MATEMÁTICAS

UNA RENOVACIÓN METODOLÓGICA

JOSEP GASCÓN
JOSEP M. LAMARCA

PRIMER CURSO
DE ENSEÑANZAS
MEDIAS / BUP

GUÍA DEL PROFESOR

PPU

MATEMÁTICAS

UNA REINTERPRETACIÓN SOCIOLÓGICA

MATEMÁTICAS

UNA RENOVACIÓN METODOLÓGICA

ice
Institut de Ciències de l'Educació
Universitat de Barcelona

MATEMÁTICAS

UNA RENOVACIÓN METODOLÓGICA

JOSEP GASCON
JOSEP M. LAMARCA

GUÍA DEL PROFESOR

PPU
Barcelona. 1987

Primera edición 1987

Promociones y Publicaciones Universitarias, S.A.
Marqués de Campo Sagrado, 16
08015 Barcelona

ISBN: 84-7665-151-1
Depósito Legal: B-35419-87

Imprime Limpergraf, S.A. Calle del Río, 17, Nave 3. Ripollet. Barcelona

A Maria Rosa i Ninona

INDICE

Capítulo I

METODOLOGÍA DIFERENCIADA Y HEURÍSTICA

1. *INTRODUCCIÓN*

Denominamos «*Didáctica*» al sistema constituido tanto por las metodologías didáctica y de evaluación interna que se explicitan en la *Guía del profesor*, como por los contenidos y procedimientos que se desarrollan en los correspondientes *Materiales para el alumno*.

En concreto, aquí presentamos las 4 Didácticas siguientes:

1. Cálculo Aritmético.
2. Álgebra.
3. Problemas de planteo algebraico.
4. Problemas de contar.

Dichas Didácticas son fruto de la investigación que el Grup Aresta (adscrito al ICE de la Universidad de Barcelona) inició en 1982. Las sucesivas modificaciones que a lo largo de los años anteriores hemos introducido han sido realizadas en base a la experimentación que, con la colaboración de numerosos profesores, hemos venido realizando curso a curso. A todos ellos y a los profesores que trabajaron con nosotros en la investigación durante los primeros cursos queremos agradecer su inestimable ayuda.

Al tiempo que reclamamos el «carácter provisional» también para esta versión, asumimos plenamente nuestra responsabilidad respecto al trabajo que aquí presentamos.

Por lo que respecta a la *Metodología Didáctica* que se propugna y que, para abreviar, llamaremos *Diferenciada y Heurística,* será caracterizada en los próximos apartados.

En el apartado 4 trataremos brevemente la problemática general de la *Evaluación.*

Los resultados obtenidos hasta la fecha, especialmente en los cursos más recientes, se han conseguido utilizando con rigor la metodología y los materiales que aquí se describen. Un resumen de estos resultados figura en el apartado 5.

El profesor tiene, naturalmente, toda la libertad para elegir el grado de seguimiento que desee en la aplicación de cada Didáctica, pero nos parece que esta elección podrá hacerla con más conocimiento de causa (es decir, con mayor *libertad*) si dispone no sólo de una precisa descripción de la Metodología Didáctica, sino además de los resultados que se han alcanzado con ella.

Los contenidos y procedimientos que se desarrollan en los respectivos *Materiales* forman parte de lo que podría ser un *primer curso de Enseñanzas Medias (14-15 años)* con las diferenciaciones pertinentes para cada grupo de alumnos. Para completar una formación matemática básica debería añadirse una introducción a la Geometría y un primer curso de Probabilidad y Estadística, además de los métodos de resolución de determinadas clases de problemas.

2. *METODOLOGÍA DIFERENCIADA*

La experiencia indica que las dificultades para el aprendizaje difieren en gran medida de unos alumnos a otros. Prescindiendo aquí [1] de los diferentes factores que «causan» o «explican» dichas diferencias (cognitivos, actitudinales o situacionales), resulta incontestable que dichas diferencias son muy importantes al empezar la Enseñanza Media, y que es previsible que se agraven aún más en un futuro próximo.

Esta situación hace cada día más imprescindible aplicar una *Metodología Diferenciada* caracterizada por:

a) Planificar otros niveles de aprendizaje además del nivel mínimo común.

b) Diversificar la instrucción, de manera que aumenten las posibilidades de alcanzar el nivel mínimo para los alumnos con dificultades y, a la vez, se potencie el pleno desarrollo de las capacidades de todos los alumnos.

Para diseñar una tal metodología es preciso afrontar algunas cuestiones básicas entre las que se destacan las siguientes:

1. ¿En qué medida es posible *conocer a priori* qué alumnos tendrán dificultades en un aprendizaje determinado, así como aquéllos que están capacitados para obtener un rendimiento excelente?
2. ¿Cómo puede utilizarse esta *predicción del rendimiento* para diseñar una *Metodología Diferenciada*, esto es, fundamentada en una previa distribución de los alumnos en *grupos de habilidad*?

Respondemos, a continuación, a estas preguntas.

2.1. Modelos de predicción (simplificados)

Hemos utilizado como Modelos de Predicción los modelos clásicos de regresión múltiple, tomando en cada caso como *variable «criterio»* la variable de rendimiento final correspondiente a cada aprendizaje específico, y como *variables «predictivas»* 4 factores de «habilidad» o «capacidad» (interpretables dentro del modelo SOI de J. P. Guilford —véase la nota 1—) y los conocimientos iniciales relativos a cada aprendizaje.

Aquí, y para evitar la pasación de las pruebas de «capacidad» utilizaremos los que llamamos *modelos simplificados*, que utilizan como variables «predictivas» únicamente las correspondientes a los conocimientos iniciales relativos.

Estos modelos son esencialmente invariantes respecto de la muestra. A continuación se incluyen las ecuaciones de regresión obtenidas con una muestra de 342 alumnos durante el curso 85-86. Al lado de cada variable se

1. Para una aproximación a la interpretación de algunos factores cognitivos relevantes en el aprendizaje de las matemáticas en 1.º de BUP, véase, por ejemplo, Gascón (1985) y Lamarca (1985).

indica su nombre y el valor máximo que puede tomar. R es el coeficiente de correlación múltiple obtenido en cada caso; es una medida del grado en que la variable teórica VP («*Valor Predicho*» de la variable en cuestión) predice la variable «criterio» correspondiente. Su cuadrado indica la proporción de la variancia de la variable «criterio» que es explicada por la influencia de la combinación lineal de las variables predictivas.

§ *Cálculo Aritmético*

$$\boxed{VP\ (GLARF) = 65.685 + 1.038 * TCI + 0.657 * DEI}$$

$$R = 0.6834$$

Donde	TCI =	Técnicas de Cálculo Inicial	(Máx. = 90)
	DEI =	Detección de Errores Inicial	(Máx. = 80)
	GLARF =	Global de Aritmética Final	(Máx. = 170)

§ *Álgebra*

$$\boxed{VP\ (GLALF) = -\ 10.774 + 0.250 * TCF + 0.318 * DEF + 0.607 * ALEI}$$

$$R = 0.8463$$

Donde	TCF =	Técnicas de Cálculo Final	(Máx. = 90)
	DEF =	Detección de Errores Final	(Máx. = 80)
	ALEI =	Álgebra Elemental Inicial	(Máx. = 25)
	GLALF =	Global Álgebra Final	(Máx. = 50)

§ *Problemas de planteo algebraico*

$$\boxed{VP\ (PF) = 1.102 + 0.060 * DEF + 0.154 * GLALF + 0.198 * GLPI}$$

$$R = 0.8036$$

Donde GLPI = Global Planteo Inicial (Máx. = 32)
PF = Planteo Final (Máx. = 16)

§ *Problemas de contar*

$$\boxed{VP\ (GLPC) = -3.105 + 0.103 * TCF + 0.509 * GLALF + 0.517 * PF}$$

$$R = 0.8111$$

Donde GLPC = Global Problemas de Contar (Máx. = 40)

2.2. Elaboración de los grupos de habilidad

Para cada una de las Didácticas, y en base a la correspondiente variable «*valor predicho*» (VP) realizamos, *a priori*, la siguiente clasificación en grupos de habilidad:

— Grupo de alumnos que, previsiblemente, tendrán *dificultades* para el aprendizaje. Se caracterizan por tener:

$\boxed{VP < \mu_{VP}}$ (es el *grupo D*)

Destacamos, dentro de este grupo, los alumnos cuya predicción es: $VP < \mu_{VP} - \sigma_{VP}$ porque la experiencia indica que se trata de alumnos con dificultades tan graves que muy difícilmente podrán acceder al nivel mínimo común (en estas desigualdades, μ_{PV} y σ_{VP} significan, respectivamente, la media y la desviación estándar de la correspondiente variable VP).

— Grupo de alumnos que, por el contrario, es previsible que tengan un rendimiento *excelente*. Se caracterizan por tener

$\boxed{VP > \mu_{VP} + \sigma_{VP}}$ (es el *grupo E*)

— Grupo de alumnos que, aunque no es previsible que tengan dificultades, tampoco es esperable que alcancen un rendimiento excelente. Se caracterizan por tener

$\boxed{\mu_{VP} < VP < \mu_{VP} + \sigma_{VP}}$ (es el *grupo M*)

Como que los valores de la media y de la desviación típica de VP sólo pueden estimarse utilizando una muestra concreta de alumnos y, por otra parte, es difícil acceder a muestras estadísticamente representativas (de la población de los alumnos de 1.º de BUP, por ejemplo), nos parece aconsejable utilizar las siguientes estimaciones obtenidas durante el curso 85-86 con una muestra de 342 alumnos:[2]

	Grupo D	*Grupo M*	*Grupo E*
Aritmética (GLARF)	VP < 108 50 %	108 < VP < 136 37 %	VP > 136 13 %
Álgebra (GLALF)	VP < 24 55 %	24 < VP < 34 33 %	VP > 34 12 %
Problemas de planteo (PF)	VP < 9 57 %	9 < VP < 13 30 %	VP > 13 13 %
Problemas de contar (GLPC)	VP < 21 54 %	21 < VP < 30 31 %	VP > 30 15 %

2. Por ejemplo, si un alumno tiene los puntajes siguientes: TCF = 62, DEF = 52, GLALF = 31 y PF = 12 entonces, el valor predicho de GLPC es el siguiente (ver página 5):

$$\begin{aligned} VP\ (GLPC) &= -3.105 + 0.103 * 62 + 0.509 * 31 + 0.517 * 12 = \\ &= -3.105 + 6.386 + 15.779 + 6.204 = 25.264 \end{aligned}$$

Por consiguiente, dicho alumno se incluiría en el grupo M, respecto de la Didáctica de problemas de contar.

Los porcentajes de la tabla se refieren a la magnitud relativa de cada uno de los grupos D, M y E en cada una de las Didácticas (por ejemplo, en la Didáctica de problemas de contar resultó, en la muestra citada, que el 54 % de alumnos se asignaron al grupo D, el 31 % al M y el 15 % restante al E).

2.3. Diferenciación de la instrucción

Aunque en cada capítulo de esta Guía se encuentran los detalles de cómo utilizar la citada clasificación de los alumnos en grupos de habilidad para aplicar la correspondiente instrucción diferenciada, daremos aquí algunas características generales de los materiales que se utilizan para posibilitar dicha diferenciación en el marco del aprendizaje en el aula.

No haremos mención de la forma de utilizar dichos materiales puesto que ello constituye la instrucción misma que forma parte de la metodología didáctica específica de cada aprendizaje.

2.3.1. *Instrucción preliminar: Predidácticas*

La Instrucción preliminar se lleva a cabo a partir de unos materiales que llamamos Predidácticas; en ellas, se desarrollan con gran detalle contenidos y procedimientos elementales imprescindibles para acceder al nivel mínimo común. Están concebidas especialmente para los alumnos del grupo D, aunque en ocasiones también pueden ser útiles para alumnos del grupo M.

Suelen estar diseñadas para que el alumno pueda trabajarlas individualmente después de recibir algunas instrucciones y una vez realizadas algunas ejemplificaciones en clase. No obstante, y dadas las dificultades (de comprensión lectora, incluso) que tienen la mayoría de alumnos del grupo D, suele ser aconsejable corregirlos y comentarlos en el aula con la mayor amplitud posible.

En las Didácticas de Resolución de Problemas, las Predidácticas juegan un papel especial: pretenden descomponer el proceso de resolución de una clase de problemas en operaciones más elementales y atacar, por separado, las dificultades del alumno en cada una de estas operaciones elementales.

2.3.2. *Ampliación de la instrucción*

Se lleva a cabo en base a materiales o actividades especialmente destinadas a los alumnos del grupo E con objeto de contribuir a que éstos desarrollen plenamente sus capacidades.

En la Didáctica de álgebra las ampliaciones se concretan en materiales que, en general, desarrollan contenidos y procedimientos de un nivel de abstracción superior al tratado en los materiales comunes.

En las tres Didácticas restantes, la ampliación de la instrucción se concreta más bien en la aceleración del ritmo de la instrucción común y, consecuentemente, en la posibilidad de acceder al aprendizaje de los métodos de resolución de determinadas clases de problemas. En el Cálculo Aritmético, por ejemplo, sólo los alumnos del grupo E acceden, y no sin dificultades, al nivel de la Resolución de Problemas para el que se requiere no sólo haber alcanzado rápidamente un alto dominio de las técnicas de cálculo sino, también, la capacidad de utilizar adecuadamente dichas técnicas para poner en práctica una estrategia de resolución elaborada previamente.

3. *METODOLOGÍA HEURÍSTICA*

En una primera aproximación podemos distinguir, dentro del aprendizaje de las Matemáticas, entre la *adquisición de contenidos* o sistemas conceptuales y el *dominio de procedimientos* u operaciones que pueden realizarse con los contenidos a fin de conseguir un objetivo determinado.[3] En cierto sentido, esta distinción puede expresarse hablando de conocimientos de primer o segundo orden respectivamente.

Aunque en la práctica no es posible separar ambos tipos de conocimientos, tiene sentido decir que una Metodología Didáctica es «*heurística*» en la medida que enfatiza el dominio de los procedimientos en contraposición a las que persiguen, expresa o tácitamente, la adquisición de contenidos como objetivo último.

Así, la *Metodología Heurística* utiliza los sistemas conceptuales que son más adecuados para potenciar el dominio de procedimientos previamente seleccionados,[4] en lugar de reducir éstos a meros instrumentos que, además

---

3. Entre estas operaciones podemos citar: *criticar* argumentos y demostraciones, *reconocer* un concepto matemático, *elegir* la técnica adecuada, *utilizar* el razonamiento analógico, *proponer* conjeturas en base a razonamientos inductivos, *buscar* contraejemplos y *traducir* al lenguaje simbólico una información dada en lenguaje semántico o figurativo.

4. Por ejemplo, podemos utilizar: el cálculo para potenciar la evaluación y la capacidad de elegir la técnica adecuada; la divisibilidad para potenciar el pensamiento analógico y la capacidad de buscar contraejemplos; la proporcionalidad para potenciar la traducción recíproca entre lenguajes diversos; los polinomios para potenciar la capacidad de proponer conjeturas, etc.

de no considerarse explícitamente, sólo se utilizan para reforzar la adquisición de los conceptos.

La Metodología Heurística debería apoyarse, por tanto, en un modelo funcional que diese cuenta de los diferentes tipos de procedimientos intelectuales así como de su interrelación mutua. Desgraciadamente, y a pesar de que tanto desde una perspectiva sicométrica como a partir de la teoría del procesamiento de la información se han propuesto diversos modelos, carecemos de uno que posea la base empírica y la capacidad explicativa necesarias.

Partiendo del análisis de la actividad matemática misma, observamos que en ésta intervienen *procedimientos complejos* como los citados anteriormente y que, en los aspectos más creativos de dicha actividad, se utilizan incluso *sistemas estructurados de procedimientos complejos.* Estos últimos son especialmente importantes en todo lo referente a la Actividad de Resolución de Problemas.[5] Por otra parte, en el aprendizaje de los alumnos con dificultades, es fácil observar que un procedimiento cualquiera puede descomponerse en otros cada vez más elementales, pero que nunca acaban de ser triviales para todos los alumnos. Esto puede interpretarse postulando que el dominio de cualquier procedimiento, por elemental que parezca, requiere el desarrollo de ciertas *habilidades intelectuales primarias* que involucran las operaciones mentales de *Reconocer, Memorizar, Converger, Diverger* y *Evaluar* (véase Guilford (1977)).

Nuestra propuesta de Metodología Didáctica pretende potenciar el desarrollo de estos tres niveles de procedimientos: Las Didácticas de Cálculo Aritmético y Álgebra ponen el acento en los procedimientos de los dos primeros niveles de complejidad, mientras que las Didácticas de Resolución de Problemas tienen como objetivo explícito la enseñanza de *métodos generales de resolución* entendidos como sistemas estructurados de procedimientos (tercer nivel).

En esto nos apartamos, también, de algunas metodologías tradicionales que utilizan la Resolución de Problemas para la introducción, aplicación y consolidación de sistemas conceptuales.

---

5. Basta pensar en la «Comprensión de un enunciado» o en la «Elaboración de un plan de resolución».

10

4. *EL PROBLEMA DE LA EVALUACIÓN*

Aunque este problema suele plantearse como una cuestión relativa al aprendizaje: *¿cómo evaluar el aprendizaje efectivo de los alumnos?*, es igualmente importante y, en cierto sentido, tiene mayor alcance plantearlo respecto a la enseñanza: *¿cómo evaluar la eficacia de una determinada Metodología Didáctica?* y, especialmente, *¿cómo utilizar esa evaluación para obtener criterios de modificación de la Didáctica?*

Respecto de la primera cuestión queremos resaltar que, el hecho de poner el énfasis en la enseñanza de procedimientos frente a la mera adquisición de contenidos, no nos exime de la necesidad de evaluar el grado en que cada alumno llega a dominar efectivamente dichos procedimientos, en particular necesitamos instrumentos capaces de medir el grado de asimilación de un determinado método de resolución. Hemos utilizado para ello pruebas paralelas (pretest-postest) constituidas por problemas de distinto contenido que los utilizados durante el aprendizaje (ver, por ej., el capítulo IV de esta Guía).

Por lo que se refiere a la segunda, hemos utilizado el *índice de Mc Guigan* para medir la eficacia de cada una de las Didácticas (ver detalles en los capítulos siguientes), al tiempo que hemos obtenido algunos criterios que hemos utilizado para modificar curso a curso las sucesivas versiones de las Didácticas (ver los detalles en Gascón [1985] y Lamarca [1985]).

Por otra parte, y a cualquier nivel que se plantee la cuestión, debe hacerse una importante distinción entre *«evaluación interna»* y *«evaluación externa»* de una Metodología Didáctica, según se utilice o no un marco conceptual y unos instrumentos de medida independientes de la Didáctica. Así, por ejemplo, para comparar la eficacia relativa de dos Didácticas sería imprescindible una evaluación externa.

Por nuestra parte, además de los procedimientos internos de *evaluación del aprendizaje*, que figuran en los materiales, y de algunos criterios internos de modificación de la enseñanza (obtenidos en base a nuestra experiencia didáctica) hemos utilizado criterios externos para *evaluar la enseñanza*, basados en la interpretación de algunos factores cognitivos relevantes en este aprendizaje. No hemos podido, sin embargo, obtener una medida externa de la eficacia de cada Didáctica por carecer de los instrumentos sicométricos adecuados.

5. *ALGUNOS RESULTADOS*

Damos a continuación algunos resultados relativos a la ya citada muestra de 342 alumnos del curso 85-86:

		Inicial		*Final*	
	Valor máximo	*Media*	*Desviación estándar*	*Media*	*Desviación estándar*
Aritmética (GLARI-GLARF)	170	51,68	22,62	110,58	29,63
Álgebra (GLALF)	50	—	—	22,82	11,43
Problemas de planteo (PI-PF)	16	3,38	3,94	8,67	4,51
Problemas de contar (GLPC)	40	—	—	20,26	10,85

No existen notas iniciales paralelas a las de las variables GLALF y GLPC puesto que se considera que los contenidos que con ellas se miden no se tratan, o se tocan muy superficialmente en la **Enseñanza Primaria.**

Así, sólo pueden calcularse los índices de Mc Guigan relativos a las Didácticas de Aritmética y de Problemas de Planteo; se obtienen los siguientes valores:

$$\boxed{G_{AR} = 49,78} \quad \text{y} \quad \boxed{G_{P} = 41,89}$$

Estos índices pueden interpretarse como el *porcentaje de ganancia respecto del total de ganancia posible* (por ej., un índice 50 significa que, por término medio, los alumnos con un 0 inicial obtendrían un 5 final, en una escala de 0 a 10; los alumnos con un 2 inicial obtendrían un 6 final, con un 4 inicial un 7 final, y así sucesivamente).

Capítulo II

CÁLCULO ARITMÉTICO

1. *INTRODUCCIÓN*

No parece haber dudas de que la importancia del Cálculo Aritmético es absolutamente decisiva en la superación de las Matemáticas, ya que es imposible abordar temas complejos sin una profunda base de Cálculo Aritmético.

Puede que cause, sin embargo, cierta sorpresa la afirmación de que «(los problemas) que implican cálculos numéricos se correlacionan significativamente con la puntuación total de las escalas de inteligencia, evitan las deficiencias de verbalización y de lectura, y poseen un elevado poder predictivo con respecto a la capacidad mental potencial» (Glasser y Zimmerman [1972], p. 91).

Por otra parte, recientes investigaciones de la escuela rusa (Menchinskaya, Doblaev, etc.) ponen un decidido énfasis en subrayar la importancia del Cálculo Aritmético y Algebraico (*cf.*, especialmente, Kilpatrik [1969 y 1975]).

Paralelamente, nosotros hemos venido constatando un deterioro si no progresivo, por lo menos permanente y acusado del nivel alcanzado en Cálculo Aritmético por los alumnos que terminan la Enseñanza Primaria (véase Lamarca [1985]).

Ante esta situación hemos elaborado una Didáctica de Cálculo Aritmético que aborda sistemáticamente la compleja problemática que conlleva el aprendizaje del Cálculo Aritmético por parte del alumno, y cuyo *Objetivo*

General se centra en posibilitar a todos los alumnos el desarrollo óptimo de las capacidades involucradas en dicho aprendizaje, de acuerdo con sus capacidades y conocimientos iniciales.

En esta Didáctica distinguimos tres aspectos del Cálculo Aritmético que conviene no confundir:

a) El dominio de las *técnicas de cálculo*, que distribuimos en tres niveles de complejidad creciente (véase el apartado 2).
b) La *detección de errores* de Cálculo Aritmético.
c) La *Resolución de problemas* de Cálculo Aritmético.

Es innegable, desde luego, que el conocimiento de las principales técnicas de cálculo y su aplicación en ejercicios de distinta complejidad es imprescindible para poder afirmar que se posee un dominio suficiente del Cálculo Aritmético. Sin embargo, esta condición necesaria está lejos de ser suficiente, ya que un alumno puede manejar con soltura las técnicas más fundamentales de cálculo, pero, en cambio, ser incapaz de detectar errores aislados elementales (como por ejemplo: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ y similares —véanse los apéndices III y IX—) tal como hemos comprobado repetidamente (*cf*. Lamarca [1982] y [1985]).

Además, es indiscutible que la capacidad de autocrítica o autoevaluación del alumno, tan fundamental en su formación intelectual, está íntimamente relacionada con la capacidad de detectar errores (ver Guilford [1977], esp. capítulos VIII y IX).

Por todo ello creemos que la detección de errores (que constituye un aspecto del Cálculo Aritmético tradicionalmente olvidado) hay que tratarla específicamente y en profundidad.

Un tercer aspecto del Cálculo Aritmético, que muy a menudo se confunde con el primero, es el de la Resolución de problemas de Cálculo Aritmético donde, aquí, el vocablo *problema* se entiende en el sentido de Polya, es decir, se caracteriza por el hecho de que su resolución requiere cuatro fases: lectura y comprensión del enunciado, elaboración de un plan de resolución, realización del plan y evaluación de todo el proceso (véase Polya [1981]).

Efectivamente, no es suficiente dominar las técnicas de Cálculo Aritmético para resolver un problema del tipo: «¿Qué número es mayor, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

o bien $\sqrt{6}$?», dado que la dificultad primordial reside en elaborar un plan de resolución que explicite qué técnicas hay que aplicar y en qué orden para alcanzar el objetivo propuesto.

En otras palabras, alumnos con un nivel aceptable en técnicas de Cálculo Aritmético (e incluso en detección de errores) no son capaces de superar satisfactoriamente una prueba de verdaderos problemas de Cálculo Aritmético. De hecho, nuestra experiencia ha demostrado en distintas ocasiones y con diferentes muestras de alumnos que sólo algunos de los alumnos con especiales capacidades y conocimientos pueden acceder a niveles satisfactorios en Resolución de problemas.

En los apartados siguientes se concretarán con más detalle los tres aspectos del Cálculo Aritmético a los que nos hemos referido, así como la metodología didáctica empleada y su articulación con el desarrollo del curso académico.

2. *CONTENIDOS Y PROCEDIMIENTOS*

En la presente Didáctica nuestro propósito se centra en la consecución de unos *Objetivos específicos* que concretaremos a continuación.

2.1. Técnicas de cálculo

Pretendemos que los alumnos alcancen un dominio suficiente de las técnicas de cálculo en los tres niveles en las que las hemos distribuido; dichos niveles pueden caracterizarse como sigue:

— *Nivel 1: Técnicas simples,* tales como suma de dos fracciones cuyos denominadores son primos entre sí, extracción de factores de un radical, etc. En concreto distinguimos *28 técnicas simples,* que figuran en el cuadro I.

Se caracterizan, esencialmente, por tratarse de transformaciones en las cuales se aplica directamente un único método o una única propiedad o, in-

CUADRO I

INDICE DE TÉCNICAS SIMPLES

Técnicas	Forma	Ejemplos	Predidáctica
(1)	$a \pm (\pm b)$	-3-(-7) ; -11-(+8) ; 8-(-6) ;	Nº 1
(2)	$a \pm b \otimes c$	7-3.5 ; 12.3+8 ; 9-15:3 ;	Nº 2
(3)	$\frac{a.p}{b.q} = \frac{p}{q}$ mcd(p,q)=1	25/20 = 5/4	Nº 3
(4)	$m/d \pm n/d$	2/3 + 1/3 ; 7/3 + 2/3 ;	Nº 3
(5)	$a/d \pm b/c.d$	7/4 + 3/8 ; 5/7 - 3/14 ;	Nº 3
(6)	$a/b \pm c/d$ mcd(b,d)=1	2/3 + 4/7 ; 8/5 - 7/8 ;	Nº 3
(7)	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$ mcd(b,d) ≠ 1	$\frac{1}{10} + \frac{1}{12}$; $\frac{2}{15} - \frac{3}{25}$	Nº 3
(8)	$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}$	$\frac{8}{3} . \frac{9}{10}$; $\frac{99}{50} : \frac{3}{35}$	Nº 4
(9)	$a \pm \frac{b}{c}$	$2 + \frac{3}{5}$; $9 - \frac{5}{3}$;	Nº 4
(10)	$a . \frac{b}{c}$	$5 . \frac{3}{2}$; $18 . \frac{7}{2}$;	Nº 4

(11)	$\frac{a/b}{c}$; $\frac{a}{b/c}$	$\frac{7/5}{7}$; $\frac{2}{3/2}$;	Nº 4
(12)	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \otimes \frac{e}{f}$	$7+2.\frac{3}{7}$; $5-\frac{2}{3}.\frac{1}{7}$; $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}:\frac{5}{2}$;	Nº 5
(13)	$\frac{a.b \pm c}{a}$	$\frac{2a+5}{2}$; $\frac{17-5a}{5}$	Nº 5
(14)	$a - \frac{b \pm c}{d}$	$2 - \frac{4-x}{3}$; $\frac{1}{7} - \frac{2+x}{7}$;	Nº 5
(15)	Propiedades de las potencias	$5^3.5^4$; $6^4/6^2$; $(7^4)^2$; $(3.2)^4$; $5^{-2} = 1/5^2$;	Nº 6
(16)	$a \pm b \otimes c^d$	4.5^2 ; $8:2^2$; $7+5.2^3$;	Nº 7
(17)	$-a^n$; $(-a)^n$	-2^5 ; $(-3)^4 + (-2)^5$;	Nº 7
(18)	Propiedades de los radicales	$\sqrt[7]{5}.\sqrt[7]{13}$; $\sqrt[9]{14} / \sqrt[9]{2}$; $(\sqrt[3]{7})^2$; $\sqrt[3]{11^{-5}} = 11^{-5/3}$;	Nº 8
(19)	$\sqrt[m]{a^r} \otimes \sqrt[n]{a^s} = \sqrt[p]{a^t}$ $m \neq n$	$\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[6]{5^5}$; $\frac{\sqrt[3]{11^5}}{\sqrt{11}}$;	Nº 9
(20)	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$\sqrt[3]{\sqrt{7}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[3]{11^2}}$;	

(21)	$\sqrt[m]{a} \otimes \sqrt[n]{b} = \sqrt[p]{c}$ $m \neq n,\ p = mcm(m,n)$	$\sqrt[3]{5}.\sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{5^4.7^3}$; $\sqrt[12]{2^5} / \sqrt[8]{3^3} = \sqrt[24]{2^{10}/3^9}$;	Nº 9
(22)	$a^r.\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^{rm}.b}$	$7.\sqrt{3}$; $3^3.\sqrt[5]{7^2}$; $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{5^2}$;	Nº 10
(23)	$\sqrt[m]{a^{mn}.b} = a^n.\sqrt[m]{b}$	$\sqrt[4]{256}$; $\sqrt[3]{7^{17}}$; $\sqrt[4]{6144}$;	Nº 10
(24)	$\sqrt[m]{a^{mn}.b} \pm \sqrt[m]{c^{mp}.b}$ (Suma y resta de radicales homogéneos)	$\sqrt{8}+\sqrt{50}$; $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}$; $\sqrt{52}+\sqrt{117}$; $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$;	Nº 10
(25)	$(a \pm b)^2$	$(2x^2+3y)^2$; $(x+\sqrt{2}y)^2$; $(-\sqrt{a}+2b^2)^2$; $(3x^2-y)^2$;	Nº 11
(26)	$a.x \pm a.y = a.(x \pm y)$	$2x^2y^2 + 6x^3y^2$; $5a^3b^4 + 10a^4b^5$;	Nº 11
(27)	Racionalizar la fracción $\dfrac{a}{\sqrt[m]{b^n}}$	$\dfrac{2}{\sqrt[3]{5^4}}$; $\dfrac{3}{\sqrt[5]{7^2}}$;	Nº 12
(28)	Racionalizar la fracción $\dfrac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$	Nº 12

El símbolo $\otimes$ significa «producto» o «cociente».

cluso, una técnica simple previamente conocida, dado que la dificultad se concentra, fundamentalmente, en un único punto.

— *Nivel 2: Técnicas compuestas*, que consisten en transformaciones que requieren la aplicación sucesiva de dos o tres (a lo sumo) técnicas simples (podríamos hablar, quizás, de «yuxtaposición» de técnicas simples). Además, tanto el orden de aplicación de tales técnicas simples como el propio reconocimiento de las mismas está claramente sugerido por la estructura aritmética del enunciado. A veces, incluso, se trata de una simple reiteración de la misma técnica simple (por ejemplo, suma de tres o más fracciones, suma de tres o más radicales homogéneos, etc.).

En el cuadro II figura una muestra de técnicas compuestas de nivel 2; mientras que el cuadro I pretende ser una muestra prácticamente exhaustiva de las técnicas simples que consideraremos a lo largo de toda la Didáctica, en el cuadro II, por el contrario, no hemos pretendido tal cosa, máxime si tenemos en cuenta que el número de combinaciones de dos técnicas simples cualesquiera es realmente elevado.

— *Nivel 3: Pre-problemas*, o técnicas compuestas por dos o más técnicas simples, generalmente no yuxtapuestas (por lo que el nivel de dificultad es superior al que hemos denominado nivel 2), y tales que bien el propio enunciado explícitamente o bien su estructura aritmética determina la técnica o técnicas a emplear (a diferencia de los problemas, en los que dichas técnicas no vienen sugeridas o determinadas por el enunciado), como por ejemplo: «Simplifica la siguiente expresión sacando factores comunes adecuadamente: ab + + a + b + 1» (véase el cuadro III para más ejemplos).

Aunque el aprendizaje de las técnicas de cálculo a todos los niveles aquí descritos involucra el conocimiento de *contenidos* básicos tales como los conceptos de fracción, número racional, número real, raíz n-sima, etc., el énfasis se pone en el aprendizaje de los *procedimientos concretos* que se utilizan en las transformaciones de unas expresiones en otras y, por extensión, en los *procedimientos más generales* que intervienen en la aplicación de aquéllos; es decir, se potencia el desarrollo de las *operaciones mentales* que entran en juego en la resolución de un ejercicio. Concretamente, en este

CUADRO II

EJERCICIOS II

1. $-2+(-1).5.3-(2.(3-2.4)-5)+3 = \dots \ (=1)$

2. $7+2.(-3)-(4.(-2)+5)-(-3).(-2) = \dots \ (=-2)$

3. $4+2.5+3.((-2).5-3)-5.(-5) = \dots \ (=0)$

4. $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) : \left(\frac{4}{5}+\frac{1}{18}\right) = \dots \ (=15/11)$

5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3} : \left(\frac{4}{5}+\frac{1}{18}\right) = \dots \ (=197/154)$

6. $\frac{1}{4} . \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{7} . \left(\frac{1}{2}+3\right)+\frac{2}{3}-5\right) = \dots \ (=-25/24)$

7. $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}+5-\frac{4}{3} .2} = \dots \ (=-3/140)$

8. $\frac{2}{7}+\frac{5}{3} . \left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} . \frac{4}{5}\right) = \dots \ (=13/105)$

9. $\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{3}{25}+\frac{2}{15}}{\frac{4}{25}+\frac{5}{18}} = \dots \ (=96/197)$

10. $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2} . \left(3-\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{7}-1\right) . \frac{1}{3}} = \dots \ (=-273/5)$

11. $\frac{3}{5}\,.(-2)+3-\frac{\frac{5}{8}}{10}= \ldots \quad (=139/80)$

12. $\dfrac{-(-(-(-(-2-(-1+\frac{1}{2})))))}{-1-\frac{1}{2}-\left(-1+\frac{1}{2}-\left(-1-\frac{1}{2}\right)\right)} = \quad (=3/5)$

13. $3+\frac{3}{2}+\dfrac{3}{3+\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{3-\dfrac{3}{3-\frac{3}{2}}} = \ldots \quad (=13/6)$

14. $\dfrac{\sqrt[7]{17^3}\,.\,\sqrt[5]{17^2}}{\sqrt[3]{17^{-2}}\,.\,\sqrt[4]{17}} = \ldots \quad \left(=\sqrt[420]{17^{523}}\right)$

15. $\dfrac{\sqrt[5]{a}\,.a.\,\sqrt[3]{b^{-2}}\,.\sqrt{b}}{\sqrt[7]{a^4}\,.b^{4/3}.\,\sqrt[4]{b^{-3}}} = \ldots \quad (=a^{1/35}.b^{-3/4})$

16. $\dfrac{\sqrt[7]{11^{-2}}\,.\,\sqrt[3]{11}.7^{-1}\,.\,\sqrt[4]{7^5}}{\sqrt[6]{11^{13}}\,.\sqrt{7}.\sqrt[5]{7^2}} = \ldots \quad \left(=\dfrac{11^{-89/42}}{7^{13/20}}\right)$

17. $\sqrt[4]{7^2.\sqrt[5]{7^{-3}}\,.\sqrt[3]{7}} = \ldots \quad (=\sqrt[30]{7^{11}})$

18. $\dfrac{\sqrt{125}-3.\sqrt{245}-\sqrt{20}}{4.\sqrt{20}+\sqrt{405}} = \ldots \quad (=-18/17)$

EJERCICIOS III

1. $(\frac{1}{a})^2 \cdot (b^{-1})^3 . \sqrt{a.\sqrt{a}.b} = (\frac{a}{b})^x$: Halla el valor de *x*.

2. $\dfrac{3.\sqrt{50}}{24} - \dfrac{\sqrt{18}}{40} = \ldots$

3. $\dfrac{2}{\sqrt{18}} - \dfrac{6}{\sqrt{50}} + \dfrac{3.\sqrt{2}}{2} = \ldots$

4. $\dfrac{\frac{2}{5} - \frac{1}{10} + \frac{3}{70} + \frac{2}{15}}{\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{14}\right) \cdot \left(\frac{1}{43} - 2\right)} = \ldots$ (Debes realizar los cálculos de manera que no aparezcan valores mayores que 100)

5. Convierte en producto, sacando factores comunes, las siguientes expresiones:

   (A) $a^3+a^2.b^2-a.b-b^3 = \ldots$; (B) $ax^2+b^2x-a^2x-ab^2 = \ldots$;
   (C) $3a\sqrt{10}-a^2\sqrt{2}+9\sqrt{5} - 3a = \ldots$;

6. $(\sqrt{28} - 3.\sqrt{63} + 5.\sqrt{3})^2 = \ldots$

7. Las siguientes expresiones son el desarrollo del cuadrado de ciertos binomios; debes descubrirlos (realiza la comprobación):

   (A) $49+2-14.\sqrt{2} = \ldots$; (B) $5+9+6.\sqrt{5} = \ldots$; (C) $14-6.\sqrt{5} = \ldots$;
   (D) $51+14.\sqrt{2} = \ldots$; (E) $\sqrt[3]{25}+4+2.2.\sqrt[3]{5} = \ldots$;

CUADRO III

primer aspecto del Cálculo Aritmético interviene primordialmente la denominada *producción convergente*, si bien la *evaluación* (en el sentido de juicio o crítica), juega también un importante papel.[1]

2.2. Detección de errores

Perseguimos que los alumnos sean capaces de detectar errores aislados de Cálculo Aritmético (véanse los apéndices III y IX ya citados). Con ello no pretendemos únicamente que sean capaces de reconocer un error y corregirlo cuando se presenta aislado de un contexto de operaciones aritméticas, lo cual no pasaría de tratarse del aprendizaje de un tipo particular de contenidos, a saber, el constituido por un conjunto de igualdades falsas más o menos **aparentemente** ciertas formalmente, sino que, y esto es fundamental, con la detección de errores aislados aspiramos a desarrollar la importante operación mental evaluar que está en la raíz de esta clase de ejercicios y que constituye una operación fundamental no sólo en la realización de cálculos aritméticos (o de otro tipo), sino que aparece en cualquier actividad mental que requiera una revisión de los procesos intermedios o de los resultados obtenidos.

En este sentido pues, el esfuerzo que dedicamos a este particular aspecto del Cálculo Aritmético va destinado especialmente a la enseñanza de un *procedimiento general* (la evaluación) cuya aplicación trascenderá el simple hecho de detectar errores aislados, puesto que intervendrá en cualquier actividad de resolución de problemas (en sentido amplio).

2.3. Resolución de problemas de Cálculo Aritmético

Aspiramos a que los alumnos cuyo nivel de conocimiento de los dos aspectos anteriores es elevado (generalmente son los del grupo E), sean capaces de resolver verdaderos problemas (véase el cuadro IV).

---

1. Podemos definir la *producción convergente* como la operación mental que permite, a partir de una información dada, deducir lógicamente otras informaciones, completamente determinadas por aquélla.

La *evaluación* se puede considerar como un proceso para comparar una información con otra conocida, de forma que, de acuerdo con unos criterios previos, se pueda decidir la validez o la falsedad de la información dada.

Véase Guilford (1977), especialmente el capítulo IX.

CUADRO IV

LISTA DE PROBLEMAS DE CÁLCULO

A) Simplifica:

1. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-3\sqrt{10}-3\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2}$

2. $\dfrac{a^3+ba^2+ab+b^2}{a^3+ab+a^2b^2+b^3}$

3. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}}-\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$

4. $X=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$

5. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

6. $\sqrt{51-14\sqrt{2}}$

7. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x.\dfrac{1}{2\sqrt{x.x+1}}.2x}{x^2+1}$

B) Racionaliza:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{a.\sqrt[3]{b+\sqrt{c}}}}$

C) **Compara las siguientes parejas de números:**

1. $\sqrt[4]{7}$ y $\sqrt[6]{20}$

2. $\sqrt{5}+1$ y $2\sqrt{3}$

3. $\dfrac{5^2.\sqrt{2}}{3^{-1}.7}$ y $\sqrt[3]{3375}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ y $\dfrac{1}{2}.6^{-1/2}$

5. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 6. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ y $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

D) ¿Son ciertas las desigualdades siguientes?:

1. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} > 2$

2. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Dado que, como indicábamos en la introducción, lo esencial en la resolución de un problema radica en la elaboración del plan de resolución y no en su ejecución, la operación mental denominada *producción divergente*, íntimamente relacionada con las aptitudes de creatividad [2] adquiere una especial relevancia.

Así, el énfasis lo ponemos en el aprendizaje de *métodos generales* de resolución de problemas y en el desarrollo de las operaciones mentales especialmente involucradas.

En síntesis, en el marco de la metodología heurística que propugnamos (véase capítulo I, apartado 3) nuestro propósito se centra en enseñar no sólo unos contenidos de Cálculo Aritmético fundamentales, sino sobre todo unos procedimientos generales cuya aplicación no se limite al campo particular del Cálculo Aritmético, sino que sean relevantes en otros aprendizajes.

3. *DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL DEL ALUMNO*

3.1. PREDIDÁCTICAS

Las 12 Predidácticas constituyen un conjunto de materiales en los que se explican con detalle las 28 técnicas simples ya descritas (véase el cuadro I). No hay un modelo único, sino que el desarrollo de cada una de ellas se adapta a la particular técnica que se explica; generalmente, sin embargo, se distinguen cuatro apartados (el orden en que figuran puede variar):

a) Un breve resumen de conceptos teóricos necesarios para proseguir la lectura.

b) La explicación detallada de la técnica simple considerada, a través de varios ejemplos escogidos como modelos.

---

2. La *producción divergente* se puede definir como la operación mental que permite crear información, a partir de una información dada, de forma que el acento se pone en la cantidad y variedad (véase **Guilford**, (1977), capítulo IX).

Por lo que se refiere a la relación entre la producción divergente y la creatividad, véase Guilford (1977), capítulo XIV.

c) Observaciones diversas y análisis de errores bastante exhaustivo.
d) Un conjunto de ejercicios que se propone resolver. (Véase el cuadro V).

Conviene indicar que la articulación entre enseñanza de técnicas y análisis de errores se ha mostrado especialmente fecunda. En dicho análisis se consideran únicamente (salvo alguna excepción justificada) los errores que denominamos *estructurales* esto es, debidos a una mala comprensión de las reglas generales de cálculo, que se aplican erróneamente o a casos en los que no rigen; el punto clave del análisis reside en poner de manifiesto las causas que los originan.

No se tienen en cuenta pues aquí, los errores que llamamos *coyunturales*, es decir, aquellos que se deben a un débil control consciente en la realización de los ejercicios (distracciones, confusiones de unos números por otros, etc.) o a un pobre establecimiento de los automatismos de cálculo (como $7 \cdot 8 = 66$ o similares) puesto que, dado su carácter esencialmente accidental, requieren otras estrategias para ser evitados.[3]

Hemos optado por incluir las soluciones de la mayoría de los ejercicios propuestos separadamente y no en las Predidácticas, por razones prácticas; es obvio que el alumno debe hacer un uso inteligente y productivo de tales soluciones.

Es interesante observar que los ejercicios propuestos se distribuyen en tres categorías: *Realiza...*, *Completa...*, y *Corrige...* Con ello se pretende que el alumno se acostumbre a desarrollar no sólo la operación mental que denominábamos producción convergente, y que es la más usualmente considerada (en los ejercicios del tipo Realiza... o Calcula... esta operación es la fundamental), sino también la operación mental que llamábamos producción divergente (en los ejercicios del tipo Completa... se requiere cierta dosis de imaginación) y la evaluación (en los ejercicios del tipo Corrige... es necesario agudizar el sentido crítico), de acuerdo con los principios que apuntábamos en el apartado 2.

Aunque, en principio, sería deseable que los alumnos pudieran comprender por sí mismos las Predidácticas, la experiencia indica que no es así, por lo que deben dedicarse algunas sesiones a comentarlas (véase el apartado 4).

---

3. Esta clasificación de errores está inspirada en el artículo de Menchinskaya: «*Questions in the methods and psychology of teaching arithmetic in the elementary grades*» esp., pp. 81 y ss.), en Kilpatrick (1975), vol. XIV.

CUADRO V

PREDIDÁCTICA NÚMERO 8

Ya sabes que llamamos *raíz n-sima* de un número real a un número real *x* tal que $x^n = a$ (donde *n* es un número natural); en tal caso escribimos:

$$\underline{x = \sqrt[n]{a}.}$$

Decimos que *n es el índice* y que *a es el radicando.*

No siempre existe *x* para un *n* y un *a* dados; por ejemplo: sea $n = 2$, y $a = -1$; no existe ningún número real *x* cuyo cuadrado sea negativo, así que no existe ningún número real *x* tal que $x^2 = -1$.

Por otra parte, puede existir más de una raíz n-sima, según sean los números *n* y *a* dados; por ejemplo, sea $n = 2$ y $a = 4$; entonces $x = +2$ y $x = -2$ son raíces n-simas de a, puesto que $(+2)^2 = 4$ y también $(-2)^2 = 4$.

Hay tres reglas y un convenio de notación que debes conocer a fondo para saber operar con radicales:

1. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$, donde *a* y *b* son reales *positivos.*

Veámoslo: llamemos $x = \sqrt[n]{a}$ (por lo que $x^n = a$) $y = \sqrt[n]{b}$ (por lo que $y^n = b$). Hay que ver que $x.y = \sqrt[n]{a.b}$, lo que equivale a demostrar que $(x \cdot y)^n = a \cdot b$, igualdad que es cierta:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n = a \cdot b$$

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, donde *a* y *b* son reales *positivos.*

Se demuestra análogamente a la propiedad 1.

