UNIVERSITAT DE BARCELONA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

UNE FORMULE D'ITÔ POUR LES MARTINGALES CONTINUES A DEUX INDICES ET QUELQUES APPLICATIONS

by David Nualart

PRE–PRINT N.º 15
novembre, 1983

UNE FORMULE D'ITÔ POUR LES MARTINGALES CONTINUES A DEUX INDICES ET QUELQUES APPLICATIONS

David Nualart

Abstract.- An Itô differentiation formula is proved for arbitrary two-parameter continuous martingales. As an application we deduce the existence and continuity of the local time of these martingales with respect to a particular random measure. Finally we obtain a maximal inequality for stochastic integrals in one coordinate.

Une formule d'Itô pour les martingales continues à deux indices et quelques applications

par D. Nualart.

0. Introduction. On a montré récemment (cf. [9]) l'existence d'une version continue de la variation quadratique d'une martingale continue à deux indices. Sur la base de ce résultat on se propose de donner ici une démonstration d'une "formule d'Itô" pour les martingales continues à deux paramètres. Cette formule a été déjà présentée par L. Chevalier dans [3], sous l'hypothèse que toute martingale de carré intégrable relative à la filtration considerée admet une version continue. Notre méthode de démonstration est légèrement différente, étant donné que, dans le cas d'une filtration quelconque, on ne sait pas approcher une martingale continue bornée dans L^p, avec $p \geq 2$, par des martingales continues et bornées. Comme application de la formule d'Itô, on obtient l'existence et la continuité d'un temps local de ces martingales, défini comme la densité d'occupation par rapport à une certaine variation quadratique de la martingale. Dans un dernier paragraphe on établit une inégalité maximale pour les intégrales stochastiques de la forme

$$\int_0^s f(M_{xt})d_xM_{xt}.$$

Ce trevail a été réalisé grace à une subvention de la "Comissió Interdepartamental de Recerca i Innovació Tecnològica" de la "Generalitat de Catalunya".

1. Notation. L'espace de paramètres sera le quadrant positif du plan $\mathbb{R}^2_+$, muni de la relation d'ordre usuelle: $(s,t) \leq (s',t')$ si et seulement si $s \leq s'$ et $t \leq t'$. On note $(s,t) < (s',t')$ si $s < s'$ et $t < t'$, et on écrit $R_{st} = [0,s] \times [0,t]$. Étant donnés $z_1 < z_2$, on désigne par $(z_1,z_2]$ le rectangle $\{z: z_1 < z \leq z_2\}$. L'accroissement d'une fonction $f: \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un rectangle $(z_1,z_2]$, $z_1 = (s_1,t_1)$, $z_2 = (s_2,t_2)$ sera indiqué par $f((z_1,z_2]) = f(z_2) - f(s_1,t_2) - f(s_2,t_1) + f(z_1)$.

On appellera subdivision d'un rectangle R_{st} tout sous-ensemble fini $\mathcal{S}$ de R_{st} de la forme $\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, où $\mathcal{P}_1 = \{0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_p\} \subset [0,s)$ et $\mathcal{P}_2 = \{0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_q\} \subset [0,t)$. Pour tout point $u = (s_i,t_j)$ dans $\mathcal{S}$ on posera $\bar{u} = (s_{i+1},t_{j+1})$, $\Delta_u = (u,\bar{u}]$, $\Delta_u^1 = (s_i,s_{i+1}] \times (0,t_j]$ et $\Delta_u^2 = (0,s_i] \times (t_j,t_{j+1}]$, avec la convention $s_{p+1} = s$ et $t_{q+1} = t$. L'ensemble des subdivisons de R_{st} est muni de l'ordre défini par l'inclusion. Si $\mathcal{S}$ est une subdivision de R_{st} et $z \in R_{st}$, on désignera par $\mathcal{S}_z$ la plus petite subdivision contenant $\mathcal{S}$ et le point z. On écrira $\bar{\mathcal{S}}_z = \{z' \in \mathcal{S}_z: z' < z\}$. La norme d'une subdivision $\mathcal{S}$ est le nombre

$$|\mathcal{S}| = \max\{|u - \bar{u}|,\ u \in \mathcal{S}\}.$$

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace de probabilité complet, sur lequel on se donne une famille croissante $\{\mathcal{F}_z,\ z \in \mathbb{R}^2_+\}$ de sous-σ-algèbres de $\mathcal{F}$. On écrit $\mathcal{F}_{s\infty} = \bigvee_{y \geq 0} \mathcal{F}_{sy}$ et $\mathcal{F}_{\infty t} = \bigvee_{x \geq 0} \mathcal{F}_{xt}$. On suppose que la famille $\mathcal{F}_z$ vérifie les conditions habituelles de [2]: (a) $\mathcal{F}_{00}$ contient les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$, (b) $\mathcal{F}_z$ est continue à droite, et (c) $\mathcal{F}_{s\infty}$ et $\mathcal{F}_{\infty t}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_{st}$, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$.

On dira qu'un processus $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ intégrable et $\mathcal{F}_z$-adapté est une <u>martingale</u> si pour tous $z \leq z'$ on a $E(M_{z'}|\mathcal{F}_z) = M_z$. Pour chaque $p \geq 1$, m_c^p représentera la classe des martingales continues nulles sur les axes et borneés dans L^p, c'est à dire, telles que $\sup_z E(|M_z|^p) < \infty$. Étant donnée une martingale M, on désignera par $M_{.t}$ et $M_{s.}$ les martingales à un paramètre $\{M_{st}, \mathcal{F}_{s\infty}, s \geq 0\}$ et $\{M_{st}, \mathcal{F}_{\infty t}, t \geq 0\}$, respectivement.

On dira qu'une martingale M est <u>forte</u> si $E(M(]z,z']) / \mathcal{F}_{s\infty} \vee \mathcal{F}_{\infty t}) = 0$ pour $z < z'$, avec $z = (s,t)$. Soit M une martingale de m_c^2. On dira que M est à <u>accroissements orthogonaux dans le sens 1</u> si pour tous $0 \leq t_1 < t_2$, on a $\langle M_{.t_2} - M_{.t_1}, M_{.t_1} \rangle = 0$. Les martingales à accroissements orthogonaux dans le sens 2 ont une définition analogue et, on dira que M est à accroissements orthogonaux si elle l'est dans les deux sens. Finalement, on dira que M est i.d.c. <u>(à variation indépendante du chemin)</u> si $\langle M_{.t} \rangle_s = \langle M_{s.} \rangle_t$ pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$. Toute martingale forte de m_c^2 est à accroissements orthogonaux et toute martingale à accroissements orthogonaux est i.d.c.. Les implications réciproques ne sont pas valables en général (cf. [7]).

Les notions qu'on vient d'introduire peuvent être localisées moyennant la définition de région d'arrêt. On appelle <u>région d'arrêt</u> tout sous-ensemble aléatoire progressif fermé D de $\mathbb{R}_+^2 \times \Omega$ tel que si $z \in D$, alors $R_z \subset D$. Soit $\mathcal{C}$ une classe de processus. On désignera par $\mathcal{C}_{loc}$ la classe des processus X pour lesquels existent une suite X^n de processus de la classe $\mathcal{C}$ et une suite croissante D_n de régions d'arrêt, vérifiant $\bigcup_n D_n = \mathbb{R}_+^2$, telles que, pour tout entier n, on ait $X_z^n = X_z$ si z appartient à D_n.

Par exemple, on peut considérer les espaces de martingales locales $m^p_{c,loc}$. Chevalier a montré dans [3] que ces espaces coincident pour tout $p>1$, sous l'hypothèse que toutes les martingales de carré intégrable soient continues. On ne sait pas si ce résultat reste vrai en général.

