt{20} + 1$ perquè, elevant-los al quadrat, donen respectivament $15 + \sqrt{224}$ i $21 + \sqrt{80}$, els quals són quasi 30. Però li falta menys a $\sqrt{224}$ per a valer 15 que a $\sqrt{80}$ per a valer 9; etc. Aquest apartat pot conduir al principi formal: si $a^2 = b^2$, aleshores $a = b$, i si $a^2 \neq b^2$, llavors $a \neq b$ (recordeu que estem treballant, només, amb quantitats positives). Un altre principi que pot ser extret en aquest context és: si $a \cdot b = a^2$, aleshores $a = b$.

iii) A partir d'un radical com $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$, es pot resoldre $\sqrt{7 + \sqrt{3}} + \sqrt{7 + \sqrt{3}}$ (ó $\sqrt{7 + \sqrt{3}} - (-\sqrt{7 + \sqrt{3}})$) interpretant la suma com "dues vegades" i deixant fora del radical un factor 2; es pot introduir aquest factor per obtenir $\sqrt{28 + \sqrt{48}}$, i es pot calcular la suma primera elevant-la al quadrat, com feiem amb $\sqrt{8 - \sqrt{2}}$ al paràgraf i). És d'un gran interès didàctic, des del punt de vista de consolidar el domini dels automatismes i de donar confiança a l'alumne, d'obtenir els mateixos resultats per camins diferents, i palesar, d'aquesta manera, l'equivalència de les diferents opcions que es poden prendre per desenvolupar un càlcul; així es pot trencar el bloqueig que senten molts alumnes enfront d'un d'ells.

iv) El producte de radicals de la forma $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$ per $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{7 + \sqrt{5}}$ per $\sqrt[3]{7 - \sqrt{5}}$, etc., condueix a diverses situacions interessants. Plantejat directament, sense indicacions per part del mestre, un producte com el primer dels citats serà realitzat pels alumnes pas a pas ($\sqrt{(7 + \sqrt{3})(7 + \sqrt{3})} = \sqrt{52 + 14\sqrt{3}}$, etc.); el resultat d'aquesta operació pot ser simplificat fins a $7 + \sqrt{3}$, la qual cosa porta a interessar-nos per la transformació $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + \sqrt{4ab}}$. feta en sentit invers, és a dir, per la manera d'expressar un radical $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ com la suma de dos radicals simples $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. El concepte d'arrel quadrada ha de ser subratllat en relació amb les identitats

$$\sqrt{7 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{3}} = (\sqrt{7 + \sqrt{3}})^2 = 7 + \sqrt{3}$$

i

$$\sqrt{7 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{3}} = \sqrt{(7 + \sqrt{3})(7 + \sqrt{3})} = \sqrt{(7 + \sqrt{3})^2} = 7 + \sqrt{3},$$

l'economia de les quals ressaltarà fortament en el context present. El mateix es pot aplicar a arrels cúbiques del mateix estil, etc.

v) Les operacions amb radicals com els que acabem de mencionar, d'índex superior a 2, ha de conduir a analitzar situacions com $\sqrt[4]{7 + \sqrt{5}}$ al quadrat, o $\sqrt[6]{7 + \sqrt{5}}$ al cub, on queda subratllat l'interès de la regla $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[n]{a}$, n un divisor de m . Serà interessant oposar aquesta regla a les situacions $(\sqrt[3]{a})^2$, etc., a les quals el resultat s'obté necessàriament per la potència del radicand.

vi) La divisió i racionalització dels radicals compostos mencionats als punts anteriors conduiran els alumnes a enfrontar-se amb les situacions més complexes de totes. Són interessants, d'entrada exercicis de simplificació com

$$\frac{\sqrt{180 + \sqrt{3888}}}{6} = \sqrt{\frac{180}{36} + \frac{\sqrt{3888}}{36}} = \sqrt{5 + \sqrt{\frac{3888}{1296}}} = \sqrt{5 + \sqrt{3}}, \frac{\sqrt{35 - \sqrt{147}}}{\sqrt{7}},$$

etc., o com

$$\frac{\sqrt{35 + \sqrt{75} + \sqrt{98} + \sqrt{6}}}{\sqrt{5 + \sqrt{2}}} (= \sqrt{7 + \sqrt{3}}), \frac{\sqrt{\sqrt{48} - 2}}{\sqrt{3} + 2}, \text{ etc.}$$

Des del punt de vista del càlcul formal, els exercicis que donaran més joc seran els derivats de situacions com $\frac{6 + \sqrt{7}}{6 + \sqrt{7}}, \frac{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}}$, etc.; com $\frac{7 + \sqrt{5}}{\sqrt{7 + \sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5 + \sqrt{3}}}{5 + \sqrt{3}}$, etc.;

com $\frac{\sqrt{7 + \sqrt{5}}}{\sqrt[4]{7 + \sqrt{5}}}$, etc. Com assenyalàvem al començament d'aquesta etapa C, aquests

exercicis permeten presentar els principis o identitats formals ($\frac{a}{a} = 1, \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}, \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[4]{a}$, etc) com a eines absolutament necessàries per a poder progres-

sar en el domini dels símbols i conceptes matemàtics. Serà interessant, però, no introduir-los d'entrada, sinó reconèixer la seva utilitat després d'haver recorregut el camí molt més llarg i fatigós del càlcul numèric.

CAPÍTOL 18:

INTRODUCCIÓ A LES EQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

Puntualitzacions que es desprenen de l'anàlisi de la història

a) La resolució d'equacions (fonamentalment polinòmiques) té els seus orígens en estadis molt primitius del quefer matemàtic. La majoria de problemes que condueixen a equacions corresponen a aquells del tipus: "Trobar un nombre que verifiqui tal relació numèrica concreta". Els mètodes de resolució corresponen sempre, en una primera fase de raonament matemàtic, a l'àmbit del discurs aritmètic (Diofant), descrit en forma retòrica.

b) La majoria de problemes de planteig troba en el marc de les equacions una unificació, pel que fa als mètodes de resolució, que permet deixar de costat als altres mètodes específics (d'una falsa posició, de dues falses posicions, per oposició i remoció,...).

c) Les tres fases de l'àlgebra (retòrica, sincopada i simbòlica) que introduí Neugebauer per diferenciar els diversos tractaments per a resoldre les equacions, corresponen a un camí natural de maduració, que exigeix, per a ser assolit, la plena assimilació dels mètodes que s'empren a cada fase. Allò que de primer és una mera taquigrafia acaba adquirint amb el temps una autonomia pròpia, que generarà lleis específiques; aquestes lleis són les que governaran els distints signes (primer síncopes i després símbols més abstractes). Convé precisar que aquestes lleis són el resultat de moltes traduccions d'operacions aritmètiques concretes en el terreny dels signes (regles del " $+$ " i " $-$ "; regles per al producte de potències de la incògnita,...).

d) Hi ha clars lligams històrics entre les regles que governen el càlcul amb polinomis i les regles que regeixen el càlcul amb radicals. Recordem la forma com al-Hwarizmi introdueix el càlcul amb polinomis a partir de l'analogia amb el càlcul radical (veure p. 24).

e) El tractament dels polinomis, com a objectes d'estudi separats de la teoria d'equacions, és inexistent, almenys fins a la meitat del segle XVI. Recordem que si es planteja la suma, resta i producte entre polinomis, i no en canvi la divisió, no és per altra cosa que per fer front a la necessitat de resolució de les equacions (p. 185).

f) Les regles per a resoldre les equacions de segon grau vénen donades segons el tipus d'equació. En primer lloc s'aborda la forma de resoldre els casos més particulars

($x^2 = a$ i $x^2 = bx$) i després s'exposen els diferents tipus d'equacions on apareixen les tres quantitats: x^2 , bx , c ($x^2 + bx = c$; $x^2 + c = bx$; $x^2 = bx + c$, on b i c són nombres positius). A cada una d'aquestes equacions se li dóna un tractament específic, i es diu en forma retòrica què s'ha de fer per tal de trobar el valor de la incògnita. La solució nul·la mai no es considera, al mateix temps que no són acceptades les solucions negatives. En alguns casos s'accepten les dues solucions de l'equació, quan aquestes són totes dues positives.

Les demostracions de les receptes per a trobar la solució es basen exclusivament en construccions geomètriques, partint de la idea que l'equació reflecteix una igualtat d'àrees. En aquest context no és d'estranyar que no s'acceptin les solucions nul·les de l'equació $x^2 = bx$, tota vegada que les figures es reduïrien a un punt i a un segment, carents de significat de superfície.

Crítica a certs plantejaments actuals, predominants en l'ensenyament de les equacions de primer i segon grau.

No és fàcil establir una crítica equànime, quan hom té uns plantejaments tan diferenciats dels imperants en aquesta matèria. Però intentarem de fer-ho, malgrat la sensació que ens pugui quedar de ser fins a cert punt injustos,...

L'esquema bàsic d'exposició moderna als manuals de text correspon a l'ordenació lògica de les entitats i operacions que apareixen en la resolució de les equacions. Així, abans d'abordar el tema de la resolubilitat de les equacions del tipus $P(x) = Q(x)$, es planteja la necessitat de definir els polinomis i les operacions entre ells. Després d'establir una teoria general de polinomis, que comprendrà fins i tot la noció de funció polinòmica, es tractaran les equacions dins del marc d'estudi de les anti-imatges d'una funció polinòmica. Així s'assolirà la màxima aspiració dels amants d'aquest esquema lògico-deductivista: el tractament de diferents temes dins del marc general d'una teoria que els engloba. Però l'eficàcia d'aquest estil d'enfocar les matemàtiques, pel que a l'aprenentatge es refereix, ja és una altra història.

L'antítesi d'aquest punt de vista l'expressava molt bé Rey Pastor al pròleg del seu llibre *Elementos de Análisis Algebraico*, en referir-se al criteri d'exposició de distints temes en aquest llibre:

- p. 4-5 "Huyendo de la general tendencia a elevar por abstracción los asuntos elementales, hemos prescindido de todo formalismo (*), esforzándonos, por el contrario, en elementalizar las cuestiones difíciles sin menoscabo del rigor.

(*) Como hace notar el profesor PASCAL, toda abstracción exige una base previa que sirva de punto de apoyo para poder elevarse, y no sólo carecen los alumnos de esta base, sino que precisamente vienen a la Universidad en busca de ella. "Hacer descender de lo alto los conceptos del Análisis es didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil."

Veiem amb una mica de detall quin és el fil conductor que inspira els moderns llibres de text en el tema de la resolució d'equacions.

La introducció dels polinomis cavalca entre el concepte de funció polinòmica i una definició abstracta, basada en la successió finita de coeficients racionals (per què no de coeficients reals?!). Cada una d'aquestes successions rep el nom de polinomi: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots$; $a_i \in \mathbb{Q}$, i sovint s'utilitza l'expressió més familiar: $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, on x es diu que és la indeterminada. Sobre aquesta definició abstracta s'estableixen

de manera completament formal les quatre operacions, i a continuació l'estudi de les propietats d'aquestes operacions condueix de forma natural (Natural?) a l'estructura dels polinomis com a anell. A partir d'ara l'alumne ja podrà contestar la pregunta: què és un polinomi?: un anell, i per si fos poc, unitari i sense divisors de zero; més clar, l'aigua!

El segon referent a aquest tema el constitueix la introducció dels polinomis a partir de les aplicacions polinòmiques, que des d'ara, es diu, rebran el nom de funcions

polinòmiques: $Q \xrightarrow{P(x)} Q$.

Cada nombre racional posseeix una imatge construïda a partir de la funció polinòmica $P(x)$. Les equacions polinòmiques són contemplades sota el punt de vista particular de trobar l'anti-imatge del zero a partir d'una determinada funció polinòmica: $P(x) = Q(x)$; $P(x) - Q(x) = 0$, és a dir, cal resoldre $F(x) = 0$, equivalent a trobar les anti-imatges de la funció F .

Pensem que aquest plantejament és una barrabassada pedagògica, tota vegada que des d'un concepte molt genèric i conceptualment molt difícil, com és el de funció (que implica la idea d'un paràmetre lliure) es pretén justificar una qüestió molt concreta, com ho és una equació i la seva resolució, cosa que al capdavant només pot conduir l'alumne a confondre el significat del símbol abstracte que apareix, la x , que a les equacions té el sentit d'un nombre desconegut, però concret, amb el sentit amb què apareix el mateix símbol en el context de les funcions, el de paràmetre lliure.

Com sempre, l'exposició està feta a partir del punt de vista de la síntesi que ordena els conceptes en categories que van del general al particular, però és del tot inconvenient des del punt de vista de l'aprenentatge, que implica remuntar-se des dels casos més concrets y senzills (quasi palpables, o si més no imaginables) als generals. Convindria preguntar-se quina exposició és la més adequada per tal d'assimilar conceptes tan bàsics, per als quals s'empra un mateix símbol, la " x ", però que segons el context cal interpretar, bé com una incògnita, o bé com un paràmetre.

L'aplicació, sistemàtica i sense concessions, del principi d'anar del cas general al particular, condueix a tractar la resolució de les equacions $ax^2 + c = 0$ i $ax^2 + bx = 0$, com un cas particular de l'equació general $ax^2 + bx + c = 0$, amb $b = 0$ ò $c = 0$, i en conseqüència les equacions on falta el terme bx o el terme independent són resoltes a partir de les solucions generals que proporciona la fórmula: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, sense adonar-se

que afavorir en l'alumne d'aquest mecanicisme no li estalviarà temps de resolució ni l'ajudarà en la comprensió del que està fent, sinó que li complicarà allò que és senzill i que admet tractaments elementals. Però encara més, no fan falta unes dots excepcionals de perspicàcia per a adonar-se que els alumnes, en un primer estadi, mai no capten els significats de les lletres a , b , c , com a coeficients respectius de la incògnita al quadrat, la incògnita, i el terme independent, per més que el professor insisteixi en aquests significats, sinó que simplifiquen al seu aire aquesta realitat i atorguen a les lletres a , b , c un sentit d'ordenació lineal, interpretant de manera sui-generis la fórmula així:

segon coeficient $\pm \sqrt{(\text{segon coeficient})^2 - 4 \text{ per primer coeficient, per tercer coeficient}}$
doble del primer coeficient

Aquest és el motiu pel qual un percentatge molt elevat d'alumnes s'equivoquen en aplicar aquesta fórmula als casos particulars ($ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$). I malgrat

aquesta realitat, els alumnes segueixen rebent les mateixes directrius d'aprenentatge... Tot sembla apuntar a la conveniència d'un canvi de direcció.

Introducció a les equacions de primer grau

La iniciació a les equacions de primer i segon grau podria venir donada per la resolució de problemes senzills, que, podent-se resoldre mitjançant les tècniques algebraiques usuals, també siguin susceptibles d'ésser resolts a partir del raonament aritmètic.

Pensem que la introducció prematura d'un símbol per a la incògnita, i la resolució mecànica dels problemes a partir de les regles específiques per a resoldre equacions, pot actuar com a esmorteïdor de la capacitat de raciocini del noi. Encara més, la no comprensió del llenguatge algebraic, a causa d'una introducció prematura, farà que els símbols que apareixin no siguin per l'alumne la traducció fidel d'operacions aritmètiques concretes, i al capdavant aquest alumne manipularà els signes dins de l'àmbit de simples *trucs* i tècniques concretes.

Convé no perdre de vista que l'adquisició de coneixements matemàtics no es pot reduir a saber diferents tècniques i mètodes per a resoldre certs problemes de determinat tipus, i que un dels aspectes a contemplar pel professor, dins del quefer matemàtic, ha d'ésser ajudar a desenvolupar les distintes formes de raonament en el noi, portant-lo a ordenar les dades informatives d'un problema, a establir exactament què vol trobar, a buscar la relació entre el que se sap com a punt de partida i el que es vol cercar, a temptejar els possibles camins o relacions entre el que ens donen i el que ens demanen, a construir un pla que permeti apropar-se a l'objectiu del problema. Activitats totes elles en la línia que assenyala Polya en el seu llibre *Como plantear y resolver problemas*. En definitiva, les matemàtiques han de servir per a ajudar l'alumne a desenvolupar l'acte de PENSAR. També en aquesta mateixa perspectiva de treball se situa el contingut d'un article de P.R. Halmos, *El corazón de las matemáticas*, article on l'autor planteja que el nucli essencial, on resideix l'autèntic aprenentatge de les matemàtiques, no és altre que la resolució de problemes.

Per introduir el tema de les equacions polinòmiques pot utilitzar-se l'àmplia gamma de problemes de planteig que podem trobar als llibres de matemàtiques de fa uns pocs anys, o bé en alguns llibres de col·leccions de problemes de matemàtica recreativa. Aquest tipus de problemes permet assegurar l'explotació del raonament aritmètic fins als límits on sigui possible. Es pot recórrer a problemes, alguns d'ells tan clàssics, com aquest que exposem:

"Una llança està, la meitat, clavada en el fang, un terç de la resta està en l'aigua, i sobresurt de l'aigua 20 cm. Quina és la longitud de la llança?"

Observem la diferència de tractament d'aquest problema segons que haguem introduït o no el símbol "x", i les equacions que en resulten:

Mètode algebraic. Sigui x la longitud de la llança.

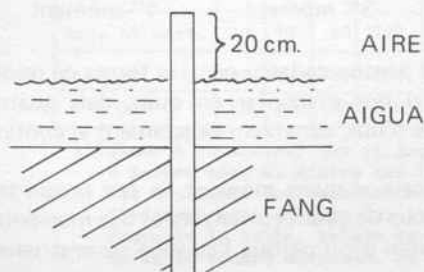
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}x\right) + 20 = x$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x + 20 = x; \quad \frac{4}{6}x + 20 = x; \quad x - \frac{4}{6}x = 20$$

$$\frac{2}{6}x = 20; \quad \boxed{x = 60 \text{ cm.}}$$

En el mètode de resolució han intervingut tan sols dos processos. El primer ha estat la traducció de l'enunciat en forma d'equació i el segon, la manipulació de l'equació primitiva cap a la seva resolució, fins a obtenir el resultat de 60 cm.

Abordar aquest mateix problema des d'un punt de vista de l'aritmètica obligarà l'alumne, en primer lloc, a ordenar les dades que li donen, ajudant-se probablement amb un dibuix que les esquematitzi.



Dades del problema: $\frac{1}{2}$ està en el fang, $\frac{1}{3}$ d' $\frac{1}{2}$ està en l'aigua, és a dir $\frac{1}{6}$ de la llança està en l'aigua, la resta de la llança sobresurt de l'aigua.

Quina és aquesta resta que està a l'aire? Doncs serà la que li falta a $\frac{1}{2}$ més $\frac{1}{6}$ per arribar a 1, o sigui:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6 - 3 - 1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Resumint, que $\frac{1}{3}$ de la llança està a l'aire, i això correspon a la part de 20 cm. Així doncs, la llança, que és 3 vegades més gran que la part que hi ha a l'aire, ha de mesurar el total de $20 \cdot 3 = 60$ cm.

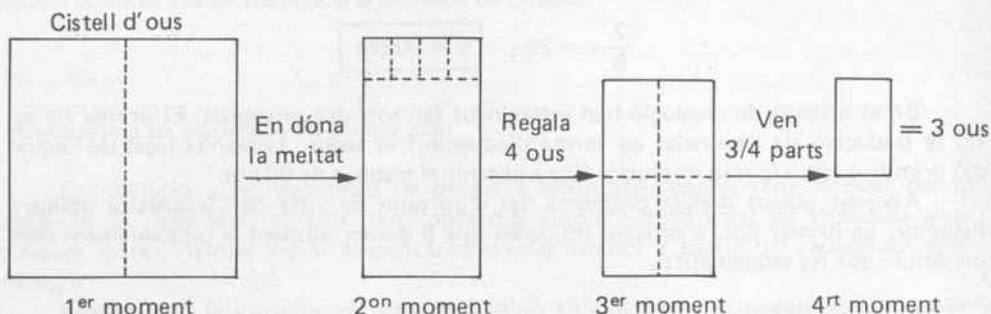
Aquesta serà la línia més probable de treball per part de l'alumne; en cas de no poder-la assolir completament per ell mateix, se li pot desbrossar el camí sense més que preguntar-li oportunament per resultats intermedis.

Com podem apreciar, la resolució aritmètica del problema es basa en un coneixement apropiat de les proporcions i del concepte de trencat. La resolució es pot fer seguint diferents variants sobre la mateixa idea. Interessa aquí posar en relleu que en el transcurs de la resolució el noi es veu constantment obligat a saber exactament què fa en cada pas, i fins i tot li és necessari organitzar molt bé les dades inicials. La resolució en cap moment no esdevé mecànica, i a més, a causa, dels significats concrets que posseeix cada nombre resultant d'operacions intermèdies, és més difícil que l'alumne es deixi al final del procés les unitats en les quals ha treballat.

Les mateixes observacions podríem extreure del clàssic problema del repartidor d'ous:

"Un vailet va al mercat amb un cistell ple d'ous. Pel camí troba a un amic i n'hi dóna la meitat, després en troba un altre i li regala 4 ous. Més endavant ven les tres quartes parts dels que li quedaven i al final li resten 3 ous al cistell. Quants ous portava en sortir de casa?"

La resolució aritmètica, igual com abans, farà aconsellable organitzar molt bé les dades del problema, sota un esquema senzill.



El professor pot deixar un marge de temps perquè cadascú pensi la forma de resoldre el problema. Després d'un temps prudencial pot preguntar en quin, dels quatre moments en què el cistell té quantitats diferents d'ous, coneixem exactament el contingut.

Establert que el contingut d'ous sols es coneix al quart moment, es pot preguntar si a partir d'aquí podríem esbrinar el contingut d'ous de qualsevol dels altres tres moments, i quin seria el més fàcil. Aquests petits indicis seran prou perquè l'alumne reconstrueixi la solució del problema, més o menys així:

Acaba amb 3 ous, que han de ser $\frac{1}{4}$ part dels que tenia un moment abans de vendre les $\frac{3}{4}$ parts que portava. O sigui que abans d'efectuar la venda en tenia 12. Com que abans n'ha regalats 4, n'havia de tenir 16, i com que havia donat la meitat dels ous que portava al principi, resulta que havia sortit de casa amb 32 ous.

El lector que hagi tingut la paciència d'arribar fins aquí potser es preguntarà quina finalitat pot tenir abordar d'aquesta manera (de vegades més llarga i quasi sempre més costosa) uns problemes que poden ser resolts d'una manera molt més mecànica a partir d'introduir un símbol per a la incògnita i de treballar amb llenguatge d'equacions. El perquè d'aquesta opció estriba en el fet que, per passar a un estadi de tècniques matemàtiques, és convenient prèviament desenvolupar les línies de pensament que condueixen i configuren aquestes tècniques, i això no tan sols dins del marc d'una teoria, sinó també en el marc de resolució de problemes.

En aquest sentit pot ser instructiva una experiència realitzada amb alumnes de diferents edats, sotmesos a un procés d'aprenentatge distint. Els vam proposar de resoldre un mateix problema, extret d'un qüestionari de problemes per l'Olimpiada Matemàtica (que cada any se celebra entre alumnes que finalitzen el C.O.U.). El problema era el següent:

"Tres jugadors convenen que quan un perdi una partida donarà a cada un dels altres la quantitat de diners que en aquell moment tinguin. Després de jugar tres partides, cada un d'ells n'ha perduda una, i es retiren amb 40 duros cada un. Quants duros tenien cada un d'ells en començar?"

La forma de resolució que ens va presentar un alumne de segon de B.U.P. corresponia a una anàlisi precisa de les situacions que s'havien de plantejar al llarg de les tres partides, i sense d'altres auxiliars que els propis de l'aritmètica resolgué el problema. Reproduïm exactament la solució que ens va lliurar, perquè reflecteix fidelment tots i cada un dels petits raonaments que va haver de fer. És necessari precisar que l'alumne

que ens donà aquesta solució era un dels millors de la classe, no ens hem d'enganyar, i no cal dir que mai no havia resolt per mètodes algebraics cap sistema d'equacions de 3×3 .

Reproducció exacta de la solució lliurada per un alumne de 2^{on} de B.U.P.

DANIEL FERNANDEZ RODRIGUEZ

- 5a) Tres jugadores convienen que cuando uno pierda una partida dará a cada uno de ellos la cantidad que en ese momento tengan éstos de dinero. Después de jugar tres partidas cada uno de ellos pierde una y se retirará con 40 duros cada uno.

dinero	A	B	C	SUMA
inicialmente	65	35	20	120
des. 1ª part.	10	70	40	120
" 2ª "	20	20	80	120
" 3ª "	40	40	40	120

¿Cuántos duros tenían cada uno al comenzar?

Vamos a construir una tabla en la que colocaremos los datos que nos dan (la suma y los 40 duros con los que se retiran). Esta tabla la iremos rellenando por lógica a partir de los datos que vallamos obteniendo.