Fíjate en que las propiedades 1 y 2 se refieren, respectivamente, a producto y cociente de *radicales del mismo índice.* Si los índices son distintos hay que efectuar diversos cálculos (ver Predidáctica núm. 9).

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, con *a* real positivo.

En efecto: sea $x = \sqrt[n]{a}$ (así pues, $x^n = a$); hay que ver que $x^m = \sqrt[n]{a^m}$, es decir, tenemos que demostrar:

$$(x^m)^n = a^m, \text{ igualdad que es cierta:}$$

$$(x^m)^n = x^{m.n} = x^{n.m} = (x^n)^m = (a)^m = a^m .$$

El *convenio* de notación utilizado es el siguiente:

4. $\sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$, si *a* es un real *positivo*. Además, pondremos $a^{-p/q} = \dfrac{1}{a^{p/q}}$ (de la misma forma que poníamos $a^{-n} = 1/a^n$).

Es importante que tengas en cuenta las siguientes indicaciones:

Observaciones y análisis de errores

A) Las propiedades 1 - 3 son ciertas sólo para *a* y *b* positivos; la razón de ello está en que si *a* o *b* fuesen negativos habría contradicciones, por ejemplo:

$$+\sqrt{-2}.\sqrt{-2} = +\sqrt{(-2).(-2)} = +\sqrt{4} = +2$$

(los factores *no* son números reales y su producto sí).

3.2. Listas de ejercicios por niveles

Los materiales que denominamos Ejercicios I, II y III incluyen ejercicios de los tres niveles en los que distribuimos las técnicas de cálculo. En el cuadro VI figura una muestra de los ejercicios de nivel 1 (véanse los cuadros II y III, donde aparecen muestras de los ejercicios de los niveles 2 y 3).

Todos son de enunciado cuya formulación es directa: *Resuelve...*, pero el uso que se hace de ellos permite una mayor flexibilidad (véase el apartado 4).

La finalidad principal de estos ejercicios es permitir que el alumno disponga de un amplio conjunto de ejercicios de los distintos niveles por separado para que se ejercite en el manejo de las técnicas que más se le resistan; así, en los Ejercicios I figuran entre dos y cuatro ejercicios de cada técnica simple (en total hay 92 ejercicios), mientras que en los Ejercicios II y III se ha procurado especialmente que la variedad sea considerable.

3.3. Módulos de ejercicios de consolidación

La experiencia nos ha puesto de manifiesto que el Cálculo Aritmético requiere un trabajo continuado a lo largo del curso (incluso si se dedica un tiempo considerable a estudiarlo con intensidad), puesto que el alumno, de lo contrario, va perdiendo gradualmente seguridad en los cálculos al tiempo que acaba olvidando el manejo de las técnicas de cálculo más básicas (véase el apartado 5.4).

Así, se han elaborado unos materiales en los que se recogen ejercicios de los distintos niveles (fundamentalmente de los niveles 1 y 2) y con distintas formulaciones (Realiza..., Completa... y Corrige...).

El alumno dispone, pues, además de los ejercicios de los materiales anteriormente descritos que han quedado por resolver, de tres Módulos de Ejercicios variados que le serán útiles para mantener el nivel adquirido en Cálculo Aritmético al principio del curso (véase el cuadro VII); se incluyen también soluciones aparte.

3.4. Directriz de evaluación

Constituye una recopilación sistemática de las indicaciones, sugerencias

CUADRO VI

EJERCICIOS I

1. $-13-(-52) = \ldots;$ 2. $23-(+11) = \ldots;$ 3. $17+2.10 = \ldots;$

4. $19-5.4 = \ldots;$ 5. $3-18:3 = \ldots;$ 6. $\frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \ldots;$

7. $\frac{11}{7} - \frac{9}{28} = \ldots;$ 8. $\frac{5}{11} + \frac{3}{4} = \ldots;$ 9. $\frac{1}{6} - \frac{1}{25} = \ldots;$

10. $\frac{9}{7} \cdot \frac{13}{54} = \ldots;$ 11. $\frac{7}{6} \cdot \frac{42}{25} = \ldots;$ 12. $\frac{12}{7} : \frac{30}{49} = \ldots;$

13. $7 + \frac{11}{9} = \ldots;$ 14. $-5+ \frac{12}{7} = \ldots;$ 15. $\frac{17}{2} - 11 = \ldots;$

16. $\frac{23}{-7} + 3 = \ldots;$ 17. $\frac{-8}{11} -5 = \ldots;$ 18. $11. \frac{3}{17} = \ldots;$

19. $-9. \frac{8}{19} = \ldots;$ 20. $7. \frac{-11}{28} = \ldots;$ 21. $\frac{\frac{9}{7}}{3} = \ldots;$

22. $\frac{\frac{14}{5}}{10} = \ldots;$ 23. $\frac{\frac{26}{9}}{4} = \ldots;$ 24. $\frac{18}{\frac{9}{2}} = \ldots;$

25. $\frac{22}{\frac{7}{11}} = \ldots;$ 26. $7+ \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{5} = \ldots;$ 27. $\frac{1}{12} - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = \ldots;$

28. $\frac{7}{4} \cdot \frac{11}{14} + \frac{6}{5} = \ldots;$ 29. $\frac{1}{9} + \frac{3}{2} : \frac{12}{5} = \ldots;$ 30. $\frac{1-x^3}{x^2} = \ldots;$

31. $\frac{ab^2+1}{ab} = \ldots;$ 32. $\frac{2-5ab}{-5b} = \ldots;$ 33. $\frac{7x^2-8}{8} = \ldots;$

34. $\frac{a^2x-1}{-x} = \ldots;$ 35. $2-\frac{1-x}{5} = \ldots;$ 36. $5-\frac{a^2-1}{2} = \ldots;$

37. $-4-\frac{x+3}{3} = \ldots;$ 38. $-3-\frac{5a+1}{a} = \ldots;$ 39. $7^{14}.7^{23} = \ldots;$

40. $11^{22}.11^{-5} = \ldots;$ 41. $31^{12} / 31^{7} = \ldots;$ 42. $(13^5)^6 = \ldots;$

43. $(a^4.17^6)^5 = \ldots;$ 44. $(11^{-3}.a^{15})^7 = \ldots;$ 45. $12-4.5^2 = \ldots;$

46. $2+5.10^3 = \ldots;$ 47. $(-11)^5 = \ldots;$ 48. $(-13)^4 = \ldots;$

49. $-10^5 = \ldots;$ 50. $\sqrt{11}.\sqrt{7} = \ldots;$ 51. $\sqrt[3]{13}.\sqrt[3]{10} = \ldots;$

52. $\sqrt[4]{11} / \sqrt[4]{17} = \ldots;$ 53. $(\sqrt[3]{22})^5 = \ldots;$ 54. $(\sqrt{19})^{-3} = \ldots;$

MÓDULO DE EJERCICIOS NÚMERO 2

1. A) Transforma las siguientes expresiones en potencias de exponente fracfraccionario:

   A. $\sqrt{7^{-5}} =$ B. $\sqrt[3]{5^{-2}} =$ C. $\sqrt[7]{4^{9}} =$ D. $\sqrt[q]{a^{p}} =$

   B) Transforma las siguientes expresiones a la forma radical:

   A. $13^{1/2} =$ B. $11^{7/9} =$ C. $3^{-4/5} =$ D. $a^{r/s} =$

2. Completa los siguientes ejercicios:

   A. $\dfrac{\sqrt{6^{3}}\,.\,\sqrt[3]{6^{-1}}}{\sqrt{6^{4}}} = 6^{3/2} . 6^{-\;\;/\;\;} . 6^{\;\;/\;\;} = 6^{3/2-\;\;/\;\;/5} = 6^{\frac{-10-24}{30}} = 6^{\frac{11}{\;\;}} = \sqrt{6}$

   B. $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{10^{3}}\,.\,\sqrt{10^{-5}}} = 10^{\;\;/\;\;} . 10^{3/\;\;} . 10^{\;\;/2} = 10^{\;\;/\;\;/2} = 10^{\frac{2-3+10}{4}} = 10^{9/4} = \sqrt{10}$

3. En cada uno de los siguientes ejercicios hay dos errores; señálalos con un círculo y termínalos correctamente:

   A. $\dfrac{\sqrt{13^{-1}}}{\sqrt[3]{13^{-5}}\,.\,\sqrt[8]{13^{7}}} = \dfrac{13^{-1/2}}{13^{-5/3} . 13^{8/7}} = 13^{-1/2} . 13^{5/3} . 13^{8/7} = 13^{-1/2+5/3+8/7} =$

   $= 13^{97/42}$

   B. $\dfrac{\sqrt{11}\,.\,\sqrt[4]{11^{-3}}}{\sqrt[5]{11^{8}}} = 11^{1/2} . 11^{-3/4} . 11^{-8/5} = 11^{\frac{1}{2} \cdot \frac{(-3)}{4} \cdot \frac{(-8)}{5}} = 11^{3/5} = \sqrt[3]{11^{5}}$

CUADRO VII

y procedimientos que el alumno debe seguir en la realización de ejercicios de detección de errores (aislados o no) y que el profesor le había proporcionado en unas sesiones especialmente dedicadas al problema de la evaluación (véase el apartado 4).

El alumno, pues, ha tenido ya contacto con la mayoría de las observaciones que allí figuran, si bien de una manera un tanto dispersa, por lo que hemos creído conveniente agruparlas estructuradamente (véase el cuadro VIII).

Se pretende que, mediante una lectura asidua y atenta de la Directriz de Evaluación el alumno sea capaz de interiorizar y asimilar sus principios, de forma que actúe por sí mismo como en ella se aconseja.

3.5. Análisis de errores I, II y III

Aunque en las Predidácticas se incluye un análisis de errores después de cada explicación de una técnica simple, hemos optado por agrupar en tres secciones (según criterios de dificultad, principalmente) el estudio y análisis de un conjunto de errores seleccionados preferiblemente según su gravedad o su frecuencia (no se trata, pues, de una recopilación exhaustiva). Así, el alumno puede disponer de unos materiales que le permiten profundizar en la actividad de detectar errores.

En estos análisis, al igual que ocurría en las Predidácticas, sólo se tienen en cuenta los errores estructurales, y nos hemos esforzado en poner de manifiesto las causas que los originan para que el alumno las conozca y actúe en consecuencia.

Al final de cada sección se proponen distintos ejercicios de detección de errores cuya finalidad es evidente: ejercitar en el alumno su capacidad de crítica a partir de la aplicación a diversos casos similares del análisis de errores efectuado con anterioridad (véase el cuadro IX).

3.6. Ejercicios de detección de errores no aislados

Los ejercicios de detección de errores no aislados exigen del alumno que sea capaz de reconocer el error (o los errores) que figura en una cadena de igualdades (las cuales constituyen el desarrollo completo de un ejercicio); una vez descubierto el error (que puede ser estructural o coyuntural) debe

DIRECTRIZ DE EVALUACIÓN

I. *Indicaciones generales*

A) En primer lugar, tienes que tener presente que para descubrir un error, debes *cambiar de actitud*.
Observa con atención. *No te precipites.*

B) Debes *conocer* los *errores* más *habituales* (p. ej., uso de *falsas reglas* de *simplificación*, *ignorancia* de la *jerarquía* de las *operaciones*, etc.).

II. *Indicaciones específicas*

A) Ante un error aislado:
1. Tienes que ignorar la respuesta apuntada: *No es una «pista»*.
2. No hay *reglas de simplificación inmediatas*, aunque la presentación formal del ejercicio así lo haga parecer.
3. Realiza, pues, las *operaciones indicadas*, por los métodos usuales.
4. En las *expresiones* en las que *aparecen* letras (que simbolizan números cualesquiera), esfuérzate en hallar un contraejemplo (si la *igualdad* es *falsa*, *seguro* que *hay alguno*).
5. A fin de asegurar tu decisión, piensa que la igualdad se puede leer en los dos sentidos; por lo tanto, imagínatela invertida y repite el proceso anterior.

B) Ante un error dentro de un contexto de operaciones aritméticas:
1. *Cada paso del cálculo* es una igualdad que puedes considerar como un posible error aislado. Aplica, pues, el proceso anterior a cada eslabón de la cadena de cálculo (espc. el punto A) 5).
2. Intenta *efectuar* algunos *cálculos sencillos* mentalmente, *dos o tres veces seguidas*, a fin de asegurar el resultado obtenido.

C) Ante un cálculo propio que debas repasar:
1. Tienes que tener una *actitud crítica*. Piensa que quizá sí que te has equivocado. *Imagina* que *no eres tú* el autor del ejercicio.
2. No lo repases *inmediatamente* después de haberlo terminado. Y no mires el resultado de los distintos pasos; ten en cuenta las indicaciones del punto B).

CUADRO VIII

ANÁLISIS DE ERRORES (I)

Vamos a analizar algunos de los errores que se cometen con mayor frecuencia; es importante, en efecto, no sólo saber que una igualdad es falsa, sino también conocer a través de qué mecanismos se ha llegado a formularla.

1. $(+12) \cdot (-10) = +2$. El error consiste en haber efectuado, en realidad, la operación siguiente: $(+12) + (-10) = +2$.

2. $-5 - (-5) = -10$. Aquí se ha efectuado, incorrectamente, el paso: $-5 + 5 = -(5 + 5)$, o bien no se ha tenido en cuenta que $-(-5) = +5$.

3. $-(a - b) = -a - b$. El error proviene de no haber tenido en cuenta que el signo menos de delante del paréntesis afecta a todos los sumandos del interior.

4. $\frac{6/5}{6} = 5$. Aquí nos encontramos con una simplificación «evidente» pero FALSA: $\frac{\cancel{6}/5}{\cancel{6}} = 5$. Esto es FALSO ya que no se efectúa ninguna operación permitida: «Tachar» no es ninguna operación, y sólo tiene sentido cuando es el resultado de realizar una operación correcta. Hay que efectuar todos los pasos: $\ldots = \frac{\cancel{6}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} = \frac{1}{7}$ (observa que en este caso «tachar» ha resultado ser correcto; ¿por qué?).

CUADRO IX

corregirlo y proseguir así, investigando la existencia de errores, hasta el fin del ejercicio (véase el cuadro X).

Como puede verse, se trata de una actividad intermedia entre detectar errores aislados y detectar los propios errores de cálculo lo que, de hecho, constituye el objetivo último en lo que a detectar errores se refiere.

3.7. Directriz de Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético y normas para su utilización

En la actividad de resolver problemas de Cálculo Aritmético pretendemos que el alumno asimile un método general de resolución. Dicho método viene sintentizado en un conjunto de indicaciones heurísticas (en el sentido de Landa, es decir, en contraposición a algorítmicas) que constituye la Directriz de Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético.

Las Normas para la utilización de la Directriz constituyen únicamente una guía del alumno para que sepa utilizar correctamente la Directriz, mediante comentarios sobre distintos puntos de la misma de carácter general o específico (en los cuadros XI y XII figuran íntegramente).

3.8. Ejemplos de ejercicios de diverger y lista de ejercicios de diverger

Ya hemos hablado de que la producción divergente interviene especialmente en las actividades de tipo creativo, como la Resolución de Problemas; nos ha parecido natural, pues, elaborar un material constituido por unos ejercicios en los que la producción divergente juega un destacado papel, ya que se exige encontrar más de una solución en cada ejercicio propuesto.

Los ejemplos resueltos son sólo ilustrativos de lo que se espera que el alumno realice en los ejercicios que figuran en la Lista de Ejercicios de Diverger (véanse los cuadros XIII y XIV); sugieren y esbozan distintas estrategias, pero el alumno deberá ser capaz de construir o descubrir nuevos caminos.

Fundamentalmente, la realización de este tipo de ejercicios es una tarea previa a la resolución de problemas y su propósito es preparar al alumno para una actividad menos rígida y más creativa que la de la aplicación de

EJERCICIOS DE DETECCIÓN DE ERRORES NO AISLADOS

Señala con un círculo todos los errores que observes en los siguientes ejercicios y resuélvelos correctamente:

1.- $-2+3.7-5+2.(7-4.3)+1 = -2+3.2+2.(7-12)+1 = 6+2.(-5)-1 =$

$= 6-11 = -5.$

2.- $\dfrac{2}{15} - \dfrac{3}{50} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{20+9+25}{2.3.5^2} = \dfrac{36}{2.3.5^2} = \dfrac{6}{25}\,.$

3.- $1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}} - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{4}{3}} - \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}} = 1 + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{1-\dfrac{3}{2}} =$

$= \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{7}{4} - 2 = \dfrac{1}{4}\,.$

4.- $a - \dfrac{b-c}{3} - \dfrac{5.(5a+5b)}{5} = \dfrac{3a-b-c}{3} - (5a+5b) = \dfrac{-12a-14b-c}{3}\,.$

5.- $\dfrac{(2a+b^3)^2}{(a\sqrt{2}+b\sqrt{5})\ (a\sqrt{2}-b\sqrt{5})} = \dfrac{4a^2+b^6+2ab^3}{2a^2-5b^2}\,.$

CUADRO X

CUADRO XI

DIRECTRIZ DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CÁLCULO

1. Observa globalmente el enunciado y cópialo atentamente a fin de:

   A) Ser capaz de describir correctamente la *estructura aritmética* del enunciado.

   B) Captar la *jerarquía* de las operaciones.

2. *Reagrupa términos* (p. ej., intercambiando factores o sumandos de un miembro al otro en una igualdad o desigualdad) y *simplifica los datos* si es posible. Procura unificar las notaciones.

3. Efectúa las operaciones indicadas (empieza por las más sencillas), mirando de *conservar al máximo la estructura.*

4. Teniendo en cuenta las siguientes fórmulas *sustituye*, en el enunciado, una expresión por otra que sea *equivalente*:

   A) $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ B) $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = (a+b)^3$

   C) $a^2-b^2 = (a+b).(a-b) = -b^2+a^2$ D) $a^3-b^3=(a-b).(a^2+ab+b^2)$

   E) $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}).(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a}-\sqrt{b}).(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ F) $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ $(a,b>0)$

   Generalmente, sin embargo, *hay que investigar cuidadosamente* para descubirlas, pues su aspecto formal puede variar sustancialmente.

5. Efectúa alguna (o algunas) de las siguientes operaciones (aunque parezca irrelevante a primera vista):

A) Multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número no nulo (p. ej., por la expresión conjugada).

B) Elevar al cuadrado (o a una potencia adecuada) los dos miembros de una igualdad.

C) Sacar denominadores (buscando el m. c. denominador o multiplicando en cruz).

D) Sacar factores comunes.

6. En caso de productos de potencias de distintas bases y de raíces de índices diferentes, reduce la expresión a productos de potencias del *mínimo número de bases posible*, utilizando la notación exponencial y descomponiendo en factores primos las bases numéricas.

7. En caso de comparación de dos números, hay que tener presente que:

A) Puede convenir buscar *acotaciones intermedias* por aproximaciones o con números más sencillos, u operar directamente con *aproximaciones.*

B) La suma de números positivos es un número positivo (en particular pues, la suma de potencias de *exponente par*). Análogamente, el producto de varios factores es nulo si y sólo si uno de ellos (al menos) lo es.

C) Puedes elevar al cuadrado (o a una potencia conveniente) los dos miembros de una desigualdad, respetando las *reglas de los signos.*

8. Ten en cuenta los puntos 2 y 3 a lo largo de todo el proceso.

9. *Después de cada transformación* efectúa el *recorrido inverso* a fin de comprobar si la has realizado correctamente.

10. Cualquier *resultado* obtenido es *provisional* hasta que no hayas efectuado una *correcta evaluación* de todos los cálculos.

NORMAS PARA USAR LA DIRECTRIZ

Indicaciones generales

1. Aunque la directriz puede ser útil en la gran mayoría de problemas, *no debes usarla con rigidez*: hay distintas formas de resolver un problema y, en algunos casos, es posible descubrir procedimienos que acortan la solución del problema, pero que no estaban directamente sugeridos en la directriz.
2. Antes de empezar a resolver un problema intenta recordar si has efectuado alguno semejante (en el aspecto formal, en el tipo de pregunta, etc.).
3. No hagas tanteos al azar: *procede sistemáticamente*, recorriendo los puntos de la directriz con atención y no de un modo superficial.

Indicaciones específicas

1. El punto 1 es *fundamental*, a pesar de que, generalmente, no es directamente útil para resolver el problema planteado.
2. En caso de que decidas «reagrupar términos», no lo hagas al azar: intenta *agrupaciones racionales* (ten en cuenta el aspecto formal, la sencillez de los cálculos, etc.).
3. Algunas «operaciones indicadas» no están explícitas (p. ej., la extracción de factores de una raíz), así que hay que observar la estructura aritmética con atención.
4. En la práctica, es útil saberse estas fórmulas de memoria. Además, debes intentar *descubrirlas* a pesar de que el aspecto formal del enunciado no sugiera su aplicación.
5. Este punto es *esencial*. Esfuérzate en realizar las operaciones que se sugieren de acuerdo con la estructura aritmética del enunciado y no al azar.

6-7. Las indicaciones que se dan en estos puntos son muy particulares y, por lo tanto, sólo aplicables a casos muy concretos. Asegúrate, sin embargo, de que realmente no te serán útiles.

8. Este punto es *clave* ya que, a menudo, son esenciales indicaciones que con anterioridad no habían sido fructíferas; de ahí la necesidad de volver sobre los puntos 2 y 3 con frecuencia.

9-10. En estos puntos se pone el acento en la evaluación. *Repasa los cálculos de manera efectiva* y no por encima.

CUADRO XII

EJEMPLOS DE «EJERCICIOS DE DIVERGER»

Lo característico de estos «ejercicios de diverger» es que se trata de encontrar *varias soluciones* de cada uno de ellos (por lo menos 2) o, equivalentemente, un procedimiento que permita hallar tantas soluciones como se desee. Además, es *fundamental* que las soluciones sean *variadas* y no todas del mismo tipo.

Ejemplo 1:

Intercala signos entre los números (pero no otros números) a fin de obtener una *igualdad* (no se puede alterar el orden de los números): 2 7 1 4.

Así, por ejemplo: $2 \cdot 7 = 14$; $-2 + 7 = 1 + 4$; $\sqrt{2+7} = -1 + 4$; etc.
Inténtalo con 5 2 1 9:

Ejemplo 2:

Con las fracciones 4/7, 1/2, y 2/3 forma, operando con números reales cualesquiera, fracciones irreducibles de denominador un número par.

Es decir, hay que encontrar valores de a, b y c, a fin de que p/q sea irreducible con $q = 2 \cdot k$ (número par): $a.\frac{4}{7} + b.\frac{1}{2} + c.\frac{2}{3} = \frac{p}{q}$

Por ejemplo: $a = c = 0$ y $b = 1$ (es trivial: compruébalo); $a = 7$, $c = 3$ y $b = 1$ (compruébalo); $a = 14$, $c = 6$ y $b = 1$ (compruébalo): observa que se intenta que las fracciones con coeficientes a y c no compliquen los cálculos, por lo que damos valores a los coeficientes que las conviertan en enteros.

CUADRO XIII

LISTA DE EJERCICIOS PARA DIVERGER

1. Con las fracciones 2/3, 1/2 y 4/7 forma, operando con reales, fracciones irreducibles de numerador par.

2. Intercala signos entre las siguientes fracciones a fin de obtener una desigualdad correcta: $\frac{2}{3}\ \frac{25}{7} - \frac{1}{9}$

3. Sustituye los puntos suspensivos por reales de modo que el resultado de la operación sea mayor que 1/2: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ldots}}}$

4. Da valores a *x*, *y*, *z* a fin de que los denominadores que aparezcan se simplifiquen (una vez realizadas las operaciones indicadas):

$$\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}-2\right)}{\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{z}\right)}$$

CUADRO XIV

técnicas de cálculo más o menos complejas, introduciéndolo así, en un tipo de tareas en las que el *ensayo y error* constituirá un procedimiento habitual.

Desde este punto de vista, pues, constituye una actividad auxiliar a la de resolver problemas si bien, si se dispone de tiempo, puede ser francamente instructiva.

3.9. Guiones de Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético y Lista de Problemas de Cálculo Aritmético

A fin de enseñar a utilizar la Directriz de Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético se desarrollan con detalle las soluciones a diversos problemas que se han tomado como modelos. Es importante notar que en la resolución de cada uno de ellos se ha procurado seguir cada una de las indicaciones de la Directriz (los números que figuran en los guiones se refieren a los correspondientes puntos de la Directriz) de manera natural, extrayendo conclusiones que podrían ocurrírsele al propio alumno; en ocasiones, incluso, se pasa por alto una indicación para llegar a un aparente callejón sin salida con el fin de hacer reflexionar al alumno y permitirle descubrir los puntos clave que se han ignorado (véase el cuadro XV).

Si bien sería deseable que el alumno fuese capaz de trabajar estos guiones por sí mismo, la experiencia aconseja desarrollar algunos de ellos (u otros ejemplos) en clase (véase el apartado 4).

En la Lista de Problemas de Cálculo Aritmético se incluyen diversos problemas que se propone resolver a los alumnos (véase el cuadro IV, apartado 2); puede ser aconsejable dar algunas indicaciones generales en algunos de ellos.

4. *DISEÑO DE LA INSTRUCCIÓN*

4.1. Primera fase: Técnicas de cálculo y análisis de errores

Nuestro propósito general en esta primera fase es exponer y desarrollar las técnicas de cálculo en los tres niveles considerados, así como articular

GUIÓN DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CÁLCULO ARITMÉTICO

E2. Simplifica la expresión: $x = \sqrt{7 - \sqrt{5}} + \sqrt{7 + \sqrt{5}}$.

1. Se trata de una suma de dos raíces cuadradas (por lo que, a menos que los radicandos sean iguales no se pueden sumar).

2-3-4. Es obvio que no hay operaciones indicadas sencillas que se puedan efectuar; tampoco es posible aplicar ninguna de las fórmulas que figuran en el punto 4. Así, habrá que buscar la solución por otros conductos.

5. Veamos cuál (o cuáles) de las operaciones que se indican parece más natural realizar (aunque, de momento, quizás no está claro adónde nos puede llevar): el «contexto aritmético» nos sugiere que *elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad* puede ser útil:

$$x^2 = 7 - \sqrt{5} + 7 + \sqrt{5} + 2.\sqrt{(7-\sqrt{5}).(7+\sqrt{5})} \qquad (*)$$

8. En este tipo de problemas, la pregunta *¿y ahora, cómo debo proseguir?* se formula numerosas veces, puesto que no es fácil encontrar las vías adecuadas de solución; ten, pues, presente con frecuencia el punto 8: debes *volver sobre los puntos 2 y 3.*
Así pues, *efectuando las operaciones indicadas más sencillas* tenemos:

$$(*) \quad x^2 = 14+2.\sqrt{49-5} = 14+2.\sqrt{44} = 14+2.2.\sqrt{11} = 14+4.\sqrt{11}$$

por lo que $x = \pm\sqrt{14+4.\sqrt{11}}$.

9-10. Aunque, aparentemente, el problema ya se ha terminado, no es así, dado que hemos obtenido *dos* soluciones: *¿son válidas ambas?* Veamos: de acuerdo con el enunciado, la X es positiva, por lo que sólo es válida la solución

$$x = \sqrt{14+4.\sqrt{11}} \; .$$

CUADRO XV

dicho desarrollo con un análisis lo más completo posible de los errores estructurales asociados a tales técnicas.

4.1.1. *Nivel 1*

Dado que las técnicas simples (nivel 1) figuran en las Predidácticas, su introducción se realiza en base al comentario de las mismas; no se trata de explicarlas con todo detalle, pero tampoco tienen que tocarse muy por encima: se aconseja efectuar las explicaciones necesarias para que los alumnos sean capaces de acabar de comprenderlas y de realizar los ejercicios por sí mismos. Sugerimos comentar los ejemplos introductorios y resolver algunos de los ejercicios destacados en cursiva.

Según el nivel del curso y su ritmo de trabajo, los comentarios a las Predidácticas pueden realizarse entre 4 y 5 sesiones completas.

4.1.2. *Nivel 2*

Por lo que se refiere a las técnicas de cálculo compuestas (nivel 2), la experiencia aconseja desarrollar ejemplos en clase con detalle y que los alumnos tomen nota de los mismos; en efecto, las especiales dificultades que para el alumno presentan los ejemplos propuestos exigen una exposición directa por parte del profesor, más que unos materiales en los que figuren unos resúmenes de los mismos más o menos detallados.

La elección de los ejemplos que siguen obedecen a una o varias de las siguientes razones:

a) Son reiteraciones de técnicas simples especialmente importantes (p. ej., los números 1 y 3).
b) Son reiteraciones de técnicas simples cuya asimilación por parte del alumno tropieza con fuertes dificultades (p. ej., los números 2, 6A, 6B).
c) Son agrupaciones de técnicas simples muy usuales (p. ej., los números 4, 5, 7).

El desarrollo de estos ejemplos ocupa, aproximadamente, 4 sesiones; sugerimos que la dinámica a seguir se ajuste al siguiente esquema:

— Resolución detallada del ejemplo 1 (o 2, 3, etc.) en la pizarra por el profesor.

— Resolución del ejemplo 1 bis (o 2 bis, etc.) por parte de los alumnos.
— Corrección del ejercicio bis correspondiente en la pizarra y análisis de los errores estructurales más usuales.
— Propuesta, para el día siguiente, de uno o dos ejercicios similares (no más, ya que los alumnos deben ir trabajando en casa las Predidácticas) que se corregirán antes de iniciarse la explicación del ejemplo que corresponda.

A continuación se incluyen los Ejemplos que se propone desarrollar en clase, con algunas observaciones de interés; figuran también los Ejemplos bis correspondientes y un análisis de los errores estructurales más habituales que se cometen en la realización de estos últimos.

Una técnica compuesta, de nivel 2, puede considerarse como un caso particular de pre-problema; desde este punto de vista, es evidente que es posible utilizar, para la realización de los ejercicios de técnicas de cálculo de nivel 2, las indicaciones generales que se dan para la resolución de pre-problemas (véase 4.1.3).

Sin embargo, puede ser de mayor utilidad tomar en consideración unas directrices más particulares (también más algorítmicas), que se ajusten con más exactitud a la realización de estos ejercicios de nivel 2.

Concretamente, creemos necesario destacar las siguientes (es preferible que el alumno tome nota de ellas en una hoja aparte):

1. Observar la *estructura aritmética* del enunciado a fin de poder *reconocer las técnicas simples* que intervienen en él, así como la *jerarquía de las operaciones.*

2. Una vez reconocidas las técnicas simples que aparecen en el enunciado, *aplicar el método de resolución correspondiente,* empezando por las técnicas más sencillas.

En la resolución de cada uno de los ejemplos que siguen, debe hacerse referencia explícita a dichas directrices, y aplicarlas a cada caso concreto.

Ejemplo 1

$$3 - (7 \cdot 5 + 2) - 3 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot (1 - 3 \cdot 2) = \ldots = -4$$

Observaciones:

1. Ténganse en cuenta las indicaciones que figuran en la Predidáctica número 2, punto 2.
2. Se aconseja efectuar las operaciones de dentro de los paréntesis en primer lugar (es decir, es preferible no aplicar la propiedad distributiva).
3. Es útil acostumbrarse a sumar o restar números próximos y no necesariamente siguiendo el orden en el cual están escritos (así, $-37 + 8 + 25 = -37 + 33$, en lugar de $-37 + 8 + 25 = -29 + 25$).

Ejemplo 1 bis

$$2 + 5 \cdot (3 - 2 \cdot 3) - 2 \cdot 3 + 1 + 3 \cdot (4 \cdot 2 - 1) = \ldots = 3$$

Análisis de errores:

Los errores estructurales que aquí aparecen se relacionan exclusivamente con el hecho de no respetar la jerarquía de las operaciones; por ejemplo:

$\ldots = 7 \cdot (-3) \ldots$, o bien: $\ldots = 2 + 5 \cdot (1 \cdot 3) \ldots$, o bien: $\ldots = -2 \cdot 4 + \ldots$, etc.

Ejemplo 2

$$2a - \frac{a+2}{5} + \frac{2}{\frac{3}{7}} = \dots = \frac{27a+64}{15}$$

Ejemplo 2 bis

$$3x - \frac{6-2x}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{7} = \dots = \frac{77x-44}{21}$$

Análisis de errores:

Basta analizar los errores que se cometen en el desarrollo de cada una de las técnicas simples que intervienen en el ejercicio (ver Predidácticas núm. 4 y núm. 5).

Ejemplo 3

$$\frac{3}{98} - \frac{4}{35} + \frac{1}{70} - \frac{3}{28} = \dots = \frac{30 - 112 + 14 - 105}{2^2 . 5 . 7^2} = -\frac{173}{980}$$

Observaciones:

1. Es aconsejable manejar el mínimo común denominador descompuesto en factores primos y efectuar las divisiones de éste con cada uno de los denominadores por simplificación de los factores comunes.

2. Es importante seguir todos los pasos que se indican en la explicación del desarrollo de la técnica simple correspondiente (ver Predidáctica núm. 3), deteniéndose especialmente en los puntos más oscuros; el alumno omitirá los pasos que crea conveniente cuando adquiera más soltura.

Ejemplo 3 bis

$$\frac{1}{50} - \frac{3}{20} + \frac{5}{28} - \frac{6}{35} = \ldots = \frac{-86}{2^2 . 5^2 . 7} = -\frac{43}{350}$$

Análisis de errores:

No se observan otros errores que los que aparecen en el desarrollo de la técnica simple correspondiente (ver la Predidáctica núm. 3); sin embargo, en un ejercicio de este tipo aparecen, quizá, con más frecuencia, debido al hecho de que su misma longitud propicia errores coyunturales, al ser más difícil mantener la concentración.

Ejemplo 4

$$\frac{\sqrt{2} \;.\; 2^{-3} \;.\; \sqrt[7]{2^5}}{\sqrt[5]{2^3}} = \ldots = 2^{-167/70} = \sqrt[70]{2^{-167}}$$

Ejemplo 4 bis

$$\frac{\sqrt[3]{7^2} \;.\; \sqrt[5]{7^{-2}}}{\sqrt{7^{-3}}} = \ldots = 7^{53/30}$$

Análisis de errores:

Hay que tener en cuenta no sólo los errores producidos en el desarrollo de las técnicas simples referentes al manejo de radicales, sino también los que se cometen al sumar las fracciones que figuran en los exponentes (consúltense las Predidácticas núm. 9 y núm. 3).

Ejemplo 5

Introducir dentro del radical todos los factores exteriores y, a la vez, extraer todos los factores interiores que sea posible:

$$\frac{2^{-3} \cdot \sqrt[3]{625 \cdot a^{49} \cdot b^{-155}}}{3^{7/2} \cdot 5^{-1}} = \ldots = 5 \cdot a^{16} \cdot b^{-51} \cdot \sqrt[3]{\frac{5 \cdot a \cdot b^{-2} \cdot 2^{-9}}{3^{21/2} \cdot 5^{-3}}}$$

Observaciones:

1. Es importante remarcar que el hecho de operar con potencias de exponente negativo o fraccionario no afecta a los métodos de resolución de las técnicas simples que aparecen en el ejercicio (véase la Predidáctica núm. 10). Hay que detenerse especialmente en el comportamiento de las potencias de exponente negativo.
2. Es útil acostumbrarse a efectuar las comprobaciones de estos ejercicios realizando el camino inverso.

Ejemplo 5 bis

Introducir...:

$$\frac{a^{11} \cdot \sqrt[6]{512 \cdot b^{31} \cdot 7^{-47}}}{c^{3} \cdot 23^{2/3}}$$

Análisis de errores:

Además de los errores que se cometen en la realización de las técnicas simples correspondientes (véase la Predidáctica núm. 10), destacamos dos errores que se producen con relativa frecuencia:

a) Omisión del signo negativo en alguno de los exponentes de las potencias que aparecen una vez extraídos todos los factores posibles; por ejemplo:

$$\ldots = 7^7 \cdot \sqrt[6]{7^{-5}} \text{ en lugar de } 7^{-7} \cdot \sqrt[6]{7^{-5}}$$

b) Confusión de una técnica por otra: generalmente se aplica la técnica de extracción de factores de un radical para introducir potencias exteriores; por ejemplo:

$$\ldots = a \cdot \sqrt[6]{a^5} \text{ en lugar de } \sqrt[6]{a^{66}}$$

(como si se tratase de efectuar $\sqrt[6]{a^{11}}$)

Ejemplos 6

A) Racionalizar la fracción:

$$\frac{750}{\sqrt{3} \, . \, \sqrt[7]{2^3} \, . \, \sqrt[4]{5^9}} = \ldots = 3^{1/2} \, . \, 2^{4/7} \, . \, 5^{3/4}$$

B) Racionalizar la fracción:

$$\frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \, . \, (\sqrt{6} - \sqrt{5})} = \ldots = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \, . \, (\sqrt{6} + \sqrt{5})$$

Ejemplos 6 bis

A) Racionalizar la fracción:

$$\frac{100}{\sqrt[3]{4^5} \, . \, \sqrt[7]{5^2}} = \ldots = \frac{5.4^{1/3} \, . \, 5^{5/7}}{4}$$

B) Racionalizar la fracción:

$$\frac{9}{(\sqrt{7} - 5) \, . \, (3 + \sqrt{2})} = \ldots = \frac{(\sqrt{7} + 5) \, . \, (3 - \sqrt{2})}{-14}$$

Análisis de errores:

Mientras que en el 6 bis A) no se observan otros errores que los analizados al tratar la técnica simple correspondiente (ver Predidáctica núm. 12), en el 6 bis B) hay que destacar (además de los errores ya señalados en la mencionada Predidáctica núm. 12) los siguientes:

a) Inobservancia de la asimetría de los binomios, es decir, poner $(7 - 5)$ o bien $(3 - 2)$ en lugar de $(7 - 25)$ y $(9 - 2)$.

b) Confusión del signo más (o menos) con el del producto, en el denominador; o sea, poner $-18 + 7$ en lugar de $-18 \cdot 7$, lo que viene motivado por no escribir los paréntesis adecuadamente (hay que escribir $[-18] \cdot [+7]$ y no $-18 \cdot +7$).

Ejemplo 7

$$18.\sqrt{15} \, . \, a^3.b^4.c^2 \; - \; 4.\sqrt{10} \, . \, a^2.b^5.c \; - \; 6.\sqrt{35} \, . \, a^4.b^7.c^3 \; =$$

$$= \underline{2}.3.3.\sqrt{3}.\underline{\sqrt{5}}.\underline{a}^2.a.\underline{b}^4.\underline{c}.c \; - \; \underline{2}.2.\sqrt{2}.\underline{\sqrt{5}}.\underline{a}^2.\underline{b}^4.b.\underline{c} \; - \; \underline{2}.3.\sqrt{7}.\underline{\sqrt{5}}.\underline{a}^2.a^2.\underline{b}^4.b^3.\underline{c}.c^2 =$$

$$= \underline{2.\sqrt{5} \, . \, a^2.b^4.c}.(3^2.\sqrt{3}.a.c \; - \; 2.\sqrt{2}.b \; - \; 3.\sqrt{7}.a^2.b^3.c^2)$$

Observaciones:

1. Hay que hacer notar la relación existente entre la nomenclatura utilizada para designar el tipo de operación realizada y el propio desarrollo del cálculo: «Sacar factor común.»
2. Es conveniente realizar la comprobación mediante la propiedad distributiva.
3. Es útil acostumbrarlos a señalar los factores comunes a todos los sumandos.

Ejemplo 7 bis

$$12.\sqrt[3]{20}.\sqrt{14}\,.\,a^2.b^3.c \;-\; 18.\sqrt[3]{14}.\sqrt{21}\,.\,a^3.b.c \;=\; \ldots \;=$$

$$=\; \underline{2.3.\sqrt[3]{2}.\sqrt{7}\,.\,a^2.b.c.}(2.\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{5}.\sqrt{2}\; -3.\sqrt[3]{7}.\sqrt{3}\,.\,a)$$

Análisis de errores:

Si bien los errores más comúnmente observados consisten en la omisión de algún factor (común o no), por lo que se pueden considerar coyunturales, creemos oportuno destacar el error que consiste en omitir el sumando «1» dentro del paréntesis en ejercicios del estilo siguiente:
$2a^2b + 4a^2b^2 + 6a^3b = 2a^2b + (\mathit{1} + 2b + 3a)$.

También es importante señalar el error que consiste en «operar por partes», es decir, los coeficientes entre sí, y cada una de las «letras» igualmente (o sea, en este último ejemplo, escribir: ... $= 12a^7b^4$!!!).

Véase la Predidáctica número 11 para más detalles.

Durante el desarrollo de estos ejemplos, es conveniente referirse continuamente a las Predidácticas y seguir los métodos de resolución de las técnicas simples que en ellas se detallan.

4.1.3. *Nivel 3*

El hecho de que un alumno domine las técnicas simples y conozca unas pocas técnicas compuestas desarrolladas en clase a través de ejemplos, no es suficiente para afirmar que dicho alumno posee un nivel satisfactorio por lo que respecta a las técnicas de cálculo. En efecto, un ejercicio formalmente distinto de los estudiados, incluso si es de nivel 2, puede ser un obstáculo para él, y no digamos ya de ejercicios en los que las técnicas simples no están simplemente yuxtapuestas y de los preproblemas en general.

Así pues, se impone la necesidad de proporcionar a los alumnos unas indicaciones generales y unos modelos de resolución que permitan *transferir* sus conocimientos adquiridos a un tipo de ejercicios que no sean meramente una repetición de los modelos conocidos.

A tal fin, se incluyen cinco ejemplos de preproblemas, que se toman como posibles modelos, y en cuya resolución se utilizan diversas indicaciones y sugerencias susceptibles de ser aplicadas a muchos otros casos. Es importante comentar en primer lugar las indicaciones generales, y luego ejemplificar su utilidad aplicándolas a los modelos propuestos.

Su desarrollo puede ocupar unas 2 o 3 sesiones. Así, la duración total de esta primera fase ocupa unas 11 o 12 sesiones.

De entre las indicaciones o *heurísticas* que constituyen la Directriz de Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético hemos entresacado las siguientes por su mayor simplicidad, y por ser las que más fecundas se muestran en la resolución de problemas sencillos.

Es aconsejable que los alumnos tomen nota de ellas en una hoja aparte y que las lean antes de resolver cualquier preproblema.

Podríamos dar, desde luego, muchas más indicaciones (de hecho, todas las consignadas en la Directriz de Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético serían de utilidad aquí, y sin duda el alumno interesado puede sacar provecho de una lectura atenta de las mismas), sin embargo, creemos que la mayoría de los alumnos asimilará mejor tres o cuatro reglas generales que no un número considerable de ellas.

1. Observar atentamente la *estructura aritmética* del enunciado y ser capaz de describirla simbólica o semánticamente.
2. Efectuar una *simplificación de los datos*, si es posible, realizando en

primer lugar las *operaciones indicadas más sencillas* (extracción de factores de un radical, ...) mirando de *unificar las notaciones.*

3. Investigar si se conocen *modelos de ejercicios semejantes* a los propuestos, bien en la forma, bien en cualquier otro aspecto del enunciado, y obrar de acuerdo con el método empleado en el modelo.

Ejemplo 1

$$\frac{2\sqrt{8}}{35} + \frac{20}{3\sqrt{200}} - \frac{3\sqrt{150}}{5\sqrt{147}} = \dots$$

a) La estructura aritmética es: «Suma de tres fracciones, dos de las cuales tienen los denominadores irracionales.»
Para poder sumar de la forma habitual, se deberán racionalizar los denominadores.

b) Las operaciones más sencillas que se pueden efectuar son, evidentemente, la extracción de factores del interior de los radicales y la correspondiente simplificación de las fracciones resultantes.
Tenemos pues:

$$\dots = \frac{2.2\sqrt{2}}{35} + \frac{20}{30\sqrt{2}} - \frac{3.\cancel{5}\sqrt{6}}{\cancel{5}.7\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{35} + \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3.\cancel{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{7} = \dots =$$

$$= \frac{12\sqrt{2} + 35\sqrt{2} - 45\sqrt{2}}{3.5.7} = \frac{2\sqrt{2}}{105}$$

Ejemplo 2

Simplificar la expresión dada, sacando factores comunes adecuadamente y teniendo en cuenta que el denominador es el cuadrado de una diferencia de dos radicales:

$$\frac{\sqrt{7}\,x + 2\sqrt{11}\,y - \sqrt{11}\,x - 2\sqrt{7}\,y}{18 - 2\sqrt{77}}$$

a) De la observación de la estructura aritmética se desprende, de manera natural, que convendrá calcular por separado el numerador y el denominador de la fracción.

b) En el propio enunciado se nos dice claramente qué operaciones tenemos que realizar (por lo menos en el numerador):
Resulta:

$$\frac{x(\sqrt{7}-\sqrt{11})+2y(\sqrt{11}-\sqrt{7})}{18-2\sqrt{77}}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{11})\,(x-2y)}{18-2\sqrt{77}}=\cdots$$

Ahora parece natural suponer que el denominador es el cuadrado de $(\sqrt{7}-\sqrt{11})$; $(\sqrt{7}-\sqrt{11})^2=7+11-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}=$ $=18-2\sqrt{77}$, efectivamente.