Si M est une martingale de m^2_c, on désignera par $<M>=\{<M>_z, z\in \mathbb{R}^2_+\}$ une version continue de la variation quadratique de M (cf. [9]). Le processus $<M>$ est croissant, c'est à dire, il est adapté, nul sur les axes et $<M>(\Delta)\geq 0$ pour tout rectangle $\Delta=(z_1,z_2]$. Soit $H=\{H_z, z\in\mathbb{R}^2_+\}$ un processus prévisible tel que

$$\int_{R_{st}} H_z^2 \, d<M>_z < \infty$$

p.s., pout tout $(s,t)\in\mathbb{R}^2_+$. Suivant la méthode proposée par Cairoli dans [1] on peut définir l'intégrale stochastique

$$\int_{R_{st}} H_z dM_z$$

de façon qu'elle soit un processus de la classe $m^2_{c,loc}$. Ces résultats ont une extension immédiate aux martingales M de la famille $m^2_{c,loc}$.

On désignera par C une constante universelle qui peut varier d'une formule à une autre.

2. <u>Une formule de différentiation d'Itô</u>. Soit M une martingale de la classe m_c^2. Nous rappelons d'abord la version suivante du théorême de décomposition de Doob-Meyer, qui a été établie dans [9]:

$$M_{st}^2 = 2\int_{R_{st}} M_z dM_z + 2\tilde{M}_{st} + \langle M_{s.}\rangle_t + \langle M_{.t}\rangle_s - \langle M\rangle_{st}, \qquad (2.1)$$

où $\tilde{M}$ est une martingale continue et les variations quadratiques $\langle M_{s.}\rangle_t$, $\langle M_{.t}\rangle_s$ et $\langle M\rangle_{st}$ ont aussi des versions continues. Comme généralisation de cette décomposition on a le résultat suivant qui est une extension de la formule d'Itô classique.

<u>Théorême 2.1.</u> Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4, nulle en 0, et soit M une martingale de l'espace m_c^4. Alors, pout tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ on a

$$\begin{aligned} f(M_{st}) = &\int_{R_{st}} f'(M_z)dM_z + \int_{R_{st}} f''(M_z)d\tilde{M}_z + \tfrac{1}{2}\int_0^s f''(M_{xt})d\langle M_{.t}\rangle_x + \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^t f''(M_{sy})d\langle M_{s.}\rangle_y - \tfrac{1}{2}\int_{R_{st}} f''(M_z)d\langle M\rangle_z - \\ &- \int_{R_{st}} f'''(M_z)d\langle M,\tilde{M}\rangle_z - \frac{1}{4}\int_{R_{st}} f^{IV}(M_z)d\langle \tilde{M}\rangle_z. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Notons d'abord que par un argument de localisation on pourrait montrer une extension de ce théorême aux martingales de la classe $m_{c,loc}^4$. Avant de donner la démonstration du théorême nous allons établir quelques lemmes préliminaires.

Lemme 2.2. Soit $X = \{X(z),\ z\in\mathbb{R}_+^2\}$ un processus continu et adapté et M une martingale de m_c^2. On fixe un rectangle $T=R_{st}$ et une suite croissante $\mathcal{S}^n$ de subdivisions de T, dont le pas tend vers zéro. Alors, pour tout $\lambda>0$, on a

$$\lim_n P\{\sup_{z\in T} |\sum_{u\in\mathcal{S}_z^n} X_u M(\Delta_u) - \int_{R_z} X_u dM_u| > \lambda\} = 0. \qquad (2.3)$$

Démonstration: Pour tout entier positif k on écrit $X_k(z)=(X(z)\wedge k)\vee(-k)$. Posons $D_k = \{\omega : \sup_{z\in T} |X_z(\omega)| \leq k\}$. Fixé un nombre $\epsilon>0$, on peut choisir k de façon que $P(D_k^c)<\epsilon$. Alors, en utilisant le caractère local de l'intégrale stochastique, on aura

$$P\{\sup_{z\in T} |\sum_{u\in\mathcal{S}_z^n} X_u M(\Delta_u) - \int_{R_z} X_u dM_u| > \lambda\} \leq P(D_k^c) +$$

$$+ P(\{\sup_{z\in T} |\sum_{u\in\mathcal{S}_z^n} X_k(u)M(\Delta_u) - \int_{R_z} X_k(u)dM_u| > \lambda\}\cap D_k) \leq$$

$$\leq \epsilon + C\lambda^{-2} E(|\sum_{u\in\mathcal{S}^n} X_k(u)M(\Delta_u) - \int_T X_k(u)dM_u|^2) =$$

$$= \epsilon + C\lambda^{-2} E(\int_T (X_k^n(u)-X_k(u))^2 d\langle M\rangle_u),$$

où X_k^n est le processus prévisible élémentaire qui vaut $X_k(u)$ dans tout rectangle Δ_u de la partition $\mathcal{S}^n$. La propriété de continuité du processus X_k entraîne $\lim_n (X_k^n(u)-X_k(u))^2 = 0$, et on achève la démonstration moyennant un argument de convergence dominée. □

Lemme 2.3. Sous les hypothèses du lemme précédent, si la martingale M appartient à la classe m_c^4, on a

$$\lim_n P\{\sup_{z\in T} |\sum_{u\in S_z^n} X_u M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2) - \int_{R_z} X_u d\tilde{M}_u| > \lambda\} = 0. \qquad (2.4)$$

Démonstration: En utilisant le lemme 2.2, il suffit de montrer la limite suivante

$$\lim_n P\{\sup_{z\in T}|\sum_{u\in S_z^n} X_u[M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2) - \tilde{M}(\Delta_u)]| > \lambda\} = 0.$$

Avec les mêmes notations que dans la démonstration du lemme 2.2, on obtient

$$P\{\sup_{z\in T}|\sum_{u\in S_z^n} X_u[M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2) - \tilde{M}(\Delta_u)]| > \lambda\} \le$$

$$\le \epsilon + P\{\sup_{z\in T}|\sum_{u\in S_z^n} X_k(u)[M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2) - \tilde{M}(\Delta_u)]| > \lambda\} \le$$

$$\le \epsilon + C\lambda^{-2} E(\sum_{u\in S^n} X_k(u)^2[M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2) - \tilde{M}(\Delta_u)]^2) \le$$

$$\le \epsilon + C\lambda^{-2}k^2 E(\sum_{u\in S^n} [M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2) - \tilde{M}(\Delta_u)]^2) =$$

$$= \epsilon + C\lambda^{-2}k^2 E[(\sum_{u\in S^n} M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2) - \tilde{M}_{st})^2],$$

et on finit la démonstration en appliquant le lemme 3.2 de [9].□

Lemme 2.4. Sous les hypothèses du lemme 2.2 on a

$$\lim_{n} \sum_{u\in S^n} X_u[\langle M\rangle(\Delta_u) - M(\Delta_u)^2] = 0, \tag{2.5}$$

au sens de la convergence en probabilité.

Démonstration. Par un argument standard, qu'on a déjà employé dans la preuve des deux lemmes précédents, on peut supposer que le processus X est borné en valeur absolue par une constante $k > 0$. Pour tout point $u \in S^n$ et pour $m > n$ posons $I_n^m = S^m \cap [u,\bar{u})$. En utilisant le théorème 3.4 de [9], on obtient

$$E(|\sum_{u\in S^n} X_u[\langle M\rangle(\Delta_u) - M(\Delta_u)^2]|) =$$

$$= E(|\sum_{u\in S^n} X_u \lim_{m\to\infty} [(\sum_{u'\in I_u^m} M(\Delta_{u'})^2) - M(\Delta_u)^2]|) \leq$$

$$\leq \sup_{m>n} E(|\sum_{u\in S^n} X_u \sum_{\substack{u',u''\in I_u^m \\ u'\neq u''}} M(\Delta_{u'})M(\Delta_{u''})|). \tag{2.6}$$

