

UNIVERSITAT DE BARCELONA

MATEMÀTIQUES, MATEMÀTICS I
REVOLUCIÓ FRANCESA

by

Josep Pla i Carrera

AMS Subject Classification: 01A50, 00A25



Mathematics Preprint Series No. 77
February 1990

MATEMÀTIQUES, MATEMÀTICS I REVOLUCIÓ FRANCESA

JOSEP PLA I CARRERA

Departament de Lògica, Història i

Filosofia de la Ciència

Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

Gran Via 585

08007 Barcelona, Espanya

ABSTRACT

The French Revolution constitutes, certainly, a political revolution of a great transcendence and is located between two scientific, and namely, mathematical revolutions—after the seventeenth century, known as the “Century of Genius”, and before the nineteenth century, called the “Golden Age”—but during the French Revolution itself there was not a mathematical revolution.

Nevertheless the ideological ground—the Enlightenment—above which the French Revolution settled was intimately connected with the scientific revolution of the seventeenth century, which unquestionably had mathematical roots.

The mathematical work of the French Revolution's men will be definitive in the line of exhaustion of the mathematical means and ideas that the mathematical revolution of the seventeenth century had furnished, and their work entailed the necessity of a genuine mathematical revolution, if it wanted to follow the revolutionary line initiated in the seventeenth century.

These men—the mathematicians of the French Revolution—participated also in government tasks and their political contribution to the creation of new centres of teaching and research and other matters was significant.

AMS Subject Classification: 01A50, 00A25.

Treball subvencionat parcialment per la beca PB86-0269 de la Direcció General de Investigación Científica y Técnica, en base a la conferència inaugural del curs 1989-1990, llegida a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, el 4 d'octubre de 1989.



0701570657

ÍNDIX

I. Introducció	1
II. La Il·lustració i les matemàtiques	4
III. Els matemàtics de la Revolució Francesa i la seva obra científica	14
1. El concepte de funció	15
2. Les integrals el·líptiques	21
3. La geometria diferencial clàssica	27
IV. Els matemàtics de la Revolució Francesa i la seva tasca política i didàctica	37
Bibliografia	41

I. Introducció

El 14 de juliol de 1789 — ara féu dos cents anys — els francesos portaren a terme, a París, una gesta puntual, la *presa de la Bastille*. Aquest fet puntual constituïa, però, la culminació d'un procés ideològic — la *Il·lustració* —, alhora que encetava un esdeveniment polític — la *instauració de la República a França* — d'una transcendència política, cultural, econòmica i social de la qual encara avui en som hereus¹.

D'antuï pot semblar que aquest fet històrico-polític no és res més que això: un fet històrico-polític puntual; però entès com la síntesi de la convulsió política que, a partir d'ell, havia d'esdevenir, entès com a síntesi de la Revolució Francesa, constitueix sense cap mena de dubte una autèntica **revolució política** en el sentit que avui dia hom atribueix a aquest mot i que podem trobar exposat acuradament, amb tot detall, a la interessant obra d'I. Bernard Cohen, *Revolution in Science*². Aquest sentit el trobem sintetitzat a la gran obra de Diderot i d'Alembert, l'*Encyclopédie*, on "revolució en sentit polític" és "un canvi important en el govern d'un estat"³ i, d'alguna manera, podem dir que la Revolució Francesa constitueix el paradigma d'una revolució política, un procés que abraça "violència, novetat i canvi total"⁴. El propi Cohen ens diu que "no

¹ Veieu l'excel·lent dissertació de J.M. Bermudo [Bermudo, J.M. [1989], 5–35], llegida a l'Acte Inaugural de la Universitat de Barcelona, el dia 29 de setembre de 1989; en ella s'analitza si avui encara queda alguna cosa de les idees de Llibertat, Igualtat i Fraternitat que constituïen l'eslògan de la Revolució Francesa i, en cas afirmatiu, què en queda, com les entenem avui, a què hem claudicat, etc.

Cal recordar que, poc abans, s'havia produït un altre fet políticament remarcable, la Revolució Americana de 1776, amb el canvi de status polític que comportà pels Estats d'Amèrica del Nord i amb la *Declaració d'Independència* que redactà Jefferson a la qual es diu que un poble pot arribar a "assumir, entre les potències de la terra, el rang particular i igualitari que li atorguen les lleis de la naturalesa i les del déu natural".

² Cohen, I.B. [1985], 22–29.

A *Revolution and the Transformation of Societies*, S.N. Eisenstadt indica "cinc dimensions" del "procés revolucionari". Aquestes dimensions són:

1. un "canvi violent del règim polític existent, de les seves bases de legitimització i dels seus símbols";
2. el "desplaçament de l'èlite política que exerceix el poder o de la classe dominant per una altra";
3. un "canvi d'una gran envergadura en totes les grans esferes institucionals, principalment en les relacions econòmiques i de classe que condueixen a la modernització de la vida social en gairebé tots els seus aspectes, al desenvolupament econòmic i la industrialització i a una creixent centralització i participació en l'esfera política";
4. "una ruptura radical amb el passat";
5. l'aconseguint "no solament de transformacions institucionals i organitzatives sinó també de canvis morals i educatius".

Aquestes dimensions, és clar, en cada cas particular, en cada revolució, es presenten amb les seves pròpies matitzacions.

³ REVOLUTION, s.f., signifie en termes politiques un changement considerable arrivé dans le gouvernement d'un état.

⁴ Eisenstadt, S.N. [1978], 2–3.

La Revolució Americana o Guerra de la Independència constitueix també una autèntica revolució política i "així va quedar expressat a la divisa del Gran Segell dels Estats Units d'Amèrica, creat poc després de la revolució, *Nova ordo seculorum*, és a dir, un nou ordre secular o segons la reinterpretació de la dècada de 1930, un *New Deal*

solament establí d'una vegada per totes i per sempre més el sentit de les paraules [revolució en el sentit polític] sinó que aconseguí d'alterar la manera de pensar sobre ella en diversos sentits. Primer, els excessos i actes de violència feren témer per les conseqüències dolentes de les revolucions, . . . Segon, assentà una pauta segons la qual els canvis socials profunds apareixen vinculats a l'acció política. Tercer, s'ha dit que aquest nou concepte de revolució connota un element d'inevitabilitat, semblant al que tenen els planetes en la seva revolució entorn del sol"⁵.

Hi ha doncs un cert antagonisme entre aquest concepte de revolució, la revolució en sentit astronòmic — retorn a l'origen, per tornar a començar — i la idea de revolució política — i, en particular, de Revolució Francesa — que “mira cap al futur i, en general, no se la pot pas concebre com el retorn a una situació anterior”⁶. Com posa de manifest Hannah Arendt, un dels senyals comuns a totes les revolucions polítiques és l'element del que “és novell”, i “el concepte modern de revolució està indissolublement lligat amb la idea que el curs de la història sofreix un començament brusc i nou . . .”⁷ i, en conseqüència, la revolució implica que “està a punt d'iniciar-se una història completament nova, que abans mai no s'havia conegut ni s'havia relatat”⁸.

A nosaltres, però, el que ens interessa saber és si, al segle XVIII, i especialment al sí de la Revolució Francesa, es produí també — paral·lelament o no a la revolució política — una **revolució científica**⁹. Cal indicar, però, que una de les diferències més notables entre el concepte de revolució política i el concepte de revolució científica — que ho és també solament en tant que s'inicia un període nou — la constitueix el fet que, en aquesta darrera, la revolució científica, cal

[Cohen, I.B. [1985], 188]. . . “El caràcter de Revolució com a creació de quelcom de novell, en lloc de retorn a un passat millor que el present, també el trobem expressat en les vibrants frases de la *Declaració d'Independència* [veieu nota 1]. . . Aquesta frase, lluny d'ésser una vindicació retrospectiva d'antics drets, és una afirmació explícita sobre el present. A més, el “rang just i igualitari” que menciona Jefferson no es basa pas en el Déu Revelat ni en les Sagrades Escripures sinó en la “naturalesa” i en el “déu natural”. El pla original de la *Declaració* preveia una invocació de “veritats” considerades “sagrades i innegables”, però Jefferson declarà que certes veritats són “evidents en elles mateixes”, en el sentit en que Newton va concebre els axiomes damunt els quals havia de bastir els seus *Principia*. I, en afirmar de forma rotunda que els homes “han rebut del seu creador” certs “drets inalienables”, entre els quals s'hi troben “la vida, la llibertat i la búsqueda de la felicitat”, s'està declarant la novetat de la Revolució” [Cohen, I.B. [1985], 188–189].

