

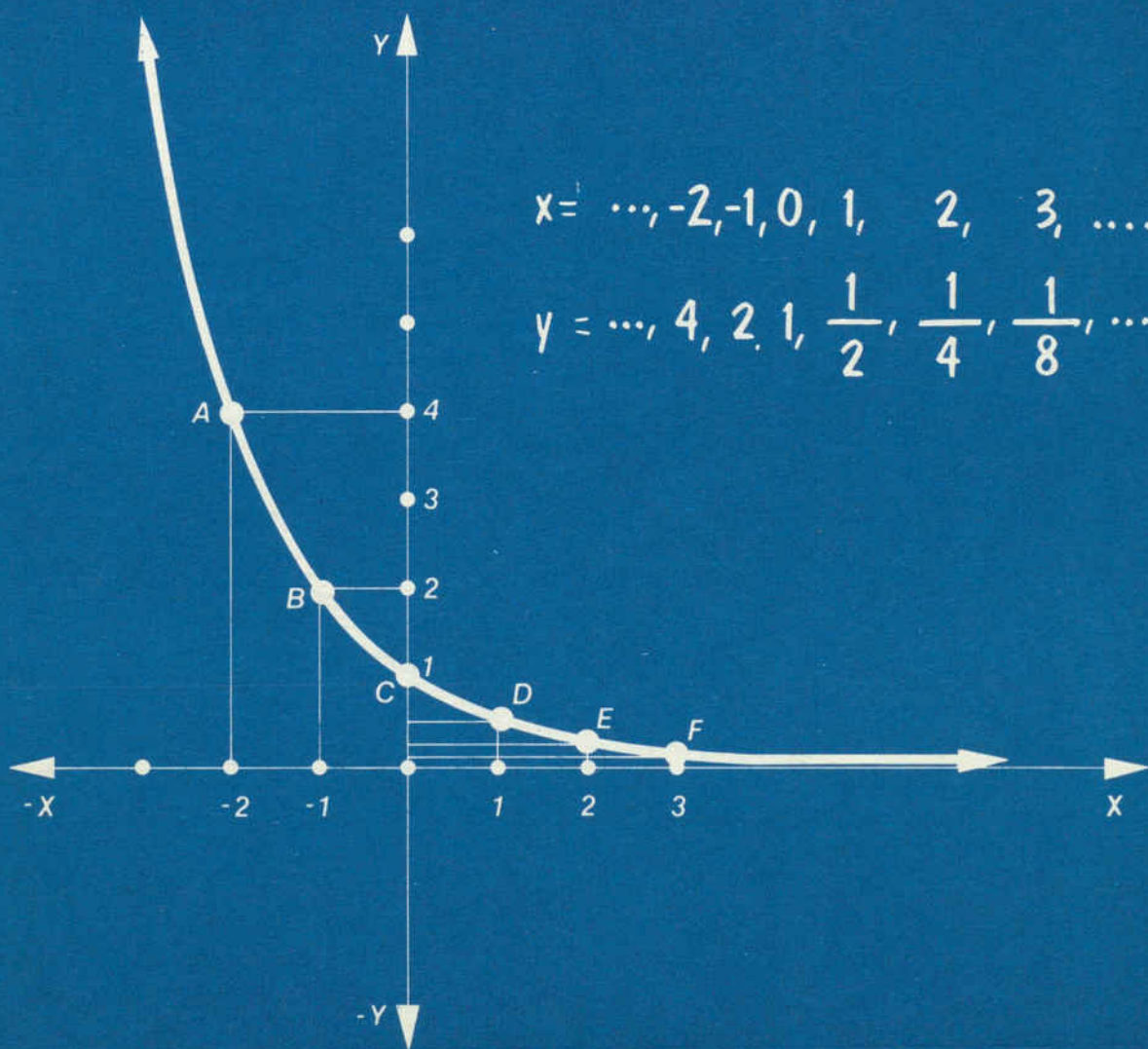


institut de ciències de l'educació
universitat de barcelona

mètodes algebraics a la topologia

Manuel Castellet

sèrie seminari · 2 ·



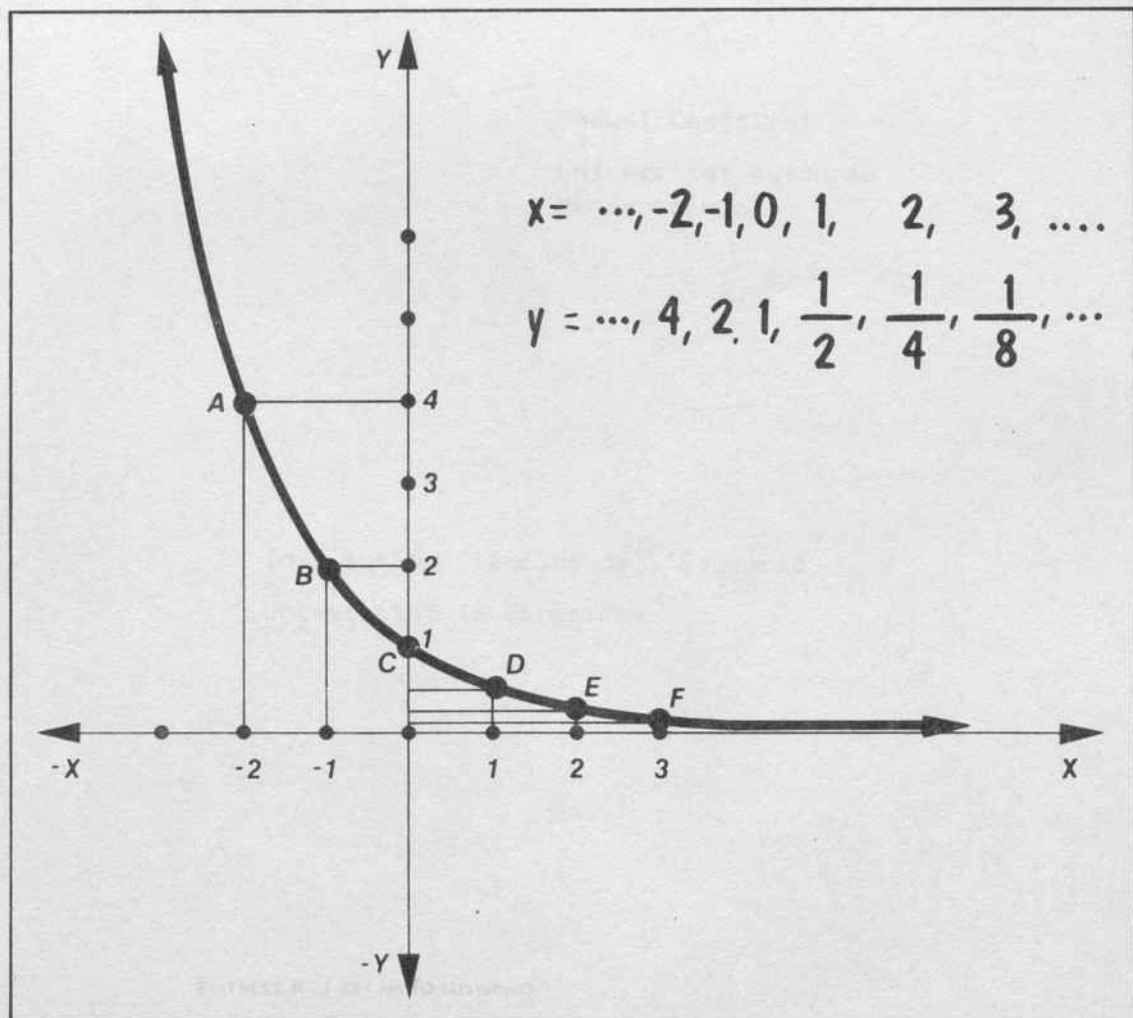


institut de ciències de l'educació
universitat de barcelona

mètodes algebraics a la topologia

Manuel Castellet

sèrie seminari · 2 ·





Publicacions de l'I.C.E.

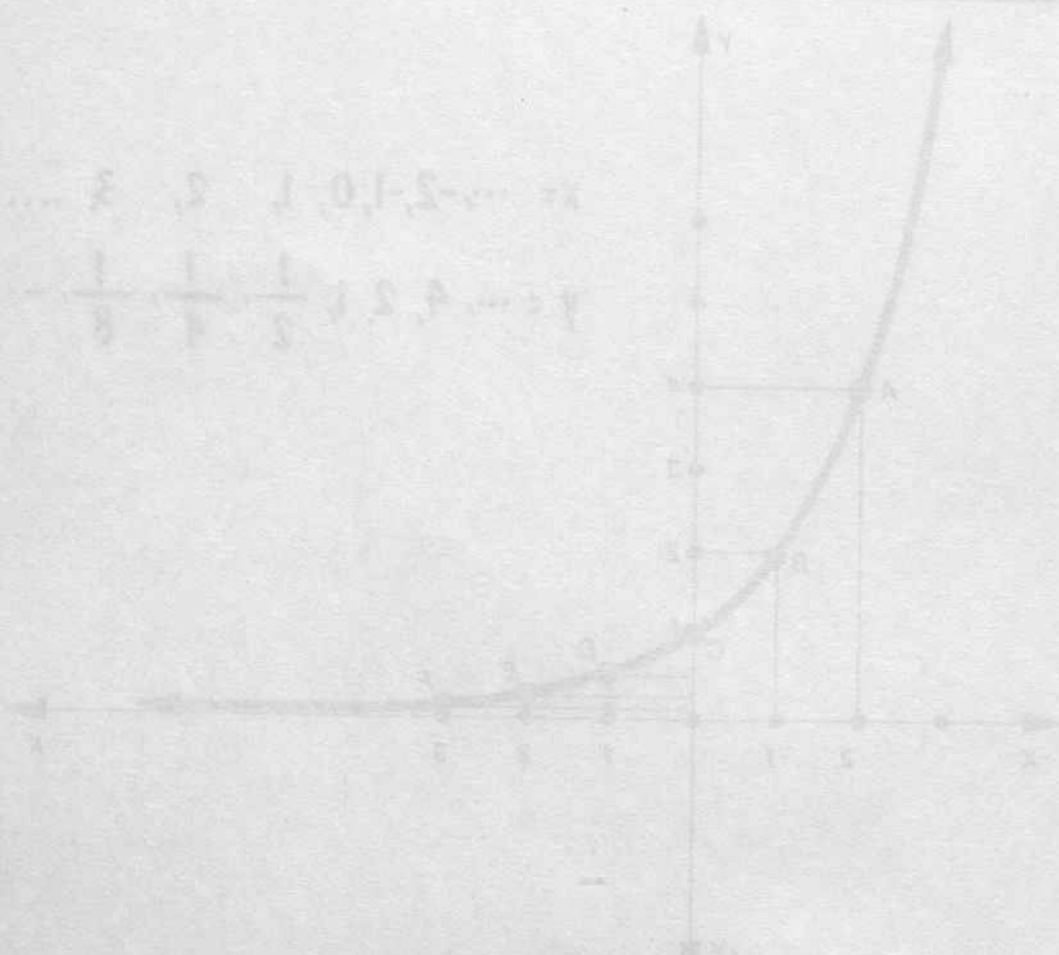
Director: Miquel Siguan Soler

mètodes algebraics a la topologia

Manuel Castell



Sèrie Seminari S



MÈTODES ALGEBRAICS A LA TOPOLOGIA

Manuel Castellet

Universitat Autònoma
de Barcelona

Institut de Ciències de l'Educació
Universitat de Barcelona

Introducció

L'objectiu visible d'aquest curset és demostrar el següent teorema: "Tot camp vectorial continu tangent a una esfera de dimensió parell, s'anul·la, al menys, en un punt".

Sota aquest enunciat s'amaguen, però, una pila de conceptes geomètrics i topològics, la consideració dels quals porta a la introducció de mètodes algebraics. És aquest l'objectiu fonamental del curset: introduir-se en els mètodes algebraics que es fan servir per a resoldre problemes topològics.

Les quatre primeres lliçons estan dedicades a problemes "2-dimensionals". L'estudi de camps vectorials sobre les esferes S^1 i S^2 porta a la consideració de camins tancats en el pla euclidià i això a la introducció del concepte d'índex d'un camí tancat al voltant d'un punt. Aquest concepte constitueix el primer invariant algebraic que estudiarem. Amb aquesta tècnica demostrarem a més del teorema abans esmentat per a l'esfera S^2 , altres resultats que fan referència a aplicacions de S^2 en sí mateix o del disc E^2 en sí mateix; per exemple, tota aplicació contínua de E^2 en sí mateix té sempre un punt fix.

Les cinc darreres lliçons estan encaminades a demostrar, en dimensions superiors, els anàlegs als teoremes 2-dimensionals ja estudiats. La consideració de

l'índex d'un camí ja no és suficient i caldrà introduir els grups d'homologia d'un subespai de l'espai euclidià R^n . Per tal de facilitar el càlcul d'aquests grups, parlarem de la successió de Mayer-Vietoris que relaciona l'homologia d'un espai amb la dels membres d'un recobriments. Aquesta successió ens permetrà calcular els grups d'homologia de les esferes així com el grau de certes aplicacions entre esferes, concepte que desenvoluparem en la darrera lliçó. La conjunció de tot lo anterior ens permetrà demostrar els teoremes desitjats.

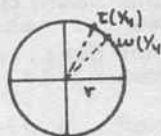
A part d'un cert hàbit matemàtic, per a poder seguir aquest curset convé estar familiaritzat amb la topologia dels espais euclidians (oberts, tancats, acotats, continuïtat...) i amb les primeres nocions d'homomorfismes entre grups abelians.

Barcelona, primavera del 1978

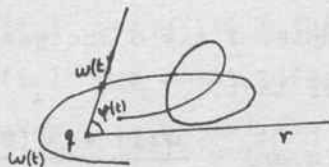
1. Índex d'un camí tancat al voltant d'un punt

Un camí a l'espai euclidià R^2 és una aplicació contínua de l'interval unitat I a R^2 : $\omega: I \rightarrow R^2$; és a dir, a cada t , $0 \leq t \leq 1$, li correspon un punt del pla $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$, de manera que ω_1 i ω_2 són funcions contínues del paràmetre t .

El punt $\omega(0)$ es diu l'origen del camí ω i $\omega(1)$ el punt final. S'ha de tenir cura de no confondre un camí amb la seva imatge $\omega(I) \subset R^2$. Per exemple, els camins $\omega: \omega(t) = (r \cos \pi t, r \sin \pi t)$ i $\tau: \tau(t) = (r(1-2t), 2r\sqrt{t(t-1)})$ són, evidentment, diferents, però llurs representacions gràfiques $\omega(I)$ i $\tau(I)$ coincideixen.



Sigui q un punt de R^2 que no pertanyi a $\omega(I)$ i sigui r una semirecta d'origen q . Per a tot punt $\omega(t)$ designem per $\varphi(t)$ l'angle format per les semirectes r i $\overline{q\omega(t)}$. $\varphi(t)$ està determinat a menys d'un múltiple de 2π . φ és una funció contínua del paràmetre t .



Considerem, ara, un camí tancat, és a dir, tal que el punt final coincideixi amb l'origen: $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb $\omega(1) = \omega(0)$. (Observis que un camí tancat es pot interpretar també com una aplicació contínua $\omega: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$). Sigui q un punt que no pertanyi a $\omega(I)$. Aleshores, la diferència $\varphi(1) - \varphi(0)$ és un múltiple de 2π , independent de l'elecció de la semirecta r , ja que al canviar de semirecta $\varphi(t)$ varia en una constant. És lícit, doncs, definir el quocient

$$u(q, \omega) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi}$$

que és un número enter que es diu l'índex del camí tancat ω al voltant del punt q .

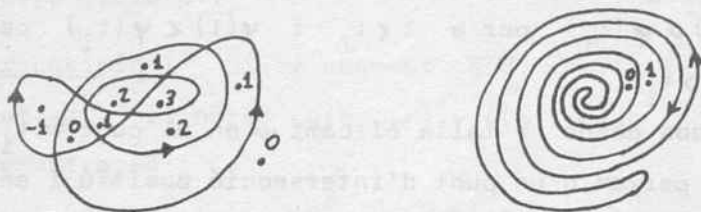
L'índex $u(q, \omega)$ és una magnitud algebraica associada a un camí tancat i a un punt, que són conceptes topològics.