Luego: $\ldots=\dfrac{x-2y}{\sqrt{7}-\sqrt{11}}$

Ejemplo 3

Racionalizar la fracción $\dfrac{12}{\sqrt[5]{5-\sqrt{13}}}$

a) De la sola observación de la estructura aritmética del enunciado se puede encontrar la clave para resolver el ejercicio propuesto: en efecto, la estructura aritmética es: $\dfrac{A}{\sqrt[5]{B}}$, con $A=12$ y $B=$ $=5-\sqrt{13}$. Por lo tanto:

$$\frac{A.B^{4/5}}{B^{1/5}.B^{4/5}} = \frac{12.(5-\sqrt{13})^{4/5}}{5-\sqrt{13}} = \frac{12.(5-\sqrt{13})^{4/5}.(5+\sqrt{13})}{5^2-13} =$$

$$= (5-\sqrt{13})^{4/5}.(5+\sqrt{13})$$

Ejemplo 4

Opera: $\dfrac{2}{\sqrt[3]{24}} - \dfrac{3^{-1/3}}{2}$ y da el resultado racionalizado.

a) Se trata de una resta de fracciones, donde la primera tiene el denominador irracional y la segunda tiene por numerador una potencia de exponente negativo y fraccionario.

b) Si intentamos unificar notaciones y efectuamos las operaciones indicadas más sencillas en primer lugar, deberemos poner:

$$\ldots = \frac{2}{2\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{1.3^{2/3}}{2.3^{1/3}.3^{2/3}} = \frac{3^{2/3}}{2.3} = \frac{\sqrt[3]{9}}{6}$$

Ejemplo 5

Simplificando los radicales y elevando al cuadrado los dos miembros de la desigualdad, comprueba que ésta es verdadera:

$$\sqrt{12} + 3\sqrt{18} \quad < \quad 2\sqrt{28} + \sqrt{63}$$

a) Se trata de una desigualdad en la cual cada miembro es una suma de radicales (dos de ellos están multiplicados por un factor, el 3 y el 2).

b) Las operaciones más sencillas consisten en extraer los factores que sea posible del interior de los radicales; a continuación, tal como indica el enunciado, elevaremos al cuadrado los dos miembros de la desigualdad:

$$2\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{2} < 2 \cdot 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 9\sqrt{2} < 7\sqrt{7} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 \cdot 3 + 81 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 9\sqrt{6} < 49 \cdot 7 \Leftrightarrow 12 + 162 + 36\sqrt{6} < 343.$$

Es evidente, ahora, que las operaciones indicadas más sencillas consisten en agrupar todos los sumandos enteros y sumarlos (o restarlos), por lo que resulta:

$$36\sqrt{6} < 343 - 12 - 162 \Leftrightarrow 36\sqrt{6} < 169;$$

si ahora volvemos a observar la estructura aritmética, nos podemos fijar en que 36 es un cuadrado perfecto ($36 = 6^2$) y 169 también ($169 = 13^2$), por lo que podemos extraer la raíz cuadrada de los dos miembros, y resulta:

$$6\sqrt[4]{6} < 13 \Leftrightarrow \sqrt[4]{6} < 13/6 \Leftrightarrow \sqrt[4]{6} < 2{,}1666\ldots,$$

lo cual es claramente cierto, ya que, incluso $2^4 = 16$ es mucho mayor que 6.

Sugerimos que, en la primera sesión, se desarrollen los dos primeros ejemplos y se dicten los otros tres, a fin de que el alumno pueda ejercitarse en este tipo de ejercicio; en las otras dos sesiones se puden corregir o dar, previamente, algunas indicaciones suplementarias.

El *trabajo del alumno* a lo largo de esta primera fase consiste en completar las Predidácticas y en seguir el ritmo de trabajo impuesto en clase; probablemente algunos alumnos terminarán el estudio de los materiales citados en pocos días y, en tal caso, se les remitirá a los Ejercicios I, II y III.

Como un medio de control efectivo del trabajo realizado por el alumno durante esta primera fase se realiza, al día siguiente de haberla finalizado, una *Prueba de Control*. Dicha prueba proporciona, además, una base a partir de la cual se podrán efectuar modificaciones en la distribución de los alumnos por grupos de habilidad, si ello fuese necesario.

Más aún, esta prueba será un punto de partida para la realización de un análisis de errores por parte del alumno en la siguiente fase (véase el apartado 4.2).

En el apartado 5.2 figuran las características de dicha prueba de control.

4.2. Segunda fase: Detección de errores y resolución de problemas de Cálculo Aritmético

Fundamentalmente, se tratan en esta fase los otros dos aspectos del Cálculo Aritmético que, como ya hemos comentado, suelen ignorarse o confundirse con las técnicas de cálculo: la detección de errores y la resolución de problemas de Cálculo Aritmético. Por otra parte, este tratamiento repercutirá también en una mayor seguridad en los cálculos y en un mayor dominio del manejo de las técnicas de cálculo en todos los niveles.

Salvo un par de sesiones de introducción a la detección de errores destinadas a todos los alumnos, las restantes sesiones se distribuyen de modo diferente según que los alumnos sean de uno u otro grupo.

4.2.1. *Introducción general a la detección de errores (1.ª y 2.ª sesiones)*

El propósito de esta introducción, común a todos los alumnos, es proporcionarles unas normas o directrices generales para la detección de errores en general. El desarrollo de las sesiones es el siguiente:

1.ª sesión

Se realiza una primera toma de contacto con el problema, justificando la necesidad de dedicar un tiempo y un esfuerzo a la actividad de detectar errores y a la evaluación en general.

Se hace notar cómo los propios alumnos, ante un ejercicio de detección de errores aislados mal resuelto, se autocritican, considerando incomprensible el que no hayan sabido darse cuenta del error cometido. Con ello, se pretende que el alumno tome conciencia del hecho de que *existen factores no cognitivos* que intervienen sensiblemente en la actividad de detectar errores y que, precisamente, intentamos localizarlos.

Entre ellos, consideramos que hay que destacar especialmente: la *tendencia a emitir respuestas incontroladas* y la *propia percepción del enunciado*, cuya presentación influye decisivamente en ella, de forma que el alumno tiende a utilizar la respuesta apuntada como una sugerencia o indicación correcta (véase Luria [1981]).

En cambio, el alumno ha de ser consciente de que la respuesta escrita se ha pensado exclusivamente con el propósito de confundirlo, por lo cual debe ignorarla completamente.

Se trata, en el fondo, de *educar en el alumno el hábito de adoptar una actividad vigilante, crítica*, ante los cálculos ya realizados, como un primer paso para la posterior autocrítica.

El alumno debe ser capaz de darse cuenta de que el aspecto formal del enunciado dirige su atención hacia un punto falso (es útil, para hacer comprender este punto esencial, efectuar alguna pregunta «capciosa», en la que la atención del oyente se dirige hacia un punto determinado intrascendente, a fin de que deje de considerar el punto clave (véase Lamarca [1982]).

Ante un ejercicio de detección de errores, pues, el alumno debería proceder de la forma siguiente:

a) En primer lugar, *no debe hacer ningún caso de la respuesta indicada* (si conviene, tapándola incluso). De hecho, lo que se hace es reorganizar el enunciado del ejercicio de manera adecuada (lo cual está de acuerdo con la teoría de la «*Gestalt*»).

b) Seguidamente, tiene que convencerse de la *inexistencia de una respuesta directa inmediata*, esto es, del hecho de que no hoy fórmulas más o menos mágicas de simplificación realizables mentalmente. Este punto es fundamental, ya que la presentación formal del ejercicio induce al alumno a visualizar reglas inmediatas que permiten pasar de un miembro de la igualdad al otro.

c) Así pues, tiene que *realizar mediante los métodos habituales las operaciones* indicadas en el primer miembro de la igualdad (o del segundo, obviamente) prescindiendo, insistimos, del resultado del otro miembro.

d) Paralelamente en según qué ejercicios, y de forma complementaria en otros, el alumno deberá esforzarse en realizar autocomprobaciones mediante el uso de *contraejemplos* adecuados.

e) *Finalmente*, una vez convencido de su propia respuesta, tiene que limitarse a *compararla con el resultado indicado* (o con una modificación adecuada del mismo previamente efectuada) en el otro miembro y responder «Bien» o «Mal» según corresponda, sin retoques posteriores basados en la observación de la estructura formal del ejercicio.

Se estima que el desarrollo de lo que acabamos de exponer ocupa unos 25 minutos. El resto de la clase se dedica a un repaso de los errores *estructurales* más significativos; el alumno atiende ahora desde *otra perspectiva*, puesto que comprende que, en muchos casos, la incorrecta comprensión de una regla general nace justamente de un exceso de consideración hacia aspectos formales tan «atractivos» como engañosos.

Concretamente, a partir de las «igualdades» siguientes, se corrigen los posibles errores, siguiendo las directrices anteriores:

1.- $\dfrac{2.(2a-2b)}{2} = a-b$ **2.-** $2 + 2/3 \;.\; (1 + 1/2) = 24/6 = 4$

3.- $\dfrac{2/7}{2} = 7$ **4.-** $2^3+2^5+2 = \begin{cases} 2.(2^2+2^4) \\ 2^9 \end{cases}$

5.- $(2+3+5)^3 = 2^3+3^3+5^3$ **6.-** $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[5]{a}$

7.- $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^{-2}}} = -\sqrt{a^5}$ **8.-** $\sqrt{5+6+7} = \sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}$

9.- $a+b = \sqrt{a^2+b^2}$ **10.-** $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = 1$

11.- $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}$ **12.-** $5.\sqrt[3]{7^7} = 7.\sqrt[3]{5.7^2}$

Es importante no dejar traslucir que todas son falsas, más bien al contrario, conviene dar la sensación que «debe haber» alguna igualdad correcta.

Antes de terminar la clase se constituyen *10 grupos de 4 alumnos* cada uno (aproximadamente), que deben ser lo más homogéneos posible (es aconsejable formarlos partiendo de las notas de la prueba de detección de errores inicial y de la prueba de control). Para la sesión siguiente, cada uno de los grupos debe *proponer dos ejercicios* del tipo de detección de errores (de dificultad semejante a los realizados).

2.ª sesión

El profesor empieza escogiendo un total de 4 ejercicios de entre los propuestos por los distintos grupos y los escribe en la pizarra.

Duración máxima: 5 minutos.

A continuación, cada alumno, *individualmente*, deberá *resolver los 4 ejercicios propuestos*, durante un máximo de *10 minutos.*

Seguidamente, *se intercambian los ejercicios* entre los grupos de forma que cada uno corrige los ejercicios de un compañero de otro grupo, de acuerdo con las indicaciones que el profesor expone en la pizarra, a saber: 2 puntos por ejercicio bien resuelto (lo que significa que el alumno ha colocado una B si la igualdad era correcta, y una M si era falsa, corrigiendo en este caso el ejercicio adecuadamente —basta recuadrar el primer miembro de la igualdad si no se pueden realizar transformaciones sencillas—) y 0 puntos en caso contrario (p. ej., si sólo se ha indicado que estaba mal, sin efectuar explicación alguna).

Duración máxima: 10 minutos.

Finalmente, se hace reflexionar brevemente a los alumnos, remarcando que el *punto clave* de la experiencia radica en el hecho de *operar por uno mismo* e ignorar las «falsas pistas».

Duración máxima: 5 minutos.

El propósito de indicar los tiempos con tanta minuciosidad es impedir que se alargue innecesariamente alguna de las etapas del proceso, lo que impediría su efectiva realización.

Seguidamente, a través de unos ejemplos de detección de errores dentro de un contexto de operaciones aritméticas, y siguiendo las indicaciones que figuran en la directriz de evaluación (véase el cuadro VIII, punto 3.4), que debe comentarse brevemente, el profesor debe intentar que los alumnos se familiaricen con este tipo de ejercicios y con la metodología de resolución (fundamentalmente consignada en la propia directriz).

Los ejemplos que se proponen son los siguientes:

1.- 1/3 + 1/2 . (1/7 - 1/2) + 5 = 1/3 + 1/2 . (-5/14) + 5 =

$$= -5/6 \cdot 5/14 + 5 = \frac{-35+15+210}{42} = \frac{192}{42} = \frac{95}{21}$$

$$2.- \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[7]{a^2 \cdot \sqrt{a}}} = \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[7]{a^{5/2}}} = \sqrt[3]{a^2 \cdot a^{(5/2).(1/7)}} =$$

$$= \sqrt[3]{a^2 \cdot a^{5/14}} = \sqrt[3]{a^{33/14}} = a^{(33/14).(1/3)} =$$

$$= a^{11/14} = \sqrt[11]{a^{14}}$$

$$3.- 2.\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} - 5.\sqrt[3]{250} =$$

$$= 2.3.\sqrt[3]{2} + 4.\sqrt[3]{2} - 5.\sqrt[3]{2} = 5.\sqrt[3]{2}$$

Es importante no precipitarse en el momento de dar soluciones; así, por ejemplo, es conveniente pasar el error por alto en un primer repaso a fin de *agudizar la percepción del alumno.*

4.2.2. *Tratamiento diferenciado (3.ª-11.ª sesiones)*

En estas sesiones se lleva a cabo, de forma concreta, la diferenciación en grupos de habilidad; no hay que perder de vista, sin embargo, que el objetivo principal que se persigue, común a todos los alumnos, es consolidar los conocimientos de técnicas a todos los niveles mediante un desarrollo lo más amplio posible de la capacidad de autocrítica, concretada en la actividad de detectar errores de Cálculo Aritmético.

El siguiente cuadro (cuadro XVI) esquematiza el desarrollo de estas 9 sesiones:

Tipo de tarea	*Grupo D*	*Grupo M*	*Grupo E*	*Profesor*
Estudio de los materiales Análisis de errores I-III	3.ª, 4.ª y 5.ª sesiones	3.ª y 4.ª sesiones	3.ª sesión	—
Revisión de la Prueba de control				—
Ejercicios de detección de errores no aislados	—	5.ª y 6.ª sesiones	4.ª sesión	—
Corrección mutua de los Ejercicios I, II y III	6.ª - 11.ª sesiones	7.ª - 11.ª sesiones	5.ª - 11.ª sesiones	—
Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético	—	—	5.ª - 11.ª sesiones	—
Comentarios de los Guiones de resolución de problemas, de la Directriz y de sus Normas	—	—	5.ª sesión	5.ª sesión
Resolución de algunos ejercicios de los materiales Análisis de errores I-III y de detección de errores no aislados	8.ª sesión	8.ª sesión	8.ª sesión	8.ª sesión

CUADRO XVI

Comentarios generales

— Las dificultades que tienen los alumnos del grupo D para la asimilación de técnicas simples aconseja no exigirles la realización de los ejercicios de detección de errores no aislados, dada su especial complejidad (basta que tomen nota de lo que el profesor comenta en clase sobre esta cuestión).

Generalmente, además, estos mismos alumnos efectúan la prueba de control deficientemente, de ahí la necesidad de disponer de más de dos sesiones para analizarla.

— La especial dificultad que presenta la actividad de resolver problemas de Cálculo Aritmético, así como los resultados obtenidos en nuestras investigaciones aconsejan reservar dicha actividad a los alumnos del grupo E (que lo sean realmente, es decir, es preferible no incluir a los alumnos cuyo valor predicho sea muy cercano al valor crítico).

Así y todo debe tenerse en cuenta que en estas sesiones se exige de los alumnos del grupo E que intensifiquen notablemente su ritmo de trabajo, ya que deben realizar, en menos sesiones, tareas análogas a las del grupo M, a la vez que se ejercitan en la Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético. Su trabajo fuera del horario lectivo será, pues, absolutamente esencial.

— Por su parte, el profesor debe limitarse durante estas sesiones a atender a los alumnos en sus dudas (salvo en las sesiones 5.ª y 8.ª en las que realiza unas tareas específicas —ver el cuadro XVI—).

Revisión de la Prueba de Control

Antes de la 3.ª sesión el profesor entrega a los alumnos las Soluciones comentadas de la Prueba de Control (véase el apéndice V); en ellas figuran, además, unos ejercicios paralelos a los de la prueba.

Los alumnos deben analizar sus propios errores, con la ayuda de los materiales Análisis de errores I-III, y realizar todos los ejercicios paralelos a los que en la Prueba de Control habían realizado incorrectamente.

En las sesiones de consulta es conveniente que el profesor compruebe si los alumnos del grupo D han realizado correctamente los ejercicios paralelos correspondientes.

Corrección mutua de los Ejercicios I, II y III

La dinámica a seguir para la corrección mutua de estos ejercicios es la siguiente:

— Entre los alumnos de cada grupo (D, M y E) se constituyen dos equipos lo más equivalentes que sea posible y del mismo número de participantes, para poderlos emparejar en la propia aula.

— El objetivo de cada equipo consiste en resolver el mayor número de ejercicios (distribuidos en los tres niveles) con la particularidad de que no se considera bien resuelto un ejercicio por un alumno hasta que su pareja (del otro equipo) lo haya corregido, verificando si los pasos intermedios son correctos.

Lo fundamental es, por lo tanto, la *corrección*, ya que lo que se pretende potenciar de forma primordial es la autoevaluación, y es obvio que la tarea de corregir los ejercicios de un compañero de su mismo nivel se acerca notablemente a la de detectar y corregir sus propios errores.

Debe procurarse, por consiguiente, que los alumnos de una misma pareja no resuelvan simultáneamente un mismo ejercicio.

— Cuando un alumno detecta un error en los cálculos de su pareja, debe limitarse a indicarle cuál es la igualdad incorrecta, sin más aclaraciones, a fin de que el alumno que ha cometido el error pueda tener la oportunidad de corregirlo por sí mismo.

— El número de ejercicios y su distribución por niveles es, naturalmente, variable de un alumno a otro; convendría, sin embargo, que *todos los alumnos* resolviesen un ejercicio de cada técnica simple (nivel 1), unos doce ejercicios del nivel 2, lo más variados posible y tres o cuatro ejercicios del nivel 3 (como mínimo).

Durante toda esta etapa es conveniente que los alumnos consulten con frecuencia la Directriz de Evaluación.

Resolución de problemas de Cálculo Aritmético

La actividad de resolución de problemas de Cálculo Aritmético que inician los alumnos del grupo E en la 5.ª sesión convendría que se ajustase a los siguientes principios:

— El profesor debe desarrollar algunos de los ejemplos de ejercicios de diverger, así como sus características y su finalidad, antes de comentar los Guiones de Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético, la Directriz y las Normas para su utilización.

Todos los comentarios y aclaraciones deben permitir que cada alumno sea capaz de acabar de comprender por sí mismo los materiales de que dispone.

— El alumno debe empezar intentando resolver algunos de los ejercicios que figuran en la Lista de Ejercicios de diverger, antes de enfrentarse con los problemas de Cálculo Aritmético.

La falta de tiempo es un obstáculo para que el alumno llegue a dominar este particular tipo de ejercicio de diverger; en la práctica deberá ser suficiente que resuelva tres o cuatro.

— Posteriormente, deberá abordar los problemas que se le proponen en la Lista de Problemas de Cálculo Aritmético; es aconsejable que empiece con los números que a continuación se indican:

A) 4, 5, 6, 2; C) 1, 2, 5; D) 3; B) 1, y E) 2

— Generalmente, el alumno, incluso si es del grupo E, tiene considerables dificultades para resolver estos problemas. Es importante que el profesor le ayude mostrándole qué puntos de la Directriz no ha tenido en cuenta o dándole indicaciones que el propio alumno podría descubrir si realizase una atenta lectura de las heurísticas que en ella figuran.

La dificultad que presenta la Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético exigiría dedicar el doble de sesiones a su tratamiento, ampliando la sesión de ejemplificación a dos o tres sesiones y con una atención particular a cada alumno. Por supuesto, dentro de un curso académico normal, esto es imposible y, por lo tanto, el nivel que alcanzan los alumnos del grupo E en Resolución de Problemas es sensiblemente inferior al que podrían acceder con una atención más amplia.

Más aún, la atención que les exige esta actividad les aleja de adquirir una total seguridad en los cálculos más elementales; de ahí la necesidad que tienen incluso estos alumnos de repasar las técnicas de cálculo a todos los niveles: tienen que simultanear, pues, la actividad de resolución de problemas con la corrección mutua de ejercicios de los tres niveles, ya que, de lo contrario, podrían rendir muy por debajo de su nivel en las pruebas finales.

5. *EVALUACIÓN INTERNA DE LA DIDÁCTICA*

A fin de poder evaluar internamente la Didáctica se han diseñado diversas pruebas que seguidamente describiremos con detalle.

5.1. PRUEBAS INICIALES

La inclusión de las pruebas iniciales obedece a dos razones fundamentales:

1.ª Disponer de los puntajes de las dos variables de «conocimientos iniciales» imprescindibles para aplicar el modelo de predicción (véase el capítulo I), a saber, TCI (Técnicas de Cálculo Inicial) y DEI (Detección de Errores Inicial).

2.ª Tener una medida de la eficacia de la Didáctica que tenga en cuenta no sólo el nivel final alcanzado por el alumno, sino también el nivel inicial.
Concretamente se define el «*índice de Mc Guigan*» por la fórmula:
$G = \dfrac{\overline{f} - \overline{i}}{M - \overline{i}} \cdot 100$ donde $\overline{f}$ es la media final del grupo de alumnos considerado, $\overline{i}$ es la media inicial y M es el valor máximo que puede obtenerse en la prueba considerada. Se considera que «*valores de G próximos a 50* indican una buena solución al problema didáctico planteado» (véase Landsheere [1985], p. 139).

5.1.1. *PTCI (nivel 1): Prueba de Técnicas de Cálculo Inicial (nivel 1)*

Duración: 20 minutos.
Consta de 25 ítems sobre *técnicas simples*.
Proporciona una medida del nivel inicial del alumno en el nivel 1 de técnicas de cálculo (técnicas simples).

Puntuación: 2 puntos por ejercicio correctamente resuelto, 0 puntos por ejercicio incorrecto y 1 punto para casos dudosos (no es posible evitar la ambigüedad del término; en todo caso habría que aplicarlo con reservas).

Puntuación total máxima: 50 puntos.

Puntuación mínima para superar la prueba: 34 puntos.

Si bien, en principio, pueden cambiarse los ítems que figuran en la prueba incluida como modelo (ver apéndice I) por otros en los que el ejercicio propuesto exija únicamente la aplicación de otra técnica simple (consúltese el cuadro I), hay que tener en cuenta, sin embargo, que no todas las técnicas simples ofrecen la misma dificultad. Así, si se incluyen excesivos ejercicios sobre radicales, habrá demasiados ejercicios que el alumno dejará en blanco, por lo que el valor predictivo de la prueba desciende considerablemente; se aconseja, pues, en caso de querer confeccionar otros modelos de esta prueba, conservar la dificultad de los ítems.

Todos los valores que figuran en la ecuación de regresión se han obtenido con los modelos de pruebas que figuran en los apéndices, por lo que cualquier cambio que se realice debe ajustarse lo más posible a ellos si se pretende aplicar el modelo de predicción propuesto.

5.1.2. *PTCI (nivel 2): Prueba de Técnicas de Cálculo Inicial (nivel 2)*

Duración: 30 minutos.

Consta de 10 ítems sobre *técnicas compuestas de nivel 2*; algunos son formalmente semejantes a los ejemplos desarrollados en clase y otros no.

Proporciona una medida del nivel inicial del alumno en el nivel 2 de técnicas de cálculo.

Puntuación: 4 puntos por ejercicio correcto, 0 puntos por ejercicio incorrecto y 2 puntos para casos dudosos (p. ej., no simplificar el resultado final en el núm. 2, traducir correctamente a notación exponencial el núm. 5 pero equivocarse después al operar las fracciones, introducir bien los factores dentro del radical, pero extraerlos incorrectamente o viceversa en el núm. 6, extraer correctamente los factores en el núm. 7, pero operar equivocadamente los sumandos resultantes, racionalizar bien un factor, pero no el otro en el núm. 8).

Puntuación total máxima: 40 puntos.

Puntuación mínima para superar la prueba: 20 puntos.

Análogamente a como ocurría en la PTCI (nivel 1), un cambio en la distribución de los ítems formalmente semejantes a los ejemplos desarrollados en clase que dificulte (o, al contrario, que disminuya la dificultad de) la prueba incluida como modelo (ver apéndice II) puede invalidar el modelo de predicción. Se aconseja, pues, en caso de desear utilizar dicho modelo, efectuar cambios no estructurales al confeccionar otras pruebas.

5.1.3. *PDEI: Prueba de Detección de Errores Inicial*

Duración: 30 minutos.

Consta de 25 ítems sobre *detección de errores* de Cálculo Aritmético elementales.

El objetivo de esta prueba es medir hasta qué punto un alumno es capaz de detectar errores de Cálculo Aritmético antes de iniciarse la Didáctica. Es fundamental tener en cuenta que si un alumno indica que un ejercicio es incorrecto (pone M) y ni lo corrige ni recuadra el primer miembro del enunciado (acción que debe realizar si no pueden efectuarse operaciones sencillas), es como si lo hubiese dejado en blanco y, por lo tanto, se puntúa con un cero.

La *puntuación* es la siguiente:

Ejercicios 1-7: 2 puntos o bien 0 puntos, según haya respondido correcta o incorrectamente.
Ejercicios 8-13: 3 puntos, 1 punto o bien 0 puntos; se reserva 1 punto sólo para casos dudosos (p. ej., recuadrar los ejercicios 10 o 12).
Ejercicios 14-25: 4 puntos, 2 puntos o bien 0 puntos; se reservan los 2 puntos para casos dudosos (p. ej., recuadrar los ejercicios 16 y 24).
Puntuación total máxima: 80 puntos.
Puntuación mínima para superar la prueba: 46 puntos.

Las tres pruebas iniciales descritas pueden pasarse holgadamente en dos sesiones:

1.ª sesión: PTCI (nivel 1) y PTCI (nivel 2); duración: 20 + 30 = 50 minutos.
2.ª sesión: PDEI; duración: 30 minutos.

5.2. Prueba de control

Se trata, como ya hemos indicado, de una prueba que se realiza al día siguiente de finalizada la 1.ª fase, a fin de controlar efectivamente el trabajo efectuado por el alumno en el transcurso de la misma.

Duración: 30 minutos.

Consta de 10 ítems sobre *técnicas de cálculo*, principalmente del *nivel 1* (se incluye alguna técnica compuesta de nivel 2 muy sencilla).

Puntuación: Ejercicios 1-7, 9 y 10: 2 puntos por respuesta correcta, 0 puntos por respuesta incorrecta y 1 punto para casos dudosos.
Ejercicios 8 A) y 8 B): 1 punto por respuesta correcta y 0 puntos por respuesta incorrecta.

Puntuación total máxima: 20 puntos.

Puntuación mínima para superar la prueba: 10 puntos.

Véase un modelo de la misma en el apéndice IV.

5.3. Pruebas finales

Además de las correspondientes *pruebas paralelas a las iniciales*, a saber:

PTCF (nivel 1): Prueba de Técnicas de Cálculo Final (nivel 1).
PTCF (nivel 2): Prueba de Técnicas de Cálculo Final (nivel 2).
PDEF: Prueba de Detección de Errores Final; cuya duración y puntuación son idénticas a las iniciales, y para las que rigen las mismas observaciones que dábamos, referentes a los intercambios de ítems para elaborar otros modelos, se incluye una nueva prueba:
PTCF (nivel 3): Prueba de Técnicas de Cálculo Final (nivel 3).
Duración: 55 minutos.

Consta de 6 ítems sobre preproblemas, algunos formalmente análogos a los modelos desarrollados en clase y otros no.

Su propósito es averiguar hasta qué punto el alumno es capaz de *transferir* sus conocimientos de técnicas de cálculo a los preproblemas, en los que el aspecto formal no sugiere claramente la existencia de modelos previamente conocidos.

No se emplea como prueba predictiva en los modelos de predicción considerados.

Tampoco puede tenerse en cuenta, obviamente, a la hora de calcular índices de Mc Guigan, ya que no se dispone de una prueba inicial paralela.

Puntuación: Ejercicios 1-6: De 0 a 5 puntos cada uno (sólo valores enteros) dado que hay que valorar no sólo el resultado final, sino también los intentos para esbozar un plan de resolución.
Puntuación total máxima: 30 puntos.
Puntuación mínima para superar la prueba: 15 puntos.
Véase un modelo de la misma en el apéndice VIII.

La pasación de las pruebas finales se lleva a cabo en 3 sesiones:

1.ª sesión: PTCF (nivel 1) y PTCF (nivel 2); duración: 20 + 30 = 50 minutos.
2.ª sesión: PDEF; duración: 30 minutos.
3.ª sesión: PTCF (nivel 3); duración: 55 minutos.

5.4. Variables de rendimiento

A partir de las distintas pruebas descritas se definen unas variables iniciales y otras tantas variables finales paralelas; mientras que algunas de estas variables se utilizan en los modelos de predicción, otras constituyen simplemente variables globales que dan una medida del nivel alcanzado por un alumno en Cálculo Aritmético.

Variables iniciales

TCI: Técnicas de Cálculo Inicial = PTCI (nivel 1) + PTCI (nivel 2).
Valor máximo: 90 puntos.
Nivel mínimo aceptable: 54 puntos.

DEI: Detección de Errores Inicial = PDEI.
Valor máximo: 80 puntos.
Nivel mínimo aceptable: 46 puntos.

GLARI: Global de Aritmética Inicial = TCI + DEI.
Valor máximo: 170 puntos.
Nivel mínimo aceptable: 100 puntos.

Variables finales

TCF: Técnicas de Cálculo Final = PTCF (nivel 1) + PTCF (nivel 2).
DEF: Detección de Errores Final = PDEF.
GLARF: Global de Aritmética Final = TCF + DEF.

Los valores máximos y los niveles mínimos aceptables coinciden con los de las variables iniciales.

TOTARF: Total de Aritmética Final = GLARF + PTCF (nivel 3).

En el cuadro adjunto (cuadro XVII) se resumen las puntuaciones totales máximas y las puntuaciones mínimas para superar cada una de las distintas pruebas iniciales y finales que hemos descrito en los apartados 5.1 y 5.3; así como de las variables construidas a partir de ellas:

Pruebas y variables	*Puntuación total máxima*	*Puntuación mínima de superación*
PTCI (nivel 1) y PTCF (nivel 1)	50	34
PTCI (nivel 2) y PTCF (nivel 2)	40	20
Variables TCI = PTCI (nivel 1) + + PTCI (nivel 2) y TCF = PTCF (nivel 1) + PTCF (nivel 2)	*90*	*54*
PDEI y PDEF (coinciden con las variables DEI y DEF)	80	46
Variables GLARI = TCI + DEI y GLARF = TCF + DEF	*170*	*100*
PTCF (nivel 3)	30	15
Variable TOTARF (Total Aritmética Final)	*200*	*115*

CUADRO XVII

5.5. Prueba especial de problemas de Cálculo Aritmético

A los alumnos del grupo E se les pasa, en una sesión aparte, una prueba de problemas de Cálculo Aritmético:

PDPF: Prueba de Problemas Final.
Duración: 55 minutos.
Consta de 4 *problemas de Cálculo Aritmético.*

Su finalidad es conocer el nivel alcanzado por los alumnos del grupo E en la resolución de problemas de Cálculo Aritmético.

Puntuación: De 0 a 5 puntos (sólo valores enteros) por problema, ya que hay que valorar (al igual que en los preproblemas) los esfuerzos por encontrar un plan de resolución.
Puntuación total máxima: 20 puntos.
Puntuación mínima para superar la prueba: 8 puntos.
Véase un modelo de la misma en el apéndice X.

Los valores que indican el nivel mínimo de superación de una prueba son indicativos y dictados únicamente por nuestra experiencia; desde luego, el profesor puede establecer el listón en otros niveles.

Lo único que hay que tener en cuenta es que, si se desea hacer uso de los modelos de predicción, hay que ajustarse lo más posible a las indicaciones dadas sobre puntuación y duración de las distintas pruebas.

5.6. Seguimiento del Cálculo Aritmético a lo largo del curso

A lo largo de nuestras investigaciones hemos constatado que es útil realizar durante el curso pruebas periódicas de Cálculo Aritmético, por ejemplo cada mes, de *media hora* de duración aproximadamente, en la cual figuren ejercicios variados (técnicas de cálculo de los tres niveles y detección de errores aislados).

Los alumnos pueden (tal como ya se indicó) repasar los distintos aspectos del Cálculo Aritmético realizando los ejercicios pendientes de los materiales ya trabajados, así como los que figuran en los Módulos de Ejercicios de consolidación.

6. *DESARROLLO ESQUEMÁTICO DE LA DIDÁCTICA*

En el siguiente cuadro (cuadro XVIII) se esquematiza el desarrollo de la Didáctica por sesiones:

1.ª sesión	Pasación de las pruebas PTCI (nivel 1) y PTCI (nivel 2)
2.ª sesión	Pasación de la prueba PDEI
1.ª FASE	
1.ª - 5.ª sesiones	Comentarios de las Predidácticas números 1 a 12 (técnicas simples)
5.ª - 9.ª sesiones	Desarrollo de los ejemplos 1-7 sobre técnicas compuestas (nivel 2)
9.ª - 11.ª sesiones	Desarrollo de los ejemplos 1-5 sobre preproblemas (nivel 3)
12.ª sesión	Realización de la Prueba de Control
2.ª FASE	
1.ª y 2.ª sesiones	Introducción general a la detección de errores
3.ª - 11.ª sesiones	Tratamiento diferenciado por grupos de habilidad
(5.ª sesión)	Ejemplificación de problemas de Cálculo Aritmético (para el grupo E)
(8.ª sesión)	Corrección de ejercicios de los materiales Análisis de errores I-III y de Ejercicios de detección de errores no aislados (para todos los alumnos)
12.ª sesión	Pasación de las pruebas finales PTCF (nivel 1) y PTCF (nivel 2)
13.ª sesión	Pasación de la prueba final PDEF
14.ª sesión	Pasación de la prueba final PTCF (nivel 3)
TOTAL: 28 sesiones	

CUADRO XVIII

Apéndices

Apéndice I

PRUEBA DE TÉCNICAS DE CÁLCULO INICIAL (Nivel 1)

(Duración: 20 minutos)

1.- $2+3.5 =$ **2.-** $(-1) - (-1) =$

3.- $\frac{2}{3} + 7 =$ **4.-** $3 - \frac{2}{5} =$

5.- $\frac{2}{7} - \frac{3}{2} =$ **6.-** $\frac{7}{5} - \frac{3}{10} =$

7.- $\frac{1}{12} + \frac{5}{18} =$ **8.-** $\frac{2}{3} . 5+1 =$

9.- $\frac{\frac{2}{7}}{7} =$ **10.-** $3 - \frac{a-b}{2} =$

11.- $15 - (-n) =$ **12.-** $\frac{3b^2+1}{3} =$

13.- $\frac{10^2}{5} =$ **14.-** $3^{21}.3^{14} =$

15.- $\frac{3^{81}}{3^{52}} =$ **16.-** $2^4+3^4 =$

17.- $3^3 + 3^2 =$ **18.-** $(-3)^3 =$

19.- $(-2)^4 =$ **20.-** $-5^3 =$

21.- $-3^4 =$ **22.-** $\sqrt[5]{243} =$

23.- Introduce el 4 dentro del signo radical: $4 \cdot \sqrt{3} =$

24.- Extrae todos los factores del radical que sea posible: $\sqrt{125} =$

25.- $\sqrt{\sqrt[3]{7}} =$

APÉNDICE II

PRUEBA DE TÉCNICAS DE CÁLCULO INICIAL (NIVEL 2)

(Duración: 30 minutos)

Calcula:

1.- $3+5.(7-4.3)-3.(-7) =$

2.- $\dfrac{2}{21} - \dfrac{2}{105} + \dfrac{1}{50} =$

3.- $5a - \dfrac{3+4a}{2} + 6 \,.\, \dfrac{a}{3} =$

4.- $2 + 5.\,\dfrac{7}{3} - \dfrac{5}{\dfrac{3}{2}} =$

5.- $\dfrac{\sqrt[7]{5^3} \,.\, \sqrt[4]{5}}{\sqrt{5^{-1}}} =$

6. Introduce dentro del radical los factores exteriores y, a la vez, extrae todos los factores que sea posible:

$$3^3 . \sqrt[5]{a^{17}} =$$

7. Simplifica:

$$2.\sqrt{12} + \sqrt{75} - 3.\sqrt{27} =$$

8. Racionaliza:

$$\frac{125}{\sqrt[3]{5^7} \,.\, (\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

9. Desarrolla:

$$(3a-b^2)^2 =$$

10. Saca factores comunes:

$$3a^2b^5 + 15a^4b^4 - 9a^5b^6 =$$

Apéndice III

PRUEBA DE DETECCIÓN DE ERRORES INICIAL

(Duración: 30 minutos)

Corrige, si ha lugar, los siguientes ejercicios. Si el ejercicio está bien resuelto, pon B. Si la solución es incorrecta, pon M *y escribe la solución correcta*; si, siendo incorrecta la solución, no es posible realizar operaciones *sencillas*, por M y *recuadra* el primer miembro de la igualdad.

1.- $(-a).(-b) = -a.b$ **2.** $5.\frac{3}{7} = \frac{15}{7}$ **3.-** $(-1) - (-1) = +1$

4.- $\frac{8}{3} + 2 = \frac{10}{3}$ **5.-** $4+3.8 = 56$ **6.-** $9-3:3 = 8$

7.- $\frac{6^2}{3} = 4$

....

8.- $10-\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ **9.-** $3.\sqrt{2} = \sqrt{6}$ **10.-** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 1+\sqrt{2}$

11.- $3-\frac{2}{3}.\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$ **12.-** $\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}} = -\sqrt{a^3}$ **13.-** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = 1$

....

14.- $18 - (-x) = 18x$ **15.-** $-5^2 = 25$ **16.-** $6^2+6^3 = 6^5$

17.- $x + (y.z) = (x+y) . (x+z)$ **18.-** $(5-x)^2 = 25-x^2$

19.- $\frac{\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} = \frac{1}{2}$ **20.-** $\frac{\frac{11}{a}}{a} = 11$

21.- $4-\frac{a-b}{2} = \frac{8-a-b}{2}$ **22.-** $\frac{5a^2+2}{5} = a^2+5$

23.- $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{11} = \begin{cases} \sqrt{18} \\ \sqrt{110} \end{cases}$ **24.-** $\sqrt{3^2.5 + 7^2} = 3.\sqrt{5} + 7$

25.- $a.(b.c) = (a.b).(a.c)$

APÉNDICE IV

PRUEBA DE CONTROL

(Duración: 30 minutos)

Calcula:

1.- $-2.3+1.(-2)-5.(2-3.4) =$

2.- $\frac{7}{45} - \frac{3}{50} =$

3.- $2+\frac{3}{5}\,.\,4 =$

4.- $\frac{\frac{2}{3}}{5} + 2 =$

5.- $\frac{\sqrt[5]{3^{-1}}}{\sqrt[10]{3}} =$

6.- $5^{2}.\sqrt[4]{7^{21}} =$

(Introduce los factores exteriores dentro del signo radical y, a la vez, extrae todos los factores que sea posible.)

7.- $\sqrt{44} - 3.\sqrt{99} =$

8.- Racionaliza : A) $\frac{3}{\sqrt[7]{5^{2}}} =$ B) $\frac{2}{\sqrt{3}-5} =$

9.- $(3a^{2}-b)^{2} =$

10.- $25x^{4}y^{4} + 5x^{5}y^{3} - 15x^{5}y^{3} =$

(Saca factores comunes.)

Apéndice V

SOLUCIONES COMENTADAS DE LA «PRUEBA DE CONTROL»

1. $-2.3+1.(-2)-5.(2-3.4) = -6-2-5.(2-12) = -8-5.(-10) = -8+50 = 42.$

Los errores más observados han sido los que provienen de la ignorancia de la jerarquía de las operaciones y también de haber escrito $-5 \cdot (-10) = -50$ (en lugar de $+50$).

2. $$\frac{7}{45} - \frac{3}{50} = \frac{7.(2.5)-3.(3^2)}{2.3^2.5^2} = \frac{70-27}{2.3^2.5^2} = \frac{43}{2.3^2.5^2} \quad (= \frac{43}{450})$$

ya que como que $45 = 3^2 \cdot 5$ y $50 = 2 \cdot 5^2$, su m.c.m. es igual a $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.
Los errores más observados han consistido en escribir incorrectamente el primer numerador o en efectuar mal la operación $70 - 27$.

3. $$2 + \frac{3}{5} . 4 = 2 + \frac{12}{5} = \frac{2.5+12}{5} = \frac{10+12}{5} = \frac{22}{5}$$

El error más común ha sido poner $2 + \frac{12}{5} = \frac{14}{5}$; (hay que poner $\frac{2}{1} + \frac{12}{5}$ y seguir operando como en el 2).

4. $$\frac{2}{3/5} + 2 = 2.\frac{5}{3} + 2 = \frac{10}{3} + 2 = \frac{10+2.3}{3} = \frac{10+6}{3} = \frac{16}{3} .$$

Los errores más observados han consistido en escribir mal el primer sumando (p. ej., poniendo $\frac{2}{3} . \frac{1}{5}$ en lugar de $2 . \frac{5}{3}$) o en poner $\frac{10}{3} + 2 = \frac{12}{3}$ (como en el 3).

5. $\dfrac{\sqrt[5]{3^{-1}}}{\sqrt[10]{3}} = \dfrac{3^{-1/5}}{3^{1/10}} = 3^{-1/5-1/10} = 3^{-2/10-1/10} = 3^{-3/10} \; (=\sqrt[10]{3^{-3}})$.

Los errores más comunes han consistido en traducir incorrectamente a exponente fraccionario, en escribir $3^{-1/5+1/10}$, o en efectuar equivocadamente la operación $-1/5 - 1/10$.

6. $5^2 . \sqrt[4]{7^{21}} = 7^5 . \sqrt[4]{5^8 .7}$. Los errores más comunes han consistido en equivocar los exponentes, poniendo 5^6 o bien 7 en lugar de 7^5 y viceversa.

7. $\sqrt{44}-3.\sqrt{99} = \sqrt{2^2.11}-3.\sqrt{3^2.11} = 2.\sqrt{11}-3.3.\sqrt{11} =$
$(2-9).\sqrt{11} = -7.\sqrt{11}$

Los errores más observados han consistido en poner $44^{1/2} - 3 \cdot 99^{1/2} = 44^{1/2} - 297^{1/2} = -253^{1/2}$!!!, o bien en escribir $2^2.\sqrt{11}-3.3^2.\sqrt{11}$ y también en considerar $(2-9)\sqrt{11} = 7.\sqrt{11}$, en lugar de $-7.\sqrt{11}$.

8. A) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{5^2}} = \dfrac{3.5^{5/7}}{5^{2/7}.5^{5/7}} = \dfrac{3.5^{5/7}}{5}$. En este ejercicio, generalmente se han efectuado transformaciones falsas, o bien se ha efectuado $3 \cdot 5^{5/7} = 15^{5/7}$!!, en contra de la jerarquía de las operaciones.

B) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-5} = \dfrac{2.(\sqrt{3}+5)}{(\sqrt{3}-5).(\sqrt{3}+5)} = \dfrac{2.(\sqrt{3}+5)}{3-5^2} = \dfrac{2.(\sqrt{3}+5)}{-22} = \dfrac{(\sqrt{3}+5)}{-11}$.

El error más común ha sido omitir el cuadrado de 5, sustituyéndolo por 5 exclusivamente; han sido también numerosas las transformaciones falsas (p. ej., multiplicar numerador y denominador por $3^{1/2}$ o por $\sqrt{3} - 5$ en lugar de $\sqrt{3} + 5$).

9. $(3a^2-b)^2 = (3a^2)^2 - 2.(3a^2).b + b^2 = 9a^4-6a^2b+b^2.$

Los errores más comunes han consistido en poner $3a^4$, en lugar de $9a^4$, en colocar $+ 6a^2b$ en lugar de $- 6a^2b$, y en omitir el segundo sumando.

10. $25x^4y^4 + 5x^5y^3 - 15\,x^5y^3 = \underline{5}.5.\underline{x^4}.\underline{y^3}.y + \underline{5}.\underline{x^4}.x.\underline{y^3} - \underline{5}.3.\underline{x^4}.x.\underline{y^3} =$

$= 5.x^4.y^3.(5.y + x - 3.x)\ (=5x^4y^3\ (5y-2x)\ ).$

Los errores más observados han consistido en poner $5x^4y^3(5y \cdot x \cdot -$ $- 3x)$, en omitir algún factor común o en omitir algún factor no común.

EJERCICIOS DE REPASO

1.- $-3.2+2.(-3)-4.(3-2.4) =$

2.- $\frac{7}{50} - \frac{2}{45} =$

3.- $3+ \frac{2}{7} . 5 =$

4.- $\frac{3}{\frac{5}{7}} + 2 =$

5.- $\frac{\sqrt[10]{7}}{\sqrt[5]{7^{-2}}} =$

6.- $7^3 . \sqrt[5]{6^{32}} =$

8.- A) $\frac{5}{\sqrt[9]{7^4}} =$

7.- $2.\sqrt{52} - \sqrt{325} =$

B) $\frac{5}{\sqrt{7}-5} =$

9.- $(5a - b^2)^2 =$

10.- $16x^5y^3 + 4x^6y^4 - 28x^4y^5 =$

(Realiza los ejercicios que son semejantes a los de la prueba de control y que efectuaste incorrectamente.)