⁵ Cohen, I.B. [1985], 189. Cal dir també, d'altra banda, que un dels conceptes primitius del terme revolució era precisament aquest comportament cíclic que mostren els planetes entorn del sol: aquesta és l'altra accepció que l'*Encyclopédie* dona al mot *Revolució*.

⁶ Cohen, I.B. [1985], 189.

⁷ Arendt, H. [1965].

⁸ Arendt, H. [1965]. Veieu la nota 4 referent a la Revolució Americana.

⁹ Cal indicar que el caràcter violent del concepte de revolució política, que trobem agreujat a la Gran Revolució Russa i a la Revolució Cultural de Xina, féu que el terme aconseguís un status no massa desitjable, sobretot quan hom pensa en transportar-lo a les revolucions científiques. És a dir, no tothom està disposat a acceptar l'existència de revolucions científiques, preferint termes com ara “evolució”, “transformació”, “progrés”, . . ., entre d'altres raons pel contingut de violència que el terme “revolució”, en política, comporta.

que existeixen vincles de transformació entre allò que és nou i allò que és vell¹⁰. Una revolució científica és l'antítesi del sentit de les paraules d'Alfons el Savi quan diu que l'única cosa que val la pena a aquesta vida és "fusta vella per cremar, vi vell per beure, vells amics amb qui parlar i llibres vells per llegir" i malgrat que Cohen "no té cap resposta fàcil al problema de definir en què constitueix una revolució [en ciència]"¹¹, "l'estudi d'un gran nombre de revolucions" portà aquest autor a distingir quatre grans etapes successives en totes elles¹². Són:

1. la "revolució intel·lectual" o la "revolució en si mateixa" que, en síntesi, és el que realitza un científic o un grup de científics al començament d'una revolució científica";
2. l'"acceptació del nou mètode, concepte o teoria" per part de l'autor o grup d'autors — segueix essent un acte íntim;
3. la "revolució dels papers" per la qual "la idea o el conjunt d'idees entra en circulació entre els membres de la comunitat científica";
4. l'"adopció per part d'altres científics de les teories o dels descobriments i la incorporació dels nous mètodes revolucionaris al seu propi treball"¹³.

Aquests senyals no constitueixen pròpiament una definició i això obliga Cohen a donar *proves a favor de les revolucions en ciències*¹⁴. Cada una d'aquestes proves, per separat, no és concloent, però juntes constitueixen la prova definitiva que ens trobem davant d'una revolució científica. Les proves són:

1. els testimonis dels testimonis: els judicis emesos pels observadors científics i no científics;
2. l'examen de la documentació històrica vinculada amb la qüestió i posterior a l'època en que es produeix la pretesa revolució;
3. el judici dels historiadors i, en particular, el dels historiadors i filòsofs de la ciència;
4. l'opinió dels especialistes dels nostres dies¹⁵.

Malgrat que aquestes proves no són ni subjectives ni concloents i requereixen d'una "anàlisi i reflexió crítica" posteriors, la seva absència és definitiva: si en manca una sola, podem assegurar que la revolució científica no s'ha donat.

¹⁰ A les revolucions polítiques [i, àdhuc, a revolucions com la Revolució Francesa], malgrat tot, també succeix el mateix, si bé en un grau molt més petit.

¹¹ Cohen, I.B. [1985], 53.

¹² Cohen, I.B. [1985], 42.

¹³ Cohen, I.B. [1985], 42-44. Cal indicar que, a partir del segle XVII, els autors o grups d'autors són conscients que la seva obra constitueix una revolució, malgrat que no ho manifestin amb aquestes paraules, però cal que el seu convenciment transcendeixi a la comunitat científica.

¹⁴ Cohen, I.B. [1985], cap. 3.

¹⁵ Cohen, I.B. [1985], 54-56. "Cal reconèixer que els quatre criteris són força subjectius i no cobreixen pas totes les contingències possibles. Però, en el pitjor dels casos, constitueixen les condicions suficients per poder apuntalar el judici que s'ha produït una revolució en ciència, que cal confirmar per mitjà de la investigació i de la reflexió crítica". [Cohen, I.B. [1985], 57.]

En el cas de les matemàtiques del segle XVIII i, en particular, dels matemàtics de la Revolució Francesa, no existeix cap de les quatre proves que proposa Cohen¹⁶ — llevat que considerem que formen part de la revolució matemàtica [i científica] del segle XVII, revolució que culmina en l'obra de Newton, els *Principia Mathematica*. La revolució dels *Principia* és la síntesi d'una revolució científica — en constitueix les proves 1 i 2 — que, a l'igual que la presa de la Bastille respecte de la Revolució Francesa, no és altra cosa que el punt de partida de la revolució científica que conduirà als canvis que en constitueixen les proves 3 i 4 esmentades més amunt. Aquests canvis, en incorporar-se a la tasca de la *totalitat* dels científics que la integren en els seus propis fruits, posen de manifest que s'ha donat una revolució científica, ja que com observà d'Alembert: “Un cop assentades les bases d'una revolució, gairebé sempre és la generació següent la que completa aquesta revolució”¹⁷. El segle XVII havia començat una revolució científica indubtable; el segle XVIII, completant-la, la portaria a les seves darreres conseqüències.

II. La Il·lustració i les matemàtiques

Pel que fa a les matemàtiques, el segle XVIII està col·locat entre el *segle dels genis* — segle XVII — i el *segle d'or* — segle XIX¹⁸. El *càlcul diferencial* i la *geometria analítica* i la *matematització de la naturalesa* constitueixen els grans èxits del segle XVII; el *ressorgiment de la geometria*, l'*aparició de l'àlgebra abstracta*, l'*arimetització del anàlisi* i el *convenciment que la matemàtica és rigorosa i lògica* són els èxits indiscutibles del segle XIX. Què queda, doncs, pels matemàtics del segle XVIII? El segle XVIII comença amb la desaparició dels genis G. Leibniz, alemany, [1646–1717] i I. Newton, anglès, [1642–1727]¹⁹ i s'acaba amb l'aparició de

¹⁶ Al segle XVIII, no obstant, tingué lloc la Revolució científica de Lavoisier. Aquesta s'aconseguí, “en sumar al coneixement químic provinent de la medicina, la demanda provinent de la revolució industrial que augmentà enormement la necessitat de certs productes químics com ara els alcalins i els àcids minerals i, a més, la recerca de mètodes perfeccionats de fabricació conduí a noves tècniques químiques en la metal·lúrgia, la ceràmica i el tèxtil, en especial en el tintat i blanqueig dels teixits. Lavoisier constituí una part important d'aquesta tradició. Les seves investigacions sobre el guix, els mètodes per il·luminar els carrers de París i la pólvora revelen el seu enfoc pràctic en l'estudi de la química... La filosofia mecànica fou una altra font pel progrés de la química del segle XVIII. Newton tenia l'esperança de reduir la química a una ciència descriptiva de les interaccions mecàniques entre els àtoms; no obstant, la seva esperança no s'acomplí... Malgrat tot, però, si bé la nova ciència de la química no era mecànica, no obstant, era física. La revolució que Lavoisier havia vaticinat en el seu memoràndum de 1773 havia de constituir una revolució tant en química com en física” [Hankins, T.L. [1985], 87.] Veieu també Hankins, T.L. [1985], 100–118; Cohen, I.B. [1985], 207–213; Mason, S.F. [1953], vol. 3, 57–66; Taton, R. [1957–1961], vol. 6, 616–623.

