UNIVERSITAT DE BARCELONA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

VARIATIONS QUADRATIQUES ET INÉGALITÉS POUR LES MARTINGALES A DEUX INDICES

par
David Nualart

PRE–PRINT N.º 20
març 1984

VARIATIONS QUADRATIQUES ET INÉGALITÉS POUR LES MARTINGALES A DEUX INDICES

par

David Nualart

Abstract. Let $\{M_{st};\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ be a two-parameter continuous martingale. In this paper, the following inequalities are proved

$$c\ E(F(\langle M\rangle_{st})) \leqslant E(F(\sup_{y\leqslant t} \langle M_{\cdot y}\rangle_s)) \leqslant C\ E(F(\langle M\rangle_{st})),$$

for any moderate function F, where the constans c and C depend only on F. As an application we show that the spaces m_c^p of L^p-bounded continuous martingales are dense in m_c^2 for all $p>2$.

Variations quadratiques et inégalités pour les martingales à deux indices

par

David Nualart
(Universitat de Barcelona)

0. Introduction. Dans cette note on se propose de montrer des inégalités du type suivant

$$c\ E(F(\langle M\rangle_{st})) \leq E(F(\sup_{y\leq t} \langle M_{\cdot y}\rangle_s)) \leq C\ E(F(\langle M\rangle_{st}))$$

où $M = \{M_{st};\ s\geq 0,\ t\geq 0\}$ est une martingale continue de carré intégrable, F est une fonction à croissance modérée et c, C sont des constantes qui ne dépendent que de F. La démonstration de ces inégalités est basée d'une part sur les propriétés des variations quadratiques de la martingale M qui ont été établies dans [9] et, d'autre part sur le lemme 1.1 de l'article [6], qui constitue un des fondements des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy pour les martingales à un paramètre. Comme application on prouve que les espaces m_c^p des martingales à deux indices continues et bornées en L^p avec $p>2$ sont denses dans m_c^2.

1. Notation et hypothèses. Notre ensemble de paramètres sera $T = [0,1]^2$, sur lequel on définit l'ordre partiel $(s,t)\leq(s',t')$ si $s\leq s'$ et $t\leq t'$ et l'ordre renforcé $(s,t)<(s',t')$ si $s<s'$ et $t<t'$.

On écrit $R_{st} = [0,s] \times [0,t]$ pour tout $(s,t) \in T$. Etant donnés $z_1 < z_2$, on désigne par $(z_1,z_2]$ le rectangle $\{z: z_1 < z \leq z_2\}$. L'accroissement d'une fonction $f: T \to \mathbb{R}$ sur un rectangle $(z_1,z_2]$, $z_1=(s_1,t_1)$, $z_2 = (s_2,t_2)$ sera indiqué par $f((z_1,z_2]) = f(z_2) - f(s_1,t_2) - f(s_2,t_1) + f(z_1)$. Suivant la terminologie usuelle, une grille sur T est une partie finie $\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1 = \{0=s_1<s_2<\ldots<s_p<1\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{0=t_1<t_2<\ldots<t_q<1\}$. Pour tout point (s_i,t_j) dans $\mathcal{S}$ on posera $\Delta_{ij} = (s_i,s_{i+1}] \times (t_j,t_{j+1}]$ et $\Delta^1_{ij} = (s_i,s_{i+1}] \times (0,t_j]$, avec la convention $s_{p+1}=1$ et $t_{q+1}=1$.

Sur l'ensemble des grilles on considère l'ordre défini par l'inclusion. La norme d'une grille $\mathcal{S}$ est le nombre

$$|\mathcal{S}| = \max_{i,j} (|s_{i+1}-s_i| + |t_{j+1}-t_j|).$$

Au long du travail, F désignera une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$, nulle en zéro, croissante, continue à droite et telle que $F(x) > 0$ pour $x > 0$. On dira que F et modérée s'il existe un $\alpha > 1$ tel que l'on ait

$$\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} < \infty .$$

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé complet muni d'une famille $\{\mathcal{F}_z,\ z \in T\}$ ele sous-tribus de $\mathcal{F}$, croissante complète et continue à droite. Nous supposerons que cette filtration satisfait à l'hypothèse d'indépendance conditionnelle (F4) de Cairoli et Walsh [1]: pour tout (s,t) de T, les tribus $\mathcal{F}_{s1}$ et $\mathcal{F}_{1t}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{F}_{st}$.