- 1ª) Vamos a considerar que el jugador A pierde el primero, y como no volverá a perder más, el dinero que le sobre después de perder la 1ª partida, al ser duplicado dos veces consecutivas tiene que ser igual a: $x \cdot 2 \cdot 2 = 40$ d. El dinero que le sobra (x) tiene que ser = 10 duros (Este dato lo colocamos en la tabla, debajo de A, y en la fila des. 1ª part. Así, después de la 2ª tendrá el doble, 20 duros, y después de la 3ª tendrá 40 duros).
- 2ª) El jugador B pierde el segundo y da la cantidad convenida a sus compañeros de juego. El dinero que le sobre, ha de ser tal que al duplicarse en la última partida, cuando pierda C, sea igual a 40 duros: $2 \cdot y = 40$ $y = 20$ d. Es decir, que le sobrarán 20 duros al finalizar la 2ª partida.
- 3ª) El jugador C pierde el último. Debe de tener acumulado un dinero de las otras partidas para que al duplicar el valor que tiene A (20 duros) y el valor a B (otros 20), el pueda quedarse mín con 40 duros. Es decir: $40 + 20 + 20 = 80$ d. Cantidad que colocamos en la tabla, y que ya podíamos haber calculado sabiendo que después de la 2ª partida a los jugadores A y B les quedaba 20 duros, y conociendo la suma del dinero que se maneja en total: $120 - 20 - 20 = 80$. Podemos conocer ya el dinero inicial que tenía C, ya que esos 80 duros son producto de dos duplicaciones constantes (dinero que le dio A cuando perdió el primero, y el que le dio B cuando perdió el 2º). Así pues: $x \cdot 2 \cdot 2 = 80$ El dinero inicial eran 20 duros. Colocamos en la tabla el dinero que obtiene C a lo largo de las partidas.
- 4ª) Después de la 2ª partida, B tuvo que dar a C la cantidad que tenía en ese momento (40 duros) y a A la cantidad que tenía (10 duros), pierde 50 duros, y como le quedan 20, quiere decir que tenía 70 duros. Esta cantidad también la podíamos haber hallado a partir de que, si A tiene 10 d. y C tiene 40 d., y hay 120 d. en total, B tendrá: $120 - 10 - 40 = 70$ d.
- 5ª) Como A pierde la primera partida, no podemos decir que el dinero que le queda era el doble de lo que tenía inicialmente. No obstante da a B el doble de otro tanto de lo que tenía, y como después de la 1ª partida B tiene 70 duros, inicialmente tendría la mitad: $70 : 2 = 35$ duros.
- 6ª) El dinero que tiene A inicialmente, lo podemos hallar mediante la SUMA: $120 - 20$ (dinero inicial de C) - 35 (dinero inicial de B) = 65 duros. O dicho de otra manera: W (dinero inicial de A) - 35 (Din. in. de B) - $20 = 10$ (dinero que le sobra a A después de perder la primera partida).

EVOLUCION DE LA TABLA

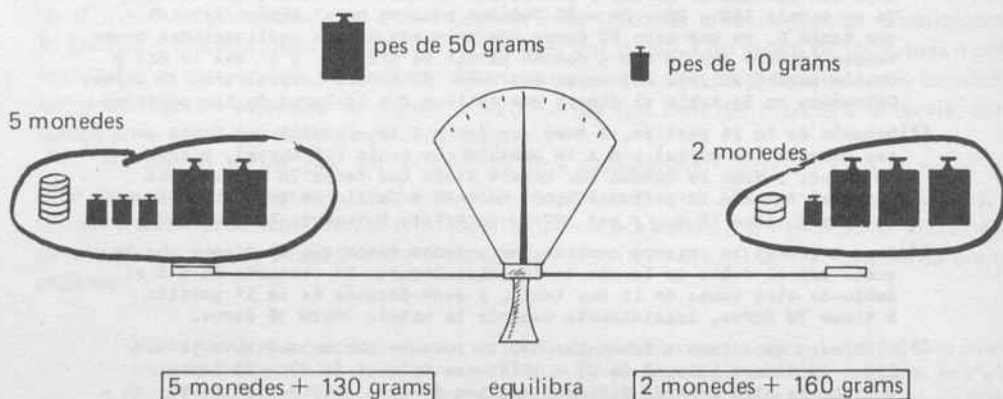
	1ª)	A	B	C	2ª)	3ª)	4ª)	5ª)	6ª)
inio.							20		35 20 65 35 20
1ª p.	10				10		40	10 70 40	10 70 40
2ª p.	20				20 20		80	20 20 80	20 20 80

En canvi, tots els alumnes de la classe de C.O.U. es van deixar portar per la resolució mecànica del problema, aplicant les tècniques de resolució pròpies dels sistemes d'equacions, sense parar-se a pensar ni per un moment en la possibilitat de resoldre'l d'una altra manera. La pregunta que queda en l'aire és: quina de les dues formes de resoldre'l porta associat un més alt desenvolupament del raonament matemàtic? Què hagués passat si a aquells alumnes de C.O.U., per un moment se'ls priva de l'arma de la tècnica matemàtica?

Tots aquests problemes, com hem assenyalat, tenen la finalitat de desenvolupar el raonament en el noi, així com la capacitat d'aprofitar al màxim la informació que proporciona tot problema. Ara bé, no podem oblidar que tot aquest material de problemes també té com a finalitat preparar les condicions per a abordar la teoria d'equacions mitjançant els mètodes algebraics. Així és que, en un moment, convé donar el pas d'abordar problemes d'estructura molt més propera a la pròpia de les equacions.

En la resolució de les equacions de primer grau intervenen fonamentalment dos processos, l'un que consisteix a conduir l'equació primitiva a la forma $Ax = B$, on A i B són dos nombres, i l'altre que consisteix a desembarassar finalment el valor de la incògnita. Les operacions que intervenen en el procés de conduir l'equació primitiva a la forma $Ax = B$ es basen fonamentalment en la idea que a dos membres d'una equació se'ls pot afegir o treure una mateixa quantitat i s'obté una equació equivalent. Aquests tipus d'operacions que es poden fer són susceptibles de posar-se de manifest a partir d'una manipulació senzilla de problemes de pesades, disposant d'una balança de dos platets, unes peses de valor perfectament determinat i uns objectes idèntics de pes desconegut. La idea de treballar amb aquests objectes, per tal d'introduir les operacions bàsiques de la transformació d'equacions, l'hem extreta d'un conjunt de lliçons de Puig Adam estructurades d'una forma heurística (cf. Puig Adam pp. 342-343).

Per exemple, podem preguntar als alumnes com podriem esbrinar el pes d'uns objectes determinats (poden servir unes monedes), sabent que s'arriba a l'equilibri dels platets de la balança en la següent situació:



En el cas que no sabessin què fer, se'ls pot preguntar si seria més fàcil el problema en el supòsit que totes les monedes estiguessin en el mateix platet, i a l'altre platet només hi hagués pesos, i en cas afirmatiu proposar-los de fer algun tipus de manipulació que no desequilibrés els platets de la balança, i que permeti passar de la primera situació a la segona.

Què es pot fer perquè en un platet només hi quedin pesos?
Treure dues monedes de cada platet.
Contingut actual dels platets en equilibri:

3 monedes + 130 grams equilibra 160 grams

Què es pot fer perquè al primer només hi quedin monedes?
Treure 130 grams de cada platet.

Després d'aquestes manipulacions (operacions) ja arribem a una situació més simplificada, que ens diu que 3 monedes pesen 30 grams, i que en conseqüència cada moneda pesa 10 grams.

A continuació se'ls pot dir que esquematitzin les operacions fetes d'una forma abreujada, indicant en cada pas el que s'ha fet:

5 moned. + 130 grs. = 2 moned. + 160 grs. (Traiem 2 monedes a cada platet)

3 moned. + 130 grs. = 160 grs. (Traiem 130 grs. de cada platet)

3 moned. = 30 grs. (Agafant la tercera part del contingut dels platets)

1 moned. = 10 grs.

A continuació se'ls pot preguntar què farien per tal d'esbrinar si la solució trobada és correcta, a fi de suscitar en ells la conveniència de la comprovació. La substitució de cada moneda per un pes de 10 grams hauria de conservar l'equilibri de la balança en la situació inicial plantejada.

Després d'assajar la mateixa experiència amb objectes i situacions diferents se'ls pot dir que resumeixin les diferents regles que intervenen a resoldre tots els casos plantejats. Se'ls pot fer adonar que és equivalent posar 10 grams en un platet, que treure 10 grams de l'altre, etc...

Se'ns objectarà, potser, que aquesta forma tan lenta d'introduir la resolució d'equacions requereix molt més temps que el que s'inverteix a explicitar directament les regles per a desembarassar una incògnita d'una equació. I això és cert, però no és menys cert que la simple exposició de les regles formals no assegura la bona pràctica de les regles en qüestió, sobretot quan aquestes operen amb entitats abstractes, com ho són les potències de la incògnita simbolitzades. Les qüestions tractades fins aquí tenen la finalitat de familiaritzar els alumnes amb unes operacions i mecàniques concretes, que actuen sobre entitats no abstractes, i que més endavant esdevindran regles algebraïques per a la resolució d'equacions, sota la forma de llenguatge algebraic.

Pensem que aquesta lentitud en la introducció ve llargament compensada si facilita una més adequada comprensió del funcionament del llenguatge algebraic, sobretot quan aquest esdevé, a partir d'un determinat moment, una eina de primera magnitud per a la matematització de molts problemes i per a la seva resolució.

El proper estadi de problemes correspondria ja a aquells més íntimament lligats al llenguatge d'equacions. Per exemple:

"Trobar un nombre tal que el seu doble menys la seva meitat sigui igual a 10 més aquest nombre".

Les pautes de resolució s'assemblarien al següent esquema:

$$2 \text{ Nombres} - \frac{1}{2} \text{ del Nombre} = 10 + \text{Nombre}$$

$$\frac{3}{2} \text{ del Nombre} = 10 + \text{Nombre}$$

$$\frac{1}{2} \text{ del Nombre} = 10 \text{ . El Nombre és } 20$$

En aquesta fase es tracta de provocar en l'alumne l'ús d'una mena de síncope, que l'ajudin a visualitzar les operacions successives que cal fer per tal d'arribar a trobar el nombre desconegut.

Les regles que han de quedar clares, per tal d'anar transformant l'equació inicial en altres que facilitin la resolució, s'han d'explicitar després d'haver resolt algunes equacions seguint la intuïció del alumne.

La introducció de l'ús d'una lletra o més per a designar una o més incògnites

És després d'haver resolt molts problemes de planteig, primer mitjançant raonaments de tipus aritmètic, i més endavant a partir de plantejar correctament equacions on la incògnita ve expressada en forma de síncope, que l'alumne estarà en condicions d'assimilar que es pot fer el mateix substituint la síncope de la incògnita per una lletra qualsevol.

Creiem que una manera vàlida per a introduir l'ús de la lletra en substitució de la incògnita és la plantejada per Puig Adam, segons mètodes heurístics. Resumim la idea de Puig Adam:

El professor pot començar la classe proposant un joc d'endevinalla, per al qual és necessària la col·laboració d'uns quants equips, formats cada un d'ells per tres alumnes. Aleshores es diu que cada un dels alumnes que ocupen el lloc primer de cada equip inventin un nombre d'un dígit i que l'escriguin en un paper. Se'ls diu a continuació que el dupliquin i el passin a un altre company de l'equip, companys que sumaran 5 al nombre que els han passat i després multiplicaran el resultat per 5, i passaran el resultat obtingut al tercer membre de l'equip. Aquests inventaran un altre nombre d'un dígit i el sumaran al resultat que els han passat. El professor demanarà a cada equip quin nombre final ha obtingut, i immediatament els dirà el nombre que han inventat el primer i tercer membre de cada equip. La pregunta que quedarà a l'aire serà: com el professor podia endevinar els nombres inventats? qüestió que serà tema de reflexió i discussió per a la resta de la classe. Després de deixar un temps suficient perquè els alumnes puguin buscar la solució de l'endevinalla, el professor pot resumir les operacions efectuades per cada equip de la següent manera:

Hi ha dos nombres a endevinar: Nombre(1); Nombre(2)

Esquema d'operacions efectuades pels equips:

Alumne (1)

Alumne (2)

Alumne (3)

Nombre (1)

2 vegades
el Nombre (1) $\xrightarrow{\text{li passa}}$ $2 \cdot \text{Nombre (1)}$
 $2 \cdot \text{Nombre (1)} + 5$
 $2 \cdot \text{Nombre (1)} + 5 \text{ per } 5$

10 vegades $\text{Nombre (1)} + 25 \xrightarrow{\text{li passa}} 10 \text{ Nombre (1)} + 25$

$$10 \text{ Nombre (1)} + 25 + \text{Nombre (2)}$$

Si el Nombre(1) li diem A, i al Nombre(2) li diem B, resulta que el nombre final que cada equip ha donat al professor és: $10A + B + 25 = AB + 25$. Així doncs, el professor sols ha de restar del nombre que li han passat la quantitat de 25, i, si obté 47, els dos nombres inventats són el 4 i el 7.

Aquesta pot ser una manera molt suggestiva per a iniciar els alumnes en l'ús de les lletres per a representar incògnites, cosa que es convertirà en l'últim pas decisiu per a treballar plenament amb les tècniques pròpies de l'àlgebra simbòlica.

Una altra forma, no excloent, d'introduir els alumnes en l'ús de les lletres per a representar nombres concrets, és la corresponent a la forma natural d'abreujar un mot quan aquest apareix amb molta freqüència en el mateix context. Funció aquesta, taquigràfica, que adquireix ocasionalment caràcter operatiu, com es posa de manifest clarament en la cadena següent: "3 vegades el Nombre"

"3 vegades N"

"3 per N"

"3N"

Un cop introduït el simbolisme específic per a designar un nombre desconegut, la incògnita, a partir d'una lletra qualsevol, ja és fàcil plantejar les equacions de la forma més simplificada possible. D'aquesta nova forma es poden resoldre uns quants problemes més de planteig, o bé anar directament a la resolució d'equacions. Al final de tot aquest procés es pot proposar als alumnes que resumeixin les regles que han d'aplicar, de forma ordenada, per tal de resoldre una equació de primer grau qualsevol. Així, al final del tema, apareixerà de forma resumida la teoria del mateix, extreta pels propis alumnes. En definitiva, s'acabarà per posar de manifest, després d'una pràctica dilatada, allò que els àrabs van extreure com a conclusió sota el nom de regles del cheber i almucàbala.

Resum i conclusió per al tractament de les equacions de primer grau

La bona assimilació del tractament de les equacions de primer grau correspondrà, fonamentalment, a la comprensió del llenguatge algebraic com a traducció de les expressions retòriques que intervenen en l'enunciat del problema, i al mateix temps a la manipulació d'aquest llenguatge fins arribar a la seva expressió més simplificada $Ax = B$. Seria del tot inútil intentar ensenyar les regles per a la resolució de les equacions de primer grau si

abans no s'han entès moltes d'aquestes regles aplicades a l'estricta camp numèric dels problemes de càlcul (funcionament del parèntesi, regles dels signes quan hi ha productes, prioritats, en absència de parèntesi, d'efectuar els productes i divisions abans que les sumes i restes,...).

Un esquema que pot servir com a guia per a la resolució d'equacions de primer grau, i que posa en relleu les operacions fonamentals que hi intervenen, pot ser el següent:

Problema de planteig (per exemple el ja esmentat de la llança):

"Una llança està, la meitat, clavada en el fang, un terç de la resta està en l'aigua, i sobresurt de l'aigua 20 cm. Quina és la longitud de la llança?"

Forma de procedir:

Quina és la incògnita? La longitud de la llança, que simbolitzarem per la lletra x .

Quina relació hi ha entre la incògnita i les dades conegudes, proporcionades per l'enunciat del problema?

La meitat de la llança està clavada en el fang, és a dir $1/2$ de x està dins del fang. Un terç de la resta està dins de l'aigua. Quant és $1/3$ de la resta? La resta és $x - 1/2x = 1/2x$.

$1/3$ d' $1/2$ de x és $1/6$ de x . Així doncs, $1/6$ de x està dins l'aigua. Ens diuen que sobresurt de l'aigua 20 cm. Quina part de la llança sobresurt de l'aigua?: $x - 1/2x - 1/6x$, que ha de valer 20 cm.

Quina és, doncs, la relació entre la incògnita i les dades?

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x = 20. \text{ Igualtat expressada en cm.}$$

Aquesta pràctica matemàtica correspon a la traducció de l'enunciat en llenguatge d'equacions, i estableix la relació entre la incògnita i les dades. És la primera operació intel·lectual a fer.

La segona operació consistirà a simplificar al màxim l'equació, i aquesta serà transformada a partir de les regles que regeixen el llenguatge algebraic (que no són més que les regles que seguiria el nostre pensament si raonéssim el problema de forma retòrica).

Resolució de l'equació:

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x = 20$$

Sumes i restes de les parts afectades per la incògnita, segons s'efectuen les operacions entre trencats

$$\frac{6x}{6} - \frac{3}{6}x - \frac{1}{6}x = 20$$
$$\frac{2}{6}x = 20$$

Equació simplificada

$$\frac{1}{3}x = 20$$

Desembarasament de la incògnita

$$x = 60 \text{ cm.}$$

La discussió de les equacions de primer grau, segons les solucions que tinguin

Al tractament de les equacions presentades fins ara s'admetia tàcitament que sempre hi havia una solució; i només una. Això vol dir que, d'una o altra forma, en la subconsciència de qui apren s'ha format la idea que tota equació de primer grau admet exactament una solució, la qual cosa serà certa sempre i quan arribem a una equació simplificada del tipus $Ax = B$, on $A \neq 0$. Però no sempre ocurrirà això, en partir de qualsevol equació de primer grau.

Es pot exposar aquest fet directament als alumnes, acompanyat d'exemples que posin de manifest les diferents possibilitats que es poden presentar. Encara que és millor enfocar-ho de tal manera que siguin els propis alumnes que descobreixen aquest fet. Així, per exemple, es pot recórrer la coneguda endevinalla que diu:

"Inventeu un nombre qualsevol i escriviu-lo a la llibreta; dupliqueu aquest nombre. Sumeu-li 6 unitats. Multipliqueu el resultat per 5. Al nombre que heu obtingut resteu-li el nombre que heu inventat al principi després d'haver-li afegit un zero (a la dreta, naturalment). Doncs bé, ara us diré el nombre final que us queda: 30". Pregunta, per què estic en condicions d'endevinar el nombre que tots heu obtingut? Estic segur que vosaltres també podríeu fer el mateix a qualsevol amic, per poc que us poseu a pensar en el fons de la qüestió. Us suggereixo que escriviu en llenguatge algebraic les operacions que us he anat dictant després d'haver inventat el nombre.

x = Nombre inventat per cadascú

1ª operació: duplicar-lo $2x$

2ª operació: sumar-li 6 $2x + 6$

3ª operació: multiplicar-ho tot per 5 $10x + 30$

4ª operació: restar-li el nombre inventat després d'afegir-li un zero. Què vol dir afegir un zero a la dreta? És equivalent a multiplicar per 10.

Així doncs, el nombre final que queda és $10x + 30 - 10x$, que invariablement val 30, sigui quin sigui el valor que li donem a x . És a dir, que si ens plantejem resoldre l'equació: $10x + 30 - 10x = 30$ trobarem que qualsevol valor que donem a x serà una solució. Si no ens adonéssim d'aquest fet i intentéssim de resoldre l'equació a partir de simplificar-la al màxim, arribaríem a l'equació "estranya": $0 = 0$, que òbviament es verifica per a qualsevol valor concret que assignem a la x , (ja que la igualtat és independent del valor de x). És per això que el valor final de 30 no depenia del valor de x que cadascú s'havia inventat. Us proposo a continuació que us inventeu un enunciat similar a l'anterior, però amb instruccions diferents...

Per últim, cal preguntar-se si hi cap la possibilitat que hi hagi determinades equacions que no tinguin cap solució. Es pot proposar als alumnes que modifiquin lleugerament l'equació del darrer problema (que tenia infinites solucions): $10x + 30 - 10x = 30$ per tal que l'equació modificada no tingui ara cap solució. Quina era la causa que l'equació tingués infinites solucions? El fet que el primer membre sempre valgués 30, fos quin fos el valor assignat a x . Així doncs, si el segon membre fem que valgui qualsevol valor distint de 30, llavors no hi haurà cap valor de x que la verifiqui. Aquests tipus d'equacions de primer grau que no tenen cap solució, a quin tipus d'equació simplificada condueixen?: $0 = B$ amb $B \neq 0$.

Per últim, com sempre, es proposa als alumnes de fer un quadre resumit de les diferents possibilitats de resolució per a les equacions de primer grau, expressant en cada cas quin és el tipus d'equació reduïda a què condueix l'equació inicial.

$Ax = B$	$\left\{ \begin{array}{l} A \neq 0 \\ A = 0 \end{array} \right.$	$A \neq 0$	Solució única, que és B/A
		$\left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ B \neq 0 \end{array} \right.$	$B = 0$ Infinites solucions
			$B \neq 0$ Cap solució

El Tractament de les Equacions de Segon Grau

Un punt de partida per aquest tema el constitueix el llenguatge de les equacions de primer grau tractat anteriorment. El nou pas endavant vindrà ara determinat per un nou tipus d'equacions, on no sols apareix la incògnita (que pot aparèixer o no), sinó que hi intervé, fonamentalment, el quadrat de la incògnita.

Es pot començar el tema sense cap més bagatge que el proporcionat pel llenguatge algebraic de les equacions de primer grau. Així per exemple, es pot proposar als alumnes de resoldre un problema senzill, del tipus:

‘Trobar un nombre que elevat al quadrat i multiplicat per sis, doni 150’.

Les mateixes pautes seguides en la resolució de les equacions de primer grau seran vàlides en aquest cas, encara que es procedeixi primer al desembarassament de la incògnita al quadrat, i posteriorment al de la incògnita.

També es poden tractar al començament altres casos particulars d'equacions incompletes, com:

‘Trobar un nombre tal que resulti el mateix multiplicar-lo per 7 que elevar-lo al quadrat’.

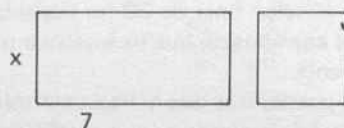
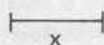
Quina és l'equació que resulta d'aquest enunciat?

$7x = x^2$ Admet aquesta equació una interpretació geomètrica?

x^2 pot interpretar-se com un quadrat de costat x

$7x$ pot interpretar-se com un rectangle de costats 7 i x .

L'equació ens diu que cal cercar el costat x per tal que les àrees coincideixin. Fent un dibuix que esquematitzi aquest fet tindríem:



$$7x = x^2$$

Si les àrees de les dues figures han de coincidir, com que tenen un costat comú: la x , és necessari que l'altre costat també coincideixi, i en conseqüència x ha de ser igual a 7.

Aquesta forma de procedir, traduïda al llenguatge de les equacions, adoptaria aquesta forma:

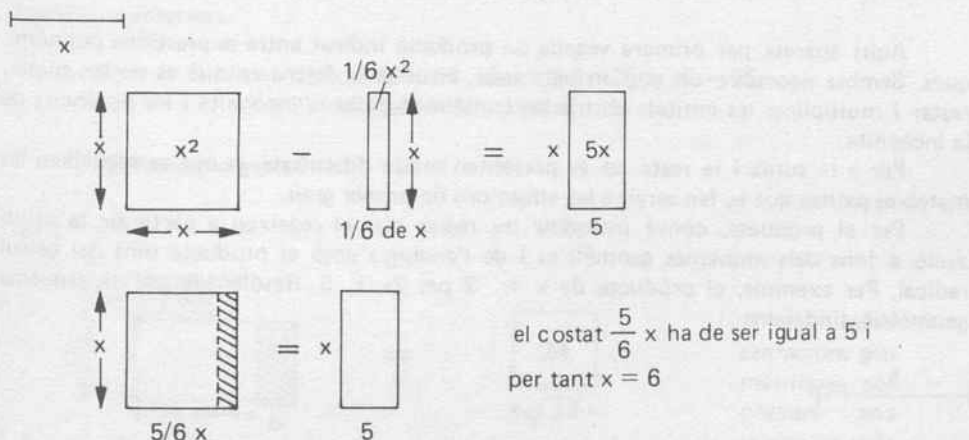
$7x = x^2$. Dividint ambdós membre de l'equació per x , resulta $7 = x$.