¹⁷ L'*Encyclopédie* de Diderot i d'Alembert, article “Experimentale”.

¹⁸ Boyer, C.B. [1968], 510.

¹⁹ Recordem que la darrera obra matemàtica important de Leibniz data de finals del segle XVII i que la de Newton, el *De Quadratura Curvarum*, apareix, en forma d'apèndix, a l'edició de la seva *Opticks* de 1704.

la primera obra de K.F. Gauss [1777–1855]²⁰; al bell mig hi trobem el prolífic L. Euler [1707–1783]²¹. Els matemàtics del segle XVIII — i, en particular, els matemàtics de la Revolució Francesa — el que faran serà portar les descobertes genials dels matemàtics del segle XVII, amb la *mateixa mentalitat* i amb les *mateixes eines* que els seus avantpassats al límit de les seves possibilitats, no deixant pels matemàtics futurs altre possibilitat que la d'un *pensament revolucionari* en el camp de les matemàtiques²². L'insigne matemàtic de Torí, Lagrange, arribarà a escriure a d'Alembert²³:

“em sembla que les matemàtiques han arribat al límit de les seves possibilitats”

i a comparar-les amb una mina en la qual els minerals preciosos haurien sigut explotats fins a una profunditat tan gran que s'hauria arribat al límit de l'accessibilitat humana: *“Si hom no descobreix noves vetes de mineral, més tard o més d'hora caldrà abandonar la mina.”*

La veu de Lagrange no fou pas l'única veu en aquest sentit: Fontenelle, “secretari perpetu” de l'*Académie des Sciences de Paris*, havia fet la mateixa advertència força anys abans, en 1699, i Diderot²⁴ es recolzava en l'esgotament de les matemàtiques com el millor argument per fer un tomb vers ciències més descriptives com ara la història natural, l'anatomia, la química i la física experimental²⁵.

²⁰ Els *Disquisitiones Arithmeticae* data de 1801.

També podríem dir, com fa E.T. Bell [Bell, E.T. [1940], 376], que el segle XVIII es troba col·locat entre la mort de Newton [† 1727] i la de Laplace [† 1827], cent anys més tard.

²¹ L. Euler és el més prolífic dels matemàtics de tots els temps. La seva *Opera Omnia* la constitueixen 75 volums en 4^o que recullen gairebé 900 treballs, memòries i llibres dedicats al camp de la ciència pura i aplicada: això suposa una mitjana de 800 pàgines anuals durant la major part de la seva vida activa, que fou veritablement molt llarga; amb ell, deixeble de l'obra de Leibniz i, sobretot, de la dels germans Bernoulli — sense rebutjar, però, en absolut, les idees i aportacions de Newton — s'aconsegüí una síntesi entre el *mètode de les sèries*, degut principalment a Newton i la metodologia del *càlcul diferencial i integral* de Leibniz i dels Bernoulli. No fou pas, como ho havien sigut abans d'ell Descartes, Newton i Leibniz i com ho serien darrera seu Gauss, Riemann i Cauchy, un innovador, però “l'esperit inventiu que mostrà en el domini metodològic i la seva incomparable tècnica que es reflecteixen en el fet que constantment estem parlant de *fórmules* d'Euler, *polinomis* d'Euler, *integrals* d'Euler, *nombres* d'Euler i *constant* d'Euler” el converteixen en un matemàtic imprescindible per comprendre el desenvolupament de les matemàtiques del segle XVIII i per comprendre, de retruc, els matemàtics de la Revolució Francesa. [Collette, J.-P. [1979], 191.]

²² Boyer ens diu que ens mostrarà que “els matemàtics de l'època de la Revolució Francesa no solament contribuïren generosament al patrimoni comú del coneixement sinó que, en gran mida, foren els responsables de les grans línies de desenvolupament que prendria la matemàtica en la seva explosiva proliferació durant el segle XIX”. [Boyer, C.B. [1968], 589.]

²³ Carta de Lagrange a d'Alembert, datada el 21 de setembre de 1871.

²⁴ “A l'igual que les piràmides d'Egipte, les creacions matemàtiques perduraran durant segles, però també, com les piràmides, ben poques coses els hi podríem afegir i ben poc ús pràctic se'n pot treure d'elles”, citat a Hankins, T.L. [1985], 19.

²⁵ La física teòrica d'aquesta època és una disciplina molt lligada a la *matematització de l'Univers* i, de retruc, a les matemàtiques; gairebé tots els matemàtics d'un cert renom de l'època *plantejaren i resolgueren* qüestions físiques i gairebé tots els problemes físics portaren a *resoldre* alguna qüestió matemàtica [en particular, alguna equació

En canvi d'Alembert i el marquès de Condorcet instaven els matemàtics a mantenir viva la seva fe i a confiar en el futur de les matemàtiques, malgrat que aquest futur pogués semblar incert. Aquesta situació de crisi aparent de les matemàtiques pot sorprendre en una època de revolució política i social, acompanyada indubtablement de les corresponents revolucions *filosòfica, ideològica, científica o tecnològica* i, en general, del pensament²⁶. Boyer ens recorda que, si bé existeixen històries erudites de les matemàtiques del segle XVI i XVII²⁷ i una història [parcial] del segle XIX²⁸, no existeix cap història comparable de les matemàtiques del segle XVIII²⁹; diu³⁰:

“ningú no pensa en les matemàtiques del segle XVIII quan considera els grans corrents de les matemàtiques.”

Aquesta crisi aparent s'explica, però, com el resultat dels esforços realitzats pels matemàtics del segle XVIII — esforços que culminen precisament amb els matemàtics de la Revolució Francesa — i que pretenen dur a les últimes conseqüències la *philosophia naturalis* amb mitjans matemàtics, seguint les petjades, intuïcions i idees dels matemàtics del segle XVII — Kepler, Galileo, Descartes, ... i que, en mans de Newton assoleix l'objectiu indiscutible en els *Principia Mathematica*³¹ — com posa de manifest una llucada a treballs i textos como ara:

diferencial ordinària o en derivades parcials, alguna aproximació nova d'una solució algebàrica, etc. ...] [Veieu Hankins, T.L. [1985], 19–49; Taton, R. [1957–1961], 516–554; 558–562.]

²⁶ Caldria aprofundir en l'estudi històric del segle XVIII per a constatar la validesa [històricament] objectiva (?) d'aquestes afirmacions. Veieu, per exemple, Mason, S.F. [1953], *La Ciencia del Siglo XVIII*.

²⁷ Zeuten, H.G. [1903].

²⁸ Klein, F. [1926–1927].

²⁹ Boyer, C.B. [1968], 510.

³⁰ Boyer, C.B. [1968], 510. Bell [Bell, E.T. [1940], 23–28] ens ofereix una “divisió més convencional de l'escala del temps” que “separa la història de les matemàtiques en set períodes” i el període cinquè el constitueixen els segles XVII i XVIII, mentre que els capítols sisè i setè els dedica, respectivament, als segles XIX i XX. Rfbnikov, en canvi, a la seva *Història de les matemàtiques* [Rfbnikov, K. R. [1974], 207–338] dedica tot el capítol 6 — que titula *Desenvolupament de les parts fonamentals de les matemàtiques durant el segle XVIII* — a les matemàtiques del segle XVIII i ens ofereix una exposició detallada de l'aprofundiment i possibilitats de les tècniques matemàtiques que tingueren, això sí, el seu origen el segle anterior: *equacions diferencials i en derivades parcials, càlcul de variacions, el concepte de funció, introducció a l'anàlisi complexa, potenciació dels algorismes infinits com ara les sèries, les integrals, les fraccions contínues, els productes infinits. . . , sistematització de les tècniques teòriques i dels mètodes i algorismes recurrents de la teoria de nombres, aprofundiment de la teoria d'equacions algebriques, anàlisi de la teoria analítica del càlcul de probabilitats, desenvolupament de les geometries descriptiva i projectiva, apropament a la geometria diferencial i a la topologia, . . .* com si volgués recolzar l'afirmació de Nielsen [1929], segons la qual aquests matemàtics provocaren una *revolució geomètrica* i una *revolució analítica*.