Exemples

1. Sigui $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ el camí tancat donat per l'expressió $\omega(t) = e^{2\pi i t}$. $\omega(I)$ és precisament S^1 , la circumferència amb centre $q = (0,0)$. Com que $q = (0,0) \notin \omega(I)$, podem considerar l'índex $u(q, \omega)$ utilitzant com a semirecta r , per exemple, l'eix d'abscisses. Aleshores és $\varphi(t) = 2\pi n t$ i, per tant,

$$u(q, \omega) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = n$$

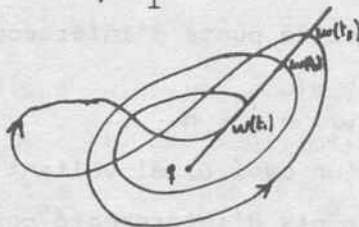
2. A les figures següents estan indicats els índexs de diferents punts respecte als camins dibuixats.



Anem a veure, ara, un mètode per a calcular l'índex d'un camí w al voltant d'un punt q .

Agafem com a semirecta r una semirecta amb origen q que talli a $w(I)$ en un nombre finit de punts (hi pot haver semirectes que tallin en una infinitat de punts).

Siguin $0 \neq t_1 < t_2 < \dots < t_n \neq 1$ els paràmetres tals que $w(t) \in r$. Per a cada t_i existeix, doncs, un $\varepsilon > 0$, tal que, per a tot $t \neq t_i$ amb $|t_i - t| < \varepsilon$, $w(t) \notin r$, i per tant $\varphi(t) \neq \varphi(t_i)$. Podem distingir quatre casos:



$w(t_1)$ és del cas 2
 $w(t_2)$ i $w(t_3)$ són del cas 3
 hi ha 2 punts d'intersecció
 positius i cap de negatiu;
 per tant $u(q, w) = 2$

Cas 1: $\varphi(t) < \varphi(t_i)$ per a tot t tal que $|t - t_i| < \varepsilon$.

Cas 2: $\varphi(t) > \varphi(t_i)$ per a tot t tal que $|t - t_i| < \varepsilon$.

En aquests dos casos, r no talla a $w(I)$ en el punt $w(t_i)$.

Cas 3: $\varphi(t) < \varphi(t_i)$ per a $t < t_i$ i $\varphi(t) > \varphi(t_i)$ per a $t > t_i$.

Cas 4: $\varphi(t) > \varphi(t_i)$ per a $t < t_i$ i $\varphi(t) < \varphi(t_i)$ per a $t > t_i$.

En aquests dos casos r talla el camí ω en el punt $\omega(t_i)$. En el cas 3 parlem d'un punt d'intersecció positiu i en el cas 4 d'un punt d'intersecció negatiu.

Si designem per $\psi(t) = [\varphi(t)/2\pi]$ la part entera de $\varphi(t)/2\pi$, $\psi(t_i) = \varphi(t_i)$, però quan passem d'un $t < t_i$ a un $t > t_i$ (sempre amb $|t - t_i| < \varepsilon$), $\psi(t)$ augmenta una unitat en el cas 3, en disminueix una en el cas 4 i no varia en els altres casos. Ara bé

$$\psi(1) - \psi(0) = [\varphi(1)/2\pi] - [\varphi(0)/2\pi] = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = u(q, \omega)$$

ja que $\varphi(0)/2\pi - [\varphi(0)/2\pi] = \varphi(1)/2\pi - [\varphi(1)/2\pi]$.

Per tant, si m indica el nombre de punts d'intersecció positius i n el de punts d'intersecció negatius, es té

$$u(q, \omega) = m - n.$$

Així, doncs, l'índex d'un camí ω al voltant d'un punt q és igual al nombre de punts d'intersecció positius menys el nombre de punts d'intersecció negatius de ω amb una semirecta r .

Les dues proposicions següents donen condicions per tal que els índexs d'un camí al voltant d'un punt no de-

penguin del punt (proposició 1) o no depenguin del camí (proposició 2).

Proposició 1 Si el segment $\overline{q_1 q_2}$ no talla el camí tancat ω , aleshores $u(q_1, \omega) = u(q_2, \omega)$.

Demostració:

Sigui $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camí tancat i q_1, q_2 dos punts que no pertanyin a $\omega(I)$. Siguin φ_1, φ_2 funcions angles respecte a q_1 i q_2 . Aleshores, la funció

$$\delta(t) = \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{\pi}$$

és contínua per a tot t , i es té

$$\begin{aligned} \delta(1) - \delta(0) &= \frac{\varphi_1(1) - \varphi_2(1)}{\pi} - \frac{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)}{\pi} = \\ &= 2 \left(\frac{\varphi_1(1) - \varphi_1(0)}{2\pi} - \frac{\varphi_2(1) - \varphi_2(0)}{2\pi} \right) = \\ &= 2(u(q_1, \omega) - u(q_2, \omega)). \end{aligned}$$

Suposem que $u(q_1, \omega) \neq u(q_2, \omega)$; aleshores es té $|\delta(1) - \delta(0)| > 2$ i, per tant, pel teorema de Bolzano*, existeix un $t_0 \in I$ tal que $\delta(t_0)$ és senar, és a dir

$$\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) = n\pi \quad \text{amb } n \text{ senar.}$$

Bernhard Bolzano, nascut el 5.10.1781 a Praga. Matemàtic i filòsof. Capellà el 1805 i professor a Praga el 1819. Expulsat per preteses heretgies. Contrari a Kant. Treballs matemàtics en el camp de les funcions reals. Morí a Praga el 19.12.1848.

Ara bé, si agafem per a definir els angles φ_1 i φ_2 semirectes paral·leles amb origen q_1 i q_2 respectivament, la relació anterior ens diu que $\omega(t_0)$ està en el segment $\overline{q_1 q_2}$, en contra de la hipòtesi de la proposició.

Proposició 2 (H. Poincaré) Siguin $\omega_1, \omega_2: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos camins tancats y q un punt de $\mathbb{R}^2$ tal que per a tot $t \in I$, $q \notin \overline{\omega_1(t) \omega_2(t)}$. Aleshores, es verifica $u(q, \omega_1) = u(q, \omega_2)$.

Demostració:

Siguin φ_1, φ_2 funcions angles per a ω_1, ω_2 respectivament, respecte al punt q . Si suposem que els índexs son diferents, fent el mateix raonament que a la proposició 1, resulta que existeix un t_0 per al qual

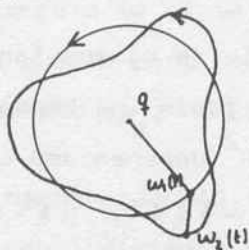
$$\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) = n\pi \quad \text{amb } n \text{ senar.}$$

Però això implica que q pertany al segment determinat per $\omega_1(t_0)$ i $\omega_2(t_0)$, en contra de la hipòtesi.

Corol·lari Siguin $\omega_1, \omega_2: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos camins tancats i q un punt que no estigui damunt de cap dels dos camins. Si per a tot $t \in I$ es verifica la desigualtat

Henry Poincaré, nascut el 29.4.1854 a Nancy. Físic i matemàtic. Fundador de la topologia moderna, va fer aportacions importants en els camps de la mecànica celeste i de les equacions diferencials. Morí a París el 17.2. 1911.

$\text{distància}(\omega_1(t), \omega_2(t)) < \text{distància}(q, \omega_1(t))$, aleshores
 $u(q, \omega_1) = u(q, \omega_2)$.



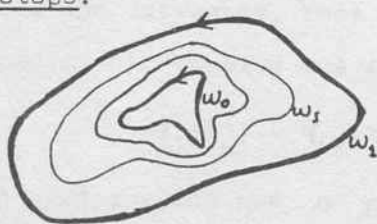
Demostració:

Sota la hipòtesi del corol·lari, el punt q no pertany a cap segment $\overline{\omega_1(t)\omega_2(t)}$ i es pot aplicar la proposició 2.

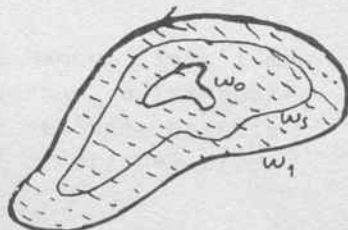
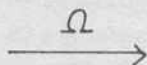
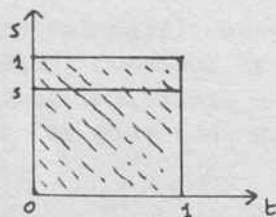
2. Deformació de camins

Donada una família de camins tancats $\omega_s : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, amb $s \in I$, direm que tenim una banda de camins tancats si els punts $\omega_s(t) \in \mathbb{R}^2$ depenen amb continuïtat de les variables t i s , $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$, i si, a més a més, $\omega_s(0) = \omega_s(1)$ és el mateix punt per a tot s .

Quan tinguem una banda ω_s , $0 \leq s \leq 1$, de camins tancats direm que tenim una deformació del camí tancat ω_0 en el camí tancat ω_1 . Dos camins tancats que es poden deformar l'un en l'altre tal com hem explicat, es diuen homotops.



La deformació donada per una banda ω_s es pot interpretar, també, com una aplicació $\Omega : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\Omega(t, 0) = \omega_0(t)$, $\Omega(t, 1) = \omega_1(t)$, $\Omega(t, s) = \omega_s(t)$, $\Omega(0, s) = \Omega(1, s)$



Si el punt $q \in R^2$ no pertany a la imatge de Ω es parla d'una deformació (o homotopia) a $R^2 - q$ i es diu que els camins tancats ω_0 i ω_1 són homotops a $R^2 - q$. Això implica que el punt q no pertany a la imatge de cap dels camins ω_s , $0 \leq s \leq 1$.

Proposició Si els camins tancats ω_0 i ω_1 són homotops a $R^2 - q$, aleshores $u(q, \omega_0) = u(q, \omega_1)$.

Demostració:

Com que $I \times I$ és un subconjunt tancat i acotat de R^2 , la imatge $\Omega(I \times I)$ és també un subconjunt tancat i acotat de R^2 i, per tant, la distància d del punt $q \notin \Omega(I \times I)$ a $\Omega(I \times I)$ és diferent de zero.

Per altra banda, com que tota aplicació contínua definida en un tancat i acotat és uniformement contínua, existeix un $\delta > 0$ tal que $\text{dist.}(\Omega(t, s), \Omega(t', s')) < d$ per a tot s, t, s', t' tals que $|s - s'| < \delta$, $|t - t'| < \delta$.
 Siguin $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = 1$ tals que compleixin $s_i - s_{i-1} < \delta$. Aleshores, per a tot $t \in I$ i tot $i = 1, 2, \dots$ es té

$$\text{dist.}(\Omega(t, s_i), \Omega(t, s_{i-1})) < d \leq \text{dist.}(q, \Omega(t, s_i))$$

i es pot aplicar el corol·lari de la lliçó anterior per a demostrar que

$$\begin{aligned} u(q, \omega_0) &= u(q, \omega_{s_1}) = u(q, \omega_{s_2}) = \dots = u(q, \omega_{s_{n-1}}) = \\ &= u(q, \omega_{s_n}) = u(q, \omega_1). \end{aligned}$$

Direm que un camí tancat ω és contràctil si és homotop al camí constant (camí tal que la imatge consta d'un únic punt).

Corol.lari 1 Si el camí tancat ω és contràctil a $R^2 - q$, aleshores $u(q, \omega) = 0$.

Corol.lari 2 Si el camí tancat ω és homotop a $R^2 - q$ al camí definit per $\omega'(t) = e^{2\pi i n t}$, n enter, $t \in I$, aleshores $u(q, \omega) = n$.

Els camins de la forma $\omega'(t) = e^{2\pi i n t}$ adquireixen especial importància a conseqüència de la següent proposició, que constitueix un recíproc del corol.lari 2.

Proposició Si ω és un camí tancat a R^2 tal que $u(q, \omega)$ valgui n , aleshores ω és homotop a $R^2 - q$ al camí ω' definit per $\omega'(t) = e^{2\pi i n t}$.

Demostració:

Sigui $\varphi(t)$ una funció angle per al camí ω respecte al punt q (agafant l'eix d'abscisses com a semirecta r). Posem $d(t) = \text{dist.}(q, \omega(t))$.

Definim, aleshores, $\Omega: I \times I \longrightarrow R^2$ per

$$\Omega(t, s) = (d(t)(1-s) + s) e^{2\pi i (\varphi(t)(1-s) + nst)}$$

És clar que Ω és una aplicació contínua i que es compleix $\Omega(t, 0) = \omega(t)$ i $\Omega(t, 1) = \omega'(t)$. A més a més, com que

$\varphi(1) = \varphi(0) + 2\pi n$, $\Omega(0,s) = \Omega(1,s)$ per a tot s . Finalment, com que $q \notin \Omega(I \times I)$, Ω dóna la deformació buscada.

La proposició anterior podem completar-la, doncs, al següent teorema

Teorema Dos camins tancats són homòtops a $\mathbb{R}^2 - q$ si i només si tenen el mateix índex al voltant de q .

2'. Aplicacions contínues definides en el disc

Suposem que f és una aplicació contínua del disc unitat E^2 en el pla $\mathbb{R}^2$, $f: E^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La restricció de f a la circumferència S^1 , la frontera de E^2 , dóna un camí tancat $\omega: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Si $q \in \mathbb{R}^2$ no pertany a la imatge de f , l'aplicació

$$\begin{aligned} \Omega: I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t,s) &\longmapsto f(1-s, 2\pi t) \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1 \end{aligned}$$

dóna una homotopia a $\mathbb{R}^2 - q$ del camí ω al camí constant. El camí ω és, doncs, contràctil i, en virtut del corol·lari 1, $u(q, \omega) = 0$.

Podem, doncs, enunciar:

Teorema Sigui $f: E^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua, q un punt de $\mathbb{R}^2$ que no pertanyi a $f(S^1)$ i tal que $u(q, \omega) \neq 0$. Aleshores, $q \in f(E^2)$.

Observació El teorema anterior es pot considerar com el cas 2-dimensional del teorema de Bolzano de la teoria de funcions reals: "Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua, per a tot punt q entre $f(0)$ i $f(1)$, existeix un $c \in I$ tal que $f(c) = q$." En el nostre cas l'interval I és substituït pel disc E^2 , els extrems 0 i 1 per la circumferència S^1 , f per una aplicació contínua $E^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i la condició de que q estigui entre $f(0)$ i $f(1)$ per la de que l'índex del camí que té per imatge $f(S^1)$ al voltant de q no sigui zero. Ambdós teoremes diuen que, aleshores, el punt q pertany a la imatge de f . Hi ha, també, un anàleg en dimensions superiors del teorema de Bolzano 2-dimensional, on E^2 és substituït per la bola E^n i S^1 per l'esfera S^{n-1} (frontera de E^n). Per a demostrar-lo necessitarem mètodes algebraics més forts que l'índex d'un camí. Ho ferem a la lliçó 8.

Corol·lari 1 (Teorema fonamental de l'àlgebra)

Sigui $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, $n \geq 1$, un polinomi amb coeficients complexos. Aleshores, existeix un complex z_0 amb $f(z_0) = 0$.

Demostració:

Observem, primer, que el teorema de Bolzano val no només com l'hem enunciat, sinó substituïnt E^2 per un subconjunt Y de $\mathbb{R}^2$ homeomorf a E^2 i substituïnt S^1 per la frontera S de Y .

Posem $d = 2 + |a_1| + \dots + |a_n|$ i denotem per Y el disc tancat de radi d : $Y = \{z; |z| \leq d\}$, i per S la frontera de Y . Sigui q l'origen 0 de $R^2 = C$. Llavors f es pot interpretar com una aplicació contínua $f: Y \rightarrow R^2$. Considerem, per altra banda, l'aplicació $g: Y \rightarrow R^2$ definida per $g(z) = z^n$. Aleshores, per a tot z amb $|z| = d$ (és a dir, per a tot $z \in S$), es té

$$|f(z) - g(z)| = |a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| < d^{n-1}(|a_1| + \dots + |a_n|) < d^n,$$

és a dir, per a tot $z \in S$ es té

$$\text{dist.}(f(z), g(z)) < \text{dist.}(0, g(z))$$

Si designem respectivament per ω i ω' els camins definits per les restriccions de f i g a S , el corol·lari de la lliçó 1 ens diu, aleshores, que

$$u(0, \omega) = u(0, \omega'),$$

però com que $u(0, \omega') = n$ (exemple 1 de la lliçó 1), resulta $u(0, \omega) = n \neq 0$, d'on, pel teorema anterior, $0 \in f(Y)$; és a dir, existeix un $z_0 \in Y$ tal que $f(z_0) = 0$.