És molt probable que, seguint aquest procediment discursiu, els alumnes no s'adonin que $x = 0$ també és una altra solució. De fet, en la resolució de l'equació apareix una operació essencialment diferent a les que apareixien en la resolució de les equacions de primer grau: la divisió dels dos membres per un mateix nombre, en aquest cas la incògnita. I, és clar, convindrà dir per la nostra part (l'alumne rarament s'adona d'aquest fet) que això es podrà fer sempre i quan la incògnita (nombre concret, però desconegut) sigui diferent de zero, en el qual cas la divisió seria impossible de fer. El cas particular de $x = 0$ caldrà examinar-lo a part, i abans de fer la divisió. Aquest ha de ser un element d'insistència per part del professor, perquè en el llenguatge algèbric apareixeran de vegades operacions que modificaran les solucions de l'equació inicial, en el transcurs del procés de simplificació de l'equació (com elevar al quadrat els dos membres d'una equació, dividir per la incògnita,...), i l'alumne difícilment trobarà per ell mateix la modificació de les solucions. Podem provar-ho de fer, però en aquest cas torna a coincidir la psicologia de descobriment del noi amb el procés històric de la resolució d'equacions (el zero no es tracta com a solució fins al cap de molt de temps de resoldre'n).

Es pot continuar proposant problemes amb variacions lleugeres de l'enunciat anterior, problemes que reforcin les bases d'operativitat dins del marc d'equacions. Per exemple:

"Trobar un nombre tal que el seu quadrat menys un sisè d'aquest quadrat sigui igual al nombre multiplicat per 5. Equació: $x^2 - \frac{1}{6}x^2 = 5x$

Representació geomètrica de l'equació:



Traducció de les manipulacions geomètriques al llenguatge de les equacions:

$$x^2 - \frac{1}{6}x^2 = 5x$$

$$\frac{5}{6}x^2 = 5x. \text{ Una solució és } x = 0$$

$$\frac{5}{6}x = 5$$

$$x = \frac{30}{5} = 6. \quad x = 6 \text{ és l'altra solució}$$

Aquí ens hem trobat per primera vegada amb una subtracció (igualment seria una addició) corresponent a parts on intervé la incògnita al quadrat. L'alumne probablement reaccionarà davant del problema de forma correcta, restant les parts en què intervé el quadrat de la incògnita, segons és habitual. En cas contrari, serà suficient proposar-li que esbrini com es resten, ajudant-se d'un petit esquema on es visualitzin els diferents termes en x^2 que es tracta de sumar o restar.

Desenvolupament de l'equació de segon grau completa

Les pàgines que segueixen a continuació tenen un caire més orientatiu que no indicatiu, ja que, encara que hem intentat dibuixar les línies mestres que hauria de seguir el procés d'aprenentatge per a les equacions de segon grau, la manca d'experimentació concreta ens impossibilita de tenir més precisió en el tractament del tema.

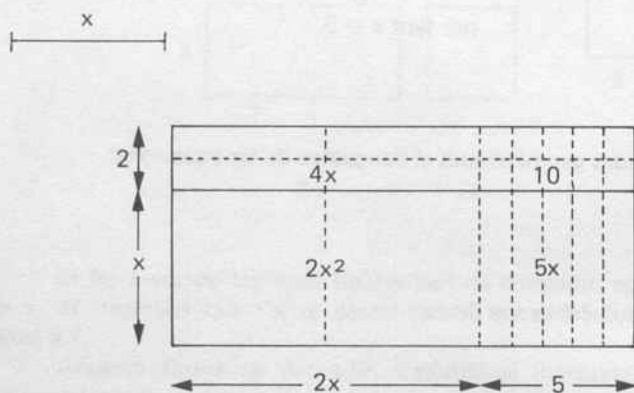
Un nou tipus de problemes són aquells en què apareixen productes d'expressions polinòmiques. Considerem per exemple el problema de trobar un nombre que, en sumar-li 5 i restar-li 5, el producte dels dos nombres obtinguts sigui igual a 24. Problema equivalent a resoldre l'equació:

$$(x + 5)(x - 5) = 24$$

Aquí apareix per primera vegada un producte indicat entre expressions polinòmiques. Sembla necessari, un cop arribats aquí, estudiar la forma en què es poden sumar, restar i multiplicar les entitats abstractes constituïdes per la incògnita i les potències de la incògnita.

Per a la suma i la resta no es presenten massa dificultats, ja que se segueixen les mateixes pautes que es fan servir a les equacions de primer grau.

Per al producte, convé introduir les regles que el regeixen a partir de la utilització a fons dels esquemes geomètrics i de l'analogia amb el producte dins del càlcul radical. Per exemple, el producte de $x + 2$ per $2x + 5$. Resolent-lo per un esquema geomètric, tindríem:



Ara n'hi haurà prou de preguntar als alumnes d'on provenen les quatre parts que integren el rectangle gran que esquematitza el producte total, i això ens indicarà la forma d'efectuar el producte, sense passar per l'esquema geomètric.

$$(x + 2)(2x + 5) = 2x^2 + 5x + 4x + 10 = 2x^2 + 9x + 10$$

Per a les potències superiors a 3, que no admeten una representació geomètrica, convindrà fer ús de les propietats del càlcul de potències en el camp de l'aritmètica.

$$7 \cdot 3^2 \cdot 6.3 = 42.3^3$$

$$7 \cdot 5^2 \cdot 6.5 = 42.5^3$$

$$7 \cdot x^2 \cdot 6x = 42x^3$$

.....

També es procedirà a esbrinar les regles del signe, que seguiran conservant la mateixa forma de procedir que en el càlcul radical:

més per més igual a més

més per menys igual a menys

menys per més igual a menys

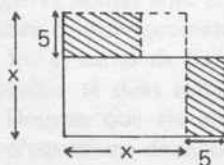
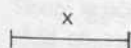
menys per menys igual a més.

Havent fet aquesta incursió pel terreny de les regles que regeixen el càlcul entre polinomis, ja serà més fàcil la resolució de l'equació que ens ha portat a fer les consideracions anteriors.

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5x + 5x - 25 = x^2 - 25$$

$$x^2 - 25 = 24; x^2 = 49; x = \pm 7$$

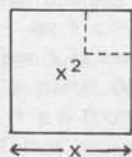
O bé, de forma geomètrica:



=

$$\boxed{24}$$

$$\leftarrow \sqrt{24} \rightarrow$$



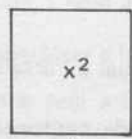
x^2

-

$\boxed{25}$

=

$$\boxed{24}$$



x^2

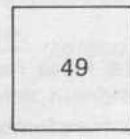
=

$$\boxed{24}$$

+

$\boxed{25}$

=



49

7

$$\boxed{x = 7}$$

A les representacions geomètriques sols podran aparèixer les solucions positives de l'equació

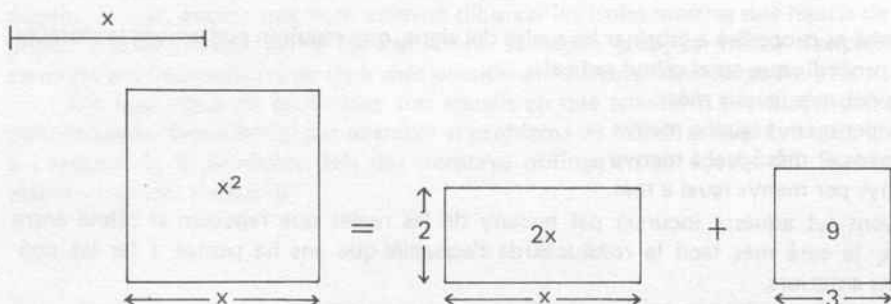
La simplificació de les equacions de segon grau tindrà lloc de la mateixa forma que es feia a les equacions de primer grau, fins arribar a una equació on no hi hagi, als dos membres simultàniament, una mateixa entitat del tipus (a, bx, cx^2) .

Es pot plantejar, per exemple, simplificar al màxim l'equació:

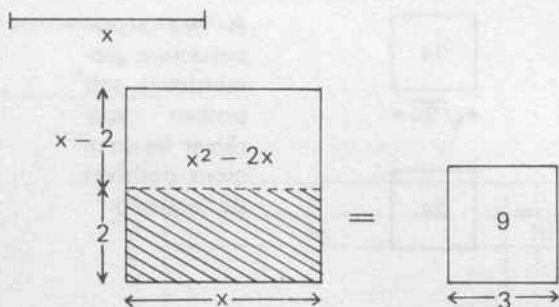
$$\begin{aligned} 9x^2 + 2x + 4 &= 3x^2 + 8x + 3x^2 + 31 \\ 9x^2 + 2x + 4 &= 6x^2 + 8x + 31 && \text{(Traient } 6x^2 + 2x + 4 \text{ dels dos membres)} \\ 3x^2 &= 6x + 27, && \text{i encara dividint per 3 els dos membres} \end{aligned}$$

$$x^2 = 2x + 9$$

Si ara ens plantegem de resoldre l'equació, podríem començar per fer-ne una representació geomètrica, interpretant tots els termes com a àrees:



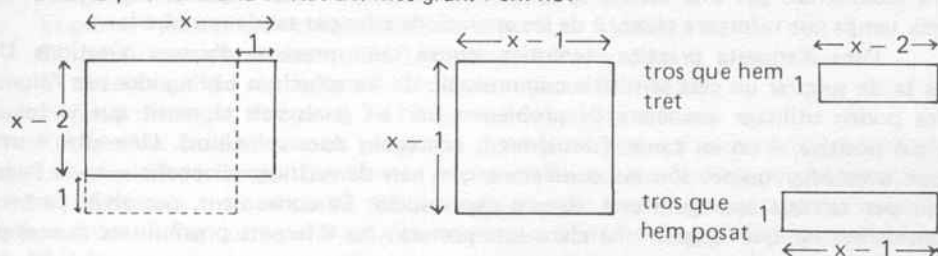
Naturalment que si posem una quantitat qualsevol per a la longitud x , la igualtat probablement no es verificarà. Per exemple si a x li donem el valor 5, tindríem per una banda 25 i per l'altra 10 més 9. Es tracta de fer transformacions geomètriques per tal de comparar les àrees de les figures, i deduir el valor de x . De les 3 figures que tenim, x^2 , $2x$, i 9. N'hi han dues de comparables, en el sentit de tenir almenys un costat igual? Sí, les de x^2 i $2x$, que tenen un costat igual a x . Així doncs, podem sostreure de cada costat l'àrea de $2x$, quedant:



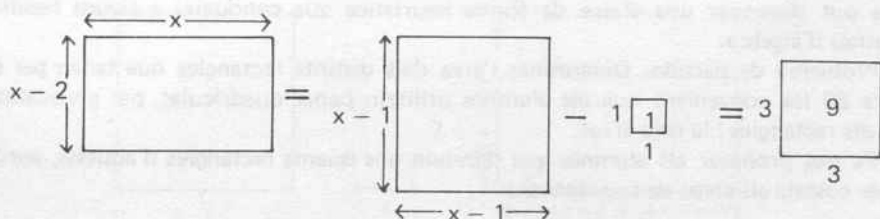
Ara tenim que l'àrea rectangular x per $x - 2$ ha de ser igual a l'àrea quadrada 3 per 3.

Si volguéssim transformar el rectangle en quadrat, a base de perllongar el costat més curt i escurçar el més llarg en una mateixa quantitat, quina hauria de ser aquesta?

Com que la diferència entre els dos costats és 2, n'hi hauria prou d'allargar el més petit una unitat, i treure una unitat del més gran. Fem-ho:



Així doncs, perquè el quadrat sigui d'igual àrea que el rectangle, és necessari treure del quadrat de costat $x - 1$ l'àrea quadrada d'1 per 1. I la igualtat d'àrees anterior ens queda:



Ara ja es fàcil de veure que l'àrea del quadrat de costat $x - 1$ ha de ser igual a 10, i que per tant el costat $x - 1$ ha de valer arrel quadrada de 10, i que la x ha de ser 1 més l'arrel quadrada de 10.

Es pot dir als alumnes que facin al mateix en dos casos més molt semblants a l'anterior, canviant tan sols els coeficients, i preguntar-los si podrien extreure una regla a seguir que operés només amb els coeficients, sense necessitat de fer cada vegada aquestes manipulacions de caire geomètric.

En el camp de l'aritmètica se'ls pot fer observar que l'arrel quadrada d'un nombre positiu té dues solucions, i que per tant s'obtinrien dos valors finals per a la x .

Després que els alumnes hagin extret una regla retòrica per tal de resoldre els casos d'equacions de segon grau: $x^2 + bx = c$ i $x^2 - bx = c$, on b i c són positius, se'ls pot dir que construccions geomètriques similars permetrien de resoldre els casos concrets que falten: $x^2 + bx + c = 0$ i $x^2 - bx + c = 0$, però que no val la pena de fer-ho perquè hi ha una regla per a la resolució que engloba tots aquests distints casos. Aquesta regla està enunciacada a partir de considerar l'equació de segon grau sota la forma simplificada: $ax^2 + bx + c = 0$ on a, b, c poden ser positius o negatius. L'enunciat de la regla se'ls pot donar de forma retòrica, i no sota l'aspecte de fórmula, que vindria després d'hàver-la assimilada bé, i com a forma simplificada de dir el mateix, però escrivint menys. La idea

de no fer aparèixer a la pissarra la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ coneguda, és per tal d'evitar que l'alumne vegi a les lletres a, b, c un sentit d'ordre dels nombres que intervenen en l'equació, en lloc de veure el sentit que realment tenen, com a coeficients respectius de la incògnita al quadrat, la incògnita i el terme independent.

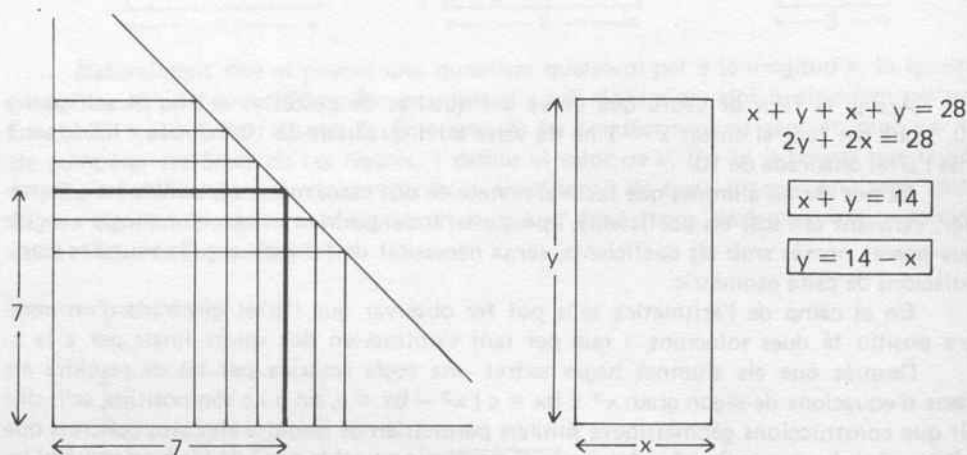
La pràctica continuada de resolució d'equacions de segon grau serà la que permetrà sedimentar, per una banda, la forma de treballar en un llenguatge algebraic, al mateix temps que reforçarà el sentit de les operacions a fer per tal de resoldre-la.

Dins d'aquesta pràctica resolutiva, convé tenir presents diverses qüestions. Una és la de suscitar un cert sentit de comprovació de les solucions obtingudes per l'alumne (es poden utilitzar enunciats de problemes per als quals sols té sentit que la solució sigui positiva, i on en canvi, formalment, apareguin dues solucions). Una altra correspon a estudiar quines són les condicions que han de verificar els coeficients de l'equació per tal que apareguin una, dues o cap solució. És convenient, per això, partir de problemes en què tinguin una clara interpretació les diferents possibilitats que es poden plantejar, com per exemple: Trobar els costats d'un rectangle de perímetre 28, que tingui d'àrea 45, 30, 49, 60. Si se'ls fa dibuixar uns quants rectangles d'aquests és fàcil que, abans de resoldre el problema per equacions, ja sàpiguen en quins casos l'equació tindrà una, dues o cap solució, i el perquè d'això.

Partint de l'estudi concret de les àrees dels rectangles que tenen igual perímetre, es pot dissenyar una classe de forma heurística que condueixi a alguns resultats elementals d'àlgebra:

Problema de partida: Determinar l'àrea dels distints rectangles que tenen per perímetre 28 (és convenient que els alumnes utilitzin paper quadriculat, per a visualitzar millor els rectangles i la seva àrea).

Es pot proposar als alumnes que dibuixin uns quants rectangles d'aquests, aprofitant per costats els eixos de coordenades.



A continuació se'ls pot plantejar que facin una taula de valors on quedi reflectida la longitud dels costats i l'àrea corresponent:

x	y	Àrea
7	7	49
6	8	48
5	9	45
4	10	40
3	11	33

Conjectures:

A) L'àrea màxima sembla que s'obté quan els dos costats són iguals (cas del quadrat).

B) Sembla que, com més gran és la diferència entre els dos costats, més petita és l'àrea.

Podem intentar d'estudiar la conjectura B) de forma quantitativa, i veure en quines quantitats disminueix l'àrea a partir de la del quadrat 7×7 .

El primer rectangle, de costats 6 i 8, disminueix en 1 unitat.

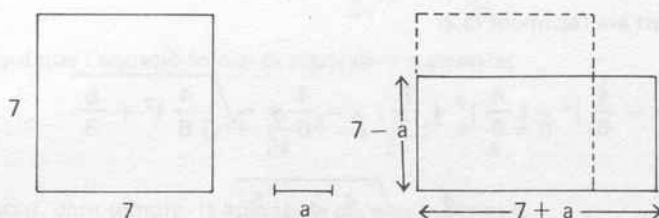
El segon rectangle, de costats 5 i 9, disminueix en 4 unitats.

El tercer rectangle, de costats 4 i 10, disminueix en 9 unitats.

El quart rectangle, de costats 3 i 11 disminueix, en 16 unitats.

Tot sembla indicar que, en passar del quadrat de costat 7 a un rectangle dels anteriors, l'àrea del rectangle disminueix, respecte a la del quadrat, en la quantitat que indica la diferència entre el costat del quadrat i un dels costats del rectangle, elevada al quadrat. Així sembla que 5 per 9 sigui al mateix que 7 per 7 menys el resultat de 7 menys 5 al quadrat.

Intentem de provar la conjectura. Formarem, a partir del quadrat inicial de costat 7, un rectangle, afegint una certa quantitat a un costat i traient-la de l'altre.



Àrea del nou rectangle: $(7 + a)(7 - a) = 49 - a^2$

Això provaria definitivament les dues conjectures A i B.

D'aquí podríem deduir que, per a multiplicar dues quantitats qualssevol, podríem fer-ho determinant el quadrat de la semisuma aritmètica de les dues quantitats i restant-li el quadrat de la seva semidiferència. És a dir, en forma d'expressió abreujada:

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2} \right)^2$$

La identitat algebraica anterior pot ser útil com a eina que ens ajudi a resoldre equacions de segon grau completes. En efecte, recordem que una equació de segon grau sempre és susceptible d'interpretar-se com una igualtat d'àrees, de les quals una és un quadrat i l'altra (en què intervé la incògnita) correspon a un rectangle, del qual, com hem vist, podem referir la seva àrea en termes d'una diferència de quadrats.

En efecte, exposem un exemple qualsevol:

Resoldre l'equació $3x^2 - 4x = 5$. Equivalent a $x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{5}{3}$

Si construïssim el quadrat de costat x , i li extraguéssim el rectangle de costat x i $4/3$, ens quedaria un rectangle de costats x i $x - 4/3$. De fet, la resta geomètrica és equivalent a l'extracció de factor comú x al primer membre de l'equació:

$$x(x - \frac{4}{3}) = \frac{5}{3}$$

El producte del nombre x pel nombre $x - \frac{4}{3}$ és, com hem vist abans, el quadrat de la seva semisuma menys el quadrat de la seva semidiferència, és a dir:

$$\text{Semisuma: } \frac{x + x - \frac{4}{3}}{2} = x - \frac{4}{6}$$

$$\text{Semidiferència: } \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6}$$

$$x \left(x - \frac{4}{3} \right) = \left(x - \frac{4}{6} \right)^2 - \left(\frac{4}{6} \right)^2 = \frac{5}{3}$$

d'on, desembarassant ara fàcilment la x :

$$\left(x - \frac{4}{6} \right)^2 = \left(\frac{4}{6} \right)^2 + \frac{5}{3}; \quad x - \frac{4}{6} = \pm \sqrt{\left(\frac{4}{6} \right)^2 + \frac{5}{3}}$$

$$x = \frac{4}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{6} \right)^2 + \frac{5}{3}}$$

Si haguéssim treballat amb coeficients literals, hauríem obtingut la coneguda fórmula per a la resolució de les equacions de segon grau.

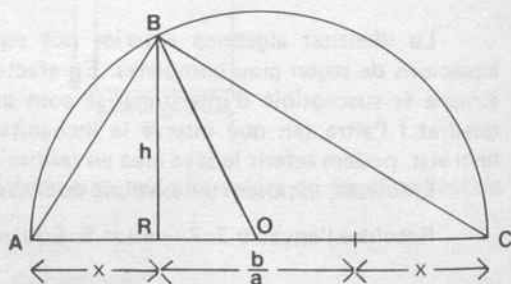
Encara exposarem una última forma d'obtenir la fórmula de resolució de les equacions de segon grau, ajudant-nos d'una construcció geomètrica en què intervé el Teorema de l'altura.

Farem en aquest cas, per abreviar, l'exposició dels càlculs en forma literal.

$$\text{Equació: } ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x \left(x + \frac{b}{a} \right) + \frac{c}{a} = 0$$



El producte de les longituds x i $x + \frac{b}{a}$ serà el quadrat de l'altura h , al triangle rectangle ABC, on B pertany a la circumferència de radi OA, que té de longitud: $x + \frac{b}{2a}$.

Aquest fet, que expressa el Teorema de les altures, sorgeix de la proporcionalitat entre els catets dels dos triangles semblants ARB i RBC.*

$$x \left(x + \frac{b}{a} \right) = h^2$$

Ara bé, com que h és un catet del triangle rectangle BRO, pel Teorema de Pitàgores tindrem que:

$$h^2 = BO^2 - RO^2$$

I com que BO és el radi de la circumferència que amida $x + \frac{b}{2a}$ tindrem que:

$$h^2 = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2$$

O sigui que l'equació inicial és equivalent a aquesta:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

I d'aquí, com sempre, ja apareix la coneguda fórmula.

La inclusió d'algunes diferents possibilitats d'obtenció de la regla general per a resoldre l'equació de segon grau no ha estat feta pensant que qualsevol d'elles pot ser didàcticament encertada. És més, és molt possible que cap d'elles no sigui recomanable i prou convincent. Dependrà en molts casos del tarannà de la classe, la forma d'escollir el camí més convenient per a *aproximar-nos* a la resolució de les equacions de segon grau. La nostra opinió és que no és gaire important *demonstrar la fórmula*, demostració que al cap i a la fi acabarà en el racó dels oblidats. El que és realment essencial en tot això és que els alumnes es vagin aproximant paulatinament als recursos algebriacs i al llenguatge de l'àlgebra, que aprenguin a discernir i a discórrer entre la varietat de problemes resolubles, a partir del bon ús d'un llenguatge unificat. La validesa d'una regla de resolució vindrà molt més donada pel seu *bon funcionament* als problemes i a la trobada de solucions coherents amb l'enunciat del problema, que no pas per la convicció que pugui despertar una demostració lògica en un moment determinat.

* Aquest procediment es basa en la manera que els grecs quadraven àrees rectangulars de costats a i b , a partir de cercar una magnitud x que fos mitja proporcional (geomètrica) d' a i b [mai millor emprada la paraula *geomètrica*!]. Aquesta forma de procedir permetia resoldre el problema de "donat un quadrat, trobar un altre d'àrea doble", sense més manipulació que la que resulta d'utilitzar el regle i el compàs. Aquest problema tant senzill, pot ser inspirat el famós problema del *Oracle de Delfos* "donat un cub trobar-ne un altre de volum doble". Com se sap, aquest problema ja no és resoluble amb sols el regle i el compàs, i és equivalent a "donades dues magnituds a i b , intercalar altres dues x i y , tals que formin mitja proporcional amb a i b ". Aquest famós problema conduí als grecs a interessar-se per l'estudi de les seccions còniques, que resolien geomètricament el problema de trobar x i y , mitjes proporcionals d' a i b . El lector interessat a la qüestió trobarà un estudi aprofundit d'aquest problema i les seves conseqüències matemàtiques, al volum II d'aquest llibre, actualment en elaboració.