³¹ El títol d'aquesta magna obra de Newton no deixa cap mena de dubte sobre el camí que calia seguir: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, constituint-se en una síntesi del programa a seguir per part dels homes de ciència del segle XVII i XVIII. Aquest objectiu, ambiciós, apuntat a l'obra de Newton, obligà els matemàtics a afinar les eines matemàtiques i a fabricar totes les que feien falta en la consecució de l'esmentat objectiu; i així els matemàtics del segle XVIII desenvoluparan les matemàtiques a bastament — assolint-se la culminació amb els matemàtics de la Revolució Francesa.

<i>Essai sur le calcul integral</i>	Condorcet	1765
<i>Reflexions sur la resolution algèbrique des equations</i>	Lagrange	1772
<i>Essai sur l'application de l'analyse aux probabilités des decisions rendues à la pluralité des voix</i>	Condorcet	1785
<i>Mécanique Analytique</i>	Lagrange	1788
<i>Elements de Géométrie</i>	Legendre	1794
<i>Exposition du système du monde</i>	Laplace	1796
<i>Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal</i>	Carnot	1797
<i>Théorie des Fonctions Analytiques</i>	Lagrange	1797
<i>Traité de la resolution des equations numériques</i>	Lagrange	1798
<i>Traité de Mécanique Céleste</i>	Laplace	1798–1825
<i>Essai sur la théorie des nombres</i>	Legendre	1798
<i>Géométrie Descriptive</i>	Monge	1799
<i>Leçons sur le calcul des fonctions</i>	Lagrange	1799
<i>De la correlation des figures en géométrie</i>	Carnot	1801
<i>Aplications de l'algèbre à la géométrie</i>	Monge	1812
<i>Exercices de calcul integral</i>	Legendre	1811–1819
<i>Théorie analytique des probabilités</i>	Laplace	1812
<i>Essai philosophique sur les probabilités</i>	Laplace	1814
<i>Traité des fonctions elliptiques et les integrals eulériennes</i>	Legendre	1825–1832
<i>Théorie des nombres</i>	Legendre	1830

per citar alguns dels treballs i obres més remarcables — sense intenció, en absolut, d'exhaustivitat —, ometent la majoria d'articles, cartes, manuscrits inèdits, etc ...³².

Aquesta tasca la portaren a terme fonamentalment sis matemàtics:

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE	[1736–1813]
MARIE-JEAN-ANTOINE-NICOLAS CARITAT de CONDORCET	[1743–1794]
GASPAR MONGE	[1746–1818]
PIERRE-SIMON de LAPLACE	[1746–1827]
ADRIEN-MARIE LEGENDRE	[1752–1841]
LAZARE-NICOLAS-MARGUERITE CARNOT	[1753–1823]

com veurem més endavant [en el §III].

Ara, però, el que desitjo posar de manifest és que, d'alguna manera, les matemàtiques **no són pas alienes del tot** a la revolució política que culminà a Amèrica amb la *Guerra de la Independència*

³² Recordem, tot de passada, que les obres completes de Lagrange i Laplace consten de XIV llibres amb un total de pàgines que oscil·la de 7.500 a 9.000, per citar els dos més notables. Jean Itard [Itard, J. [1984], 335–350], al seu article "Legendre", atribueix a aquest autor 33 treballs entre llibres i articles. Alguns d'ells consten de dos o més volums.

i a Europa amb la *Revolució Francesa* perquè no són pas alienes, en absolut, a la revolució intel·lectual d'aquest moment històric que s'ha designat com la *Il·lustració* o *Segle de les Llums*, els trets de la qual citarem a corre-cuita. Aquest terme — la *Il·lustració* — s'aplica a un "gran moviment d'idees liberals i àdhuc iconoclastes que tenien com objectiu millorar les condicions pràctiques de la vida a través de la raó"³³. Aquestes idees les trobem en tots els pensadors d'Europa i també en els pocs que comencen a aparèixer a Amèrica, però foren sintetitzades, sens dubte, en el centre intel·lectual d'Europa que cal situar a França — malgrat que no

³³ Burton, D.M [1985], 494. Taton diu, *in extenso*: "... i per aquesta raó, el segle XVIII s'inaugura en una atmosfera d'optimisme. Aviat la majoria de reis europeus rivalitzaren en la fundació i manteniment d'acadèmies que permetien a gran quantitat de científics, cosmopolites per vocació, treballar amb comoditat. La Ciència pren part activa en el moviment filosòfic del "segle de les llums" i en la preparació intel·lectual de la Revolució. Factor indiscutible en la alliberació de l'esperit, la Ciència resulta pels enciclopedistes i pels seus coordinadors un agent poderós del progrés social, que els permet d'assolir una ràpida millora de les condicions de vida de la Humanitat. Aquest és, sens dubte, un punt de vista força utòpic però que, en conjugar-se amb el prestigi heretat de les grans descobertes del segle anterior i amb l'intens moviment de curiositat intel·lectual promogut per l'èxit del newtonianisme i de la Física experimental, contribueix a una millor difusió de la Ciència i, en conseqüència, a una acceleració del progrés.

"La tasca essencial dels matemàtics del segle XVIII consisteix en precisar, coordinar, estendre i aplicar els descobriments recents. El desenvolupament del càlcul infinitesimal i la utilització de nous instruments — equacions diferencials, equacions en derivades parcials, càlcul de variacions, etc. — permetrà de completar l'edifici de la Mecànica Celeste newtoniana, prosseguir la matematització de la Mecànica i iniciar l'Acústica i la Hidrodinàmica.

"En paral·lel amb aquests esforços en el terreny teòric, el segle XVIII assisteix a un magnífic floriment del mètode experimental que, si bé ja havia sigut proposat per gran nombre de físics del segle XVII, s'havia vist ofegat pel triomf del cartesianisme. Des d'Anglaterra i els Països Baixos, la "física experimental" s'estendrà per tot Europa, aconseguint una adhesió entusiasta. La seva aparició coincidirà amb el triomf definitiu del newtonianisme sobre el cartesianisme, convertit des de feia temps en un factor poderós de rutina. Els espectaculars progressos aconseguits en l'estudi de l'electricitat, el magnetisme, la calorimetria i la química són deguts a la coexistència i interacció d'aquests dos corrents: reflexió teòrica i investigació experimental.

"A l'hora que les ciències de la terra estudiaven els problemes fonamentals amb una més gran llibertat d'esperit, les ciències de la vida experimentaven ràpids progressos gràcies a l'organització d'un nou mètode de classificació, al gran nombre d'estudis descriptius, a les importants investigacions de fisiologia animal i vegetal i a l'interès suscitat pels grans problemes de l'origen i generació dels éssers vius". [Taton, R. [1957-1961], 469-470.] Veieu també Bell, E.T. [1940], 375-378: "... L'aportació més important que feren els matemàtics del segle XVIII a la civilització fou un punt de vista racional de l'univers físic degut principalment a l'astronomia dinàmica i a la mecànica analítica ...