Una funció contínua $f: S^2 \rightarrow R$ (S^2 l'esfera de dimensió 2, submergida a R^3) es diu senar si per a tot parell de punts x, x^* de S^2 diametralment oposats, es té $f(x^*) = -f(x)$. Tota funció senar $f: S^2 \rightarrow R$ admet

sempre un zero, com a conseqüència del teorema de Bolzano 1-dimensional.

Considerem, ara, dues funcions senars $f, g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Ens preguntem si existeix algun punt de S^2 en el què f i g s'anul·lin simultàniament. La resposta ens la dona el següent teorema

Corol·lari 2 (. Borsuk) Dues aplicacions contínues senars $f, g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tenen sempre un zero comú.

Demostració:

Sigui A un equador de S^2 i H l'hemisferi superior. H és homeomorf al disc E^2 i A ho és a la circumferència S^1 . Suposem que no existeix cap punt $z \in A$ per al qual $f(z) = g(z) = 0$. Definim, aleshores, $F: H \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua per $F(p) = (f(p), g(p))$. Com que $0 = (0, 0)$ no pertany a $F(A)$, està definit l'índex $u(0, \omega)$, on ω és la restricció de F a A . Ara bé, $u(0, \omega)$ és un número senar i, per tant, diferent de zero. Aplicant el teorema de Bolzano resulta, aleshores, que existeix un punt $p \in H$ tal que $F(p) = 0$, és a dir, un punt $p \in H$ tal que $f(p) = g(p) = 0$.

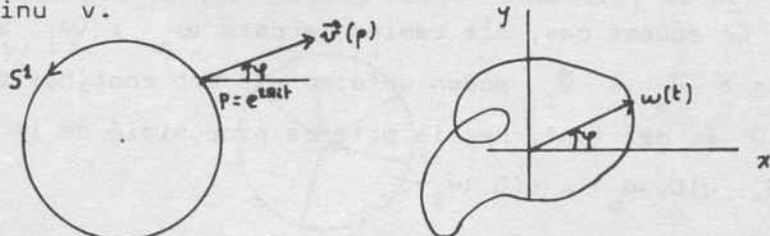
3. Camps vectorials

Direm que tenim un camp vectorial continu $\vec{v}$ sobre la circumferència S^1 quan, per a cada punt $p \in S^1$, tinguem un vector $\vec{v}(p) = (v_1(p), v_2(p))$ de manera que les components depenguin amb continuïtat de p .

Considerem un sistema de coordenades a $\mathbb{R}^2$ amb origen el punt 0. Donat un punt $p = e^{2\pi i t}$ de S^1 , identifiquem el vector $\vec{v}(p) = (v_1(p), v_2(p))$ amb el punt de $\mathbb{R}^2$ $\omega(t)$ tal que $\overrightarrow{0\omega(t)} = \vec{v}(p)$. Això ens permet definir una aplicació contínua

$$\begin{array}{ccc} \omega : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \omega(t) \end{array}$$

tal que $\omega(0) = \omega(1)$; ω és, doncs, un camí tancat a $\mathbb{R}^2$. Es diu el camí tancat associat al camp vectorial continu v .



Si $\vec{v}(p) \neq \vec{0}$ per a tot $p \in S^1$, és a dir, si el camp vectorial no s'anul·la a cap punt, el punt 0 no pot ésser de la imatge del camí ω . Podem parlar, doncs, de l'índex $u(0, \omega)$ que se li diu el número de voltes del camp vectorial $\vec{v}$ a S^1 ; el denotarem per $u(\vec{v})$.

Tot el que hem vist sobre camins tancats i índex de camins es pot transportar a camps vectorials. En particular, parlarem d'una deformació del camp vectorial $\vec{v}_0$ en el camp vectorial $\vec{v}_1$ quan tinguem una família contínua de camps vectorials $\vec{v}_s$, $0 \leq s \leq 1$, que depengui amb continuïtat del paràmetre s i del punt p . Per exemple, tot camp vectorial $\vec{v}$ es pot deformar en un camp de vectors unitaris $\frac{\vec{v}(p)}{|\vec{v}(p)|}$; la deformació pot donar-se explícitament per

$$\vec{v}_s(p) = (1-s) \vec{v}(p) + s \frac{\vec{v}(p)}{|\vec{v}(p)|} \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Proposició 1 Si el camp vectorial $\vec{v}_0$ es pot deformar en el $\vec{v}_1$ de manera que $\vec{v}_s(p) \neq 0$ per a tot p i tot s , aleshores $u(\vec{v}_0) = u(\vec{v}_1)$.

Demostració:

En aquest cas, els camins tancats ω_0 i ω_1 associats a $\vec{v}_0$ i $\vec{v}_1$ poden deformar-se amb continuïtat a $\mathbb{R}^2 - 0$ i, per tant, per la primera proposició de la llista 2, $u(0, \omega_0) = u(0, \omega_1)$.

Proposició 2 Siguin $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ dos camps vectorials sobre S^1 que no s'anul·lin en cap punt. Si $\vec{v}(p)$ i $\vec{v}'(p)$ no tenen mai direccions oposades, per a tot p , aleshores $u(\vec{v}) = u(\vec{v}')$.

Demostració:

Per als corresponents camins tancats ω i ω' es compleixen les hipòtesis del teorema de Poincaré i, per tant, $u(0, \omega) = u(0, \omega')$.

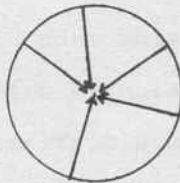
Proposició 3 Sigui $\vec{v}$ un camp vectorial continu definit sobre el disc E^2 i tal que $\vec{v}(p) \neq 0$ per a tot $p \in S^1$. Si el número de voltes de $\vec{v}$ a S^1 és diferent de zero, aleshores existeix un punt $p \in E^2$ en el que el camp s'anul·la ($\vec{v}(p) = \vec{0}$).

Demostració:

Si ω és el camí tancat associat al camp $\vec{v}$, $u(0, \omega) \neq 0$ i pel teorema de 2' existeix un $p \in E^2$ tal que $\vec{v}(p) = \vec{0}$.

Exemples

1. Sigui $\vec{v}$ un camp vectorial sobre S^1 que no s'anul·li a cap punt i tal que no estigui mai sobre la normal exterior a la circumferència. Aleshores, aplicant la proposició 2, $u(\vec{v})$ val el mateix que el número de voltes del camp format pel vector unitari normal interior, i, per tant, val 1.



2. Sigui $\vec{v}$ un camp vectorial a E^2 que no s'anul·li a cap punt. Aleshores, en virtut de la proposició 3, el número de voltes de $\vec{v}$ sobre la circumferència S^1 ha d'ésser 0. Per tant, per l'exemple anterior, al menys existeix un punt $p \in S^1$ en el que $\vec{v}(p)$ té la direcció radial exterior.

Teorema (del punt fix de Brouwer)

Tota aplicació contínua $f: E^2 \rightarrow E^2$ té, al menys, un punt fix (és a dir, existeix un $p \in E^2$ tal que $f(p) = p$).

Demostració:

Considerem el camp vectorial continu $\vec{v}$ a E^2 que a cada punt $x \in E^2$ li assigna el vector $\vec{v}(x) = \overline{x f(x)}$. Si existeix un punt $p \in S^1$ tal que $\vec{v}(p) = \vec{0}$, aleshores $f(p) = p$ i el teorema ja està demostrat. En cas contrari, per a tot $p \in S^1$, $\vec{v}(p) \neq \vec{0}$, i podem considerar el número de voltes $u(\vec{v})$ de $\vec{v}$ a S^1 . Ara bé, $\vec{v}$ compleix les condicions de l'exemple 1; per tant, $u(\vec{v}) = 1 \neq 0$ i podem aplicar la proposició 3 per afirmar que existeix un punt $p \in E^2$ tal que $\vec{v}(p) = \vec{0}$. Aleshores $f(p) = p$.

Luitzen Brouwer, nascut a Overschie (Holanda) el 27.2.1881. Matemàtic i filòsof. Professor a Amsterdam des del 1909.

Gran defensor de l'intuicionisme. Un dels topòlegs més grans entre 1900 i 1930. Morí a Amsterdam el 2.12.1966. Va demostrar el teorema de la corba de Jordan, el teorema del punt fix, el teorema d'invariança del domini,...

3'. Singularitats d'un camp vectorial

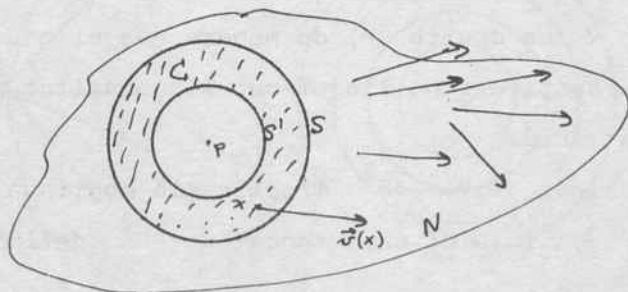
Direm que un camp vectorial $\vec{v}$, definit en un subconjunt N de $\mathbb{R}^2$, té una singularitat en el punt $p \in N$ si $\vec{v}(p) = \vec{0}$. El nom de singularitat està justificat pel que segueix: Donat un camp vectorial continu $\vec{v}$, podem formar un nou camp vectorial de vectors unitaris $\vec{z}$ per $\vec{z}(p) = \frac{\vec{v}(p)}{|\vec{v}(p)|}$; aleshores, si $\vec{v}(p) = \vec{0}$, $\vec{z}(p)$ no està definit.

Una singularitat p d'un camp vectorial $\vec{v}$ definit a N es diu una singularitat aïllada si existeix una bola V de centre p en la qual no hi ha cap més singularitat de $\vec{v}$. Si S és la frontera de V , aleshores està definit el número de voltes $u(\vec{v})$ de $\vec{v}$ a S .

Lema $u(\vec{v})$ no depèn del radi de S .

Demostració:

Siguin V i V' dues boles de centre p en les que no hi hagi cap altra singularitat de $\vec{v}$ que p .
Siguin S i S' llurs fronteres, circumferències de radi r i r' respectivament ($r > r'$).
Siguin u i u' els números de voltes de $\vec{v}$ a S i S' .



A la corona circular C definida per S i S' , $\vec{V}$ és un camp vectorial continu que no s'anul·la a cap punt, i ens defineix, per tant, una aplicació contínua

$$f: C \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto (v_1(x), v_2(x))$$

la imatge de la qual no conté el punt $0 = (0,0)$.

Siguin ω i ω' els camins associats al camp vectorial $\vec{V}$ sobre S i S' respectivament. Aleshores f és una deformació a $\mathbb{R}^2 - 0$ del camí ω en el camí ω' . Per tant, per la primera proposició de la lligó 2, resulta $u(0, \omega) = u(0, \omega')$, d'on, per definició, $u = u'$.

Si p és una singularitat del camp vectorial $\vec{V}$, V una bola de centre p que no conté cap més singularitat, i S la frontera de V , al número de voltes de $\vec{V}$ a S li direm l'índex i_p de la singularitat p .

Exemples

1. $i_p = 0$

En aquest cas, la singularitat es diu "evitable": podem modificar el camp vectorial $\vec{V}$ a l'interior d'una bola V de centre p , de manera que el nou camp $\vec{V}'$ sigui continu i no tingui cap singularitat a V .

Demostració:

Sigui $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació contínua definida pel camp $\vec{V}$, i ω el camí tancat de $\mathbb{R}^2$ definit per la res-

tracció de $\vec{v}$ a la frontera S de V . Aleshores $u(0, \omega) = 0$ i, pel contrarrecíproc del teorema de 2', existeix una aplicació contínua $f': V \rightarrow \mathbb{R}^2$ que coincideix amb f sobre S i la imatge de la qual no conté el punt $0 = (0,0)$. Ara bé, l'aplicació f' ens permet definir un camp vectorial continu $\vec{v}'$ que no s'anul·la en cap punt de V .

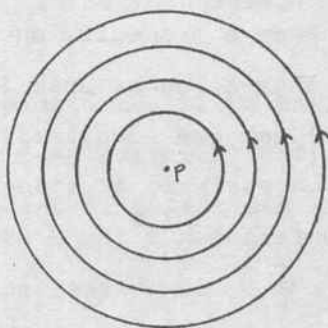
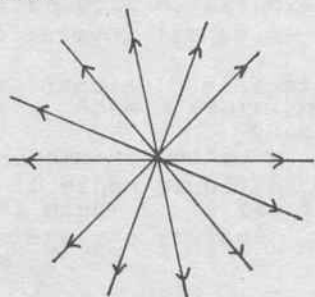
2. $i_p = 1$

Sigui XY un sistema de coordenades a $\mathbb{R}^2$. Si $q = (x,y)$, els camps $\vec{v}: \vec{v}(q) = (x,y)$ i $\vec{v}': \vec{v}'(q) = (-y,x)$ s'anul·len en el punt $p = (0,0)$ on hi tenen una singularitat d'índex 1.

Es diuen línies integrals d'un camp $\vec{v}$ les corbes que en cada punt q tenen per vector tangent $\vec{v}(q)$. Són, per tant, les solucions de l'equació diferencial

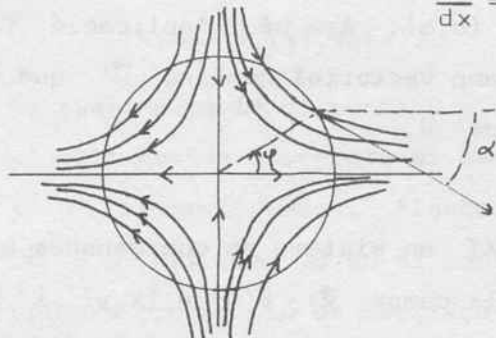
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Les línies integrals de $\vec{v}$ i $\vec{v}'$, corbes solució de les equacions $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ i $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ són, respectivament



3. $i_p = -1$

El camp vectorial $\vec{v}(q) = (x, -y)$ té una singularitat a $p = (0,0)$ d'índex -1 . Les línies integrals són les corbes $xy = c$, solucions de $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.



Anem a calcular a partir de l'equació de les línies integrals, l'índex del camp a $p = (0,0)$.

L'índex de $\vec{v}$ a p és el número de voltes del camp $\vec{v}$ a la circumferència S^1 , que és l'índex del camí ω definit per $\vec{v}$ al voltant de p . Ara bé, l'angle α de la figura val $\alpha = \arctg(-y/x) = -\varphi$, d'on

$$i_p = u(\vec{v}) = u(p, \omega) = \frac{\alpha(1) - \alpha(0)}{2\pi} = \frac{-2\pi}{2\pi} = -1.$$

4. $i_p = 2$

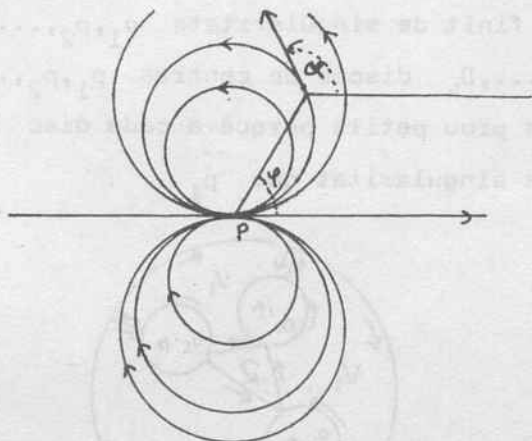
Anem a procedir, aquest cop, en sentit invers: és a dir, anem a buscar unes línies integrals d'un camp vectorial amb una singularitat d'índex 2.

La variació de l'angle α de la figura sobre la circumferència S^1 ha d'ésser 4π . Agafem, per exemple $\alpha = 2\varphi$. Aleshores tenim

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2 y/x}{1 - (y/x)^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Per tant, el camp vectorial que hem definit és:

$\vec{v}$: $\vec{v}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ i les línies integrals són les corbes donades per les equacions $x^2 + y^2 + 2cy = 0$.



Observis que, en general, si $\alpha = n\varphi$, l'índex del camp $\vec{v}$ a la singularitat $p = (0,0)$ és n ; aleshores

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} n\varphi$$

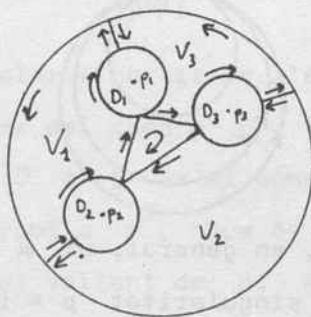
A l'expressar $\operatorname{tg} n\varphi$ en funció de $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ s'obté l'equació diferencial de les línies integrals.