Dans ces expressions, le rectangle Δ_u est défini relativement à la subdivision S^n, tandis que les rectangles $\Delta_{u'}$ et $\Delta_{u''}$ sont associés à la subdivision S^m. Si $u = (s_i,t_j)$ représente un point générique de la subdivision S^n, on désignera par $u'=(\sigma_k^i,\tau_\ell^j)$ un point générique de I_u^m. On écrira $\bar{\Delta}_{u'}^1 = (\sigma_k^i,\sigma_{k+1}^i] \times (t_j,\tau_\ell^j]$ et $\bar{\Delta}_{u'}^2 = (s_i,\sigma_k^i] \times (\tau_\ell^j,\tau_{\ell+1}^j]$. Alors, (2.6) est borné par

$$2 \sup_{m>n} \{ E(| \sum_{u \in S^n} X_u \sum_{u' \in I_u^m} M((u,u'])M(\Delta_{u'})|) +$$

$$+ E(| \sum_{u \in S^n} X_u \sum_{u' \in I_u^m} M(\bar{\Delta}^1_{u'})M(\bar{\Delta}^2_{u'}) |) +$$

$$+ E(| \sum_{u \in S^n} X_u \sum_{u' \in I_u^m} M(\bar{\Delta}^2_{u'})M(\Delta_{u'})|) +$$

$$+ E(| \sum_{u \in S^n} X_u \sum_{u' \in I_u^m} M(\bar{\Delta}^1_{u'})M(\Delta_{u'})|) \} =$$

$$= 2 \sup_m (a_1+a_2+a_3+a_4).$$

Il faut montrer que chacun des termes a_i tend vers zéro quand $n \to \infty$, uniformement par rapport à m. Les deux premiers termes contiennent des sommes des différences de martingale et on peut appliquer l'inégalité de Davis pour les martingales discrètes à deux indices (cf. [5]):

$$a_1 \leq Ck\, E([\sum_{u \in S^n} \sum_{u' \in I_u^m} M((u,u'])^2 M(\Delta_{u'})^2]^{\frac{1}{2}}) \leq$$

$$\leq Ck\, \{E(\sup_{\substack{u,v \in T \\ |u-v| < |S^n|}} |M(u)-M(v)|^2)\, E(M^2_{st})\}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

$$a_2 \leq Ck\, E(\sum_{u \in S^n} \sum_{u' \in I_u^m} M(\bar{\Delta}^1_{u'})^2\, M(\bar{\Delta}^2_{u'})^2]^{\frac{1}{2}}) \leq$$

$$\leq Ck\, \{E(\sum_{i,j,\ell} \sup_k M(\bar{\Delta}^2_{u'})^2)\, E(\sup_{i,j,\ell} \sum_k M(\bar{\Delta}^1_{u'})^2)\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \quad Ck\{E(M^2_{st})\ E(\sup_i \sum_k (M(\sigma^i_{k+1},t)-M(\sigma^i_k,t))^2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, on obtient $\lim_n \sup_{m>n} a_2 = 0$, à l'aide du lemme 2.1 de [9]. Il nous reste à étudier la convergence des termes a_3 et a_4 qui font intervenir des 1 et 2-martingales, respectivement. Nous allons considérer seulement le terme a_3, étant donné que les calculs pour le terme a_4 sont tout à fait analogues. On a les inégalités suivantes:

$$a_3 \leq C\ E([\sum_{i,k} (\sum_j X_u \sum_\ell M(\bar{\Delta}^2_{u'})M(\Delta_{u'}))^2]^{\frac{1}{2}}) \leq$$

$$\leq Ck\ \{E(\sum_i \sup_k \sum_{j,\ell} M(\bar{\Delta}^2_{u'})^2)\ E(\sup_i \sum_{k,j,\ell} M(\Delta_{u'})^2)\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq Ck\ \{E(M^2_{st})\ E(\sup_i \sum_{k,j,\ell} M(\Delta_{u'})^2)\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq Ck\ \{E(M^2_{st})\ E(\sup_i \sum_k (M(\sigma^i_{k+1},t)-M(\sigma^i_k,t))^2)\ +$$

$$+\ E(M^2_{st})\ 2E(\sup_i |\sum_{k,j,\ell} (M(\sigma^i_{k+1},\tau^j_\ell)-M(\sigma^i_k,\tau^j_\ell))M(\Delta_{u'})|)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Le premier terme dans cette somme tend vers zéro quand $n\to\infty$, uniformément par rapport à m, à cause du lemme 2.1 de [9]. Le deuxième terme vérifie aussi cette propriété de convergence. En effet, en utilisant le lemme 2.2 de [9], on obtient les majorations suivantes:

$$E(\sup_i |\sum_{k,j,\ell} (M(\sigma^i_{k+1},\tau^j_\ell)-M(\sigma^i_k,\tau^j_\ell))M(\Delta_{u'})|) \leq$$

$$\leq E(|\sum_i (\sum_{k,j,\ell} (M(\sigma^i_{k+1},\tau^j_\ell)-M(\sigma^i_k,\tau^j_\ell))M(\Delta_{u'}))^2|^{\frac12}) \leq$$

$$\leq C\ E(|\sum_{j,\ell,i} (\sum_k (M(\sigma^i_{k+1},\tau^j_\ell)-M(\sigma^i_k,\tau^j_\ell))M(\Delta_{u'}))^2|^{\frac12}) \leq$$

$$\leq C\ (E(\sup_i \sum_k (M(\sigma^i_{k+1},t)-M(\sigma^i_k,t))^2)\ E(M^2_{st}))^{\frac12}. \ \square$$

Lemme 2.5. Sous les hypothèses du lemme 2.3 on a

$$\lim_n \sum_{u\in S^n} X_u[M(\Delta^1_u)M(\Delta^2_u)M(\Delta_u)-\langle M,\tilde M\rangle(\Delta_u)] = 0, \tag{2.7}$$

et

$$\lim_n \sum_{u\in S^n} X_u[M(\Delta^1_u)^2 M(\Delta^2_u)^2 - \langle \tilde M\rangle(\Delta_u)] = 0, \tag{2.8}$$

au sens de la convergence en probabilité.

Démonstration. Rappelons que le processus $\langle M,\tilde M\rangle$ est défini comme $\frac12(\langle M+\tilde M\rangle - \langle M\rangle - \langle\tilde M\rangle)$. En conséquence, le lemme 2.4 entraîne

$$\lim_n \sum_{u\in S^n} X_u[M(\Delta_u)\tilde M(\Delta_u)-\langle M,\tilde M\rangle(\Delta_u)] = 0,$$

et pour montrer (2.7) il suffit de prouver la limite suivante, en probabilité

$$\lim_n \sum_{u\in S^n} X_u M(\Delta_u)[M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)-\tilde{M}(\Delta_u)] = 0.$$

On peut supposer que le processus X est borné et alors cette limite découle du lemme 3.2 de [9] et de l'inégalité suivante:

$$E(|[\sum_{u\in S^n} X_u M(\Delta_u)\ M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)-\tilde{M}(\Delta_u)]|) \leq$$

$$\leq k\{E(\sum_{u\in S^n} M(\Delta_u)^2)E(\sum_{u\in S^n}[M(\Delta_u^1)\ M(\Delta_u^2)-\tilde{M}(\Delta_u)]^2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

De la même façon, (2.8) est une conséquence de l'inégalité

$$E(|\sum_{u\in S^n} X_u[M(\Delta_u^1)^2 M(\Delta_u^2)^2 - \tilde{M}(\Delta_u)^2]|) \leq$$

$$\leq k\{E([\sum_{u\in S^n} M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)-\tilde{M}(\Delta_u)]^2)E([\sum_{u\in S^n} M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)+\tilde{M}(\Delta_u)]^2)\}^{\frac{1}{2}}.\square$$

<u>Démonstration du théorème 2.1</u>. On applique d'abord la formule d'Itô à t fixé et on obtient

$$f(M_{st}) = \int_0^s f'(M_{xt})d_x M_{xt} + \tfrac{1}{2}\int_0^s f''(M_{xt})d\langle M_{\cdot t}\rangle_x .$$