"... El segle XVIII s'ha anomenat *Edat de la Raó* i també *Segle de les Llums* en part perquè en aquest segle les ciències físiques ens alliberaren de la teologia. En els cent anys que van de la mort de Newton, en 1727, a la de Laplace, en 1827, l'autoritat dogmàtica sofrí la pitjor de totes les derrotes possibles en mans de la investigació científica: la indiferència. Senzillament deixà d'importar, pel que fa a la ciència, si les afirmacions dels dogmes eren certes o falses. Al principi del període s'acostumava a buscar una explicació teològica als principis de la mecànica per posar-los d'acord amb la teologia ortodoxa de l'època; quan Laplace morí hom prescindia ja de tot això: estava fora de lloc feia quaranta anys pel cap baix. Per fi la mecànica havia trobat la seva maduresa. La ciència revelava que la veritat absoluta residia en les matemàtiques ..."

hem d'oblidar ni les aportacions alemanyes ni tampoc les angleses³⁴ — i es troben recollides en les obres de Charles-Louis de Secondat, baró de MONTESQUIEU i de la Brède [1698–1755], François-Marie Arouet, de sobrenom VOLTAIRE [1694–1778], Jean-Jacques ROUSSEAU [1712–1778], Denis DIDEROT [1713–1784]³⁵ i, en elles, aconseguïen el seu punt més àlgid. Aquests pensadors, en general, *no eren pas científics*; eren els *filòsofs de la Il·lustració*, però tampoc no eren pas *filòsofs en el sentit tradicional de la paraula*. El nucli o síntesi de la Il·lustració consisteix en una extrapolació de l'obra dels científics del segle XVII, sintetitzada en l'obra senyera de Newton, els *Principia: l'univers està regit per un ordre i aquest ordre admet una descripció matemàtica*³⁶, fet que Descartes havia ja reconegut com la “bona manera de filosofar”, parlant de Galileo³⁷. Aquest ordre *calia extrapolar-lo* — trobant *lleis generals anàlogues* — a tots i cada un dels dominis de l'experiència humana³⁸.

Aquesta idea de revolució científica, aplicada a la *nova manera de filosofar*³⁹ sintetitza-

A la *Història de les ciències* de Mason podem seguir de prop l'evolució de les ciències teòriques i experimentals al llarg del segle XVIII. Hankins, per la seva banda, ens ofereix un capítol excel·lent, digne de lectura, sobre les ciències socials.

Una visió més filosòfica podem trobar-la, per exemple, a Hull, L.W.H. [1959], caps 6 i 7 i a Copleston, F. [1961], vol. 6, 15–64.

³⁴ Veieu Mason, S.F. [1953], III, 80–84 i el capítol setè, 114–131.

³⁵ Matemàtic afeccionat. Veieu Coolidge, J.L. [1949], 178–185.

³⁶ Galileo havia afirmat que “la naturalesa està escrita en llenguatge matemàtic”: “La filosofia està escrita en aquest llibre que tenim davant els ulls, vull dir, l'univers, i hom no pot entendre'l si abans no s'aprèn a comprendre el llenguatge, a conèixer els caràcters en què està escrit. Està escrit en llenguatge matemàtic i els seus caràcters són triangles, cercles i d'altres figures geomètriques sense les quals no és possible entendre ni una sola paraula; sense ells és com vagar vanament en un laberint obscur.” [Galileo [1623], 61]; Kepler havia aconseguit llegir matemàticament el comportament dels planetes en el seu moviment de translació entorn del sol — establí, com és ben conegut, les tres famoses lleis de Kepler: 1^a. els planetes — la terra — en el seu desplaçament entorn del sol descriuen el·lipses i sol n'ocupa un dels focus i, a més, mentre es desplacen entorn del sol, giren entorn del seu propi eix; 2^a. els planetes, en temps iguals, escombren sectors el·líptics, centrats en el focus ocupat pel sol, de la mateixa àrea [Kepler [1609]]; 3^a. els períodes de revolució T dels planetes i la seva distància al sol D estan lligats per la relació $T^2 = \kappa \cdot D^3$, on κ és una constant que és la mateixa per a tots els planetes [Kepler [1619]]; Galileo [Galileo [1634], 292–320; 384–400] establí el comportament matemàtic de la caiguda de greus i del tret d'un canó. Descartes, en el seu *Mètode* havia establert el mètode d'anàlisi i síntesi — heretat dels geòmetres grecs — com a mètode general pel coneixement de les ciències: “D'altra banda, em vaig adonar que la seva pràctica [la pràctica del seu mètode] habituava de forma progressiva el meu enginy a concebre de forma més clara i distinta els seus objectius i com que no l'havia limitat a cap matèria en particular m'era possible aplicar-la amb la mateixa utilitat a les dificultats d'altres ciències igual com havia succeït en àlgebra” [Descartes, R, [1637], 17]. Foren, però, Newton i els matemàtics del segle XVIII els qui aconseguïren, sens dubte, la màxima expressió, assolint un desenvolupament important en les eines matemàtiques i uns èxits enormes en l'aplicació d'aquests utilatges matemàtics en la descripció dels fenòmens físics: mecànica, òptica, hidràulica, ... [Veieu, per exemple, Hankins, T.L. [1985], 19–24, *El significat de l'anàlisi*.]

³⁷ Veieu Pla, J. [1989a], 2.

³⁸ Caldria una lectura molt acurada per constatar, en cada un dels dominis de l'experiència humana, fins a on s'assolí el projecte i, fins i tot, si arribà a començar.

³⁹ “El nostre segle s'anomena ... el segle de la filosofia per excel·lència ... El descobriment i l'aplicació d'un *nou*

da en els *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* d'Isaac Newton⁴⁰ i a la revolució gairebé total en geometria⁴¹ — és a dir, a les matemàtiques, a la mecànica i a l'astronomia —, la trobem en boca dels matemàtics, però amb el convenciment que el “nou esperit geomètric” també podia millorar l'obra política, moral, de crítica literària, etc.⁴²

Els filòsofs de la Revolució esdevenen els portantveus d'aquesta exaltació de la ciència i d'una fe gairebé il·limitada del poder de la raó i, amb la intel·ligència alliberada, s'imposaran la tasca de trobar, com deïem, *lleis generals vàlides en tot el domini, prou ampli, de l'experiència humana*. Defensaren la necessitat de passar pel garbell de l'escrutini racional les condicions socials, el dogma religiós, l'autoritat, les astúcies governamentals, etc. . . Dessota hi havia el convenciment ferm que *tota pregunta tenia, en correspondència unívoca, una resposta vertadera*; és a dir, tenien el convenciment que *tots els problemes es podien respondre amb la mateixa certesa que els problemes matemàtics*⁴³.

Aquest vincle raó i naturalesa — paraules clau del Segle de les Llums — havia de conduir a una generació molt crítica amb les institucions i, en particular, amb l'Església i la noblesa, les afirmacions dogmàtiques de les quals no tenien altre base que la *autoritat* i xocaven frontalment amb l'*esperit revolucionari de la Il·lustració*, esperit basat en la raó i en les lleis que regeixen necessàriament qualsevol manifestació del comportament humà tant individual com col·lectiu;

métode o manera de filosofar, el tipus d'entusiasme que acompanya els descobriments, una certa exaltació d'idees que ens produeix l'espectacle de l'univers . . . totes aquestes causes han provocat una vigorosa fermentació de la ment que s'estén per la naturalesa en totes les seves direccions com un riu que s'ha sortit del seu llit” [d'Alembert, citat a Cassirer, E. [1955], 3–4.]

L'expressió “revolució científica”, segons sembla, fou encunyada pel matemàtic d'Alembert i, en ella, les matemàtiques constitueixen la força revolucionària més gran. [Hankins, L.T. [1985], 1.]

⁴⁰ Alexis-Claude Clairaut [1713–1765] atribueix, en 1747, la causa d'una “gran revolució física” als *Principia Mathematica*. [Cohen, I.B. [1976], 267.]

“A principis del segle XVIII, poc després que Fontenelle hagués reconegut que s'havia produït una revolució en matemàtiques, hom considerà que els *Principia* de Newton constitueixen una revolució en física i ben aviat Robert Symmer proclamà que havia provocat una revolució en la ciència de l'electricitat”. [Cohen, I.B. [1985], 23.]

⁴¹ Segons expressió de Bernard Le Bovier de Fontenelle [1657–1757] que ens parla d'ella per primera vegada en 1700 tot referint-se a la revolució que havia començat amb la *geometria analítica* de Descartes. [Cohen, I.B. [1976], 267.]