Apéndice VI

PRUEBA DE TÉCNICAS DE CÁLCULO FINAL (NIVEL 1)

(Duración: 20 minutos)

1.- $3+2.7 =$

2.- $(-2)-(-2) =$

3.- $\frac{2}{5}+7 =$

4.- $8-\frac{4}{3} =$

5.- $\frac{4}{5}-\frac{2}{3} =$

6.- $\frac{3}{4}-\frac{1}{12} =$

7.- $\frac{5}{18}-\frac{11}{12} =$

8.- $\frac{3}{2}.7+2 =$

9.- $\frac{\frac{5}{8}}{8} =$

10.- $2-\frac{a-b}{3} =$

11.- $24-(-x) =$

12.- $\frac{3x^2-1}{3} =$

13.- $\frac{10^2}{2} =$

14.- $5^{17}.5^{37} =$

15.- $\frac{7^{53}}{7^{87}} =$

16.- $3^4-2^4 =$

17.- $4^3+4^2 =$

18.- $(-2)^5 =$

19.- $(-3)^4 =$

20.- $-3^3 =$

21.- $-2^6 =$

22.- $\sqrt[7]{128} =$

23.- Introduce el 6 dentro del signo radical: $6.\sqrt{5} =$

24.- Extrae todos los factores del radical que sea posible: $\sqrt{147} =$

25.- $\sqrt[3]{\sqrt{11}} =$

APÉNDICE VII

PRUEBA DE TÉCNICAS DE CÁLCULO FINAL (NIVEL 2)

(Duración: 30 minutos)

Calcula:

1.- $5 - 3.(6-5.2) + 9.(-2) =$

2.- $\frac{1}{50} + \frac{2}{21} - \frac{2}{105} =$

3.- $4x - \frac{2+5x}{3} + 8.\ \frac{x}{4} =$

4.- $3+2.\ \frac{7}{5} - \frac{\frac{2}{3}}{5} =$

5.- $\frac{\sqrt[4]{7}.\ \sqrt[7]{7^3}}{\sqrt{7^{-1}}} =$

6.- Introduce dentro del radical los factores exteriores y, a la vez, extrae todos los factores que sea posible:

$5^4.\sqrt[3]{a^{19}} =$

7.- Simplifica: $\sqrt{125} - 3.\sqrt{20} + 2.\sqrt{80} =$

8.- Racionaliza: $\frac{98}{\sqrt[5]{7^8}.(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$

9.- Desarrolla: $(4a^2 - 5b)^2 =$

10.- Saca factores comunes: $3a^2b^5 - 9a^3b^7 + 15a^4b^5 =$

Apéndice VIII

PRUEBA DE TÉCNICAS DE CÁLCULO FINAL (NIVEL 3)

(Duración: 55 minutos)

1. Si $(x^{-3})^{2} . \left(\dfrac{y^{-1}}{x}\right)^{-2} . \sqrt[3]{x . \sqrt{y^{-1}}} = \sqrt[n]{x^{a} . y^{b}}$, halla *n*, *a*, y *b*.

2. Comprueba si es cierta la igualdad $\dfrac{x^{3}-y^{3}-xy+x^{2}y^{2}}{x^{2}+xy^{2}} = x - \dfrac{y}{x}$

   simplificando la fracción del primer miembro mediante la extracción adecuada de factores comunes.

3. Racionaliza la fracción: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}$

4. Opera: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-1}} - \dfrac{3}{\sqrt{3}}$ y da el resultado racionalizado.

5. Simplifica la fracción $\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3+1})\ (\sqrt{2}-(\sqrt{3+1}))}{4-2.\sqrt{3}}$ teniendo en cuenta que el numerador se puede convertir en una diferencia de cuadrados y el denominador en el cuadrado de una diferencia.

6. Elevando al cuadrado los dos miembros de la desigualdad, comprueba si es cierta: $\sqrt{7}+2>\sqrt{19}$.

APÉNDICE IX

PRUEBA DETECCIÓN DE ERRORES FINAL

(Duración: 30 minutos)

Corrige, si ha lugar, los siguientes ejercicios. Si el ejercicio está bien resuelto, por B. Si la solución es incorrecta, pon M *y escribe la solución correcta*; si, siendo incorrecta la solución, no es posible realizar operaciones *sencillas*, pon M y *recuadra* el primer miembro de la igualdad.

1.- $(-y).(-z) = -y.z$ **2.-** $8.\frac{2}{5} = \frac{16}{5}$ **3.-** $(-2)-(-2) = +4$

4.- $\frac{7}{3} + 3 = \frac{10}{3}$ **5.-** $7+2.6 = 54$ **6.-** $12-4:2 = 10$

7.- $\frac{8^2}{4} = 4$

....

8.- $9 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ **9.-** $5.\sqrt{3} = \sqrt{15}$ **10.-** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{5}$

11.- $2 - \frac{1}{3}.(1-\frac{1}{2}) = \frac{5}{6}$ **12.-** $\frac{1}{\sqrt[4]{a^{-3}}} = -\sqrt[3]{a^4}$ **13.-** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = 1$

....

14.- $23-(-a) = 23a$ **15.-** $-6^2 = 36$ **16.-** $8^3 + 8^2 = 8^5$

17.- $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$ **18.-** $(7-a)^2 = 49 - a^2$

19.- $\frac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$ **20.-** $\frac{\frac{13}{b}}{b} = 13$

21.- $3 - \frac{x-y}{4} = \frac{12-x-y}{4}$ **22.-** $\frac{2a^2-7}{2} = a^2-7$

23.- $\frac{1}{\sqrt[3]{a^3-b^3}} = \frac{1}{a-b}$ **24.-** $\sqrt{5.4^2+3^2} = 4.\sqrt{5} + 3$

25.- $(x.y).(x.z) = x.(y+z)$

APÉNDICE X

PRUEBA DE PROBLEMAS (FINAL)

(Duración: 55 minutos)

1. Transforma la expresión $\dfrac{4}{\sqrt{2.(5-\sqrt{21})}}$ en otra equivalente cuya estructura sea del tipo $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Racionaliza la expresión siguiente:

$$\frac{2}{\sqrt{2-4.\sqrt{2} + 5.\sqrt{50} - 7.\sqrt{18} + \sqrt[6]{8}}}$$

3. ¿Cuál es el signo de la siguiente expresión?:

$$\frac{(\sqrt{2+\sqrt[3]{5}})^2 - \sqrt[3]{25} - 2.\sqrt{2}.\sqrt[3]{5}}{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}$$

4. ¿Qué número es *mayor*: $\sqrt[3]{5}$ o bien $\sqrt{3} - 1$?

Capítulo III

ÁLGEBRA

1. *INTRODUCCIÓN*

El aprendizaje del álgebra elemental presenta varias peculiaridades que vale la pena resaltar aquí:

a) Precisa, de manera directa, que el alumno haya adquirido unos contenidos y, sobre todo, domine unos *procedimientos aritméticos básicos.*

b) Constituye un *salto en el grado de abstracción* tanto en el lenguaje como en los contenidos y procedimientos que se utilizan. Ello presenta dificultades importantes para muchos alumnos que no han sido suficientemente explicadas en la investigación del aprendizaje.

c) Se asienta en un *sistema conceptual extraordinariamente rico* que está centrado en el concepto de «función». Se trata de un sistema mucho más complejo que el que interviene en el aprendizaje del Cálculo Aritmético o en la resolución de problemas a este nivel. Esto tiene varias implicaciones importantes par el aprendizaje:

— Permite, de manera natural, *construir modelos* (funciones elementales) para abordar problemas extraídos de diversos ámbitos.
— Se hacen patentes los tres aspectos del lenguaje matemático: *semántico*, *simbólico* y *figurativo* así como la importancia del dominio de los *procedimientos de traducción recíproca* entre ellos.

d) El *dominio del lenguaje algebraico* (en su aspecto simbólico) constituye, a su vez, un requisito indispensable para abordar el aprendizaje de los métodos de resolución de muchas e importantes clases de problemas. Citemos al respecto los problemas de planteo algebraico (ver cap. IV) y, a otros niveles, los problemas de geometría analítica y los problemas de máximos y mínimos condicionados.

Todo lo anterior condiciona el tipo de instrucción que proponemos para este aprendizaje así como el correspondiente material del alumno.

2. *CONTENIDOS Y PROCEDIMIENTOS*

En el marco de la *Metodología Heurística* se pretende potenciar el dominio de procedimientos y sistemas de procedimientos frente a la mera adquisición de contenidos.

Además de los procedimientos de traducción recíproca antes citados y que ocupan un lugar prominente en el apredizaje del álgebra elemental, destacamos los procedimientos correspondientes a: *buscar contraejemplos, proponer conjeturas* en base a razonamientos inductivos, *utilizar el pensamiento analógico* y *generalizar un concepto* o *aplicarlo a un caso particular*. Tòdos ellos son procedimientos complejos cuyo dominio requiere el desarrollo de ciertas *habilidades intelectuales primarias* que involucran las operaciones mentales de *Reconocer, Converger, Evaluar* y *Diverger* (*cf*. Guilford [1977]). Esto significa que es preciso diseñar actividades en las que entren en juego todas esas operaciones y no sólo algunas de ellas.

Los procedimientos complejos, a su vez, pueden agruparse en un *sistema estructurado* destinado a resolver una determinada clase de problemas.

A lo largo de esta Didáctica se potencian, a veces implícitamente, procedimientos de los tres niveles citados. A continuación se explicitan algunos de ellos siguiendo el hilo de los contenidos sobre los que operan y de los que son inseparables a lo largo del aprendizaje.

2.1. Funciones entre números reales

Se presentan las funciones como reglas aplicables a los números reales que admiten, entre otras, una representación semántica («restar cuatro, a continuación multiplicar por tres y, por último, elevar al cuadrado»), otra simbólica (su ecuación: $y = (3(x - 4))^2$) y otra figurativa (su gráfica). Se pone el acento en los procedimientos de traducción recíproca.

Mediante el uso del lenguaje funcional se expresa la generalización de algunas propiedades aritméticas y se construyen modelos matemáticos sencillos de fenómenos más complejos. Se consigue así realizar predicciones cuya posterior contrastación con los datos empíricos permite evaluar el modelo en cuestión.

2.2. Proporcionalidad y rectas

Siguiendo una sugerencia de P. Puig Adam, se introduce la proporcionalidad a partir de tablas de números desprovistas inicialmente de significado. Se resaltan así las propiedades formales de la proporcionalidad. Se trata aquí de potenciar la generalización de la definición y las propiedades fundamentales a partir de ciertas regularidades. En un primer estadio estas propiedades se expresan «con palabras» («Si multiplicamos un valor de la magnitud "x" por un número cualquiera, el correspondiente valor de la magnitud "y" también queda multiplicado por dicho número»). Posteriormente, se insta al alumno para que las traduzca al lenguaje simbólico y, en particular, al lenguaje funcional utilizando el concepto de «función de proporcionalidad». Este proceso de simbolización se realiza también con magnitudes proporcionales concretas y el apoyo de su representación gráfica e interpretación semántica.

Para estudiar las rectas del plano partimos de su aspecto figurativo (la gráfica) y en base a ciertas propiedades geométricas elementales de los triángulos semejantes se inician los procedimientos de traducción al lenguaje simbólico (la ecuación). La interpretación de los coeficientes de la ecuación permite la traducción del lenguaje simbólico al figurativo que no debe reducirse al procedimiento mecánico (o mecanizable) de buscar dos puntos a partir de la ecuación. Por el contrario, se prefieren procedimientos alternativos como el de dibujar la gráfica a partir de un conjunto cualquiera de datos que la determinan (como la ordenada en el origen y la pendiente, o un punto y la pendiente) y no necesariamente a partir de dos puntos.

Sólo posteriormente (en la *ampliación*) aparece el concepto de «magnitudes casi proporcionales» como traducción semántica de una recta cualquiera del plano. Los procedimientos para transformar dos magnitudes concretas casi proporcionales en magnitudes proporcionales son especialmente interesantes y tienen una interpretación geométrica sencilla.

2.3. Funciones cuadráticas y parábolas

Se parte del aspecto simbólico (ecuación) de las funciones cuadráticas como generalización natural de las funciones de primer grado. Se comprueba que toda función cuadrática simple ($f(x) = ax^2$, $a \neq 0$) tiene por gráfica una parábola y que, además, estas parábolas agotan todas las formas parabólicas posibles. Instalados así en el aspecto figurativo (las parábolas de eje vertical) continuamos profundizando su interacción con el simbólico: ¿cómo se modifica la ecuación cuando trasladamos la parábola? El análisis subsiguiente clarifica la distinción entre posición y forma de una parábola de eje vertical, mostrando cómo cambia la ecuación al cambiar sólo la posición (traslación) y al añadir el cambio de forma. Resulta, así, que toda parábola de eje vertical es la gráfica de alguna función cuadrática.

Situados de nuevo en el lado simbólico es lógico plantearse la cuestión recíproca: ¿toda función cuadrática tiene por gráfica una parábola de eje vertical? La respuesta requiere el desarrollo de algún procedimiento de completar cuadrados. Queda al fin completamente establecida la equivalencia entre «funciones cuadráticas» y «parábolas de eje vertical».

Es importante resaltar que los procedimientos concretos de simbolización y representación gráfica que ha sido necesario desarrollar para contestar a las cuestiones planteadas, tienen interés en sí mismos y no deben ser considerados como instrumentos auxiliares. El procedimiento de completar cuadrados, por ejemplo, se retoma más adelante para buscar las soluciones (si existen) de una ecuación de segundo grado e interpretarlas geométricamente. En la *ampliación* vuelve a utilizarse ese mismo procedimiento para obtener la expresión general del vértice de la parábola y de las soluciones de la ecuación asociada en función de los coeficientes del trinomio. Otro procedimiento interesante que se desarrolla en la *ampliación* es un método no general para resolver la ecuación de segundo grado basado en la descomposición, por tanteo sistemático, de ésta en factores.

A partir de este contenido simbólico-figurativo, el capítulo termina con un apartado en el que se estudian algunas parejas de magnitudes relacionadas mediante una función cuadrática. Se desarrollan así algunos procedimientos de interpretación semántica.

2.4. POLINOMIOS

En base de las conocidas ecuaciones y gráficas de las funciones polinómicas de primer y segundo grado se plantea, para los polinomios de grado mayor (3, 4, 5, 6, 7, ...), una generalización (que es sencilla) de la ecuación y otra (más complicada) de la correspondiente gráfica. Esta última generalización se apoya en una conjetura natural relativa al número de puntos en que una recta puede cortar a cada una de esas gráficas. Se acaba conjeturando cuáles son las funciones capaces de admitir una recta que no corte a su gráfica. Ambas conjeturas pueden interpretarse en términos del número de raíces de un polinomio y se retomarán posteriormente cuando se aborde el problema de la divisibilidad de polinomios.

El resto del capítulo se desarrolla, necesariamente, dentro del aspecto simbólico puesto que no puede pretenderse, a este nivel, estudiar la relación entre la ecuación de una función polinómica de grado mayor que dos y su gráfica. Tampoco es posible considerar parejas de magnitudes concretas relacionadas mediante tales funciones.

Después de introducir el lenguaje de los polinomios, se recuerdan las operaciones elementales entre ellos y se utilizan para potenciar las operaciones mentales de reconocer, converger y evaluar siguiendo los principios puestos en práctica en el aprendizaje del Cálculo Aritmético (ver cap. II).

En la divisibilidad de polinomios se enfatiza constantemente la analogía con la divisibilidad de números enteros. Se insta al alumno a que particularice la analogía para cada concepto concreto («división euclídea de polinomios», «grado de un polinomio y valor absoluto de un número entero», «polinomio inversible» «polinomio unitario», «polinomios asociados», «polinomio primo», «M. C. D. y m. c. m. de polinomios») al tiempo que se resalta el punto en que la analogía se rompe: la no existencia de un método general para descomponer un polinomio en factores primos.

Casi la mitad de este capítulo, así como gran parte de la *ampliación*, se dedica al difícil problema de la descomposición. Se empieza comprobando la equivalencia, para todo polinomio, entre tener una raíz y tener un factor de primer grado. Para ello se analiza el mecanismo de la división entre un polinomio cualquiera y un polinomio de primer grado unitario, probándose así, simultánea y constructivamente, la regla de Ruffini y el Teorema del Resto que desembocan en el Teorema del Factor de Primer Grado. Se concluye enunciando el Teorema de las Raíces Enteras que sólo se demuestra en la *ampliación* junto con el Teorema de las Raíces Racionales. En la *ampliación* se justifica, además, un procedimiento para calcular el M. C. D. y el m. c. m. de dos polinomios sin necesidad de descomponerlos en factores primos.

2.5. CÁLCULO ALGEBRAICO

En este capítulo se pretende que el alumno asimile y llegue a dominar sistemas estructurados de procedimientos útiles para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado. En la *ampliación* se consideran inecuaciones y sistemas de inecuaciones de primer y segundo grado.

Cada uno de estos sistemas de procedimientos se explicita en un conjunto estructurado de reglas heurísticas llamado *Directriz*. En ningún caso llega a ser una *Directriz Algorítmica* (también llamada *Algoritmo*) puesto que las reglas que la constituyen presentan, en mayor o menor grado, cierta indeterminación en las acciones que debe realizar el sujeto resolvente.

En todos los casos se han compaginado los procedimientos gráficos con los analíticos, poniendo el énfasis en la interpretación recíproca entre ellos. Por razones prácticas se ha dado prioridad a los procedimientos analíticos en el caso de las ecuaciones (y en el caso de las inecuaciones no polinómicas o polinómicas de grado mayor que dos) y a los procedimientos gráficos en el caso de las inecuaciones. Para las inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas los procedimientos gráficos de resolución son los únicos asequibles.

En resumen, si bien desde un punto de vista global se pretende, como hemos dicho, que el alumno domine determinados sistemas estructurados de procedimientos, al analizar éstos más de cerca se observa que cada una de las reglas que forman una Directriz (como, p. ej., «Eleva al cuadrado ambos miembros de la igualdad») sólo podrá ser puesta en práctica sin errores sistemáticos si el alumno ha desarrollado suficientemente ciertas habilidades intelectuales primarias que se refieren no sólo a las operaciones mentales de reconocer y converger, sino también, y de manera muy preponderante, a las de evaluar y diverger (ver cap. II).

3. *DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL DEL ALUMNO*

3.1. Predidácticas

Se han elaborado únicamente dos Predidácticas de álgebra, una de ecuaciones y otra de sistemas de ecuaciones.

En la *Predidáctica de ecuaciones* se repasan las técnicas más elementales relativas a la manipulación de ecuaciones de cada uno de los tipos. Consta, a su vez de las siguientes secciones:

1. Consideraciones generales sobre las igualdades.
2. Ecuaciones lineales elementales (ver cuadro I).
3. Ecuaciones de segundo grado incompletas.
4. Ecuaciones irracionales elementales.

En la *Predidáctica de Sistemas* se pretende descomponer en procedimientos más elementales cada uno de los procedimientos complejos que se agruparán para constituir un sistema estructurado. De esta forma es posible detectar y tratar aisladamente las dificultades básicas del apredizaje del Cálculo Algebraico (ver cuadro II).

En ambos casos se da gran importancia a la evaluación, junto al reconocimiento y la producción convergente tradicionales.

El material del alumno contiene, además, las *Soluciones a la Predidáctica de Ecuaciones* y *Soluciones a la Predidáctica de Sistemas.*

CUADRO I

2.2. ECUACIONES LINEALES ELEMENTALES

1. ¿Cuáles de las ecuaciones indicadas son equivalentes a la dada?:

(A) $2x = 3$

a) $3x=2$ b) $-2x=-3$ c) $3=2x$ d) $-3=2x$ e) $3=-2x$

f) $-3=-2x$ g) $x=2/3$ h) $x=3/(-2)$.

(B) $5x-1 = 0$

a) $5x=-1$ b) $-1=5x$ c) $-1=-5x$ d) $5x=1$ e) $x=-\frac{1}{5}$

f) $x=1/5$ g) $x=-5$ h) $\frac{-1}{-5}$ i) $1-5x=0$.

(C) $\frac{3}{5}x = 2$

a) $2=3x/5$ b) $10=-3x$ c) $3x=2$ d) $3x=\frac{2}{5}$ e) $3x=10$

f) $x=3/10$ g) $x=10/3$ h) $x=\frac{10}{-3}$ i) $+3x=-10$.

(D) $5x = \frac{2x}{3} -1$

a) $1=\frac{2x}{3}-5$ b) $1=\frac{-13x}{3}$ c) $-3=13x$ d) $15x=2x-1$ e) $5x=\frac{2x-1}{3}$

f) $13x=3$ g) $5x=2x-3$ h) $15x=6x-3$ i) $5x=\frac{2x-3}{3}$

(E) $\dfrac{2}{3} + 2x = 4$

a) $2x=10/3$ b) $x=5/3$ c) $x=2-1/3$ d) $2+2x=12$ e) $2+6x=4$

f) $\dfrac{2+6x}{3}=4$ g) $6x=10$ h) $3x=5$ i) $1+3x+6$.

2. Corrige los pasos erróneos:

A) $3x - 5 = -4 \Rightarrow 3x = 5 - 4 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = 1/(-3)$

B) $-4 = -2x + 7 \Rightarrow -7 - 4 = -2x \Rightarrow x = 2/11$

C) $5 = 8 - 3x \Rightarrow 3x = 8 - 5 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

D) $-4 = 7x - 2x \Rightarrow 5x = -4 \Rightarrow x = \dfrac{-4}{-5} = \dfrac{4}{5}$

E) $8x = -2x + 3 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = 3/6 = 1/2$

F) $3x - 2/5 = 0 \Rightarrow 3x = 2/5 \Rightarrow x = 6/5$

G) $1/3 + 2x = -1 \Rightarrow 2x = -1 - 1/3 \Rightarrow 2x = -4/3 \Rightarrow x = 2/3$

H) $\sqrt{2} \cdot x - 3 = \sqrt{3} \cdot x \Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot x = 3 \Rightarrow x = -3\ (\sqrt{2} + \sqrt{3})$

CUADRO II

6. *Multiplica* por un número adecuado alguna ecuación y suma (o resta) ambas, a fin de eliminar una incógnita; finalmente, resuelve la ecuación resultante:

A) $\begin{aligned} 11x - 3y &= 5 \\ 2x - 6y &= 1 \end{aligned}$ B) $\begin{aligned} 7x + 3y &= 1 \\ 14x - 5y &= 3 \end{aligned}$ C) $\begin{aligned} 5x - 12y &= 2 \\ 3x - 4y &= 1 \end{aligned}$

7. A) *Despeja* la incógnita «y» en función de «x» en las expresiones siguientes: *a*) $2y - 3x = 1$ *b*) $y - 7x = 3$ *c*) $5x - 3y = 2$ *d*) $5x + y = -3$ *e*) $-2x + y = 2$ *f*) $3x - y = 5$

B) *Despeja* la incógnita «x» en función de «y» en las expresiones anteriores.

8. *Corrige*, si ha lugar, los ejercicios siguientes:

A) $3x + 2y = 1 \Rightarrow 2y = 1 - 3x \Rightarrow y = (1 - 3x)/2$ $(= 1/2 - 3x/2)$
B) $2x - y = 5 \Rightarrow y = -2x + 5$
C) $3x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 3x - 1$
D) $2x + 3y = 2 \Rightarrow 2x = 2 - 3y \Rightarrow x = 1 - \dfrac{3y}{2}$

9. *Sustituye* las expresiones siguientes en las igualdades correspondientes y resuelve las ecuaciones resultantes:

Expresiones	*Igualdades*	*Ecuaciones resultantes*	*Soluciones*
$y = 2x - 1$	$3x - y = 2$		
$y = 2x + 3$	$2x - 3y = 1$		
$x = -2y + 1$	$2x + 5y = -2$		

10. *Corrige* los errores que encuentres en los siguientes ejercicios:

Expresiones	*Igualdades*	*Ecuaciones resultantes*	*Soluciones*
$y = 3x - 2$	$5x - 3y = 1$	$5x - 3(3x - 2) =$ $= 1 \Rightarrow 5x - 9x - 6 =$ $= 1 \Rightarrow -4x = 7 \Rightarrow$	$x = -7/4$
$y = -2x + 1/2$	$3x - 2y = -1$	$3x - 2\left(-2x + \frac{1}{2}\right) =$ $= -1 \Rightarrow 3x + 4x - 1 =$ $= -1 \Rightarrow 7x = 0 \Rightarrow$	$x = 7$
$y = x - \frac{2}{3}$	$5x - 2y = 3$	$5x - 2\left(x - \frac{2}{3}\right) =$ $= 3 \Rightarrow 5x - 2x + \frac{4}{3} =$ $= 3 \Rightarrow 3x = 3 - \frac{4}{3} =$ $= \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = \frac{5}{3} \Rightarrow$	$x = 5$

3.2. Materiales comunes

Constituyen el grueso del material que utilizan todos los alumnos. Entre estos materiales y las *ampliaciones*, que describiremos más adelante, se desarrollan todos los contenidos y procedimientos citados en el apartado 2.

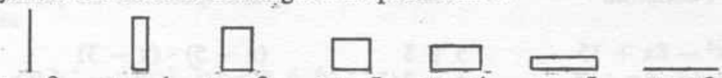
Dentro de los materiales comunes podemos considerar cuatro tipos de epígrafes diferentes:

a) *Epígrafes abiertos*: Están marcados con el símbolo ○ . En ellos se pide al alumno algún tipo de respuesta escrita como completar una tabla, hacer una gráfica, acabar una frase o dar una explicación (ver cuadro III). A veces un epígrafe abierto puede constar de una serie de ejercicios (ver la primera parte del cuadro IV).

b) *Epígrafes cerrados*: Están marcados con el símbolo ● . En ellos se da alguna explicación o se introduce algún concepto que el alumno debe entender para poder proseguir (ver segunda parte del cuadro IV).

○ En una serie de rectángulos isoperimétricos (mismo perímetro), ¿cómo varía el área en función del lado?

a) Dibujamos una serie de rectángulos isoperimétricos



$x = 0$ $x = 1$ $x = 2$ $x = 3$ $x = 4$ $x = 5$ $x = 6$

todos los cuales tienen, efectivamente, el mismo perímetro igual a ______.

b) Completa la tabla de valores

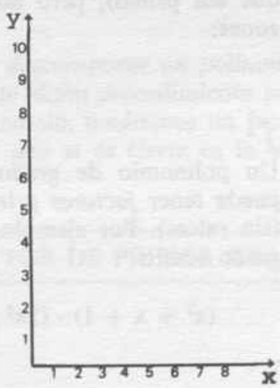
x = base	0	1	2	3	4	5	6	x
y = área	0		8					?

c) ¿Cuál es la *ecuación* que relaciona estas dos magnitudes? Vamos a deducirla: Llamemos «h» a la altura del rectángulo y tendremos:

$2x + 2h = 12$ puesto que ______________________

$x \cdot h = y$ puesto que ______________________

d) Eliminando «h» entre esas dos ecuaciones obtendrás la ecuación que relaciona «x» e «y» (debes obtener $y = 6x - x^2$).



e) *Busca el vértice* de la parábola
$y = -x^2 + 6x = -(x - \quad)^2 +$
y *represéntala gráficamente.*

f) De entre todos los rectángulos de perímetro 12, *¿cuál es el que tiene área máxima?*

____

g) *¿Qué rectángulos* corresponden a los puntos de corte de la parábola con el eje de las «x»?

____

Cuadro III

CUADRO IV

Polinomio →	*Raíces* →	*Descomposición en factores*
$x^2 - 8x + 15$	5 y 3	$(x - 5) \cdot (x - 3)$
$3x^2 - 5x + 2$	1 y 2/3	$3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2/3)$
$-x^2 + 2x - 1$	1 (doble)	$-(x - 1)^2$
$-8x^2 + 7x - 2$	No tiene	Es un polinomio primo

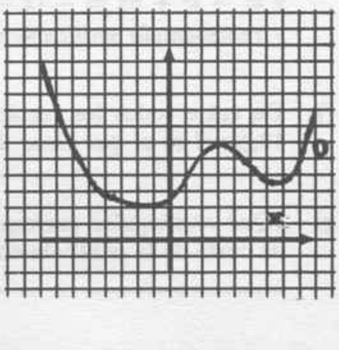
○ Completa la tabla para los siguientes polinomios de 2.º grado:

$-x^2 + x + 2$
$3x^2 + 5x + 8$
$x^2 - 7x$
$9x^2 - 12x + 4$
$7x^2 - 5x + 1$
$2x^2 - 7$

● ¿Qué sucede con los polinomios de *grado mayor que dos*? Se sabe que *todos son compuestos* (no hay ningún polinomio de grado mayor que dos que sea primo), pero no es fácil descomponerlos en factores por dos razones:

1.ª

Un polinomio de grado mayor que dos puede tener *factores primos de grado dos* (sin raíces). Por ejemplo, el polinomio de grado cuatro



$$(x^2 + x + 1) \cdot (2x^2 - 5x + 6)$$

no tiene raíces y, por lo tanto, es muy difícil de descomponer si nos lo dan en la forma

$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x + 6$$

2.ª
Aún en el caso de que un polinomio de grado mayor que dos tenga alguna raíz, no es fácil calcularla porque *no disponemos de una fórmula general* como en el caso de los polinomios de 2.º grado.
Por ejemplo, un polinomio de tercer grado como

$$6x^3 - 7x^2 + 8x - 9$$

seguro que tiene (al menos) una raíz, pero *¿cómo calcularla?*

En resumen, resulta que *casi nunca sabremos descomponer un polinomio de grado mayor que dos*. Únicamente cuando mediante algún procedimiento particular seamos capaces de encontrar una raíz del polinomio, tendremos un factor de primer grado de dicho polinomio, puesto que la que si es cierta es la equivalencia entre

TENER UNA RAÍZ	y	TENER UN FACTOR DE PRIMER GRADO

como demostraremos a continuación.

c) *Síntesis*: Constituyen el colofón de un capítulo y, a veces, de una sección. En ella se recogen los contenidos fundamentales que han intervenido en ese capítulo o sección (ver cuadro V). No se ha elaborado síntesis del Cálculo Algebraico. En su lugar figura una *Interpretación geométrica de ecuaciones y sistemas* que da una clasificación completa de los mismos tanto a nivel analítico como geométrico.

d) *Ejercicios*: Figuran al final de cada capítulo. Suelen incluir ejemplos resueltos y ejercicios del tipo *Corregir* y *Completar* frases (ver cuadro VI) y no suelen incluir contenidos ni procedimientos nuevos respecto de los desarrollados en los epígrafes anteriores, su función es más bien la de consolidar el aprendizaje de aquéllos.

Los ejercicios de Cálculo Algebraico están contenidos en cuatro módulos: *Módulo de ecuaciones lineales, Módulo de ecuaciones no lineales, Módulo de sistemas lineales* y *Módulo de sistemas no lineales* (ver cuadro VII). En estos módulos aparecen ejercicios de muy diversa naturaleza que están, además, clasificados en tres grados de dificultad (los más difíciles están marcados con dos asteriscos y los de dificultad media con uno). Cada módulo contiene las soluciones correspondientes.

SINTESIS DE LA PROPORCIONALIDAD

DP *(con palabras)*: La magnitud «y» es *PROPORCIONAL* a la magnitud «x» si cada valor de «y» se obtiene multiplicando el correspondiente valor de «x» por un número fijo «m» (generalmente mayor que cero) llamado CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.

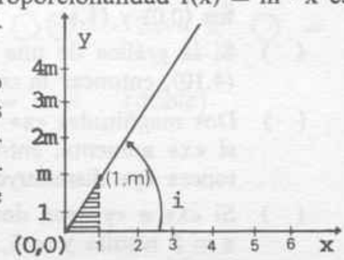
DP *(con símbolos)*: $y = m \cdot x$

En lenguaje funcional $x \longrightarrow f(x) = y = m \cdot x$

Una tal función «f» que relaciona dos magnitudes proporcionales «x» e «y», se llama FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD y consiste en multiplicar por la constante de proporcionalidad «m».

DP *(con figuras)*: La gráfica de la función de proporcionalidad $f(x) = m \cdot x$ es una RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS (0,0) Y (1, m).

La *INCLINACIÓN* de esta recta es el ángulo «i» que forma con el semieje positivo de las «x». Depende del valor de la constante de proporcionalidad «m» y también de las UNIDADES DE MEDIDA tomadas sobre los ejes de coordenadas.



1P *(con palabras)*: Si multiplicamos un valor de «x» por un número cualquiera r, el correspondiente valor de «y» también queda multiplicado por el mismo número r.

1P *(con símbolos)*: Utilizando flechas se expresa:

$$\text{Si } x \longrightarrow y, \quad \text{entonces} \quad r \cdot x \longrightarrow r \cdot y$$

Utilizando el lenguaje funcional se expresa:

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$$

2P *(con palabras)*: El valor de «y» correspondiente a la suma de dos valores de «x» es igual a la suma de los correspondientes valores de «y».

2P *(con símbolos)*: Utilizando flechas se expresa:

$$\text{Si } \begin{array}{l} x_1 \longrightarrow y_1 \\ x_2 \longrightarrow y_2 \end{array} \quad \text{entonces} \quad (x_1 + x_2) \longrightarrow (y_1 + y_2)$$

Y utilizando el lenguaje funcional se expresa:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

CUADRO V

EJERCICIOS SOBRE PROPORCIONALIDAD Y RECTAS

1. Indica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F). En caso de ser falsa, debes *corregirla* para convertirla en verdadera.

( ) La función $f(x) = 3x + 5$ es una función de proporcionalidad, siendo la constante proporcionalidad igual a 3.

( ) Si «y» es una magnitud proporcional a la magnitud «x» con constante de proporcionalidad igual a 7, entonces «x» es proporcional a «y» con constante de proporcionalidad igual a -7.

( ) La gráfica de cualquier función de proporcionalidad pasa por los puntos (0,0) y (1,1).

( ) Si la gráfica de una función de proporcionalidad pasa por el punto (4,10), entonces la constante de proporcionalidad es 2,5.

( ) Dos magnitudes «x» e «y» son proporcionales cuando se cumple que si «x» aumenta, entonces «y» aumenta, y que si «x» disminuye, entonces «y» disminuye.

( ) Si «x» e «y» son dos magnitudes proporcionales y sabemos que para $x = 2$ resulta $y = 3$, entonces para $x = 4$ resultará $y = 5$.

( ) La gráfica de una función de proporcionalidad es una recta que tiene por pendiente la constante de proporcionalidad.

( ) La ecuación de cualquier recta del plano es de la forma $y = mx + b$.

( ) Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, pero, si no coinciden, tienen diferente ordenada en el origen.

( ) Las rectas del plano que no tienen pendiente son: las paralelas al eje de las «x» y las paralelas al eje de las «y».

( ) Como que las rectas paralelas al eje de las «y» no tienen pendiente ni ordenada en el origen, tampoco tienen ecuación.

( ) Que una recta tenga pendiente $-4/5$ significa que al avanzar 1 unidad según el eje de las «x», bajamos 4/5 según el eje de las «y». En otras palabras: al avanzar 4 unidades según el eje de las «x», bajamos 5 según el eje de las «y».

( ) Si una recta pasa por el origen de coordenadas (0,0), entonces no tiene ordenada en el origen.

CUADRO VI

CUADRO VII

(*)3) Completa:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2-1}{2} - y = 1 \\[2ex] y - \dfrac{1}{2} = x^2 - x - \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2-1}{2} - 1 = \bigcirc \\[2ex] y = x^2 - x \bigcirc \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcirc^{\bigcirc} - \bigcirc - 1 = \frac{x^2-1}{2} - \bigcirc \Rightarrow \bigcirc\bigcirc^{\bigcirc} - 2x = x^2 \bigcirc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcirc^{\bigcirc} - \bigcirc + \bigcirc = 0 \Rightarrow (x-1)^2 \; 0 \Rightarrow x = \quad \text{(doble)}$$

Luego: $y = \bigcirc - \bigcirc - 1 \Rightarrow y =$

4) Completa:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y^2+1}{\bigcirc} - 1 = x \\[2ex] \dfrac{x^2+\bigcirc}{y} = \bigcirc \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bigcirc + 1 - x = x^2 \\[2ex] x^2 + 1 = y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bigcirc = x^2 + x\bigcirc \\[2ex] \quad = y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcirc + 1 = \bigcirc + x - \bigcirc \Rightarrow x =$$

Luego: $y = \bigcirc \Rightarrow y = \pm$

(*)5) Resuelve los siguientes sistemas:

A.- $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12} \\[2ex] xy = 12 \end{array}\right\}$

B.- $\left.\begin{array}{l} xy = 45 \\ x^2 + y^2 = 106 \end{array}\right\}$

6) Corrige, si ha lugar, el siguiente ejercicio:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{20} \\[2ex] y = x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{9}{20} \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{9}{20} \Rightarrow 20(2x+1) =$$

$$= 9x(x+1) \Rightarrow 40x + 20 = 9x^2 + 9x \Rightarrow 9x^2 - 31x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{31 \pm 41}{18} = \begin{cases} 72/18 = 4 \\ -10/18 = -5/9 \end{cases}$$ (No es válida puesto que es negativa)

Luego, $y=5$. Comprobación: $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{9}{20}$

7) En la resolución del siguientes ejercicio hay un único error. Señálalo con un círculo y corrígelo aparte.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{y-y} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] x^2 - y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x^2 = 1-y \\[2ex] x^2 - 2 = y \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2 = 1-x^2-2 \Rightarrow 3x^2 = -1$$

Luego, como x es negativo, no hay solución.

(**)8) Invéntate un sistema de ecuaciones *no lineal* que tenga una única solución: $x=2$, $y=3$.

(Indicación: no utilices el método de tanteo e intenta "visualizar" la situación pedida).

9) Resuelve cualquier ejercicio anterior por un método distinto al que hayas utilizado la primera vez:

3.3. Ampliaciones

Se han elaborado ampliaciones de: *Proporcionalidad*, *Rectas del plano*, *Ecuaciones de segundo grado y parábolas*, *Magnitudes relacionadas mediante una función cuadrática* y *Polinomios* (además de una ampliación especial del *Cálculo Algebraico*).

En general estas ampliaciones incluyen contenidos y procedimientos nuevos (en forma de ejercicios parcialmente resueltos) generalmente de nivel superior al de los materiales comunes. Dentro de las ampliaciones se demuestran, a veces, en forma de ejercicio con indicaciones, algunas cuestiones que sólo se habían enunciado dentro de los materiales comunes (ver cuadro VIII).

La *Ampliación de Cálculo Algebraico* constituye un tema monográfico, el *Cálculo con Desigualdades* que se ha desarrollado distinguiendo entre el caso de inecuaciones y sistemas con una incógnita y el caso de dos incógnitas; se da en cada caso la Directriz de resolución propia (ver cuadro IX).

CUADRO VIII

AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y PARÁBOLAS

1. Busca la *expresión general del vértice* de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ utilizando el método de *completar cuadrados.*

   Nota: Los cálculos ocupan un par de líneas y el resultado es

$$V = (p, q) = \left(\frac{-b}{2a} , \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

2. Escribe la *solución general* de la ecuación de segundo grado $a(x - p)^2 + q = 0$.

   Nota: Basta *aislar la «x»* y se obtiene

$$x = p \pm \sqrt{\frac{-q}{a}}$$

   que tiene distintos significados según sea la relación entre el signo de «a» y el signo de «q».

3. *Demuestra la «receta»* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sustituyendo en la solución general obtenida en 2, los valores de «p» y «q» obtenidos en 1.

4. *Un método no general para resolver ecuaciones de segundo grado*:
   - Además de los dos métodos explicados para resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

   también puede ser útil *la descomposición en factores como método de resolución.*

Veamos $\boxed{\textit{un ejemplo:}}$

$$x^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\, x-\sqrt{6} = 0$$

Por tanteo se obtiene la descomposición

$$x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\, x-\sqrt{6} = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}) = 0$$

de donde se deducen las soluciones

$$x_1 = \sqrt{2}\ ,\ x_2 = -\sqrt{3}.$$

$\boxed{\textit{Otro ejemplo:}}$

$$x^2 - (7+\sqrt{5})\, x+7\sqrt{5} = 0$$

Buscamos una descomposición del tipo

$$x^2-(7+\sqrt{5})\, x+7\sqrt{5} = (x \quad)(x \quad) = 0.$$

Es decir que *buscando dos números cuyo producto sea* $7\sqrt{5}$ *y cuya suma sea igual a* $-(7+\sqrt{5})$. Luego los dos números son -7 y $-\sqrt{5}$, es decir:

$$x^2 - (7+\sqrt{5})\, x+7\sqrt{5} = (x-7)(x-\sqrt{5}) = 0$$

de donde se obtienen las soluciones $x_1 = 7$, $x_2 = \sqrt{5}$.

$\boxed{\textit{Tercer (y último) ejemplo:}}$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Para obtener la descomposición $x^2 + 2x - 8 = (x \quad)(x \quad) = 0$, necesitamos dos números cuya suma sea 2 y cuyo producto sea -8. Son el 4 y el -2.

Por lo tanto $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)\ (x - 2) = 0$, de donde $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

CUADRO IX

INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

$$\boxed{ax^2 + bx + c \geqslant 0}$$

Ejemplo 1

$$x^2 + x - 12 > 0 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x + 4) > 0$$

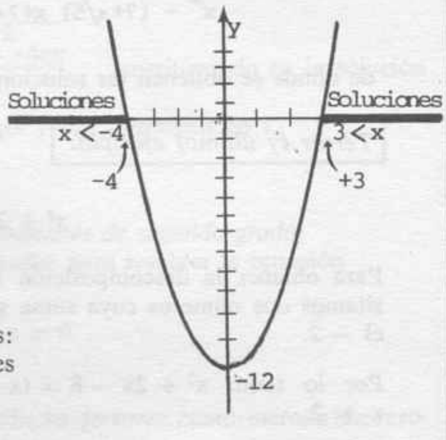
Como que el producto de dos factores es positivo solamente cuando los dos factores tienen el mismo signo, vamos a realizar un *estudio del signo* de $(x - 3) \cdot (x + 4)$ para los diferentes valores de «x». Denotaremos mediante el símbolo «S(x − 3)» el «signo de (x − 3).

S(x-3)	-	|	-	|	+
S(x+4)	-	|	+	|	+
		-4		3	
S(x-3)(x+4)	+	|	-	|	+

De este estudio se deduce que el producto será positivo tanto para las $x < -4$, como para las $x > 3$.

Resolución gráfica

— Inecuación en forma normal:
$x^2 + x - 12 > 0$
— Ecuación asociada:
$x^2 + x - 12 = 0$
— Soluciones de la ecuación asociada:
$x = 3$, $x = -4$
— Función asociada:
$y = x^2 + x - 12$
— Gráfica de la función asociada:
— Representación gráfica de las soluciones:
(Son los valores de «x» para los cuales $y = x^2 + x - 12 > 0$).



Ejemplo 2

$$-(x+5)^2+4 \geqslant 0 \Rightarrow -(x+5)^2 \geqslant -4 \Rightarrow (x+5)^2 \leqslant 4 \Rightarrow |x+5| \leqslant 2$$

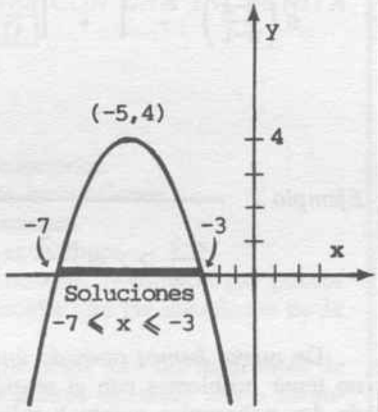
esto significa que

$$\left.\begin{array}{l} x+5 \leqslant 2 \\ x+5 \geqslant -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x \leqslant -3 \\ \Rightarrow x \geqslant -7 \end{array}$$

Esto significa que las soluciones de esta inecuación son todos los números comprendidos entre -7 y -3 (incluyendo ambos extremos).

Resolución gráfica

— Inecuación en forma normal
$-(x+5)^2+4 \geqslant 0$
— Ecuación asociada:
$-(x+5)^2+4=0$
— Soluciones de la ecuación asociada:
$x=-3$, $x=-7$
— Función asociada:
$y=-(x+5)^2+4$
— Gráfica de la función asociada:
— Representación gráfica de las soluciones:
(Son los valores de «x» para los que $y=-(x+5)^2+4 \geqslant 0$).



Cuestiones

a) ¿Es posible que una inecuación de segundo grado con una incógnita no tenga ninguna solución? Explícalo utilizando la resolución gráfica. Pon un ejemplo, si existe, y resuélvelo.
b) Ídem para una única solución y para dos soluciones.
c) Ídem para el caso en que sean soluciones *todos* los números reales.

INECUACIONES NO POLINÓMICAS CON UNA INCÓGNITA

Ejemplo 1

$$\frac{2}{x-1} > 1$$

Como que no sabemos el signo de (x — 1), *no podemos quitar denominadores.* Simplificaremos *sin multiplicar ambos miembros* de la desigualdad por ningún número cuyo signo dependa del valor de «x», pues esto alteraría, de manera imprevista, el sentido de la desigualdad.

$$\frac{2}{x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2-(x-1)}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x-1} > 0$$

	$x<1$	$1<x<3$	$x>3$
S(3-x)	+	+	-
S(x-1)	-	+	+
$S\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$	-	+	-

De este estudio se deduce que el cociente es positivo únicamente para las «x» comprendidas entre 1 y 3. El conjunto de las soluciones de esta inecuación puede expresarse mediante:

$$1 < x < 3$$

Ejemplo 2

$$\frac{x-2}{4-x} > 2 \Rightarrow \frac{x-2}{4-x} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x-2-2(4-x)}{4-x} > 0 \Rightarrow \frac{3x-10}{4-x} > 0$$

De nuevo *hemos operado únicamente en un miembro de la desigualdad* para no tener problemas con el sentido de la misma. Llegados a este punto, cociente de dos polinomios mayor o menor que cero, basta realizar un *estudio del signo del cociente.*

	$x<10/3$	$10/3<x<4$	$x>4$
S(3x-10)	-	+	+
S(4-x)	+	+	-
$S\left(\frac{3x-10}{4-x}\right)$	-	+	-

De este estudio se deduce que el cociente será positivo para los valores de «x» comprendidos entre 10/3 y 4. Se expresa:

$$10/3 < x < 4$$

DIRECTRIZ PARA RESOLVER INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

MÉTODO ANALÍTICO

1. Mediante sumas y restas, conseguir que *uno de los dos miembros sea igual a cero.*
2. Transformar el otro miembro hasta obtener un *polinomio* o un *cociente de polinomios.*
3. *Descomponer* cada polinomio *en factores primos.*
4. *Eliminar,* en cada descomposición, *los factores* primos que sean *positivos.*
5. Realizar un *estudio del signo,* en función del signo de los factores.
6. Describir el *conjunto de las soluciones* y expresarlo en lenguaje algebraico.