On dira qu'un processus $M = \{M_z, z \in T\}$ intégrable et F_z-adapté est une <u>martingale</u> si pour tous $z \leq z'$ on a $E(M_{z'}/F_z) = M_z$. Pour chaque $p \geq 1$, m_c^p représentera la classe des martingales nulles sur les axes et borneés dans L^p, c'est à dire, telles que $E(|M_{11}|^p) < \infty$. Etant donnée une martingale M, on désignera par $M_{\cdot t}$ et $M_{s\cdot}$ les martingales à un paramètre $\{M_{st}, F_{s1}, s \geq 0\}$ et $\{M_{st}, F_{1t}, t \geq 0\}$, respectivement. Si M appartient à m_c^2, on représentera par $\langle M\rangle = \{\langle M\rangle_z, z \in T\}$ une version continue de la variation quadratique de M (voir [9]). Le processus $\langle M\rangle$ est croissant dans le sens où il est adapté, nul sur les axes et $\langle M\rangle(\Delta) \geq 0$ pour tout rectangle $\Delta = (z_1, z_2]$.

Signalons que les résultats de ce travail ont une extension immédiate aux processus indexés par un rectangle quelconque R_z, our par $\mathbb{R}_+^2$.

<u>2. Inégalités pour les variations quadratiques d'une martingale à deux indices</u>. Soit M une martingale de la classe m_c^2. Nous rappelons d'abord la version suivante du théorème de décomposition de Doob-Meyer, qui a été démonstrée dans [9]:

$$M_{st} = 2\int_{R_{st}} M_z dM_z + 2\tilde{M}_{st} + \langle M_{s\cdot}\rangle_t + \langle M_{\cdot t}\rangle_s - \langle M\rangle_{st},$$

où $\tilde{M}$ est une martingale continue et les variations quadratiques $\langle M_{s\cdot}\rangle_t$, $\langle M_{\cdot t}\rangle_s$ et $\langle M\rangle_{st}$ ont aussi des versions continues. Considérons la martingale continue $N_t = \langle M_{\cdot t}\rangle_1 - \langle M\rangle_{1t}$. On fixe une suite croissante $S^n = P_1^n \times P_2^n = \{(s_i^n, t_j^n);\ i \in I^n,\ j \in J^n\}$ de grilles sur T dont la norme tend vers zéro. Pour simplifier la notation nous omettrons l'indice n s'il n'y a pas de confusion. Pour tout $t \in [0,1]$

on écrit $J^n_t = \{ j \in J^n : \; t_j < t\}$ et quand on somme par rapport à cet ensemble d'indices on suppose que $t_{j_o+1} = t$ si $j_o = \max J^n_t$.

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1. Avec les notations précédentes,

$$\sup_t | <N>_t - \sum_{j \in J^n_t} (\sum_{i \in I^n} M(\Delta_{ij}) M(\Delta^1_{ij}))^2 | \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

au sens de la convergence en probabilité.

Démonstration. D'après les propriétés des martingales à un indice ou sait que

$$\sup_t | <N>_t - \sum_{j \in J^n} (N(t_{j+1} \wedge t) - N(t_j \wedge t))^2 | \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Soit $\lambda > 0$. Alors, pour prouver le lemme, nous allons étudier la convergence vers zéro de la probabilité

$$P\{ \sup_t | \sum_{j \in J^n_t} (N(t_{j+1}) - N(t_j))^2 - \sum_{j \in J^m_t} (\sum_{i \in I^m} M(\Delta_{ij}) M(\Delta^1_{ij}))^2 | > \lambda\} , \tag{2.1}$$