Anem a veure, ara, la relació que hi ha entre el nombre de voltes a S^1 d'un camp vectorial definit en el disc E^2 i els índexs de les singularitats interiors a E^2 .

Proposició El número de voltes a S^1 d'un camp definit a E^2 és la suma dels índexs de les singularitats del camp a E^2 .

Demostració:

Sigui $\vec{v}$ un camp vectorial continu a E^2 amb un nombre finit de singularitats $p_1, p_2, \dots, p_k$. Siguin $D_1, D_2, \dots, D_k$ discos de centres $p_1, p_2, \dots, p_k$ respectivament i radi prou petits perquè a cada disc D_i no hi hagi cap més singularitat que p_i .



Descomposem $E^2 - \cup D_i$ tal com indica la figura i donem una orientació coherent a la descomposició. Cada regió V_j en què hem descomposat $E^2 - \cup D_i$ és homeomorfa a un disc E^2 i, per tant, té sentit parlar del número de voltes $u(\vec{v}, S_j)$ del camp $\vec{v}$ a la frontera S_j de cada V_j .

Si fem córrer el camp $\vec{v}$ sobre totes les arestes rectes de la descomposició, cada aresta és recorreguda 2 cops però amb sentits oposats; per tant, es té

$$u(\vec{v}, S_1) + \dots + u(\vec{v}, S_k) = u(\vec{v}) - (i_{p_1} + \dots + i_{p_k})$$

Ara bé, en virtut de la proposició 3 de la lliçó 3,

$$u(\vec{v}, S_j) = 0 \text{ per a tot } j, \text{ d'on resulta}$$

$$u(\vec{v}) = i_{p_1} + \dots + i_{p_k}.$$

4. Camps vectorials sobre l'esfera S^2

Sigui $\vec{V}$ un camp vectorial sobre l'esfera S^2 ; és a dir, a cada punt $p \in S^2$ li assignem un vector

$$\vec{V}(p) = (v_1(p), v_2(p), v_3(p))$$

de manera que les components $v_1(p)$, $v_2(p)$, $v_3(p)$ depenen amb continuïtat del punt p . El camp $\vec{V}$ es diu un camp tangent si, per a cada $p \in S^2$, $\vec{V}(p)$ està en el pla tangent a S^2 en el punt p .

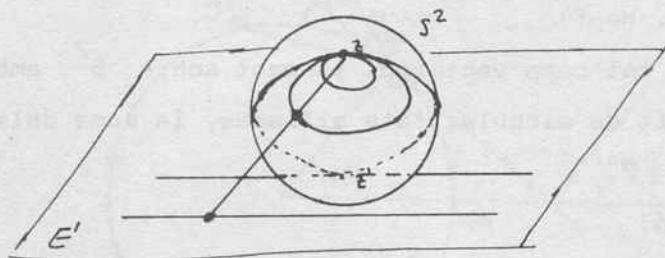
Sigui $\vec{V}$ un camp vectorial tangent a S^2 i q una singularitat aïllada de $\vec{V}$; és a dir, $\vec{V}(q) = 0$, i en un entorn prou petit de q no hi ha cap més singularitat de $\vec{V}$. Considerem el pla tangent E a S^2 per q i projectem normalment el camp vectorial $\vec{V}$ sobre E . En un entorn prou petit de q obtenim, aleshores, un camp vectorial a E que no té cap altra singularitat que q . Definim l'índex i_q de la singularitat q del camp vectorial tangent $\vec{V}$ com l'índex de la singularitat q del camp projectat $\vec{V}'$.

Exemples

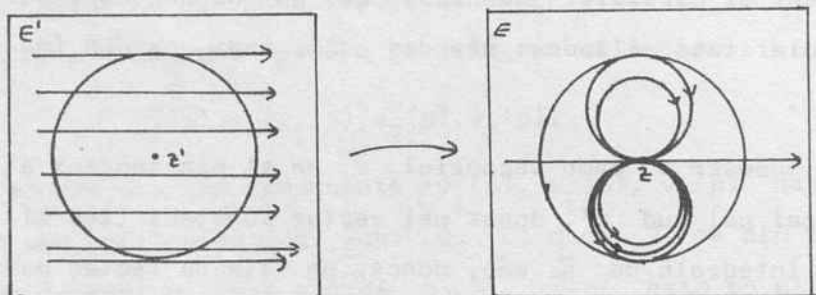
1. Per a cada punt $p \in S^2$, $\vec{V}(p)$ és el vector unitari tangent al meridià que passa per p . En aquest cas hi ha dues singularitats aïllades: el pol nord i el pol sud, cada una amb índex 1.

2. Per a cada punt $p \in S^2$, $v(p)$ és el vector unitari tangent al paral·lel que passa per p . Hi ha també dues singularitats aïllades: els dos pols, cada una amb índex 1.

3. Suposem un camp vectorial $\vec{v}$ en el pla tangent a S^2 pel pol sud z' , donat pel vector constant (les línies integrals de $\vec{v}$ són, doncs, un feix de rectes paral·leles). Per projecció estereogràfica des del pol nord z de les línies integrals de $\vec{v}$, obtenim una família de línies integrals sobre S^2 que ens defineixen un camp vectorial $\vec{v}'$ sobre S^2 . L'únic punt que, eventualment, pot tenir una singularitat és, evidentment, el pol nord z .



Per a poder calcular l'índex del camp $\vec{v}'$ a z projectem-lo normalment sobre el pla tangent a S^2 pel punt z . El pas del camp $\vec{v}$ al camp projectat sobre E no és altre que la inversió respecte a S^2 . És fàcil veure, aleshores, que el camp $\vec{v}'$ té una singularitat a z amb índex 2.



En els tres exemples anteriors, la suma dels índexs de cada camp en les singularitats ha estat sempre 2. Això val en general per a tot camp vectorial tangent definit a S^2 .

Teorema (H. Hopf)

Per a tot camp vectorial tangent sobre S^2 amb un nombre finit de singularitats aïllades, la suma dels índexs val 2.

Demostració:

Com que hem suposat que el camp vectorial $\vec{v}$ només té un nombre finit de singularitats, podem trobar sempre un equador S sobre el que no hi hagi cap singularitat. Projectant estereogràficament el camp $\vec{v}$ definit a l'hemisferi inferior sobre S des del pol nord, obtenim un camp vectorial $\vec{v}'$ sobre S . Igualment, projectant estereogràficament el camp $\vec{v}$ definit a l'hemisferi superior sobre S des del pol sud, obtenim un camp vectorial

$\vec{v}''$ sobre S .

Si $q_1, \dots, q_n$ són les singularitats de $\vec{v}$ a l'hemisferi inferior amb índexs $i_1, \dots, i_n$ i $q'_1, \dots, q'_m$ són les singularitats de $\vec{v}$ a l'hemisferi superior amb índexs $i'_1, \dots, i'_m$, els camps vectorials $\vec{v}'$ i $\vec{v}''$ tenen a S un número de voltes igual a

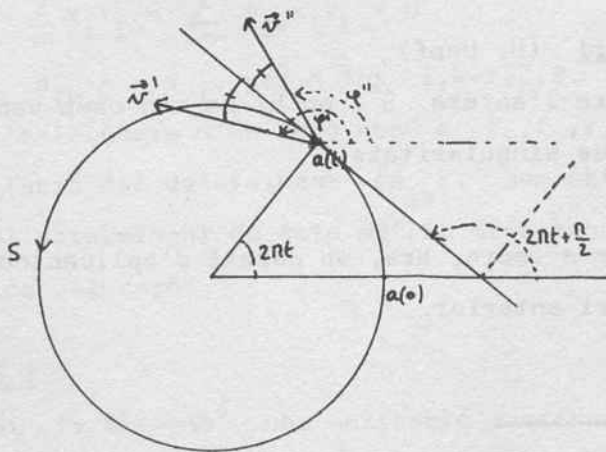
$$u(\vec{v}') = i_1 + \dots + i_n$$

$$u(\vec{v}'') = i'_1 + \dots + i'_m$$

Anem a calcular

$$u(\vec{v}') + u(\vec{v}'') = i_1 + \dots + i_n + i'_1 + \dots + i'_m$$

estudiant la relació que hi ha entre $\vec{v}'$ i $\vec{v}''$.



Si φ' i φ'' són funcions angles per a $\vec{v}'$ i $\vec{v}''$ respectivament, es té, en cada punt $a(t) \in S$

$$\frac{\varphi'(t) + \varphi''(t)}{2} = 2\pi t + \pi/2$$

Per tant,

$$\varphi'(t) + \varphi''(t) = 4\pi t + \pi,$$

d'on

$$\begin{aligned} u(\vec{v}') + u(\vec{v}'') &= \frac{\varphi'(1) - \varphi'(0) + \varphi''(1) - \varphi''(0)}{2\pi} = \\ &= \frac{\varphi'(1) + \varphi''(1) - (\varphi'(0) + \varphi''(0))}{2\pi} = \\ &= \frac{4\pi \cdot 1 - 4\pi \cdot 0}{2\pi} = 2 \end{aligned}$$

d'on en resulta el teorema.

Corol·lari (H. Hopf)

Sobre l'esfera S^2 no hi ha cap camp vectorial tangent sense singularitats.

Anem a veure, ara, un parell d'aplicacions del corol·lari anterior.

Heinz Hopf, nascut a Breslau (Alemanya) el 19.11.1894. Matemàtic. Professor a Berlin, Göttingen i des del 1931 a l'Escola Politècnica Federal de Zürich. Un dels més grans i complets topòlegs d'aquest segle: treballs sobre nusos, poliedres, homologia, homotopia, camps vectorials, fibrats, àlgebra homològica, feixos, varietats, grups de Lie... Mestre de molts destacats matemàtics actuals com Eckmann, Gysin, Stiefel, Samelson... Morí a Zürich el 3.6.1971.

Aplicació 1

Suposem donades tres funcions $v_i = f_i(x, y, z)$, $i=1,2,3$ amb la condició $xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0$ per a tota terna (x, y, z) amb $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, és a dir, per a tot punt $(x, y, z) \in S^2$. Aleshores, els vectors donats per $\vec{v}(x, y, z) = (v_1, v_2, v_3)$ formen un camp vectorial tangent sobre S^2 . En virtut del corol·lari, $\vec{v}$ ha de tenir alguna singularitat; és a dir, existeix al menys un punt $(x, y, z) \in R^3$ en el que les tres funcions f_1, f_2, f_3 s'anul·len.

Per exemple, si $f_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$, aleshores la condició imposada és

$$\sum_{i=1}^3 x_i f_i = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k = 0$$

és a dir, $a_{ik} = -a_{ki}$, per a tot $i, k=1,2,3$.

Ara bé, l'existència d'un zero comú a f_1, f_2, f_3 equival a l'anul·lació del determinant $|a_{ik}|$. Hem obtingut, doncs, "el determinant de tota matriu tridimensional antisimètrica val zero".

Aplicació 2

Sigui $f: S^2 \rightarrow S^2$ una aplicació contínua sense cap punt fix; és a dir, per a tot $p \in S^2$, $f(p) \neq p$. Considerem el camp vectorial (no tangent) $\vec{v}$ sobre S^2 definit per $\vec{v}(p) = \overrightarrow{pf(p)}$. El camp $\vec{v}$ no té cap singularitat. Però, pel corol·lari del teorema de Hopf, el

camp vectorial tangent associat a $\vec{v}$ ha de tenir alguna singularitat; és a dir, en algun $p \in S^2$ $\vec{v}(p)$ té la direcció de la normal a l'esfera S^2 . En aquest punt, $f(p)$ ha d'ésser el punt diametralment oposat a p . Per tant,

Corol.lari Tota aplicació contínua $f: S^2 \rightarrow S^2$ té un punt fix o un punt que s'aplica per f en el seu punt diametralment oposat.

5. L'homologia singular

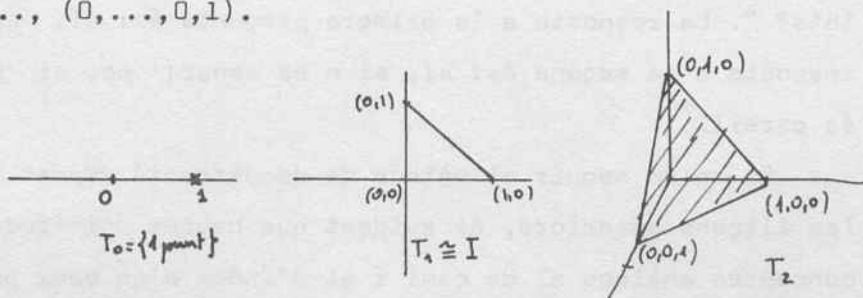
A les 4 lliçons anteriors hem demostrat teoremes (el de Borsuk, el del punt fix de Brouwer, el de la no existència de camps tangents a S^2 de Hopf,...) que en podríem dir 2-dimensionals. Es presenta, naturalment, la pregunta de si tals teoremes valen en dimensions superiors. És a dir, "admet tota aplicació contínua de la bola n -dimensional en sí mateixa un punt fix? ". O bé, "existeixen camps vectorials tangents a les esferes S^n sense singularitats? ". La resposta a la primera pregunta és: sí. La resposta a la segona és: sí, si n és senar; no, si n és parell.

Si volem seguir el mètode de demostració emprat a les lliçons anteriors, és evident que haurem d'introduir conceptes anàlegs al de camí i al d'índex d'un camí però en dimensions superiors.

La generalització de l'interval unitat que agafarem és la de n -símplex standard T_p , la de camí, serà la de n -símplex singular i la d'índex d'un camí ho seran els grups d'homologia singular. L'índex d'un camí era un "invariant numèric"; ara, els grups d'homologia seran "invariants algebraics"; ja no tractarem amb números sino amb grups abelians. Aquesta va ésser una de les conquestes de la topologia dels anys 1925-1930, la d'associar una

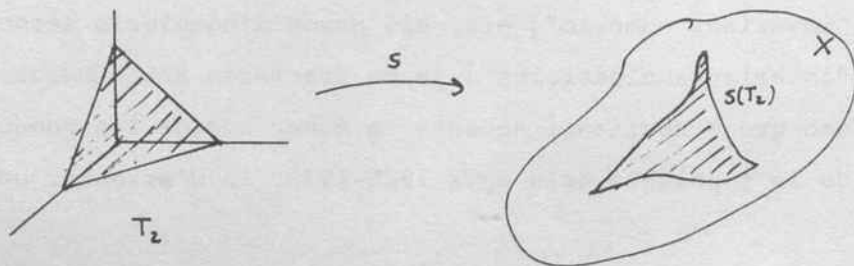
colecció de grups abelians a tot espai topològic. Fou el primer, i potser més important, pas per a l'algebrització de la topologia.

Disegnarem sempre per T_p el p-símplex standard, és a dir, el conjunt de punts $(t_0, t_1, \dots, t_p)$ de R^{p+1} tals que $t_i \geq 0$ per a tot $i=0, 1, \dots, p$ i a més a més $t_0 + t_1 + \dots + t_p = 1$. És immediat veure que T_p és l'embolcall convex dels punts $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1)$.



Sigui, ara, X un subespai de R^n (subconjunt amb la topologia induïda per la de R^n).

Un p-símplex singular de X és una aplicació contínua $s: T_p \rightarrow X$.



Observis que els 0-símplex singulars poden identificar-se amb els punts de X i els 1-símplex singulars amb els camins de X .

El concepte de p -símplex singular és l'anàleg p -dimensional del de camí.

Considerem, ara, el grup abelià lliure $S_p(X)$ engendrat per tots els p -símplex singulars de X ; és a dir, els elements de $S_p(X)$ són les combinacions lineals formals finites $\sum_s n_s s$ on s és un p -símplex singular i n_s un enter. La suma a $S_p(X)$ està definida formalment. Observis que, per la construcció de $S_p(X)$, tota aplicació del conjunt dels p -símplex singulars de X en un grup abelià A dóna, per linealitat, un homomorfisme del grup abelià $S_p(X)$ en el grup abelià A

$$\begin{array}{ccc} \{p\text{-símplexs sing. de } X\} & \xrightarrow{\text{aplicació}} & A \\ \cap & \nearrow \text{homomorfisme} & \\ S_p(X) & & \end{array}$$

Un element de $S_p(X)$, és a dir, una suma formal finita $\sum_s n_s s$ es diu una p -cadena singular de X .