Per últim, insistirem en un fet de capital importància: l'èxit en l'adquisició del llenguatge algèbric i les seves tècniques dependrà en gran mesura del contingut semàntic que haguem estat capaços de donar a les entitats abstractes i simbòliques que hi intervenen. L'assimilació del llenguatge algèbric i de les seves tècniques ha de ser forçosament lenta, i tota precipitació en aquest camí d'aproximacions successives pot deixar incrustats en els alumnes vicis o defectes d'operativitat que després serà molt difícil de corregir. La sistematització i formalització final d'aquesta àlgebra elemental sols s'hauria de donar quan ja s'han comprès molt bé tots els mecanismes i operacions concretes que hi intervenen, a força de traduir molts fets i relacions al camp de les magnituds geomètriques. En aquest tema, més que en cap altre, la pregunta que sovint no fan els nois: i això, per què?, l'hauria de fer el professor, a fi que cap operació algèbrica no quedi buida de significat i relegada al camp dels automatismes inexplicables.

CAPÍTOL 19:

LES FÓRMULES DE LA COMBINATÒRIA

La Combinatòria és un dels temes més peculiars de 1er de BUP. Les seves fórmules seran, possiblement, les més conegudes i memoritzades de tot el curs, sent, al mateix temps, les que menys rendeixen quan cal aplicar-les a la resolució de problemes concrets. Enfront d'elles, cada classe o grup d'alumnes es divideix en dos conjunts perfectament diferenciats, sovint dissimètrics. El minoritari entén des del primer moment de què va el *rollo*, i els problemes d'aplicació directa de les fórmules li resulten trivials i els resol instantàniament. El majoritari, en canvi, mai no arriba a entendre per quin misteriós caprici cal distingir les permutacions de les combinacions o de les variacions; la capacitat d'aprenentatge d'aquests alumnes sembla quasi nul·la, i romanen bloquejats davant dels problemes més senzills, sense poder dir altra cosa que "no sabem si el problema és de combinacions o és de variacions".

El problema bàsic, aquí, és la *capacitat combinatòria*, entesa com la capacitat per a *construir metòdicament* les diferents possibilitats (combinacions, variacions, etc.) que apareixen en el problema que es té a les mans. Fer-ho *metòdicament* vol dir fer-ho de manera que hom acaba el procés amb la seguretat que cap possibilitat no ha estat oblidada. Quan parlem de *construir* ens estem referint o bé a una construcció real, manipulativa, de les combinacions, variacions, etc., que deriven d'un petit nombre d'elements a combinar, o bé a una reconstrucció virtual, lògica, del procés que proporcionaria la totalitat de combinacions, variacions, etc., quan aquestes formen conjunts nombrosos. La descripció del mètode concret que vam utilitzar en una sèrie de classes per a introduir alguns conceptes i fórmules combinatoris potser permetrà entendre millor com concebem nosaltres els problemes didàctics reals que cal plantejar-se en aquest tema singular.

Les permutacions. La introducció de $n!$

Escrivim a la pissarra les quatre lletres A B C D, i preguntem als alumnes de quantes maneres diferents es poden ordenar. Com que els nombres que donen són clarament aleatoris, exigim que els justifiquin amb algun raonament o, si més no, amb una compro-

vació empírica. Comencem a escriure a la pissarra les ordenacions que dicten. A ningú no se li acut de procedir sistemàticament. Alguns nombres els són particularment simpàtics, el 16, el 20, el 22, i s'hi deturen. Però, sempre, algun d'ells troba una nova ordenació. Amb les 24 permutacions desordenament escrites a la pissarra, preguntem *per què ara estan segurs que hi són totes i que ja no se n'obliden cap* (com se n'oblidaven en aturarse a 20. La resposta que anem buscant és del tipus "que comencin (o acabin) amb A només h'hi ha 6, i el mateix passa per la B, la C i la D". És la possibilitat de procedir així, sistemàticament, (procedir realment o concebre la possibilitat de procedir intel·lectualment així) allò que permet distingir distintament el mecanisme de formació de *totes* les permutacions, i, en particular, *el mecanisme de formació d'una* permutació. El que cal potenciar, en ensenyar Combinatòria, és precisament aquesta actuació metòdica que permet imaginar, correctament, les 120, ó 720,... permutacions de 5, ó 6,... lletres, és a dir, totes les possibilitats de cada problema en qüestió. Subratllem, però, que cap alumne no va *entendre* la nostra pregunta.

A continuació, vam escriure a la pissarra les 5 lletres A B C D E, i els preguntàrem quantes ordenacions existeixen d'aquestes 5 lletres. Respongueren, com abans, nombres més o menys a l'atzar: 48, 60, sense que ningú no s'enfilés per damunt del 100. En aquest moment vam intervenir per introduir la idea de *mètode*: "Quantes començaran per A? I per B?". Els millors de la classe van respondre, ràpidament, que n'hi ha tantes que comencin per A com n'hi ha que comencin per B (encara que nosaltres no els havíem preguntat això). Sense insistir massa en la justificació d'aquest punt, vam preguntar quin era el nombre d'ordenacions que començaven per una lletra fixa. Sense resposta. Preguntem, aleshores, el nombre d'ordenacions que comencen per E (a la pissarra encara estan escrites les ordenacions de ABCD). Sense resposta. Proposem de trobar, escrivint-les una a una, totes les ordenacions que comencen per E. Demanem als alumnes que les vagin dictant, i, sense esborrar res de la pissarra, comencem a escriure.

E A B C D
 — A B D C
 — A C B D
 — A C D B

Quan n'hem escrites 5 ó 6, preguntem "Això no us recorda cap cosa? No sabeu encara quantes comencen per E?". Sense resposta. Fem les mateixes preguntes, amb el mateix resultat, quan hem escrit 8 ó 9 ordenacions més. Finalment, quan anem per les 12 ó 14, es produeix una mena de reacció en cadena, en la qual acaba participant quasi tota la classe; llavors ells mateixos s'admiren de la trivialitat que tant els ha costat descobrir. "Quantes ordenacions existeixen?", "120", responen pràcticament a cor.

Esborrem la pissarra i escrivim ABCDEF. Hi ha un grup que ja ha "vist" l'estructura del problema i respon, després de fer la multiplicació, que 720 és el nombre d'ordenacions que hom pot fer amb aquestes lletres. Per la majoria de la classe, però, la generalització no és tan immediata. Refem, amb 6, el camí fet amb 5 lletres: el nombre de les que comencen amb A és igual al de les que comencen amb B, etc.; a continuació, "Quantes començaran amb F?", etc. Després d'això vam escriure ABCDEFG; el mateix grup d'abans respon, sense vacil·lar, amb el temps just de fer la multiplicació de 7 per 720, 5040. Els altres segueixen, però és evident que l'estructura de la qüestió els queda gran.

Sens dubte, aquest és el moment de fer una parada en el procés de generalització. Cal oferir al grup majoritari l'anàlisi de problemes que no superin el grau d'abstracció

ja assolit. En la classe que transcrivim no ho vam fer així, sinó que vam continuar cap a la noció de $n!$

Una observació interessant que es pot fer a posteriori és que una de les dificultats que els alumnes van haver de vèncer en el procés que ara explicarem fou *la fixació en el nombre concret*. Fins ara, l'alumne ha treballat calculant resultats concrets de les qüestions que li posàvem. A partir d'ara li comencem a demanar que doni respostes *indicades*. Fins que l'alumne no s'adona d'això, el pensament li funciona travat per l'obligació que creu que té de continuar donant nombres concrets. Per això no se li acudirà, quan li preguntem quantes ordenacions pot formar amb 20 lletres, de contestar 20.19.18.17...: això no és un nombre *conegut*! Es pot observar, finalment, que si passem de 7 lletres a 20 lletres, l'alumne es veu obligat, de cop, a raonar sobre hipòtesis en lloc de fer-ho sobre dades concretes. Quan es pregunta pel nombre d'ordenacions de 8 lletres, i és conegut el nombre de les de 7, la resposta és directament calculable. Quan preguntem, de cop, pel nombre de les de 20, cal pensar: suposant que de 19 n'hi hagi N , de 20 n'hi haurà $20N$. Aquestes foren les dificultats amb què vàrem enfrontar els alumnes en preguntar-los directament quantes ordenacions podrien construir amb 20 lletres.

Al grupet que havia seguit bé el desenvolupament fins aleshores se li va acudir que el nombre demanat era 20 pel nombre d'ordenacions de 19 lletres, però es va aturar aquí. Vàrem preguntar, aleshores, pel nombre d'ordenacions de 19 lletres, i vàrem omplir la pissarra així:

$$n^{\circ} \text{ ordenacions } 20 \text{ lletres} = 20 \times n^{\circ} \text{ ordenac. } 19 \text{ lletres}$$

$$n^{\circ} \text{ ordenacions } 19 \text{ lletres} = 19 \times n^{\circ} \text{ ordenac. } 18 \text{ lletres}$$

$$n^{\circ} \text{ ordenacions } 18 \text{ lletres} = 18 \times n^{\circ} \text{ ordenac. } 17 \text{ lletres}$$

Vam arribar a escriure així la igualtat corresponent al nombre d'ordenacions de 5 lletres!

Això, però, encara no els va permetre de donar una resposta sobre el nombre d'ordenacions de 20 lletres. A partir del

$$n^{\circ} \text{ ordenac. de } 5 \text{ lletres} = 5 \times 24$$

vam obtenir, sempre lluitant contra els resultats concrets

$$n^{\circ} \text{ ordenac. de } 6 \text{ lletres} = 6 \times 5 \times 24$$

$$n^{\circ} \text{ ordenac. de } 7 \text{ lletres} = 7 \times 6 \times 5 \times 24$$

A partir del 10 ò l'11, van respondre que el nombre d'ordenacions de 20 lletres seria $20 \times 19 \times 18 \times \dots$ (vam escriure tots els factors). $\times 5 \times 24$.

Aleshores, vam explicitar que el nombre d'ordenacions de 4 lletres sortia 24 perquè $24 = 4 \times 3 \times 2$, i que teníem, per tant, el resultat bonic

$$n^{\circ} \text{ ordenac. de } 20 \text{ lletres} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times \dots (\text{Idem}) \dots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

A partir d'aquí va resultar immediat generalitzar per a un nombre qualsevol de lletres. Els vam demanar, aleshores, que calcuessin els resultats corresponents a 2, 3,..., 12 lletres i que fessin amb ells una taula. Amb ella a les mans, vam comentar que els nombres creixien molt ràpidament i que, per aquesta raó, hom utilitzava una notació especial: en lloc d'escriure $20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 3 \times 2$, s'escriu $20!$, símbol que es llegeix "factorial de 20" ó "20 factorial", i que significa exactament el mateix que els productes esmentats.

A las classes següents vam proposar als alumnes nombrosos problemes amb aquesta estructura multiplicativa combinatòria, i en particular problemes on calia *truncar* la sèrie multiplicativa (problemes de variacions). Paral·lelament, vam fer els clàssics problemes de simplificacions i expressions amb quocients de factorials: "Simplifiquem $\frac{10!}{8!}$ ",

$\frac{10! \cdot 7!}{11! \cdot 6! \cdot 3!}$, etc.", "Expresseu com un quocient de factorials $\frac{8!}{5 \cdot 4 \cdot 3}$, etc.". etc.

Com és evident, a tot el que hem fet fins ara no han aparegut per res els símbols literals. No per això, però, es pot dir que els alumnes no hagin entès l'estructura *general* de les permutacions. És evident, pensem nosaltres, que els alumnes l'han entesa molt millor d'aquesta manera que no l'haguessin poguda entendre a partir d'una exposició sobre el nombre d'injeccions d'un conjunt amb m elements en un conjunt amb n elements, etc. Com ja hem dit en un capítol precedent, el problema que hi ha darrera d'una fórmula amb paràmetres no és el de la *generalitat* del resultat que descriu, sinó el de la *relació* entre ella mateixa i els seus significats concrets. És així que cal plantejar-se la seva didàctica. La introducció de les fórmules va ser, en el nostre desenvolupament, l'últim nivell a què vam fer treballar els alumnes.

Les combinacions. Els nombres combinatoris

En un primer moment, vam plantejar el problema de trobar els *grups* o subconjunts de 2, 3 i 4 lletres a partir de A B C D E. En aquesta primera fase manipulativa, de recompte empíric, vam relacionar els nombres (iguals) obtinguts de subconjunts de 2 i de 3 assenyalant el caràcter complementari dels conjunts de les dues classes. El mateix vam fer amb els subconjunts de 4 i d'1 lletres. No vam fer cap mena d'explicitació simbòlica de la qüestió.

La introducció de $\binom{m}{n}$ la vam recolzar en un problema extret del llibre de Glaymann i Varga *Les probabilitats a l'escola*. La situació-problema de partida era la següent: Disposem de 5 boles, cada una d'elles amb una de les lletres A B C D i E, i disposem també de tres caixes numerades 1, 2, 3. De quantes maneres es poden col·locar 3 de les 5 boles, una dins de cada caixa?

Els alumnes, aprofitant el que ja sabien, van calcular fàcilment el nombre $5 \times 4 \times 3$. Aleshores vam introduir una nova perspectiva: "De les lletres ABCDE, agafem A C i D. Aquestes 3, de quantes maneres les podem col·locar en les tres caixes?". La resposta 6 no els va costar. "Si en lloc de ACD, agafem ABE, de quantes maneres les podem col·locar en les 3 caixes?". A partir d'aquí, els vam preguntar si se'ls acudia un altre camí per a calcular el nombre total de maneres de col·locar 3 de les 5 boles dins les 3 caixes, i van constatar que aquest nombre l'haguessin pogut trobar multiplicant 10, el nombre de grups de 3 lletres que havien format a partir de ABCDE, per 6, que és el nombre de distribucions que cada grup proporciona.

El pas següent consisteix a plantejar la mateixa situació a partir de 6 lletres. Primer van calcular $6 \times 5 \times 4$, i després se'ls va demanar que indiquessin com podrien obtenir aquest mateix nombre d'una altra manera. En un primer moment, van anomenar x el nombre de grups de 3 lletres que obtindrien de ABCDE i F (no els vam deixar que el trobessin empíricament) i escrivien

$$6 \times 5 \times 4 = 6 \times x$$

La pregunta següent va ser, evidentment, quant valia x .

A continuació, vam explotar la mateixa situació amb 20 lletres, cosa que els va conduir a

$$20 \times 19 \times 18 = 6 \times$$

En aquest moment va ser quan vam introduir el simbolisme $\binom{6}{3}, \binom{20}{3}, \binom{5}{3}, \dots$, per indicar el nombre de grups de 3 lletres que hom pot formar a partir de 6, 20, 5, ..., lletres. La fórmula que obtenen fàcilment és

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6}$$

El pas següent serà l'obtenció de $\binom{20}{4}, \binom{20}{5}$, etc., pas en el que ja l'analogia funciona a favor del procés d'aprenentatge. Renunciem a la descripció detallada de la sèrie d'observacions amb què aquest conclou.

La formalització

Cal saber explicar als alumnes que estan recorrent diferents etapes. Cal dir a classe quan n'acaba una i en comença una altra, ajudant-los a captar les diferències d'orientació i perspectiva que regeixen cada una d'elles. En particular, després d'haver resolt problemes concrets de permutacions, combinacions, etc., quan arriba el moment d'introduir les fórmules pertinents, cal explicar-los que fins aleshores s'han familiaritzat amb uns conceptes nous, han après a reconèixer-los en situacions diverses i han après nous mètodes de comptar, i que ara cal saber resumir tot això per mitjà del llenguatge algebraic.

Quan s'escriu a la pissarra

$$n! =$$

als alumnes no els sol ser difícil contestar $n(n-1)(n-2)\dots$, expressió que hom pot completar indicant que el costum és posar al final $\dots 3.2.1$. És interessant subratllar que, en escriure espontàniament aquesta fórmula, *obliden els parèntesis* (posen: $n.n-1.n-2\dots$). Això no vol dir que els alumnes no saben què escriuen. Per ells, el significat d'allò que han escrit és claríssim, i poden utilitzar correctament la fórmula, mal escrita, sense equivocar-se. El professor ha d'intervenir, però només per tal d'advertir-los que *la convenció ja adoptada* és una altra.

Resulta bastant més difícil d'obtenir la fórmula $n(n-1)\dots(n-p+1)$, a causa del factor $n-p+1$. La resposta que donen els alumnes per a expressar simbòlicament el nombre de variacions és $n(n-1)\dots(n-p)$. Això fa molt interessant entrete-

nir-se a l'estadi simbòlic intermedi $\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots}^{p \text{ factors}}$, i plantejar com un problema (comparant la seva fórmula amb els valors numèrics concrets que ells saben calcular correctament) que trobin la fórmula correcta i completa.

Obtingut tot això, cal proposar exercicis del tipus "Simplifiquen

$$\frac{n!}{(n+1)!} \quad , \quad \frac{n!(m-1)!}{(n+2)!(m+1)!} \quad ,$$

etc.", "Expresseu com a quocient de factorials etc.". Cal que obtinguin, finalment, la fórmula $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$ a partir de la qual caldrà tornar sobre els resultats

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

que coneixen prèviament aplicats a valors concrets.

Comentari

Com ha demostrat Piaget (cf. *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, pp. 274-278), la capacitat combinatòria apareix als estadis finals del desenvolupament de les estructures de la intel·ligència. Tant és així, que la presència d'una capacitat combinatòria plenament desenvolupada es considera una característica innegable de la intel·ligència adulta, de la intel·ligència que ha assolit el seu estadi final de desenvolupament. La capacitat combinatòria és, per tant, *inensenyable*. És el fruit de la maduració autònoma de les estructures intel·lectuals i, mancats com estem ara d'un coneixement prou precís dels mecanismes d'aquesta maduració, no podem sinó aprofitar-nos-en quan apareix, donant-li "material" sobre el qual pugui exercitar-se. Només podem fer que aquells individus que ja tenen capacitat combinatòria la desenrotllin com més millor i la utilitzin des del punt de vista matemàtic. Però mai no podrem aconseguir que un individu que encara no tingui aquesta capacitat arribi a "entendre" la Combinatòria. En aquest sentit es pot dir que el seu ensenyament és el menys didàctic de tots els problemes didàctics.

Què es pot fer, doncs, amb la Combinatòria? Una cosa que es pot fer és endarrerir-la com més millor dins del programa de 1er de BUP. El desenvolupament intel·lectual no és lineal respecte al temps, no té un creixement regular. Procedeix més aviat per esglaons: a un interval de temps de maduració lenta en segueix un altre de maduració ràpida, en el qual, en poc de temps, cristal·litzen tota una sèrie d'estructures i possibilitats lentament preparades a l'interval anterior. La diferència de 6 mesos entre el començament i el final del curs és suficient per a repescar alguns alumnes.

Una segona cosa que es pot fer és abandonar el llenguatge de les aplicacions per a definir els conceptes combinatoris, i, sobretot, per a *demostrar* les fórmules esmentades. La interpretació de les variacions i permutacions com a aplicacions injectives no és sinó una *interpretació*. Donar-los-la com un punt de referència bàsic, com un concepte clau que els permetrà de manejar correctament els conceptes combinatoris, és enganyar-nos i enganyar-los.

CAPÍTOL 20:

CONCLUSIONS GENERALS

Una metodologia per a l'ensenyament de l'àlgebra elemental

i) Hem vist que el naixement i el desenvolupament de l'àlgebra simbòlica té lloc d'una forma molt lenta i poc sistemàtica. Els avenços conceptuals no es feien ordenadament, per temes, sinó globalment, per evolució simultània de la perspectiva i de les tècniques amb què aquests eren tractats. L'àlgebra (*arte mayor*) concebuda com a *part superior* de l'aritmètica (*arte menor*), es va formar i va evolucionar com un llenguatge específic i unes tècniques universals escaients per a la resolució de problemes. Aquí hem propugnat la conclusió que la introducció del llenguatge d'equacions cal que sigui l'estadi final d'un procés de resolució directa, purament aritmètica, d'una gran varietat de problemes de planteig.

ii) Hem vist que el càlcul amb incògnites, l'estadi primer del càlcul literal, no apareix quan l'aritmètica dels nombres ja està ben constituïda, sinó que ambdues coses sorgeixen de forma entrelaçada. Hem assenyalat al cap. 17 com poden potenciar-se, didàcticament, la introducció simultània del càlcul radical i el càlcul amb incògnites.

iii) Des del punt de vista de l'exposició dels conceptes i de la introducció de les regles del càlcul, hem vist la importància decisiva que a la primera època de l'àlgebra tenia referir-los a exemples concrets i particulars, així com l'absència de definicions i descripcions generals o generalitzants. Això ens ha permès de reflexionar sobre el caràcter didàcticament *no necessari* d'aquests factors (que pot ser oposat, sense contradicció, al seu caràcter *imprescindible* des de la perspectiva de l'organització sistemàtica dels coneixements).

iv) Els coneixements algebraics propis d'aquesta etapa admeten amb prou feines un tractament específicament teòric. La *teoria* d'aquests coneixements no necessita cap apartat propi, sinó que forma part, de manera natural, de la resolució de tipus diferents de problemes. Des del punt de vista de la motivació, això té l'avantatge que es pot mantenir el desenvolupament del tema a les mans dels propis alumnes.

v) Les identitats algèbriques notables, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,... no sorgeixen en el marc del desenvolupament del càlcul literal. Aquest mateix apareix com un fenomen molt complex, de desenvolupament lent, que tarda

150 anys a assolir la seva forma final. La introducció de formes primitives de càlcul simbòlic es fa a partir de referents i models molt concrets. Didàcticament, cal aprofitar els esquemes geomètrics senzills, tant per a les identitats anteriors com per al primer tractament de la teoria d'equacions. Tot fa creure, psicològicament, que la imaginació *visual* d'entitats abstractes és un dels recursos intel·lectuals més bàsics i potents. La component *intuïtivo-geomètrica* dels primers treballs històrics, en camps tan diferents com les lleis de caiguda dels cossos (Galileo), el càlcul infinitesimal, o la primera demostració del teorema general de l'àlgebra (Gauss), no faria sinó corroborar aquesta hipòtesi. Seria, per tant, un greu error didàctic no aprofitar aquest recurs per introduir l'alumne en el llenguatge algebraic.

vi) Des del punt de vista de la utilització del llenguatge algebraic, qualsevol precaució és poca. De fet, la concepció d'aquest com un càlcul formal, rigorós, unívoc, que serveix d'esquelet al raonament, és un resultat molt refinat, que cal distingir acuradament d'una primera manipulació dels símbols necessaris per a resoldre equacions i tractar amb quantitats radicals. Aquesta primera manipulació dels símbols, limitada en la seva capacitat de rigor, univocitat, etc., ha d'anar acompanyada de la utilització de *regles retòriques*. Aquestes són l'antecedent natural de les fórmules simbòliques, i asseguren la correcta assimilació d'aquestes darreres en un estadi posterior.

vii) Un aspecte del desenvolupament històric de l'àlgebra, que illumina un punt clau i delicat del seu ensenyament, és el lloc que en aquest desenvolupament correspon a les propietats de les operacions aritmètiques i algebraiques. L'èmfasi que actualment se'ls dona és una conseqüència directa de la importància desproporcionada que han pres les estructures algebraiques. És ben bé paradoxal que de conjunts (els numèrics, els de polinomis i fraccions algebraiques) dels quals els alumnes coneixen, o malconeixen, quatre propietats elementals, es doni a corre-cuita la caracterització com a estructura algebraica, quan és evident que, als nivells no universitaris, aquesta no aporta ni afegeix res a cap d'aquests conjunts. D'altra banda, no és menys cert que demostrar la commutativitat, etc. de la suma o el producte, a l'alumne que n'aprèn uns algorismes que la pressuposen, resulta una estranya subtilesa, si no un contrasentit. Hem de tenir present que l'alumne no adquirirà una visió matemàtica, des del punt de vista de la lògica i de l'estructuració interna de les matemàtiques, fins no haver assolit un estadi relativament avançat de coneixements, i que no és convenient escamotejar-li la intuïció prèvia que es pot formar ell mateix de la unitat estructural de les matemàtiques.

Algunes pautes generals

Les anteriors observacions poden ser un punt de referència per a un bon enfocament de l'aprenentatge de l'àlgebra, aprenentatge que requeriria una profunda reestructuració i un canvi de perspectiva respecte a les coordenades actuals, sobretot quan podem constatar que, en aquest capítol, és patent el fracàs de la majoria dels nostres alumnes. Per altra banda, creiem que el desenvolupament concret de l'estudi de les matemàtiques hauria de venir donat per certes característiques que conformen tot procés d'aprenentatge, i que haurien de presidir l'activitat quotidiana a la classe.

i) Un ensenyament cíclíc

És evident, deien (i diuen), que *ara ja tot és veritat*, ara ja es pot acabar amb aquest ensenyament insatisfactori. No cal sinó oferir als estudiants el sistema deductiu inundat

de veritat indubtable que, per això mateix, cap intel·ligència normalment constituïda no pot deixar d'entendre. El que està funcionant al darrera d'aquesta creença és una concepció primitiva del coneixement, o dit amb més precisió, de l'adquisició del coneixement. És una concepció segons la qual n'hi ha prou de desenrotllar pas per pas els raonaments *veritaders* davant del deixeble, perquè la seva intel·ligència els copsi com a tals, i els faci seus, tot d'una. Així es concep l'adquisició del coneixement *com un acte puntual*, i no gradual. Les nombroses recomanacions que fan tots els psicòlegs (recomanacions que la UNESCO ha recollit, i que àdhuc es troben a les orientacions legals espanyoles sobre els programes d'E.G.B. i de B.U.P.) sobre la conveniència que l'ensenyament sigui *cíclic*, responen a la consciència que actualment es té que qualsevol coneixement no s'adquireix sinó gradualment, mai de cop, sempre com a resultat d'un procés. Aquesta és una advertència que mai no es farà massa vegades a un matemàtic: res no s'aprèn de cop, tot cal veure-ho des de diferents angles i perspectives per arribar a conèixer-ho bé.