où les entiers n et m sont tels que $m > n$. Considèrons les subdivisions de l'intervalle $[0,1]$, $\mathcal{P}^n_2 = \{t^n_j\}$ et $\mathcal{P}^m_2 = \{t^m_k\}$. Pour tout $j \in J^n_t$ on écrit $J^{n,m}_{j,t} = \{ k \in J^m_t : \; t \wedge t^n_j \leq t^m_k < t \wedge t^n_{j+1}\}$ et quand on somme par rapport à cet ensemble d'indices on suppose aussi que $t^m_{k_o+1} = t \wedge t^n_{j+1}$ si $k_o = \max J^{n,m}_{j,t}$. La probabilité (2.1) est majorée par $p_1 + p_2$ où p_1 et p_2 représentent les deux probabilités suivantes

$$p_1 = P\{ \sup_t | \sum_{j \in J^n_t} (N(t_{j+1}) - N(t_j))^2 - \sum_{j \in J^n_t} (\sum_{k \in J^{n,m}_{j,t}} \sum_{i \in I^m} M(\Delta_{ik}) \cdot$$

$$\cdot M(\Delta^1_{ik}))^2 | > \frac{\lambda}{2}\} ,$$

$$p_2 = P\{ \sup_t |\sum_{j\in J_t^n} \sum_{k\in J_{j,t}^{n,m}} \sum_{i\ I^m} M(\Delta_{ik})M(\Delta_{ik}^1)(\sum_{\substack{k'<k \\ k'\in J_{j,t}^{n,m}}} \sum_{i\in I^m} M(\Delta_{ik'})\cdot$$

$$\cdot M(\Delta_{ik'}^1))| > \frac{\lambda}{4}\}.$$

Les résultats obtenus dans [9] entraînent

$$\sup_t | N_t - \sum_{j\in J_t^n} \sum_{i\in I^n} M(\Delta_{ij})M(\Delta_{ij}^1)| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

En conséquence, pour tout n fixé, on a $\lim_m p_1 = 0$. D'autre part nous allons prouver que

$$\lim_n \sup_m p_2 = 0, \tag{2.2}$$

ce qui achèvera la démonstration du lemme.

Dans la probabilité p_2 il apparaît la valeur absolue d'un processus qui, en fonction du paramètre t, est une martingale locale continue. Alors, moyennant l'inégalité de Davis et le lemme de Fatou, on obtient

$$p_2 \leq 2\lambda^{-1/2} E[\sup_t |\sum_{j\in J_t^n} \sum_{k\in J_{j,t}^{n,m}} \sum_{i\in I^n} M(\Delta_{ik})M(\Delta_{ik}^1)(\sum_{\substack{k'<k \\ k'\in J_{j,t}^{n,m}}} \sum_{i\in I^n} M(\Delta_{ik'})\cdot$$

$$\cdot M(\Delta_{ik'}^1))|^{1/2}] \leq$$

$$\leq C\lambda^{-1/2} \sup_{\nu>m} E[|\sum_{j\in J^n} \sum_{k\in J_{j,1}^{n,m}} (\sum_{\substack{k'<k \\ k'\in J_{j,1}^{n,m}}} \sum_{i\in I^m} M(\Delta_{ik'})M(\Delta_{ik'}^1))^2\cdot$$

$$\cdot \sum_{h\in J_{k,1}^{m,\nu}} (\sum_{i\in I^m} M(\Delta_{ih})M(\Delta_{ik}^1))^2 |^{1/4}].$$

Cette espérance est alors majorée par

$$\{E[(\sum_{h\in J^\nu}\ \sum_{i\in I^m} M(\Delta_{ih})^2)^{1/2}\ (\sup_{k\in J^m} \sum_{i\in I^m} M(\Delta^1_{ik})^2)^{1/2}\ ]\cdot$$

$$\cdot\ E[\ \sup_{\substack{j\in J^n\\ k\in J^{n,m}_{j,1}}} \Big| \sum_{\substack{k'<k\\ k'\in J^{n,m}_{j,1}}} \sum_{i\in I^m} M(\Delta_{ik'})M(\Delta^1_{ik'})\Big|]\}^{1/2}. \qquad (2.3)$$