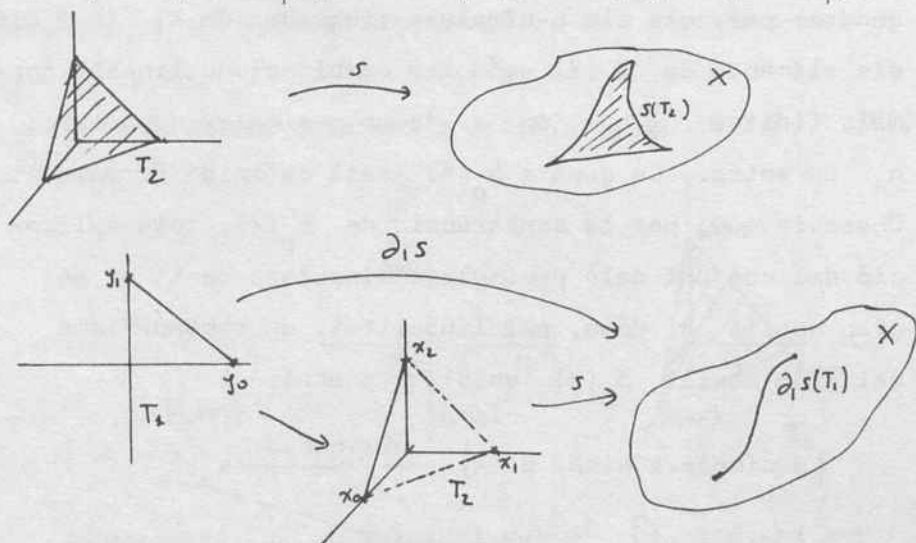
Així com en el cas 2-dimensional no consideràvem tots els camins, sino tan sols els tancats, ara no estem interessats en el grup de totes les p -cadenes singulars de X , sino únicament en un subgrup que ara anem a construir.

Si $s: T_p \rightarrow X$ és un p -símplex singular de X , per a cada enter i amb $0 \leq i \leq p$ definim la i -èssima cara de s com el $(p-1)$ -símplex singular de X

$$\partial_i s: T_{p-1} \rightarrow X$$

donat per

$$\partial_i s(t_0, \dots, t_{p-1}) = s(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})$$



Nosaltres podem considerar l'operador cara i -èssima ∂_i com una aplicació del conjunt de tots els p -símplexs de X en el conjunt dels $(p-1)$ -símplexs singulars de X , però, també, com una aplicació del conjunt dels p -símplexs singulars de X en el grup abelià $S_{p-1}(X)$. Per tant, pel què hem dit abans, tenim, per linealitat, un morfisme de grups abelians

$$\partial_i: S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$$

definit per

$$\partial_i(\sum_s n_s s) = \sum_s n_s \partial_i(s).$$

Definim, aleshores, l'operador vora ∂ de $S_p(X)$ per

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \dots + (-1)^p \partial_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i.$$

Proposició 1 La composició

$$S_p(X) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{p-2}(X)$$

és l'homomorfisme zero.

La demostració és, simplement, un càlcul.

Geomètricament, l'afirmació de la proposició anterior és clara: la vora d'una p -cadena singular de X és una $(p-1)$ -cadena singular de X que no té vora.

Aquesta propietat és la que ens porta a la definició dels grups d'homologia. Un element $c \in S_p(X)$ es diu un p -cicle si $\partial c = 0$. Els p -cicles de X són, doncs, el nucli de l'homomorfisme $\partial: S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$; formen, per tant, un grup abelià, que denotarem per $C_p(X)$. Aquest grup és el que juga el paper d'anàleg del concepte de camí tancat en dimensions superiors.

Un element $d \in S_p(X)$ es diu una p -vora si existeix algun element $e \in S_{p+1}(X)$ tal que $\partial(e) = d$. Les p -vores són, doncs, la imatge de l'homomorfisme $\partial: S_{p+1}(X) \longrightarrow S_p(X)$;

formen, per tant, un grup abelià, que denotarem per $V_p(X)$.

La proposició anterior ens diu, aleshores, que tota p -vora és un p -cicle i, per tant, el grup $V_p(X)$ de les p -vores és un subgrup del grup $C_p(X)$ dels p -cicles. A més a més, tots dos grups són abelians lliures, ja que són subgrups del grup abelià lliure $S_p(X)$. Podem formar, doncs, el quocient

$$H_p(X) = \frac{C_p(X)}{V_p(X)}$$

que és el p -èssim grup d'homologia singular de X . Aquests grups abelians (un per a cada $p=0,1,2,\dots$) són els anàlegs algebraics del concepte d'índex d'un camí.

Com a primer exemple, anem a calcular els grups d'homologia singular d'un espai X que consti només d'un punt. Per a cada $p > 0$, hi ha, evidentment, un únic p -símplex singular $s_p: T_p \rightarrow X$ (que aplica tot T_p en l'únic punt de X). És clar que $\partial_i s_p = s_{p-1}$.

Cada grup de cadenes $S_p(X)$ és el grup abelià lliure amb un generador (és a dir, és cíclic infinit, isomorf al grup Z dels enters), i l'operador vora ve donat per

$$\partial s_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i s_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i s_{p-1}.$$

Així, doncs, si p és parell $\partial s_p = s_{p-1}$ i si p és senar $\partial s_p = 0$. Per tant, per a tot $p > 0$, es té $V_p(X) = C_p(X)$, d'on $H_p(X) = 0$. Per a $p=0$, resulta

$C_p(X) \cong \mathbb{Z}$, $V_p(X) = 0$, d'on $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Resumint,

Proposició 2 Si l'espai X es redueix a un únic punt,

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_p(X) = 0 \text{ per a tot } p \neq 0.$$

El 0 -èssim grup d'homologia d'un espai té una particular significació geomètrica.

Un subespai X de $\mathbb{R}^n$ es diu arc-connex si donats dos punts qualsevols x, y de X existeix sempre un camí a X que els uneix, és a dir, una aplicació contínua $\omega: I \rightarrow X$ tal que $\omega(0) = x$, $\omega(1) = y$. Arc-connexos són, per exemple, els espais euclidis $\mathbb{R}^n$, les boles E^n , les esferes S^n .

Anem a calcular per a un espai arc-connex X el grup $H_0(X)$.

Evidentment, $C_0(X) = S_0(X)$, que es pot identificar amb el grup abelià lliure generat pels punts de X ; tot element de $C_0(X)$ es pot posar, doncs, de la forma $\sum_{x \in X} n_x x$, on els n_x són enters nuls menys un nombre finit.

Per altra banda, $S_1(X)$ pot intepretar-se com el grup abelià lliure engendrat per tots els camins de X . Si denotem per v_0 i v_1 els vèrtexs del 1-símplex standard T_1 i $s: T_1 \rightarrow X$ és un 1-símplex singular de

l'espai X , aleshores

$$s = s(v_1) - s(v_0) \in C_0(X)$$

Anem a calcular $V_0(X)$. Per això definim l'homomorfisme

$$f: S_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sum n_x x \longmapsto \sum n_x$$

Si $X \neq \emptyset$, f és, evidentment, un epimorfisme i com que per a tot 1-símplex singular s de X es té la relació $f(\partial s) = f(s(v_1) - s(v_0)) = 0$, resulta $V_0(X) \subseteq \text{Nucli } f$. Recíprocament, suposem que $f(\sum n_x x) = 0$, és a dir, que $\sum n_x = 0$. Sigui y un punt qualsevol de X ; com que X és arc-connex, per a cada $x \in X$ del sumatori anterior existeix un camí $\omega_x: I \longrightarrow X$ (i, per tant, un 1-símplex singular) tal que $\omega_x(0) = x$ i $\omega_x(1) = y$. Construïm, ara, la 1-cadena singular $\sum n_x \omega_x \in S_1(X)$; es verifica $\partial(\sum n_x \omega_x) = \sum n_x x - (\sum n_x)y = \sum n_x x$. Així, doncs, $\text{Nucli } f \subseteq V_0(X)$.

Com que $V_0(X) = \text{Nucli } f$ i f és un epimorfisme, aplicant el teorema d'isomorfisme, resulta

Teorema Si X és un espai arc-connex no buit, aleshores $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

6. L'homologia dels convexos de R^n

Sigui X un subconjunt convex de R^n ; és a dir, tal que si $x, y \in X$, tot el segment que uneix x amb y està contingut a X . Per exemple, tot R^n és convex, les boles E^n són convexes, les esferes S^n no ho són.

Teorema Si X és un subconjunt convex de R^n , es té

$$\begin{aligned} H_0(X) &\cong \mathbb{Z} \\ H_p(X) &= 0 \quad \text{per a tot } p \neq 0. \end{aligned}$$

Demostració:

La línia de la demostració és la següent:

Per a cada $p \geq 0$ construirem un homomorfisme de grups abelians

$$h_p : S_p(X) \longrightarrow S_{p+1}(X)$$

tal que l'homomorfisme $\partial h_p + h_{p-1} \partial : S_p(X) \longrightarrow S_p(X)$

sigui la identitat, per a tot $p > 0$. Suposem-lo construït. Aleshores, si z és un p -cicle de X , és a dir, si $z \in S_p(X)$ i $\partial z = 0$, es té

$$z = (\partial h_p + h_{p-1} \partial)(z) = \partial h_p(z) + h_{p-1} \partial(z) = \partial(h_p(z)),$$

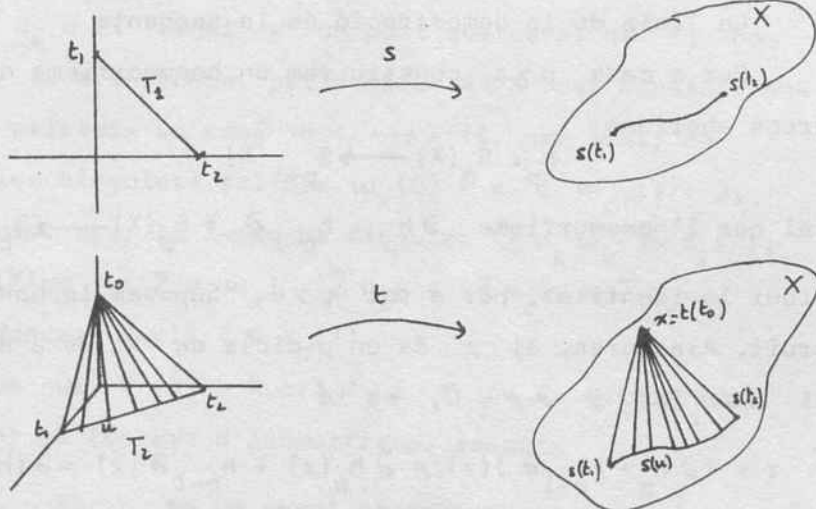
és a dir, z és la vora de $h_p(z)$. Per tant, per a $p > 0$, tot p -cicle és una p -vora, d'on $V_p(X) = C_p(X)$ i $H_p(X) = 0$.

A més a més, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ ja que tot subconjunt convex de R^n és, evidentment, arc-connex.

La demostració del teorema es redueix, doncs, a la construcció, per a cada p , de l'homomorfisme h_p . És suficient definir la imatge per h_p dels p -simplexs singulars de X . Sigui $s: T_p \rightarrow X$ un p -simplex singular de X ; aleshores definim un $(p+1)$ -simplex singular $t: T_{p+1} \rightarrow X$ de la manera següent

$$t(t_0, \dots, t_{p+1}) = \begin{cases} (1-t_0) s(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}) + t_0 x, & t_0 < 1 \\ x, & t_0 = 1 \end{cases}$$

on x és un punt arbitrari de X .



Geomètricament pensant, t restringit a la o -èssima cara de T_{p+1} és igual a s , t envia el vèrtex t_0 al punt escollit x , i els segments d'origen t_0 i final u als segments d'origen x i final $s(u)$. Observis que

aquesta construcció és possible ja que l'espai X és convex.

Per a estar segurs que t és un $(p+1)$ -simplex, hem de comprovar que és una aplicació contínua $T_{p+1} \longrightarrow X$. Per definició, l'únic punt de T_{p+1} en el que t podria no ésser contínua és el punt $t_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Per a demostrar la continuïtat en aquest punt hem de veure que

$$\lim_{t_0 \rightarrow 1} \|t(t_0, t_1, \dots, t_{p+1}) - x\| = 0$$

Ara bé,

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow 1} \|t(t_0, \dots, t_{p+1}) - x\| &= \lim_{t_0 \rightarrow 1} \left\| (1-t_0) s\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_p}{1-t_0}\right) - t_0 x - x \right\| \leq \\ &\leq \lim_{t_0 \rightarrow 1} \left((1-t_0) \left\| s\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_p}{1-t_0}\right) \right\| + \|x\| \right) \end{aligned}$$

Al ser T_p tancat i acotat i $s: T_p \longrightarrow X$ contínua, $s(T_p)$ és també acotat i, per tant, $\left\| s\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_p}{1-t_0}\right) \right\| + \|x\|$ és acotat al variar t_0 . Així, doncs, com que $1-t_0$ tendeix a 0 per $t_0 \rightarrow 1$, el límit buscat és zero i l'aplicació $t: T_{p+1} \longrightarrow X$ és contínua.

La correspondència $s \longmapsto t$ s'estén per linealitat de manera única a un homomorfisme de grups abelians

$$h_p: S_p(X) \longrightarrow S_{p+1}(X).$$

Hem de comprovar, ara, que

$$\partial h_p + h_{p-1} \partial = \text{id} : S_p(X) \longrightarrow S_p(X).$$

És evident que, per la construcció feta, $\partial_0 t = s$

i , per tant, $\partial_o h_p = \text{id}$. Anem a calcular $\partial_i h_p$:

$$\begin{aligned} (\partial_i (h_p(s)))(t_o, \dots, t_p) &= h_p(s)(t_o, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_p) = \\ &= (1-t_o) s\left(\frac{t_i}{1-t_o}, \dots, \frac{t_{i-1}}{1-t_o}, 0, \frac{t_i}{1-t_o}, \dots, \frac{t_p}{1-t_o}\right) + t_o x \end{aligned}$$

Però,

$$\begin{aligned} h_{p-1}(\partial_{i-1} s)(t_o, \dots, t_p) &= (1-t_o)(\partial_{i-1} s\left(\frac{t_i}{1-t_o}, \dots, \frac{t_p}{1-t_o}\right)) + t_o x = \\ &= (1-t_o) s\left(\frac{t_i}{1-t_o}, \dots, \frac{t_{i-1}}{1-t_o}, 0, \frac{t_i}{1-t_o}, \dots, \frac{t_p}{1-t_o}\right) + t_o x. \end{aligned}$$

Així, doncs, per a $1 \leq i \leq p+1$, es té

$$\partial_i (h_p s) = h_{p-1}(\partial_{i-1} s).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} (\partial h_p)_s &= \partial_o h_p s + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \partial_i h_p s = \partial_o h_p s + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i h_{p-1} \partial_{i-1} s = \\ &= s - h_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^{i-1} \partial_{i-1} s \right) = s - h_{p-1} \partial s, \end{aligned}$$

d'on $(\partial h_p + h_{p-1} \partial)(s) = s$ per a tot p -simplex singular s de X .

Aquesta construcció que hem fet es pot realitzar molt més generalment, com explicarem una mica més endavant.

6'. Propietats d'invariància dels grups d'homologia

La topologia estudia propietats dels espais que són invariants per transformacions contínues (homeomorfismes). És natural, doncs, que dos subespais de R^n que siguin homeomorfs (és a dir, topològicament equivalents) tinguin els mateixos grups d'homologia singular.