Aquestes consideracions, vàlides en general, encara són més manifestes en el tema que hem tractat. En efecte, la majoria de capítols de l'àlgebra són de prou envergadura intel·lectual per a no poder-los presentar d'una vegada per totes. Si pretenem que l'alumne vagi assimilant de forma consistent les eines algebraïques, caldrà anar treballant per etapes. Només a l'etapa final, superades fases intermèdies els continguts de les quals hauran estat adaptats al desenvolupament intel·lectual dels alumnes i al seu grau de domini de certs automatismes, es podrà arribar al domini algebraic que avui s'exigeix després de tres mesos de classe. Aquesta forma de procedir, que s'ha convingut a anomenar ensenyament cíclic, creiem que és la més oportuna per a desenvolupar aquests temes. Òbviament, tal opció comporta estructurar els programes, no des d'un punt de vista de la rígida divisió de temes tradicionals: àlgebra, anàlisi, geometria,..., sinó per unitats funcionals i flexibles, que s'adaptin al desenvolupament de la psicologia intel·lectual de l'alumne.

ii) *Un ensenyament heurístic*

Limitar l'ensenyament de les matemàtiques a l'exposició dels temes per part del professor és condemnar l'alumne a la més absoluta passivitat, potenciant-li al màxim l'actitud del televident. És esperar de l'alumne l'assentiment de les veritats que el professor va exposant a la pissarra, amb la fe que la intel·ligència, posada davant d'uns raonaments certs, els veu, els reconeix com a tals, i ja està tot fet. Tant els resultats de les investigacions psicològiques com la pràctica diària a classe fan veure que això no és veritat. Sense l'activitat de l'alumne, sense la seva participació directa, sense la reconstrucció o reelaboració pròpia, cap coneixement no passa a formar part del seu bagatge intel·lectual.

És massa simplificador (i còmode pel professor) concebre l'adquisició de coneixements com un acte purament intel·lectual, com un acte on no intervé sinó la intel·ligència. És dubtós que l'esforç que costa assolir qualsevol saber sigui simplement el resultat d'un amor desinteressat cap a la veritat. El que és segur és que això, una disposició d'aquestes, no és la norma general, ni tan sols la majoritària, a les classes de B.U.P. La actitud d'un alumne cap a una assignatura queda determinada per molts factors, i un dels que menys pesa, contràriament a allò que li acostuma a passar al professor, és la satisfacció, l'hipotètic plaer derivat de la contemplació de l'harmonia de la teoria estudiada. Això és així, entre altres coses, perquè molts cops es pretén que els alumnes contemplin bel·leses, harmonies i veritats que ultrapassen àmpliament els seus marcs de referència i d'interessos. L'interès de l'alumne serà tant més viu, com més a prop dels seus interessos estigui l'objecte d'estudi, i el primer pas per a aconseguir això consisteix a traslladar l'objecte d'estudi, de la pissarra i del professor, al quadern de treball i a l'alumne.

Si volem que el procés d'aprenentatge sigui actiu i que l'alumne redescobreixi el teixit matemàtic que comporta l'àlgebra, convindrà no presentar cap teoria feta i elaborada des de fora del treball de l'alumne, ni tan sols unes regles de resolució. Haurem, en tot cas, d'oferir una llista de problemes ben elegits, i tals que l'aprofundiment dels mateixos permeti generar els recursos algebraics que més endavant pendran cos en la teoria. Les definicions i les demostracions formals, en una primera etapa, ni han d'aparèixer, sinó que s'han de convertir en l'última baula de la cadena de raonaments emprada pels alumnes. En una paraula, han de fer la seva aparició en el moment en què, després de moltes manipulacions concretes, s'imposi fer una mica d'ordre en totes aquelles coses que han anat apareixent pel camí, i que tenen a veure les unes amb les altres. I ara que hem parlat de definicions, potser no estaria de més recordar el que deia Poincaré quan es referia al paper que fan en l'ensenyament primari i secundari: "Una bona definició, a l'ensenyament, és la que ha estat compresa pels alumnes, i no aquella construïda d'una forma lògica i completament rigorosa".

iii) Un ensenyament *interdisciplinar*

El desenvolupament de les matemàtiques ha estat, i està, profundament determinat pels *problemes* que resolien fora d'elles mateixes. Problemes que han estat, sovint, l'estímul fonamental en la constitució de moltes de les seves branques. Plantejar l'ensenyament de les matemàtiques *partint* directament d'aquests problemes (que no mencionant-los com a *aplicacions*) és donar als alumnes una visió molt més real del desenvolupament general del coneixement científic, i comporta, a més, l'aprofitament d'una infinitat de recursos i solucions per a l'important problema de la *motivació*. Pensem que les matemàtiques no poden reduir-se a un conjunt de tècniques concretes, especialment als estudis secundaris, on han de ser bàsicament formatives. Que un estudiant sàpiga derivar funcions i coneixi les regles per les quals es regeix el càlcul de derivades no vol dir que compregui el tema de la derivació. Les tècniques matemàtiques són l'últim esglaó de tot un procés intel·lectual, procés que comença per plantejar-se qüestions i problemes a resoldre, i que segueix a la recerca, per aproximacions successives i intuïtives, de nous conceptes que amplien el marc teòric en què incideixen els problemes plantejats.

iv) Un ensenyament *adaptat al nivell intel·lectual dels alumnes*.

Una condició imprescindible per a aconseguir que les matemàtiques tinguin *realment* la capacitat, que el tòpic generosament els atorga, de formar les intel·ligències dels nens i dels nois és que escollim els continguts, i que adaptem el seu tractament al nivell intel·lectual dels alumnes als quals van destinats. Si volem que les classes de matemàtiques no siguin, com ara majoritàriament són, les que recullen més fracassos escolars i les que provoquen més esveraments i esgarrifances, si volem que siguin el factor poderós d'estímul intel·lectual que tothom, alegrement, considera que són, aleshores caldrà pensar les nostres classes en funció dels alumnes que hi tenim, i no pas del tractament deductiu, formalista i rigoritzant que organitza les matemàtiques universitàries.

Saber perdre el temps és, sovint, la millor manera de guanyar-lo. És una frase ben coneguda, que té un significat especial aplicada al nostre cas. Hem parlat moltes vegades de les precaucions i de la lentitud amb què cal introduir certs conceptes i notacions. Són advertències absolutament necessàries que cal oposar a la preocupació (del

totapedagògica) per a incrementar de qualsevol manera el nombre de coses que ensenyem. L'ensenyament que proposem serà possiblement més lent, en alguns moments, que el tradicional i habitual. També serà molt més ben aprofitat.

* * *

Un ensenyament viu, formador, ha de preocupar-se per transmetre la visió pluri-dimensional del que les matemàtiques han estat i són. Mai no hauríem d'oblidar que han de ser molt més un factor que contribueixi a l'educació dels qui les estudien, que no pas un obstacle enutjós per a solitaris corredors de fons. Amb aquest esperit hem escrit aquestes pàgines.

IV

Recull de problemes

IV

Recull de problemas

CAPÍTOL 21:

COL·LECCIÓ DE PROBLEMES, AMB L'AUTOR, OBRA I ANY

Els problemes que el lector trobarà aquí recollits ho han estat en funció d'un doble criteri: el seu interès històric i la seva possible utilització com a material de classe. Els problemes vénen classificats per autors, ordenats cronològicament, amb excepció d'uns pocs que tenien, en algun sentit, una rellevància especial. En el cas d'enunciats extrets d'obres catalanes i castellanes, hem respectat l'ortografia i puntuació arcaiques dels originals.

Alguns Problemes Singlars

DIOFANT: La potència dels raonaments aritmètics (s. 2)

Enunciat i resolució del Problema III del Llibre VI de l'Aritmètica de Diofant. Transcriurem íntegrament la resolució que presenta Diofant per tal de posar en relleu l'enginy de què fa gala, la potencialitat dels seus mètodes, i la forma retòrica d'expressió que usa. Per la nostra part ens limitarem a clarificar, mitjançant alguns esquemes i equacions, els passos clau de la resolució.

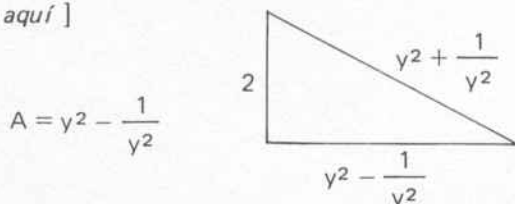
Trobar un triangle rectangle de tal forma que el nombre de la seva àrea, augmentat d'un nombre donat, esdevingui un quadrat.

Suposem que el número donat sigui 5 unitats, i considerem el triangle proposat, de costats: 3 aritmes, 4 aritmes i 5 aritmes [*Per Diofant aritma és equivalent a l'actual incògnita x*]. Llavors el número corresponent a l'àrea augmentat en 5 unitats, esdevé 6 aritmes quadrats més 5 unitats, que haurà de ser, ell mateix, un quadrat [$6x^2 + 5 = p^2$]. Igualet-lo a nou quadrats d'aritma; eliminem els termes semblants, i ens resta: 3 aritmes quadrats iguals a 5 unitats [*per* $p^2 = 9x^2$, $6x^2 + 5 = 9x^2$; $5 = 3x^2$]. Cal que la relació terme a terme sigui la corresponent a un nombre quadrat, i estem necessitats de trobar un triangle rectangle, així com un nombre quadrat, de tal forma que aquest quadrat, disminuït de l'àrea del triangle, formi la cinquena part d'un quadrat, ja que el nombre donat és 5 unitats. [*Diofant posa en relleu com ha de ser l'àrea i el nombre*

quadrat perquè l'equació que se'n derivi tingui solució: si $A = \text{Àrea}$ i $p^2 = \text{nombre quadrat}$, llavors $Ax^2 + 5 = p^2 x^2$; $(p^2 - A)x^2 = 5$, i es té que: $p^2 - A$ ha de ser $1/5$ d'un quadrat].

Formem un triangle per mitjà d'un aritma [nova incògnita] i l'invers d'un aritma; el nombre d'àrea esdevé un quadrat d'aritma menys un invers de quadrat d'aritma.

[Diofant sap que amb dos nombres a , b es pot construir un triangle rectangle de costats $a^2 - b^2$; $2ab$; $a^2 + b^2$. Aprofitant això construeix el triangle rectangle que indiquem aquí]



Que l'arrel del nombre quadrat sigui un aritma, més una quantitat d'invers d'aritma doble del número donat [$p = y + \frac{2 \cdot 5}{y}$], és a dir 10 inversos d'aritma. Aquest quadrat esdevé un quadrat d'aritma més 100 inversos de quadrat d'aritma, més 20 unitats [$p^2 = y^2 + \frac{100}{y^2} + 20$]. Llavors, si d'aquesta expressió en restem l'àrea [$p^2 - A$], és a dir, el quadrat d'aritma menys un invers de quadrat d'aritma, la resta esdevé 101 inversos de quadrat d'aritma més 20 unitats

$$[p^2 - A = y^2 + \frac{100}{y^2} + 20 - (y^2 - \frac{1}{y^2}) = \frac{101}{y^2} + 20 = \frac{1}{5} \beta^2.]$$

ja que havíem quedat que aquesta diferència havia de ser un cinquè d'un quadrat]. Pre-nem el total 5 vegades i obtenim 505 inversos de quadrat d'aritma més 100 unitats iguals a un quadrat [$\frac{505}{y^2} + 100 = \beta^2$]. Multipliquem-ho tot per un quadrat d'aritma, i obtenim 100 quadrats d'aritma més 505 unitats iguals a un quadrat [$505 + 100 y^2 = (\beta y)^2$]. Igualet aquest quadrat com arrel de 10 aritmes més cinc unitats, i es trobarà, com a aritma, $24/5$. [Com que el segon membre $(\beta y)^2$, la condició és que sigui un quadrat, sense importar per res quin quadrat pugui ser, Diofant el pren lliurement com $(10y + 5)^2$, a efectes que pugui trobar un valor senzill per la y , que verifiqui l'equació i que a més sigui racional. Assegura la racionalitat en prendre $10y$, ja que s'eliminaran les y al quadrat, i les 5 unitats que afegeix (en pren 5), per obtenir un valor, per a la y , el més senzill possible:

$$100 y^2 + 505 = (10 y + 5)^2; y = \frac{24}{5}]$$

Tornem al que havíem posat. El triangle serà, doncs, format per mitjà de $24/5$ i $5/24$, i l'arrel del quadrat serà $413/60$.

[Ara Diofant ja sap que el triangle de partida, en lloc de ser proporcional al de costats 3, 4, 5, ho ha de ser al de costats: $(\frac{24}{5})^2 - (\frac{5}{24})^2$, $2 \cdot (\frac{24}{5})^2 + (\frac{5}{24})^2$, i que el nombre quadrat, en lloc de 9, ha de ser $(10 \cdot \frac{24}{5} + 5)^2$].

Llavors, si expressem el triangle rectangle en aritmes [Proporcional a l'anterior trobat], i si igulem la seva àrea augmentada de 5 unitats, a $\frac{170.569}{3.600}$ quadrats d'aritma, la resta esdevindrà evident.

[Diofant, que no està per punyetes, considera els càlculs numèrics que resten per a culminar el problema, una trivialitat que deixa per al lector. Amb el nou triangle de partida trobat i l'elecció adequada del nombre quadrat, Diofant ja sap que l'equació $Ax^2 + 5 = p^2$ tindrà solució racional, i per la x que trobi augmentarà proporcionalment els costats del triangle cercat:

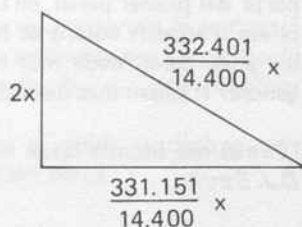
$$\begin{aligned} \text{El triangle format per } y, \frac{1}{y}, \text{ després que } y = \frac{24}{5} \text{ és:} \\ y^2 - \frac{1}{y^2} = \frac{331.151}{14.400} ; y^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{332.401}{14.400} ; 2 \\ p^2 = \left(\frac{413}{60} \right)^2 = \frac{170.569}{3.600} \end{aligned}$$

$$\text{Àrea del triangle} = \frac{331.151}{14.400} x^2$$

$$\text{Àrea del triangle} + 5 \text{ unitats} = \text{nombre quadrat}$$

$$\frac{331.151}{14.400} x^2 + 5 = \frac{170.569}{3.600} x^2$$

$$\frac{351.125}{14.400} x^2 = 5 ; x^2 = \frac{72.000}{351.125} ; x = \frac{24}{53}$$



Així doncs, multiplicant els costats del triangle anterior per $\frac{24}{53}$ obtenim el valor (un dels valors) que satisfà les condicions del problema. Els costats del triangle són:

$$\left[\frac{331.151}{31.800}, \frac{48}{53}, \frac{332.401}{31.800} \right]$$

LEONARDO DA PISA: El problema dels conills (1202)

La successió de Fibonacci ($a_0 = 0, a_1 = 1, a_n + 1 = a_n + a_{n-1}$) és notable per diferents raons. De fet, és un dels temes matemàtics més populars als països de cultura científica general àmplia i avançada, on fins i tot existeix alguna revista dedicada específicament als problemes i interrogants associats a aquesta successió (The Fibonacci Quarterly). D'entre les seves propietats notables citarem l'expressió del terme general

$$a_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}},$$

que dos termes consecutius qualssevol són primers entre si, que el límit de $a_n - 1/a_n$ és el segment auri $(\sqrt{5} - 1)/2$, i que aquesta darrera successió és important en l'estudi de

fenòmens de creixement i morfologia vegetal. La denominació de Fibonacci és deguda al fet que la successió va aparèixer, històricament, al següent problema, proposat per Leonardo da Pisa (la taula adjunta al problema reproduceix la que acompanya la resolució del mateix Fibonacci):

Quants parells de conills poden ser engendrats a partir d'un parell en un any?

Un home té un parell de conills en un lloc completament tancat per un mur. Volem saber quants parells poden ser engendrats a partir del primer parell, en un any, si la naturalesa d'aquests conills és tal que engendren un altre parell cada mes i comencen a engendrar el segon mes després de néixer.

(*Exret del Source book in Mathematics de D.J. Struik*).

	parells
	1
primer	2
segon	3
tercer	5
quart	8
cinquè	13
sisè	21
setè	34
vuitè	55
novè	89
desè	144
onzè	233
dotzè	377

ARITMÈTICA DE TREVISO: El càlcul de la lluna nova (1478)

La reforma gregoriana del calendari no es féu fins l'any 1582. Al període anterior, quan les unitats per a mesurar temps curts encara no estaven fixades, els llibres d'aritmètica ensenyaven a calcular el moment de la lluna nova amb enunciats com el següent (una llunació és el període de temps entre dues llunes noves successives, o mes llunar):

Si una llunació té 29 dies, 12 hores i 793 punts, i una hora 1080 punts, i es vol saber quan farà la lluna [nova] el mes present, és a dir desembre del 1478, necessites saber quan fou nova el mes propassat, és a dir novembre. Sabent que fou el dia 25, a les 8 hores i 408 punts, calcula quan la farà el present.

(*Boncompagni, p. 1040*).

NICOLAS CHUQUET: L'aparició dels negatius en la resolució de problemes. (1484)

La comparació d'aquest enunciat amb el del problema N^o XXXIV (el precedent) permet observar que Chuquet hi introdueix intencionadament una petita variació, per tal que el problema manqui de solució. A continuació intenta de resoldre'l aplicant les conegudes regles de l'àlgebra, i troba una solució que implica un nombre negatiu per a una de les quantitats de peces de roba; tot seguit dona una interpretació al resultat dient que aquesta quantitat negativa de peces de roba pot interpretar-se com peces que ha quedat a deure.

A la pàgina es troba el text complet de la interpretació que dona Chuquet d'aquesta solució:

17 peces i mitja, al preu d'11 escuts la peça, i menys 2 peces i mitja al preu de 13 escuts la peça.

Un negociant ha comprat 15 peces de roba per un preu total de 160 escuts. Entre elles n'hi ha que costen 11 escuts la peça, i les altres 13 escuts. Es pregunta quantes n'hi ha de cada tipus.

(Prob. XXXV, p. 424).

La solució aproximada a una equació exponencial (1484)

El següent problema condueix a l'equació $(1 - \frac{1}{10})^t = 1/2$, de solució $t = \frac{\log 2}{1 - \log 9}$. Chuquet dóna la resposta $t = 6$ dies i $\frac{31441}{531441}$ de dia, i afegeix, conscient que el resultat no és del tot satisfactori: "amb aquesta forma de fer hi ha qui ja en té prou. No obstant sembla que, per més veritat, entre 6 dies i 7, hem de cercar un cert nombre proporcional, el qual de moment, ens és desconegut".

La solució donada per Chuquet correspon a fer una extrapolació lineal entre la potència 6 i a 7; si es fa, el nombre que s'obté és $6 + \frac{314410}{531441}$. No sabem si el zero que falta a la solució de Chuquet és per error d'ell o si correspon a un error en la traducció d'A. Marre. El cas és que entre la solució vertadera i la que s'obtindria per aproximació lineal hi hauria un error que no arribaria a les 2 centèsimes de dia, és a dir, un error d'uns 18 minuts.

Un barril té una aixeta tal que, si s'obre, cada dia es buida la dècima part [del que hi ha]. Es pregunta en quants dies es buidarà la meitat del barril. (Prob. XCIV, p. 439).

JOHANN WIDMAN: L'aparició impresa dels signes "+" i "-" (1489)

A l'aritmètica de J. Widman, publicada a Leipzig el 1489, apareixien impresos, per primera vegada, els signes "+" i "-" amb el significat aritmètic que avui els donem. El següent problema és un dels primers enunciats que els empren. En transcriure'l, Cajori comentava l'origen d'aquest simbolisme de la següent manera: "Widman dóna problemes semblants relatius a pebre i sabó. L'anàlisi d'aquests passatges ha conduït a opinions divergents sobre el significat original dels + i -. De Morgan sospitava que eren senyals de magatzem expressant excés o deficiència en el pes dels barrils de mercaderies. M.W. Drobisch (...) diu que Widman els usa de passada, com si fossin suficientment coneguts (...). C.I. Gerhardt, com De Morgan, diu que els + i - derivaven de la pràctica mercantil". El mot centner que apareix a l'enunciat que traduïm a continuació designava una unitat medieval de pes:

Una persona compra 13 barrils de figues; rep un Centner per $4\frac{1}{8}$ florins, i el pes de cada barril és el següent:

	4 + 5	
	4 - 17	
	3 + 36	
	4 - 19	
	3 + 44	
	3 + 22	
Centner	3 - 11	lliures
	3 + 50	
	4 - 16	
	3 + 44	
	3 + 29	

$$3 - 12$$

$$3 + 9$$

I jo vull saber quant costaran. Suma els Centner i les lliures i el que és —, és a dir menys, deixa-ho a part, i resulten 4539 ll. (si converteixes els Centners en ll. i llavors sumes els +, és a dir més) i 75 menys. Ara has de sostreure 24 ll. per cada barril, de la fus-
ta, i 13 cops 24 és 312, a la qual cosa suma els —, o sia 75 ll., i resulta 387; sostreu-lo de 4539, i resten 4152 ll. Ara digues 100 ll., o sia 1Ct., per $4\frac{1}{8}$ fl., quant vindran de 4152 ll.? I vénen 171fl. 5ss. $\frac{4}{5}$ hlr, i és veritat.

(*Extret de F. Cajori, A History of Mathematical notations, pp. 232-233*)

JUAN DE ORTEGA: El problema dels escacs (1534)

La suma de la progressió geomètrica de raó 2, $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{64}$, associada al famós problema dels escacs, és realitzada de la següent manera en el llibre d'aritmètica de Juan de Ortega:

...: mas por no dexar con desseo a ninguno de la presente leera/ quiero poner aqui un exemplo/ el qual sera para declarar como se han de contar breuemente las 64 casas del axedrez poniendo en la casa primera una: y en la segunda 2 y en la tercera 4 y en la quarta 8 y en quinta 16: i assi doblando todas las sumas hasta las 64 casas. Esta suma (...) la quiero poner en esta otra manera: ya sabes que en la quinta suma como se viene doblando faze 16 pues multiplica 16 veces 16 y montaran 256 los quales hallaras que veniendo se doblando vienen los dichos 256 a las 9 casas y esto suman las 8 casas menos uno: pues torna a multiplicar 256 vezes 256 y montaran 65536 y esto suman las 16 casas menos uno: los quales hallaras que vienen en las 17 casas: torna otra vez a multiplicar 65536 vezes 65536 y montaran 4294967296/ y esto suman las 32 casas/ y tanto hallaras que vienen a las 33 casas por su doblado: pues torna a multiplicar 4294967296 con 4294967296 y hallaras que vienen 18446744073709551616 los quales hallaras que es la suma de todas las 64 casas menos un punto: como lo has visto por exemplo.

El cuento de la tabla del Axedrez
18446744073709551615

(*Tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria, f. 28-29, edició del 1537*).

BEHÂ EDDIN: 7 problemes que els àrabs van trobar irresolubles. (Finals s. XVI)

Behâ Eddin, al final del seu llibre, enuncia 7 problemes, els quals presenta com a molt difícils de resoldre, dient que s'han resistit a l'esforç dels matemàtics més savis de totes les èpoques. L'autor diu que els proposa per "provar que aquesta ciència presenta dificultats d'envergadura tal que desanimen, per reduir al silenci a aquells qui pretenen que en matèria de càlcul no hi absolutament res que no puguin fer, per prevenir als calculistes que no perdin el temps buscant la solució, si algunes d'aquestes qüestions els són proposades, i per estimular a resoldre-los i treure-les del misteri a aquells que estan dotats de brillants facultats".