Il s'agit alors d'étudier l'intégrale stochastique

$$\int_0^s f'(M_{xt})d_x M_{xt}.$$

On considère une suite croissante $\mathcal{P}_1^n = \{0=s_1 < s_2 < \ldots < s_p\} \subset [0,s)$ de subdivisions de l'intervalle $[0,s]$ dont le pas tend vers zéro. Alors, au sens de la convergence en probabilité on a

$$\int_0^s f'(M_{xt})d_x M_{xt} = \lim_n \sum_i f'(M(s_i,t))(M(s_{i+1},t)-M(s_i,t)) =$$

$$= \lim_n \sum_i \{\int_0^t f'(M(s_i,y))d_y(M(s_{i+1},y)-M(s_i,y))+$$

$$+\int_0^t f''(M(s_i,y))(M(s_{i+1},y)-M(s_i,y))d_y\, M(s_i,y) +$$

$$+\int_0^t f''(M(s_i,y))\; d<M_{s_i\cdot},M_{s_{i+1}\cdot}-M_{s_i\cdot}>_y \quad +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t f'''(M(s_i,y))(M(s_{i+1},y)-M(s_i,y))d<M_{s_i\cdot}>_y\} =$$

$$= b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$

Nous allons analyser séparément chacun de ces termes. Soit $\mathcal{P}_2^n = \{0=t_1 < t_2 < \ldots < t_q\} \subset [0,t)$ une suite croissante de subdivisions de l'intervalle $[0,t]$ dont le pas tend vers zéro. Alors, compte tenu des lemmes 2.2 et 2.3, on a

$$b_1 = \lim_n(\lim_m \sum_{u\in\mathcal{P}_1^n\times\mathcal{P}_2^m} f'(M_u)M(\Delta_u)) = \int_{R_{st}} f'(M_z)dM_z,$$

et

$$b_2 = \lim_n(\lim_m \sum_{u\in\mathcal{P}_1^n\times\mathcal{P}_2^m} f''(M_u)M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)) = \int_{R_{st}} f''(M_z)d\tilde{M}_z.$$

Le troisième terme peut s'écrire de la façon suivante

$$b_3 = \lim_n \frac{1}{2}\sum_i \{\int_0^t f''(M(s_i,y))d\langle M_{s_{i+1}\cdot}\rangle_y - \int_0^t f''(M(s_i,y))d\langle M_{s_i\cdot}\rangle_y -$$

$$-\int_0^t f''(M(s_i,y))\, d\langle M_{s_{i+1}\cdot}-M_{s_i\cdot}\rangle_y\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_{sy})d\langle M_{s\cdot}\rangle_y - \frac{1}{2}\lim_n \sum_i \int_0^t [f''(M(s_{i+1},y))-f''(M(s_i,y))]$$

$$d\langle M_{s_{i+1}\cdot}\rangle_y - \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f''(M_z)d\langle M\rangle_z,$$

à cause du lemme 2.4. Alors, il nous reste à étudier l'expression suivante

$$\lim_n(\lim_m \sum_{u\in\mathcal{P}_1^n\times\mathcal{P}_2^m} [\frac{1}{2} f'''(M_u)M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)^2 - \frac{1}{2}(f''\circ M)(\Delta_u^1)(M(s_{i+1},t_{j+1})-$$

$$-M(s_{i+1},t_j))^2]) =$$

$$= \lim_n(\lim_m \sum_{u\in\mathcal{P}_1^n\times\mathcal{P}_2^m} [-\tfrac{1}{2}(f''\circ M)(\Delta_u^1)M(\Delta_u)^2 - f'''(M_u)M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)M(\Delta_u) -$$

$$-\frac{1}{4} f^{IV}(M_u)M(\Delta_u^1)^2M(\Delta_u^2)^2 - \frac{1}{4}[f^{IV}(\theta_1)-f^{IV}(M_u)]\, M(\Delta_u^1)^2M(\Delta_u^2)^2 -$$

$$-\frac{1}{2} f^{IV}(\theta_1)\, M(\Delta_u^1)^2M(\Delta_u^2)M(\Delta_u)]),$$

où θ_1 désigne un nombre compris entre $M(s_i,t_j)$ et $M(s_{i+1},t_j)$. La valeur de cette limite est

$$-\int_{R_{st}} f'''(M_z)d\langle M,\tilde{M}\rangle_z - \frac{1}{4}\int_{R_{st}} f^{IV}(M_z)d\langle\tilde{M}\rangle_z .$$

En effet, le deuxième et le troisième terme convergent vers ces intégrales dû au lemme 2.5 et les autres termes tendent vers zéro à cause des majorations suivantes

$$\Big|\sum_u (f'''\circ M)(\Delta_u^1)M(\Delta_u)^2\Big| \leq \sup_u (f'''\circ M)(\Delta_u^1) \sum_u M(\Delta_u)^2,$$

$$\Big|\sum_u [f^{IV}(\theta_1)-f^{IV}(M_u)]\, M(\Delta_u^1)^2M(\Delta_u^2)^2\Big| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{|u-v|\leq|\mathcal{P}_1^n| \\ u,v\in R_{st}}} |f^{IV}(M_v) - f^{IV}(M_u)| \cdot \sum_u M(\Delta_u^1)^2M(\Delta_u^2)^2,$$

et

$$\Big|\sum_u f^{IV}(\theta_1)M(\Delta_u^1)^2M(\Delta_u^2)M(\Delta_u)\Big| \leq$$

$$\leq \Big(\sum_u M(\Delta_u^1)^2M(\Delta_u^2)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_u M(\Delta_u)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \sup_u|M(\Delta_u^1)| \sup_{z\in R_{st}} |f^{IV}(M_z)| .$$

Dans les formules ci-dessus le point u varie dans la subdivision $\mathcal{P}_1^n \times \mathcal{P}_2^m$. □

Remarques.

1. Il existe une version multidimensionnelle du théorème précédent.

Soient $M_1,\ldots,M_d$ des martingales de m_c^4 (ou, plus généralement de $m^4_{c,loc}$) et soit $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4 nulle en zéro. On écrira $\widetilde{M_iM_j} = \frac{1}{2}[(\widetilde{M_i+M_j})-\tilde{M}_i-\tilde{M}_j]$, et $M=(M_1,\ldots,M_d)$. Alors, nous avons

$$f(M_1(s,t),\ldots,M_d(s,t)) = \int_{R_{st}} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_z)dM_i(z) +$$

$$+\int_{R_{st}} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_z)d\widetilde{M_iM_j}(z) +$$

$$+\ \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_{sy})d\langle M_i(s,.),M_j(s,.)\rangle_y \ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\int_0^s \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_{xt})d\langle M_i(.,t),M_j(.,t)\rangle_x - \frac{1}{2}\int_{R_{st}} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_z)d\langle M_i,M_j\rangle_z -$$

$$-\ \frac{1}{2}\int_{R_{st}} \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(M_z)d\langle M_i,\widetilde{M_jM_k}\rangle_z -$$

$$-\ \frac{1}{4}\int_{R_{st}} \sum_{i,j,k,h} \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_h}(M_z)d\langle \widetilde{M_iM_j},\widetilde{M_kM_h}\rangle_z .$$

On pourrait aussi écrire une formule d'Itô pour des processus de la forme M+V où M est une martingale de $m^4_{c,loc}$ et V est un processus continu, adapté, à variation finie et nul sur les axes. Pour cela il faudrait donner un sens aux processus $\widetilde{V_iV_j}$ (voir la remarque 3) et $\widetilde{M_iV_j}$. Plus généralement, on peut ajouter à M+V des termes du type M_1+M_2 qui soient des i-martingales propres (i=1,2) au sens de Wong et Zakai (cf. [12]). Nous n'allons pas developper ici ces extensions de la formule d'Itô.

2. Supposons que M est une martingale à accroissements orthogonaux dans le sens 1 (ou dans le sens 2) de la classe m_c^4. La formule (2.7) avec $X \equiv 1$ entraîne alors $<M,\tilde{M}> = 0$. On peut montrer un résultat un peu plus fort dans le cas de la filtration $\mathcal{F}_z$ associée à un processus de Wiener à deux indices $W = \{W_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$. Plus precisément, dans cette situation, une martingale $M \in m_c^2$ i.d.c. (qui n'est pas forcement à accroissements orthogonaux) vérifie $<M,\tilde{M}> = 0$. En effet, considérons la représentation intégrale de la martingale M:

$$M_{st} = \int_{R_{st}} \phi(z)dW_z + \int_{R_{st}\times R_{st}} \psi(z,z')dW_z dW_{z'}. \tag{2.9}$$

On peut aussi écrire

$$M_{st} = \int_{R_{st}} L_1(z,t)dW_z = \int_{R_{st}} L_2(z,s)dW_z,$$

où

$$L_1(z,t) = \phi(z) + \int_{R_{xt}} \psi(z',z)dW_{z'}, \tag{2.10}$$

et

$$L_2(z,s) = \phi(z) + \int_{R_{sy}} \psi(z,z')dW_{z'}, \tag{2.11}$$

avec $z=(x,y)$. Alors, on sait que M est i.d.c. si et seulement si les deux équations suivantes sont vérifiées:

$$\int_0^s L_2((x,t),s)\psi(xt,sy)dx = 0, \quad \text{pour tous } (s,t,y,\omega)\in \mathbb{R}_+^3\times\Omega, \text{ p.p.}, \tag{2.12}$$

$$\int_0^t L_1((s,y),t)\psi(xt,sy)dy = 0, \quad \text{pour tous } (s,t,x,\omega)\in \mathbb{R}_+^3\times\Omega, \text{ p.p.}. \tag{2.13}$$

D'autre part, on peut montrer que

$$< M,\tilde{M}>_{st} = \int_{R_{st}} h(z)dz$$

où h est le processus défini par

$$h(s,t) = \int_0^s \int_0^t \psi(xt,sy)L_2((x,t),s)L_1((s,y),t)dxdy,$$

et on voit que (2.12) et (2.13) entraînent h=0.