Si $f: Y \longrightarrow X$ és una aplicació contínua i s un p -símplex singular de Y , aleshores la composició $f_* s: T_p \longrightarrow X$ és un p -símplex singular de X . Aquest procés ens dóna, per a cada p , un únic homomorfisme de grups abelians

$$\begin{aligned} f_{\#}: S_p(Y) &\longrightarrow S_p(X) \\ c = \sum_i n_i s &\longmapsto f(c) = \sum_i n_i (f_* s) \end{aligned}$$

Ara bé, si $c \in C_p(Y)$, és a dir, si $\partial c = 0$, aleshores $\partial(f_{\#}(c)) = 0$, és a dir, $f_{\#}c \in C_p(X)$. En efecte, per a tot p -símplex singular s de Y es té

$$f_{\#}(\partial_i s)(t_0, \dots, t_{p-1}) = f(s(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}))$$

i

$$\begin{aligned} \partial_i(f_{\#} s)(t_0, \dots, t_{p-1}) &= (f_{\#} s)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}) = \\ &= f(s(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})), \end{aligned}$$

d'on

$$\partial_i f_{\#}(s) = f_{\#} \partial_i(s)$$

i, per tant,

$$\partial f_{\#} = f_{\#} \partial : S_p(Y) \longrightarrow S_{p-1}(X)$$

Així, si $\partial c = 0$, resulta $\partial(f_{\#}c) = f_{\#}(\partial c) = f(0) = 0$.

Per tant f induïx un homomorfisme de grups abelians

$$f_{\#} : C_p(Y) \longrightarrow C_p(X).$$

Però, si $c \in V_p(Y)$, és a dir, si $c = \partial d$ per una cadena $d \in S_{p+1}(Y)$, aleshores $f_{\#}c = f_{\#}\partial d = \partial(f_{\#}d) \in V_p(X)$, d'on l'homomorfisme $f_{\#} : C_p(Y) \longrightarrow C_p(X)$ ens dóna un homomorfisme de grups abelians

$$f_* : H_p(Y) \longrightarrow H_p(X).$$

Observis que si $f = \text{id} : X \longrightarrow X$, aleshores, trivialment, $f_* = \text{id} : H_p(X) \longrightarrow H_p(X)$, per a tot p . També, si $f : Y \longrightarrow X$ i $g : Z \longrightarrow Y$ són aplicacions contínues, és immediat comprovar que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_* : H_p(Z) \longrightarrow H_p(X)$, per a tot p .

Teorema Si $f : Y \longrightarrow X$ és un homeomorfisme, aleshores $f_* : H_p(Y) \longrightarrow H_p(X)$ és un isomorfisme, per a tot p .

Demostració:

Si $f : Y \longrightarrow X$ és un homeomorfisme, existeix una aplicació contínua $g : X \longrightarrow Y$ tal que $g \circ f = \text{id} : Y \longrightarrow Y$ i $f \circ g = \text{id} : X \longrightarrow X$. Aleshores es té

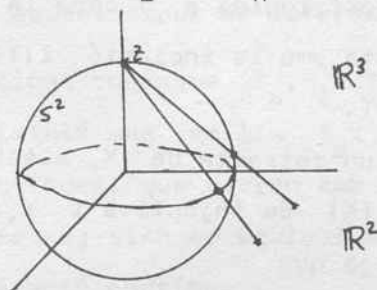
$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{id}_* = \text{id} : H_p(Y) \longrightarrow H_p(Y)$$

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \text{id}_* = \text{id} : H_p(X) \longrightarrow H_p(X)$$

d'on resulta que $f_* : H_p(Y) \longrightarrow H_p(X)$ és un isomorfisme per a tot p .

Exemples

1. Considerem l'esfera S^n submergida a l'espai euclidià $\mathbb{R}^{n+1}$ ($S^n = \{x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$). Siguin $z = (0, 0, \dots, 1)$ i $z' = (0, 0, \dots, -1)$ els pols nord i sud respectivament. Considerem $\mathbb{R}^n$ submergit a $\mathbb{R}^{n+1}$ com els punts de la forma $(x_1, \dots, x_n, 0)$.



Podem projectar estereogràficament des del pol nord z l'esfera sobre el pla equatorial (identificat amb $\mathbb{R}^n$), obtenint, així, una aplicació contínua

$$f: S^n - \{z\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$x \longmapsto$ punt de la recta zx que té darrera coordenada zero.

És immediat que f és un homeomorfisme. Per tant, aplicant el teorema anterior, els grups d'homologia de $S^n - \{z\}$ són els mateixos que els de $\mathbb{R}^n$, és a dir,

$$\begin{aligned} H_0(S^n - \{z\}) &\cong \mathbb{Z} \\ H_p(S^n - \{z\}) &= 0 \quad p > 0 \end{aligned}$$

• És evident que, per l'homeomorfisme anterior, $S^n - \{z, z'\}$ és homeomorf a $R^n - \{\text{origen}\}$. Per tant, per a tot p , $H_p(S^n - \{z, z'\}) \cong H_p(R^n - \{\text{origen}\})$.

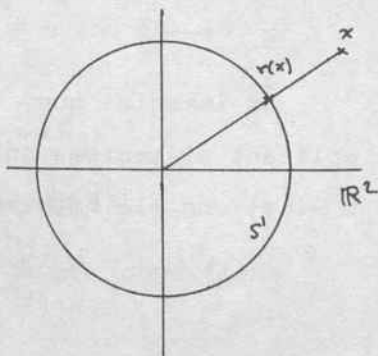
2. Es diu que un subespai Y d'un espai X és un retracte de X , si existeix una aplicació contínua $r: X \rightarrow Y$ que restringida a Y dóna la identitat; és a dir, que composta amb la inclusió $i: Y \rightarrow X$ compleix $r \circ i = \text{id}: Y \rightarrow Y$.

Si Y és un retracte de X , aleshores l'aplicació $i_*: H_p(Y) \rightarrow H_p(X)$ és injectiva i $r_*: H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ és exhaustiva, ja que

$$r_* i_* = (r \circ i)_* = \text{id}_* = \text{id}: H_p(Y) \rightarrow H_p(Y).$$

Per tant, per a tot p , $H_p(Y)$ és un sumand directe de $H_p(X)$.

Per exemple, l'esfera S^{n-1} és un retracte de $R^n - \{\text{origen}\}$. La retracció $r: R^n - \{\text{origen}\} \rightarrow S^{n-1}$ assigna a cada punt $x \in R^n$, $x \neq \text{origen}$, el punt d'intersecció de S^{n-1} amb la recta que passa per x i l'origen. Així, doncs, els grups d'homologia de S^{n-1} són sumands directes dels de $R^n - \{\text{origen}\}$.



El teorema anterior ens diu que els grups d'homologia singular són uns invariants topològics. Resulta, però, que espais no topològicament equivalents però que es puguin deformar l'un en l'altre per un procés de deformació contínua, com el de la deformació de camins de la lliçó 2, tenen també els mateixos grups d'homologia. Anem a descriure aquest tipus de deformació.

Dues aplicacions contínues $f_0, f_1: Y \longrightarrow X$ es diuen homotopes si existeix una família $f_s: Y \longrightarrow X$, $0 \leq s \leq 1$, d'aplicacions contínues, que varien amb continuïtat respecte al paràmetre s ; això és equivalent a dir que existeix una aplicació contínua

$$F: Y \times I \longrightarrow X$$

tal que $F(\cdot, 0) = f_0$, $F(\cdot, 1) = f_1$. (En tal cas, es posa $f_s = F(\cdot, s)$).

Per exemple, les aplicacions

$$f_0, f_1: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

donades per

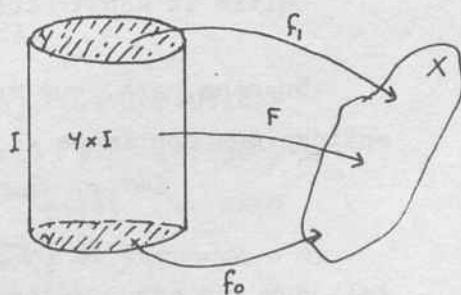
$$f_0(p) = (0, 0)$$

$$f_1(p) = p$$

són homotopes. Podriem

posar

$$f_s(p) = (1-s)p + s(0, 0).$$



Teorema Si $f_0, f_1: Y \longrightarrow X$ són aplicacions homotopes, aleshores, per a tot p ,

$$f_{0*} = f_{1*}: H_p(Y) \longrightarrow H_p(X)$$

La demostració d'aquest teorema és una generalització de la demostració del teorema de l'apartat 6. Si $f_{0\#}$ i $f_{1\#}$ indiquen les aplicacions induïdes per f_0 i f_1 sobre les cadenes singulars $S_p(Y) \longrightarrow S_p(X)$, es tracta, per a cada p , de definir un homomorfisme

$$h_p: S_p(Y) \longrightarrow S_{p+1}(X)$$

tal que

$$\partial_X h_p + h_{p-1} \partial_Y = f_{0\#} - f_{1\#}: S_p(Y) \longrightarrow S_p(X)$$

Aleshores, si z és un p -cicle de Y , tindrem $\partial_Y z = 0$ i, per tant, $(f_{0\#} - f_{1\#})(z) = (\partial_X h_p + h_{p-1} \partial_Y)(z) = \partial_X(h_p z)$ serà una vora a X , d'on, a $H_p(X)$, representarà l'element zero. Per tant, $f_{0*} - f_{1*}$ serà l'homomorfisme zero de $H_p(Y)$ a $H_p(X)$, per a tot p .

Omitim la construcció dels homomorfismes h_p .

Suposem, ara, que tenim dos espais Y i X i aplicacions contínues

$$f: Y \longrightarrow X$$

$$g: X \longrightarrow Y$$

tals que les composicions $g \circ f$ i $f \circ g$ siguin homotopes a les identitats de Y i X , respectivament. Es diu, aleshores, que els espais Y i X són del mateix tipus

d'homotopia (Intuitivament, vol dir que els espais Y i X es poden deformar amb continuïtat l'un en l'altre).

En aquest cas, al passar als homomorfismes induïts en els grups d'homologia, resulta

$$g_* \circ f_* = \text{id}: H_p(Y) \longrightarrow H_p(X)$$

$$f_* \circ g_* = \text{id}: H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$$

Per tant, tant f_* com g_* donen un isomorfisme entre els grups abelians $H_p(Y)$ i $H_p(X)$, per a tot p .

Exemples

1. Si X es redueix a un punt i Y és del mateix tipus d'homotopia que X , es diu que Y és contràctil. En aquest cas, l'homologia de Y és

$$H_0(Y) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_p(Y) = 0 \quad p \neq 0$$

Per exemple, els espais euclidians són contràctils,

$S^1 - \{\text{un punt}\}$ és un espai contràctil.

2. Si $Y = S^{n-1}$ i $X = \mathbb{R}^n - \{\text{origen}\}$, la inclusió $i: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{\text{origen}\}$ i la retracció $r: \mathbb{R}^n - \{\text{origen}\} \longrightarrow S^{n-1}$ no verifiquen, només, $r \circ i = \text{id}: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$, sino que $i \circ r: \mathbb{R}^n - \{\text{origen}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{\text{origen}\}$ és homotopa a la identitat. En efecte, hem de definir una aplicació contínua

$$F: (\mathbb{R}^n - \{\text{origen}\}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{\text{origen}\}$$

tal que $F(,0) = i_* r$, $F(,1) = \text{id}$.

Posem

$$F(x,s) = (1-s) r(x) + sx.$$

Aplicant el teorema anterior, tenim, doncs, per a tot p ,

$$H_p(R^n - \{\text{origen}\}) \cong H_p(S^{n-1})$$

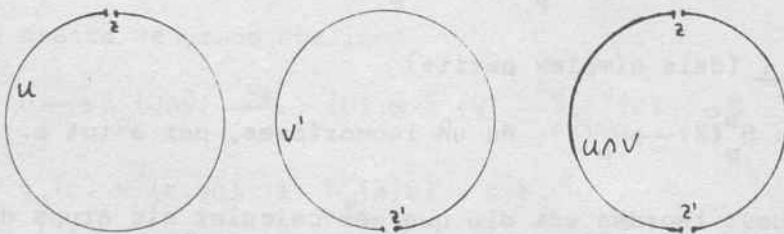
Combinant aquest resultat amb el de l'exemple 1 de la sèrie anterior, obtenim

$$H_p(S^n - \{z, z'\}) \cong H_p(S^{n-1}).$$

7. La successió exacta de Mayer-Vietoris

Coneixem, de moment, els grups d'homologia d'alguns dels subespais de R^n més usuals; per exemple, de R^n , de les boles E^n , de tots els convexos de R^n , i, pels teoremes de 6', de qualsevol subespai de R^n del mateix tipus d'homotopia que algun dels anteriors.

El primer espai usual del que no li coneixem els grups d'homologia és l'esfera S^n . Considerem $n=1$. Aleshores, no coneixem $H_p(S^1)$, però sí $H_p(S^1 - \{z\})$, $H_p(S^1 - \{z'\})$ i $H_p(S^1 - \{z, z'\})$ (z, z' els pols nord i sud, respectivament), ja que $S^1 - \{z\}$ i $S^1 - \{z'\}$ són homeomorfs a R^1 (exemple 1 de 6') i $S^1 - \{z, z'\}$ és homeomorf a $R^1 - \{\text{origen}\}$, que és del mateix tipus d'homotopia que 2 punts. Posem $U = S^1 - \{z\}$, $V = S^1 - \{z'\}$; aleshores $U \cap V = S^1 - \{z, z'\}$ i $U \cup V = S^1$. Clarament, $\{U, V\}$ és un recobriment obert de S^1 .



Anem a donar un mètode (la successió exacta de Mayer-Vietoris) que ens permetrà calcular l'homologia d'un espai coneixent l'homologia dels membres U, V d'un recobriment obert i l'homologia de la intersecció $U \cap V$.

La construcció d'aquesta successió exacta es basa, essencialment, en les consideracions següents.

Sigui $\mathcal{U} = \{U, V\}$ un recobriment obert de X . Denotem per $S_p^{\mathcal{U}}(X)$ el subgrup de $S_p(X)$ generat pels p -símplex singulars $s: T_p \longrightarrow X$ tals que $s(T_p) \subseteq U$ o bé $s(T_p) \subseteq V$; és a dir, si $c \in S_p^{\mathcal{U}}(X)$, aleshores $c = \sum n_s s$ amb $s(T_p) \subseteq U$ o bé $s(T_p) \subseteq V$. És evident que si $s(T_p) \subseteq U$, també $(\partial_i s)(T_{p-1}) \subseteq U$ i igual per V . Per tant, l'operador vora ens dóna un operador vora

$$\partial^{\mathcal{U}}: S_p^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow S_{p-1}^{\mathcal{U}}(X),$$

i tenim una inclusió natural

$$i_{\#}: S_p^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow S_p(X)$$

que compleix

$$\partial i_{\#} = i_{\#} \partial^{\mathcal{U}}.$$

Posem $C_p^{\mathcal{U}}(X) = \text{Nuc } \partial^{\mathcal{U}}$, $V_p^{\mathcal{U}}(X) = \text{Im } \partial^{\mathcal{U}}$, $H_p^{\mathcal{U}}(X) = C_p^{\mathcal{U}}(X) / V_p^{\mathcal{U}}(X)$.

L'aplicació $i_{\#}$ ens indueix, aleshores, un homomorfisme de grups abelians $i_{\#}: H_p^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow H_p(X)$.

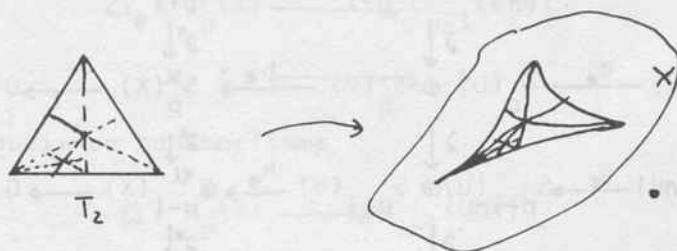
Teorema 1 (dels símplex petits)

$i_{\#}: H_p^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow H_p(X)$ és un isomorfisme, per a tot p .

Aquest teorema ens diu que per calcular els grups d'homologia de l'espai X és suficient considerar símplex petits, és a dir, símplex singulars la imatge dels quals estigui continguda en algun membre del recobriment obert.

La demostració del teorema és llarga i ferragosa, però no per això menys interessant. Intuitivament, és quasi evident.

Donada una cadena c de X hem de construir una cadena $c' = \sum n_s s$ de X tal que els símplex s que apareixen



a la seva composició tinguin llur imatge a U o a V i tal que $\partial c = \partial c'$. Més encara, volem que si c és un cicle, c' sigui homòleg a c . Això s'aconsegueix subdividint la cadena c repetidament fins que els símplex siguin prou petits perquè verifiquin la condició desitjada.