⁴² Segons opinió del mateix Fontenelle expressada amb rotunditat al pròleg de la seva *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris*. Diu: “L'esperit geomètric no està pas tan lligat a la geometria que no es pugui separar d'ella i traslladar-lo a d'altres branques del coneixement. Una obra moral, de política, de crítica, potser fins i tot d'eloqüència, milloraria, *ceteris paribus*, si fos realitzada amb l'esperit geomètric” [Fontenelle, B. [1699]]. És el punt de vista de la filosofia mecanicista cartesiana.

⁴³ Veieu Burton, D.M. [1985], 493–496. Hume diu que “la humanitat és sempre la mateixa en tot temps i lloc”, que “la història no ens informa mai de res nou al respecte. El seu ús principal consisteix en descobrir els *principis universals constants* de la naturalesa humana” i Voltaire recomanava un esforç actiu per tal de fer progressar la humanitat per mitjà de la crítica a les creences tradicionals, propagant el coneixement recentment adquirit sobre el món natural. A la seva *Histoire de Charlemagne à la mort de Louis XIII*, de 1756, Voltaire indicava que “el progrés de les arts i de les ciències” constituïa la part principal del seu tema d'estudi i afirmava que “la raó i la indústria progressarien cada cop més, que les arts útils millorarien, que els mals que han afligit l'home i els prejudicis que no constitueixen pas, és clar, el més minso dels seus assots, desapareixerien gradualment d'entre tots aquells que governen les nacions”. [Citat a Mason, F. [1953], 3.]

havia de permetre, doncs, de substituir arguments *a priori* i arguments basats en la *Revelació*, com a prova principal de la Religió, aconseguint, en canvi, de conèixer Déu per la seva obra, és a dir, per la creació i per les seves lleis⁴⁴; així la Bíblia deixava d'ésser essencial per establir l'existència de Déu⁴⁵. El motiu inicial d'aquest canvi fou profundament religiós, però els seus efectes per a la ciència i la tècnica foren d'una gran transcendència⁴⁶: si Déu pot ésser conegut per la seva creació, la Bíblia deixa d'ésser necessària per provar l'existència de Déu⁴⁷.

La raó i la naturalesa eren *manifestacions divines* i les lleis de la raó no eren pas lleis lògiques sinó que eren lleis de la naturalesa i així els millors filòsofs del segle XVII — Galileo, Descartes, Pascal, Newton, Leibniz, ... — foren també els millors matemàtics: calia passar per les matemàtiques per comprendre la naturalesa [veieu la nota 36]; raó s'identificava, de fet, amb raó matemàtica — o, si voleu, amb *mètode matemàtic*⁴⁸ — i àdhuc aquells que, com Denis Diderot i Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon [1707–1788], clamaven en contra d'una excessiva dependència matemàtica, no repudiaven pas, en absolut, l'aplicació de la raó i la raó es

⁴⁴ Recordem, per exemple, que Maupertuis defensà el *principi de la mínima acció* com a prova indiscutible de l'existència d'un Déu intel·ligent que imposà a la naturalesa les mínimes lleis necessàries que permetessin el seu desenvolupament i funcionament autònoms. [Veieu Pla, J. [1989b], 61–71.]

⁴⁵ El filòsof John Locke [1632–1704] afirmà amb entusiasme que “l'obra de la Naturalesa constitueix arreu proves suficients d'una deïtat”, [citat a Basil Willey, Hankins, T. L. [1985], 3, nota 6] i Robert Boyle [1627–1691], l'experimentador científic més notable de l'Anglaterra del segle XVII, coincidí en afirmar que mai no havia vist una “producció inanimada de la naturalesa, o de la casualitat, l'ingeni de la qual fos comparable amb la més humil extremitat del més despreciable dels animals”. [Boyle, R. [1744], IV, 523.]

⁴⁶ En aquest sentit és força interessant Kline, M. [1980], caps. 3 i 4.

⁴⁷ Copleston diu: “Sembla que, en molts, hi ha la tendència natural de concebre la *Il·lustració* Francesa principalment com una crítica destructiva i una oberta hostilitat contra el Cristianisme o, si més no, contra l'Església Catòlica” [Copleston [1961], VI, 15] i segueix: “... donada aquesta interpretació de la *Il·lustració*, l'estima en què cada un de nosaltres la tingui dependrà considerablement de les pròpies conviccions religioses o de l'absència d'elles. Uns consideraran la filosofia francesa del segle XVIII com un moviment que continuà endinsant-se en la impietat fins a donar els seus darrers fruits en la profanació de la catedral de Nôtre Dame durant la Revolució; els altres la consideraran com el progressiu alliberament espiritual respecte de la superstició religiosa i la tirania eclesiàstica” [Copleston [1961], VI, 15]. Més endavant afegeix encara: “Si bé, però, tant la interpretació com actitud envers la religió com la interpretació sobre la base de conviccions polítiques [si bé, aquesta darrera, en una mida més petita] tenen fonament en els fets, descriure la filosofia francesa del segle XVIII com un atac perllongat al tron i a l'altar seria donar d'ella una imatge molt poc adequada. És clar que en nom de la raó s'atacà l'Església, la religió revelada i, en certs casos, tota forma de religió. Però l'exercici de la raó era pels filòsofs de la *Il·lustració* Francesa molt més que la simple crítica destructiva practicada a l'esfera de la religió. La crítica destructiva era, per dir-ho així, el costat negatiu de la *Il·lustració*. L'aspecte positiu consistia en l'intent d'entendre el món i, especialment, l'home en la seva vida psíquica, moral i social” [Copleston [1961], VI, 16].

⁴⁸ Veieu el *Mètode* de Descartes en aquest sentit. [Cf. Pla, J. [1989b].] Per a Descartes, el *Mètode* era, en definitiva, una adaptació del mètode d'anàlisi-síntesi dels geòmetres grecs que tant fructífer li resultaria per desenvolupar la seva *Géométrie* i que “en no aplicar-lo a cap ciència en particular li resultava útil per a qualsevol ciència”. Però Rashed va més lluny i ens diu: “no és pas una problemàtica antiga, que reprenem i reforcem, el que ara designem amb els termes d'*anàlisi* i de *mètode analític*” — que, segons ens recorda constitueixen una constant en els escrits dels filòsofs i savis de la segona meitat del segle XVIII —; “sinó que més aviat és una altra comprensió i una nova pràctica de la ciència el que volem expressar” i tot seguit ens recorda les paraules de Condorcet: “Concloem que, si l'anàlisi és el mètode que s'ha de seguir en la recerca de la veritat, també és el mètode que s'ha de fer servir per

trobava representada en la perfecció de les matemàtiques⁴⁹. Com diu Hankins, “les matemàtiques marcaren la pauta per a la ciència de la Il·lustració”⁵⁰.

Les matemàtiques, en el pensament de la Il·lustració, es convertiren així “en reina i serventa”; constituïen les regles amb les quals calia “jutjar” — o si més no, “amidar” — les altres ciències, però, d'altra banda, com ja hem dit, semblava com si les matemàtiques haguessin esgotat les seves possibilitats: “*el poder de la nostra anàlisi s'ha esgotat*”⁵¹ i l'anàlisi era precisament la capacitat de resoldre problemes, tot reduint-los a equacions. Aquesta possibilitat assolí amb els matemàtics del segle XVIII i amb els de la Revolució Francesa, en particular, el límit de les seves forces: el seu èxit durant la Il·lustració constituí la raó del seu propi pessimisme i esgotament respecte de la possibilitat de futurs progressos. Sense noves idees provinents de camps matemàtics nous i, sobretot, sense nous punts de vista sobre camps matemàtics i problemes matemàtics vells no era ja possible anar més lluny⁵².