Le premier facteur dans (2.3) est borné par $\sqrt{E(M^2_{11})}$. Nous allons montrer que le deuxième facteur converge vers zéro quan n tend vers ∞, uniformément par rapport à m. On écrit

$$2 \sum_{\substack{k'<k\\ k'\in J^{n,m}_{j,1}}} \sum_{i\in I^m} M(\Delta_{ik'})M(\Delta^1_{ik'}) =$$

$$= \sum_{i\in I^m} \big| (M(s^m_{i+1},t^m_{k+1})-M(s^m_i,t^m_{k+1}))^2 - (M(s^m_{i+1},t^n_j)-M(s^m_i,t^n_j))^2 \big| -$$

$$- \sum_{\substack{k'<k\\ k'\in J^{n,m}_{j,1}}} \sum_{i\in I^m} M(\Delta_{ik'})^2.$$

Alors, en utilisant les techniques qu'on a employé, par exemple, dans la démonstration du théorème 3.3 de [9], on peut montrer que

$$\lim_n \sup_m E[\ \sup_{j\in J^n} \sum_{k\in J^{n,m}_{j,1}} \sum_{i\in I^m} M(\Delta_{ik})^2\ ] = 0$$

En consèquence, il suffit de voir que

$$\lim_n \sup_m E[\ \sup_j \sup_{t\in[t^n_j,t^n_{j+1}]} \sum_{i\in I^m} \{ (M(s^m_{i+1},t)-M(s^m_i,t))^2 -$$

$$- (M(s^m_{i+1},t^n_j)-M(s^m_i,t^n_j))^2\}\ ] = 0. \qquad (2.4)$$

Pour montrer (2.4) on remarque d'abord que la famille de variables aléatoires $\{\sup_t \sum_i (M(s_{i+1},t)-M(s_i,t))^2;\ \mathcal{P}_1 = \{s_i\}$ subdivision de l'intervalle $[0,1]\}$ est uniformément intégrable. En effet, considérons le processus croissant continu et $\mathcal{F}_{1t}$-adapté défini par

$$A_t = \sup_{y\leq t} \sum_i (M(s_{i+1},y)-M(s_i,y))^2,$$

et calculons le potentiel Z_t associé à A_t,

$$Z_t = E(A_1-A_t \mid \mathcal{F}_{1t}) \leq E[\sup_{t\leq y\leq 1} \sum_i (M(s_{i+1},y)-M(s_i,y))^2/\mathcal{F}_{1t}] \leq$$

$$\leq c \sum_i E[(M(s_{i+1},1)-M(s_i,1))^2/\mathcal{F}_{1t}] = m_t.$$

Le processus m_t est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_{1t},\ t\geq 0\}$. D'après le lemme de La Vallée-Poussin, il existe une fonction F modérée convexe, verifiant $\lim_{x\to\infty} F(x)/x = \infty$, telle que $E(F(M_{11}^2))<\infty$. Alors, l'inégalité de Garsia-Neveu (cf. [5]) fournit une constante c_F telle que

$$E(F(A_1)) \leq c_F E(F(m_1)) = c_F\ E(F(\sum_i (M(s_{i+1},1)-M(s_i,1))^2)) \leq$$

$$\leq c'_F E(F(M_{11}^2)) < \infty,$$

ce qui entraîne l'intégrabilité uniforme de la famille définie ci--dessus.

D'après les résultats obtenus dans [9], on sait que

$$\sup_t \Big| \sum_{i\in I^m} (M(s^m_{i+1},t) - M(s^m_i,t))^2 - \langle M_{\cdot t}\rangle_1 \Big| \xrightarrow[m\to\infty]{P} 0. \qquad (2.5)$$

La remarque précédente implique que cette convergence a lieu en

L^1 et que la variable aléatoire $\sup_t \langle M_{.t}\rangle_1$ est intégrable. D'autre part, à cause de la continuité du processus $\langle M_{.t}\rangle_s$ on a

$$\sup_j \sup_{t\in[t_j^n, t_{j+1}^n]} |\langle M_{.t}\rangle_1 - \langle M_{.t_j^n}\rangle_1| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0, \qquad (2.6)$$

et cette convergence est aussi en L^1, par le théorème de convergence dominée. Finalement, les limites (2.5) et (2.6) en L^1 entraînent (2.4) et nous permettent de finir la démonstration du lemme.□

Maintenant on peut montrer le résultat suivant.