3. Soit M une martingale i.d.c. de m_c^4. On a $<M>_{st} = <M_{s.}>_t = <M_{.t}>_s$. Alors, la variation quadratique $<\tilde{M}>_{st}$ se calcule, trajectoire par trajectoire, en fonction de la variation quadratique $<M>_{st}$. En effet, on peut enoncer le résultat général suivant. On représentera par C la clase des fonctions $f: \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, nulles sur les axes et croissantes (au sens de la mesure).

<u>Lemme 2.6</u>. Soient f,g dans C. Il existe une unique fonction $h=\widetilde{fg}$ dans C telle que pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$ et pour toute suite croissante S^n de subdivisions de R_{st} dont le pas tend vers zéro, on a

$$h(s,t) = \lim_n \sum_{u\in S^n} f(\Delta_u^1)g(\Delta_u^2).$$

En conséquence, on peut écrire $<\tilde{M}> = \widetilde{<M><M>}$ si M est i.d.c.

<u>Démonstration</u>. On fixe $m\geq n$. Alors, nous avons

$$\sum_{u\in S^n} f(\Delta_u^1)g(\Delta_u^2) - \sum_{u\in S^m} f(\Delta_u^1)g(\Delta_u^2) =$$

$$= \sum_{u\in S^n} \sum_{u'\in I_u^m} [f(\Delta_{u'}^1-\bar{\Delta}_{u'}^1)g(\bar{\Delta}_{u'}^2) + f(\bar{\Delta}_{u'}^1)g(\Delta_{u'}^2-\bar{\Delta}_{u'}^2)+f(\bar{\Delta}_{u'}^1)g(\bar{\Delta}_{u'}^2)] ,$$

avec les notations qu'on a employé dans la démonstration du lemme 2.4. Alors, si on considère un des termes de cette somme, par exemple le premier, on obtient

$$\left| \sum_{u\in S^n} \sum_{u'\in I_u^m} f(\Delta_{u'}^1-\bar{\Delta}_{u'}^1)g(\bar{\Delta}_{u'}^2)\right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{u\in S^n} f(\Delta_u^1)g(\Delta_u)\right| \leq g(s,t) \sup_i |f(s_{i+1},t)-f(s_i,t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

uniformement par rapport à m. La croissance et la continuité de la fonction h sont immédiates.□

3. Temps local d'une martingale continue à deux indices.

Comme application de la formule d'Itô, nous allons établir l'existence d'un temps local continu pour une martingale M de m_c^4, qui représentera la densité d'occupation par rapport à la mesure associée à la variation quadratique $<\tilde{M}>$. Ce résultat est une géneralisation du théorème 6.4 de Cairoli-Walsh [2].

Théorème 3.1. Soit M une martingale de m_c^4. Il existe un processus

$\{L_{st}^x;\ (s,t)\in\mathbb{R}_+^2,\ x\in\mathbb{R}\}$ continu en (s,t,x), tel que pour presque tout ω on a

$$\int_{R_{st}} f(M_z)d\langle\tilde{M}\rangle_z = \int_{\mathbb{R}} L_{st}^x\, f(x)dx, \tag{3.1}$$

pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$ et pour toute fonction mesurable et bornée f.

<u>Démonstration</u>. Soit $g_{\varepsilon x}$ une fonction à support compact et de classe C^4 telle que $g_{\varepsilon x}^{IV}(.) \simeq \varepsilon^{-1} 1_{[x,x+\varepsilon]}(.)$, où on a fixé $\varepsilon > 0$ et $x\in\mathbb{R}$. On peut appliquer la formule d'Itô à cette fonction et on obtient

$$\begin{aligned}\int_{R_{st}} g_{\varepsilon x}^{IV}(M_z)d\langle\tilde{M}\rangle_z &= 4g_{\varepsilon x}(0)-4g_{\varepsilon x}(M_{st}) + 4\int_{R_{st}} g'_{\varepsilon x}(M_z)dM_z + \\ &+ 4\int_{R_{st}} g''_{\varepsilon x}(M_z)d\tilde{M}_z + 2\int_0^t g''_{\varepsilon x}(M_{sv})d\langle M_{s.}\rangle_v + \\ &+ 2\int_0^s g''_{\varepsilon x}(M_{ut})d\langle M_{.t}\rangle_u - 2\int_{R_{st}} g''_{\varepsilon x}(M_z)d\langle M\rangle_z - \\ &- 4\int_{R_{st}} g'''_{\varepsilon x}(M_z)d\langle M,\tilde{M}\rangle_z .\end{aligned} \tag{3.2}$$

Maintenant, si on fait $\varepsilon\to 0$ on a $\lim_{\varepsilon\to 0} g'''_{\varepsilon x}(y)=1_{(x,\infty)}(y)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} g''_{\varepsilon x}(y) = (y-x)^+$, $\lim_{\varepsilon\to 0} g'_{\varepsilon x}(y) = \frac{1}{2}[(y-x)^+]^2$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} g_{\varepsilon x}(y) = \frac{1}{6}[(y-x)^+]^3$. Il est facile de voir que toutes les intégrales du membre droit de l'égalité (3.2) convergent en probabilité quand $\varepsilon\downarrow 0$. En conséquence, au sens de la convergence en probabilité, on peut écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{R_{st}} 1_{\{x\le M_z\le x+\varepsilon\}}\, d\langle\tilde{M}\rangle_z =$$

$$= \frac{2}{3}[(-x)^+]^3 - \frac{2}{3}[(M_{st}-x)^+]^3 + 2\int_{R_{st}} [(M_z-x)^+]^2 dM_z + 4\int_{R_{st}} (M_z-x)^+ d\tilde{M}_z +$$

$$+ 2\int_0^t (M_{sv}-x)^+ d\langle M_{s.}\rangle_v + 2\int_0^s (M_{ut}-x)^+ d\langle M_{.t}\rangle_u - 2\int_{R_{st}} (M_z-x)^+ d\langle M\rangle_z -$$

$$- 4\int_{R_{st}} 1_{\{M_z>x\}}\, d\langle M,\tilde{M}\rangle_z. \tag{3.3}$$

On désigne cette limite par L^x_{st}. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé ce processus est continu en (s,t), p.s. Nous allons montrer qu'il a une version continue en (s,t,x). Compte tenu de la continuité des processus $\langle M\rangle_{st}$, $\langle M_{s.}\rangle_t$ et $\langle M_{.t}\rangle_s$, il suffit d'étudier la continuité des trois intégrales suivantes:

(i) $\int_{R_{st}} 1_{\{M_z > x\}}\, d\langle M,\tilde{M}\rangle_z$. La continuité en (s,t,x) de cette intégrale résulte de l'inégalité

$$\left|\int_{R_{st}} 1_{\{M_z=x\}}\, d\langle M,\tilde{M}\rangle_z\right| \le \left(\int_{R_{st}} 1_{\{M_z=x\}} d\langle M\rangle_z\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R_{st}} 1_{\{M_z=x\}}\, d\tilde{M}_z\right)^{\frac{1}{2}},$$

et du fait que

$$\int_{R_{st}} 1_{\{M_z=x\}} d\langle\tilde{M}\rangle_z = 0$$

pour tout (s,t,x). En effet, si on prend une fonction $h_{\varepsilon x}$ de classe C^4, à support compact et telle que $h^{IV}_{\varepsilon x}(.) \approx 1_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(.)$, moyennant la formule d'Itô on montre aisément que

$$\int_{R_{st}} 1_{\{M_z=x\}}\, d\langle\tilde{M}\rangle_z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R_{st}} h^{IV}_{\varepsilon x}(M_z) d\langle\tilde{M}\rangle_z = 0.$$

(ii) $\int_{R_{st}} [(M_z-x)^+]^2 dM_z$. Fixé un entier positif n on considère la région d'arrêt

$$D_n = \{(s,t)\in \mathbb{R}_+^2 : \sup_{z\in R_{st}} |M_z| \leq n\}.$$

En utilisant l'inégalité maximale pour les martingales à deux indices on obtient, pour tout point $z_0\in \mathbb{R}^2$ et pour $x,y\in[-a,a]$

$$E\left(\sup_{s,t\in R_{z_0}} \left|\int_{R_{st}} \{[(M_z-x)^+]^2-[(M_z-y)^+]^2\} 1_{D_n}(z)dM_z\right|^2\right) \leq$$

$$\leq 16\, E\left(\int_{R_{z_0}} |[(M_z-x)^+]^2-[(M_z-y)^+]^2|^2\, 1_{D_n}(z)d\langle M\rangle_z\right) \leq$$

$$\leq 64(n+a)^2\, E(M_{z_0}^2)|x-y|^2.$$

Le critère de Kolmogorov nous dit alors que pour tout n le processus

$$\int_{R_{st}} [(M_z-x)^+]^2 1_{D_n}(z)dM_z$$

a une version continue en (s,t,x), ce qui entraîne l'existence d'une version continue de l'intégrale

$$\int_{R_{st}} [(M_z-x)^+]^2 dM_z.$$

(iii) De la même façon on demontrerait que l'intégrale stochastique

$$\int_{R_{st}} (M_z-x)^+ d\tilde{M}_z$$

a una version continue en (s,t,x).

Finalement nous allons vérifier l'égalité (3.1). Pour cela, soit $h_{\varepsilon x}$ une fonction de classe C^4, à support compact et telle que

$$h_{\varepsilon x}^{IV}(y) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x 1_{[x',x'+\varepsilon]}(y)dx'.$$

Si on fait $\varepsilon \downarrow 0$, $h_{\varepsilon x}^{IV}(y)$ converge vers $1_{(0,x]}(y)$, et les fonctions $h_{\varepsilon x}, h'_{\varepsilon x}, h''_{\varepsilon x}$ et $h'''_{\varepsilon x}$ ont des limites qu'on désignera par h_x, h'_x, h''_x et h'''_x, respectivement. On obtient, grâce à la formule d'Itô

$$\begin{aligned}\int_{R_{st}} 1_{(0,x]}(M_z)d\langle\tilde{M}\rangle_z = {} & 4h_x(0)-4h_x(M_{st}) + 4\int_{R_{st}} h'_x(M_z)dM_z + \\ & + 4\int_{R_{st}} h''_x(M_z)d\tilde{M}_z + 2\int_0^t h''_x(M_{sv})d\langle M_{s.}\rangle_v + \\ & + 2\int_0^s h''_x(M_{ut})d\langle M_{.t}\rangle_u - 2\int_{R_{st}} h''_x(M_z)d\langle M\rangle_z - \\ & - 4\int_{R_{st}} h'''_x(M_z)d\langle M,\tilde{M}\rangle_z. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mais,

$$h_x(y) = \int_0^x g_{x'}(y)dx',$$

où

$$g_x(y) = \frac{1}{6}[(y-x)^+]^3,$$

et aussi,

$$h'_x(y) = \int_0^x \tfrac{1}{2}[(y-x')^+]^2dx',$$

$$h''_x(y) = \int_0^x (y-x')^+ dx'$$

et

$$h'''_x(y) = \int_0^x 1_{\{y>x'\}} dx'.$$

Alors, on substitue ces expressions dans (3.3) et on change l'ordre d'intégration de chacune des intégrales. Pour les intégrales stochastiques ce changement est valable à l'aide d'un théorème de Fubini facile à vérifier. En conséquence, on a

$$\int_{R_{st}} 1_{(0,x]}(M_z) d\langle \tilde{M} \rangle_z = \int_{\mathbb{R}} 1_{(0,x]}(y) L^y_{st} dy.$$

Donc, on a montré l'égalité (3.1) pour $f(y) = 1_{(0,x]}(y)$. Il en découle que pour presque tout ω, (3.1) est vraie pour toutes les fonctions f de la forme $1_{(x_1,x_2]}$ avec x_1 et x_2 rationnels et un argument de classes monotones nous permet d'achéver la démonstration du théorème.□

Supposons que la martingale M de m_c^4 vérifie $\langle M, \tilde{M} \rangle = 0$. Dans ce cas, pour presque tout ω, la fonction $x \mapsto L^x_{st}$ est Hölderienne d'ordre α, pour tout $\alpha < 1$, uniformement en (s,t). C'est à dire, si on fixe $\alpha < 1$, $z_0 \in \mathbb{R}^2_+$ et $a > 0$ il existe une variable aléatoire H finie p.s. telle que

$$\sup_{s,t \in R_{z_0}} | L^x_{st} - L^y_{st} | \leq H(\omega) \, |x-y|^\alpha,$$

pour tous $x,y \in [-a,a]$. On peut améloirer légèrement ce résultat sous des conditions plus restrictives.

Proposition 3.2. Soit M une martingale de m_c^p avec $p>4$, telle que $<M,\tilde{M}> = 0$. Alors, la condition

$$\int_{R_{st}} 1_{\{M_z=x\}} d<M>_z = 0, \quad \text{pour tout} \quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

est nécéssaire et suffisante pour qu'il existe une version du temps local L_{st}^x dérivable par rapport à x avec une dérivée continue en (s,t,x).

Démonstration. On considère le processus défini par

$$\ell_{st}^x = -2[(-x)^+]^2 + 2[(M_{st}-x)^+]^2 - 4\int_{R_{st}} (M_z-x)^+ dM_z - 4\int_{R_{st}} 1_{\{M_z>x\}} d\tilde{M}_z -$$
$$- 2\int_0^t 1_{\{M_{sv}>x\}} d<M_{s.}>_v - 2\int_0^s 1_{\{M_{ut}>x\}} d<M_{.t}>_u +$$
$$+ 2\int_{R_{st}} 1_{\{M_z>x\}} d<M>_z. \tag{3.5}$$

Par changement de l'ordre d'intégration on obtient pour tous $a<b$,

$$\int_a^b \ell_{st}^x dx = L_{st}^b - L_{st}^a.$$

En conséquence, pour voir que (3.4) est suffisante il suffit de montrer la continuité en (s,t,x) du processus ℓ_{st}^x.

(i) Les intégrales stochastiques

$$\int_{R_{st}} (M_z-x)^+ dM_z \quad \text{et} \quad \int_{R_{st}} 1_{\{M_z>x\}} d\tilde{M}_z$$

ont des versions continues en (s,t,x). Cela découle de l'application du critère de Kolmogorov, comme dans la démonstration du théorème précédent. Pour le deuxième intégrale, on utilise l'hypothèse $M \in m_c^p$ avec $p > 4$, et on obtient les inégalités suivantes, pour $x < y$, $x,y \in [-a,a]$

$$E\Big(\sup_{s,t \in R_{z_0}} \Big| \int_{R_{st}} 1_{\{y \geq M_z > x\}} d\tilde{M}_z \Big|^{p/2}\Big) \leq$$

$$\leq C_p E\Big[\Big(\int_{R_{z_0}} 1_{\{y \geq M_z > x\}} d\langle\tilde{M}\rangle_z\Big)^{p/4}\Big] = C_p E\Big[\Big(\int_x^y L^u_{s_0 t_0} du\Big)^{p/4}\Big] \leq$$

$$\leq C_p \sup_{x \in [-a,a]} E[(L^x_{s_0 t_0})^{p/4}] \, |x-y|^{p/4}.$$

Il est facile de voir, à partir de l'expression du temps local L^x_{st} que $\sup_{x \in [-a,a]} E[(L^x_{st})^{p/4}] < \infty$, pour tout (s,t).