Aquesta revolució intel·lectual, gestada des del segle XVII i durant el segle XVIII portà, amb d'altres causes, a la revolució política més important d'Europa — la Revolució Francesa⁵³ de 1789 [i també a la Revolució Americana de 1774]. Una de les moltes i complexes raons que permeté aquesta transposició de revolució intel·lectual a revolució política la constituí el fet que el clima intel·lectual de la Revolució arribà a una ampla capa de la societat⁵⁴ degut, entre

exposar les descobertes que s'han fet” [Rashed, R. [1988], 6].

⁴⁹ Ambdós obtingueren resultats matemàtics més o menys importants [veieu nota 35]; Buffon, en particular, aportà l'anomenat *problema de Buffon* de les probabilitats que li havia de permetre una aproximació prou bona del nombre π .

⁵⁰ Hankins, T.L. [1965], 18.

⁵¹ Kline, M. [1972], 623.

⁵² “El savi és com aquell cap de casa que del bagul dels mals endreços treia coses noves i coses velles” [Mt. 13, 52]

⁵³ “Kant, en 1785, com d'Alembert en 1759, pensava que la revolució científica encara estava en marxa. Cinc anys després d'haver fet aquesta afirmació la revolució intel·lectual a França fou seguida per la primera gran revolució política dels temps moderns”. [Hankins, T.L. [1985], 3]

⁵⁴ Les idees de Newton foren amplament divulgades; en 1784, uns cents anys després de l'aparició dels *Principia* [1687], podien trobar-se llibres sobre l'obra de Newton en gaire bé totes les llengües europees cultes: 40 llibres, en anglès; 17 en francès — recordem la importància que tingué Voltaire a França en relació amb les idees de Newton i la seva divulgació; fou ell qui va convèncer Mme. Chatellet perquè traduís al francès els *Principia* —; 11 en llatí; 3 en alemany; un en italià i un altre en portuguès. Aquestes idees de Newton —el newtonianisme—, que arribaren a ésser molt populars i d'una gran transcendència per a les idees dels *filòsofs de la naturalesa*, no foren pas de massa utilitat en el desenvolupament immediat d'altres ciències més aplicades, més experimentals i més de laboratori.

La popularitat del newtonianisme fou molt gran i, d'acord amb una de les característiques de la Il·lustració que convertia en herois els seus *filòsofs de la naturalesa* — fet que explica, per exemple, els elogis de Fontenelle als membres de l'*Académie Française* a mesura que anaven deixant aquest món, elogis que foren seguits per Condorcet quan assolí el lloc de secretari de l'*Académie*, elogis que no “descriuen solament els èxits científics més importants de l'època sinó que elogien la puresa dels motius de l'estudi científic” —, convertí Newton en l'heroi més gran de França — un cop vençudes, és clar, les reticències dels francesos envers una tasca que desautoritzava la *filosofia naturalis de Descartes* i la seva teoria dels remolins o dels vòrtexs. El motiu d'aquesta popularitat, ultra la seva obra, que havia resolt l'enigma dels planetes, tot mostrant que els seus moviments obeïen a les mateixes lleis que regeixen els moviments dels cossos terrestres, era que fos anglès ja que, pels filòsofs de la Il·lustració, particularment Montesquieu i Voltaire, Anglaterra era la font del lliure pensament: de la llibertat.

d'altres, a l'aparició de les revistes populars que començaren a aparèixer amb el segle XVIII. Tenim revistes angleses — com ara *The Tatler* [1709]; *The Guardian* [1710]; *The Spectator* [1711]⁵⁵ — i també en francès — *Le Spectateur Français* [1772] — i també els avantpassats dels diaris: opuscles breus, intermitents que contenien notícies passatgeres, com per exemple el *Daily Courant* [1702], anglès, i el *Journal de Paris* [1777], francès. I, amb l'aparició dels diaris i de les revistes, s'instituíren els *clubs de lectura*: un grup de persones llogava una o dues habitacions, feia una subscripció col·lectiva a diversos diaris i revistes i, de tard en tard, es feien reunions on es *discutien els seus continguts*.

Aquesta nova concepció segons la qual *tot pot ésser discutit i analitzat* o, si més no, *mentonat*, portà a un grup d'intel·lectuals francesos del segle XVIII a intentar recopilar *tot el coneixement existent en un tot ordenat, estructurat alfabèticament i amb referències creuades*. Així sorgí, a partir de 1759, *La Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts, et des Métiers*, editada per Denis Diderot i Jean Le Rond d'Alembert [1717–1783], amb un total de 28 volums, 11 dels quals eren volums d'il·lustracions i gravats. S'acabà en 1772. Aquesta iniciativa, però, no fou pas ni aïllada, ni tampoc local⁵⁶; trobà un gran recolzament institucional — àdhuc l'emperadriu Caterina de Rússia volia contribuir a la seva financiació amb la condició que l'obra fos editada a Rússia —. L'experiència es repetí a l'Anglaterra uns anys més tard. Els tres volums de la *Encyclopedia Britannica* començaren a aparèixer en 1771.

La Il·lustració es donà fora de les Universitats gaire bé a tot Europa⁵⁷; es donà al sí de les acadèmies⁵⁸ que eren subvencionades pels monarques, però no pas altruïstament, sinó com una possessió més de la qual n'eren *senyors* dels fruits intel·lectuals i, sobretot, de les *aplicacions* que aquests fruits produïen. Les acadèmies proporcionaven sous als seus membres, editaven — amb més o menys fortuna⁵⁹ — els textos que consideraven més notables, revistes científiques, diaris on feien públics els resultats dels seus membres; també organitzaven expedicions científiques⁶⁰,

Cap altre problema no tenia un significat còsmic tan gran i, per això, ningú no podia ésser considerat un heroi comparable. La filosofia natural o de la Il·lustració progressaria si els filòsofs eren capaços, seguint el mètode de Newton, de completar el seu programa.

⁵⁵ Aquesta darrera revista, en alguns dels seus números, arribà a assolir 200.000 còpies.

⁵⁶ Veieu *La Encyclopédie* a Hankins [1985], 176–183.

⁵⁷ L'única excepció la trobem, potser, a Alemanya on, en 1737, es fundà una universitat moderna a Göttingen amb la intenció explícita de participar dels corrents de la Il·lustració. Amb una sola generació la seva biblioteca arribà a contenir 60.000 llibres i 100.000 folletons, convertint-se així en la biblioteca més important del segle.

⁵⁸ Recordem que les acadèmies sorgiren arreu: a Itàlia, l'Accademia dei Lincei — que passà per períodes de clausura i reapertura — [1603; 1610; 1745 i finalment 1801]; a França — a partir de les reunions al convent de Mersenne — el 1666; a l'Anglaterra — fruit també de reunions entorn de Collins — el 1660; a l'Alemanya — força anys després que Leibniz ho hagués proposat — el 1700; a Suècia el 1720; a Rússia — l'Académie de St. Petesburg — el 1725; a Dinamarca el 1742 i, finalment, als E.E.U.U., a Philadelphia — projectada per Franklin el 1743 — es fundà el 1746.

⁵⁹ Recordem les dificultats que trobaren el *Principia* de Newton per part de l'Acadèmia de Londres, havent d'ésser el primer dels seus tres llibres editat amb el suport econòmic de qui, amb dret, podríem considerar el padrí dels *Principia*, Edmund Halley [1656–1742].

⁶⁰ Recordem, per exemple, l'expedició de Pierre-Louis Moreau de Maupertuis [1698–1759] que anà a Lapònia [1736–

impulsaven la creació de museus, jardins botànics, laboratoris, observatoris astronòmics, etc.