<u>Théorème 2.2</u>. Pour toute fonction modérée F, il existe des constantes c et C ne dépendant que de F telles que pour toute martingale M de m_c^2

$$c\, E[F(\langle M\rangle_{11})] \leq E[F(\sup_{0\leq t\leq 1} \langle M_{.t}\rangle_1)] \leq C\, E[F(\langle M\rangle_{11})].$$

<u>Démonstration</u>. Le processus $Z_t = \langle M_{.t}\rangle_1$ est une sous-martingale continue, nulle en zéro, qui a comme processus croissant associé le processus $\langle M\rangle_{1t}$. Alors, la première inégalité est une conséquence immédiate du théorème 3.2 de [6]. Pour montrer la deuxième inégalité on utilisera le lemme 1.1 de [6], appliqué aux processus croisants continus $A_t = \sup_{y\leq t} \langle M_{.y}\rangle_1$ et $B_t = \langle M\rangle_{1t}$, adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_{1t},\ t\in[0,1]\}$. On considère deux temps d'arrêt finis S,T, par rapport à cette filtration, avec $S\leq T$. Nous avons

$$E[(A_T-A_S)1_{\{S<T\}}] \leq E[\sup_{S\leq t\leq T} \langle M_{.t}\rangle_1 1_{\{S<T\}}] \leq$$

$$\leq E[\sup_{S\leq t\leq T} |\langle M_{.t}\rangle_1 - \langle M\rangle_{1t}| 1_{\{S<T\}}] + E[\langle M\rangle_{1T} 1_{\{S<T\}}].$$

Le processus $N_t = \langle M_{\cdot t}\rangle_1 - \langle M\rangle_{1t}$ est une martingale continue, mulle en zéro. Alors, en appliquant l'inégalité de Davis à la martingale locale $N_{(S+t)\wedge T} - N_S$, par rapport à la filtration $F_{1,(S+t)\wedge 1}$, on obtient

$$E[\sup_{S\leq t\leq T} |N_t| 1_{\{S<T\}}] \leq E[\sup_{t\geq 0} |N_{(S+t)\wedge T} - N_S| 1_{\{S<T\}}] + E[|N_S| 1_{\{S<T\}}] \leq$$

$$\leq c\, E[\langle N_{(S+\cdot)\wedge T} - N_S\rangle_\infty^{1/2}\, 1_{\{S<T\}}] + 2E[\langle M\rangle_{1T}\, 1_{\{S<T\}}] =$$

$$= c\, E[(\langle N\rangle_T - \langle N\rangle_S)^{1/2}\, 1_{\{S<T\}}] + 2E[\langle M\rangle_{1T}\, 1_{\{S<T\}}].$$

A cause du lemme 2.1 et de la continuité du processus $\langle N\rangle_t$, il existe une suite croissante $S^n = \{(s_i^m, t_j^n)\}$ de subdivisions de T, dont le pas tend vers zéro, telle que

$$\langle N\rangle_T - \langle N\rangle_S = \lim_n \sum_{j\in J_{ST}} (\sum_i M(\Delta_{ij}) M(\Delta_{ij}^1))^2,$$

p.s., où $J_{ST} = \{j : S < t_j < T\}$.