Sigui, doncs, X un subespai de $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{U} = \{U, V\}$ un recobriment obert de X . Aleshores, per a cada p tenim una successió exacta de grups abelians

$$0 \longrightarrow S_p(\mathcal{U} \cap V) \xrightarrow{g_{\#}} S_p(U) \oplus S_p(V) \xrightarrow{h_{\#}} S_p^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

on $g_{\#}(c) = (c, -c)$ i $h_{\#}(a, b) = a + b$.

A més a més, si considerem els operadors vora a $S_p^{\mathcal{U}}(X)$, $S_p(U) \oplus S_p(V)$ i $S_p(\mathcal{U} \cap V)$, respectivament, tenim un diagrama commutatiu com el següent (on agafem la vora a $S_p(U) \oplus S_p(V)$ com la suma directa de les vores actuant a cada component, és a dir, $\partial(a, b) = (\partial a, \partial b)$).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial^u & \\
 0 \longrightarrow & S_{p+1}(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & S_{p+1}(U) \oplus S_{p+1}(V) & \xrightarrow{h_*} & S_{p+1}^u(X) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial^u & \\
 0 \longrightarrow & S_p(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & S_p(U) \oplus S_p(V) & \xrightarrow{h_*} & S_p^u(X) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial^u & \\
 0 \longrightarrow & S_{p-1}(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & S_{p-1}(U) \oplus S_{p-1}(V) & \xrightarrow{h_*} & S_{p-1}^u(X) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial^u & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Aleshores, és immediat que g_* induïx un homomorfisme $g_*: H_p(U \cap V) \longrightarrow H_p(U) \oplus H_p(V)$ i que h_* induïx un homomorfisme $h_*: H_p(U) \oplus H_p(V) \longrightarrow H_p^u(X) \cong H_p(X)$. Anem a definir un homomorfisme $\Delta: H_p(X) \cong H_p^u(X) \longrightarrow H_{p-1}(U \cap V)$:

Sigui $z \in S_p^u(X)$ un cicle.

Aleshores $\partial^u z = 0 \in S_{p-1}^u(X)$.

Sigui $(a, b) \in S_p(U) \oplus S_p(V)$

una antiimatge de z per h (que és exhaustiva). Per la commutativitat del diagrama tenim

$$\begin{array}{ccccc}
 (a, b) & \xrightarrow{h_*} & z & & \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial^u & & \\
 c & \xrightarrow{g_*} & (\partial a, \partial b) & \xrightarrow{h_*} & 0 \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 \partial c & \xrightarrow{g_*} & g_* \partial c & & \\
 \parallel & & \parallel & & \\
 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

$$h_* \partial(a, b) = \partial^u h_*(a, b) = \partial^u z = 0$$

i per l'exactitud de les files del diagrama, si $h_* \partial(a, b) = 0$, existeix un $c \in S_{p-1}(U \cap V)$ tal que $g_* c = \partial(a, b)$. Aquest c és un cicle, ja que $g_* \partial c = \partial g_* c = \partial \partial(a, b) = 0$ i com que g_* és injectiva, $\partial c = 0$.

Podem definir, doncs, una correspondència

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\#} : C_p^u(X) & \longrightarrow & C_{p-1}(U \cap V) \\ z & \longmapsto & c \end{array}$$

que indueix un homomorfisme

$$\Delta : H_p^u(X) \longrightarrow H_{p-1}(U \cap V)$$

Per veure que Δ està ben definit, s'ha de comprovar dues coses:

a) Δ no depèn del cicle representant escollit; és a dir, si

$\bar{z} = \bar{z}' \in H_p^u(X)$, $\Delta(\bar{z}) = \Delta(\bar{z}')$; és a dir, si dos cicles es diferencien en una vora, llurs imatges per Δ també.

b) L'aplicació Δ és independent de l'antiimatge de z que haguem agafat per $h_{\#}$.

Composant els homomorfismes g_* , h_* , Δ i l'isomorfisme del teorema anterior, obtenim una successió llarga

$$\dots \rightarrow H_p(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{h_*} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{g_*} \dots$$

l'exactitud de la qual és fàcil comprovar.

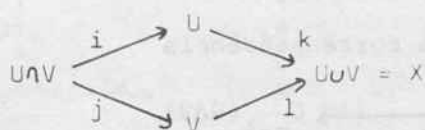
Teorema 2 (Mayer-Vietoris)

Si $\mathcal{U} = \{U, V\}$ és un recobriment obert de X , es té una successió exacta llarga

$$\dots \rightarrow H_p(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_p(U) + H_p(V) \xrightarrow{h_*} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{g_*} \dots$$

Observació Com estan definides g_* i h_* ?

Si definim les inclusions



aleshores, $g_*(x) = (i_*(x), -j_*(x))$ i $h_*(y, z) = k_*(y) + l_*(z)$.

Δ pot interpretar-se geomètricament així: Tota classe d'homologia $x \in H_p(X) \cong H_p^u(X)$ pot interpretar-se com un cicle $c+d$ amb $c \in S_p(U)$ i $d \in S_p(V)$ (pel teorema 1). Aleshores, Δx està representada pel cicle $\partial c \in S_{p-1}(U \cup V)$.

7'. Grups d'homologia de les esferes. Aplicacions.

Anem a calcular, de primer, els grups d'homologia de S^1 . Com que S^1 és arc-connex, pel teorema de la lliçó 5, tenim

$$H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Descomposem, ara, S^1 com hem indicat al començament de la lliçó 7. Posem $U = S^1 - \{z\}$, $V = S^1 - \{z'\}$. Aleshores, $\{U, V\}$ és un recobriment obert de S^1 i aplicant la successió de Mayer-Vietoris tenim, per a $p > 1$,

$$H_p(U) \oplus H_p(V) \longrightarrow H_p(S^1) \longrightarrow H_{p-1}(U \cup V)$$

Com que U i V són contràctils i $U \cup V$ és del mateix tipus d'homotopia que 2 punts, els grups $H_p(U)$, $H_p(V)$ i $H_{p-1}(U \cup V)$ s'anul·len per a $p \geq 2$, d'on

$$H_p(S^1) = 0 \quad \text{per a } p \geq 2.$$

Considerem, finalment, el cas $p = 1$. Aplicant altre cop

Mayer-Vietoris tenim una successió exacta

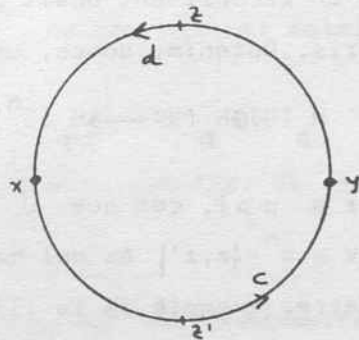
$$H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cup V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

Com que U i V són contràctils, $H_1(U) = H_1(V) = 0$, d'on resulta que Δ és un monomorfisme i per tant

$$H_1(S^1) \cong \text{Im } \Delta = \text{Nuc } g_*.$$

Hem de determinar, doncs, el nucli de g_* .

$H_0(U)$ es pot considerar com el grup cíclic infinit generat per un punt $x \in U$. Igualment, $H_0(V)$ està generat per un punt $y \in V$. Per tant, tot element de $H_0(U) \oplus H_0(V)$ és de la forma $ax + by$ amb a, b enters.



Ara bé, $g_*(ax+by) = (i_*(ax+by), -j_*(ax+by))$ (seguint la notació de l'observació final de la lliçó 7). Però si suposem $g_*(ax+by) = 0$ ha d'ésser $i_*(ax+by) = 0$ i $j_*(ax+by) = 0$. Com que U i V són arc-connexos, això només pot passar si $b = -a$. Així, doncs, el nucli de g_* està format pels elements de la forma $a(x-y) \in H_0(U \cup V)$, és a dir, és el grup cíclic infinit generat per $x-y$. Per tant.

$$H_1(S^1) \cong \text{Nuc } g_* \cong \mathbb{Z}.$$

Geomètricament podem donar un generador de $H_1(S^1)$ de la següent manera: siguin c i d les cadenes de U i V ,

respectivament, indicades a la figura anterior. Aleshores es té $\partial c = y - x = -\partial d$, i, per tant, $c+d$ és un cicle de $S^1 = U \cup V$. $c+d$ genera $H_1(S^1)$.

El càlcul dels grups d'homologia de S^n , $n > 1$, és, ara, un exercici molt fàcil. Considerem com abans els pols nord z i sud z' de S^n i posem $U = S^n - \{z\}$, $V = S^n - \{z'\}$. $\{U, V\}$ és un recobriment obert de S^n i podem aplicar Mayer-Vietoris. Obtenim, doncs, una successió exacta

$$H_p(U) \oplus H_p(V) \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow H_{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{p-1}(U) \oplus H_{p-1}(V)$$

Per a $p > 1$, com que U i V són homeomorfs a R^n i $U \cap V = S^{n-1}$ és del mateix tipus d'homotopia que S^{n-1} (darrer exemple de la lliçó 6), resulta $H_p(U) = H_p(V) = 0$ per a $p > 1$. Obtenim, doncs, per a $p > 1$, un isomorfisme

$$H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1}),$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} H_p(S^n) &= 0 & \text{si } p \neq n \\ H_p(S^n) &\cong \mathbb{Z} & \text{si } p = n \end{aligned} \quad p > 1$$

Per a $p = 1$ tenim

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(S^n) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(S^{n-1}) & \xrightarrow{g} & H_0(U) \oplus H_0(V) \\ & & & & \cong & & \cong \\ & & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

Δ és, doncs, monomorfisme i g , també, d'on $H_1(S^n) = 0$.

Resumint,

Teorema 3 Per a $n \geq 1$ es té

$$H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_p(S^n) = 0 \quad p \neq 0, n.$$

Anem, ara, a donar algunes implicacions geomètriques, conseqüències immediates del teorema anterior.

Corol.lari 1 Si $n \neq m$, S^n i S^m no són mai del mateix tipus d'homotopia.

Demostració:

Ja que els grups d'homologia no són isomorfs: si $n \neq m$, $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ i $H_n(S^m) = 0$.

Corol.lari 2 Si $n \neq m$, R^n i R^m no són mai homeomorfs.

Demostració:

Si R^n i R^m fossim homeomorfs, també ho serien $R^n - \{\text{origen}\}$ i $R^m - \{\text{origen}\}$. Però, com que S^{n-1} és del mateix tipus d'homotopia que $R^n - \{\text{origen}\}$ i S^{m-1} del mateix tipus d'homotopia que $R^m - \{\text{origen}\}$, resultaria que S^{n-1} i S^{m-1} serien del mateix tipus d'homotopia, en contradicció amb el corol.lari anterior.

Corol.lari 3 L'esfera S^{n-1} no pot ésser mai un retractor de la bola E^n .

Demostració:

Si S^{n-1} fos un retractor de E^n , per l'exemple 2 de la lliçó 7, els grups d'homologia de S^{n-1} serien subgrups dels

grups d'homologia de E^n ; però, $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ i, en canvi $H_{n-1}(E^n) = 0$.

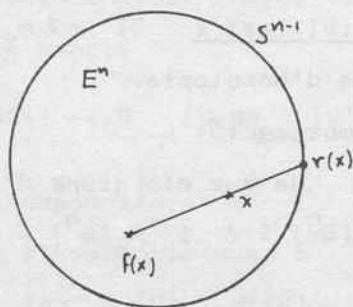
Corol.lari 4 (teorema del punt fix de Brouwer)

Tota aplicació contínua $f: E^n \rightarrow E^n$ té un punt fix.

Demostració:

La demostració és la mateixa que en el cas 2-dimensional (teorema de la lliçó 3).

Suposem que, per a tot $x \in E^n$, $f(x) \neq x$. Aleshores, definim $r: E^n \rightarrow S^{n-1}$ de la manera següent: $r(x)$ és el punt d'intersecció de S^{n-1} amb la semirecta d'origen $f(x)$ que passa



per x . L'aplicació r és contínua i si $i: S^{n-1} \hookrightarrow E^n$ és la inclusió, es té $r \circ i = \text{id}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Per tant S^{n-1} seria un retracte de E^n , en contradicció amb el corol.lari anterior.

8. El teorema de Hopf

Donada una aplicació contínua $f: S^n \longrightarrow S^n$, $n \geq 1$, induïx un homomorfisme entre els n -èssims grups d'homologia

$$f_*: H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n).$$

Ara bé, hem vist que $H_n(S^n)$ és un grup cíclic infinit; per tant, l'homomorfisme f_* està determinat per la imatge d'un generador α de $H_n(S^n)$. Sigui

$$f_*(\alpha) = d\alpha, \quad d \in \mathbb{Z}$$

Aquest enter d és independent de l'elecció del generador de $H_n(S^n)$, ja que $f_*(-\alpha) = -f_*(\alpha) = -d\alpha = d(-\alpha)$.

L'enter d es diu el grau de l'aplicació f ; el denotarem per $d(f)$. Fou introduït per L. Brouwer cap el 1920 per a estudiar aplicacions contínues entre esferes i el seu ús ha estat de gran utilitat a la topologia. És la generalització estricta de l'índex d'un camí tancat en dimensions superiors.

Les següents propietats del grau d'una aplicació contínua $f: S^n \longrightarrow S^n$ són conseqüència immediata del que ja sabem:

- a) Si $f = \text{identitat}$, $d(f) = 1$.
- b) Si $f, g: S^n \longrightarrow S^n$ són contínues, $d(g \circ f) = d(g) \cdot d(f)$.
- c) Si $f = \text{constant}$, $d(f) = 0$.
- d) Si $f \simeq g$ són homòtopes, $d(f) = d(g)$.

El recíproc de d) també és cert: si dues aplicacions contínues $f, g: S^n \rightarrow S^n$ tenen el mateix grau, aleshores són homotopes. És un teorema de H. Hopf, la demostració del qual escapa del marc de la teoria d'homologia. Aquest teorema, que aquí no farem servir, és molt important en l'estudi de classes d'homotopia d'aplicacions contínues de l'esfera en sí mateixa, ja que ens diu que el grau d'una aplicació és un invariant algebraic complet.

Si $n=1$, tota aplicació contínua $f: S^1 \rightarrow S^1$ és un camí tancat a S^1 i el grau de f coincideix amb l'índex del camí. Sabem ja, doncs, que pel que hem vist a la lliçó 3, el grau de l'aplicació $f: S^1 \rightarrow S^1$ donada per $f(t) = e^{2\pi i n t}$ és, precisament, n . I no només això, sino que la proposició de la lliçó 3 ens permet afirmar que dues aplicacions de S^1 a S^1 (camins tancats a S^1) que tinguin el mateix grau són homotpes (és un cas particular del teorema de Hopf esmentat més amunt).

Ens interessa en particular el grau de l'aplicació antipodal $A: S^n \rightarrow S^n$ (que aplica cada punt de S^n en el seu punt diametralment oposat). Com que la composició de l'aplicació antipodal amb sí mateixa és la identitat, en virtut de les propietats a) i b) tenim

$$d(A) \cdot d(A) = d(A \cdot A) = d(\text{id}) = 1$$

d'on

$$d(A) = \pm 1.$$

Ens proposem determinar quan val 1 i quan -1.

Necessitem, primer, però, una observació sobre la successió exacta de Mayer-Vietoris introduïda a la lliçó 7.

Suposem que $\mathcal{U} = \{U, V\}$ és un recobriment obert de X i $\mathcal{U}' = \{U', V'\}$ un recobriment obert de Y . Suposem que tenim una aplicació contínua $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(U) \subseteq U'$ i $f(V) \subseteq V'$. Aleshores f induïx homomorfismes de grups abelians

$$\begin{aligned} f_{\#} : S_p(X) &\longrightarrow S_p(Y) \\ S_p(U) &\longrightarrow S_p(U') \\ S_p(V) &\longrightarrow S_p(V') \\ S_p(U \cap V) &\longrightarrow S_p(U' \cap V') \\ S_p^{\mathcal{U}}(X) &\longrightarrow S_p^{\mathcal{U}'}(Y) \end{aligned} \quad \text{per a tot } p,$$

que fan commutatiu el diagrama de files exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow S_p(U \cap V) & \xrightarrow{g_{\#}} & S_p(U) \oplus S_p(V) & \xrightarrow{h_{\#}} & S_p(X) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \\ 0 \longrightarrow S_p(U' \cap V') & \xrightarrow{g'_{\#}} & S_p(U') \oplus S_p(V') & \xrightarrow{h'_{\#}} & S_p(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Designem per f_* els homomorfismes entre grups d'homologia

$$\begin{aligned} f_* : H_p(X) &\longrightarrow H_p(Y) \\ H_p(U) &\longrightarrow H_p(U') \\ H_p(V) &\longrightarrow H_p(V') \\ H_p(U \cap V) &\longrightarrow H_p(U' \cap V') \end{aligned}$$

induits per f .