DIRECTRIZ PARA RESOLVER INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

MÉTODO GRÁFICO

1. Escribe en *forma normal* cada una de las inecuaciones.
2. Escribe la *ecuación asociada* a cada una de las inecuaciones.
3. Busca las *soluciones* de cada una de esas ecuaciones.
4. Escribe la *función asociada* a cada una de las ecuaciones.
5. *Representa gráficamente* cada una de estas funciones, resaltando sus puntos de corte con el eje de las «x» (que deben coincidir con las soluciones de la ecuación asociada).
6. Utilizando los puntos 1, 3 y 5, *representa sobre el eje «x» las soluciones* de cada una de las inecuaciones, indicando si los puntos extremos son o no solución.
7. Si se trata de un sistema, busca la *intersección (parte común)* de los dos conjuntos de soluciones. Es la *solución del sistema.* Exprésala en lenguaje algebraico.

4. *DISEÑO DE LA INSTRUCCIÓN*

Tal y como se dijo en el capítulo I de esta guía, no pretendemos dar normas rígidas respecto a la forma de utilizar estos materiales, pero nos sentimos obligados a dejar constancia de cómo han sido utilizados y, en particular, del número de sesiones empleadas, para obtener los resultados que allí se citan.

4.1. Características generales de la instrucción

Dentro del marco general del *Aprendizaje diferenciado* y una vez clasificados los alumnos en los tres grupos de habilidad respecto del aprendizaje del álgebra, debe tenerse en cuenta que:

— Las *Predidácticas* son materiales destinados a apoyar el aprendizaje de los alumnos con dificultades (grupo D) aunque en alguna medida pueden ser útiles para otros alumnos. Serán trabajados individualmente durante la correspondiente instrucción y, en la medida de lo posible, serán comentados y corregidos en clase.

— Los *Materiales comunes* marcan la pauta y determinan el hilo conductor de la instrucción. En general, la misma estructura de estos materiales sugiere la forma en que conviene trabajarlos en clase, intentando siempre que el grado de interacción entre el profesor y los alumnos y el de los alumnos entre sí, sea el máximo posible dentro de una *discusión ordenada y guiada por el profesor.* Lo dicho hasta aquí se refiere, fundamentalmente, a los *Epígrafes abiertos*, que constituyen el grueso del material común. Los *Epígrafe cerrados* y las *Síntesis* deben ser explicados por el profesor en la medida que considere conveniente. Los *Ejercicios* deben ser trabajados individualmente por todos los alumnos y, si es posible, comentados y corregidos en clase.

El *Cálculo Algebraico* constituye una excepción en lo que se refiere al tipo de actividades que deben desarrollarse en el aula (ver los detalles en 4.3). En cuanto a los *Ejercicios*, que están agrupados en cuatro *Módulos*, hay que señalar que su gradación de dificultad permite efectuar la siguiente diferenciación:

Grupo D: Realizan los ejercicos sin asteriscos.
Grupo M: Realizan, además, los ejercicios con un asterisco.
Grupo E: Realizan todos los ejercicios.

— Las *Ampliaciones* están destinadas a posibilitar, especialmente a los alumnos del grupo E, que desarrollen plenamente sus capacidades. Deben ser trabajadas por estos alumnos de manera individual y fuera de las horas lectivas.

La *Ampliación de Cálculo Algebraico*, el *Cálculo con desigualdades*, representa, de nuevo, una excepción puesto que los métodos de resolución de algunos tipos de inecuaciones y sistemas de inecuaciones deberían formar parte de la instrucción común a todos los alumnos. A pesar de ello no la incluiremos en lo que sigue porque no disponemos de datos empíricos relativos a las dificultades que representa este aprendizaje.

4.2. Distribución aproximada por sesiones

Esta instrucción ha sido diseñada para que tenga una duración aproximada de 33 sesiones distribuidas como sigue:

— Funciones entre números reales	2
— Magnitudes proporcionales y funciones de proporcionalidad	3
— Rectas del plano	4
— Funciones cuadráticas y formas parabólicas	4
— Ecuaciones de segundo grado y parábolas	2
— Magnitudes relacionadas mediante una función cuadrática	1
— Polinomios	7
— Ecuaciones	4
— Sistemas de ecuaciones	6

4.3. Instrucción detallada del Cálculo Algebraico

La instrucción que proponemos para este aprendizaje tiene ciertas semejanzas con la dada para el aprendizaje de las técnicas de Cálculo Aritmético compuestas de nivel 2 (ver cap. II).

La estructura de cada una de las sesiones seguirá el siguiente patrón:

1. El profesor propone y resuelve un *ejemplo* del tipo de ecuación o sistema de que se trate. La resolución la realiza con todo detalle (ejemplificación) y siguiendo unos procedimientos tipificados de antemano.
2. El profesor propone un ejercicio semejante *(ejemplo bis)* que, una vez resuelto por los alumnos, corregirá siguiendo el método anteriormente ejemplificado.
3. A continuación se realiza un *análisis de errores* en base a los errores reales que han cometido los alumnos.
4. Por último se realiza conjuntamente la *interpretación geométrica* de la ecuación o sistema, y de sus soluciones (si existen).

Este patrón se repite para cada ejemplo, hasta que estos completen una clase de ecuaciones (o sistemas) que tengan en común un mismo método de resolución. Entonces el profesor escribirá con todo detalle el conjunto **estructurado de reglas o *directriz*** que ha utilizado en todas las ejemplificaciones y en todas las correcciones. A partir de ese momento los alumnos deberán conocer y utilizar sistemáticamente la Directriz con objeto de que lleguen a interiorizarla.

4.3.1. *Ecuaciones de primer y segundo grado* (2 sesiones)

Ejemplo 1

$$\frac{1}{3} \cdot x - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{x}{6} - 2 \qquad \text{(Solución } x = 13\text{)}$$

Ejemplo 1 bis

$$\frac{5x}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{3} \right) = \frac{x}{6} + x - 3$$ (No tiene solución)

Análisis de errores

— Los errores estructurales de la suma de fracciones.
— Errores que provienen de ignorar la jerarquía de las operaciones.
— Errores en la resolución de la ecuación $ax = b$.
— Errores en la interpretación de la ecuación $0x = b$.
— Errores en los signos al cambiar un término de miembro.

Interpretación geométrica

Comentar el material del alumno correspondiente que figura en *Interpretación geométrica de ecuaciones y sistemas* sin olvidar el caso de indeterminación ($0x = 0$) aunque no haya aparecido en los ejemplos.

Ejemplo 2

$$\frac{1}{2} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot x^2 = -1$$ $\left(\textit{Sol.}\ x = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{8} \right)$

Ejemplo 2 bis

$$\frac{3}{5} \cdot x + 2 = \frac{x^2}{2} \qquad \left(\text{Solución} \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{109}}{5} \right)$$

Análisis de errores

(Se indican únicamente los que aparecen por primera vez.)

— Errores de aplicación de la fórmula general (signo del coeficiente «b», etc.).

Interpretación geométrica

Comentar el correspondiente material del alumno.

Ejemplo 3

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+5} = \frac{3}{x-1} - \frac{1}{8}$$

(Solución $x_1 = 3$, $x_2 = -23$)

Ejemplo 3 bis

$$\frac{9}{x+3} + \frac{2}{x+1} = 2$$

(Solución $x_1 = 3$, $x_2 = -3/2$)

Análisis de errores

(Se indican únicamente los que aparecen por primera vez.)

— Aceptar como válida una solución sin sentido.

Interpretación geométrica

Material del alumno.

Directriz (para expresar una ecuación en forma normal)

1. Elimina los paréntesis (calculando previamente el resultado de cada paréntesis y utilizando la propiedad distribuitiva sólo si es inevitable).
2. Efectúa la suma de las fracciones de cada miembro por separado. (Obtendrás así una igualdad entre dos fracciones). Simplifica cada miembro por separado.
3. Elimina los denominadores (utilizando que «producto de medios es igual a producto de extremos»). Obtendrás una igualdad entre dos productos.
4. Si los dos miembros tienen un factor común (p. ej., el factor $(x - 5)$) puedes dividir ambos miembros por dicho factor y eliminarlo, siempre y cuando supongas que dicho factor es distinto de cero (en el ejemplo $x \neq 5$).
5. Simplifica cada miembro por separado (agrupando términos semejantes).
6. Escribe la ecuación en forma normal ($ax^2 + bx + c = 0$) y resuélvela. Si la ecuación es de segundo grado ($a \neq 0$), utiliza la fórmula general.
7. Comprueba si la solución o soluciones obtenidas verifican la ecuación primitiva. Desecha las soluciones que no tengan sentido en la ecuación primitiva (recuerda que dividir entre cero no tiene sentido).

4.3.2. *Ecuaciones irracionales* (2 sesiones)

Ejemplo 1

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+6} = 7$$ (Solución $x = 5$)

Ejemplo 1 bis

$$\sqrt{3x+10} - \sqrt{3x-2} = 6$$ (No tiene solución)

Análisis de errores

(Se indican únicamente los que parecen por primera vez.)

— Errores al elevar el binomio al cuadrado.
— Errores relativos a elevar un producto al cuadrado: $(5 \cdot \sqrt{a})^2 = 5a$.
— Aceptar como válida una solución de la ecuación auxiliar que no sea solución de la ecuación irracional primitiva (éste es el caso de la «solución» $x = 2$ en el último ejemplo).

Interpretación

Destacar la razón por la cual una solución de la ecuación auxiliar puede no ser solución de la ecuación irracional primitiva.

Ejemplo 2

$$\sqrt{10x-1} - 6 + \sqrt{5x+4} = 0$$ (Solución $x = 1$)

Ejemplo 2 bis

$$\sqrt{7x-5} - \sqrt{3x-2} = 1$$ (Solución $x = 2$)

Ejemplo 3

$$\sqrt{x^2+x-2} = 2x+4$$ (Solución $x = -2$)

Ejemplo 3 bis

$$\sqrt{x^2+x-2} = -2x-4$$ (Solución $x_1 = -2$, $x_2 = -3$)

Ejemplo 4

$$\sqrt{2x^2+3x-1} - \sqrt{2x^2-2x+9} = 1$$ (Solución x = 5)

Ejemplo 4 bis

$$\sqrt{2x^2+3x-1} + \sqrt{2x^2-2x+9} = 1$$ (No tiene solución.)

Análisis de errores

(No aparecen errores nuevos.)

Interpretación

Insistir en la distinción entre «soluciones de la ecuación auxiliar» y «soluciones de la ecuación irracional primitiva».

Directriz (para resolver ecuaciones irracionales)

1. «Equilibra» los dos miembros de la ecuación (en el sentido de que ambos tengan, si es posible, el mismo número de radicales).
2. Eleva al cuadrado ambos miembros.
3. Simplifica, por separado, cada uno de los dos miembros y si todavía aparece un radical, aíslalo en uno de los miembros.

4. Simplifica globalmente la ecuación dividiendo los dos miembros por un factor común distinto de cero (si existe).
5. Eleva de nuevo al cuadrado ambos miembros de la ecuación.
6. Escribe la ecuación resultante en forma normal ($ax^2 + bx + c = 0$) y resuélvela. Si la ecuación es de segundo grado ($a \neq 0$), utiliza la fórmula general.
7. Cada una de las soluciones obtenidas puede ser:

   a) «*Auténtica*», si verifica la ecuación irracional primitiva, o

   b) "*Ficticia*", si verifica una ecuación irracional que se obtiene cambiando el signo de uno o más términos de la ecuación irracional primitiva.

8. Si has obtenido alguna «solución» que no es ni «auténtica» ni «ficticia», significa que te has equivocado en los cálculos.

4.3.3. *Sistemas de ecuaciones lineales. Método de reducción* (2 sesiones)

Ejemplo 1

$$\left.\begin{aligned} 12x - 10y &= 5 \\ 18x - 24y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

(Solución $x = 25/54$, $y = 1/18$)

Ejemplo 1 bis

$$\left.\begin{aligned} 20x - 12y &= 3 \\ 15x + 27y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

(Solución $x = 7/48$, $y = -1/144$)

Ejemplo 2

$$\left.\begin{array}{l} -8x + 6y = 15 \\ 2x - (3/2)y = -7 \end{array}\right\}$$ (No tiene solución)

Ejemplo 2 bis

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 20 \\ x/5 - y/4 = 1 \end{array}\right\}$$ (Infinitas soluciones: $\left(x, \frac{4x-20}{5}\right)$)

Ejemplo 3

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x-2} = \frac{4}{y} \\ x - \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} \end{array}\right\}$$ (Solución x = 41/7, y = 36/7)

Ejemplo 3 bis

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x+y} = \frac{3}{2x} \\ -y- \frac{x-1}{3} = \frac{x}{9} \end{array}\right\}$$ (Solución x = 3, y = − 1)

Análisis de errores

— Errores en el cálculo del m. c. m. de los coeficientes.
— Errores que provienen de no multiplicar *todos los términos* de la ecuación por el factor adecuado.
— Errores que provienen de no cambiar el signo de *todos los términos* de una ecuación (o de no consignar dicho cambio con la suficiente claridad).
— Errores que provienen de una cierta relajación que se produce una vez eliminada una de las incógnitas (se producen muchos errores en la resolución de la ecuación que resulta con una sola incógnita).
— Cualquiera de los errores consignados en la resolución de ecuaciones de primer grado.
— Errores en la comprobación originados por el interés que tiene el alumno en no tener que *rectificar los cálculos.*

Interpretación geométrica

Comentar el material del alumno *Interpretación geométrica de ecuaciones y sistemas*, a partir de estos ejemplos.

Directriz (Método de reducción)

1. Escribe el sistema en forma normal $\left.\begin{array}{r} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{array}\right\}$

2. Si las dos rectas son paralelas ($A/D = B/E$), pueden darse dos casos:

   a) Rectas coincidentes ($A/D = B/E = C/F$) $\Rightarrow$ Infinitas soluciones
   b) Paralelas distintas ($A/D = B/E \neq C/F$) $\Rightarrow$ Ninguna solución

3. Si no son paralelas, busca el m. c. m. (A, D) (o bien el m. c. m. (B, E)).
4. Multiplica cada ecuación por el factor adecuado para que los coeficientes de las «x» de las dos ecuaciones se conviertan en el m. c. m. (A, D).

5. Suma o resta miembro a miembro las dos ecuaciones para que se anule el coeficiente de «x» (o bien el de «y» si hubiésemos operado con el m. c. m. (B, E)).
6. Resuelve la ecuación de primer grado en «y» que resulta. Para calcular el valor de «x» puedes repetir el proceso (trabajando ahora con el m. c. m. (B, E)), o sustituir el valor obtenido de «y» en una de las ecuaciones primitivas.
7. Comprueba que la solución verifica las dos ecuaciones del sistema primitivo.

4.3.4. *Sistemas lineales y no lineales. Método de sustitución* (4 sesiones)

Ejemplo 1

$$5x - y = 4$$
$$17x + 13y = 30$$

(Solución $x = 1, y = 1$)

Ejemplo 1 bis

$$x + 12y = 21$$
$$5x - 11y = -37$$

(Solución $x = -3, y = 2$)

Ejemplo 2

$$4x + y = 19$$
$$3x = 9 + y$$

(Solución $x = 4, y = 3$)

Ejemplo 2 bis

$$y - 5x = -6$$
$$4x = 2y + 6$$

(Solución $x = 1$, $y = -1$)

Ejemplo 3

$$2x^2 + y - 1 = 0$$
$$3x - 5y + 4 = 0$$

(Solución $(1/5, 23/25)$ y $(-1/2, 1/2)$)

Ejemplo 3 bis

$$3x^2 + 1 = 2y$$
$$5 - 3x - y = 0$$

(Solución $(1, 2)$ y $(-3, 14)$)

Ejemplo 4

$$2y^2 - 5x + 2x^2 = 0$$
$$4x + 3y = 5$$

(Solución $(2, -1)$ y $(1/2, 1)$)

Ejemplo 4 bis

$$y = (1/2)\ (x - 4)^2 + 3$$
$$y - 3 = 5(x - 4)$$

(Solución $(4, 3)$ y $(14, 53)$)

Análisis de errores

— Aparecen todos los errores de manipulación de las ecuaciones de primer y segundo grado (ver 4.3.1).
— Errores originados al intentar sumar términos no semejantes.
— Errores relativos a confundir «solución del sistema» con «componente de la solución». En particular, si un sistema admite dos soluciones (x_1, y_1) y (x_2, y_2), algunos alumnos toman (x_1, x_2) como «la solución».

Interpretación geométrica

Comentar el material del alumno *Interpretación geométrica de ecuaciones y sistemas*, a partir de estos ejemplos.

Directriz (método de sustitución)

1. Escribe el sistema en forma normal (las dos ecuaciones en forma polinómica con coeficientes enteros).
2. Aisla en una de las ecuaciones (preferiblemente de primer grado) alguna de sus incógnitas (la que tenga el coeficiente más sencillo).
3. Sustituye la expresión de la incógnita aislada en la otra ecuación.
4. Sigue la *directriz para expresar una ecuación en forma normal*. Obtendrás así uno o más valores para la incógnita no aislada.
5. Sustituye, sucesivamente, cada uno de estos valores en la otra ecuación. Obtendrás así para cada valor de «x» el correspondiente valor de «y» (o viceversa: para cada valor de «y» el correspondiente valor de «x»).
6. Comprueba si cada par de valores (x, y) obtenido, verifica las dos ecuaciones del sistema primitivo.

5. *EVALUACIÓN INTERNA*

Para cuantificar el grado en que los alumnos adquieren efectivamente los contenidos y dominan los procedimientos, hemos utilizado cinco pruebas:

una *inicial* que se pasa inmediatamente antes de empezar la instrucción, y cuatro *finales* que se pasan respectivamente después de cada capítulo.

Cada una de las pruebas finales (Apéndices II, III, IV, V) consta de dos partes que tienen el mismo número de preguntas cada una. Las preguntas de la primera parte de cada una de las pruebas finales son paralelas (idénticas, salvo cuestiones formales) a las correspondientes preguntas de la *Prueba elemental inicial* (Apéndice I). De esta manera dispondremos de un procedimiento para cuantificar, aunque sólo sea en el nivel elemental, la eficacia de esta Didáctica.

Las pruebas concretas que se adjuntan aquí (Apéndice II-V) son las que hemos utilizado para construir las variables «ALEI», ALEF» y «GLALF» (ver 5.2) que intervienen en las ecuaciones de regresión (ver capítulo I). Por ello, y en cuanto quieran ser utilizadas para este fin, las pruebas no deberán ser modificadas esencialmente ni en el tipo de ejercicios que las constituyen ni en el grado de dificultad de éstos.

5.1. Características de las pruebas

a) *Tipos de ejercicios*

En estas pruebas hay fundamentalmente dos tipos de ejercicios distintos:

— *Ejercicios cerrados*: Como los ejercicios números 1, 6, 7, 9 y 10 de la prueba elemental inicial (Apéndice I). En éstos el alumno debe contestar poniendo «V» (de verdadero) o «F» (de falso) al lado de cada una de las cuatro alternativas A, B, C y D que contiene el ejercicio. No hay ninguna limitación en el número de «V» o de «F» que pueden aparecer en un mismo ejercicio.

— *Ejercicios abiertos*: Son todos los restantes ejercicios. En ellos el alumno debe responder de manera diferente según los casos (dibujando una gráfica, interpretándola, haciendo unos cálculos, dando una explicación, etc.).

Todas las pruebas tienen ejercicios de los dos tipos, excepto la prueba de Cálculo Algebraico que consta únicamente de ejercicios abiertos.

b) *Forma de puntuar*

Todos los ejercicios de todas las pruebas tienen una puntuación máxima de 2 puntos.

Los ejercicios cerrados, para contrarrestar los efectos del azar, se puntúan mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Puntuación} = \frac{A - E}{2} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} A = \text{Núm. de alternativas acertadas} \\ E = \text{Núm. de alternativas erróneas} \end{array}$$

lo que da, evidentemente, la posibilidad de una puntuación no entera e, incluso, negativa para un ejercicio cerrado. *Debe advertirse a los alumnos* de esta forma de puntuar, así como del hecho de que es más conveniente dejar una alternativa en blanco que contestarla al azar (las alternativas dejadas en blanco no se contabilizan como errores).

Los ejercicios abiertos admiten sólo tres posibles puntuaciones: 0, 1 y 2; reservándose la puntuación intermedia, «1», para casos muy excepcionales o bien para ejercicios que se componen claramente de dos partes.

c) *Puntuación máxima de cada pueba y nivel mínimo aceptable*

Todos los ejercicios contribuyen a la puntuación total de la correspondiente prueba con 2 puntos, excepto los ejercicios de proporcionalidad y rectas que contribuyen sólo con la mitad. Así, por ejemplo, la prueba elemental inicial que consta de: 5 ejercicios de proporcionalidad y rectas, 3 ejercicios de funciones cuadráticas y parábolas, 3 ejercicios de polinomios y 4 ejercicios de Cálculo Algebraico, tendrá una puntuación máxima de:

— *Prueba elemental inicial* $(10/2) + (6) + (6) + (8) = 25$

Como hemos dicho, las restantes pruebas constan de dos partes (elemental y superior) con igual número de ejercicios cada una. Por ello la contribución de la parte elemental de cada prueba (que pondremos entre paréntesis) es siempre igual a la contribución de la parte superior.

— *Prueba de proporcionalidad y rectas* $(10/2) + 10/2 = 10$
— *Prueba de funciones cuadráticas y parábolas* $(6) + 6 = 12$
— *Prueba de polinomios* $(6) + 6 = 12$
— *Prueba de Cálculo Algebraico* $(8) + 8 = 16$

La contribución de la parte elemental de cada una de estas cuatro pruebas coincide, naturalmente, con la contribución de su paralela dentro de la prueba elemental inicial.

El *nivel mínimo aceptable* se toma hacia la mitad de la puntuación en cada prueba. Desgraciadamente, el nivel inicial de los alumnos (cuantificado mediante un puntaje medio de 3,75 sobre 25 en la prueba elemental inicial —ver Grup ARESTA [1985]—) no permite conseguir resultados finales muy brillantes.

d) *Tiempo de duración*

Las cinco pruebas han sido diseñadas para que tengan cabida dentro de una sesión normal de clase (unos 55 minutos aproximadamente).

5.2. Variables definidas mediante las pruebas de álgebra

Las pruebas descritas permiten definir tres variables:

ALEI = «Álgebra Elemental Inicial»

Se identifica con la prueba elemental inicial tal como la hemos definido.

Su valor máximo es, por lo tanto, 25.

Esta variable interviene únicamente en el modelo de predicción del álgebra (ver cap. I).

ALEF = «Álgebra Elemental Final»

Se obtiene sumando la parte elemental de cada una de las pruebas finales.

Por lo tanto se trata de una variable globalmente paralela a la variable ALEI y su valor máximo es también de 25.

Esta variable no interviene por sí sola en ninguno de los modelos de predicción; interviene formando parte de una variable global que definimos a continuación.

GLALF = «Global Álgebra Final»

Se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro pruebas finales. Su valor máximo es, por lo tanto, 10 + 12 + 12 + 16 = 50.

Esta variable interviene en los modelos de predicción de problemas de planteo algebraico y de problemas de contar.

Apéndices

APÉNDICE I

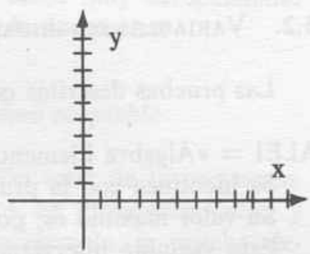
PRUEBA ELEMENTAL INICIAL

1. Dada la función $f(x) = 2x - 1$, entonces:

   A) $f(2) = 3$
   B) La imagen del -1 es igual a 1
   C) El cero es la antiimagen del cero
   D) $f(3 + 2) = f(3) + f(2)$

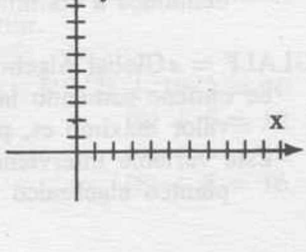
2. *Dibuja las gráficas* de las funciones:

$$f(x) = 1/2\ x$$
$$g(x) = 1/2\ x - 3$$



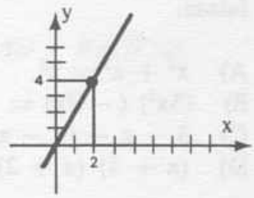
3. *Escribe la ecuación* de la recta que pasa por el punto (0,5) y tiene pendiente igual a 4.

4. *Dibuja una recta* que pasa por el punto (1,2) y tiene pendiente igual a -3.



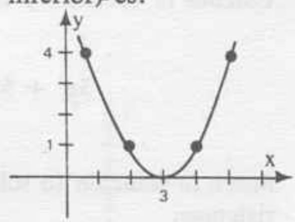
5. Dada la recta adjunta (gráfica inferior), *responde a las preguntas*:

   A) ¿Cuál es su pendiente?
   B) ¿Cuál es su ecuación?



6. La ecuación de la parábola adjunta (gráfica inferior) es:

   A) $y = (x - 3)^2$
   B) $y = (x + 3)^2$
   C) $y = x^2 - 3$
   D) $y = x^2 - 6x + 9$

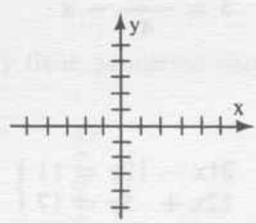


7. La gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 6x$ es una parábola tal que:

   A) Pasa por el punto (0,0).
   B) Tiene el vértice en el punto $(-1, -3)$.
   C) Su eje de simetría es la recta de ecuación $x = -3$.
   D) Es cóncava (es decir, el vértice es el punto más bajo).

8. *Dibuja la gráfica* de las funciones

   $f(x) = -1/2\ x^2$
   $g(x) = x^2 - 5$



9. Dí cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

   A.- $\sqrt{3}\,x^2 + \frac{1}{5}x + \sqrt{7}$ **B.-** $5x^3 + \frac{3}{x} - 4$

   C.- $7x^3 - 2^{-4}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ **D.-** $\frac{\sqrt{7}\,x^2}{2} + \frac{5\sqrt{x}}{6} + 1$

10. Dí cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles son falsas:

A) $x^2 + x^3 = x^5$.
B) $(3x^2)(-2x) = -6x^3$.
C) $3 - x - (4 - x^2 + 1) = -x - x^2$.
D) $(x + 3)(x + 2) = x(x + 3) + 2(x + 3)$.

11. *Calcula el cociente y el resto* de la división:

$$3x^2 + 5x - 4 \quad \underline{| \; 3x - 1}$$

Busca la solución (o soluciones) *si existe*, de las siguientes ecuaciones o sistemas:

12.
$$-2x + 1/7 = -3$$

13.
$$3 = \frac{x^2}{4} - x$$

14.
$$\left.\begin{aligned} 21x - 10y &= 11 \\ 12x + 5y &= 17 \end{aligned}\right\}$$

15.
$$\left.\begin{aligned} x &= y^2 - 2 \\ x - 4 &= y \end{aligned}\right\}$$

Apéndice II

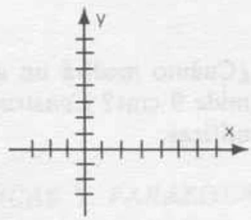
PRUEBA DE PROPORCIONALIDAD Y RECTAS

1. Dada la función $f(x) = 3x - 2$, entonces:

   A) $f(3) = 7$.
   B) La imagen del -1 es igual a 1.
   C) El cero es la antiimagen del cero.
   D) $f(3 + 2) = f(3) + f(2)$.

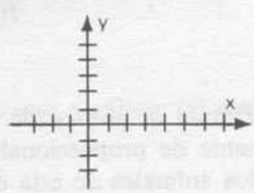
2. *Dibuja las gráficas* de las funciones

   $f(x) = 1/3\ x$
   $g(x) = 1/3\ x - 4$



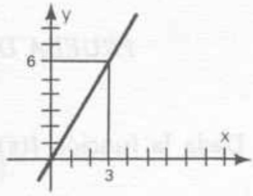
3. *Escribe la ecuación* de la recta que pasa por el punto (0, 3) y tiene pendiente igual a 2.

4. *Dibuja la recta* que pasa por el punto (2, 1) y tiene pendiente igual a -3.



5. Dada la recta adjunta (gráfica inferior), *responde a las preguntas*:

   A) ¿Cuál es su pendiente?
   B) ¿Cuál es su ecuación?



6. Supongamos que, en una extraña especie animal, el peso «x» y la longitud «y» de cada ejemplar son *magnitudes proporcionales.* Tomamos un animal de dicha especie, lo pesamos (pesa 8 kg) y lo medimos (mide 12 cms).

¿Cuánto medirá un animal que pesa 10 kg? ¿Cuánto pesará uno que mide 9 cms? *Construye una tabla de valores* explicando el método que utilizas.

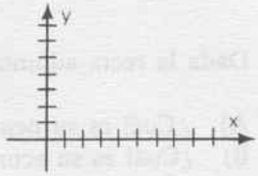
7. *Escribe la ecuación de la función* «f» que relaciona estas dos magnitudes:

$x \xrightarrow{f} y =$ es decir $f(x) =$

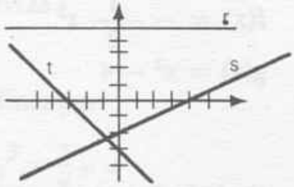
Comprueba que se cumplen las igualdades:

$$f(8 + 10) = f(8) + f(10)$$
$$f(5 \cdot 4) = 5 \cdot f(4)$$

8. *Dibuja la gráfica* de esta función y *explica el significado* de la constante de proporcionalidad en este caso concreto (es decir hablando de los animales de esta especie).



9. Escribe la *pendiente*, la *ordenada en el origen* y la *ecuación* de cada una de las siguientes rectas:



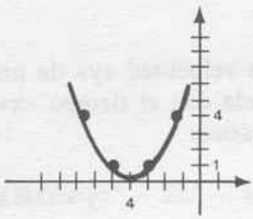
10. *Escribe la ecuación* de una recta cualquiera paralela al eje de las «y». ¿Qué tienen de especial estas rectas? *Busca una* que pase por el punto P = (− 2,5).

Apéndice III

PRUEBA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS Y PARÁBOLAS

1. La ecuación de esta parábola es:

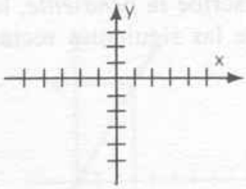
   A) $y = (x + 4)^2$
   B) $y = x^2 + 4$
   C) $y = (x - 4)^2$
   D) $y = x^2 + 8x + 16$



2. La gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 4x$ es una parábola tal que:

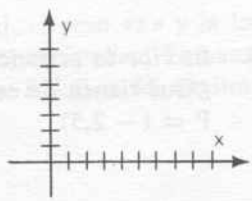
   A) Pasa por el punto (0,0).
   B) Tiene el vértice en el punto (− 1, − 2).
   C) Su eje de simetría es la recta de ecuación x = − 2.
   D) Es cóncava (es decir, el vértice es el punto más bajo).

3. *Dibuja las gráficas* de las funciones



$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$
$$g(x) = x^2 - 4$$

4. Dada la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x + 11$



   A) *Exprésala en la forma* $f(x) = (x - p)^2 + q$ y busca el vértice.
   B) Busca una pareja de puntos simétricos respecto del eje de la parábola y *dibújala.*

5. ¿Cuántas soluciones tiene cada una de las siguientes ecuaciones?

   A) $5(x - 3)^2 + 7 = 0$.
   B) $-7(x - 6)(x + 9) = 0$.
   C) $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

6. La velocidad «y» de un móvil (medida en metros/segundo) está relacionada con el tiempo «x» (medido en segundos) mediante la función cuadrática:

$$y = -x^2 + 8x$$

   A) ¿En qué instante la velocidad es máxima?
   B) ¿En qué otro instante (además del instante $x = 0$) se cumple que la velocidad «y» es igual a cero? *(La gráfica te ayudará.)*

APÉNDICE IV

PRUEBA DE POLINOMIOS

1. Dí cuáles de las siguientes expresiones son polinomios:

A.- $\sqrt{5}\,x^2 + \frac{1}{3}x + \sqrt{7}$ B.- $7x^3 + \frac{2}{x} - 4$

C.- $5x^3 - 3^{-4}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ D.- $\frac{\sqrt{5}\,x^2}{2} + \frac{3\sqrt{x}}{7} + 1$

2. Dí cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles son falsas:

A) $x^3 + x^4 = x^7$.
B) $(5x^2)(-2x) = -10x^3$.
C) $2 - x - (3 - x^2 + 1) = -x - x^2$.
D) $(x + 5)(x + 7) = x(x + 5) + 7(x + 5)$.

3. *Calcula el cociente y el resto* de la división:

$$5x^2 + 3x - 7 \quad \underline{|\ 5x - 1}$$

4. *Descompón en factores primos* los polinomios:

$P(x) = x^4 - 14x^3 + 48x^2 + 14x - 49$ y $Q(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$

5. Calcula el polinomio «*máximo común divisor*» y el polinomio «*mínimo común múltiplo*» de P y Q.

M. C. D. (P, Q) =
m. c. m. (P. Q) =

Compara las raíces de estos dos polinomios con las raíces de P y Q.

6. Halla las *raíces enteras* de los polinomios $P(x) = x^7 - 1$ y $Q(x) = x^6 - 1$.
   ¿Es $Q(x)$ un *divisor* de $P(x)$? ¿Por qué?
   ¿Tienen $P(x)$ y $Q(x)$ algún *polinomio de primer grado* que sea *divisor común*?

APÉNDICE V

PRUEBA DE CÁLCULO ALGEBRAICO

Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas explicando los casos de *incompatibilidad* (no existencia de solución) e *indeterminación* (infinitas soluciones).

1.
$$-3x + \frac{1}{5} = -2$$

2.
$$120 = \frac{x^2}{6} + x$$

3.
$$\left.\begin{aligned} 18x + 7y &= 57 \\ 12x + 14y &= 15 \end{aligned}\right\}$$

4.
$$\left.\begin{aligned} x + 3 &= y^2 \\ x - 3 &= y \end{aligned}\right\}$$

5.

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{6x-1}{2} + 2$$

6.

$$\sqrt{x} - \sqrt{x + 60} = -2$$

7.

$$\left.\begin{array}{l} y + \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{2} \\ 11 \cdot (y - 4) = x - 4 \end{array}\right\}$$

8.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x + 1}{y + 1} = 2 \cdot \dfrac{y}{x} \\ \\ \dfrac{x - 1}{y - 1} = 2 \end{array}\right\}$$

Capítulo IV

PROBLEMAS DE PLANTEO

1. *INTRODUCCIÓN*

Con esta Didáctica se pretende que el alumno adquiera la capacidad de *traducir al lenguaje algebraico el enunciado de un problema* y, consecuentemente, mejore su rendimiento en la resolución de una cierta clase de problemas.

Basaremos este aprendizaje en la *asimilación de un método general de resolución* que se materializará en un sistema estructurado de reglas heurísticas (llamado «*directriz*») que hemos elaborado en base a los criterios obtenidos en las investigaciones que desarrolló el Grup Aresta durante los cursos 1983/1984, 1984/1985 y 1985/1986.

Aunque dicho método puede interpretarse como la especialización a una clase particular de problemas de una estrategia mucho más general, no podemos detenernos aquí en explicitar dicha estrategia ni los supuestos teóricos en los que se fundamenta.

Es importante subrayar que se trata de una «*directriz heurística*» en contraposición a «*directriz algorítmica*» o «*algoritmo*».[1] Esto significa que se

1. Se llama «*algoritmo*» a una estrategia o sistema de reglas que indica qué operaciones hay que realizar y en qué orden para resolver de manera infalible una clase determinada de problemas. Un algoritmo debe constar de operaciones suficientemente elementales para que sean unívocamente ejecutadas por todos los operadores. Otra ca-

trata de un sistema de reglas (son las *«reglas heurísticas»* o simplemente *«heurísticas»*) que provocan y orientan el proceso creador, pero sin determinar completamente la actividad mental por contener cierta indeterminación respecto a la forma de ser ejecutadas.

En el marco del *aprendizaje diferenciado* y partiendo de la clasificación previa de los alumnos en tres grupos D, M y E en base a sus conocimientos y habilidades iniciales, pretendemos:

— Aumentar las posibilidades de que los alumnos del grupo D alcancen el nivel mínimo aceptable.
— Posibilitar a la totalidad de los alumnos que desarrollen plenamente sus capacidades.

Con el fin de obtener estos objetivos *diversificaremos* tanto *los contenidos* como *la instrucción.*

2. *DESCRIPCIÓN DE LOS MATERIALES PARA EL ALUMNO*

Antes de especificar el contenido de esta Didáctica (la clase de problemas con los que vamos a trabajar) y la instrucción adecuada (¿cómo enseñar a resolverlos?), será útil describir con detalle los Materiales del alumno.

2.1. Predidácticas

Aparte de la *Predidáctica n.º 0* que es un recordatorio de la Geometría elemental imprescindible, el resto de las predidácticas están pensadas para practicar las *operaciones más elementales en las que se descompone el proceso de traducción al lenguaje algebraico.* Aunque están especialmente concebidas para apoyar a los alumnos del grupo D para que alcancen el nivel mínimo aceptable, pueden ser parcialmente útiles para otros alumnos.

---

racterística esencial de un algoritmo (y que también lo distingue de la «directriz heurística») es la posibilidad de ser formalizado y automatizado. Una directriz (ya sea algorítmica o heurística) no debe confundirse con el *proceso* (algorítmico o heurístico) que es el sistema de operaciones que la directriz describe y del cual es simplemente un modelo (ver Landa (1972)).

En la *Predidáctica n.º 1* se practica una de las operaciones más elementales del proceso de traducción: la *expresión en lenguaje algebraico de una cantidad previamente especificada* (ver cuadro I).

En la *Predidáctica n.º 2* el alumno debe *designar una cantidad desconocida* y, a continuación, *expresarla en lenguaje algebraico.* Además de insistir en el objetivo de la Pedidáctica anterior, aquí se persigue potenciar la operación de *designar correctamente una «incógnita»* (ver definición en 2.3).

Por fin, en la *Predidáctica n.º 3* se engloban los objetivos de las dos anteriores, añadiéndose la operación de *formular la igualdad* que presupone haber *formulado verbalmente la «condición»* (ver definición en 2.3). Esto significa expresar de dos maneras diferentes una misma cantidad (ver cuadro II).

En las tres Predidácticas se potencia una actitud que es básica en el proceso de traducción al lenguaje algebraico: *no hacer ninguna distinción entre las cantidades de valor numérico conocido* y *las de valor numérico desconocido.*

2.2. Directriz

Figura en el cuadro III y es el núcleo de la Didáctica. Consta de 14 «*heurísticas*» estructuradas de tal forma que, en conjunto, constituyen un modelo del método general de resolución que pretendemos asimile el alumno.

Consideradas individualmente muchas de estas heurísticas son particularizaciones para esta clase de problemas de las heurísticas que Polya propone para clases más generales.

Como modelo, la directriz refleja las 4 fases clásicas en las que se estructura el proceso de resolución:

1.ª Lectura y comprensión del enunciado.
2.ª Análisis de las condiciones y planteo del problema.
3.ª Resolución de las ecuaciones planteadas.
4.ª Evaluación de todo el proceso.

No obstante, y dada la gran importancia del *pensamiento crítico* en todas las fases de la resolución de esta clase de problemas (ver memoria del Grup Aresta, 1985), se han intercalado heurísticas que motivan la evaluación par-

PREDIDÁCTICA NÚM. 1

Escribe, en lenguaje algebraico, la cantidad que se especifica en cada caso:

1. En un cesto tenemos 3x manzanas. Expresa *el número de manzanas que hay en un segundo cesto*, sabiendo que:

   a) Hay 12 manzanas menos que en el primer cesto ______
   b) Hay 7 veces más manzanas que en el primer cesto ______
   c) Hay la sexta parte de las manzanas del primer cesto ______
   d) La razón entre el número de manzanas del segundo cesto y el número de manzanas del primero es 5/7 ______
   e) En total hay 285 manzanas ______

2. *Expresa un número* sabiendo que:

   a) Consta de x decenas y 3 unidades ______
   b) Excede en 5 unidades a la raíz cuadrada de x ______
   c) Al dividirlo por x, se obtiene un cociente igual a 3 y un resto igual a 4 ______
   d) Es igual a la mitad del cubo de x ______
   e) Es igual al cuadrado del triple de x menos el triple del cuadrado de x ______

3. *Expresa la edad que tenía un hombre hace x años*, sabiendo que:

   a) Su edad dentro de 5 años será de 22 años ______
   b) Hace 3 años tenía 20 años ______
   c) Su edad actual es igual a (3/2) x ______

4. Sabiendo que el precio de 1 kg de arroz es de x ptas y el de 1 kg de patatas es 23 ptas más barato, *expresa*:

   a) *El coste* de 5 kg de arroz y 7 kg de patatas ______
   b) *El coste* de medio kg de arroz y 3/4 kg de patatas ______
   c) *El coste* de 8 kg de arroz y 12 kg de patatas, si nos hacen un descuento de 5 ptas por kg de cada tipo ______
   d) *El coste* de 1 kg de cada clase ______
   e) El coste de 100 kg de cada clase, si nos los venden a mitad de precio ______

CUADRO I

Cuadro II

PREDIDÁCTICA NÚM. 3

Busca en cada caso una cantidad que pueda expresarse de dos maneras diferentes *y* escribe *la correspondiente* igualdad.

1. Dos chicas coleccionan sellos. Una de ellas tiene 7x sellos y la otra 28. Sabemos que en total han coleccionado 49 sellos.
Cantidad:

2. En un cesto hay 108 manzanas y en otro cesto 12 + x manzanas. Se sabe que en el primero hay 3x manzanas menos que en el segundo.
Cantidad:

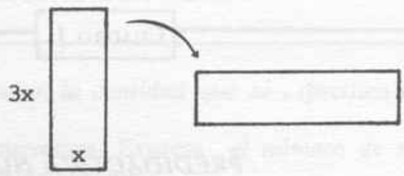
3. Un niño tiene actualmente x años y su padre 4x. Dentro de 24 años el padre tendrá el doble de la edad de su hijo.
Cantidad:

4. Al dividir x + 1 entre 187 obtenemos un cociente igual a x − 2 y un resto igual a 7.
Cantidad:

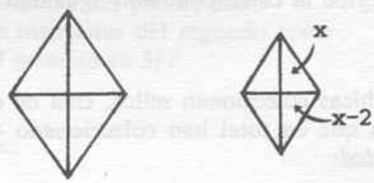
5. Un comerciante compra 85 ovejas a x pesetas cada una y las vende por un precio total de 150.000 ptas, obteniendo un beneficio total de 70.000 ptas.
Cantidad:

6. Tenía x pesetas, gasté la tercera parte en el cine y 150 pesetas en un refresco. Me ha sobrado la mitad del dinero que tenía al principio.
Cantidad:

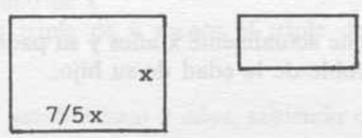
7. Un rectángulo tiene una base de x cm y una altura de 3x cm. Si la base disminuye en 1 cm y la altura aumenta 5 cm, el área no varía.
Cantidad:



8. Las diagonales de un rombo miden respectivamente $x + 2$ y $x + 5$, y las de otro rombo, semejante al primero, miden $x - 2$ y x.
Cantidad:



9. Las dimensiones de un rectángulo son x y $(7/5)\ x$. Si disminuimos cada lado en 4 cm, el nuevo perímetro resulta ser igual a $1/3$ del antiguo perímetro.
Cantidad:



10. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos x, $x + 1$ es 60 unidades menor que el cuadrado de la suma de dichos números.
Cantidad:

DIRECTRIZ

1. *Lee* el problema con mucha atención, *respetando* los signos de puntuación. *Vuelve a leerlo* hasta que seas capaz de explicarlo con tus propias palabras.
2. *Dibuja* cualquier figura que intervenga y *destaca* en ella los *datos*. *Razona sobre la figura* en todo lo que sigue.
3. ¿Qué pide el problema? *Escribe* cada una de las *cantidades que pide* y *asígnales* un símbolo diferente a cada una. (Serán, probablemente, las *incógnitas*.)
4. *Comprueba* que estas incógnitas pueden tomar valores numéricos; de lo contrario *debes cambiarlas* porque están mal expresadas.
5. Si hay una figura, *complétala* añadiéndole las incógnitas.
6. *Escribe las condiciones* sin olvidar que en cada una de ellas *debe figurar* la locución «*es igual a*» separando los dos miembros de la condición.
7. *Debes encontrar el mismo número de condiciones que de incógnitas.*

   Si falta una condición, *busca* un teorema, ley o fórmula adecuada.
   Si falta una incógnita, *utiliza como tal* una cantidad de valor desconocido.