(ii) La dernière intégrale de (3.5) est continue en (s,t,x) à cause de la condition (3.4). Il reste seulement à étudier les intégrales simples. Nous allons montrer, par exemple, la continuité en un point fixé (s,t,x) de l'intégrale

$$\int_0^s 1_{\{M_{ut} > x\}} d\langle M_{.t}\rangle_u .$$

On écrit

$$\Big| \int_0^s 1_{\{M_{ut} > x\}} d\langle M_{.t}\rangle_u - \int_0^{s'} 1_{\{M_{ut'} > x'\}} d\langle M_{.t'}\rangle_u \Big| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^s 1_{\{M_{ut}>x\}}\, d\langle M_{.t}\rangle_u - \int_0^{s'} 1_{\{M_{ut'}>x'\}}\, d\langle M_{.t'}\rangle_u \right| +$$

$$+ \left| \int_0^s (1_{\{M_{ut}>x\}} - 1_{\{M_{ut'}>x'\}})\, d\langle M_{.t'}\rangle_u \right| +$$

$$+ \left| \int_{s'}^s 1_{\{M_{ut'}>x'\}}\, d\langle M_{.t'}\rangle_u \right| .$$

Le premier terme tend vers zéro quand $t' \to t$ parce que les mesures $d\langle M_{.t'}\rangle_u$ convergent faiblement vers $d\langle M_{.t}\rangle_u$ et la fonction $u \to 1_{\{M_{ut}>x\}}$ est continue sauf dans $\{M_{ut}=x\}$, qui est un ensemble de mesure $d\langle M_{.t}\rangle_u$ nulle. On fixe $\delta>0$, et pour $|t'-t|$ et $|x'-x|$ suffisantement petits on a

$$\left| \int_0^s (1_{\{M_{ut}>x\}} - 1_{\{M_{ut'}>x'\}})\, d\langle M_{.t'}\rangle_u \right| =$$

$$= \left| \int_0^s (1_{\{M_{ut}>x\}} - 1_{\{M_{ut'}>x'\}})\, 1_{\{x+\delta \geq M_{ut} \geq x-\delta\}}\, d\langle M_{.t'}\rangle_u \right| \leq$$

$$\leq \int_0^s 1_{\{x+\delta \geq M_{ut} \geq x-\delta\}}\, d\langle M_{.t'}\rangle_u \xrightarrow[t' \to t]{} \int_0^s 1_{\{x+\delta \geq M_{ut} \geq x-\delta\}}\, d\langle M_{.t}\rangle_u ,$$

et cette expression tend vers zéro quand $\delta \downarrow 0$. Enfin, le dernier terme est borné par

$$|s-s'| \sup_{s,t \in R_{z_0}} \langle M_{.t}\rangle_s .$$

Pour montrer que la condition (3.4) est nécéssaire, notons que si $x \to L^x_{st}$ a une dérivée continue en (s,t,x), celle-là doit coincider avec le processus ℓ_{st}. D'après les arguments ci-dessus la continuité en (s,t,x) de ce processus entraîne

$$\int_{R_{st}} 1_{\{M_z = x\}} \, d\langle M\rangle_z = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

Les hypothèses de la proposition 3.2 sont remplies, par exemple, par les martingales browniennes i.d.c., de puissance p intégrables, avec $p > 4$.

On peut conjecturer, en général, que toute martingale de m^2_c vérifie la propriété (3.4), ce qui serait vrai si on diposait d'un temps local continu de la martingale M par rapport à la variation quadratique $\langle M\rangle$. Il ne semble pas convénable d'utiliser la formule d'Itô pour trouver ce temps local et nous n'avons aucun résultat sur son existence. Cependant, il peut exister et présenter des singularités comme dans l'exemple suivant.

<u>Exemple</u>. Soient $\{B^1_t, t \geq 0\}$ et $\{B^2_t, t \geq 0\}$ deux mouvements browniens indépendants et considérons la martingale $M_{st} = B^1_s B^2_t$ par rapport à la filtration produit usuelle. On a $\langle M\rangle_{st} = st$ et pour toute fonction f borélienne bornée on peut écrire

$$\int_{R_{st}} f(B_u^1 B_v^2)\, du\, dv = \int_{\mathbb{R}^2} f(xy) L_1^x(s) L_2^y(t) dx\, dy,$$

où L_1 et L_2 désignent, respectivement, les temps locaux de B^1 et de B^2. Alors, la martingale M a un temps local par rapport à la mesure de Lebesgue donné par

$$L_{st}^x = \int_{\mathbb{R}} L_1^y(s) L_2^{x/y}(t) \frac{dy}{|y|} .$$

Ce temps local est une fonction continue de (s,t,x) pour $x\neq 0$ et $st\neq 0$, mais pour tout (s,t), $st\neq 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} L_{st}^x = \infty$.

Dans le cas du drap brownien $\{W_{st}, (s,t)\in\mathbb{R}_+^2\}$ on connaît des résultats sur l'existence et régularité de son temps local par rapport à la mesure $d\langle W\rangle_{st} = dsdt$ (cf. [10]). On obtient ce temps local par intégration des temps locaux des martingales à un paramètre $W_{.t}$ ou $W_{s.}$. En général, nous ne savons pas s'il existent des versions continues en (s,t,x) des temps locaux des martingales à un paramètre $M_{.t}$ et $M_{s.}$, avec $M\in m_c^2$. On peut énoncer le résultat partiel suivant qui découle immédiatement des travaux de M. Yor [13].

<u>Proposition 3.3</u>. Soit M une martingale de la classe m_c^p, $p\geq 2$, telle que $E(|M(s,t_1)-M(s,t_2)|^p) \leq C|t_1-t_2|^{\lambda p}$, avec $\lambda p > 4$, pour tous $s,t_1,t_2\in[0,T]$. Alors, il existe une version $L_1^x(s,t)$ continue en (s,t,x) des

temps locaux des martingales $M_{.t}$. En plus, pour tous $T>0$, $a>0$ et $\gamma\in(0, \frac{\lambda}{2}-4)$ il existe une variable aléatoire finie $H_{T,a,\gamma}$ telle que pour tous $t_1,t_2\in[0,T]$ et pour tous $x,y\in[-a,a]$

$$\sup_{s\leq T} | L_1^x(s,t_1)-L_1^y(s,t_2)| \leq H_{T,a,\gamma}\ \delta^\gamma ,$$

où $\delta = \sqrt{(x-y)^2+|t_1-t_2|^2}$.

Les hypothèses de la proposition 3.3 sont satisfaites pour toute martingale M de m_c^p avec $p>2$ telle que la variation quadratique $<M>_z$ a une densité mesurable $g(z,\omega)$, par rapport à la mesure de Lebesgue, vérifiant $\sup_{z\in[0,T]^2} E(g(z)^{p/2}) < \infty$.

4. Une inégalité maximale pour certaines intégrales stochastiques.

Ou considère une martingale M de la classe m_c^2. Pour toute fonction $f: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 ou définit

$$\|f\|_M = (E\int_T f(M_z)^2\, d<M>_z)^{\frac{1}{2}} + (E\int_T f'(M_z)^2 d<M>_z)^{\frac{1}{2}} + $$
$$+ (E\int_T f'(M_z)^2\, d<\tilde{M}>_z)^{\frac{1}{2}} + (E\int_T f''(M_z)^2 d<\tilde{M}>_z)^{\frac{1}{2}},$$

où $T = [0,1]^2$. Alors nous avons le résultat suivant

Proposition 4.1. Pour tout $\lambda>0$,

$$P\{\sup_{s,t\in[0,1]} |\int_0^s f(M_{xt})d_xM_{xt}| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_M(1+\|M\|_2),$$

où C est une constante universelle.