La llista dels set problemes és la següent:

1. Dividir 10 en dues parts, de tal manera que, si s'afegeix a cada una la seva arrel, quadrada, i es multipliquen les dues sumes l'una per l'altra, resulta un nombre donat.

$$x + y = 10 ; (x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = n$$

2. Si s'afegeix 10 a un quadrat, llavors la suma ha de tenir arrel quadrada, i si se li treu 10 [a aquest quadrat], el que resta també ha de tenir arrels quadrada.

$$x^2 + 10 = y^2 ; x^2 - 10 = z^2$$

3. A Zaïd se li promet 10 menys l'arrel quadrada de la part d'Amrou, i a Amrou 5 menys l'arrel quadrada de la part promesa a Zaïd.

$$x = 10 - \sqrt{y} ; y = 5 - \sqrt{x}$$

4. Un nombre cub ha de ser dividit en dues parts, que siguin també nombres cubs.

$$x^3 = y^3 + z^3$$

5. 10 es divideix en dues parts. Si dividim cada una d'elles per l'altra, i sumem els quocients, llavors la suma és igual a una de les dues parts de 10.

$$x + y = 10 ; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y$$

6. Tres quadrats en proporció contínua, tals que la seva suma sigui un quadrat.

$$x^4 + x^2 y^2 + y^4 = z^2$$

7. Si a un quadrat se li afegeix la seva arrel i 2, també a aquest mateix quadrat se li treu la seva arrel i 2, llavors s'ha de poder extreure l'arrel quadrada de la suma i de la resta.

$$x^2 + x + 2 = y^2 ; x^2 - x - 2 = z^2$$

D'aquests problemes direm que el primer té per solució trivial, si a n li donem el valor de 24, la de $x = 3$ i $y = 1$, que és la solució que exposa A. Marre. La solució dins del camp dels racionals, que era el camp numèric de resultats acceptats pels àrabs, admet una infinitat de solucions. Ens hem entretingut a exposar la forma de trobar-les, utilitzant alguns recursos de Diofant:

Volem trobar dos nombres quadrats, que sumin 10:

$p^2 + q^2 = 10$, i una solució ja sabem que és 1 i 3. Modificarem lleugerament aquesta solució, per tal d'obtenir-ne una altra. A 1 li restarem una certa quantitat, i a 3 li sumarem una quantitat proporcional a la restada a 1:

$$(1 - x)^2 + (3 + ax)^2 = 10$$

$1 + x^2 - 2x + 9 + a^2 x^2 + 6ax = 10$; $(a^2 + 1)x^2 + (6a - 2)x = 0$, que, a part del zero, té per solució $x = \frac{2 - 6a}{a^2 + 1}$. Llavors, donant a a valors racionals convenients, per

tal que $1 - x$ al quadrat no superi 10, s'obtenen infinites solucions. En concret, per $a = 1/4$ hem trobat que $x = 8/17$, i llavors $p = 9/17$ i $q = 53/17$ verifiquen l'enunciat. És a dir (fent operacions), l'enunciat del problema admet la solució, per a $n = 3.944/289$, de $x = 2.809/289$ i $y = 81/289$.

L'Aristide Marre fa els següents comentaris a la resta de problemes:

El segon declara que és impossible (s'entén que dins del marc dels nombres racionals).

El tercer condueix a una equació que no admet arrels racionals.

El quart fou enunciat com impossible de resoldre (que no admet solucions racionals) per Fermat l'any 1657, i més tard així ho demostrà Euler.

El cinquè condueix a una equació de tercer grau sense solucions racionals.

El sisè tampoc no admet solució racional.

El setè, en canvi, admet la solució racional i positiva: $34/15$ com arrel quadrada del quadrat que s'ha de buscar.

* * *

DIOFANT: Els sis llibres d'Aritmètica i el llibre dels nombres poligonals (s. II)

9. Ens proposem partir 100 en dos nombres, de tal manera que un terç del primer nombre i un cinquè del segon, sumats, formin 30 unitats.

(Prob. V, Llibre I, p. 11) Totes les referències es fan a l'edició francesa de Paul Ver Eecke, de l'any 1926.

10. Proposem sumar un mateix nombre a 100 i a 20, de tal manera que el més gran nombre obtingut sigui el triple del més petit.

(Prob. VIII, Llibre I, p. 14).

11. Trobar dos nombres tals que cada un d'ells, després d'haver rebut un nombre determinat cedit per l'altre, estiguin en una proporció determinada. Proposem doncs, que el primer nombre, rebent 30 unitats del segon nombre, esdevingui el doble d'aquest últim, i que el segon nombre, rebent 50 unitats del primer, esdevingui el triple d'aquest últim. (Prob. XV, Llibre I, p. 20).

12. Trobar quatre nombres tals que cedint cada un una fracció determinada d'ell al que el segueix, donin nombres iguals, després d'haver cada un d'ells cedit i rebut. Proposem doncs que el primer nombre cedeix el seu terç al segon; que el segon cedeix el seu quart al tercer; que el tercer cedeix el seu cinquè al quart; que el quart cedeix el seu sisè al primer, i que, després de les cessions recíproques, s'obtinguin nombres iguals. (Prob. XXIII, Llibre I, p. 32). Aquest problema, que correspondria a un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites, Diofant el resol utilitzant una única incògnita (1 aritme). El sistema resulta ser indeterminat i d'infinites solucions. Diofant presenta les solucions: $150/23$; $92/23$; $120/23$; $114/23$, i després la dels enters formades pels numeradors de les fraccions anteriors.

13. Trobar dos nombres tals que la seva suma i la diferència dels seus quadrats formin nombres determinats. Proposem doncs que la suma dels nombres faci 20 unitats, i que la diferència dels quadrats sigui 80 unitats.

(Prob. XXIX, Llibre I, p. 39).

14. Trobar dos nombres tals que la seva diferència i el producte siguin nombres determinats.

És necessari sempre que el quàdruple del producte dels nombres, augmentat del quadrat de la seva diferència, formi un quadrat; qüestió que és figurativa [que és susceptible de representació geomètrica].

Proposem doncs que la diferència sigui 4 unitats i el producte 96 unitats.
 (Prob. XXX, Llibre I, p. 40) Cal recordar que Diofant només accepta com a solucions aquelles positives i racionals, d'aquí que imposi condicions necessàries per a l'existència de solucions. La condició diu que és figurativa, ja que expressa la identitat $4XY + (X - Y)^2 = (X + Y)^2$, fàcil d'evidenciar per figures geomètriques. Diofant troba la solució utilitzant elegantment els seus recursos característics, i la sempre bona elecció de la incògnita:

Si la diferència entre els nombre és 4, suposem que un sigui 1 aritmo més 2 unitats i l'altre 1 aritmo menys 2 unitats. El producte dels dos serà, doncs, 1 aritmo quadrat menys 4 unitats, que ha de valer 96; així doncs, un aritmo quadrat és 100, i 1 aritmo és 10. Els dos nombres buscats són el 12 i el 8.

15. Dividir un nombre determinat, el qual és suma de dos quadrats, en dos altres quadrats. Sigui 13, suma dels quadrats 4 i 9; cal dividir-lo entre altres dos quadrats. (Prob. IX, Llibre II, p. 55) Diofant resol el problema a partir de buscar un nombre que verifiqui l'equació: $13 = (x + 2)^2 + (ax - 3)^2$ sent a un nombre qualsevol diferent d'1; ell posa 2. L'equació de segon grau queda així: $0 = 5x^2 - 8x$, i dóna la solució: $x = \frac{8}{5}$,

de manera que en el seu cas els dos quadrats són $\left(\frac{8}{5} + 2\right)^2$ i $\left(\frac{16}{5} - 3\right)^2$ és a dir $\frac{325}{25}$ i $\frac{1}{25}$.

16. Trobar dos nombres en determinada proporció, tals que cada un d'ells augmentat en un quadrat determinat, formin un quadrat. Proposem doncs que el més gran nombre sigui el triple del més petit, i que cada un d'ells, augmentat en 9 unitats, formi un quadrat.

(Prob. XVI, Llibre II, p. 63). Diofant troba les solucions: 1.080 i 3.240.

17. Trobar tres nombres tals, que el producte de dos qualsevol d'ells, augmentat en 12, formi un quadrat.

(Prob. X, Llibre III, p. 93). Problema indeterminat de la forma: $XY + 12 = p^2$; $XZ + 12 = q^2$; $YZ + 12 = t^2$. Primer Diofant troba una solució particular per a la primera relació, i després considera aquestes solucions particulars multiplicades una per un aritme i l'altra per un invers d'aritme, i així passa a les altres relacions... Al final troba les solucions $X = 2$; $Y = 2$; $Z = 1/8$. Euler, treballant algebraicament el problema, trobà una solució elegant en nombres enters.

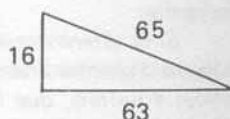
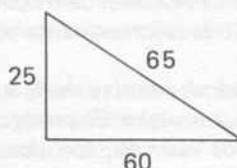
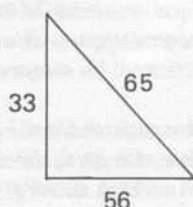
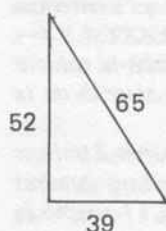
18. Trobar quatre nombres tals que el quadrat de la suma d'aquests quatre nombres, augmentat o disminuït de cada un d'aquests nombres, formi un quadrat.

(Prob. XIX, Llibre III, p. 108). És molt atractiva la forma de resoldre el problema que utilitza Diofant. Primer troba 4 triangles rectangles que tinguin igual hipotenusa, qüestió que pot fer perquè abans ha estudiat, al Prob. IX, Llibre II, la forma de descomposar un quadrat en suma d'altres dos d'infinítes maneres. Així troba les descomposicions:

$$\begin{aligned} 65^2 &= 52^2 + 39^2; 65^2 = 60^2 + 25^2; \\ 65^2 &= 33^2 + 56^2; 65^2 = 63^2 + 16^2. \end{aligned}$$

Posa $X + Y + Z + W = 65x$

Suposa que X, Y, Z, W són el quàdruple de les àrees de cada triangle rectangle, després que tots els costats són multiplicats per x .



$$X = 4.056x^2; Y = 3.000x^2; Z = 3.696x^2; W = 2.016x^2$$

$$X + Y + Z + W = 12.768x^2 = 65x; x = \frac{65}{12.768}$$

i les solucions finals són:

$$X = \frac{17136600}{163021824}; Y = \frac{12675000}{163021824}; Z = \frac{15615600}{163021824}; W = \frac{8517600}{163021824}$$

19. Trobar [tres] nombres tals que la seva suma sigui un quadrat, i tals que el quadrat de cada un d'ells, augmentat del nombre que el segueix, formi un quadrat. (Prob. XVI, Llibre IV, p. 129). Diofant dona les solucions:

$$\frac{36621}{2704}, \frac{157300}{2704}, \frac{317304}{2704}$$

20. Trobar dos nombres tals que el seu producte, augmentat de cada un d'ells, formi un cub.

(Prob. XXVI, Llibre IV, p. 147) Diofant procedeix així:

Cal trobar $X; Y$; tals que $X \cdot Y + X = p^3; X \cdot Y + Y = q^3$

Posa $X = 8x; Y = x^2 - 1$, que evidentment satisfà la primera relació $X(Y + 1) = p^3$ ja que $8x \cdot x^2 = 8x^3 = (2x)^3$

Si ha de verificar la segona equació:

$$Y(X + 1) = q^3; (x^2 - 1)(8x + 1) = q^3.$$

Posem que $q = (2x - 1)^3$. Tenim llavors:

$$8x^3 + x^2 - 8x - 1 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \text{ equivalent a}$$

$$13x^2 = 14x; x = \frac{14}{13}$$

Els nombres buscats són:

$$X = 8 \cdot \frac{14}{13} = \frac{112}{13}; Y = \frac{27}{169}$$

21. Trobar tres nombres tals, que el cub de la suma d'aquests tres nombres, restat a cada un d'ells, formi cub.

(Prob. XVII, Llibre V, p. 214). *Problema que el condueix a les solucions particulars:*

$$\frac{341}{4913} \quad \frac{854}{4913} \quad \frac{250}{4913}$$

22. Trobar un triangle rectangle tal que la seva àrea, disminuïda pel nombre d'una o de l'altra perpendicular [es refereix a la disminució de l'àrea en la longitud d'un o l'altre catet], formi un quadrat.

(Prob. XIII, Llibre VI, p. 255).

BEDA: Aritmètica (673-735)

Beda deixà escrites certes qüestions d'aritmètica encaminades fonamentalment a les seves aplicacions al Calendari. Entre els escrits matemàtics s'hi troba una col·lecció de 55 problemes, alguns d'ells molt curiosos, i que tenen els seus orígens en antigues fons orientals. La seva obra fou publicada a París l'any 1544.

Els problemes que hem escollit estan tots ells trets de l'obra de Sánchez Pérez.

23. Un caracol fue invitado a comer por una golondrina. La comida estaba a una legua de distancia y el caracol no andaba más que una uncia por día. Diga quien pueda cuántos años y días tuvo que andar el caracol.

1 legua = 1.500 pasos; 1 paso = 5 pies; 1 pies = 12 uncias.

(Probl. 1º, p. 57).

24. Un hombre que iba por un camino se cruzó con un grupo de hombres y les dijo: Si fuérais los que vais y otros tantos y la mitad de los que vais y la mitad de la mitad y me agregara yo seríamos 100. Diga quien pueda cuántos iban en el grupo.

(Prob. 2º, p. 58).

25. Un tratante dijo: Quiero comprar con 100 denarios, 100 cerdos, a razón de 10 denarios por cada macho grande, 5 denarios por cada marrana y 1 denario por cada dos cochinitos. Diga quien lo entienda cuántos guarros, cuántas cochinas y cuántos gorrinillos debe comprar para que no sobre ni falten denarios ni puercos.

(Prob. 5º, p. 58). *Correspon als típics problemes diofàntics, als que eren molt aficionats els antics.*

26. Se tiene un disco de metal que pesa 30 libras y vale 600 sólidos. El disco está formado con aleación de oro, plata, cobre y estaño. Por cada parte de oro, tiene 3 de plata. Por cada parte de plata tiene 3 de cobre. Por cada parte de cobre tiene 3 de estaño. Diga quien pueda cuánto hay de cada metal [en peso y en sólidos].

(Prob. 6º, p. 59).

27. Una escalera tiene 100 travesaños. En el 1º se posó una paloma; en el 2º dos; en el 3º tres; en el 4º cuatro y así sucesivamente. ¿Cuántas palomas hay en la escalera?

(Prob. 14º, p. 61).

28. Un campo tiene 150 pies de largo; en un extremo hay un perro y en el otro extremo una liebre. Sale la liebre huyendo y el perro tras ella. El perro recorre 9 pies en cada salto, mientras que la liebre recorre solamente 7 pies. ¿Cuántos saltos da el perro y cuántos pies recorre para alcanzar a la liebre? [Se suposa que la liebre i el gos fan el mateix nombre de salts en un temps determinat].

(Prob. 16º, p. 62). *Aquest mateix problema, les dades lleugerament variades, el veurem*

reproduït al llarg del temps a nombrosos manuals de matemàtiques. D'aquesta manera, el tornem a trobar a l'Aritmètica de Treviso, quasi mil anys després.

ALCALSADÍ. (— 1.225)

29. Zaid tiene 22 dinares, Omar tiene 19 y Bakr tiene 7. Reúnen el dinero, hacen negocio y ganan 12 dinares. ¿Cómo se los deben repartir?

(Problema extret del llibre de Sánchez Pérez, La Aritmètica en Roma, en India y en Arabia, p. 166).

30. Zaid tiene $2\frac{1}{3}$ dinares, Omar tiene $3\frac{1}{2}$ y Bark tiene 7. Reúnen el dinero y hacen una ganancia de 10 dinares. [¿Cómo se los deben repartir?].

(Del mateix llibre, p. 167)

31. El séxtuplo de un número, más el séptuplo del mismo número, es igual a 25. ¿Cuál es el número?

(Del mateix llibre, p. 170).

ABENBEDER: Comprendi d'Àlgebra (s. XII o s. XIII)

Els problemes són extrets de la traducció castellana feta per Augusto Sánchez Pérez.

32. Si se te dice: el diez lo divido en dos partes, divido cada una de las dos por la otra, resto lo menor de lo mayor y quedan cinco sextos.

(Cap. de los problemas sobre el 10. p. 41)

33. Si se te dice: el diez lo divido en dos partes, multiplico una de las dos por cinco, divido lo que resulta por la segunda, tomo la mitad de lo que sale y resulta diez.

(Del mateix capítol, p. 43)

Hem constatat que són molts els matemàtics que han prèns com a referència per als enunciats dels seus problemes dividir 10 o 100 en dues parts que verifiquin tal o qual relació. La tradició es remonta a Diofant, a la part de problemes del primer llibre d'Aritmètica, és seguida pels autors àrabs, i arriba a Occident, on la podem trobar al llibre de Chuquet.

34. Si se te dice: multiplico la raíz de un cuadrado menos dos unidades por su raíz menos una unidad y vale seis.

(Cap. de los problemas de los cuadrados, p. 48)

35. Si se te dice: un cuadrado lo multiplico por su tercio más una unidad y se convierte en cinco semejantes al cuadrado.

(Del mateix capítol, p. 52)

36. Si se te dice: de un cuadrado resto su tercio y su cuarto y cuatro unidades, multiplico lo que queda por sí mismo y es igual al cuadrado más doce unidades.

(Del mateix capítol, p. 55)

37. Si se te dice: un hombre tiene un capital; comercia con él y lo dobla; da de limosna una unidad; comercia con el resto y lo dobla; da de limosna dos unidades; después comercia con el resto y lo dobla; da de limosna tres unidades y no queda nada del capital.

¿Cuánto es el capital?

(Cap. de los problemas de comercio, p. 79)

38. Si se te dice: un hombre tiene un capital; lo divide por mitad con un hombre y le da además una unidad; después parte igualmente el resto con un segundo hombre y le añade dos unidades; después parte el resto con un tercer hombre y le añade tres unidades. Le quedan diez unidades. ¿Cuánto era el capital?

(Del mateix capítol, p. 80)

39. Si se te dice: una mujer se ha casado con tres maridos; le dió en dote el primero una cantidad desconocida, la dotó el segundo con la raíz de lo que la dotó el primero más una unidad, y la dotó el tercero con tres cantidades semejantes a lo que la dotó el segundo más cuatro unidades. El total es cuarenta.

(Cap. de las dotes, p. 83)

40. Diez cahices de trigo y cebada se venden: cada cahiz de trigo por cinco [unidades] y cada cahiz de cebada por dos. El total es cuarenta y cuatro. ¿Cuántos cahices hay de trigo y cuántos de cebada?

(Cap. de los problemas del trigo y la cebada, p. 84)

41. Si se te dice: se compran tres cahices de trigo por diez unidades; se compra no se sabe cuánta cebada por doce unidades; se vende cada cahiz de trigo por el valor de cada cahiz de cebada; se vende cada cahiz de cebada por el valor de cada cahiz de trigo, y hay un excedente de cuatro unidades.

(Del mateix capítol, p. 85)

42. Si se te dice: un grupo de soldados realiza una expedición y recoge de botín el primero de ellos [de los soldados] dos unidades y van aumentando de tres en tres; el total de lo que cogen de botín es ciento veintiséis.

(Cap. de los ejércitos, p. 94)

43. Si se te dice: un correo sale de un pueblo con la orden de caminar cada día veinte parasangas y viaja cinco días; después se envía tras él otro correo con la orden de caminar cada día treinta parasangas ¿En cuántos días lo alcanzará? (S'entén que al cap de cinc dies surt el segon correu i que el primer no es queda aturat, sinó que cada dia segueix al ritme indicat).

(Capítol de los correos, p. 100)

NOTA: Una parasanga és una antiga unitat de mesura itinerària dels perses, que valia 6.400 metres.

44. Un correo sale de una ciudad con la orden de recorrer cada día una parasanga y aumentar una más [cada día]; camina durante ochenta y cuatro días; después se envía tras él otro correo con la orden de que recorra cada día una parasanga y aumente dos parasangas más [por día]. ¿En cuántos días lo alcanzará?

(Del mateix cap., p. 101)

45. Si se te dice: dos hombres se encuentran teniendo cada uno de ellos un capital, encuentran otro capital, y dice uno de ellos a su compañero: dame de lo que tienes una unidad más este capital encontrado y tendré lo mismo que te queda; pero dice el otro: antes bien, si tú me das de lo que tienes cuatro unidades más este capital encontrado, tendré tres veces lo que te quede. ¿Cuánto tiene cada uno de ellos y qué capital es el encontrado?

(Capítol de los problemas de dos personas que se encuentran, p. 111)

NOTA: Aquest problema condueix a un sistema indeterminat, que l'autor àrab resol a partir de suposar per exemple que la quantitat trobada ha estat d'una unitat.

ARITMÈTICA DE TREVISO (1478)

46. El Sant Pare envia de Roma a Venècia un correu, manant-li que arribi a Venècia en 7 jornades. I la Il·lustríssima Signoria de Venècia envia un altre correu a Roma que ha d'arribar-hi en 9 jornades. De Roma a Venècia hi ha 250 milles. El cas és que, per ordre d'aquests Senyors, els correus es posen tots dos alhora a fer el viatge. Demano en quants dies es trobaran i quantes milles haurà fet cadascun d'ells.

(B. Boncompagni, p. 570).

47. Una llebre és 150 passes davant d'un gos que l'encalça. En tant que la llebre fa 6 passes, el gos ne fa 10. Demano: quantes passes haurà fet el gos quan atraparà la llebre. (*Cal sobreentendre que les passes de la llebre i el gos són equivalents*).

(B. Boncompagni, p. 575).

FRANCESC SANCTCLIMENT: Summa de la art de Arismetica (1482)

48. Son 2 qui volen baratar /e lo un te pebre/ e laltre te drap. e aquell del pebre demana del quintar en la barata [*permuta*] a 25 liures: que no val en comptants [*al comptat*] sino a 20 liures. E aquell del drap demanali iustament 19 sous de la cana: segons que iustament val en comptants. Demane lo del drap: de quan li sobremetra quada cana del drap: que lo un ne laltre no sia enganat/ e quant drap li donara per lo 1 quitar de pebre: que sien iustament contents los 2 que lo un al altre noshagen de tornar res en diners comptants.

(f. 106).

49. Aci ha una lança: que la $\frac{1}{2}$ esta en lo fanc e $\frac{1}{3}$ es en laygua/ e defora layga 7 palms e $\frac{1}{4}$. Deman: quant ha de larch aquella lança.

(f. 115).

Aquest tema de la llança clavada en l'aigua és d'una gran antiguitat. Amb variants menors, va apareguent a nombroses obres d'aritmètica pràctica orientals i europees. Es pot comparar l'enunciat anterior amb el que apareix en una aritmètica manuscrita en llengua d'oc, original de Pàmies (l'actual Pamiers, prop de Foix), així com amb l'enunciat que en donà N. Chuquet: "Una lansa ha la $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ en ayga et 9 pams de fora demandi quant ha de lonc."; Chuquet diu: "Una llança està la $\frac{1}{2}$ i el $\frac{1}{3}$ en l'aigua i 9 peus fora de l'aigua. A saber quants peus té aquella llança". (els dos enunciats es troben a la pàgina 420 de l'edició de Chuquet feta per Marre).

50. Es un mercader: qui ha comprades 3 peces de drap per 45 florins e la primera es blanca, la segona es verda, la terça es negra. E la verda li costa lo doble de la blanca e 4 florins mes, e la negra li costa tres tants: que no fa la verda e 5 florins menys. Demana lo mercader a com li costave quada una per si, perquant ell sapia: a com les pora tornar a vendre: que noy perda.

(f. 120 R.)

51. Es un mercader: qui ha comprat molts moltos a preu de 4 moltos per 7 florins /e no sab quants/ ni tampoch sap: quants diners hi ha mesos, empero ell se recorda be: que lo nombre dels moltos e lo nombre dels florins tot es 170. Demana lo mercader: quants moltos ha comprat/ e quants diners hi ha mesos.

(f. 122 R.)

52. Es un home: qui te tants homens assoladats e te tants diners en la bolsa: que si ell dona a quascu 3 sous: a ell li sobran 17 sous. E si ell dona a quascu 4 sous: a ell li mancaran a compliment 9 sous. demana lome: quants assoladats te / he quants diners tenia en la bolsa.

(f. 122 v.)

53. Esdeues: que son 2 correus: qui volen fer un viatge / e lo un es en Roma / e laltre es en Barcelona. e lo de Roma vol venir a Barcelona / e lo de Barcelona vol anar a Roma / e tots parteixen en un temps e en un dia o en una hora. e lo qui ve de Roma en Barcelona: ve en 17 dies. e lo que va de Barcelona en Roma: va en 15 [dies] . es e de Roma fins en Barcelona fan 157 legues. Deman en quin temps se encontraran en lo cami / e quant haura caminat quascu: quant se encontraran.

(f. 133 R.)