8. *Compara* las condiciones que tú has escrito con el enunciado del problema.
9. *Descompón* cada miembro de cada condición en partes más simples que puedas traducir al lenguaje algebraico. *Utiliza en la traducción* los datos y los símbolos que representan a las incógnitas. *No inventes* ningún símbolo nuevo.
10. Cada condición se traduce en una ecuación. *Convierte* cada miembro de cada condición en un miembro de la correspondiente ecuación.
11. *Comprueba* si has escrito correctamente las ecuaciones; para ello *realiza la traducción inversa* (del lenguaje algebraico al castellano).
12. *Resuelve* la ecuación o el sistema de ecuaciones resultante.
13. *Comprueba por escrito* que cada solución (o sus componentes) verifica las ecuaciones planteadas. Si no es así, *repite* los cálculos desde el principio.
14. *Responde por escrito* a las siguientes preguntas:

    a) ¿Cuántas soluciones del problema has obtenido? ¿Cuáles son?
    b) ¿Alguna de las soluciones obtenidas no tiene sentido? ¿Por qué?
    c) Cada solución con sentido ¿cumple las condiciones que impone el *enunciado*? Si no es así, *asegúrate* de que has comprendido el problema (puntos 1 al 8) y *repite el planteo* (puntos 9 al 11).

CUADRO III

cial del proceso (núms. 4, 8, 11 y 13) además de terminar con una evaluación global escrita (núm. 14).

Es obvio que esta Directriz tal y como está sintentizada no es fácilmente comprensible para la mayoría de los alumnos. Como explicaremos más adelante (ver apartado 4 de esta guía) el alumno tendrá, antes de enfrentarse con ella, el ejemplo práctico de su utilización (que lo realizará el profesor) así como explicaciones detalladas fundamentadas en las «Normas para usar correctamente la Directriz».

2.3. Normas para usar correctamente la Directriz

Cada punto de las «Normas» hace referencia al correspondiente punto de la Directriz (se omiten los puntos 5, 12 y 13 porque las correspondientes heurísticas no necesitan de explicación suplementaria).

En cada norma se explica el significado de la correspondiente heurística o se ponen ejemplos relativos a ella o se dan consejos prácticos para utilizarla correctamente.

Desde un punto de vista conceptual son especialmente importantes las normas 3 y 6. En la número 3 se define *«incógnita»* como una *cantidad de valor desconocido* que *aparece,* por lo menos, *en una condición.* En la norma número 6 se distingue el concepto de *«condición»* que es una *igualdad entre dos cantidades de una misma magnitud* en una de las cuales *debe intervenir alguna incógnita,* del concepto de *«dato»* que es también una igualdad entre dos cantidades en las que *no interviene ninguna incógnita.*

En cuanto a la terminología, que debe emplearse con la mayor precisión posible, queremos resaltar que el sentido de los vocablos *«cantidad»* y *«magnitud»* (tanto en las Normas como en la Directriz) ha sido tomado de Pere Puig Adam. («La cantidad es lo que tienen de común los elementos iguales entre sí, mientras la magnitud es el carácter común a todos los elementos del conjunto. Ambos conceptos quedan, pues, definidos por abstracción», P. Puig Adam, *Curso de geometría métrica,* t. I, p. 98.)

2.4. Lista individualizada de problemas de entrenamiento

Se elaborará con problemas del apéndice III, y tiene varias peculiaridades respecto de los anteriores materiales. Cada lista consta de 15 problemas cuya gradación de dificultad depende esencialmente del grupo (D, M o E) al que pertenece el alumno.

En concreto, después de clasificar los problemas en tres grados de dificultad (ver apartado 3), se elaboran *tres tipos de listas* con los siguientes criterios:

— *Listas D*: Constan de 10 problemas del primer grado de dificultad y 5 del segundo. (O sea 10 problemas de las listas **10-14** y 5 de las listas **20-22**.)
— *Listas M*: Constan de 5 problemas de cada uno de los tres grados de dificultad.
— *Listas E*: Constan de 3 problemas del primer grado, 5 del segundo y 7 del tercero. (Los problemas de dificultad 3 figuran en las listas **30** y **31**.)

Dos listas de un mismo tipo diferirán esencialmente en el «significado» (ver apartado 3) y en el orden de colocación de los problemas de un mismo grado de dificultad. Secundariamente dos listas de un mismo tipo también pueden diferir en la «estructura» de algunos problemas. Ver las listas individualizadas en el apéndice VIII.

2.5. Problemas más difíciles y problemas más fáciles

Son listas de problemas (ver muestras en los cuadros IV y V) que han sido concebidas par ampliar las listas del tipo E y D respectivamente.

No obstante y dado el carácter relativo del concepto de «problemas más difíciles», todos los alumnos podrán acceder a una lista del tipo inmediatamente superior una vez hayan terminado los 15 problemas de su propia lista (ver apartado 4).

3. *CONTENIDO*

La clase de problemas con los que vamos a trabajar es muy amplia y difícil de delimitar. Se trata de problemas cuya dificultad fundamental resi-

PROBLEMAS MAS DIFICILES

1. Dos campesinas llevaban en total 100 huevos al mercado. Una vez vendidos todos los huevos las dos obtuvieron la misma cantidad de dinero. La primera mujer dijo a la segunda: «Si yo hubiera traído tantos huevos como tú, habría obtenido 15 monedas.» La otra le contestó: «Y si yo hubiese vendido los que tú traías, hubiese obtenido $6 + 2/3$ monedas.» ¿Cuántos huevos llevaba cada una? (Euler.)
2. Un padre muere dejando muchos hijos. En su testamento especifica:

   «El hijo mayor debe recibir 100 coronas más la décima parte del resto.
   »El segundo debe recibir 200 coronas más la décima parte del resto.
   »El tercero debe recibir 300 coronas más la décima parte del resto.
   »El cuarto debe recibir 400 coronas más la décima parte del resto...»

   Y así sucesivamente hasta el último de los hijos. Al final de la repartición descubrieron que la fortuna del padre se había repartido en partes iguales entre los hijos. ¿Cuántos hijos había? (Euler.)
3. Tres jugadores convienen en que el que pierda una partida pagará a los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos tenga en ese instante. Después de perder sucesivamente una partida cada uno, resulta que cada cual tiene 16 ptas. ¿Cuánto tenía cada uno al empezar a jugar? (Euler.)
4. Sabiendo que el área de un triángulo isósceles es de 480 m^2 y su perímetro de 128 m, calcula la longitud de la altura correspondiente al lado desigual.
5. Halla dos números diferentes de cero tales que su suma, su producto y la diferencia de sus cuadrados sean iguales entre sí.
6. Existe un número entero tal que al sumarle 100 se obtiene un cuadrado perfecto y al sumarle 168 se obtiene otro cuadrado perfecto. ¿Cuál es este número?

CUADRO IV

PROBLEMAS MÁS FÁCILES

01. Un millonario reparte su fortuna de la manera siguiente: la mitad a su hijo mayor, la tercera parte al segundo, y el resto al hijo menor. Calcula cuánto recibe el hijo menor sabiendo que el segundo recibe 120 millones de dólares.
02. Un padre dijo a su hijo: «Dentro de 2 años, yo tendré 6 veces la edad que tú tenías hace 3 años.» ¿Cuál es la edad actual del padre si el hijo tiene ocho años?
03. Calcula el perímetro de un campo de fútbol rectangular de 6.510 m² de área, sabiendo que un lado mide 105 m.
04. Un campesino compra 5 kg de patatas y 3 kg de melocotones por 510 ptas. En otra ocasión compra 2 kg de melocotones a cambio de 2 kg de patatas y 180 ptas. Sabiendo que un kilo de melocotones vale 120 ptas, calcula cuántas veces es más caro que un kilo de patatas.
05. En un número de dos cifras, la de las decenas es igual a 8. Calcula la diferencia entre ese número y el que se obtiene al invertir el orden de las cifras, sabiendo que la suma de éstas es 13.
06. Busca un número cuya raíz cuadrada positiva es tres unidades mayor que la cuarta parte de 80.
07. Calcula la diagonal de un rectángulo sabiendo que la base mide 36 metros y el perímetro 102.
08. Al realizar la división euclídea entre dos números se obtiene un cociente de 7 y un resto de 14. Calcula el número mayor sabiendo que el menor es 123.
09. Un compañero tuyo nació en un año que se representa por un número de 4 cifras cuya suma es 19. Se sabe, además, que las cifras de las decenas y las unidades difieren entre sí 5 unidades. ¿En qué año nació tu compañero?
10. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm y el lado desigual mide 18 cm. Calcula el área.

CUADRO V

de en *escribir la condición* (o condiciones) *en lenguaje algebraico.* Pero aunque la Didáctica en sí, con ligeras modificaciones, podría ser útil en el aprendizaje de los métodos de resolución de los problemas de una clase mucho más amplia, nos limitaremos a aquellos para los que no puede darse un algoritmo de resolución (no se incluyen, pues, problemas de relojes ni de móviles en general). Impondremos, en general, las siguientes limitaciones:

— En cuanto a la «*estructura*», no consideraremos problemas cuyo análisis lleve a plantear un sistema de más de dos ecuaciones o en el que aparezca alguna ecuación que no sea polinómica y de grado 1 o 2 (salvo casos muy elementales). Tampoco consideraremos problemas tan sencillos (llamados a veces problemas «*aritméticos*») que puedan descomponerse en una sucesión de problemas simples, salvo en la lista de «Problemas más fáciles».

— En cuanto al «*significado*», nos limitaremos a enunciados cuya interpretación no aumente la dificultad de su comprensión.

Entre las cuestiones matemáticas que se suponen conocidas están: la Aritmética y el Álgebra elementales (explicitadas respectivamente en los capítulos II y III) y la geometría básica del triángulo y del cuadrilátero (áreas, perímetros, Teorema de Pitágoras, proporcionalidad de lados entre polígonos semejantes y poco más).

La *dificultad* de un problema de esta clase depende de su *estructura,* de su *significado* y del *lenguaje específico* que se utilice en la redacción del enunciado. Es comprensible, por lo tanto, que no se conozca ninguna *clasificación teórica* de estos problemas según su dificultad. Nosotros utilizaremos una *clasificación empírica* obtenida durante los cursos anteriores y que nos permite distribuir unos cien problemas en tres grados de dificultad. A los problemas que añadamos les adjudicaremos provisionalmente la misma dificultad que tiene un problema *isomorfo* (misma estructura) perteneciente a la lista original, siempre y cuando posean significados y lenguajes específicos de complejidad «similar».

En base a estos criterios hemos elaborado los 3 tipos de listas antes citados (ver 2.4) materializando así la *diversificación del contenido* que es uno de los principios básicos del aprendizaje diferenciado.

4. *DISEÑO DE LA INSTRUCCIÓN*

La instrucción se estructura en dos etapas denominadas respectivamente de «*ejemplificación*» y de «*entrenamiento*» de acuerdo con el convencimiento de G. Polya según el cual sólo se aprende a resolver problemas mediante la imitación y la práctica.

En investigaciones anteriores se ha puesto de manifiesto que no es conveniente separar completamente estas dos etapas, siendo especialmente útil introducir algunas ejemplificaciones en la etapa de entrenamiento. Para ello reduciremos la etapa de ejemplificación pura a dos sesiones, se dedicará la tercera sesión a recapitular los puntos esenciales de la ejemplificación y a continuación empezará la etapa de entrenamiento reservándose el primer cuarto de cada sesión para realizar *ejemplificaciones genuinas* y *corrección de errores comunes*.

4.1. Etapa de ejemplificación

En esta etapa el profesor ejemplifica un método general de resolución *utilizándolo* (lo que posibilitará posteriormente la *imitación* por parte de los alumnos) y sintentizándolo posteriormente en la Directriz.

Esta etapa consta de un total de 5 sesiones (de la 4 a la 8 de la Didáctica —ver apartado 6—) la mitad de las cuales se dedican a ejemplificar las *operaciones más elementales en que se descompone el proceso de traducción al lenguaje algebraico* mediante un trabajo sistemático con la Predidácticas.

La *1.ª sesión* (que es la sesión número 4 de la Didáctica) se inicia repasando y preguntando los materiales de *geometría* (concretamente *Áreas de cuadriláteros y triángulos* y *Teorema de Pitágoras*) que el alumno debía estudiar mientras se le iban pasando las pruebas iniciales (ver apartado 6). A continuación se comenta en clase la Predidáctica n.º 1, ejemplificando algunos ítems de muestra. Se propone para el día siguiente que los alumnos completen la citada Predidáctica n.º 1.

La *2.ª sesión* se inicia corrigiendo la Predidáctica n.º 1 con todo detalle, y se acaba ejemplificando algunos ítems de las Predidácticas n.ºs 2 y 3. Se resaltará en cada caso la naturaleza de la operación que se realiza. Se propone a los alumnos que completen individualmente las Predidácticas n.ºs 2 y 3.

En la 3.ª *sesión*, y después de haber corregido y comentado las Predidácticas n.os 2 y 3, se inicia propiamente la *ejemplificación del método general de resolución*. Se empieza justificando la división en 4 fases del proceso de resolución de esta clase de problemas (ya citada en 2.2):

1.ª Lectura y comprensión del enunciado.
2.ª Análisis de las condiciones y planteo del problema.
3.ª Resolución de las ecuaciones planteadas.
4.ª Evaluación de todo el proceso.

A continuación, el profesor muestra cómo se recorren dichas fases resolviendo el primer problema de ejemplificación (E1) (ver apéndice I).

Esta resolución debe hacerse de la forma más transparente posible, *razonando en voz alta*. Esto significa que el profesor *dramatiza las preguntas* que va formulando con objeto de que el alumno descubra la manera práctica de utilizarlas. Esta manera de proceder está esquematizada en los «*Guiones de resolución*» que figuran en el apéndice II. Tal y como se especifica en estos guiones, deben resaltarse especialmente las *preguntas o sugerencias cuya utilidad es transferible* a otros muchos problemas de esta clase. En los citados guiones dichas sugerencias van precedidas de un número entre paréntesis que hace referencia al número con que figura dicha «heurística» dentro de la futura «Directriz».

En la *4.ª sesión* de ejemplificación (que es la sesión número 7 de la Didáctica), el profesor resuelve los problemas E2 y E3 (ver apéndice I), remarcando de nuevo las «heurísticas» más transferibles (ver guiones de resolución 2 y 3). Para resaltar la entidad propia de las «heurísticas» delante de los alumnos, es conveniente escribirlas en la pizarra e invitar a los alumnos a que las copien.

Al final de esta sesión se propone a los alumnos que *elaboren* para entregar en la próxima sesión una *lista de las «heurísticas» que hayan encontrado más útiles*. Se les indica que el orden más natural viene dado por las 4 fases del proceso de resolución (primero las heurísticas útiles para potenciar la comprensión del enunciado, a continuación las que ayudan a analizar las condiciones y plantear el problema, etc.), pero teniendo en cuenta que algunas heurísticas encaminadas a la evaluación parcial del proceso de resolución deben intercalarse entre las demás, puesto que no parece lógico esperar al final del proceso para corregir posibles errores de detalle.

En la 5.ª *sesión*, última de ejemplificación, el profesor resuelve el problema E4 siguiendo el correspondiente «guión de resolución» (ver apéndice II). La segunda parte de la sesión se dedica a comentar la Directriz así como las Normas para su utilización. Se sugiere que cada alumno compare la Directriz con la que él ha elaborado.

Para explicar cómo deben utilizarse cada uno de los puntos de la Directriz, se alude sistemáticamente a los problemas E1, E2, E3 y E4 que fueron utilizados anteriormente para *ejemplificar el método general*. Debe hacerse hincapié en los conceptos de *«incógnita»*, *«condición»* y *«dato»*.

Es importante concienciar a los alumnos de la *necesidad de conocer el método* (cuyo modelo es la Directriz) como paso previo para asimilarlo. Esto significa que *el alumno debe estudiar tanto la Directriz como las Normas* para comprenderlas en profundidad y ser capaz de dar cuenta de ellas. Aunque la mejor manera de aprender un método es utilizándolo, también es cierto que, cuando se trata de un *método de raciocinio complejo* como éste, es muy difícil un dominio completo sin ninguna reflexión consciente sobre él.

4.2. Etapa de entrenamiento

Se prolonga durante 11 sesiones (que se corresponden con las sesiones de la núm. 9 a la núm. 19 de la Didáctica —ver apartado 6—). En ella debe conseguirse que la mayoría de los alumnos (pongamos un 90 %) realice un mínimo de 10 problemas de entrenamiento. Esto significa que cada alumno debe realizar, como mínimo, *un problema completo por sesión* para cubrir posibles imponderables.

Durante las sesiones de entrenamiento cada alumno debe resolver los problemas de su lista individualizada (ver 2.4) *en el mismo orden* en el que están escritos. Se insta a que los resuelvan de manera individual y siguiendo el método general que se ha ejemplificado.

Durante el entrenamiento la relación profesor-alumno es esencial. Como que lo que se persigue es que el alumno llegue a *interiorizar el método general*, la ayuda del profesor debe limitarse a *ponerle de manifiesto qué punto de la Directriz ha descuidado* mediante el *método de interrogación progresiva*. Este método, descrito por Polya, consiste en proponer *preguntas «naturales»* (que se le hubiesen podido ocurrir al alumno) e *«instructivas»* (transferibles a todos los problemas de la clase considerada).

Al final de cada sesión de entrenamiento *el profesor recogerá los problemas resueltos durante la sesión* y *los devolverá corregidos* al principio de la siguiente sesión con una nota que remita, en caso de un problema mal resuelto, al punto de la Directriz (o la Norma) que el alumno haya descuidado. En ningún caso las indicaciones del profesor (tanto escritas como orales) deben sobrepasar el grado de concreción de las sugerencias que figuran en los «Guiones de resolución».

La *1.ª sesión* es una sesión completa de entrenamiento. Al final de la sesión cada alumno debe entregar un problema completamente resuelto (como mínimo), proponiéndosele en cualquier caso que *resuelva el problema siguiente* de manera individual y para entregarlo durante la siguiente sesión.

En la *2.ª sesión* el profesor empieza resolviendo en voz alta el problema E5 (ver apéndice I) durante unos 15 minutos. El resto de la sesión es de entrenamiento.

La *3.ª sesión* comienza con una *corrección de errores más habituales* detectados en los problemas corregidos. Este *Análisis de errores* que hará referencia a las «causas» que los han originado (entendidas como heurísticas descuidadas o Normas mal empleadas) no sobrepasará los 15 minutos de duración. El resto de la sesión es de entrenamiento.

En la *4.ª sesión* el profesor empieza resolviendo en voz alta el problema E6 (ver apéndice I) durante unos 15 minutos. El resto de la sesión es de entrenamiento.

La *5.ª sesión* es como la 3.ª. Empieza con un *Análisis de errores* de unos 15 minutos, siendo el resto de la sesión de entrenamiento.

En la *6.ª sesión* el profesor empieza resolviendo, razonando en voz alta y siguiendo el método general, el problema E7 (ver apéndice I) durante unos 15 minutos. El resto de la sesión es de entrenamiento.

Las *sesiones 7.ª-10.ª* (ambas inclusive) son como le 3.ª y la 5.ª. El profesor utiliza los 15 primeros minutos para realizar un *Análisis de errores* tal como se ha indicado anteriormente. En la medida de lo posible el profesor utilizará errores realmente cometidos por sus alumnos en los problemas que han ido entregando día a día.

Durante estas cuatro sesiones el profesor debe atender especialmente a los alumnos del grupo D, empezando por sus dificultades para completar las Predidácticas que denotan dificultades básicas en el manejo del lenguaje algebraico. Los alumnos con «*dificultades especiales*» que podemos caracterizar provisionalmente como aquellos que no superan las *pruebas de comprensión del enunciado*, tienen dificultades todavía más básicas y son los que dispondrán, además de su lista de tipo D, de una lista de *problemas más fáciles* para completar su entrenamiento.

Son muy útiles las «*conversaciones personales*» en las que el profesor dedica a un alumno concreto una atención suficientemente prolongada y continua para que éste *resuelva por sí mismo un problema* que es el punto clave de la *motivación intrínseca*. Durante estas conversaciones el profesor utilizará el *método de interrogación progresiva* al que nos hemos referido anteriormente.

La *11.ª sesión*, que es la última de la instrucción, se dedica en parte a *sintetizar las heurísticas «esenciales»* (que han sido más útiles durante el entrenamiento) y en parte a *corregir y acabar los problemas* que han quedado incompletos. En esta sesión ya no se recogen problemas resueltos.

5. *EVALUACIÓN INTERNA*

La evalución interna de la Didáctica se obtiene a lo largo de dos etapas paralelas que se desarrollan respectivamente antes (la *inicial*) y después (la *final*) de la instrucción. Cada una de estas etapas consta de tres sesiones (ver en el apartado 6 el resumen esquemático del desarrollo de la Didáctica).

5.1. Pruebas iniciales y finales

— *PRETEST* (inicial) y *POSTEST* (final). (Se trata de pruebas paralelas.)

Duración: 2 sesiones de 55 minutos cada una (se proponen 4 problemas por sesión).

Contenido: 8 problemas (ver modelos en los apéndices IV y V).

Puntuación: 4 puntos por cada problema (2 puntos para el planteo más 2 puntos para la resolución).

Puntuación total máxima: 16 puntos para el planteo más 16 puntos para la resolución (= 32 puntos), para cada prueba.

Puntuación mínima aceptable: 8 puntos de planteo y 8 puntos de resolución (= 16 puntos), para cada prueba.

— *PRUEBAS DE COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO* (inicial y final).
Duración: 1 sesión de 55 minutos cada una.
Contenido: 8 problemas aritméticos elementales (ver modelos en los apéndices VI y VII).
Puntuación: 2 puntos por cada problema.
Puntuación total máxima: 16 puntos.
Puntuación mínima aceptable: No tiene. (Ésta es una prueba para detectar a los alumnos que no entienden el enunciado. No interviene en la definición de las variables de rendimiento.)

5.2. VARIABLES DE RENDIMIENTO

Con el PRETEST se definen las variables siguientes:

— *PI* = Planteo Inicial = Puntuación de planteo obtenida en el PRETEST.
Valor máximo: 16 puntos.
— *RI* = Resolución Inicial = Puntuación de resolución obtenida en el PRETEST.
Valor máximo: 16 puntos.
— *GLPI* = Global de Planteo Inicial = PI + RI.
Valor máximo: 32 puntos.

Con el POSTEST se definen las correspondientes variables finales paralelas:

— *PF* = Planteo Final.
— *RF* = Resolución Final.
— *GLPF* = Global de Planteo Final.

Sus características son idénticas a las de sus correspondientes pruebas paralelas iniciales.

Señalamos el hecho de que, si bien podría utilizarse la variable GLPF como variable criterio en el modelo de predicción de problemas de planteo algebraico, en su lugar hemos preferido tomar la variable *PF* (Planteo Final) porque representa mejor el objetivo de esta Didáctica.

6. RESUMEN ESQUEMÁTICO DEL DESARROLLO DE LA DIDÁCTICA

Sesión núm.	*Material que se utiliza*	*Trabajo que se hace*	*Trabajo que se propone*
1	Pretest (1.ª parte)	Pasación	Estudiar: Áreas de cuadriláteros y triángulo
2	Pretest (2.ª parte)	Pasación	Estudiar: Teorema de Pitágoras
3	Comprensión enunciado (I)	Pasación	Repasar: Geometría
4	Geometría Predidáctica núm. 1	Preguntas y repaso Ítems de muestra	Completar: Predidáctica núm. 1
5	Predidáctica núm. 1 Predidácticas núms. 2 y 3	Corrección Ítems de muestra	Completar: Predidácticas núms. 2 y 3
6	Predidácticas núms. 2 y 3 Guión de resolución E1	Corrección Ejemplificación	Repasar: Predidácticas y problema ejemplificado
7	Guiones de resolución E2 y E3	Ejemplificación	Elaborar: Guión general de resolución (Directriz)
8	Guión de resolución E4 Directriz y Normas	Ejemplificación Comentarlas	Releer: Problemas ejemplificados siguiendo la Directriz
9 (1)	Lista Individualizada, Directriz y Normas	Entrenamiento	Resolver: Siguiente problema

Notas: (1) «E5», «E6» y «E7» son los problemas de ejemplificación para los que no se ha elaborado guión de resolución. Están en el apéndice I.

10 (2)	Problema E5 «LI», «D» y «N»	Ejemplificación Entrenamiento	Resolver: Siguiente problema
11 (3)	«LI», «D» y «N»	Entrenamiento	»
12 (4)	Problema E6 «LI», «D» y «N»	Ejemplificación Entrenamiento	»
13 (5)	«LI», «D» y «N»	Entrenamiento	»
14 (6)	Problema E7 «LI», «D» y «N»	Ejemplificación Entrenamiento	»
15 (7)	Lista Individualizada, Directriz y Normas	Entrenamiento	»
16 (8)	»	»	»
17 (9)	»	»	»
18 (10)	»	»	»
19 (11)	»	»	»
20	Postest (1.ª parte)	Pasación	
21	Postest (2.ª parte)	Pasación	
22	Comprensión enunciado (F)	Pasación	

(2) «LI», «D» y «N», significan, respectivamente Lista Individualizada, Directriz y Normas para usar la Directriz. Es el material que utilizan los alumnos durante el entrenamiento.

Apéndices

Apéndice I

PROBLEMAS DE EJEMPLIFICACIÓN

E1. Halla un número de dos cifras sabiendo que su valor es igual al cuádruplo de la suma de sus cifras, y que si se invierte el orden de dichas cifras el valor del número aumenta en 36 unidades.

E2. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que la altura es 4/23 del perímetro y que la diagonal mide 68 cms.

E3. Un sastre compra 15 metros de paño y 8 metros de tela, por lo que paga 2.560 ptas. En otra ocasión compra 30 metros de tela y devuelve 5 metros de paño, pagando 2.250 ptas. ¿Cuál es el precio del metro de cada tejido?

E4. Hace 19 años la edad de una persona era doble de la edad de otra, y dentro de 11 años la edad de la segunda será los 7/9 de la edad de la primera. ¿Qué edad tienen actualmente?

E5. Las bases medias de dos trapecios semejantes difieren en 16 cms. Sabiendo que la base menor de uno mide lo mismo que la base mayor del otro, y que las otras dos bases están en razón 1/9, calcula las cuatro bases.

E6. De un cántaro lleno de vino se saca 1/3 de lo que contiene, luego se saca 1/4 del resto y por fin sacamos 1/5 del nuevo resto. Al final sólo quedan 24 litros. ¿Cuál es la capacidad del cántaro?

E7. Tenemos dos tipos de aleación oro-plata. En el primero los metales están en una relación de 2 a 3 y en el segundo de 3 a 7. ¿Qué cantidad de cada aleación se debe tomar para obtener 8 kgs. de una nueva aleación en la que la relación oro-plata sea de 5 a 11?

Apéndice II

GUIONES DE RESOLUCIÓN (1)

E1. Halla un número de dos cifras sabiendo que su valor es igual al cuádruplo de la suma de sus cifras, y que si se invierte el orden de dichas cifras el valor del número aumenta en 36 unidades.

1. *¿Entendemos el significado de las expresiones*: «valor de un número de dos cifras», «invertir el orden de dichas cifras», ...?
3. *¿Qué pide el problema?* «Un número de dos cifras», pero *¿qué cantidades necesitamos conocer para conocer dicho número?* «La cifra de las unidades y la cifra de las decenas.»
3. *Escribe cada una de estas cantidades y asígnales un símbolo diferente a cada una.*

   «x = cifra de las decenas».
   «y = cifra de las unidades».

4. *Comprueba que estas incógnitas pueden tomar valores numéricos.* «En efecto, la cifra de las decenas puede ser igual a 7, por ejemplo.»
6. *Escribe las condiciones, con la locución «es igual a» separando sus miembros.*

   «(1.ª) = El valor del número *es igual al* cuádruplo de la suma de sus cifras.»

   «(2.ª) = El valor del número invertido *es igual al* valor del número más 36.»

7. *Debes encontrar el mismo número de condiciones que de incógnitas.* «En efecto, hemos encontrado 2 condiciones y 2 incógnitas.»
8. *Compara las condiciones escritas con el enunciado del problema.* «La segunda la hemos reformulado, pero significa lo mismo que en el enunciado.»

9. *Descompón cada miembro de cada condición para poder traducirlo.*

«el valor del número»	«$y + 10x$»
«el cuádruplo de la suma de sus cifras»	«$4(x + y)$»
«el valor del número invertido»	«$x + 10y$»
«el valor del número más 36»	«$y + 10x + 36$»

10. *Cada condición se traduce en una ecuación.*

(1.ª) $y + 10x = 4(x + y)$
(2.ª) $x + 10y = y + 10x + 36$

11. *Realiza la traducción inversa (del lenguaje algebraico al castellano).*

(1.ª) «La cifra de las unidades más diez veces la cifra de las decenas *es igual al* cuádruplo de la suma de las dos cifras.»
(2.ª) «La cifra de las decenas más diez veces la cifra de las unidades *es igual a* la cifra de las unidades más diez veces la cifra de las decenas más 36.»

12. *Resuelve el sistema de ecuaciones resultante.* «Se obtiene $x = 4$, $y = 8$; por lo que el número buscado es $y + 10x = 48$.»

13. *Comprueba que cada solución verifica las ecuaciones planteadas.*
$8 + 10 \cdot 4 = 4(4 + 8)$
$4 + 10 \cdot 8 = 8 + 10 \cdot 4 + 36$

14. *¿Cuántas soluciones hemos obtenido? ¿Cuáles son?* «Una única solución aunque tiene dos componentes, $x = 4$, $y = 8$. Resulta un único número, el 48, que es el número pedido.»

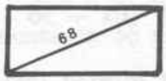
14. *¿Tiene sentido la solución obtenida?* «Sí, porque los valores de las cifras que hemos obtenido son números naturales comprendidos entre 0 y 9.»

14. *La solución obtenida ¿cumple las condiciones que impone el enunciado?* «El número 48 es, en efecto, un número de dos cifras tal que su valor (48) es igual al cuádruplo de la suma de sus cifras (12). Además, si invertimos el orden de las cifras, el valor del nuevo número (84) ha aumentado en 36 unidades respecto del primero (48).»

GUIONES DE RESOLUCIÓN (2)

E2. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que la altura es 4/23 del perímetro y que la diagonal mide 68 cms.

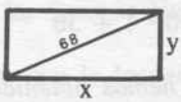
1. *¿Entendemos el significado de las expresiones*: «dimensiones del rectángulo», «perímetro del rectángulo», «... es 4/23 del ...», «diagonal del rectángulo»?
2. *Dibuja el rectángulo y destaca en él los datos.*



3. *¿Qué pide el problema?* «Las longitudes de la base y la altura del rectángulo.» *Asígnales un símbolo diferente a cada una de estas cantidades.*

   «x = longitud de la base del rectángulo».
   «y = longitud de la altura del rectángulo».

4. *Comprueba que estas incógnitas pueden tomar valores numéricos.* «En efecto, la longitud de la base del rectángulo puede ser igual a 23 cms, por ejemplo.»
5. *Completa la figura añadiéndole las incógnitas.*



6. *Escribe las condiciones con la locución «es igual a» separando sus miembros.*

   «(1.ª) La altura del rectángulo *es igual a* 4/23 del perímetro.»

7. *Debes encontrar el mismo número de condiciones que de incógnitas.* «Como que falta una condición debemos buscar un teorema adecuado en el que intervenga alguna incógnita y el dato (diagonal = 68) que aún no hemos utilizado.» «En este caso se trata, evidentemente, del Teorema de Pitágoras.»

«(2.ª) La base al cuadrado más la altura al cuadrado *es igual a* 68^2.»

9. *Descompón cada miembro de cada condición para poder traducirlo.* «En este caso todos los miembros son simples (traducibles directamente) excepto el segundo miembro de la primera condición que es: 4/23 del perímetro.»

«perímetro» se traduce (ver figura) «2x + 2y»
«4/23 del perímetro» se traduce «4/23(2x + 2y)»

10. *Cada condición se traduce en una ecuación.*

(1.ª) $y = 4/23(2x + 2y)$
(2.ª) $x^2 + y^2 = 68^2$

12. *Resuelve el sistema de ecuaciones resultante.*

Se obtiene $x = 60, y = 32$ o bien $x = -60, y = -32$

13. *Comprueba que cada solución verifica las ecuaciones planteadas.*

$$\begin{cases} 32 = 4/23(2 \cdot 60 + 2 \cdot 32) \\ 60^2 + 32^2 = 68^2 \end{cases} \quad \text{y también} \quad \begin{cases} (-32) = -4/23(2 \cdot 60 + 2 \cdot 32) \\ (-60)^2 + (-32)^2 = 68^2 \end{cases}$$

14. *¿Cuántas soluciones hemos obtenido? ¿Cuáles son?* «Hemos obtenido dos soluciones distintas, cada una de las cuales tiene, a su vez, dos componentes.»

«Son $x = 60$, $y = 32$ (1.ª solución) y $x = -60$, $y = -32$ (2.ª solución).»

14. *¿Alguna de las soluciones obtenidas no tiene sentido? ¿Por qué?* «La segunda solución no tiene sentido, porque una longitud no puede ser negativa.»

14. *La solución con sentido ¿cumple las condiciones que impone el enunciado?* «Sí, porque 32 (la altura) es los 4/23 de 184 (el perímetro) y si los lados miden 60 y 32, la diagonal debe medir 68.»

GUIONES DE RESOLUCIÓN (3)

E3. Un sastre compra 15 metros de paño y 8 metros de tela, por lo que paga 2.560 ptas. En otra ocasión compra 30 metros de tela y devuelve 5 metros de paño, pagando 2.250 ptas. ¿Cuál es el precio del metro de cada tejido?

1. *Explica, con tus propias palabras, el significado del problema.* «El coste de 15 metros de paño más el coste de 8 metros de tela es igual a 2.560 ptas., mientras que el coste de 30 metros de tela es igual al coste de 5 metros de paño más 2.250 ptas. Calcula el precio de un metro de cada tejido.»

3. *Asigna un símbolo diferente a cada una de las cantidades que pide el problema.*

   «x = precio de un metro de paño».
   «y = precio de un metro de tela»

4. *Comprueba que estas incógnitas pueden tomar valores numéricos.* «En efecto, el precio de un metro de paño puede ser igual a 1.675 ptas., por ejemplo.»

6. *Escribe las condiciones (cada condición se formula mediante una frase con sentido completo y significa la igualdad entre dos maneras diferentes de expresar una misma cantidad).*

   «(1.ª) El coste de 15 m de paño más el coste de 8 m de tela *es igual a* 2.560 ptas.»
   «(2.ª) El coste de 30 m de tela *es igual al* coste de 5 m de paño más 2.250 ptas.»

8. *Compara las condiciones que tú has escrito con el enunciado del problema.* «Sólo hemos reformulado ligeramente la segunda condición utilizando que los 5 metros de paño que se devuelven se utilizan como parte del pago de los 30 metros de tela. Esto es lo que significa el enunciado del problema.»

9. *Descompón cada miembro de cada condición en partes simples (traducibles).*

«el coste de 15 m de paño» + «el coste de 8 m de tela» $15x + 8y$
«el coste de 30 m de tela» $30y$
«el coste de 5 m de paño» + 2.250 $5x + 2.250$

10. *Cada condición se traduce en una ecuación.*

(1.ª) $15x + 8y = 2.560$
(2.ª) $30y = 5x + 2.250$

11. *Realiza la traducción inversa (del lenguaje algebraico al castellano).*

(1.ª) «15 veces el precio de un metro de paño más 8 veces el precio de un metro de tela *es igual a* 2.560 pesetas.»
(2.ª) «30 veces el precio de un metro de tela *es igual a* 5 veces el precio de un metro de paño más 2.250 pesetas.»

12. *Resuelve el sistema de ecuaciones resultante.*

Se obtiene $x = 120$, $y = 95$

13. *Comprueba que cada solución verifica las ecuaciones planteadas.*

$15 \cdot 120 + 8 \cdot 95 = 2.560$
$30 \cdot 95 = 5 \cdot 120 + 2.250$

14. *¿Cuántas soluciones hemos obtenido? ¿Cuáles son?* «Hemos obtenido una única solución con dos componentes, $x = 120$, $y = 95$.»

14. *¿Tiene sentido la solución obtenida?* «Sí, porque son números positivos (el precio de un metro de tela no podría ser un número negativo ni cero).»

Nota: **En este problema la dificultad esencial radica en la reformulación realizada en la segunda condición. Para efectuar dicha reformulación la pregunta clave ha sido: ¿CUÁL ES LA CANTIDAD QUE PUEDE EXPRESARSE DE DOS MANERAS DIFERENTES? La respuesta es: "El coste de 30 metros de tela".**

GUIONES DE RESOLUCIÓN (4)

E4. Hace 19 años la edad de una persona era doble de la edad de otra, y dentro de 11 años la edad de la segunda será los 7/9 de la edad de la primera. ¿Qué edad tienen actualmente?

1. *¿Tenemos una comprensión global del enunciado?* «El problema compara la edad de dos personas en dos momentos. *Hace 19 años* (entonces la edad de la primera era el doble de la edad de la segunda) y *dentro de 11 años* (entonces la edad de la segunda será los 7/9 de la edad de la primera). El problema pide la edad actual de cada una de ellas.

3. *Asigna un símbolo diferente a cada una de las cantidades que pide el problema.*

   «x = edad actual de la primera persona».
   «y = edad actual de la segunda persona».

4. *Comprueba que estas incógnitas pueden tomar valores numéricos.* «En efecto, la edad actual de la primera persona, por ejemplo, puede ser igual a 37 años.»

6. *Escribe las condiciones (cada condición se formula mediante una frase con sentido completo y denota la igualdad entre dos maneras diferentes de expresar una misma cantidad).*

   «(1.ª) La edad de la primera persona hace 19 años *era igual a* el doble de la edad de la segunda persona hace 19 años.»
   «(2.ª) La edad de la segunda persona dentro de 11 años *será igual a* los 7/9 de la edad de la primera persona dentro de 11 años.»

9. *Descompón cada miembro de cada condición en partes simples (traducibles).*

«la edad de la 1.ª persona hace 19 años»	$x - 19$
«la edad de la 2.ª persona hace 19 años»	$y - 19$
«el doble de la edad de la 2.ª persona hace 19 años	$2 \cdot (y - 19)$
«la edad de la 2.ª persona dentro de 11 años»	$y + 11$
«la edad de la 1.ª persona dentro de 11 años»	$x + 11$
«los 7/9 de la edad de la 1.ª persona dentro de 11 años	$7/9 \cdot (x + 11)$

10. *Cada condición se traduce en una ecuación.*

    (1.ª) $x - 19 = 2 \cdot (y - 19)$
    (2.ª) $y + 11 = 7/9 \cdot (x + 11)$

11. *Realiza la traducción inversa (del lenguaje algebraico al castellano).*

    (1.ª) «La edad actual de la primera persona menos 19 años *es igual al* doble del resultado de restar 19 años a la edad actual de la segunda persona.»
    (2.ª) «La edad actual de la segunda persona más 11 años *es igual a* los 7/9 del resultado de sumar 11 años a la edad actual de la primera persona.

12. *Resuelve el sistema de ecuaciones resultante.*

    Se obtiene $x = 43 \qquad y = 31$

13. *Verifica que cada solución cumple las ecuaciones planteadas.*

    $43 - 19 = 2 \cdot (31 - 19)$
    $31 + 11 = 7/9 \cdot (43 + 11)$

14. *¿Cuántas soluciones hemos obtenido? ¿Cuáles son?*

    a) «Hemos obtenido una única solución con dos componentes $x = 43$, $y = 31$.»
    b) *¿Alguna de las soluciones obtenidas no tiene sentido?* «Tienen sentido porque 43 años y 31 años no contradicen la naturaleza de la magnitud "edad de una persona". No tendría sentido una edad negativa o mayor que 150 años, por ejemplo.»
    c) *La solución obtenida ¿cumple las condiciones que impone el enunciado?* «Sí, como se observa en el siguiente esquema»:

$$\begin{array}{ccccc} 12 & \xleftarrow{-19} & , & 31 & \xrightarrow{+11} & 42 \\ 24 & \longleftarrow & & 43 & \longrightarrow & 54 \end{array} \quad \text{puesto que} \quad \frac{7}{9} = \frac{42}{54}$$

Apéndice III: Listas de problemas

LISTA 10

101. El tiempo que debe tardarse en resolver este problema se descompone del modo siguiente: 1/4 del total en *leerlo y comprenderlo*, 1/3 del total en *analizar las condiciones y plantearlo*, 2 minutos para *resolver las ecuaciones* planteadas y un tiempo para *evaluar la resolución realizada* que debe ser igual al empleado en la primera fase. ¿Cuánto tiempo debe emplearse en total?

102. Un padre dijo a su hijo: «Hace un año, yo tenía el triple de tu edad, y dentro de 13 años no tendré más que el doble.» ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

103 (G). Busca las dimensiones de un campo de fútbol rectangular de 6.630 metros cuadrados de área y 334 m de perímetro.

104. Un campesino compra 5 kg de patatas y 3 kg de melocotones por 510 ptas. En otra ocasión compra 2 kg de melocotones a cambio de 2 kg de patatas y 180 ptas. ¿Cuántas veces es más caro el kg de melocotones que el kg de patatas?

105. En un número de dos cifras, la cifra de las decenas es la mitad de la cifra de las unidades. Si invertimos el orden de las cifras, obtenemos otro número que es 27 unidades mayor que el primero. Halla este número.

106. Existe un número tal que si calculamos la raíz cuadrada positiva después de restarle 2 unidades, obtenemos el mismo resultado que si le restamos dos unidades y a continuación lo dividimos por 5. Halla dicho número.

107 (G). Calcula la diagonal de un rectángulo sabiendo que la base y la altura difieren en 5 m y que el perímetro mide 70 m.

108. La diferencia entre dos números es 565. Dividiendo el mayor por el menor resulta un cociente igual a 5 y un resto igual a 85. Calcula los dos números.

109. El año en que nació el matemático Isaac Newton (siglo XVII) está representado por un número de cuatro cifras cuya suma es 13, siendo la cifra de las decenas doble que la de las unidades. ¿En qué año nació Newton?

110 (G). Calcula el área de un triángulo isósceles sabiendo que su perímetro mide 32 cm y su lado desigual mide 12 cm.

LISTA 11

111. En una clase hay tres secciones; la primera comprende la tercera parte de los alumnos, la segunda la cuarta parte, y la tercera, 20 alumnos. Halla el número total de alumnos de la clase.
112. Un padre tiene el quíntuplo de la edad de su hijo. Dentro de 6 años sólo tendrá el triple. ¿Qué edad tienen ahora cada uno de ellos?
113 (G). Una puerta rectangular tiene una superficie de 300 dm^2 y un perímetro de 74 dm. Calcula, en metros, las dimensiones de la puerta.
114. En un almacén pago 31.0000 ptas para comprar 4 sillas y 3 mesas. ¿Cuál es el precio de una silla y de una mesa, sabiendo que 4 mesas cuestan 3.000 ptas más que 10 sillas?
115. Halla un número compuesto de dos cifras, sabiendo que la suma de éstas es 6, y que la diferencia entre dicho número y el que resulta al invertir el orden de sus cifras es 18.
116. Busca un número tal que al sumarle su raíz cuadrada positiva se obtenga por resultado 182.
117 (G). La diagonal de un rectángulo mide 40 metros. Calcula la base y la altura sabiendo que el perímetro mide 112 metros.
118. El producto de dos números es igual a 814, y al hacer la división euclídea se obtiene un cociente de 6 y un resto de 8. Calcula dichos números.
119. El filósofo anarquista Mijail Aléksandrovitch Bakunín nació en el siglo XIX. El año de nacimiento se representa por un número de cuatro cifras cuya suma es 14. Se sabe, además, que la cifra de las unidades es el cuádruplo de la cifra de las decenas. ¿En qué año nació Bakunín?
120 (G). El perímetro de un triángulo isósceles es 16 dm, y la altura 4 dm. Averigua las longitudes de los lados de dicho triángulo.

LISTA 12

121. La tercera parte de los alumnos de una clase han obtenido la calificación de *muy deficiente*, y la quinta parte la de *insuficiente*. Sabiendo que el resto (14 alumnos) han *aprobado*, calcula el número total de alumnos de la clase.

122. Un padre tiene 41 años y su hijo 14. ¿Cuántos años hace que el padre tenía cuatro veces la edad de su hijo?

123 (G). Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que la base es los 2/7 del perímetro y que el área es igual a 108 metros cuadrados.

124. Para pagar una cuenta de 2.400 ptas se entregan 9 libras y 15 dólares, recibiendo 75 ptas de vuelta. Para pagar otra cuenta de 3.200 ptas se entregan 9 dólares, 15 libras y 35 ptas. ¿A qué cambio, en pesetas, se han cotizado libras y dólares?

125. En un número de dos cifras, la cifra de las decenas es tres veces mayor (el triple) que la cifra de las unidades. Si invertimos el orden de las cifras, obtenemos otro número que es 54 unidades menor que el primero. Busca este número.

126. Busca un número cuya raíz cuadrada positiva es tres unidades menor que la cuarta parte del mismo.

127 (G). Halla la diagonal de un rectángulo cuyo perímetro es 84 cm, sabiendo que la base es los 4/3 de la altura.

128. La suma de dos números es 469. Al realizar la división euclídea del mayor por el menor se obtiene un resto de 19 y un cociente de 5. Calcula los dos números.

129. Miguel de Cervantes Saavedra nació en el siglo XVI. El año de su nacimiento se representa por un número de cuatro cifras cuya suma es 17. Se sabe, además, que la cifra de las unidades es tres unidades mayor que la cifra de las decenas. ¿En qué año nació Cervantes?

130 (G). Calcula el perímetro de un triángulo isósceles sabiendo que su área mide 12 cm cuadrados y su lado desigual mide 6 cm.