És immediat comprovar, aleshores, que el següent diagrama de files exactes és commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow H_p(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & H_p(U) \oplus H_p(V) & \xrightarrow{h_*} & H_p(X) & \rightarrow & H_{p-1}(U \cap V) \rightarrow \dots \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
 \dots \rightarrow H_p(U' \cap V') & \xrightarrow{g'_*} & H_p(U') \oplus H_p(V') & \xrightarrow{h'_*} & H_p(Y) & \rightarrow & H_{p-1}(U' \cap V') \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Aquesta propietat s'expressa dient que la successió de Mayer-Vietoris és natural.

Lema L'aplicació $f: S^n \rightarrow S^n$, $n \geq 1$, donada per

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

té grau -1 .

Demostració:

Sigui $\mathcal{U} = \{U, V\}$ el recobriment obert de S^n considerat a 7'. És clar que $f(U) \subseteq U$ i $f(V) \subseteq V$.

Procedirem per inducció.

Per a $n = 1$, la naturalitat de la successió de Mayer-Vietoris ens dona un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc}
 H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(U \cup V) \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
 H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(U \cup V)
 \end{array}$$

on Δ és injectiva.

Sigui α un generador de $H_1(S^1)$. α està representat per un 1-cicle de S^1 $a+b$ tal que $\partial a = x - y = -\partial b$ i $\Delta(\alpha)$ està representat per $x - y$. Aleshores

$$\Delta f_*(\alpha) = f_* \Delta(\alpha) = f_*(x - y) = y - x = \Delta(-\alpha),$$

i com que Δ és injectiva, resulta $f_*(\alpha) = -\alpha$, i, per tant, $d(f) = -1$.

Suposem cert el lema fins a la dimensió $n-1$ i tornem a aplicar la naturalitat de Mayer-Vietoris al recobriment anterior. Tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

on Δ és un isomorfisme (ja que $n \geq 2$).

Si α és un generador de $H_n(S^n)$, es té, aleshores

$$f_*(\alpha) = \Delta^{-1} f_* \Delta(\alpha) = \Delta^{-1} \Delta f_*(\alpha) = \Delta^{-1} \Delta(-\alpha) = -\alpha.$$

Proposició 1 Si $A: S^n \rightarrow S^n$ és l'aplicació antipodal, aleshores, $d(A) = (-1)^{n+1}$.

Demostració:

L'aplicació antipodal A ve donada per

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_{n+1})$$

i és, per tant, la composició de les aplicacions

$$\begin{aligned} f_i: S^n &\longrightarrow S^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Ara bé, cada aplicació f_i anterior es pot descomposar com $f_i = h_i^{-1} \cdot f_1 \cdot h_i$ on h_i és l'aplicació que intercanvia la primera i la i -èsima coordenades, que és, evidentment, un homeomorfisme. Per tant,

$$\begin{aligned} d(A) &= d(f_1) \cdot d(f_2) \cdots d(f_{n+1}) = d(f_1) \cdot d(h_2^{-1} f_1 h_2) \cdots d(h_{n+1}^{-1} f_1 h_{n+1}) = \\ &= d(f_1) \cdot d(h_2^{-1}) \cdot d(f_1) \cdot d(h_2) \cdots d(h_{n+1}^{-1}) \cdot d(f_1) \cdot d(h_{n+1}) = \end{aligned}$$

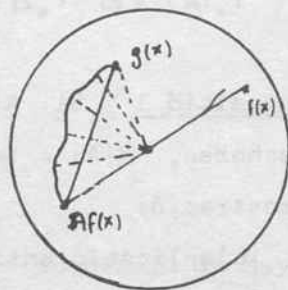
$$= d(f_1)^{n+1} = (-1)^{n+1},$$

com resulta d'aplicar les propietats a), b), d) i el lema anterior.

Proposició 2 Si $f, g: S^n \rightarrow S^n$ són aplicacions contínues que no coincideixen en cap punt, aleshores g és homotopa a Af .

Demostració:

La idea de la demostració és la següent: Com que per a tot $x \in S^n$, $f(x) \neq g(x)$, el segment de $Af(x)$ a $g(x)$ no passa per l'origen. Projectant aquest segment desde l'origen sobre S^n s'obté un camí de $Af(x)$ a $g(x)$ damunt S^n . Aleshores, l'homotopia entre Af i g ve donada deformant les aplicacions sobre aquest camí.



Formalment, la deformació ve donada per

$$F: S^n \times I \longrightarrow S^n$$

$$(x, t) \longmapsto \frac{(1-t)Af(x) + tg(x)}{\|(1-t)Af(x) + tg(x)\|}$$

F és, clarament, contínua, $F(x, 0) = Af(x)$ i $F(x, 1) = g(x)$.

Estem ara ja en condicions d'abordar la qüestió de l'existència o no de camps vectorials tangents continus sobre S^n que no s'anul·lin a cap punt. Si $n = 2m+1$ és senar,

aleshores sempre existeixen camps vectorials tangents continus sobre S^{2m+1} que no s'anul·len a cap punt. N'hi ha prou d'assignar a cada punt $(x_1, x_2, \dots, x_{2m+1}, x_{2m+2})$ el vector $(x_2, -x_1, \dots, x_{2m+2}, -x_{2m+1})$.

En canvi, si l'esfera és de dimensió parell $2m$, anem a veure que no existeixen camps amb les condicions esmentades, generalitzant alguns dels resultats vistos per a S^2 .

Corol·lari 1 Si $f: S^{2m} \rightarrow S^{2m}$ és contínua, o bé té un punt fix o bé existeix un punt que s'aplica en el seu antipodal.

Demostració:

Si $f(x) \neq x$ per a tot x , per la proposició anterior tenim $f \simeq A$, d'on $d(f) = d(A) = (-1)^{2m+1} = -1$.

Si $f(x) \neq A(x)$ per a tot x , per la proposició anterior tenim $f \simeq A \circ A = \text{id}$, d'on $d(f) = d(\text{id}) = 1$.

Arribem, així, a una contradicció.

Corol·lari 2 No existeix cap aplicació contínua d'una esfera de dimensió parell en sí mateixa, tal que per a tot $x \in S^n$, x i $f(x)$ siguin ortogonals.

Corol·lari 3 (teorema de Hopf)

Tot camp vectorial tangent continu sobre S^{2m} s'anul·la al menys en un punt.

Demostració:

Suposem que existís un camp vectorial tangent continu

$\vec{v}$ sobre S^{2m} , que no s'anul·lés a cap punt; aleshores podem definir un camp vectorial tangent unitari per

$$\vec{v}'(x) = \frac{\vec{v}(x)}{\|\vec{v}(x)\|} \quad \text{per a tot } x \in S^{2m}.$$

$\vec{v}'$ ens defineix, doncs, una aplicació contínua

$$f: S^{2m} \longrightarrow S^{2m}$$

tal que, per a tot $x \in S^{2m}$ $f(x)$ és l'extrem del vector

$\vec{v}'(x)$ amb origen l'origen de coordenades. Però, x i $f(x)$ són ortogonals, per a tot $x \in S^{2m}$, en contradicció amb el corol·lari anterior.

Publicaciones del I.C.E.
de la Universidad de Barcelona

Documentos	1	M. Siguán, E. Valentí, M. Freixa. Algunos datos estadísticos sobre el alumnado de bachiller en Barcelona. Septiembre 1971.
	2	Juan Estruch. El coste familiar de la educación, 1.º informe. Septiembre 1971. Agotado.
	3	Adalberto Ferrández. La enseñanza individualizada en la E.G.B., 1.º informe. Septiembre 1971. Agotado.
	4	Jaime Serramona. Pedagogía institucional, 1.º informe. Septiembre 1971. Agotado.
	5	María Forns. Pruebas para medir el conocimiento de una lengua, I. Septiembre 1971. Agotado.
	6	María Plá. Pruebas para medir el conocimiento de una lengua, II. Septiembre 1971. Agotado.
	7	Montserrat Freixa. El condicionamiento social de las aptitudes intelectuales y su influencia sobre el rendimiento escolar, 1.º informe. Septiembre 1971. Agotado.
	8	Fernando de Cea y Francisco Arteaga. Informe sobre 5.º Experimental en E.G.B. Septiembre 1971.
	9	Informe de las actividades del I.C.E. de la Universidad de Barcelona. Septiembre 1971. Agotado.
	A 10	Pedro Batallé. Estadísticas educativas, 1.º informe. Diciembre 1971. Agotado.
	A 11	Juan Estruch. El coste familiar de la educación, 2.º informe. Diciembre 1971. Agotado.
	A 12	Jaime Serramona. Ensayo de Pedagogía Institucional, 2.º informe. Diciembre 1971. Agotado.
	A 13	Adalberto Ferrández. Enseñanza individualizada, 2.º informe. Diciembre 1971. Agotado.
	A 14	Juan Mestres. Los problemas psicopedagógicos planteados por el bilingüismo, 1.º informe. Diciembre 1971. Agotado.
	A 15	José M. Doménech. Tabulación de encuestas: tablas a simple y doble entrada para el análisis de los resultados. Marzo 1972.
	A 16	E. Torá, J. Lahosa, M. Porter y S. Mallas. Seminario de cine infantil (Psicopedagogía de la imagen). Marzo 1972.
A 16 bis		José M. Doménech. Tratamiento de la información con ordenadores digitales. Junio 1972.

- A 17** José M. Doménech. **Programa CORR. Cálculo de medias. Desviaciones tipo. Coeficiente de correlación lineal y coeficientes de correlación múltiple**, Manual de utilización. Junio 1972.
- A 18** José M. Doménech. **Programas BARE. Baremación de tests psicológicos, cálculo del baremo, características estadísticas y pruebas de normalidad de la distribución**. Manual de utilización. Junio 1972.
- A 19** **Informe de las actividades del I.C.E. De La Universidad de Barcelona. Curso 1971-72**. Septiembre 1972.
- A 19 bis** José M. Doménech. **Programa de análisis factorial. Programa A.F.A.C.** Manual de utilización. Junio 1972.
- A 20** Jaime Serramona. **Ensayo de Pedagogía Institucional, 3.º informe**. Septiembre 1972.
- A 21** Juan Mestres. **Problemas psicopedagógicos del bilingüismo, 2.º informe**. Septiembre 1971. Agotado.
- A 22** **Jornadas de psicopedagogía de la imagen visual**. Noviembre 1972.
- A 23** Javier Barragán. **Elementos de matemáticas para profesores de E.G.B.** Septiembre 1972.
- A 24** Adalberto Ferrández. **Enseñanza individualizada**. Mayo 1973.
- A 25** **Seminario de educación no-directiva**. Julio 1973.
- A 26** **Informe de las actividades del I.C.E. de la Universidad de Barcelona. Curso 1972-73**.
- A 27** María Forns. **Organización y funcionamiento de un servicio de orientación escolar en la E.G.B.** Julio 1973.
- A 28** Joaquín Arnau. **Problemas psicopedagógicos del bilingüismo, 3.º informe**. Noviembre 1973.
- A 29** José M. Doménech. **Descripción y valoración de un curso experimental de «Métodos estadísticos» para estudiantes de Psicología**. Julio 1973.
- A 30** Jorge Oliver. **Sensibilización auditiva**.
- A 31** E. Torá y M. Porter. **Jornadas de comprensión del cine por los niños**. Mayo 1974.
- A 32** E. Torá y J. M. Rueda. **Escuela y socialización**. Resumen de un Seminario permanente de profesores de E.G.B. 1974.

- A 33** Informe de las actividades del I.C.E. de la Universidad de Barcelona. Curso 1973-74. Enero 1975.
- A 34** Maria de Borja Solé. La experiencia comparativa en el aprendizaje del francés.
- A 35** Mareile Böhemer. Escuela y Museo.
- A 36** Informe de las actividades del I.C.E. de la Universidad de Barcelona. Curso 1974-75.
- A 37** Tora, Espresate, Laudan, Gubern, Acarín, Moragas, Remesar, Marce Pujagut. "Jornadas sobre la imagen televisiva" Mayo 1976.
- A 38** I. Martínez, N. Silvestre "Aprendizaje e integración del niño sordo en la escolaridad normal" Diciembre 1976.
- A 39** F. Marcé, Ll. Pujagut "El niño frente a la imagen fílmica con ruptura" Mayo 1977.
- A 40** Torà, Beiras, Aguirre, Tomas, Hernandez. "Un estudio de comunicación no-verbal" Diciembre 1977.
- A 41** E. Siches "Desarrollo cognitivo y medio sociocultural en la adquisición de las experiencias comparativas" Junio 1977.
- A 42** M. Forns, F. Sanchez "Programación del área dinámica para 1.º de EGB". Abril 1978.
- A 43** R. Garcia, M. Cañadell "El Juego infantil en grupo". Mayo 1978
- A 44** A. Vega, R. Mendoza, I. Sagrera "El papel del educador en la prevención en el abuso de las drogas".
- A 45** G. Martinez Piaget y el desarrollo intelectual. Resumen introductorio.
- A 46** J. M. Bermudo "El método de historiación filosófica"

- | | | |
|-----------------|-----------|--|
| Informes | 2 | S. Siguán y Alvaro Monferrer. La atención a los deficientes mentales en la provincia de Barcelona. Noviembre 1971 |
| | 3 | M. Siguán, E. Bosch y J. Subirós. Evolución del alumnado en la Facultad de Filosofía y Letras. 1939-1971. Noviembre 1971 |
| | 4 | Escuela Universitaria del profesorado de E.G.B. Plan de estudios del curso experimental. Noviembre 1971 |
| | 5 | M. Siguán y Pedro Batallé. Composición del alumnado en la Facultad de Filosofía y Letras. Curso 1971-72. Junio 1972 |
| | 6 | E. Torá. Hacia una metodología de la comunicación. Enero 1973 |
| | 7 | Fernando de Cea. El Centro piloto de E.G.B. Font d'en Fargas. Julio 1973 |
| | 8 | Pedro Batallé. Seminario de Planificación Universitaria. Marzo 1973 |
| | 9 | V. Benedito y J. J. Piquer. La formación pedagógica del profesorado de Bachillerato. Noviembre 1973 |
| | 10 | Metodología científica aplicada a la investigación educativa. Marzo 1974 |
| | 11 | El Centro piloto de E.G.B. Font d'en Fargas, 2º informe. Septiembre 1974 |
| | 13 | M. Siguán. "La gestión municipal en materia de educación: el ejemplo de Bolonia". Noviembre de 1977 |
| | 14 | M. Siguán. "Educación y pluralidad de lenguas". Abril 1978 |
| | 15 | V. Benedito. "Una alternativa pedagógica: El Movimiento Italiano de Cooperación educativa" |
| | 16 | R. Lopez Feal, J. M. ^a Malapeira Gas. "La Sección de psicología en la Universidad de Barcelona: Historia y perspectivas" |
| | 17 | E. Pol, M. Gili, A. Domenech. Aproximació als hàbits lingüístics dels mestres de Barcelona i les seves comarques. |
| | 18 | Catálogo Guía de la enseñanza preescolar en Barcelona |

Serie Seminaris

- S 1 E. Buchaca, G. Carreras, J. Oliveras, J. Padró "La electrónica en el bachillerato"
- S 2 La problemàtica de L'accés a la docència d'EGB.

Otras Publicaciones

Col·lectiu. "Bilinguismo y educación en Catalunya". Ed. Teide. BARCELONA

Col·lectiu. "Bilinguisme i educació". Ed. Teide. BARCELONA

Col·lectiu. "Bilinguisme i Biculturalisme", Ed. Ceac. BARCELONA

"Guía del estudiante al término de la E.G.B.". M. Forns, I. Gómez. Ed. Teide. BARCELONA.

"El precio de la enseñanza en España". M. Siguan, J. Estruch. Ed. Dopesa. BARCELONA

"Gestión en la escuela". J. Serramona. Ed. Teide. BARCELONA

"Desarrollo cognoscitivo y comprensión cinematográfica". E. Torà. Ed. Instituto Nacional de Publicidad.

"Grupos de formación y profesorado" V. Benedito, A. Vega. Ed. C.E.U. BARCELONA

EN PREPARACION

Col·lectiu. Política llingüística per a una escola democràtica.