NICOLAS CHUQUET. Triparty en la science des nombres (1484)

54. Vull dividir 100 en dues parts en la mateixa proporció que 7 és a 9.

(Cap. IV, 1^a part, p. 635; totes les referències es fan a l'edició francesa d'Aristide Marre de 1880-81)

55. De 100 vull fer tres parts tals que els $\frac{2}{3}$ de la primera, els $\frac{3}{4}$ de l'altra i els $\frac{4}{5}$ de la tercera siguin iguals.

(Cap. IV, 1^a part, p. 636)

56. Vull trobar quatre nombres tals que el primer amb els $\frac{2}{3}$ dels altres faci 40. I el segon amb els $\frac{3}{4}$ dels altres tres faci 40. El tercer amb els $\frac{4}{5}$ dels altres tres faci 40. I el quart amb els $\frac{5}{6}$ dels altres tres faci també 40.

(Cap. IV, 1^a part, p. 640)

57. Vull trobar quatre nombres tals que tots junts sense el primer facin 120, i sense el segon facin 90, sense el tercer 80 i sense el quart facin 75.

(Cap. IV, 1^a part, p. 642). El mateix enunciat del problema, però amb els nombres 20, 22, 24, 27, el trobem al primer llibre de l'Aritmètica de Diofant, en el Probl. XVII, fet que posa de manifest la tradició d'alguns problemes, que conservaven la seva vigència en el transcurs del temps.

58. Vull trobar dos nombres en tal proporció com 5 i 7, i tals que multiplicant el més petit per ell mateix i encara per 6, l'arrel quadrada d'aquesta multiplicació faci tant com el nombre més gran quan serà multiplicat per ell mateix i encara el que doni, [multiplicar] pel nombre més petit.

(Cap. I, 3^a part, p. 765)

59. Vull trobar tres nombres tals que el segon sumat al primer, l'addició sigui el triple del tercer i el primer sigui cinc vegades més que el segon.

(Cap. I, 3^a part, p. 761). Chuquet fa notar que aquest tipus de problemes presenten tantes solucions com hom vulgui, i que per a trobar-les n'hi ha prou de fixar un valor per a un dels nombres, i llavors s'obtenen els altres.

60. Vull trobar un nombre tal que multiplicat per 20, i a la multiplicació sumant-li 7 i deixat a part, i després encara aquest mateix nombre multiplicat per 30, i de la multiplicació traient-li 9, la primera multiplicació i la segona siguin en tal proporció com 3 i 10.

(Cap. I, 3^a part, p. 762) Aquest és el primer problema que Chuquet presenta com impossible de resoldre, a causa que l'equació final que acaba obtenint, no té solució positiva.

61. Vull trobar un nombre tal que multiplicat per ell mateix i encara per 5, l'arrel cúbica d'aquesta multiplicació sigui igual a l'arrel quadrada d'aquest nombre quan s'ha multiplicat per 6.

(Cap. I, 3^a part, p. 784)

62. Vull trobar un nombre tal que multiplicat per ell mateix i encara per 5, l'arrel quadrada d'aquesta multiplicació sigui igual a l'arrel quadrada de 12 menys el triple d'aquest nombre.

(Cap. I, 3^a part, p. 790)

63. Vull trobar dos nombres en tal proporció com 3 i 5, i tals que el més petit multiplicat per ell mateix i encara per 2, i a aquesta multiplicació sumant-li 12, fa tant com si aquests dos nombres es multipliquessin cada un d'ells per ells, i encara l'un per l'altre.

(Cap. II, 3^a part, p. 793)

64. Vull trobar un nombre que elevat a cinc i a deu, i tots dos sumats, faci 20.

(Cap. III, 3^a part, p. 804)

65. Vull trobar dos nombres tals que sumats facin 10, i multiplicats l'un per l'altra facin 10.

(Cap. IV, 3^a part, p. 806).

66. Vull trobar un nombre tal que multiplicat per ell mateix vuit vegades i encara per 6, i a aquesta multiplicació sumant-li 12, faci tant com si [el nombre] fos multiplicat per ell i després per 12 i encara el que doni multiplicat per si mateix.

(Cap. IV, 3^a part, p. 812).

Els problemes que presentarem a continuació no corresponen propiament a la *Triparty*, sinó a una col·lecció de problemes que Chuquet afegí al final de la seva obra, com aplicacions especials a l'àritmètica, a l'àlgebra, a les mesures geomètriques i a les qüestions de mercaderies.

67. Hi ha un home que diu: si tingués tants anys més com els que tinc, i encara $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ del que tinc, tindria en total 50 anys. Es vol saber quants anys té aquest home.

(Prob. XVIII, p. 420).

68. Una peça de roba està tenyida de negre $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ [d'ella]. I encara queden 8 metres que són de color gris. Quant té de llarg la peça?

(Prob. XX, p. 420).

69. Un barril ple de vi te tres aixetes de diferent pas. La de pas més gran buida tot el vi en 3 hores. Utilitzant l'aixeta mitjana tarda a buidar-se 4 hores; i fent anar l'aixeta petita tarda a buidar-se 6 hores. Si totes tres aixetes s'obren alhora, quant tarda a buidar-se tot el vi?

(Prob. XXI, p. 420)

70. Un home fa el seu testament i deixa la seva dona embarassada. I deixa 100 escuts, de tal manera que si la seva dona té una filla, vol que la dona s'emporti el doble que la filla; en canvi si té un fill ordena que aquest s'emporti el doble que la mare. El cas és que la mare té un fill i una filla. Es pregunta com s'han de repartir els 100 escuts? Conservant el desig del qui ha fet el testament.

(Prob. XXIII, p. 421)

71. Un home ha gastat els $\frac{2}{3}$ dels seus diners menys 8. Després ha gastat $\frac{1}{4}$ del que li quedava més 5. Encara després ha gastat els $\frac{2}{5}$ dels que li quedava menys 4. I al final s'ha quedat amb 12. Es pregunta quants diners tenia al començament.

(Probl. XXVIII, p. 422)

72. Un negociant ha comprat 15 peces de roba i ha pagat per elles 160 escuts. De les 15 peces n'hi ha que costen a 9 escuts la peça i altres a 13 escuts la peça. Es pregunta quantes peces de cada preu ha comprat.

(Prob. XXXIV, p. 424)

73. Un revenedor ha comprat un cert nombre de pomes que no sap quant li han costat. Però si les ven a raó de 3 per cada moneda guanya dues monedes en total. I si les revèn a 4 per moneda, guanya una moneda. Quantes pomes ha comprat i quant li han costat?

(Prob. XLI, p. 426)

74. Són dos fusters que volen fer cada un d'ells la fusteria d'una casa, idèntica l'una a l'altra. Diu un d'ells al seu company que si el vol ajudar 8 dies a fer la feina de la seva casa, la tindrà feta en 20 dies. I el segon li respon que si l'altre el vol ajudar a ell durant 10 dies, farà la seva en 15 dies. Es pregunta, si cadascú fa la feina de la seva casa a part, en quants dies acabaran la feina cada un d'ells.

(Prob. LIII, p. 429)

75. Un negociant ha prestat a un altre la suma de 20 escuts a cert interès, que al cap de l'any guanya com el principal [que s'afegeix al capital prestat al principi]. I al cap de dos anys els 20 escuts s'han convertit en 30. Es pregunta a quin interès per cent s'han prestat els 20 escuts.

(Prob. LXXXVII, p. 437).

76. És un barril que té 9 barrals i mig, el qual té un forat de tal grandària que el primer barral es buida en 1 hora. El segon barral es buida en 2 hores, el tercer en 4 hores. El quart en 8 i així successivament, doblant sempre les hores. Es pregunta en quantes hores els 9 barrals i mig es buidaran.

(Prob. XCVI, p. 439). *Un barral és una mesura antiga equivalent a 25 litres.*

Chuquet dona la resposta, per a aquest problema, de $\sqrt{524288} - 1$ hores que probablement obté raonant així: per a buidar-se 9 barrals han de passar $512 - 1$ hores (expressió que apareix a partir de la suma d'una progressió geomètrica de raó 2); per a buidar-se 10 barrals haurien de passar $1024 - 1$ hores; així doncs, com que hi ha 9 barrals i mig, haurem de buscar la mitjana proporcional (geomètrica) entre 1024 i 512, que és l'arrel quadrada de 524.288, d'on el resultat que dona.

77. Hi ha un home que vol fer un viatge de 100 llegües de tal forma que ha de recórrer 3 llegües el primer dia. El segon dia 6, i així [successivament] augmentant 3 llegües més cada dia. Es vol saber en quants dies farà el viatge.

(Prob. CIV, p. 441).

78. Una dona porta uns ous a vendre al mercat. Allà es troba un home que està disposat a comprar-los tots. Però la dona no sap quant puja el compte dels ous, excepció feta que quan els compta de 2 en 2, o de 3 en 3, o de 4 en 4, o de 5 en 5, o de 6 en 6, sempre li sobre 1 [ou]. I quan els compta de 7 en 7 no li sobra cap ou. Es pregunta quina quantitat d'ous pot tenir la dona.

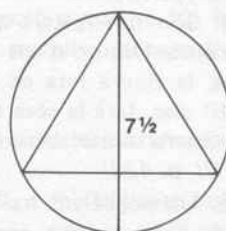
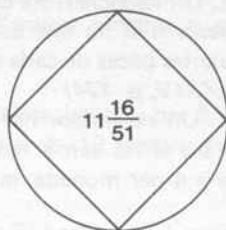
(Prob. CXLIII, p. 452)

JUAN DE ORTEGA: Tratado subtilissimo de Aritmética y de Geometria (1534)

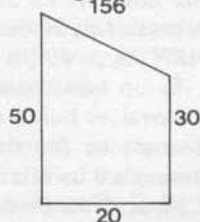
78. Es una tierra redonda la qual tiene por diametro 16 varas: en la qual su dueño quiere fazer una torre quadrada: demandando que quantas varas terna de anchura cada cuadrangulo [que medirà cada costat].

(Capítol de Geometria, f. 228 de l'edició del 1537; totes les referències pertanyen a aquesta edició, i tots els exercicis d'Ortega citats al mateix capítol. Els dibuixos reproduïxen els de l'original).

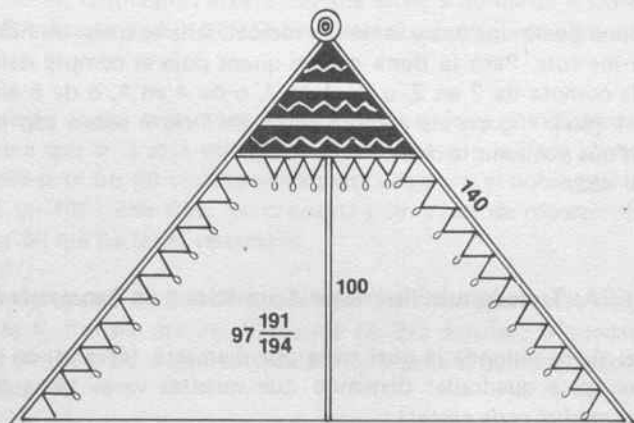
79. Un hombre tiene una tierra redonda que tiene por diametro 10 varas: este hombre en esta tierra quiere fazer una torre que este fecha en manera de triangulo: demando que quantas varas terna la tal torre por cada un triangulo [per cada costat].



80. Un hombre tiene dos fortalezas en que la una tiene 50 varas de alto: y la segunda tiene 30 varas de alto: estas dos torres estan apartadas la una de la otra 20 varas: y el dueño de estas dos torres quiere hazer un passadizo de la una punta de la una torre fasta la otra punta de la otra torre demando que quantas varas terna de largo el tal passadizo.
(f. 231).



81. Un señor manda hazer una tienda en un campo a un maestro: el tal maestro fizo la tienda en que puso un mastil que tiene de largo 100 varas: y el paño que viene desde la cabeça del mastil fasta la tierra ha de largo 140 varas demando que quantas varas terna de redondez toda la tierra que toma el paño: y quantas varas aura en toda la tierra: y quantas varas terna el diametro de la tal tierra: y que quantas varas aura en todo el paño que cubre la tal tienda.
(f. 231)



82. Hi havia dos capitans que van dividir, cadascun, 48 monedes d'or entre els seus soldats. Un d'ells tenia dos soldats més que l'altre. Aquell que tenia dos soldats menys tenia 4 monedes d'or més per a cada un dels seus soldats que monedes tenia l'altre per a cada un dels seus propis. El que cal trobar és quants soldats tenia cadascun. (*Problema II, Capítol V, p. 40; totes les referències es fan a l'edició anglesa del 1969*).

83. Hi havia dues societats, una de les quals tenia 3 membres més que l'altra. Van dividir el mateix nombre de peces d'or entre els seus membres. Les peces d'or eren 93 més que el total d'homes existent en ambdues societats, i cadascun dels membres de la societat més petita va rebre 6 peces d'or més que cadascun dels membres de la més gran. [*Quantes peces va rebre cadascun dels membres de cadascuna de les societats?*]. (*Prob. III, Cap. V, p. 41.*)

84. Hi ha un nombre el qual, si el doble de la seva arrel quadrada li és sumat, i si a aquesta suma li és addicionat el doble de la seva arrel quadrada [*d'aquesta suma*], el total que dóna és 10.

Per oposició al plantejament que resultaria traduint, sense reflexionar, $y + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{y} = 10$, és interessant el plantejament que fa Cardano: "Tenim que 10 és igual al segon nombre més dues vegades la seva arrel quadrada. Sigui, per tant, el segon nombre, la suma, x^2 , i aquest, més dues vegades la seva arrel quadrada, és 10,...". (*Prob. IIII, Cap. V, p. 42*).

85. Trobar el nombre el qual, quan la seva arrel cúbica li és restada, i quan l'arrel quadrada de la resta és sumada a la resta, dóna el primer nombre.

Anomenant x el nombre buscat, resulta $\sqrt{x - \sqrt[3]{x}} + x - \sqrt[3]{x} = x$, que, simplificant i anomenat $y = \sqrt[3]{x}$, dóna $y = \sqrt{y^3 - y}$. La resolució de Cardano és molt menys formal i molt més "de cap": "Sigui la resta, després que hagi restat l'arrel cúbica, x^2 . Llavors afegeix-li la seva arrel quadrada, fent $x^2 + x$, i això és igual a x^3 , ja que la suma de x^2 i allò que li fou sumat és tant com hi havia al principi. Per tant, allò que és sumat és igual a allò que fou restat. Però l'arrel cúbica de tota quantitat és allò que s'havia de restar. Per tant x és l'arrel cúbica de la suma, i per tant la suma és un cub i és igual a $x^2 + x$. Divideix per x i $x^2 + x$ igualarà a $x + 1$. (...)"

(*Prob. V, Cap. V, p. 43*).

86. Un rei envia 128.000 monedes d'or al general que li mana l'exèrcit perquè pugui pagar 7.000 infants i 7.000 cavallers. L'estipendi és tal que 100 monedes pagarien 18 infants més que cavallers. Un capità que es posà a les ordres del general amb 1700 infants i 200 cavallers vol saber quina paga li pertoca.

Cardano, agafant x com el nombre de cavallers pagats amb 100 monedes, arriba a l'equació $\frac{140.000x + 126.000}{x^2 + 18x} = 1.280$

(*Prob. VII, Cap. V, p. 44*).

87. Divideix 20 en tres quantitats proporcionals, la segona de les quals sigui igual a la suma de les arrels de la primera i de la tercera.

(*Prob. VIII, Cap. V, p. 45*).

88. Divideix 10 en dues parts, la més gran de les quals menys dues vegades la seva arrel quadrada és igual a la més petita més dues vegades la seva arrel quadrada.

(*Prob. IX, Cap. V, p. 46*).

89. Trobar dos nombres tals que la suma de llurs quadrats és 100, i el producte d'un d'ells per l'altre és igual al doble de llur suma.

Cardano el resol a partir de $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 100 + 4(x + y)$, trobant $x + y$ per una equació de segon grau i deixant el problema reduït a una darrera equació de segon grau. Cardano acaba dient: "...li així resulta) x igual a $\sqrt{26} + 1 + \sqrt{23 - \sqrt{104}}$, i y igual a $\sqrt{26} + 1 - \sqrt{23 - \sqrt{104}}$. (...) Procedint de la manera ordinària hauriem arribat a $\sqrt{50 + \sqrt{2068 - \sqrt{26624}}}$ i $\sqrt{50 - \sqrt{2068 - \sqrt{26624}}}$. És evident, tanmateix, que, encara que són equivalents, aquests són més enredosos que els que hem donat més amunt".

(Prob. I, Cap. X, p. 92).

90. Trobar dos nombres tals que la suma de llurs quadrats és 100 i el quadrat del gran és igual al gran per quatre vegades el petit més vuit vegades el gran.

(Prob. II, Cap. X, p. 93).

91. Trobar dos nombres tals que la suma de llurs quadrats és 100 i el producte d'un d'ells per l'altre és igual a tres vegades el quadrat del petit més sis vegades el mateix petit.

(Prob. III, Cap. X, p. 94).

92. Dividir 10 en dues parts, la suma dels quadrats i cubs de les quals és 400.

Per advertir la importància que té la bona elecció de la incògnita, es pot plantejar aquest problema agafant x i $10 - x$, o bé $5 + x$ i $5 - x$.

(Prob. II, Cap. XXXII, p. 193).

93. Dividir 8 en dues parts, el producte de la gran i de la petita de les quals, elevat al quadrat, és igual a la petita per nou vegades la gran.

(Prob. IIII, Cap. XXXII, p. 194).

94. Trobar dos nombres, el producte dels quals és 8, i la suma dels quadrats dels quals més els nombres mateixos és 40.

La bona elecció de les incògnites, segons Cardano, és prendre la suma dels nombres igual a $x/2$ i un d'ells igual a y .

(Prob. XIII, Cap. XXXV, p. 211).

95. Trobar dos nombres, la diferència entre els quadrats dels quals és 10, i el gran dels quals més els dos quadrats és 40.

Segons Cardano, cal prendre x igual a la suma dels nombres i $y/2$ igual a un dels nombres.

(Prob. XVI, Cap. XXXV, p. 213).

96. "També Euclides dona, en la [proposició] 25 del sisè [llibre dels Elements] la forma de saber dibuixar una superfície igual a una altra superfície rectilínea, i igual a una altra [figura] proposada.

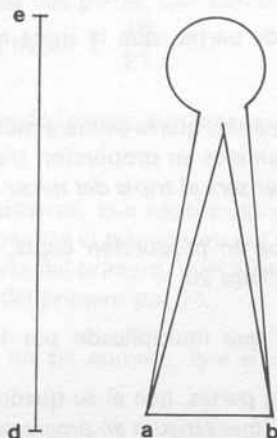
Os proposo que em sigui trobat la forma de concluir un tal problema amb qualsevolga apertura de compàs proposada pel adversari, intentant-ho sempre (encara que no es digués) amb regla general, i amb demostració matemàtica".

NICCOLO TARTAGLIA: Sfida matematica (1546-1547)

Alguns problemes extrets dels Cartelli creuats entre Tartaglia i Ferrari, en la famosa disputa que els va enfrontar. Tots ells són proposats per Tartaglia al seu rival.

97. Amb l'apertura a b, voldria que em designéssiu, sobre la línia ed, un triangle [fixar 2 punts sobre el segment e d que determinaran els 3 segments del triangle] de tres angles desiguals, amb la condició que la proporció entre l'angle més gran i el mitjà sigui triple de la sesquitercia, i la de l'angle mitjà al [angle] petit sigui sesquàltera, sense alterar l'apertura a b del compàs.

(Prob. 25 Cartello 2^a resposta, p. 55).



98. Calculeu-me amb regla general la Radice terza relata propinqua [arrel d'índex 11, aproximada] de 999 999 999 999, i finalment de $\frac{3}{7}$ i també de $177148 \frac{1}{2}$..

(Prob. 25 Cartello 2^a resposta, p. 56).

99. Partiu 10 per R relata 5 piu R cuba 3 [$\sqrt[5]{5} + \sqrt[3]{3}$].

(Prob. 29 Cartello 2^a resposta, p. 56).

100. Tinc 27 cucu piu 36 primi relati piu 54 secondi relati piu 8 cubi igual a 1.000 [$27x^9 + 36x^5 + 54x^7 + 8x^3 = 1.000$] us demano de fer això [resoldre-ho] i altres similars, resolent-ho per regla general, o en cas contrari, sent resoluble, us demano quant val la cosa [a x].

(Prob. 31 Cartello 2^a resposta, p. 56).

PEDRO NUÑEZ: Libro de Algebra en Aritmetica y Geometria (1567)

101. Partir 30 en tales dos partes, que dando a la primera 3 y a la segunda 5 resulte la primera el duplo de la segunda.

(Prob. 1, Cap. 5, foli 151; tots els exercicis citats de l'obra de Núñez pertanyen al capítol 5, "De la práctica de las reglas de Algebra en los casos de Arithmetica, que son 110", per la qual cosa n'omitirem la referència d'ara en endavant).

102. Buscar dos numeros, que la diferencia dellos sea 2, y la de los quadrados sea 10.

La descomposició $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, coneixent el valor de $x - y$, simplifica notablement la resolució.

(Prob. 4, f. 152).

103. Juntar con estos dos numeros 3 y 2, otros dos numeros en la proporcion de 5 para 1, y que sean tales que hecha está addicion, resulte el uno duplo del otro.

(Prob. 10, f. 153)

104. Buscar un numero que multiplicado en si mismo [*elevat al quadrat*] y el producto por 6 haga dos veces tanto como si lo multiplicasemos en si dos veces, que es el su cubo.

(Prob. 13, f. 154)

105. Partamos 20 en tales dos partes, que la suma multiplicada por 4 haga tres veces tanto como la otra por 5.

(Prob. 16, f. 155).

106. Partamos 20 en tales 3 partes, que la primera multiplicada por 2, y la segunda por 4 y la tercera por 8 resulten numeros en proporcion tripla. (*Un dels nombres resultarà el triple d'un altre, i aquest darrer serà el triple del tercer nombre*).

(Prob. 18, f. 156).

107. Busquemos dos numeros en proporció dupla, y que el quarto del menor multiplicado por el tercio del mayor haga 20.

(Prob. 24, f. 158).

108. Busquemos un numero que multiplicado por la su raiz quadrada haga 4.

(Prob. 27, f. 159).

109. Partamos 10 en tales dos partes, que el su quadrado y los de las partes guarden entre si proporcion Arithmetica (*que estiguin en progressió aritmètica*).

(Prob. 29, f. 159).

110. Tenemos estos dos numeros 8 y 12 y juntando con el 8 un numero ignoto, y juntando con el 12 la octava parte del mismo numero ignoto, resultan iguales el 8 y el 12 hecha la tal addicion y queremos conocer el ignoto.

(Prob. 37, f. 161).

111. Tenemos 5 numeros, y los 4 dellos sin el primero valen 127 y los quatro sin el segundo valen 119 y los quatro sin el tercero valen 109 y los quatro sin el quarto valen 104 y los quatro sin el quinto valen 97 y queremos saber quanto es cada uno dellos.

(Prob. 38, f. 161).

112. Busquemos un numero que los quadrados de la su mitad, y del su tercio, y del su quarto, todos juntos hagan tanta suma, como es el mismo numero.

(Prob. 39, f. 162).

113. Partamos 100 en tales 5 numeros, que el segundo exceda al primero en 3 y el tercero al segundo en 7 y el quarto al tercero en 10 y el quinto al quarto en 20.

(Prob. 40, f. 162).

114. Tenemos un numero partido en tales tres partes, que dando la primera el tercio de si misma, y la segunda dando un $\frac{1}{4}$ de si misma, y dando la tercera el $\frac{1}{5}$ de si misma, y haziendo una suma de lo que las tres partes han dado, y partiendo esa suma en tres partes iguales, y bolviendo a cadauna lo que dado, mas el tercio de la dicha suma, que fue partida en 3 partes iguales, quedan ordenadas por tal manera las primeras partes del dicho numero, que la primera es la mitad del mismo numero, y la segunda es el tercio, y la tercera es el sexto, y queremos saber quanto es este primero numero, y quanto es cada una de las partes, en las cuales esta partido, y esto en enteras.

Les últimes paraules fan referència al caràcter indeterminat del problema, exigint que les solucions siguin nombre enters.

(Prob. 45, f. 166).

115. Busquemos tres numeros que el primero con 10 del segundo resulte ygal a lo que resta del segundo, y el segundo con 10 del tercero resulte duplo de lo que resta del

tercero, y el tercero con 10 del primero resulte triplo de lo que resta del primero.

(*Prob. 48, f. 168*).

116. Busquemos dos numeros, que el 1 con $\frac{1}{3}$ del 2 y mas 4 resulte duplo de lo que queda del 2, y el 2 con la mitad del 1 y mas 6 resulte 5 vezes mas que lo que queda del primero.