LISTA 13

131. En una exposición de coches, la quinta parte son rojos, la cuarta parte son azules y la mitad blancos. Calcula cuántos coches hay en total sabiendo que sólo hay 50 coches que no son ni rojos, ni azules ni blancos.

132. Hace 4 años la edad de un padre era el cuádruplo de la de su hijo, pero dentro de 10 años la edad del padre no será más que el doble de la del hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno de ellos?

133 (G). Una hoja de papel (rectangular) tiene una superficie de 726 cm^2 y su perímetro es el quíntuplo de la base de la hoja. Calcula sus dimensiones.

134. Para comprar 10 lápices y 40 bolígrafos entrego 1.200 ptas y me devuelven 50. Un compañero compra 20 lápices y 32 bolígrafos y le cobran 80 ptas más que a otro que compra 68 lápices: ¿Cuál es el precio de cada lápiz y de cada bolígrafo?

135. Halla un número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es 14, y que si se invierte el orden de las mismas, resulta otro número 36 unidades menor que el primero.

136. Existe un número tal que si extraemos la raíz cuadrada positiva después de sumarle 5 unidades, obtenemos el mismo resultado que si le restamos 3 unidades y después lo dividimos entre 7.

137. Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es de 34 m, y cuya diagonal mide 13 m.

138. La razón entre dos números es 17/5 y al realizar la división euclídea del mayor entre el menor, se obtiene un cociente de 3 y un resto de 24. Calcúlalos.

139. La suma de las 4 cifras del año que nació I. Kant (s. XVIII) es 14, siendo la cifra de las unidades doble de la de las decenas. ¿En qué año nació Kant?

140 (G). El lado desigual de un triángulo isósceles mide 48 m y el área es de 768 m^2. Calcula el perímetro del triángulo.

LISTA 14

141. Un millonario reparte su fortuna de la manera siguiente: la mitad a su hijo mayor, la tercera parte al segundo y 350 millones al menor. ¿A cuánto asciende la fortuna?

142. Las edades de dos niños suman 16 años y dentro de un año la edad de uno será el doble de la del otro. ¿Cuáles son sus edades?

143 (G). Un campo rectangular de 2.100 m^2 de área tiene un perímetro que es el triple de la base. Calcula sus dimensiones.

144. En un supermercado el coste de 7 kg de manzanas y 5 kg de peras es el mismo que el coste de 15 kg de manzanas, mientras que 4 kg de

manzanas y 6 kg de peras cuestan 680 ptas. ¿Cuál es el precio de cada una de estas frutas?

145. Halla un número de dos cifras, sabiendo que la cifra de las decenas es doble de las cifras de las unidades, y que, si se invierte el orden, el número resultante es 18 unidades menor que el primero.

146. La décima parte de un número es igual al número que se obtiene si se le extrae la raíz cuadrada positiva después de sumarle 24 unidades. ¿Cuál es el número original?

147 (G). Calcula la diagonal de un rectángulo sabiendo que el área es de 228 m^2 y que los lados difieren en 7 m.

148. Busca dos números que están en la razón de 25 a 8, y que al realizar la división euclídea se obtiene un cociente de 3 y un resto de 13.

149. Albert Einstein, uno de los científicos más grandes de la humanidad, nació en el siglo XIX. El año de su nacimiento se representa por un número de 4 cifras cuya suma es 25, siendo la cifra de las decenas dos unidades menor que la cifra de las unidades. ¿En qué año nació Einstein?

150 (G). El perímetro de un triángulo isósceles es de 32 m y la altura relativa al lado desigual mide 8 m. Calcula el área.

LISTA 20

201. Reparte 564 ptas entre dos personas, de modo que la primera sólo reciba monedas de peseta, la segunda sólo reciba monedas de duro y ambas reciban la misma cantidad de monedas.

202. El número que indicará la edad de un niño dentro de 3 años será un cuadrado perfecto, y hace 3 años su edad era precisamente la raíz cuadrada de este número. ¿Qué edad tiene el niño actualmente?

203 (G). Calcula el perímetro de un rombo, sabiendo que el área es de 1.920 cm^2 y una diagonal mide 96 cm.

204. Un cacharrero compró cierto número de botijos por 629 ptas, se le rompen 3 y vende cada uno de los restantes en 4 ptas más de lo que le había costado, ganando así un total de 85 ptas. ¿Cuántos botijos compró?

205. Un padre quiere dejar a sus hijos fortunas proporcionales a sus edades. Al mayor le deja 39 millones y 600 acciones, mientras que al menor le deja 200 acciones y 57 millones. Calcula el valor de cada acción, sabiendo que las edades respectivas de sus hijos son 7 y 9 años.

206. Si un millón de votantes de la izquierda hubiesen votado a la derecha, las dos coaliciones hubiesen tenido el mismo número de votos. Pero si, por el contrario, un millón de votantes de la derecha hubiesen votado a la izquierda, ésta hubiera tenido el triple de votos que aquélla. ¿Cuántos votos ha tenido cada coalición?

207 (G). La diferencia entre las diagonales de un rombo es de 2 m y entre las de otro rombo semejante, de 6 m. Calcula las diagonales del menor, sabiendo que las áreas difieren en 192 m cuadrados.

208. Una vasija llena de agua pesa 14 kg. Si quitáramos el 75 % del agua que contiene sólo pesaría 5 kg. Calcula el peso de la vasija vacía.

209. El coste normal de 7 libretas y 6 libros iguales es de 5.950 ptas. Pero el día del libro pago únicamente 4.550 ptas al realizar dicha compra porque me hacen el 20 % de descuento en las libretas y el 25 % en los libros. ¿Cuál es el precio normal de cada libreta y de cada libro?

210 (G). Uniendo los puntos medios de los lados de un rectángulo obtenemos un rombo. Calcula los dos perímetros sabiendo que el área del rectángulo es de 192 m^2 y que la razón entre la altura del rectángulo y el lado del rombo es 6/5.

LISTA 21

211. Un campo de 121.200 m^2 se divide en parcelas de dos tipos: de hectómetro cuadrado (= 10.000 m^2) y de decámetro cuadrado (= 100 m^2), de manera que hay el mismo número de parcelas de cada tipo. Se entregan todas las parcelas grandes a un gigante y todas las pequeñas a un enano, ¿cuántos m^2 recibe cada uno?

212. El número que indicaba la edad de un niño hace 7 años es tal que al elevarlo al cuadrado se obtiene la edad que tendrá dentro de 5 años. ¿Qué edad tiene el niño actualmente?

213 (G). Calcula el área de un rombo sabiendo que el perímetro es de 104 cm y una diagonal mide 20 cm.

214. Un chaval quiere repartir caramelos entre sus amigos, pero calcula que para entregar 8 caramelos a cada uno le faltan 6 caramelos. Encuentra 6 caramelos más y al repartirlos observa que se han marchado 2 amigos, así que le tocan 9 caramelos a cada uno y todavía le sobra un caramelo. ¿Cuántos caramelos tenía al principio?
215. Un colono tiene dos jornaleros que ganan lo mismo. Por 50 días de trabajo paga a uno 2.300 ptas y 4 medidas de trigo. Por 68 días de trabajo paga al otro 2.852 ptas y 8,2 medidas de trigo. ¿Cuánto vale la medida de trigo?
216. Una mula y un asno transportaban una carga de varios cientos de kg. El asno dijo a la mula: «Si yo tomase 100 kg de tu carga, llevaría el mismo peso que tú.» La mula respondió: «Sí, pero si tú me dieses 100 kg de la tuya, yo iría tres veces más cargada que tú.» ¿Cuántos cientos de kg llevaba cada uno?
217 (G). Tenemos dos rombos semejantes cuyas áreas difieren en 525 cm^2, sabiendo que las diagonales de uno difieren en 3 cm, y las del otro en 12 cm, calcula las diagonales del mayor.
218. Un tonel lleno de vino pesa 125 kg. Si quitamos 1/3 del vino que contiene sólo pesa 95 kg. Calcula el peso del tonel vacío.
219. El coste de 50 kg de un artículo y 80 kg de otro es de 6.610 ptas, pero como que nos hacen un 20 % de descuento en el primero y un 10 % en el segundo, sólo pagamos 5.624 ptas. ¿Cuáles son los precios primitivos?
220 (G). Uniendo los puntos medios de los lados de un rectángulo obtenemos un rombo de perímetro 40 m; sabiendo que la razón entre la altura y la base del rectángulo es 3/4, calcula las dos áreas.

LISTA 22

221. Pagué 118 ptas en monedas de duro y de una peseta. Si el total de monedas fue 54, ¿cuántas monedas de cada clase he entregado?
222. El número que indicará mi edad dentro de dos años es un cuadrado perfecto, y hace 28 años mi edad era exactamente la raíz cuadrada de ese número. ¿Qué edad tengo actualmente?
223 (G). Calcula las diagonales de un rombo sabiendo que el área es de 120 cm^2 y el perímetro es de 52 cm.

224. Un anticuario compra cierta cantidad de monedas aparentemente iguales por un total de 29.900 ptas, Como que 8 monedas resultan ser falsas, vende las restantes en 1.200 ptas más (cada una) de lo que le habían costado, ganando así un total de 7.600 ptas. ¿A qué precio compró cada moneda?
225. Una inmobiliaria compra solares para edificar. Por 3 hectáreas paga 16 millones y 2 pisos. Por 7 hectáreas paga 28 millones y 7 pisos. ¿A cuánto paga la hectárea?
226. Dice Pablo a Emilio: «Si me das 40 ptas, tendré 28 veces más dinero que tú.» «Dame 95 ptas —repuso Emilio— y los dos tendremos la misma cantidad de dinero.» ¿Cuánto tiene cada uno?
227 (G). Calcula las diagonales de un rombo, sabiendo que difieren en 2 m y que las diagonales de otro rombo semejante, cuya área es 360 m^2 mayor, difieren en 8 m.
228. Un camión cargado pesa 25,5 tn. Si quitamos el 75 % de la carga el peso se reduce a 12 tn. ¿Cuánto pesa el camión vacío?
229. El coste de 3 televisores y 2 vídeos es de 490.000 ptas; pero como que nos hacen un 10 % de descuento en los televisores y un 15 % en los vídeos, pagamos únicamente 430.000 ptas. ¿Cuál era el precio primitivo de cada artículo?
230 (G). Uniendo los puntos medios de los lados de un rectángulo obtenemos un rombo. Calcula los dos perímetros sabiendo que el área del rectángulo es de 432 cm^2, y que la razón entre el lado del rombo y la altura del rectángulo es 5/6.

LISTA 30

301. Un comerciante tiene dos clases de vino. Mezclándolos en la relación 1 a 3 obtiene una mezcla de 71,25 ptas el litro, y mezclándolos en la relación 3 a 2, obtiene una mezcla de 80 ptas le litro. Calcula el precio del litro de cada clase.
302. Un hombre le dijo a su hijo: «Cuando transcurra la tercera parte de los años que yo tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual.» «Sí —contestó el hijo— pero hace sólo 4 años, tu edad era 11 veces la mía.» Calcula la edad actual del hijo.

303 (G). Los perímetros de dos rectángulos semejantes difieren en 8 m y las alturas en 1 m. Sabiendo que la base del menor es 4 m mayor que su altura, calcula sus dimensiones.

304. Tres ciudades A, B y C, no están situadas en línea recta. Si se va de A hacia B, pasando por C, se recorren 27 km. Si se va de B hacia C, pasando por A, 35 km y desde A hacia C pasando por B, 32 km. ¿Cuáles son las dos ciudades más próximas?

305. Un chico dispone de monedas iguales que tiene colocadas en varias filas de igual número de monedas cada una. Si las distribuyera en dos filas menos, cada fila tendría 4 monedas más; pero si las colocara en 6 filas más, debería suprimir 4 monedas de cada fila. ¿Cuántas monedas tiene?

306. Un chico y su padre pasean juntos. Después de recorrer un largo camino, el hijo ha dado 1.000 pasos más que su padre. Sabiendo que la longitud del paso del hijo es los 2/3 de la longitud del paso del padre, calcula cuántos pasos da el hijo.

307 (G). El lado desigual de un triángulo isósceles es los 2/3 de cada uno de los lados iguales. Si incrementásemos en 3 cm cada uno de los lados iguales, sin cambiar el lado desigual, el nuevo perímetro sería los 5/4 del actual. ¿Cuánto miden los lados actualmente?

308 (G). El área de un rectángulo es de 192 cm^2 y la diferencia entre el semiperímetro y la diagonal es de 8 cm. Calcula la diagonal del rectángulo.

309. Un grupo de amigos cenan juntos y a la hora de pagar la cuenta resulta que tres de ellos no tienen dinero, por lo que cada uno de los restantes debe pagar 160 ptas más de lo que les correspondía. Sabiendo que la cuenta ascendía a 14.400 ptas, calcula el número total de amigos que han cenado.

310 (G). La razón entre las bases de dos rectángulos equivalentes (misma área) es 4/5. La base de uno es 7 m mayor que la altura, mientras que la base del otro es sólo 2 m mayor que la altura. Calcula las dimensiones del primero.

LISTA 31

311. Calcula la cantidad de agua que hay que mezclar con 224 litros de vino de 16 ptas el litro, para rebajar el precio a 13,5 ptas el litro.
312. Juan le dijo a Pedro: «Cuando transcurra la mitad de los años que yo tengo, tú tendrás el doble de mi edad actual.» «Sí —contestó Pedro— pero hace 15 años mi edad era 4 veces mayor que la tuya.» Calcula la edad actual de Juan.
313 (G). Las bases de dos rectángulos semejantes difieren en 3 m y las alturas en 1 m. Calcula las dimensiones del menor de los rectángulos sabiendo que las áreas se diferencian en 15 m^2.
314. Juan, Pedro y Antonio desean conocer lo que pesan, pero sólo disponen de una balanza que no funciona cuando el peso es inferior a 100 kg. Para resolver esta dificultad se les ocurre pesarse de dos en dos y obtienen los siguientes pesos: Juan y Pedro 143 kg, Pedro y Antonio 141 kg, Juan y Antonio 148 kg. ¿Cuánto pesa el más delgado?
315. En la preparación de un espectáculo se dispone de un determinado número de sillas que se colocan en filas de igual número de sillas cada una. Si ponemos 3 sillas más en cada fila habrá que eliminar 2 filas, pero si, por el contrario, ponemos 2 sillas menos en cada fila, deberemos añadir 2 filas más. ¿De cuántas sillas disponemos?
316. Una niña y su padre pasean juntos. Acabado el paseo la niña calcula que su padre ha dado 1.500 pasos menos que ella. Si la longitud del paso del padre es los 4/3 de la longitud del paso de la niña, calcula cuántos pasos ha dado el padre.
317 (G). Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es 5 cm mayor que el lado desigual. Si se duplicaran los lados iguales sin cambiar el desigual, el nuevo perímetro sería los 9/5 del actual. ¿Cuánto miden los lados actualmente?
318 (G). Calcula la diagonal de un rectángulo de 972 m^2 de área, sabiendo que el semiperímetro excede en 18 metros a dicha diagonal.
319. Una herencia de 405.000 ptas. había de repartirse entre cierto número de herederos. Tres de ellos son excluidos; por lo cual, la parte que corresponde a cada uno de los restantes se ve aumentada en 22.500 ptas. ¿Cuántos herederos había primeramente?
320 (G). Las bases de dos rectángulos equivalentes (misma área) difieren en 2 m y sus alturas en 1 m. Sabiendo que la razón entre la base y la altura del rectángulo que tiene mayor altura es 5/3, calcula las dimensiones de uno de ellos.

Apéndice IV

PRETEST (primera parte)

1. En un corral hay conejos y gallinas. Se cuenta un total de 57 cabezas y 150 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?
2. El área de un trapecio es de 100 cm^2 y la altura mide 4 cm. Calcula las bases sabiendo que la mayor es el cuádruplo de la menor.
3. En un almacén hay 600 prendas entre pantalones y camisas. Sabiendo que el 15 % de los pantalones forman pareja con el 10 % de las camisas, calcula cuántas prendas hay de cada clase.
4. Busca una fracción tal que si sumamos una unidad a ambos términos (numerador y denominador), la que resulta es equivalente al doble de su inversa; pero si restamos una unidad a ambos términos, la fracción que resulta es equivalente a 2.

PRETEST (segunda parte)

5. Un padre de tres niños deja una herencia de 1.600 coronas. El testamento precisa que el hijo mayor debe recibir 200 coronas más que el segundo y éste 100 más que el menor. ¿Cuánto heredará cada uno?
6. La razón entre los lados de un rectángulo es de 11/7, y si cada uno aumentase en 3 cm el área aumentaría en 117 cm^2. Calcula las dimensiones del rectángulo.
7. La raíz cuadrada positiva de un número es dos unidades menor que la raíz cuadrada positiva del número que se obtiene al sumarle 60 unidades. Calcula dicho número.
8. El área de un triángulo rectángulo es de 294 m^2 y un cateto es 7 m mayor que el otro. Calcula el perímetro.

Apéndice V

POSTEST (primera parte)

1. En un garaje, después de desmontar coches y motos, se cuentan 90 motores y 326 ruedas en total. ¿Cuántos vehículos había de cada clase?
2. El área de un trapecio es de 125 m^2 y la altura mide 5 m. Calcula las bases sabiendo que la mayor es 1,5 veces la menor.
3. En un pueblo hay 220 personas entre hombres y mujeres. Sabiendo que el 78 % del total de los hombres forman pareja con el 65 % del total de las mujeres, calcula cuántas personas hay de cada sexo.
4. Busca una fracción tal que si sumamos una unidad a ambos términos (numerador y denominador), la que resulta es equivalente a la mitad de su inversa; pero si restamos una unidad a ambos términos, la fracción que resulta es equivalente a 1/2.

POSTEST (segunda parte)

5. Queremos repartir 1.875 ptas entre tres personas de modo que la primera reciba 19 pesetas más que la segunda y ésta 94 pesetas más que la tercera. ¿Cuánto recibirá cada persona?
6. El área de un campo rectangular aumentaría 88 m^2 si se añadiesen 2 m a cada lado. Sabiendo que la razón de los lados es de 5/9, calcula las dimensiones del campo rectangular.
7. La raíz cuadrada positiva de un número es 3 unidades menor que la raíz cuadrada positiva del número que se obtiene al sumarle 99 unidades. Calcula dicho número.
8. Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo de 216 cm^2 de área, sabiendo que un cateto es 6 cm menor que el otro.

Apéndice VI

PRUEBA COMPRENSIÓN ENUNCIADO (inicial)

01. En un corral hay conejos y gallinas. Se cuenta un total de 286 patas. Si se sabe que hay 37 gallinas, ¿cuántos conejos hay?
02. Calcula el área de un trapecio sabiendo que la base mayor es el cuádruplo de la menor, que la altura mide 7 m y la base menor 6 m.
03. En un almacén hay pantalones y camisas. Sabiendo que el 40 % de las camisas forman pareja con el 8 % de los pantalones y que hay 120 camisas, ¿cuántos pantalones hay?
04. El denominador de una fracción es 28. Si restamos una unidad a ambos términos (numerador y denominador) se obtiene otra fracción cuya inversa es equivalente a 9. ¿Cuál era el numerador?
05. Un padre de 4 niños deja una herencia de 2.300 coronas. El testamento precisa que el primer hijo debe recibir 200 coronas más que el segundo y éste 100 más que el tercero. ¿Cuánto debe recibir el cuarto si el segundo recibe 500 coronas?
06. La razón entre los lados de un rectángulo es de 11/7, y el lado menor mide 21 cm. ¿Cuánto aumentaría el área si cada lado aumentase en 2 cm?
07. La raíz cuadrada positiva de un número es 3 unidades mayor que la raíz cuadrada positiva del número que se obtiene al sumarle 60 unidades al número 165. Calcula dicho número.
08. El área de un triángulo rectángulo es de 120 m^2 y un cateto mide 24 m. Calcula el perímetro.

Apéndice VII

PRUEBA COMPRENSIÓN ENUNCIADO (final)

01. En un garaje hay coches y motos. Se cuenta un total de 294 ruedas. Si se sabe que hay 25 motos, ¿cuántos coches hay?
02. Calcula el área de un trapecio sabiendo que la base mayor es el quíntuplo de la menor, que la altura mide 6 m y la base menor 7 m.
03. En un pueblo hay hombres y mujeres. Sabiendo que el 60 % de los hombres forman pareja con el 40 % de las mujeres y que hay 250 hombres, ¿cuántas mujeres hay en el pueblo?
04. El numerador de una fracción es 7. Si sumamos una unidad a ambos términos (numerador y denominador) se obtiene otra fracción cuya inversa es equivalente a 3. ¿Cuál era el denominador?
05. Queremos repartir 608 ptas entre 4 personas de manera que la primera reciba 38 ptas más que la segunda y ésta 89 ptas más que la tercera. ¿Cuánto debe recibir la cuarta si la segunda recibe 178 ptas?
06. La razón entre los lados de un rectángulo es 13/9, y el lado menor mide 27 m. ¿Cuánto aumentaría el área si cada lado aumentase en 2 m?
07. La raíz cuadrada positiva de un número es 4 unidades mayor que la raíz cuadrada positiva del número que se obtiene al sumarle 99 unidades al número 45. Calcula dicho número.
08. El área de un triángulo rectángulo es de 270 cm^2 y un cateto mide 36 cm. Calcula el perímetro.

APÉNDICE VIII

LISTAS INDIVIDUALIZADAS ALEATORIAS

(Alumnos del grupo D)

121-132-123-104-105-106-117-138-119-150	201-202-203-214-207
141-132-113-104-115-136-137-118-109-110	208-221-223-216-220
111-122-123-124-135-106-147-138-129-130	201-215-230-219-223
131-142-143-134-125-146-137-108-149-110	229-228-213-202-217
111-132-133-114-145-146-137-108-119-110	226-211-203-228-230
131-112-113-114-115-106-137-148-149-140	211-218-217-226-220
111-122-103-114-115-116-137-108-119-120	228-209-227-215-210
121-132-103-124-115-126-147-148-149-150	209-214-220-226-213
101-132-113-114-125-116-107-148-139-120	201-226-223-229-217
121-142-123-134-145-146-107-118-149-140	222-214-227-208-230
121-132-133-104-135-106-127-148-129-130	219-205-210-212-203
141-132-123-144-105-146-147-138-119-130	202-215-230-221-227
101-102-123-124-135-106-127-138-119-140	211-215-207-222-203
101-132-113-134-145-126-127-118-129-140	204-212-207-208-210
101-102-143-114-105-146-147-118-139-120	228-219-217-216-203
111-122-143-124-105-136-117-138-129-120	208-222-203-216-230
131-112-103-144-125-126-117-128-139-150	205-212-210-214-207
141-102-133-114-135-136-137-138-119-150	219-202-207-221-203
121-112-103-124-135-126-127-108-119-110	215-201-203-226-210
111-102-113-114-115-106-107-118-119-150	206-214-213-225-217
131-102-133-114-125-126-107-108-139-130	229-212-207-205-203
101-112-123-134-105-116-127-128-119-110	224-209-220-228-207
131-112-133-134-145-116-147-138-149-140	212-204-227-218-213
131-102-103-104-115-136-117-128-109-110	206-215-203-224-217
141-122-133-114-115-136-137-108-129-150	215-201-223-222-230
141-112-103-114-125-146-137-148-149-140	228-229-223-201-210
121-132-123-134-135-126-117-138-109-120	224-225-223-219-207
121-112-143-134-135-136-107-138-139-150	205-208-230-211-217
111-142-123-124-115-126-127-108-149-130	208-215-223-204-217
141-122-133-124-115-146-117-138-139-120	228-205-220-229-227

(Alumnos del grupo M)

101-112-124-133-147	201-212-224-203-217	303-301-314-309-316
145-106-138-120-113	225-206-208-220-203	313-311-304-306-319
139-121-112-147-130	211-222-204-217-220	307-301-312-315-309
123-105-136-114-147	205-216-228-203-217	317-302-314-305-319
138-109-141-110-123	229-201-212-223-207	308-311-302-315-316
102-114-125-147-130	214-225-206-210-223	318-312-304-306-309
136-108-119-123-147	208-219-221-207-210	310-301-312-314-319
111-122-104-150-133	222-204-215-223-230	320-311-314-302-305
145-136-128-107-110	216-228-209-213-227	303-301-302-315-316
129-141-132-113-107	205-216-228-230-213	307-312-305-306-319
124-135-146-110-113	221-202-214-227-230	313-311-302-316-309
108-129-111-137-150	219-221-202-210-227	317-301-304-305-319
112-104-145-123-137	204-215-226-230-213	308-314-315-306-309
136-148-109-110-123	228-209-211-220-207	318-312-314-316-319
141-112-134-107-120	212-224-205-217-223	310-311-304-305-309

(Alumnos del grupo E)

131-102-143	201-202-203-204-207	303-307-301-312-304-315-306
103-104-115	211-212-213-214-217	308-310-311-302-314-305-309
108-109-120	221-222-223-224-227	313-317-301-302-314-306-309
101-132-133	201-206-203-209-217	318-320-311-312-305-316-319
116-137-138	212-216-207-218-220	303-308-301-304-315-316-319
123-144-105	222-226-210-228-213	307-310-312-314-305-306-309
121-112-123	202-205-213-208-230	313-318-301-314-305-316-319
117-118-109	212-215-223-218-207	317-320-311-302-315-306-309
116-147-128	222-225-203-228-217	303-310-301-312-314-306-309
103-134-105	211-204-213-216-227	307-308-311-302-304-305-319

Capítulo V

PROBLEMAS DE CONTAR

1. *INTRODUCCIÓN: CONTENIDOS Y PROCEDIMIENTOS*

Desde el punto de vista de la *Metodolgía heurística*, en toda Didáctica de resolución de problemas se persigue que el alumno llegue a dominar un sistema estructurado de procedimientos (que puede llamarse «*Método general de resolución*») relativos a una determinada clase de problemas.

Si en toda Didáctica es muy difícil caracterizar los contenidos y los procedimientos de manera independiente (ver, p. ej., cap. II, apartado 2), en el caso particular de una Didáctica de resolución de problemas esto es imposible. Sólo pueden darse algunas características formales que delimiten la clase de problemas en cuestión (ver cap. IV, apartado 3).

En este caso sería ocioso decir que se trata de los «problemas de contar» (por más precisiones que intentásemos dar a estos términos) y de los «procedimientos de resolución de los problemas de contar». Sólo un modelo específico de estos procedimientos que pueda concretarse en un sistema de reglas (más o menos algorítmicas) y plasmarse en una Directriz, permite poner en claro los procedimientos a los que nos referimos y, en consecuencia, la clase de problemas a los que pueden ser aplicados.

El análisis empírico de los procedimientos que intervienen en la resolución de los problemas que usualmente se incluyen dentro del epígrafe de «Combinatoria» ha mostrado que éstos forman una clase muy amplia determinada por un sistema de procedimientos excesivamente complejo para ser asimilado globalmente en una primera fase del aprendizaje.

Es por ello que hemos preferido distinguir un primer conjunto de procedimientos que son casi algorítmicos y determinan los «*problemas simples directos*», a continuación puede considerarse la clase de problemas que se obtiene al permutar los datos y las incógnitas en un problema simple directo (son los llamados «*problemas simples inversos*») y por último incluirlos todos en la clase de problemas que pueden descomponerse en una cadena de problemas simples. Todo ello sin olvidar que los «*problemas de contar compuestos*» (es decir, los que no son simples) no son necesariamente descomponibles de esa forma y que, en consecuencia, involucran procedimientos de resolución más complejos. En el marco del *Aprendizaje diferenciado* hemos constatado que el aprendizaje de estos últimos procedimientos sólo es asequible a los alumnos del grupo E.

2. *DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL DEL ALUMNO*

Al igual que en la Didáctica de resolución de problemas de planteo algebraico, el material del alumno contiene: Predidácticas, Directrices, Normas para usar las Directrices y Listas de problemas. En este caso se añade, además, una Introducción de los Conceptos de Combinatoria.

2.1. PREDIDÁCTICAS

Se ha elaborado una única Predidáctica, llamada *Predidáctica de problemas de contar*. En ella se practican, por separado, las *operaciones elementales* en las que se descompone el proceso de resolución de un problema de contar simple directo a nivel simbólico.

En concreto se han considerado seis operaciones elementales, dos de las cuales (las dos primeras) se ejemplifican en el cuadro I.

CUADRO I

PREDIDÁCTICA DE PROBLEMAS DE CONTAR

1. Para cada uno de los siguientes «*objetos*« escribe: un *grupo de símbolos* que lo represente, la *lista completa de símbolos* que pueden utilizarse en cada caso y los correspondientes números «m» *(número total de símbolos diferentes)* y «n» *(número de símbolos, repetidos o no, que forman cada grupo)*:

		Grupo	*Lista completa*
a)	Manera de sentarse 5 personas en un banco de 5 lugares	ADECB (n = 5)	A,B,C,D,E (m = 5)
b)	Quiniela de 6 partidos	1XX212 (n = 6)	1,X,2 (m = 3)
c)	Número de 5 cifras distintas	47896 (n = 5)	(m =)
d)	Saludo, en una reunión de 7 personas	(n =)	A,B,C,D,E,F,G (m =)
e)	Collar formado por 4 diamantes idénticos y 3 esmeraldas idénticas	(n =)	D,E (m =)
f)	Diagonal de un hexágono	(n =)	A,B,C,D,E,F (m =)
g)	Clasificación final en un campeonato en el que participan 8 equipos	(n =)	1,2,3,4,5,6,7,8 (m =)
h)	Resultado que se obtiene al lanzar 3 dados	(n =)	(m =)
i)	Número de 7 cifras formado por 2 nueves y 5 ochos	(n =)	(m =)
j)	Manera de subir al pódium en una final olímpica (10 finalistas)	(n =)	A,B,C,D,E,F,G,H,I,J (m =)

2. Escribe, en cada caso, un *grupo de símbolos que tenga dos o más símbolos repetidos*, indicando el «objeto» que dicho grupo representa:

Grupo con repetición		*«Objeto» que representa dicho grupo*
a)	DEBBA	La persona «D» se sienta en el lugar 1.º, la persona «E» en el 2.º, la persona «B» en el 3.º y en el 4.º (?) y la persona «A» en el 5.º. *No puede haber repetición.*
b)	2X2112	Se pronostica que en el primer partido ganará el equipo visitante, en el segundo partido habrá empate, etc. *Sí puede haber repetición.*
c)	77853	No es un número de cinco cifras distintas, luego __________
d)	AA	La persona «A» se saluda a sí misma __________
e)	DDDEEDE	__________
f)		Es la «diagonal» que une el vértices C con el vértice C, luego __________
g)		El equipo «5» ha quedado clasificado, a la vez, en 3.ª y 7.ª posición, __________
h)		Dos cincos y un cuatro. Es un resultado posible al lanzar 3 dados, luego __________
i)		__________
j)	HFF	El atleta «H» gana la medalla de oro, __________

3. Escribe, en cada caso, dos grupos de símbolos que *se diferencien únicamente en la posición de un par de símbolos (diferentes).* Explica si ambos grupos representan «objetos» diferentes o no.

	Par de grupos	*¿Representan «objetos» diferentes?*
a)	ADECB y AEDCB *Sí que importa el orden*	*Sí*, porque en el primer caso la persona «D» se sienta en el 2.º lugar y la persona «E» en el lugar 3.º, mientras que en el segundo caso (grupo AEDCB) estas personas se sientan al revés.
b)	112XX2 y 212XX1 *Sí que importa el orden*	*Sí*, porque

2.2. Directrices y Normas

En esta Didáctica se utilizan tres Directrices profundamente interrelacionadas entre sí:

La *Directriz (1)* sintetiza los procedimientos de resolución de un problema simple directo cuando se utiliza un esquema figurativo. Consta de dos partes claramente diferenciadas. En la primera se dan indicaciones útiles para representar mediante un *grupo de símbolos* cada uno de los objetos que queremos contar. En la segunda se sugiere, paso a paso, el proceso de construcción del *diagrama en árbol* que se utiliza para simular la formación sistemática de todos los grupos de símbolos y que servirá, en definitiva, para calcular el número total de dichos grupos.

La *Directriz (2)* da las indicaciones necesarias para abordar la resolución de cualquier problema de contar simple a través del *análisis de las propiedades formales* de los grupos de símbolos. Para los *problemas directos*, después de construir algunos grupos de símbolos e interpretarlos, se formula un *algoritmo de resolución* (ver cuadro II) que, además, caracteriza por exclusión los problemas compuestos. Para los *problemas inversos* se modeliza un sistema de procedimientos que pasa por la resolución previa de la versión directa del problema inverso en cuestión.

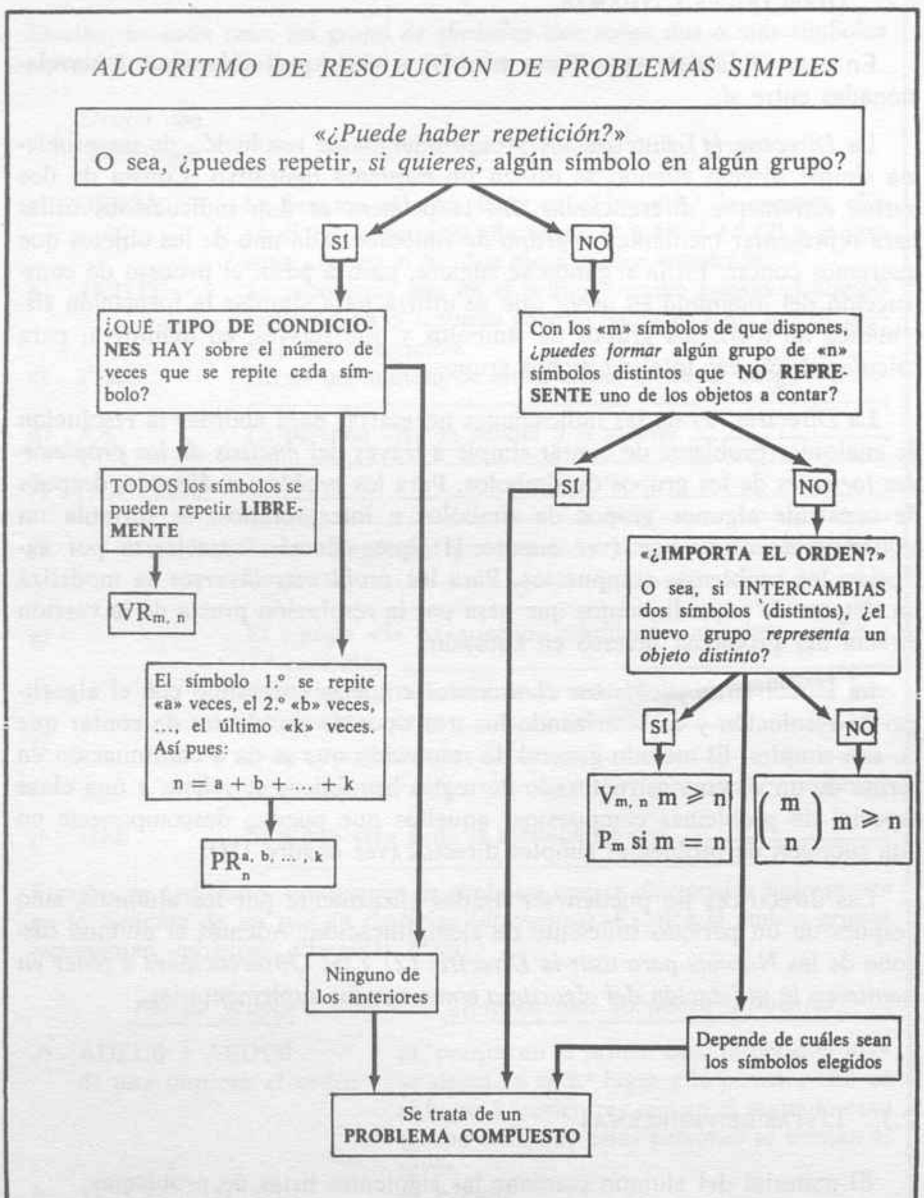
La *Directriz de problemas compuestos* empieza enlazando con el algoritmo de resolución y caracterizando los tres tipos de problemas de contar que no son simples. El método general de resolución que se da a continuación en forma de un sistema estructurado de reglas heurísticas se refiere a una clase especial de problemas compuestos: aquellos que pueden descomponerse en una sucesión de problemas simples directos (ver cuadro III).

Las directrices no pueden ser usadas eficazmente por los alumnos, sino después de un período suficiente de ejemplificación. Además el alumno dispone de las *Normas para usar la Directriz (2)* y las *Observaciones a tener en cuenta en la utilización del algoritmo* como ayudas suplementarias.

2.3. Listas de problemas

El material del alumno contiene las siguientes listas de problemas:

— *Lista de problemas simples (I).* Está compuesta por problemas simples


ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIMPLES
«¿Puede haber repetición?»
O sea, ¿puedes repetir, *si quieres*, algún símbolo en algún grupo?
SÍ
NO
¿QUÉ **TIPO DE CONDICIONES HAY** sobre el número de veces que se repite cada símbolo?
Con los «m» símbolos de que dispones, *¿puedes formar* algún grupo de «n» símbolos distintos que **NO REPRESENTE** uno de los objetos a contar?
TODOS los símbolos se pueden repetir **LIBREMENTE**
SÍ
NO
$VR_{m,\,n}$
«¿IMPORTA EL ORDEN?»
O sea, si INTERCAMBIAS dos símbolos (distintos), ¿el nuevo grupo *representa* un *objeto distinto*?
El símbolo 1.º se repite «a» veces, el 2.º «b» veces, ..., el último «k» veces. Así pues:
$n = a + b + \dots + k$
SÍ
NO
$V_{m,\,n}$ $m \geqslant n$
P_m si $m = n$
$\binom{m}{n}$ $m \geqslant n$
$PR_n^{a,\,b,\,\dots,\,k}$
Ninguno de los anteriores
Depende de cuáles sean los símbolos elegidos
Se trata de un **PROBLEMA COMPUESTO**

CUADRO II

DIRECTRIZ DE PROBLEMAS COMPUESTOS

Según el algoritmo de resolución de problemas simples, hay tres casos en los que un *problema de contar es compuesto*:

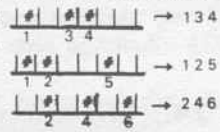
1.er caso: Cuando puede haber repetición de símbolos, pero de forma que la repetición *no es libre (VR) ni tampoco idéntica en todos los grupos (PR).*

2.º caso: Cuando, sin haber repetición de símbolos en ningún grupo, resulta que *no todos los grupos son admisibles* (ya que pueden formarse grupos que no representan objetos a contar).

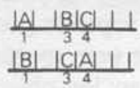
3.er caso: Cuando, sin haber repetición de símbolos y siendo admisibles todos los grupos, *no se pueda determinar si importa o no el orden* (pues depende del particular par de símbolos que se intercambie).

En cualquier caso, ante un problema compuesto:

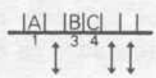
1. Busca, en cada grupo de símbolos, un *subgrupo homogéneo,* es decir, un *subgrupo* dentro del cual no se presente ninguno de estos tres casos. Es práctico empezar buscando un *subgrupo* en el que no se produzca precisamente el mismo caso.
2. Cuenta las *posiciones diferentes* que pueden ocupar los símbolos del *subgrupo* homogéneo dentro del grupo. Se trata siempre de combinaciones. Este número puede ser igual a *uno* (en el caso en que los símbolos del *subgrupo* tengan una *posición fija* dentro del grupo).



3. Para *una determinada posición* de los símbolos del *subgrupo* (por ejemplo, para la posición 134), cuenta, utilizando el algoritmo, de *cuántas maneras puedes rellenar las correspondientes casillas.*



4. Calcula de cuántas maneras posibles pueden *rellenarse las casillas dejadas en blanco,* una vez fijado, en una posición dada, uno de los subgrupos homogéneos. Ten en cuenta que éste es un nuevo problema de contar que, a su vez, *puede ser compuesto*; en tal caso, vuelve al punto 1.



5. El número de «objetos» que tienes que contar será, pues, igual al *producto de los números* que se van obteniendo a lo largo del proceso.

CUADRO III

directos que pueden ser abordados por método figurativos. Para su resolución se utilizará la Directriz (1).

— *Lista de problemas simples (II).* Está formada, también, por problemas simples directos, pero con la peculiaridad de que son problemas que tienden a ser difícilmente resolubles utilizando sólo métodos figurativos. Para su resolución se utilizará la primera parte de la Directriz (2) completada con el algoritmo de resolución.

— *Lista de problemas simples inversos.* Destinados a practicar la segunda parte de la Directriz (2).

— *Lista de problemas de contar.* Constituida por problemas de todo tipo: simples (directos e inversos) y compuestos (ver cuadro IV). Se han intentado evitar los problemas compuestos no descomponibles en una cadena de problemas simples, por lo que las tres Directrices son suficientes para resolver los problemas de esta lista.

— *Lista de problemas más difíciles.* Es una ampliación de la lista anterior e incluye problemas compuestos no descomponibles en una única cadena de problemas simples directos. Está destinada especialmente para los alumnos del grupo E y para su resolución suele necesitarse una estrategia complementaria a la aplicación de las directrices.

2.4. Introducción de los conceptos de combinatoria

Se trata de un material del que disponen los alumnos (para que no tengan que copiarlo precipitadamente) y que el profesor explicará detalladamente en clase (ver apartado 3.2). En él se parte de los grupos de símbolos que representan los objetos que queremos contar. Se realiza un análisis detallado y sistemático de las propiedades formales de estos grupos que llamamos *Análisis cualitativo* porque va más allá del mero *Análisis cuantitativo* realizado en la fase figurativa y que aquí se recuèrda someramente. Se utilizan los mismos ejemplos que se utilizaron en la fase figurativa (ver cuadro V y los enunciados en el apéndice I.)

Este análisis cualitativo se sintetizará en la Directriz (2) (primera parte) y culminará en el algoritmo de resolución.

LISTA DE PROBLEMAS DE CONTAR

1. En un grupo hay 12 chicos y 10 chicas. ¿Cuántos equipos de 2 chicos y 3 muchachas se pueden formar?
2. Utilizando exclusivamente las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, cuántos números, comprendidos entre 2.000 y 5.000, se pueden formar, de forma que cada uno posea 4 cifras distintas?
3. A) ¿Cuántos números de 6 cifras hay que tengan exactamente 2 sietes? (Descuéntense los que empiezan por cero.)
   B) ¿Y si, en lugar de haber exactamente dos 7, hubiesen un 3 y un 8 exactamente?
4. Se quieren distribuir 12 bolas distintas en 4 cajas, de forma que haya 3 bolas en cada caja. ¿De cuántas maneras distintas se puede efectuar esta distribución?
5. Disponemos de varios libros, todos ellos distintos, que pueden agruparse en tres tamaños; queremos ordenarlos en una estantería de todas las maneras posibles, pero de forma que estén juntos los del mismo tamaño. ¿De cuántas formas lo podemos hacer, si hay 7 libros grandes, 5 libros medianos y 4 libros pequeños?
6. Un escalador quiere conquistar cinco picos de distintas altitudes durante la estación veraniega. Aunque lo lógico sería empezar a escalar el pico de menor altitud y terminar con el más alto, resulta que como cada montaña ofrece unas dificultades especiales no determinadas precisamente por su altitud, dicho procedimiento no es necesariamente el más adecuado. ¿De cuántas maneras puede conquistar todos los picos?
7. En cierta clínica hay 8 médicos y 20 enfermeras; si hacen guardia, por turno, 2 médicos 11 enfermeras, ¿cuántas guardias se pueden hacer?
8. Con las cinco vocales y con 12 consonantes, averiguar el número de palabras de 5 letras distintas que se pueden formar, de manera que haya 2 vocales y 3 consonantes.
9. De una baraja de 52 cartas, cuántos juegos de 5 cartas se pueden dar, de forma que en cada uno haya exactamente 2 ases?
10. Margarita posee dos anillos (uno de oro y el otro de plata); desea colocárselos en sus dedos de todas las formas posibles, pero sin utilizar ni el pulgar ni el índice (por razones obvias). ¿Cuántos días transcurrirán antes de tener que repetir exactamente la colocación de los anillos del primer día? Su hermana Montserrat se entera de la decisión de su hermana cinco días más tarde y le parece una buena idea; sin embargo, desea no tener que repetir la colocación de sus distintos anillos hasta el año siguiente. ¿Cuántos anillos deberá poseer?
    ¿Cuánto tiempo transcuriría hasta que las dos hermanas tuvieran que repetir exactamente la misma colocación conjuntamente?
11. Nueve turistas quieren distribuirse en tres habitaciones con capacidades para 2, 3 y 4 personas respectivamente. ¿De cuántas maneras lo pueden hacer?

CUADRO IV

CUADRO V

INTRODUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE COMBINATORIA

Nos proponemos pasar del análisis *figurativo* sintetizado en la *Directriz (1) de problemas simples*, a un análisis *más formal* de las propiedades de los *grupos de símbolos* construidos.

Para ello retomaremos los mismos ejemplos 1, 2, 3 y 4 en el punto inmediatamente anterior a la construcción del esquema en árbol (punto 5 de dicha Directriz) y se realizarán las preguntas sintentizadas en la *Directriz (2) de problemas simples (directos)*, que culmina en el *Algoritmo de resolución de problemas simples.* De esta forma introduciremos los conceptos usuales en *Combinatoria.*

Ejemplo 1 **"¿Cuántas quinielas pueden hacerse? (Se consideran sólamente columnas de catorce partidos y apuestas sencillas)".**

Análisis cuantitativo

11111111111222 — Disponemos de $m = 3$ *símbolos distintos.*
111111xxx222x1 — *Cada grupo* está formado por $n = 14$ *símbolos (repetidos o no).*
xxxxxx22211111
222xxx111112x1 — El número total de grupos de símbolos era igual a 3^{14}.
— *Fórmula general*: m^n.