Démonstration. On écrit d'abord

$$P\{\sup_{s,t\in[0,1]} |\int_0^s f(M_{xt})d_xM_{xt}| > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} E(\sup_{0\leq t\leq 1} |\int_0^1 f(M_{xt})d_xM_{xt}|).$$

On prend une suite croissante $\mathcal{P}_1^n$ de subdivisions de l'intervalle [0,1] dont le pas tend vers zéro. Alors, au sens de la convergence en probabilité, nous avons

$$\int_0^1 f(M_{xt})d_xM_{xt} = \int_{R_{1t}} f(M_z)dM_z + \int_{R_{1t}} f'(M_z)d\tilde{M}_z +$$

$$+ \lim_n \sum_i \{ \tfrac{1}{2}\int_0^t f''(M(s_i,y))(M(s_{i+1},y)-M(s_i,y))d\langle M_{s_i\cdot}\rangle_y +$$

$$+ \int_0^t f'(M(s_i,y))\, d\langle M_{s_i\cdot}, M_{s_{i+1}\cdot}-M_{s_i\cdot}\rangle_y \}.$$

Les inégalités maximales pour les martingales à deux indices impliquent

$$E(\sup_{0\leq t\leq 1} |\int_{R_{st}} f(M_z)dM_z|) \leq C(E\int_T f(M_z)^2 d\langle M\rangle_z)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$E(\sup_{0\leq t\leq 1} |\int_{R_{1t}} f'(M_z)d\tilde{M}_z|) \leq C(E\int_T f'(M_z)^2 d\langle\tilde{M}\rangle_z)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, on considère une soussuite $\mathcal{P}_1^{n'}$ pour laquelle la limite précédente existe pour tout $t \in Q \cap [0,1]$, presque sûrement. Alors, on majore le supremum en t par la variation totale et on obtient

$$E\Big(\sup_{t\in[0,1]\cap Q} \lim_{n'} \sum_i \Big[\tfrac{1}{2} \int_0^t f''(M(s_i,y))(M(s_{i+1},y)-M(s_i,y))d\langle M_{s_i\cdot}\rangle_y +$$

$$+ \int_0^t f'(M(s_i,y))\, d\langle M_{s_i\cdot}, M_{s_{i+1}\cdot} - M_{s_i\cdot}\rangle_y \Big]\Big) \leq$$

$$\leq E\Big(\liminf_{n'} \lim_{|\mathcal{P}_2^n|\to 0} \sum_j \Big| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_i \Big[\tfrac{1}{2} f''(M(s_i,y))(M(s_{i+1},y)-M(s_i,y))d\langle M_{s_i\cdot}\rangle_y +$$

$$+ f'(M(s_i,y))\, d\langle M_{s_i\cdot}, M_{s_{i+1}\cdot} - M_{s_i\cdot}\rangle_y \Big]\Big|\Big) \leq$$

$$\leq \liminf_{n'} \lim_{|\mathcal{P}_2^n|\to 0} \lim_{|\mathcal{R}_{2,j}^n|\to 0} E\Big(\sum_j \Big| \sum_{i,\ell} \tfrac{1}{2} f''(M_u)M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)^2 \Big| +$$

$$+ \sum_j \Big| \sum_{i,\ell} f'(M_u)M(\Delta_u^2)M(\Delta_u)\Big|\Big) ,$$

où $\mathcal{P}_2^n = \{0=t_1 < t_2 < \ldots < t_q\} \subset [0,1)$ représente une suite croissante de subdivisions de $[0,1]$ dont le pas tend vers zéro, et pour tout $t_j \in \mathcal{P}_2^n$ on a considéré aussi une suite croissante $\mathcal{R}_{2,j}^n = \{t_j^\ell\}$ de subdivisons de $[t_j, t_{j+1}]$, avec $\lim_n |\mathcal{R}_{2,j}^n| = 0$. On a écrit $u = (s_i, t_j^\ell)$. Alors, on a les majorations suivantes

$$E\Big(\sum_j \Big| \sum_{i,\ell} f''(M_u)M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)^2 \Big|\Big) \leq E\Big(\sum_{j,\ell} \Big| \sum_i f''(M_u)M(\Delta_u^1)M(\Delta_u^2)^2\Big|\Big) \leq$$

$$C\ E\Big(\sum_{j,\ell} \Big(\sum_i f''(M_u)^2 M(\Delta_u^1)^2 M(\Delta_u^2)^4 \Big)^{1/2}\Big) \leq$$

$$\leq C\,(E(\sum_{j,\ell}\ \sum_i\ f''(M_u)^2M(\Delta_u^1)^2M(\Delta_u^2)^2)\ E(\sum_{j,\ell}\ \sup_i\ M(\Delta_u^2)^2))^{\frac{1}{2}},$$

et cela converge vers

$$C(\ E(\int_T f''(M_z)d\langle\tilde{M}\rangle_z)\ E(M_{11}^2))^{\frac{1}{2}}$$

quand $n'\to\infty$, $|\mathcal{P}_2^n|\to 0$ et $|\mathcal{R}_{2,j}^n|\to 0$. De la même façon on déduit finalement

$$E(\sum_j|\sum_{i,\ell}\ f'(M_u)M(\Delta_u^2)M(\Delta_u)|)\ \leq\ E(\sum_{j,\ell}|\sum_i\ f'(M_u)M(\Delta_u^2)M(\Delta_u)|)\ \leq$$

$$\leq\ C\ E(\sum_{j,\ell}(\ \sum_i\ f'(M_u)^2M(\Delta_u^2)^2M(\Delta_u)^2)^{1/2})\leq$$

$$\leq\ C\,(E(\sum_{j,\ell}\ \sum_i\ f'(M_u)^2M(\Delta_u)^2)\ E(\sum_{j,\ell}\ \sup_i\ M(\Delta_u^2)^2))^{\frac{1}{2}},$$

qui converge vers

$$C(\ E(\int_T f'(M_z)^2d\langle M\rangle_z)\ E(M_{11}^2))^{\frac{1}{2}}.\ \square$$

Si $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continuement différentiable, on peut montrer à l'aide de la formule d'Itô à un indice, qu'il existe une version continue en (s,t) de l'intégrale stochastique

$$\int_0^s f(M_{xt})\ d_xM_{xt}\ .$$

La proposition précédente assure cette continuité pour les fonctions f de l'adhérence de $\mathcal{C}^2$ par la norme $\|f\|_M$.

Bibliographie

[1] Cairoli, R. (1980). Sur l'extension de la définition d'intégrale stochastique. Lecture Notes in Math. 784, 18-25.

[2] Cairoli, R. and Walsh, J.B. (1975). Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134, 111-183.

[3] Chevalier, L. (1982). Martingales continues à deux paramètres. Bull. Sc. Math., 2^e série, 106, 19-62.

[4] Davis, B.J. (1970). On the integrability of the martingale square function. Israel J. Math. 8, 187-190.

[5] Ledoux, M. (1981). Inégalités de Burkholder, pour martingales indexées par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Lecture Notes in Math. 863, 122-127.

[6] Meyer, P.A. (1981). Théorie élémentaire des processus à deux indices. Lecture Notes in Math. 863, 1-39.

[7] Nualart, D. (1981). Martingales à variation indépendante du chemin. Lecture Notes in Math. 863, 128-148.

[8] Nualart, D. (1982). Différents types de martingales à deux indices. Lecture Notes in Math. 986, 398-417.

[9] Nualart, D. (1982). On the quadratic variation of two-parameter continuous martingales. A paraître dans Ann. Probability.

[10] Walsh, J.B. (1978). The local time of the Brownian sheet. Astérisque 52-53, 47-61.

[11] Wong, E. and Zakai, M. (1978). Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane. Stochastic Processes and their Applications 6, 339-349.

[12] Wong, E. and Zakai, M. (1979). Weak martingales and stochastic integrals in the plane. Ann. Prob. 4, 570-586.

[13] Yor, M. (1982). Sur la transformée de Hilbert des temps locaux browniens, et une extension de la formule d'Itô. Lecture Notes in Math. 920, 238-256.

DAVID NUALART
Departament d'Estadística
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, Barcelona 7
SPAIN

publicacions
edicions
universitat
de barcelona

Dipòsit Legal B.: 37.492-1983
BARCELONA — 1983