(*Prob. 50, f. 169*).

117. Partamos 10 en tales dos partes, que partiendo una por otra, y la otra por la otra, entrambos los quocientes hagan $2\frac{16}{21}$.

(*Prob. 53, f. 170*).

118. Partamos 8 en tales dos partes, que los sus quadrados y la multiplicacion de la una en la otra sea 49.

(*Prob. 64, f. 174*).

119. Busquemos dos numeros, que recibiendo el primero tal parte del segundo, qual 9 es del mismo primero, resulte el primero mayor que lo que resta del segundo en 18 y recibiendo el segundo tal parte del primero, qual 10 es del mismo segundo, resulte el segundo mayor que lo que resta del primero por 24.

(*Prob. 77, f. 184*).

120. Partamos 20 por un tal numero, que el quociente exceda al partidor en 4.

(*Prob. 89, f. 198*).

BEHÂ EDDIN: Kholâcat al hissâb (Finals x. XVI)

Els problemes són extrets de l'edició d'Aristide Marre, de l'any 1864.

121. A una quantitat de diners hi afegim el seu cinquè i cinc dirhems, i traiem del que resulta el seu terç i cinc dirhems, i llavors no queda res [*Quina era la quantitat inicial?*].

(*Prob. III, Cap. X, p. 44*).

122. Quatre canonades van a parar a un dipòsit; una d'elles l'omple en un dia, i cada una de les altres en un dia més. En quant de temps s'omple el dipòsit?

(*Prob. IV, Cap. X, p. 45*).

123. Dos homes assisteixen a la venda d'un cavall. Un d'ells li diu a l'altre: afegeix al que jo tinc un terç del que tu tens i llavors tinc el preu [*del cavall*]; l'altre respon: afegeix al que jo tinc un quart de que tu tens, i llavors jo tinc el preu [*del cavall*]. Quant tenia cada un d'ells, i a quant pujava el preu [*del cavall*].

(*Prob. VI, Cap. X, p. 47*).

124. Tres garrafes s'omplen, l'una de 4 lliures de mel, una altra de 5 lliures de vinagre, la tercera de 9 lliures d'aigua. Les tres substàncies s'aboquen en un recipient i es barregen per fer oximel; llavors es tornen a omplir de nou les tres garrafes. Es demana quina quantitat de cada substància hi haurà a cada una de les garrafes.

L'oximel era un antic preparat farmacèutic fet a base de mel i vinagre, tal com s'indica en el text del problema.

(*Prob. VII, Cap. X, p. 47*).

Bibliografia

Les obres d'autors del segle XVI o anteriors, especialment si es tracta d'edicions de l'època, van acompanyades de la indicació de la Biblioteca on poden ser consultades.

- ABENBEDER: *El álgebra de Abenbeder* (edició i traducció a l'espanyol de J.A. SANCHEZ PEREZ), Madrid, 1916.
- ARITMETICA DE TREVISIO: Un estudi, amb reproducció d'algunes pàgines, es troba a BONCOMPAGNI, *Intorno ad un trattato...* D.E. SMITH en publicà un resum a *Isis*, 6 (1924), 311-31.
- BAR HIYYA: *Tractat de Geometria* (edició i traducció al català de J.M. MILLAS VALLICROSA), Biblioteca Hebraico-catalana, Barcelona, 1931.
- BEHA EDDIN AL AAMOULI. *Quintessence du Calcul* (edició i traducció al francès d'A. MARRE), París, 1864. (Biblioteca de Catalunya).
- BELL, E.T.: *Historia de las Matemáticas*, México, 1949.
- BERNAL, J.D.: *Historia social de la Ciencia*, Península, Barcelona, 1979.
- BONCOMPAGNI, B.: *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478*. Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, t. XVI, 1862-63. La disertació de Boncompagni ocupà 7 sessions de l'Acadèmia. A la B. de Catalunya es pot consultar un volum amb les separates corresponents a les 4 últimes sessions.
- PIETRO BORGI: Cf. D.E. SMITH, "The first great commercial Arithmetic".
- BOYER, C.B.: *A History of Mathematics*, J. Wiley & Sons, New York, 1968.
- THOME BRADWARDINE: *Arithmetica*, París, 1505 (Biblioteca de Catalunya).
- CAJORI, F.: [1980] *A History of Mathematics*, Chelsea, New York.
- [1928-29] *A History of Mathematical Notations*, Open Court, La Salle, (Ill.).
- GIROLAMO CARDANO: *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis* (edició i traducció a l'anglès de T.R. WITMER), M.I.T. Press, Cambridge (Mass.), 1968.
- GIROLAMO CARDANO: *Opera omnia* (10 v.), Lyon, 1663 (Biblioteca Universitària, Barcelona).
- CASTELNUOVO, E.: *Didáctica de la matemática moderna*, Trillas, Mexico, 1970.
- CATALOGUE OF BOOKS PRINTED IN THE XVth CENTURY NOW IN THE BRITISH MUSEUM, Part IX i Part X, London, 1971.
- CIPOLLA, C.M. (Ed.): *Historia económica de Europa (2). Siglos XVI y XVII*, Ariel, Barcelona, 1979.
- PEDRO CIRUELO: *Tractat Aritmetice Practice qui dicit algorismus*, París, 1505 (B. de Catalunya).
- COLLETE, J.P.: *Histoire des mathématiques* (2 v.) Editions du Renouveau Pédagogique, Ottawa, 1973.
- CROMBIE, A.C.: *Historia de la ciencia: De San Agustín a Galileo* (2 v.) Alianza Ed., Madrid, 1974.
- NICOLAS CHUQUET: *Le Triparty en la science des nombres*, editat per A. MARRE al *Bullettino di Bibliografia e d'Historia delle Scienze Matematiche et Fisiche*, vol. XIII (1880), 555-659, 693-814; vol. XIV (1881), 413-60.
- DIOFANT D'ALEXANDRIA: *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones* (edició i traducció al francès de P. VER ECKE), Desclée de Brouwer, Bruxelles, 1926.
- LUDOVICO FERRARI: *Cartelli di sfida matematica* (edició d'A. MASOTTI), Ateneo de Brescia, Brescia, 1974.

- FIBONACCI: Veure LEONARDO DA PISA.
- ORONCI FINEO. *Arithmetica Practica*, París, 1535 (B. de Catalunya).
- GARBAYO, E.: *Control ideològic de la invenció matemàtica*, Barcelona, 1978.
- GARIN, E.: *La revolución cultural del Renacimiento*, Crítica, Barcelona, 1981.
- GATTEGNO, C., PUIG ADAM, P. i altres: *El material para la enseñanza de las Matemáticas*, Aguilar, Madrid, 1964.
- GATTEGNO, C., DIEUDONNE, J. i altres: *La enseñanza de las Matemáticas*, Aguilar, Madrid, 1971.
- GLAYMANN, M. — VARGA, T.: *Les probabilités à l'école*, CEDIC, París, 1973. (N'existeix versió espanyola).
- GRUP ZERO: *La mesura i els nombres*, Vicens Vives, Barcelona, 1982.
- GRUP ZERO: *Funcions exponencials i logarítmiques*, ICE de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1978.
- GUITEL, G.: *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion, París, 1975.
- HADAMARD, J.: *Psicología de la invención matemática*, Espasa-Calpe, Madrid, 1960.
- HALMOS, P.R.: "El corazón de las matemáticas", *Alef sub zero*, Febrer 1981.
- HANSON, N.R.: *Constelaciones y conjeturas*, Alianza Ed., Madrid, 1978.
- HILL, C.: *Los orígenes intelectuales de la revolución inglesa*, Crítica, Barcelona, 1980.
- HOFMANN, J.E.: *Historia de las matemáticas*, Uteha, México, 1960.
- HOLTON, G.: *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*, Reverté, Barcelona, 1981.
- HULL, L.W.H.: *Historia y filosofía de la ciencia*, Ariel, Barcelona, 1978.
- IREM DE STRASBOURG: *Pédagogie de l'exercice et du problème*, Cedec, París, 1976.
- ITARD, J.: *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, publicació de l'A.P.M.E.P., París, 1969.
- JORDANUS NEMORARIUS: *Arithmetica*, París, 1495 (B. de Catalunya).
- KARPINSKI, L.C.: "The first printed Arithmetic of Spain", *Osiris*, 1 (1936), 411-20.
- KLEIN, F.: *La matemática elemental vista desde un punto de vista superior* (2 v.), Biblioteca Matemática, Madrid, 1927-1931.
- KLINE, M.: *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo XXI, Madrid, 1976.
- KOYRE, A.: *Estudios de la historia del pensamiento científico*, Siglo XXI, Madrid, 1977.
- KUHN, T.S.: *La revolución copernicana*, Ariel, Barcelona, 1978.
- LEONARDO DA PISA: *El libro de los números cuadrados*, Eudeba, Buenos Aires, 1973.
- LOPEZ PIÑERO, J.M. i altres: *Materiales para la historia de las ciencias en España: S. XVI-XVII*, Pre-textos, Valencia, 1976.
- LOPEZ PIÑERO, J.M.: *Ciencia y Técnica en la sociedad española de los siglos XVI y XVII*, Labor, Barcelona, 1979.
- LOPEZ PIÑERO i altres: *Diccionario histórico de la ciencia moderna en España* (2 vol.), Península, Barcelona, 1983.
- LORIA, G.: *Storia delle matematiche*, (3 v.) Ulrico Hoepli, Torino, 1929-1933.
- MALET, A. — PARADIS, J.: "500 aniversari de la primera aritmètica impresa a Catalunya i a la península ibèrica" (*Ciència*) 19, Setembre 1982, 550-54.
- MARRE, A.: "Notice sur Nicolas Chuquet et son *Triparty en la science des nombres*", *Bullettino di Bibl. e di St. delle scienze mat. et fis.*, vol. XIII (1880). L'article encapçala l'edició de l'obra de N. Chuquet.
- MENENDEZ PELAYO, M.: *Historia de los Heterodoxos españoles*, (8 v.), E. Nacional, Madrid, 1964.
- MIALARET, G.: *Las matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan*, Pablo del Río Ed., Madrid, 1977.
- MIELI, A.: *Panorama General de Historia de la Ciencia* (11 v.), Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951.
- MILLAS VALLICROSA, J.M.: *Estudios sobre historia de la ciencia española* C.S.I.C., Barcelona, 1949.
- MONTUCLA, J.F.: *Histoire des mathématiques* (4 v.), Albert Blanchard, París, 1968.
- PEDRO NUÑEZ: *Libro de algebra en aritmetica y geometria*, Anvers, 1567 (Biblioteca Menéndez Pelayo, Santander).
- OMAR KHAYYAM: *The Algebra of Omar Khayyam* (edició i versió anglesa de D.S. KASIR), Columbia Teachers College, New York, 1931.
- JUAN DE ORTEGA (O HORTEGA): *Tratado subtilissimo de Arismetica y de Geometria*, Sevilla, 1534 (B. Menéndez Pelayo, Santander). La Biblioteca de Catalunya i la Universitat de Barcelona conserven, respectivament, exemplars de les edicions de Roma, 1515, i Sevilla, 1552.
- LUCA PACIOLI: *Summa di Aritmetica, geometria, proporzioni e proporzionalita*, Venècia, 1494 (B. de la Universitat de Sevilla i B. del Escorial).
- PARADIS, J. — MALET, A.: "El primer llibre de matemàtiques a Catalunya" *L'Avenç*, 51, Juliol-Agost 1982, 493-5.

- JUAN PEREZ DE MOYA: *Aritmetica practica y speculativa*, Granada, 1590 (B. Universitària, Barcelona). La Biblioteca Universitària també conserva exemplars de les edicions de Madrid, 1598, i Barcelona, 1703, i la Biblioteca de Catalunya de la de Madrid, 1675.
- PIAGET, J. i altres: *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Ed., Madrid, 1978.
- PIAGET, J. — INHELDER, B.: *De la logique de l'enfant   la logique de l'adolescent*, P.U.F., Paris, 1970. (N'existeix vers o espanyola).
- POINCARÉ, H.: *Ciencia y método*, Espasa-Calpe, Madrid, 1962.
- POLYA, G.: *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1979.
- PUIG ADAM, P.: *La Matem tica y su enseñanza actual*, publicació de la Direcció General de Enseñanza Media, Madrid, 1959.
- ROBERT RECORDE: "Declaración sobre la utilidad de la aritmètica" (fragment). Reproduït a SIGMA (vol. 1, pp. 136-43), Grijalbo, Barcelona, 1968.
- REY PASTOR, J.: [1926] *Los matemáticos españoles del siglo XVI*, Biblioteca Scientia, Madrid.
- [1966]: *Elementos de An lisis Algebraico*, Biblioteca Matem tica, Madrid.
- ANTICH ROCHA: *Arithmetica*, Barcelona, 1565 (B. Universitària, Barcelona i B. de Catalunya).
- SANCHEZ PEREZ, J.A. [1921]: *Biografía de matemáticos  rabes*, Madrid.
- [1929]: *Las matemáticas en la Biblioteca del Escorial*, Real Academia de Ciencias E. F. y N., Madrid.
- [1949]: *La aritm tica en Roma, en India y en Arabia*, C.S.I.C., Madrid.
- SANTALO, L.A.: *La educación matem tica, hoy*, Teide, Barcelona, 1975.
- FRANCESC SANCTCLIMENT: *Summa de la art de Arismetica*, Barcelona, 1482 (B. de Catalunya).
- SARTON, G. [1927-1948]: *Introduction to the history of Science*, (3 v., 5 t.), Carnegie Institution, Baltimore.
- [1965a]: *Seis Alas*, Eudeba, Buenos Aires.
- [1965b]: *Historia de la ciencia*, Eudeba, Buenos Aires.
- SMITH, D.E. [1958]: *History of mathematics*, Dover, New York.
- [1959]: *A Source Book in Mathematics*, Dover, New York. (2 v.).
- [1926]: "The first great commercial Arithmetic", *Isis*, VIII (1926)
- STRUICK, D.J. [1960]: *La matem tica, sus orígenes y su desarrollo*, Siglo XX, Buenos Aires.
- [1967]: *A Concise History of Mathematics*, Dover, New York.
- [1969]: *Source Book in Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.).
- TANN RY, P.: *Mémoires Scientifiques* (5 v.) (J.L. Heiberg i H.G. Zeuthen ed.), Paris, 1912-1924.
- NICCOLO TARTAGLIA: *Quesiti et inventioni diverse*, Venecia, 1554 (B. Universitària, Barcelona).
- NICCOLO TARTAGLIA: *Cartelli di sfida matematica* (edició d'A. Masotti), Ateneo de Brescia, Brescia, 1974.
- TATON, R. (ed.): *Historia general de las ciencias*, (3 v., 5t.) Destino, Barcelona, 1972.
- TURNBULL, H.W.: *Los grandes matemáticos*, SIGMA, vol. 1, pp. 4-94, Grijalbo, Barcelona, 1968.
- JOAN VENTALL : *Arithmetica*, Barcelona, 1521 (B. Universitària, Barcelona.).
- VERA, F. [1937]: *Historia de la Ciencia*, Iberia, Barcelona.
- [1947]: *La matem tica de los musulmanes españoles*, Nova, Buenos Aires.
- VERNET, J.: "El segle XIII: Arnau de Vilanova i Ramón Llull", *L'Avenç*, 41, 1981, 563-8.
- VERNET, J.: *Historia de la ciencia española*, Publicaciones del Instituto de España, Madrid, 1975.
- WARTOFSKY, M.W.: *Introducción a la filosofía de la ciencia*, Alianza Ed., Madrid, 1979.
- WIELEITNER, H.: *Historia de las matemáticas* (2 v.), Labor, Barcelona, 1939.
- WITMER, T.R. (ed.): *The Great Art by Girolamo Cardano*, M.I.T. Press, Cambridge (Mass.), 1968.

Índex

Presentació	5
PART I: ELS ORÍGENS DE L'ÀLGEBRA SIMBÒLICA (1478-1545)	9
Cap. 1. La tradició aritmètica i algebraica dels àrabs	13
La floració cultural àrab	14
El tractament dels nombres en els àrabs	16
La Trigonometria. Una motivació per al desenvolupament de l'àlgebra	21
El tractament algebraic de les equacions i les seves notacions	23
Breu comentari del compendi d'àlgebra d'Abenbeder	26
Cap. 2. La tradició aritmètica medieval a Europa	29
Les matemàtiques a la Universitat Medieval	30
J. Nemorarius	32
Bradwardine	35
Oresme	35
Leonardo da Pisa	39
Valoració de conjunt	42
Cap. 3. Les aritmètiques mercantils	45
El contingut de les aritmètiques mercantils	48
El tractament dels problemes de les aritmètiques mercantils	51
La metodologia de les aritmètiques mercantils	56
Cap. 4. Les primeres àlgebres renaixentistes	59
El context i les motivacions	59
Autors i obres més importants	64

	L'Escola italiana	64
	L'Escola alemanya	66
	Altres autors	68
Cap. 5	Le Triparty en "La science des nombres de Nicolas Chuquet"	71
	Algunes dades sobre l'obra i l'autor	71
	L'aritmètica dels nombres enters i trencats	72
	El càlcul amb radicals	78
	Les regles de l'àlgebra	82
Cap. 6.	L'obra matemàtica de Niccolò Tartaglia	89
	Algunes dades biogràfiques	89
	Els Quesiti	90
	La disputa entre Tartaglia i Ferrari (1547-48)	95
	Algunes característiques de la matemàtica de l'època	100
Cap. 7.	"L'Ars Magna" de Gerolamo Cardano	103
	Algunes dades sobre l'obra i l'autor	103
	El contingut de l'Ars Magna	104
	Alguns temes importants dins de l'Ars Magna	115
	La relació entre arrels i coeficients	115
	L'ús de nombres negatius i imaginaris	118
	L'orientació i metodologia de l'obra	121
	La importància de l'Ars Magna	121
Cap. 8.	L'aritmètica i l'àlgebra a la Península Ibèrica al s. XVI	123
	L'aritmètica. El <i>Tratado</i> de Juan de Ortega	123
	L'àlgebra	127
	Marco Aurel	127
	Juan Pérez de Moya	128
	Pedro Núñez	132

PART II: CONSIDERACIONS SOBRE L'ORIGEN I LA CONSTITUCIÓ D'ALGUNS CONCEPTES ARITMÈTICS I ALGEBRAICS 139

Advertència 140

Cap. 9. **L'evolució del concepte de nombre** 141

	Alguns trets relatius als nombres trencats	144
	Alguns trets relatius als nombres radicals	145
	Conclusions sobre l'evolució del concepte de nombre	148

Cap. 10.	L'aparició dels nombres negatius	151
Cap. 11.	La formació del llenguatge algebraic	159
	Els antecedents	160
	Diofant	160
	Àlgebra hindú i àrab	160
	Nicolas Chuquet (1484)	161
	L'Escola italiana	161
	Bombelli	164
	L'Escola alemanya	165
	Alguns símbols francesos i anglesos de mitjan segle XVI	167
	Alguns trets del procés de formació del llenguatge algebraic	169
	Condicionaments tècnics i sociològics	169
	La funció dels primers símbols algebraics	170
	Les notacions exponencials primitives	172
	Càlcul formal versus raonament geomètric	174
	Expressió retòrica i formalismes	175
	Resum i algunes conclusions	176
Cap. 12.	Evolució del concepte d'equació polinòmica i de les seves solucions	181
PART III: PROPOSTES DIDÀCTIQUES PER A L'ÀLGEBRA ELEMENTAL		187
Cap. 13.	Consideracions generals	189
	La renovació didàctica i pedagògica	189
	L'aprenentatge com a redescobriments	190
Cap. 14.	La introducció dels nombres trencats i les operacions amb ells	193
	Les diferents opcions possibles per a presentar el tema dels nombres racionals	194
	La introducció dels nombres trencats i les operacions amb ells	196
	Un esquema de desenvolupament heurístic	197
	L'algorisme del producte de nombres trencats	202
	L'algorisme de la divisió entre trencats	205
	La divisió entre enters, els nombres trencats i els nombres mixtes	206
	Introducció als nombres decimals i a la identificació entre trencats i decimals	207
Cap. 15	Paper dels problemes de planteig. Proporcionalitat directa	211
	La introducció del concepte de proporcionalitat	212
	La introducció a l'estudi de les semblances en el pla	216
	Algunes qüestions sobre la proporcionalitat inversa	218

Cap. 16. Problemes generals concernents a la didàctica del llenguatge algebraic	223
L'aprenentatge del llenguatge algebraic: un problema didàctic a descobrir	223
Casos generals i casos particulars	226
Les equacions de primer i segon grau	226
Els polinomis	227
Les fórmules de la combinatòria	227
El binomi de Newton	228
Els paràmetres	230
Una proposta utòpica	231
El lloc del càlcul radical	233
Cap. 17. El càlcul amb radicals	235
La introducció del concepte d'arrel numèrica	236
La introducció del càlcul radical	240
A. Introducció de les regles bàsiques	241
Multiplicació d'arrels del mateix índex	241
Radicació consecutiva	242
Obtenció d'arrels d'índex comú	243
Multiplicació i divisió de dues arrels qualssevol	243
B. El càlcul radical amb nombres "compostos"	245
Suma de nombres compostos. Coeficients	245
Subtracció de nombres compostos. Parèntesis	246
Producte de nombres compostos. Identitats notables	248
Divisió de nombres compostos. Racionalització	250
C. Cap a les regles formals del llenguatge algebraic	251
Cap. 18. Introducció a les equacions de primer i segon grau	255
Puntualitzacions que es desprenen de l'anàlisi de la història	255
Crítica a certs plantejaments actuals, predominants a l'ensenyament de les equacions de primer i segon grau	256
Introducció a les equacions de primer grau	258
La introducció de l'ús d'una lletra o més per a designar una o més incògnites	264
La discussió de les equacions de primer grau segons les solucions que tinguin	267
El tractament de les equacions de segon grau	268
Desenvolupament de l'equació de segon grau completa	270
Cap. 19. Les fórmules de la combinatòria	279
Les permutacions. La introducció de $n!$	279
Les combinacions. Els nombres combinatoris	282
La formalització	283
Comentari	284

Cap. 20. Conclusions generals	285
Una metodologia per a l'ensenyament de l'àlgebra elemental	285
Algunes pautes generals	286
Un ensenyament cíclic	286
Un ensenyament heurístic	287
Un ensenyament interdisciplinar	288
Un ensenyament adaptat al nivell intel.lectual dels alumnes	288
PART IV: RECULL DE PROBLEMES	291
Cap. 21. Col.lecció de problemes, amb l'autor, obra i any	293
Alguns problemes singulars	293
Diofant (s. II)	300
Beda (673-735)	303
Alcalsadi (-1225)	304
Abenbéder (s. XII ó s. XIII)	304
Aritmètica de Treviso (1478)	306
Francesc Santcliment (1482)	306
Nicolas Chuquet (1484)	307
Juan de Ortega (1534)	309
Gerolamo Cardano (1545)	311
Niccolò Tartaglia (1546-1547)	312
Pedro Núñez (1567)	313
Behà Eddin (Finals s. XVI)	315
BIBLIOGRAFIA	317

Antoni Malet i Jaume Paradís en els darrers anys han publicat distints articles sobre història i ensenyament de les matemàtiques *El primer llibre de matemàtiques publicat a Espanya* (L'Avenç, n.º 51, 1982), *500 aniversari de la primera aritmètica impresa a Catalunya i a la Península* (Ciència, n.º 19, 1982), *Notes sobre la història de les fraccions decimals* (L'Escaire, n.º 10, 1983). Des de fa dos anys formen part del grup HISTÒRIA I DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES juntament amb Lluís Bibiloni, Joan Miralles i Pelegrí Viader. Aquest grup està preparant actualment l'edició del segon volum de *Els orígens i l'ensenyament de l'Àlgebra Simbòlica* (1545-1637).

Alor e gloria de deu e dela hu
mil uerge Maria mare sua co
mença lo libre appellat sama
dela art de Arismetica. Lo q̃l
diuisirem en .iij. parts. çoes en nombrar
aiustar/restar/multiplicar/dimidiar/par
tir/regla de tres ab diuersitat de raons/ 2
panyes/cambis/barates erècats ab toi
tes les .4. species/ sou de fi ab diuersitat
de billons/de vna e oues falses posicions
progressiōs/ e propoxiōs. Deles quals
parts ho species breument empero a suf
ficiencia aci enlo present tractat parlarē

De nombrar e conexer les figures.

Nombrar es lo nombre preposat en al /
gues figures comunes de paraula per/
ceptiblement exprimir. / Altrament nom
brar es lo nombre en len teniment conce
but per hures comunes visiblement re/
presentar. **E** has de saber: que no son
mes de .io. chiffres. Car axi com lo nomb̃
de .io. es lo primer nombre cōplīt: lo qual
conte en si tots los nombres: que passē