Análisis cualitativo

Los grupos se construyen con *repetición libre* de los símbolos dentro de cada grupo; además, *importa el orden*, puesto que al intercambiar dos símbolos distintos el nuevo grupo representa un objeto diferente.

Estos grupos se llaman VARIACIONES CON REPETICIÓN y su número se expresa por la fórmula $VR_{m,\,n} = m^n$.

Ejemplo 2 A.a) "Averiguar de cuántas maneras pueden sentarse cinco personas en tres asientos en fila".

Análisis cuantitativo

1.ª 2.ª 3.ª	— Disponemos de $m = 5$ *símbolos distintos.*
5.ª 4.ª 1.ª	— *Cada grupo* está formado por $n = 3$ *símbolos* (que, en este caso, son distintos).
4.ª 3.ª 2.ª	
2.ª 4.ª 1.ª	— El número total de grupos era igual a $5 \times 4 \times 3$.
...	— *Fórmula general*: $m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \ldots$ (En total, *n factores*).

Análisis cualitativo

En un grupo *no puede haber repetición* de símbolos y *sí que importa el orden* de los símbolos dentro del grupo, puesto que al intercambiar dos símbolos el nuevo grupo representa un objeto a contar distinto.

Estos grupos se llaman VARIACIONES y su número se expresa por la fórmula: $V_{m,n} = m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \ldots$ (En total, *n factores*) $(m \geqslant n)$.

3. *DISEÑO DE LA INSTRUCCIÓN*

Por lo dicho anteriormente, parece lógico distinguir tres fases dentro de la instrucción relativa al aprendizaje de los métodos de resolución de esta clase de problemas. Dichas fases parecen corresponder con la evolución «natural» de este aprendizaje.

En las tres fases la metodología didáctica es similar: consta de una *etapa de ejemplificación* y otra de *entrenamiento*, no totalmente separadas. En conjunto se pretende que el alumno asimile e interiorice un método general de resolución que está localmente representado por las directrices parciales que se utilizan pero que, globalmente considerado, las rebasa ampliamente.

3.1. Resolución de problemas simples directos, utilizando esquemas figurativos (4 sesiones)

Durante esta primera fase se pone el énfasis en la posibilidad, cuanto menos teórica, de *escribir todos los grupos de símbolos* mediante un procedimiento constructivo y sistemático. Si el número de grupos es «grande», nos fijamos en la *ley de crecimiento del árbol* que nos permite contar el número de grupos sin necesidad de escribirlos todos.

A continuación se sugiere una posible distribución por sesiones:

a) Se empieza con una ejemplificación pura de dos sesiones en las que el profesor resuelve con todo detalle, razonando en voz alta, los problemas núms. 1 a 4 de la *Lista de problemas simples de ejemplificación* siguiendo y remarcando la reglas que constituyen la Directriz (1). Para ello debe seguir los correspondientes *Guiones de resolución* que figuran en el apéndice I.

b) Las dos sesiones siguientes son mixtas (de ejemplificación y entrenamiento) y en ellas los alumnos disponen de la citada Directriz (1) que deben utilizar para resolver un mínimo de 8 problemas de la *Lista de problemas simples (I)*. El profesor resalta y corrige los errores más comunes observados en el seguimiento de la Directriz (1) y desarrolla los problemas núms. 5 y 6 de la citada *Lista de problemas simples de ejemplificación.*

A lo largo de estas dos últimas sesiones los alumnos de los grupos D y M empiezan a trabajar individualmente y fuera del horario lectivo la *Predidáctica de problemas de contar.*

3.2. Resolución de problemas simples (directos e inversos) en base a las propiedades formales de los grupos de símbolos (7 sesiones)

En esta segunda fase se pretende que el alumno domine la Directriz (2) completada con el algoritmo de resolución.[1]

Sugerimos la siguiente distribución por sesiones:

a) Durante las dos primeras sesiones el profesor realizará un análisis cualitativo de los grupos de símbolos que aparecen en los problemas núms. 1 a 4 de la fase anterior. Para ello bastará con que siga la *Introducción de los conceptos de combinatoria* que figuran en el material del alumno (ver muestra en el cuadro V).

b) La tercera sesión se dedica a comentar ampliamente la primera parte de la Directriz (2) y el algoritmo de resolución aplicándolos a los cuatro problemas analizados durante las dos sesiones anteriores y a los problemas núm. 5 y 6 de la *Lista de problemas simples de ejemplificación* que se analizan en ésta. A partir de este momento el alumno puede utilizar la citada Directriz (2) y el algoritmo de resolución para resolver individualmente problemas de la *Lista de problemas simples (II).*

c) Al principio de la cuarta sesión se ejemplifica con todo detalle la resolución de un problema simple inverso siguiendo, punto por punto, las reglas que constituyen la segunda parte de la Directriz (2). Para ello puede utilizarse el problema núm. 7 de la *Lista de problemas simples de ejemplificación.* El resto de la sesión es de entrenamiento lo cual

1. Pueden diseñarse algoritmos alternativos al que utilizarán los alumnos. Ver, por ejemplo, el que figura en el apéndice III. Este algoritmo está centrado en el análisis de las restricciones que se presentan en la construcción de los grupos de símbolos y muestra dos diferencias (no fundamentales) respecto del que figura en el material del alumno: Considera las combinaciones con repetición como problemas simples, y las permutaciones con repetición como problemas compuestos. Éste parece ser el análisis más lógico. Las razones para hacerlo al revés son de tipo «didáctico»: no es fácil encontrar problemas sencillos y «naturales» en los que aparezcan las CR, pero sí lo es para las PR.

significa que los alumnos, individualmente, ponen en práctica el método de resolución ejemplificado resolviendo problemas simples directos (de la *Lista de problemas simples (II)*) y problemas simples inversos (de la *Lista de problemas simples inversos*).

d) Las sesiones quinta, sexta y séptima son mixtas (de ejemplificación y entrenamiento). A lo largo de ellas el profesor corrige los errores más comunes observados en el seguimiento de la Directriz (2) y el algoritmo de resolución al tiempo que vuelve a ejemplificarlos utilizando los problemas núms. 8 a 10 de la *Lista de problemas simples de ejemplificación*. En el tiempo restante de cada sesión, los alumnos continúan el período de entrenamiento debiendo resolver un mínimo de 12 problemas simples directos y 7 simples inversos.

3.3. Resolución de problemas compuestos descomponibles (7 sesiones)

En esta tercera fase el objetivo es más ambicioso. Se persigue, en primer lugar, que la mayoría de los alumnos utilicen adecuadamente la Directriz (2) para decidir si el problema es simple (directo o inverso) o compuesto y, en este último caso, sepan conectar con la *Directriz de problemas compuestos* para descomponer el problema en una cadena de problemas simples (si ello es posible) y acaben resolviéndolo. Pero, en segundo lugar, también se pretende que algunos alumnos (en principio los del grupo E) sean capaces de reconocer los problemas compuestos no descomponibles y elaborar una estrategia de resolución adecuada a cada caso. Esta estrategia suele apoyarse en la *Directriz de problemas compuestos* por cuanto que, normalmente, consiste en analizar el problema en dos o más problemas compuestos descomponibles.

A continuación sugerimos una posible distribución por sesiones:

a) La primera sesión se dedica a resolver con todo detalle, razonando en voz alta, los problemas núms. 1 y 2 de la *Lista de ejemplificación de problemas compuestos*, remarcando los criterios por los que se decide que el problema es compuesto y las reglas heurísticas que constituyen la *Directriz de problemas compuestos* y que se aplican a continuación. Para ello debe seguir los correspondientes *Guiones de resolución* que figuran en el apéndice II.

b) El resto de las sesiones son mixtas (de ejemplificación y entrenamiento). En cada una de ellas el profesor empieza corrigiendo los errores más comúnmente observados en el seguimiento de las directrices o bien ejemplifica la forma genuina de emplearlas resolviendo uno de los problemas de la *Lista de ejemplificación de problemas compuestos* (núms. 2 al 6). Durante el tiempo restante de cada sesión los alumnos continúan el período de entrenamiento.

Al final de cada sesión de entrenamiento (tanto de esta fase como de las dos restantes) puede ser útil que el profesor recoja los problemas resueltos por los alumnos durante la sesión y los devuelva corregidos al principio de la siguiente sesión con una nota que remita, en caso de un problema mal resuelto, al punto de la Directriz correspondiente que el alumno haya descuidado. En todo caso, las indicaciones del profesor (tanto escritas como orales) no deben sobrepasar nunca el grado de concreción de las sugerencias que figuran en los correspondientes «*Guiones de resolución*».

4. *EVALUACIÓN INTERNA*

Se concreta en dos pruebas; una de problemas simples, directos e inversos, que se realiza al finalizar la segunda fase de la instrucción y otra de problemas de contar en general que se pasa al final de la instrucción.

La primera prueba pretende medir el grado en que el alumno domina un sistema de procedimientos ciertamente acotado, pero no algorítmico. En efecto, la comprensión del enunciado necesaria para expresar mediante un grupo de símbolos cada uno de los objetos que queremos contar, así como la resolución de un problema inverso, involucran procedimientos heurísticos (en el sentido de no algorítmicos).

Con la prueba de problemas de contar se intenta cuantificar el grado en que el alumno ha adquirido el método general de resolución de problemas de contar.

4.1. Prueba de problemas simples

— Un modelo de esta prueba figura en el apéndice IV.
— Duración aproximada: 55 minutos.
— Puntuación de cada problema:

Confusiones de tipo conceptual (confundir variaciones por combinaciones o los significados de «m» y «n», etc.)	0 puntos
Errores debidos a una mala aplicación de la fórmula o similares	2 »
Errores de cálculo no estructurales	3 »
Problema correcto	4 »
— Puntuación máxima de la prueba	20 »

4.2. Prueba de problemas de contar

— Un modelo de esta prueba figura en el apéndice V.
— Duración aproximada: 55 minutos.
— Puntuación máxima de cada problema:

Problema núm. 1 (compuesto)	5 puntos
Problema núm. 2 (simple directo)	2 »
Problema núm. 3 (compuesto)	5 »
Problema núm. 4 (simple inverso)	3 »
Problema núm. 5 (compuesto)	5 »
— Puntuación máxima de la prueba	20 »

— Puntuación: Los problemas simples se puntúan como en 4.1. En los problemas compuestos deben valorarse especialmente los intentos de elaboración de un plan de resolución.
— Se ha realizado un esfuerzo para que el «*significado del problema*» no indique, ni de forma indirecta (por analogía con un problema de entrenamiento) la «*estructura*» del mismo. Este principio debe mantenerse en cualquier versión nueva que se elabore de estas pruebas.
— La *variable criterio* en el modelo de predicción de la Didáctica de problemas de contar se define así: GLPC = Global de Problemas de Contar = Prueba de P. Simples + Prueba de P. de Contar. Su *valor máximo* es, pues, de 40 puntos.

APÉNDICE I

LISTA DE PROBLEMAS SIMPLES DE EJEMPLIFICACIÓN

1. ¿Cuántas quinielas pueden hacerse? (Se consideran solamente columnas de catorce partidos y apuestas sencillas.)
2. Averiguar de cuántas maneras pueden sentarse:

   A) Cinco personas en: *a*) Tres asientos en fila.
   b) Cinco asientos en fila.
   c) Cinco asientos en círculo.

   B) Tres personas en cinco asientos en fila.

3. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 premios iguales entre 5 personas, de forma que a cada una de ellas le toque un premio como máximo?
4. Averiguar cuántos números de 6 cifras es posible escribir de forma que, en cada uno de ellos, figuren exactamente 2 unos, 3 doses y 1 tres.
5. En una reunión hay 8 amigos. ¿Cuántos grupos de 3 amigos pueden conversar?
6. ¿Cuántos brazaletes (con cierre) se pueden confeccionar utilizando, en cada uno de ellos, exactamente 1 perla, 3 rubíes, 4 topacios y 2 diamantes?
7. ¿Cuántos lados tiene un polígono de 35 diagonales?
8. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden escribir con las cifras 0, 1, 3, 5, 7, 8 y 9? (No cuentan los que empiezan por cero.) ¿Cuántos de ellos terminan en 89? ¿Y cuántos de ellos son múltiplos de cuatro?
9. Se quiere construir un código secreto utilizando unos cuantos símbolos, de forma que sea posible escribir 40.320 palabras de modo que aparezcan todos los símbolos en cada una de ellas. ¿Cuántos símbolos es necesario definir en total?
10. ¿Cuántas familias puede haber con seis hijos? (Se considera que no es lo mismo ser el mayor, con cinco hermanas pequeñas, que el menor, con cinco hermanas mayores).

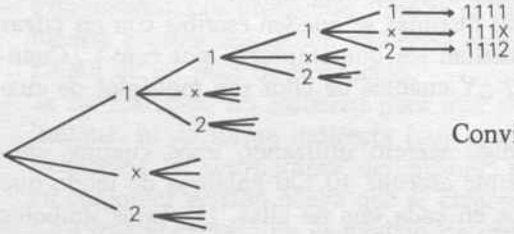
GUIONES DE RESOLUCIÓN (I)
(PROBLEMAS SIMPLES)

Ejemplo 1

(N.º 1 de la lista de problemas simples de ejemplificación)

Los números del principio se refieren a las preguntas que figuran en la Directriz (1) y que deben hacerse en voz alta.

1. Deben contarse «columnas de 14 resultados» (con apuestas sencillas, es decir, un solo resultado por partido).
7. Como que 14 es bastante elevado, reduciremos el problema considerando sólo 4 partidos.
2. Por ejemplo, «el primer partido acaba en empate», «el segundo, con victoria local», «el tercero, con victoria visitante» y «el cuarto con victoria local».
   Otro «objeto» a contar: «el primer partido, victoria local», «el 2.º, empate», «el tercero y el cuarto con victoria visitante».
   Un tercer caso: «el primer partido, con victoria local», «el resto, con empate».
3. De acuerdo con la simbología habitual, tendríamos: x121, 1x22, 1xxx.
4. Los símbolos que utilizamos son: 1, x, 2.
5. Por ejemplo, 1112, xxxx: representan, respectivamente, «los tres primeros partidos terminan con victoria local, y el cuarto con victoria visitante», y «los cuatro partidos terminan en empate».
6. Construcción del árbol:



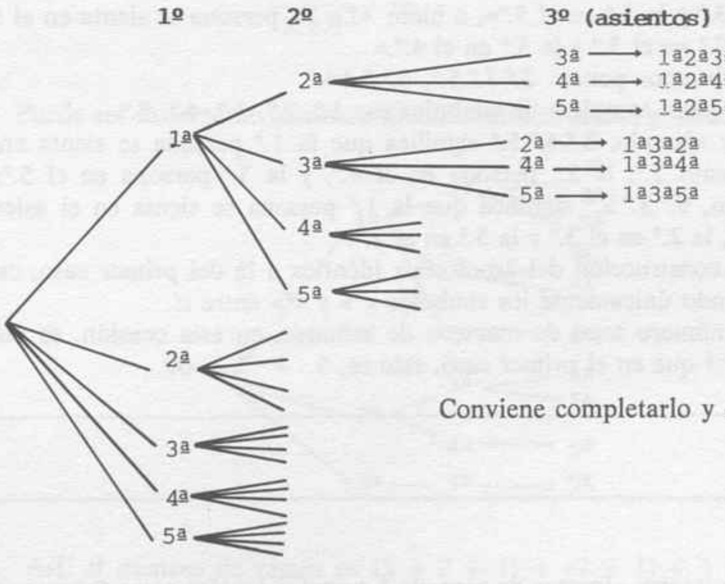
Conviene completarlo y comentarlo.

Número total de ramas: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$. Así, en nuestro caso, tenemos 3^{14} «quinielas».

Ejemplo 2

A)*a*) 1. Deben contarse «maneras de sentarse 5 personas en 3 asientos en fila».

2. Por ejemplo: «La 1.ª persona se sienta en el primer asiento, la 2.ª en el segundo y la tercera en el tercero»; o bien: «La 5.ª persona en el 1.º, la 4.ª en el 2.º y la 1.ª en el 3.º»; un tercer «objeto» a contar: «La 4.ª persona en el 1.º, la 3.ª en el 2.º y la 2.ª en el 3.º.»
3. Podríamos poner: 1.ª 2.ª 3.ª, 5.ª 4.ª 1.ª, 4.ª 3.ª 2.ª.
4. La lista completa de símbolos es: 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª y 5.ª.
5. Por ejemplo: 2.ª 3.ª 4.ª, o bien 5.ª 4.ª 3.ª significan, respectivamente, qué personas se colocan en los asientos 1.º, 2.º y 3.º (respectivamente).
6. Construcción del árbol:



Conviene completarlo y comentarlo.

Número total de ramas: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ «maneras de sentarse 5 personas en 3 asientos en fila».

El caso 2 A) *b*) es análogo y no lo comentamos. Asimismo, el caso 2 A) *c*) no lo detallamos, basta observar que, al estar los asientos en círculo, se sobreentiende que no hay una referencia fija, por lo que «si todos se mueven un lugar a la derecha», por ejemplo, no tenemos una nueva manera, por lo que habrá que dividir por 5 el resultado del caso 2 A) *b*).

B) Si bien, desde el punto de vista numérico, este caso es idéntico al caso 2 A) *a*), conviene detenerse brevemente en la descripción simbólica de la situación. Tenemos:

1. Debemos contar «maneras de sentarse 3 personas en una fila de 5 asientos».
2. Por ejemplo: «La 1.ª persona se sienta en el asiento 2.º, la 2.ª en el 3.º y la 3.ª en el 5.º», o bien: «La 1.ª persona se sienta en el 5.º, la 2.ª en el 3.º y la 3.ª en el 4.º.»
3. Podríamos poner: 2.º 3.º 5.º, 5.º 3.º 4.º.
4. La Lista completa de símbolos es: 1.º, 2.º, 3.º, 4.º, 5.º.
5. Por ejemplo, 3.º 4.º 5.º significa que la 1.ª persona se sienta en el asiento 3.º, la 2.ª persona en el 4.º, y la 3.ª persona en el 5.º; o bien, 5.º 3.º 2.º significa que la 1.ª persona se sienta en el asiento 5.º, la 2.ª en el 3.º y la 3.ª en el 2.º.
6. La construcción del árbol sería idéntica a la del primer caso, cambiando únicamente los símbolos «º» y «ª» entre sí.
   El número total de maneras de sentarse, en esta ocasión, es pues, igual que en el primer caso, esto es, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

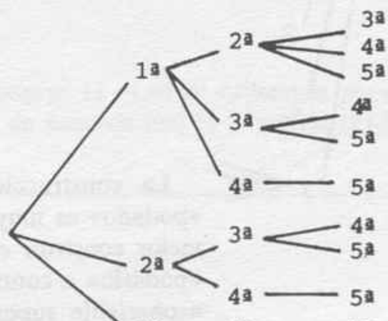
Ejemplo 3

1. Deben contarse «formas de repartir 3 premios iguales entre 5 personas».
2. Por ejemplo: «La 1.ª persona, la 3.ª y la 4.ª reciben el premio», o bien: «Los premios iguales los reciben las personas 2.ª, 4.ª y 5.ª»; un tercer ejemplo: «Reciben premio las personas 1.ª, 2.ª y 4.ª.»
3. Podríamos poner: 1.ª 3.ª 4.ª, 2.ª 4.ª 5.ª, 1.ª 2.ª 4.ª.
4. Los símbolos que utilizamos son: 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª.

5. Por ejemplo, 2.ª 3.ª 4.ª significa que han recibido premio las personas 2.ª, 3.ª y 4.ª; y 1.ª 4.ª 5.ª significa que el premio lo han recibido las personas 1.ª, 4.ª y 5.ª.
6. Construcción del árbol: En principio se construye el árbol del problema 2 A) *a*). Ahora bien, de acuerdo con las indicaciones de la Directriz (1) (6 B)), hay que «podar» el árbol, puesto que algunas ramas representan el mismo «objeto»: 1.ª 2.ª 3.ª y 3.ª 2.ª 1.ª indican que las personas que han recibido el premio son las «tres primeras».
   Por consiguiente habrá que dividir el número de ramas (= 60, según se ha visto ya) por las «maneras de colocarse tres personas en una fila con tres lugares»; este número es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, por analogía con el ejemplo 2 A) *b*).
   Así pues, el número de «formas de repartir los tres premios iguales entre las 5 personas» es:

$$\frac{60}{3.2.1} = 10.$$

Puede ser interesante construir directamente el «árbol podado», es decir:

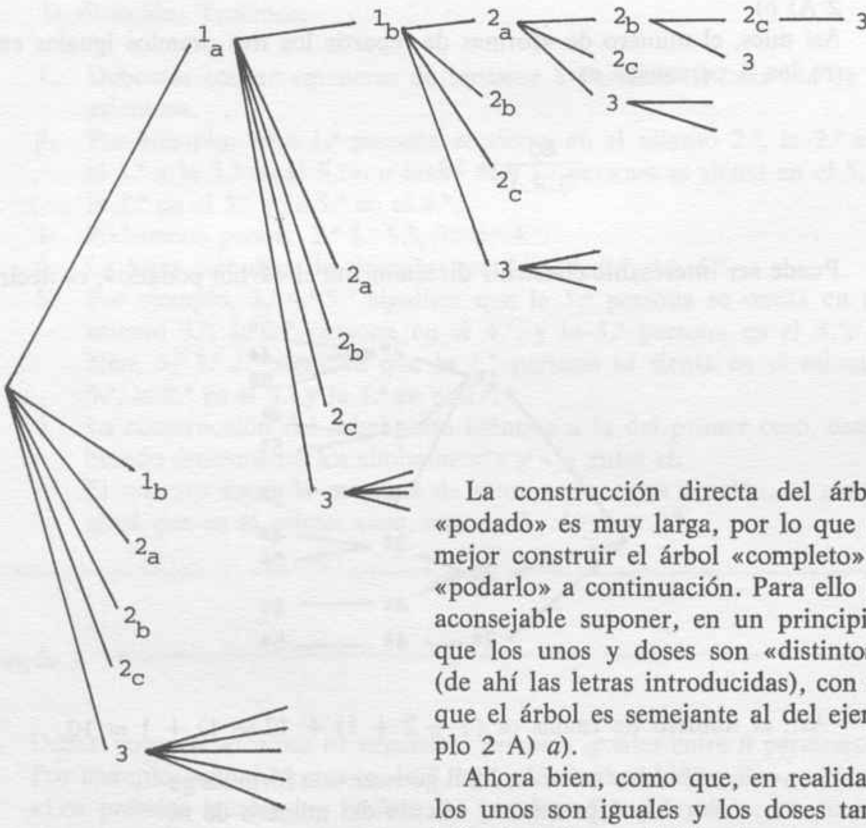


Así, el número de ramas es $(3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 10$.

Si bien así no es fácil generar una fórmula general que permita el cálculo del número de ramas, con esta distribución es fácil construir todas las agrupaciones.

Ejemplo 4

1. Hay que contar números de 6 cifras formados con 2 unos 3 doses y 1 tres.
2. En este caso, se puede pasar directamente a la descripción simbólica:
3. O sea: 322211, 113222, 123221.
4. Los símbolos que utilizamos son las cifras 1, 2 y 3.
   Podemos pasar directamente a construir el árbol:
6. Tenemos:



La construcción directa del árbol «podado» es muy larga, por lo que es mejor construir el árbol «completo» y «podarlo» a continuación. Para ello es aconsejable suponer, en un principio, que los unos y doses son «distintos» (de ahí las letras introducidas), con lo que el árbol es semejante al del ejemplo 2 A) *a*).

Ahora bien, como que, en realidad, los unos son iguales y los doses también, habrá que dividir el número de ramas del árbol por $3 \cdot 2 \cdot 1$ y por $2 \cdot 1$, por analogía con el ejemplo 3.

Tenemos pues:

$$\frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1\ .\ 2.1} = \frac{6.5.4}{2.1} = 60.$$

Los ejemplos 5 y 6 se resuelven de manera análoga a como hemos desarrollado los ejemplos anteriores y no los detallamos aquí. Se han elegido de los tipos «combinaciones» y «permutaciones con repetición», respectivamente, puesto que son los que tienen más dificultad, a causa de que hay que «podar» el árbol (las soluciones son

8.7 = 56, y 10.9.8.7.6.5/3.2.1.2.1 = 12.600).

Estos mismos ejemplos (1 — 6) se utilizarán para introducir los conceptos de combinatoria, de acuerdo con la Directriz (2) (véase el apartado 3.2).

APÉNDICE II

LISTA DE EJEMPLIFICACIÓN DE PROBLEMAS COMPUESTOS

1. En una unidad militar hay 10 capitanes, 20 tenientes, 30 sargentos y 60 cabos. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un grupo de 2 capitanes, 5 tenientes, 10 sargentos y 20 cabos?
2. A) Si se hacen todas las quinielas posibles, ¿cuántos «treces» y cuántos «doces» habrá?

   B) ¿Cuántas quinielas hay con 8 variantes exactamente?
3. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 cartas entre dos jugadores, de forma que cada uno de ellos reciba exactamente 4 cartas?
4. Con las letras V W X Y Z A E I O, averiguar el número de palabras de cinco letras (iguales o no) que se pueden formar, de manera que haya, exactamente, dos letras «W».

   ¿Y cuántas poseen, exactamente, una letra «X» y una letra «I»?
5. ¿De cuántas maneras es posible alinear 10 de las doce cartas de un palo de una baraja española, con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras, y que, además, éstas se consideren equivalentes?
6. Averiguar el número de maneras de repartir 8 pelotas de tenis iguales entre cinco muchachos, de forma que todos reciban, al menos, una pelota.

Nota: Este último problema es compuesto, pero es de un tipo que no está contemplado en la Directriz de problemas compuestos, dado que consideramos que entraña una complejidad suplementaria que desaconseja su tratamiento *para todos los alumnos*; así, se reservan este tipo de problemas compuestos (en los que hay que distinguir diversos casos disjuntos y estudiarlos por separado), para los alumnos del grupo E.

GUIONES DE RESOLUCIÓN (II) (PROBLEMAS COMPUESTOS)

Se omitirán, para simplificar los guiones, algunos puntos de la Directriz (2), si bien en clase puede ser necesario detallarlos.

Ejemplo 1

Utilizaremos los símbolos $C_1, \ldots, C_{10}$; $T_1, \ldots, T_{20}$; $S_1, \ldots, S_{30}$; $B_1, \ldots, B_{60}$.
Los siguientes *grupos de símbolos* representan algunos de los objetos a contar:

$C_2C_5\ T_1T_3T_6T_7T_9\ S_1 \ldots S_{10}\ B_1 \ldots B_{20}$
$C_3C_9\ T_1 \ldots T_5\ S_2 \ldots S_{11}\ B_2 \ldots B_{21}$
...
...

Se trata de un problema compuesto, puesto que no pudiendo repetirse símbolos, *no son admisibles* todos los grupos de símbolos (debe haber, concretamente 2 capitanes, 5 tenientes, etc.). Estamos, pues, en el *caso 2.º* (ver Directriz de Problemas Compuestos).

1. Consideremos el *subgrupo homogéneo* constituido por 2 capitanes.
2. Los símbolos que pueden representar el subgrupo escogido tienen una *única posición fija dentro del grupo* (no importa el lugar que ocupen, se tratará del mismo subgrupo de 2 capitanes elegido).
3. Para simplificar, consideramos que ocupan las dos primeras posiciones; éstas pueden rellenarse de $\binom{10}{2}$ maneras distintas (hágase mediante el algoritmo).
4. Fijado uno de los subgrupos homogéneos en la posición que hemos considerado, por ejemplo, sea C_2C_5 ...., el número de maneras de rellenar las casillas dejadas en blanco es, a su vez, un problema compuesto. Reiterando el proceso anterior, se obtiene el valor de dicho número, que es igual a $\binom{20}{5} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{60}{20} = K$.
5. Por lo tanto, el número de selecciones con las condiciones requeridas vale $\binom{10}{2} \cdot K$.

Ejemplo 2 A)

No detallamos el número de «treces» porque es inmediato ($2 \times 14 = 28$).

Habrá tantos «doces» como maneras de fallar 2 partidos; pongamos A para simbolizar el acierto y F_1, F_2 para indicar los fallos (si el resultado correcto era un «1», puede haberse puesto una «x» o un «2», es decir, hay *dos* formas de fallar un partido).

Los siguientes *grupos de símbolos* representan algunos de los objetos a contar:

AAAAAAAAAAAAF_1F_2
AAAAAF_1F_2AAAAAAA
AAAF_1AAAAAAAAAF_1
...

Se trata de un problema compuesto, puesto que pudiéndose repetir algún símbolo dentro de un grupo, la repetición ni es libre ni idéntica en todos los grupos. Estamos, por lo tanto, en el *caso 1.º* (ver Directriz de Problemas Compuestos).

1. Consideremos el *subgrupo* homogéneo formado por los dos partidos fallados.
2. Las *posiciones* que puede ocupar el *subgrupo* escogido *dentro del grupo* pueden ser: partidos 1.º y 2.º, partidos 2.º y 4.º, etc. En total hay (hágase mediante el algoritmo) $\binom{14}{2}$ maneras posibles.
3. Consideremos la posición determinada, por ejemplo, por las dos primeras casillas (los dos primeros partidos). Dichas casillas se pueden rellenar de $VR_{2,2} = 2^2 = 4$ maneras distintas (hágase mediante el algoritmo).
4. Fijado un subgrupo homogéneo en la posición considerada, por ejemplo: F_1F_1......, sólo hay una manera de rellenar las casillas dejadas en blanco (colocando en ellas las 12 «A»).
5. Así, el número de «doces» es igual a $\binom{14}{2} \cdot 4 = 7 \cdot 13 \cdot 4 = 364.$

Ejemplo 2 B)

Equivale a contar cuántas quinielas hay con 6 «unos» exactamente. Los siguientes *grupos de símbolos* representan algunos de los objetos a contar:

111111x2x2x2xx 111111xx2222x2 xxxx222x111111 2xxx22xx111111	Se trata de un problema compuesto, al igual que el ejemplo 2), o sea, del *primer caso* (ver Directriz de Problemas Compuestos).

1. Consideremos ahora el *subgrupo homogéneo* formado por los partidos pronosticados con un «1».
2. Las *posiciones* que pueden ocupar los símbolos del subgrupo homogéneo *dentro del grupo* pueden ser: los seis primeros partidos, los seis últimos, etc. En total, pues, $\binom{14}{6}$ posiciones (hágase mediante el algoritmo).
3. Dada una posición determinada, por ejemplo las seis primeras casillas, hay *una única manera* de rellenarlas (poniendo los seis unos).
4. Consideremos, por ejemplo en la posición anteriormente determinada, un *subgrupo homogéneo* fijado:

Las casillas dejadas en blanco pueden rellenarse de (hágase mediante el algoritmo) $VR_{2,8} = 2^8 = 128$ maneras distintas.

5. Por lo tanto, el número de quinielas con 8 variantes exactamente es igual a $\binom{14}{6} \cdot 128$.

Ejemplo 3

Si ponemos $C_1, C_2, \ldots, C_{12}$, para indicar las cartas, los siguientes *grupos de símbolos* representan algunos de los objetos a contar, si sobreentendemos que las cuatro primeras cartas son las que recibe el primer jugador, y las cuatro últimas las que recibe el segundo:

$C_1C_2C_3C_4$; $C_5C_6C_7C_8$
$C_2C_4C_6C_8$; $C_1C_3C_5C_7$
$C_2C_6C_4C_3$; $C_5C_1C_{12}C_8$
...

Se trata de un problema compuesto, ya que, no pudiéndose repetir símbolos, y siendo admisibles todos los grupos de símbolos, el orden importa según sea el par de símbolos que se elija (si son cartas del mismo jugador no importa, pero si son una del primero y la otra del segundo, entonces sí que importa el orden). Estamos, pues, en el 3.^er^ *caso* (ver Directriz de Problemas Compuestos).

1. Consideremos el *subgrupo homogéneo* formado por el conjunto de cartas que recibe, por ejemplo, el primer jugador. (Obsérvese que, en dicho *subgrupo*, no se presenta el problema de que el orden dependa del par de símbolos escogido.)
2. Los símbolos que determinen uno de tales *subgrupos* deben ocupar, forzosamente, *una posición única* dentro del grupo: los cuatro primeros lugares.
3. Para la única posición posible, hay $\binom{12}{4}$ maneras distintas de ocupar las correspondientes casillas (hágase mediante el algoritmo).
4. Fijado un subgrupo homogéneo en la posición considerada, por ejemplo, $C_1C_2C_{11}C_{12}$ $\underline{\;|\;|\;|\;|\;}$, las casillas dejadas en blanco pueden rellenarse de $\binom{8}{4}$ maneras (hágase mediante el algoritmo).
5. En total, pues, hay $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$ maneras posibles de distribuir las cartas entre ambos jugadores.

Observación: Con una resimbolización adecuada, este problema (como todos los de repartición simple) puede considerarse simple, ya que se puede interpretar como permutaciones con repetición.

Ejemplo 4

Los siguientes *grupos de símbolos* representan algunos de los objetos a contar:

A Z A W W A V O W W W X A X W W Z Y Y W	Se trata de un problema compuesto, puesto que, pudiéndose repetir símbolos, la repetición no es libre ni idéntica en todos los grupos; estamos, pues, en el *primer caso* (ver Directriz de Problemas Compuestos).

1. Consideremos el *subgrupo homogéneo* formado por las dos letras «W».
2. Las *posiciones* que pueden ocupar los símbolos del *subgrupo* considerado son: 1.ª y 2.ª letras, 1.ª y 3.ª letras, 4.ª y 5.ª, etc. En total, pues, $\binom{5}{2} = 10$ posiciones.
3. Para una posición determinada de las dos «W» *dentro del grupo*, por ejemplo, en los dos primeros lugares, hay *una sola manera* de rellenar las correspondientes casillas (poniendo las dos «W»).
4. Fijado el subgrupo considerado en una posición determinada, por ejemplo, $\underline{|W|W|\;|\;|\;|}$, *las casillas dejadas en blanco* pueden rellenarse de $VR_{8,3} = 8^3 = 512$ maneras (hágase mediante el algoritmo).
5. Así, pues, el número de palabras con las condiciones requeridas es igual a $10 \times 512 = 5.120$.

La segunda parte es análoga y no la detallamos totalmente; sólo indicaremos, brevemente, los puntos más destacados:

1. *Subgrupo homogéneo*: el formado por las letras «X» e «I».
2. Las *posiciones* son las mismas que en la primera parte: $C_{5,2} = 10$.
3. Para una posición determinada de los símbolos del *subgrupo homogéneo dentro del grupo*, por ejemplo, en los primeros lugares, hay 2 formas de rellenar las correspondientes casillas (si se prefiere, $P_2 = 2!$).
4. Las *casillas dejadas en blanco*, una vez fijado un subgrupo en una posición determinada, por ejemplo, $\underline{|X|I|\;|\;|\;|}$, pueden rellenarse de $VR_{7,3} = 343$ maneras.
5. Así pues, el número de *palabras* pedido es igual a $10 \times 2 \times 343 = 6.860$.

Ejemplo 5

Las 12 cartas podemos representarlas con los símbolos 1,2,3,4,5,6,7,8,9,F (puesto que se consideran las tres figuras como equivalentes). Los siguientes *grupos de símbolos* representan algunos de los objetos a contar:

FFF1234567
FFF3125674
FFF9876512
13579FFF24
24681FFF57

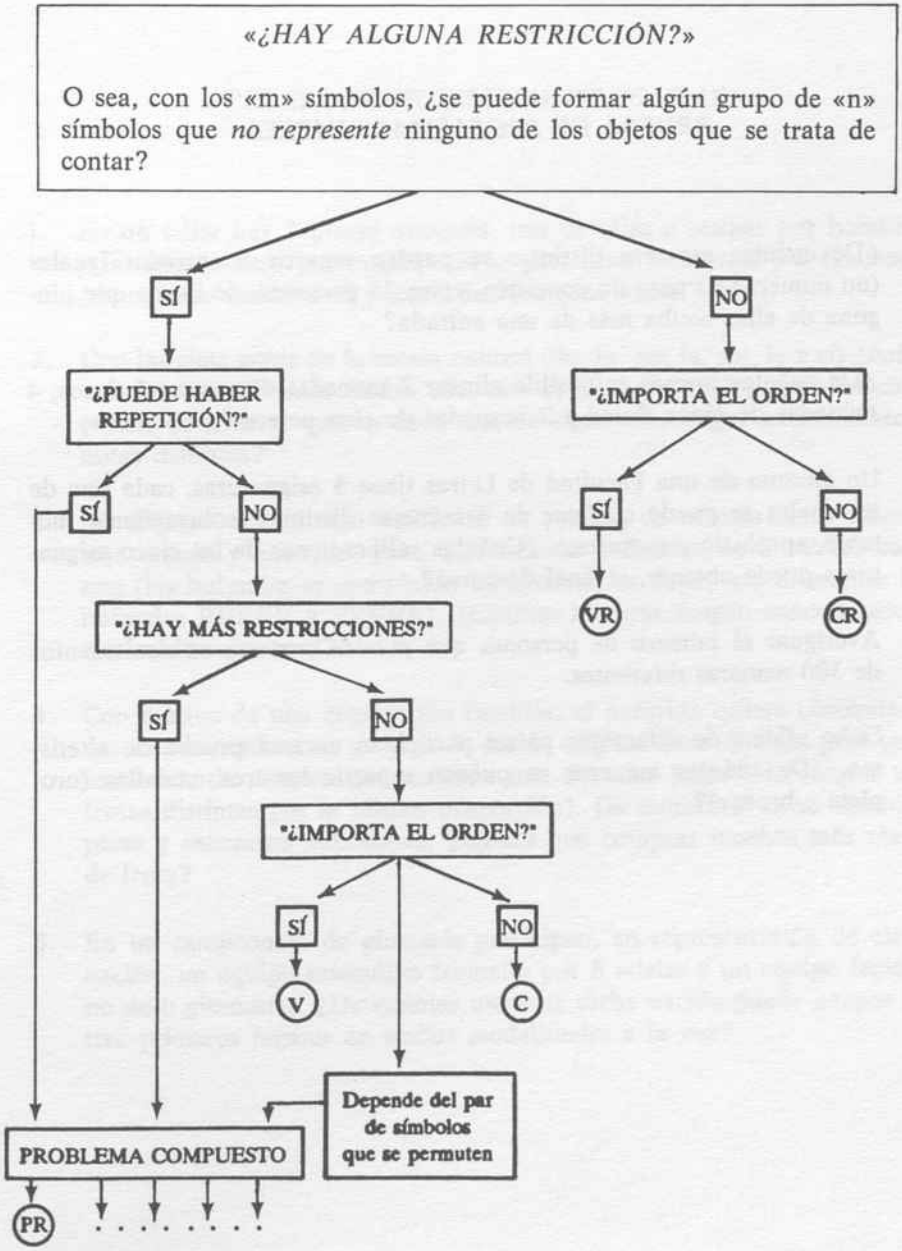
Se trata de un problema compuesto, ya que, pudiéndose repetir símbolos, la repetición no es ni libre ni idéntica en todos los grupos. Estamos, pues, en el *primer caso* (ver Directriz de Problemas Compuestos).

1. Consideremos el *subgrupo homogéneo* formado por las cartas que no son figuras (para contrastarlo con el ejemplo anterior).
2. Las *posiciones* que pueden ocupar los símbolos del *subgrupo* considerado *dentro del grupo* son: los siete primeros lugares, los siete últimos, etc.

   En total $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$ posiciones.
3. Para una determinada posición de los símbolos del *subgrupo* considerado, por ejemplo, para los 7 primeros lugares, hay $V_{9,7} = 9.8.7.6.5.4.3$ maneras de rellenas las correspondientes casillas.
4. Fijado un subgrupo en una determinada posición, por ejemplo.

   1234567 $\underline{\ |\ |\ |\ }$, las casillas *dejadas en blanco* pueden rellenarse de *una sola manera* (poniendo las tres «F», que simbolizan las 3 figuras).
5. Así, el número de maneras de alinear las cartas de la forma requerida es igual a $120 \times V_{9,7}$.

APÉNDICE III



APÉNDICE IV

PRUEBA DE PROBLEMAS SIMPLES

1. ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir 5 entradas iguales (no numeradas) para un concierto, entre 35 personas, de forma que ninguna de ellas reciba más de una entrada?

2. ¿De cuántas formas es posible alinear 3 monedas de peseta, 3 duros, 4 monedas de cinco duros y 2 monedas de cien pesetas?

3. Un alumno de una Facultad de Letras tiene 5 asignaturas, cada una de las cuales se puede calificar de 4 maneras distintas (sobresaliente, notable, aprobado y suspenso). ¿Cuántas calificaciones de las cinco asignaturas puede obtener, al final de curso?

4. Averiguar el número de personas que pueden sentarse en dos asientos de 380 maneras diferentes.

5. Ocho atletas de diferentes países participan en una prueba de altetismo. ¿De cuántas maneras se pueden repartir las tres medallas (oro, plata y bronce)?

APÉNDICE V

PRUEBA DE PROBLEMAS DE CONTAR

1. En un taller hay 7 plazas vacantes, tres de ellas a ocupar por hombres y las otras cuatro por mujeres. Si se presentan 5 mujeres y 7 hombres, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir las plazas?

2. Con las siete notas de la escala natural (do, re, mi, fa, sol, la y si) ¿cuántas melodías distintas (todas ellas con el mismo ritmo) se pueden componer, de manera que en cada una de ellas intervengan exactamente 5 notas distintas?

3. Se dispone del número suficiente de retales, de colores azul, blanco, rojo, verde y amarillo, para confeccionar bufandas de 5 retales cada una (las bufandas se consideran asimétricas, es decir, son diferentes las bufandas RRRRV y VRRRR). ¿Cuántas hay que tengan exactamente 2 retales de color azul?

4. Con motivo de una celebración familiar, el anfitrión quiere obsequiar a sus 120 invitados con un jugo de frutas original (uno distinto para cada invitado), de manera que en cada uno de tales jugos intervengan tres frutas distintas (en la misma proporción). De momento, tiene naranjas, peras y manzanas suficientes; ¿tendrá que comprar muchas más clases de fruta?

5. En un campeonato de gimnasia participan, en representación de cierta nación, un equipo masculino formado por 8 atletas y un equipo femenino de 6 gimnastas. ¿De cuántas maneras dicha nación puede ocupar los tres primeros lugares en ambas modalidades a la vez?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARESTA, GRUP (1985). *Memoria de final de curso.* Trabajo no publicado, figura en los archivos del ICE de la Universidad de Barcelona.
2. GASCÓN, J. (1985). *El aprendizaje de la resolución de problemas de planteo algebraico.* Enseñanza de las Ciencias, vol. 3, núm. 1, pp. 18-27.
3. GLASSER, A. J. y ZIMMERMAN, I. L. (1972). *Interpretación clínica de la Escala de Inteligencia de Wechsler para niños* (WISC). Madrid: TEA.
4. GUILFORD, J. P. (1977). *La naturaleza de la inteligencia humana.* Buenos Aires: Paidós.
5. KILPATRICK (1975). *Soviet Studies in the Psychology of learning and teaching mathematics.* Vol. XIV, Chicago: Univ. Chicago.
6. LAMARCA, J. M.ª (1982). *Detección de errores en el Cálculo Aritmético: un ensayo metodológico.* Sevilla, Actas de las II JJAEM, vol. II, páginas 549-574.
7. LAMARCA, J. M.ª (1985). *Una investigación del aprendizaje del Cálculo Aritmético.* Enseñanza de las Ciencias, vol. 3, núm. 2, pp. 121-130.
8. LANDA, L. N. (1972). *Cibernética y pedagogía.* Barcelona: Labor.
9. LANDSHEERE, Gilbert de (1985). *Diccionario de la evaluación y de la investigación educativas.* Barcelona: Oikos-Tau.
10. LURIA, A. L. y TSVETKOVA, L. S. (1981). *La resolución de problemas y sus trastornos.* Barcelona: Fontanella.
11. POLYA, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.
12. PUIG ADAM, P. (1973). *Curso de geometría métrica.* T. I, Madrid: Biblioteca Matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. ARNEDA, [illegible] (1985): [illegible] Trabajo no publicado. [illegible] de la Universidad de Barcelona.
2. [illegible] (1985): El aprendizaje de la resolución de problemas de [illegible]. [illegible] de las Ciencias, vol. 3, núm. 1, pp. [illegible]
3. [illegible], A. [illegible] y [illegible] (1972): [illegible] (1982). Madrid, [illegible]
4. [illegible] (1977): La evolución de la inteligencia humana. [illegible]
5. [illegible]
6. [illegible]
7. [illegible] (1985): [illegible] Enseñanza de las Ciencias, vol. 3, núm. 2, pp. [illegible]
8. [illegible] (1975): [illegible]
9. [illegible]
10. [illegible], A. [illegible] (1980): La resolución de problemas [illegible] Barcelona. [illegible]
11. [illegible] (1971): [illegible]
12. [illegible] (1974): [illegible]

Este volumen forma parte de la obra:

MATEMÁTICAS
Una renovación metodológica

que consta de dos tipos de materiales:

MATERIAL DEL ALUMNO

Vol. I. Cálculo Aritmético
Técnicas de Cálculo
Detección de Errores
Problemas de Cálculo Aritmético

Vol. II. Álgebra
Funciones entre números reales
Proporcionalidad y Rectas
Funciones cuadráticas y Parábolas
Polinomios
Cálculo Algebraico

Vol. III. Resolución de problemas
Problemas de Planteo
Problemas de Contar

GUÍA DEL PROFESOR

Metodología Diferenciada y Heurística
Çalculo Aritmético
Álgebra
Problemas de Planteo
Problemas de Contar