En conséquence,

$$\langle N\rangle_T - \langle N\rangle_S \leq \liminf_n \{(\sum_{j\in J_{ST}} \sum_i M(\Delta_{ij})^2) \sup_{j\in J_{ST}} \sum_i M(\Delta_{ij}^1)^2\} \leq$$

$$\leq \langle M\rangle_{1T} \sup_{S\leq t\leq T} \langle M_{\cdot t}\rangle_1 .$$

Finalement, si on écrit

$$a = E[\sup_{S\leq t\leq T} \langle M_{\cdot t}\rangle_1\, 1_{\{S<T\}}]$$

et

$$b = E[\langle M\rangle_{1T}\, 1_{\{S<T\}}],$$

nous avons prouvé que

$$a \leq c\sqrt{ab} + 3b,$$

ce qui entraîne $a \leq$ const.b. Le lemme 1.1 de [6] permet alors d'achéver la démonstration du théorème. □

Remarques.

1. Par simétrie on aura égalément

$$c\ E[F(\langle M\rangle_{11})] \leq E[F(\sup_{0\leq s\leq 1} \langle M_{s.}\rangle_1)] \leq C\ E[F(\langle M\rangle_{11})].$$

2. On dira qu'une fonction modérée convexe F est une fonction de Young si elle vérifie

$$\inf_{x>0} \frac{x\,f(x)}{F(x)} > 1,$$

f étant la derivée à droite de F. Pour une fonction de Young F, on a les inégalités suivantes,

$$c\ E[F(\langle M\rangle_{11}^{1/2})] \leq E[F(\sup_{(s,t)\in T} |M_{st}|)] \leq C\ E[F(\langle M\rangle_{11}^{1/2})]. \tag{2.7}$$

En effet, on note d'abord que $E[F(\langle M\rangle_{11}^{1/2})] < \infty$ entraîme, d'après le théorème précédent, $E[F(\langle M_{.1}\rangle_1^{1/2})] < \infty$ et, par les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy on a $E[F(\sup_{0\leq s\leq 1} |M_{s1}|)] < \infty$. Par l'inégalité de Doob (cf. [4]) cela implique $E[F(\sup_{(s,t)\in T} |M_{st}|)] < \infty$. Alors, on peut prendre des limites dans les inégalités a temps discret (cf. [8]) et on obtient (2.7). On ignore si ces inégalités restent vraies pour une fonction F modérée convexe (en particulier pour $F(x)=x$) ou pour une fonction modérée quelconque. Dans l'article [3] Chevalier a montré ces inégalités pour $F(x) = x^p$, $0 < p < \infty$, en supposant que toutes les martingales de carré intégrable sont continues.

3. Application à un problème d'approximation. Pour tot $p \geq 2$ on considère l'espace de Banach m_c^p. Dans cet espace les normes $\| M_{11} \|_p$ et $\| <M_{11}^{1/2}> \|_p$ sont équivalentes. On écrit

$$m_c^\infty = \bigcap_p m_c^p.$$

Rappelons quelques définitions dont nous aurons besoin dans cette section. Une région d'arrêt est un sous-ensemble aléatoire progressif fermé D de $T \times \Omega$ tel que si $z \in D$, alors $R_z \subset D$. La tribu pévisible dans $T \times \Omega$ est, par definition, la tribu engendrée par les ensembles $(z,z'] \times F$, avec $z < z'$ et $F \in \mathcal{F}_z$. Si $X = \{X_z, z \in T\}$ est un processus mesurable et borné on indiquéra par ΠX sa projection prèvisible. Si $A = \{A_z, z \in T\}$ est un processus croissant (c'est à dire, $A(\Delta) \geq 0$ pour tout rectangle $\Delta = (z,z']$) continu à droite, nul sur les axes et tel que $E(A_{11}) < \infty$, on notera par A^Π sa projection duale prévisible. On peut trouver dans [7] les définitions et propriétés de ces projections.

En principe on ne sait pas si une martingale M de m_c^2 peut être approchée par des martingales continues et bornées. On pourrait prendre par exemple, la suite de martingales bornées

$$\{ E((M_{11} \vee n) \wedge (-n) / \mathcal{F}_z), \ z \in T \}.$$

Cette suite converge vers M en L^2, mais, en général, on ne sait pas montrer que ces martingales ont des versions continues. D'autre parte, on peut introduire les régions d'arrêt

$$D_n = \{z \ T: \sup_{z' \in R_z} | M_{z'} | \leq n\}$$

et les martingales continues

$$\{ \int_{R_z} 1_{D_n} \, dM, \ z \in T \}.$$

Ces martingales convergent vers M en m_c^2 mais elles ne sont pas forcement bornées. Alors, en utilisant une idée de E. Merzbach, on peut prouver le résultat suivant.

<u>Proposition 3.1</u>. m_c^∞ est dens dans m_c^2.

<u>Démonstration</u>. Soit M une martingale de m_c^2. Pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$ on considère la variable aléatoire $S_k^n = \inf \{ s \geq 0 : \langle M \rangle_{s,k/n} = n \} \wedge 1$, qui est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\{ \mathcal{F}_{s,k/n}, \ s \geq 0 \}$. L'ensemble aléatoire

$$D_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} [0, S_k^n] \times [\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}]$$

n'est pas, en général, une région d'arrêt, mais on peut définir la projection prévisible $\Pi 1_{D_n}$. On écrit

$$M_n(z) = \int_{R_z} \Pi 1_{D_n} \, dM.$$

Nous allons voir que les martingales M_n appartiennent à l'espace m_c^∞ et convergent vers M en m_c^2. En utilisant la définition de projection prévisible on obtient,

$$E(|M(1,1) - M_n(1,1)|^2) = E [\int_T (1 - \Pi 1_{D_n})^2 \, d\langle M \rangle] \leq$$

$$\leq E [\int_T (1 - \Pi 1_{D_n}) d\langle M \rangle] = E(\int_T (1 - 1_{D_n}) \, d\langle M \rangle) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

D'autre part, à cause des inégalités (2.7), pour montrer que $M_n \in m_c^\infty$ il suffit de voir que $E(\langle M_n\rangle_{11}^p) < \infty$ pour tout p. Nous avons $\langle M_n\rangle_{11} = \int_T (\Pi 1_{D_n})^2 d\langle M\rangle \leq \int_T \Pi 1_{D_n} d\langle M\rangle$, et en appliquant les propriétés des projections prévisibles (cf. [7]) on a finalement

$$E(\langle M_n\rangle_{11}^p) \leq E[(\int_T \Pi 1_{D_n} \, d\langle M\rangle)^p] = E[((\int 1_{D_n} \, d\langle M\rangle)^\Pi)^p] \leq n^{2p}. \square$$

Remarquons que l'approximation obtenue dans la preuve de la proposition précédante n'a pas un caractère local, dans le sens où on ne peut pas affirmer que les martingales M et M_n coincident sur une région d'arrêt.

Bibliographie

[1] Cairoli, R., Walsh, J.B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134, 111-183 (1975).

[2] Cairoli, R., Walsh, J.B.: Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 44, 279-306 (1978).

[3] Chevalier, L.: Martingales continues à deux paramètres. Bull. Sc. Math. (2) 106, 19-62 (1982).

[4] Dellacherie, C.: Inégalités de convexité pour les processus croissants et les sousmartingales. Lecture Notes in Math. 721, 371-377 (1979).

[5] Garsia, A.M.: Martingale inequalities: seminar notes on recent progress. Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, Reading (1973).

[6] Lenglart, E., Lépingle, D., Pratelli, M.: Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Lecture Notes in Math. 784, 26-48 (1980).

[7] Merzbach, E., Zakai, M.: Predictable and dual predictable projections of two-parameter stochastic processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 53, 263-269 (1980).

[8] Meyer, P.A.: Théorie élémentaire des processus à deux indices. Lecture Notes in Math. 863, 1-39 (1981).

[9] Nualart, D.: On the quadratic variation of two-parameter continuous martingales. À paraître dans Ann. Probability.

DAVID NUALART

Departament d'Estadística Matemàtica

Universitat de Barcelona

Gran Via 585, Barcelona 7

Espagne

publicacions
edicions
universitat
de barcelona

Dipòsit Legal B.: 7450-1984
BARCELONA – 1984