La Revolució Francesa fou, doncs, en certa forma filla de la revolució intel·lectual dels filòsofs de la Il·lustració que, d'alguna manera, volien transportar els èxits matemàtics dels *Principia* de Newton a la totalitat de facetes i aspectes del pensament i activitat humanes. Amb tot, però, l'esdeveniment polític i les seves conseqüències històriques i polítiques involucraren, amb més o menys grau, més o menys activament, una munió de matemàtics francesos de primera fila que foren precisament els mateixos que portaren les matemàtiques i la nova manera de filosofar — la filosofia newtoniana — a la situació límit esmetada més amunt a bastament⁶¹, alhora que donaren a França la primacia matemàtica, primacia que havia perdut durant gaire bé un segle, des de l'època de Gerard Desargues [1591–1661], René Descartes [1596–1650], Pierre de Fermat [1601–1665], Gilles Personne de Roberval [1602–1675], Blaise Pascal [1623–1662].

III. Els Matemàtics de la Revolució Francesa i la seva obra científica

Ja hem indicat que les aportacions matemàtiques dels anomenats matemàtics de la Revolució Francesa — Lagrange, Condorcet, Monge, Laplace, Legendre i Carnot — fou enorme tant en extensió com en intensitat⁶² i no és pas ara la nostra intenció fer-ne una presentació ni superficial

1737] acompanyat, entre d'altres, de Alexis-Claude Clairaut i una altra que anà al Perú [1735–1744] a fi de constatar l'afirmació de Newton segons la qual el radi equatorial és $1/230$ més llarg que el radi polar, fet que quedà així empíricament confirmat.

⁶¹ "... És la fi de la ciència clàssica, l'alba de la qual es remunta a la Grècia hel·lènica o, segons els casos, als segles IX–X, i el començament de la ciència moderna ... les ciències de la Revolució Francesa es presenten com la conclusió del que s'havia començat feia vuit segles, però també al segle XVII; ... , però contenen les primícies del que més tard s'anomenarà la ciència moderna". [Rashed, R. [1988], 15.]

⁶² Veieu les obres citades a la pàgina 7 i la nota 30. Les aportacions de Lagrange van des del càlcul de variacions, on introduí la variació d'una funció, a la teoria de funcions on aprofundí les funcions analítiques, passant per la teoria d'equacions algebriques on aportà importants resultats teòrics i on es preocupà també dels mètodes aproximatius de resolució, introduint a més el mètode d'interpolació que duu el seu nom, passant per la teoria de nombres on establí gran quantitat de resultats conjecturats abans d'ell, com el teorema de Wilson-Waring, la convergència de les fraccions contínues, i d'altres novelles com les formes quadràtiques i la seva equivalència, etc., ... arribant a l'aprofundiment de la mecànica, on assolí una obra mestra de matemàtica pura a la qual la mecànica s'estableix per mitjà d'un mètode únicament algebriac sense necessitat de recórrer a cap figura.

Condorcet es preocupà de sintetitzar els diferents mètodes i tècniques de resolució d'equacions diferencials, així com també del problema dels tres cossos, però la seva aportació més notable — una aportació realment revolucionària en aquell moment i en aquell context que, si bé per sí sola no és prou significativa per poder afirmar que ens trobem davant d'una revolució en matemàtiques, sí que podem dir que constitueix un punt aïllat revolucionari — la constitueix un intent de portar les matemàtiques a la política i a tot allò que estigués d'alguna manera vinculat amb el que podem dir-ne social; una contribució, d'altra banda, netament inserida en la mentalitat revolucionària de la Il·lustració.

Monge, ultra preocupar-se per la fabricació dels canons, establí les bases de la geometria analítica de l'espai, preocupant-se de l'anàlisi de les *corbes de doble curvatura*; però probablement la seva aportació més notable, per la seva originalitat, fa referència a la geometria diferencial de les corbes de l'espai i de les superfícies, lligant certes famílies de superfícies amb certs tipus d'equacions en derivades parcials. No hem d'oblidar tampoc que fou ell qui fixà els fonaments de la *geometria descriptiva*.

ni tampoc aprofundida — la primera fóra de poc interès i la segona sobrepassaria en molt les limitacions d'aquesta exposició —; la nostra intenció és ben bé una altra: veure, amb uns quants exemples més o menys significatius, l'evolució de certs conceptes, idees i resultats matemàtics, o de certes tècniques de resolució, a partir de l'època de Newton i Leibniz fonamentalment, fins arribar als matemàtics de la Revolució Francesa a fi d'adonar-nos com arribaren a un punt en el que es feia del tot indispensable introduir noves idees que evitessin l'exhauriment que, alguns d'ells, havien arribat, fins i tot, a enunciar ⁶³.

1. El concepte de funció

No es tracta pas d'oferir aquí una exposició detallada i completa del concepte de funció desde Napier, Kepler i Galileo fins a Euler i Lagrange ⁶⁴. És suficient indicar que la idea de corba heretada de la geometria grega ⁶⁵ es convertí en quelcom poc manejable per a ésser interpretat en la geometria cartesiana i, sobretot, per a ésser sotmès a la nova tècnica del càlcul diferencial i integral. Es feia indispensable disposar d'*algorismes* precisos que poguessin, d'una banda, ésser interpretats [d'alguna manera], però sobretot que poguessin ésser manipulats per mitjà del càlcul recentment inventat. Descartes es trobà tot seguit amb la necessitat de distingir entre corbes *algèbriques* i *transcendents* ⁶⁶; la urgència de disposar d'un concepte genèric de funció portà

Laplace treballà fonamentalment en dos camps: el *càlcul de probabilitats* on aconseguí fer una presentació del càlcul de probabilitats com una teoria matemàtica més — una teoria que feia servir totes les tècniques matemàtiques de càlcul conegudes: *integrals*, *sèries*, *equacions diferencials*, *equacions en diferències finites*, etc. — i la *mecànica celeste* on Laplace desenvolupà el concepte de *potencial*. Laplace, fill de la Il·lustració, acompanyà les seves dues obres cabdals d'exposicions menys tècniques destinades a un públic més ampli i molt menys especialitzat en matemàtiques. No crec agosarat dir que Laplace fou l'únic matemàtic de la Revolució Francesa que, si més no, en el camp de les probabilitats, encetà les grans conquestes que, en d'altres branques, haurien d'esperar, com veurem, al segle XIX.

Legendre, ultra els seus intents d'establir el cinquè postulat d'Euclides, féu aportacions remarcables en teoria de nombres on aconseguí d'establir amb més o menys rigor la *lei de reciprocitat quadràtica*, que no existeix cap funció algebàrica racional que la seva imatge estigui continguda en el conjunt dels nombres primers i conjecturà un valor aproximat per a $\pi(n)$ — nombre de nombres primers $\leq n$ — i demostrà el *teorema de Fermat per* $n=5$; tampoc hem d'oblidar les seves aportacions a l'estudi de les *integrals el·líptiques* $\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}} dx$, que reduí a tres tipus, i a l'estudi de les integrals eulerianes i, en particular, de la funció $\Gamma(x)$.

Carnot, el més jove de tots ells, estudià les màquines en general i establí les lleis generals del xoc i les lleis de conservació del treball; feu també un estudi aprofundit de les fortificacions, però la seva tasca matemàtica més remarcable la trobem en relació amb la geometria i, sobre tot, en les seves reflexions sobre la *metafísica* del càlcul infinitesimal.

⁶³ La nostra breu exposició seguirà la metodologia expositiva de M. Kline [1972], o de K. Ríbnikov [1974], els quals ofereixen exposicions evolutives, més o menys rigoroses, de les idees, les tècniques i els resultats assolits. Serà útil recórrer a D.J. Struik [1969] i/o a les obres originals per tal de disposar dels textos en que es basaran les nostres argumentacions.

⁶⁴ Veieu Kline, M. [1972], 335–341; 403–406; 505–507; Ríbnikov, K. [1974], 219–230, Youschkevitch, A.P. [1976].

⁶⁵ Sobretot les corbes de la geometria grega que no es troben recollides en el *Elements* d'Euclides sinó en obres com les *Còniques* d'Apol·loni, *Sobre l'el·lipse* d'Arquímedes i ens els diversos intents d'oferir mètodes per *duplicar el cub*, *trisecar l'angle* i *quadrar el cercle*. [Veieu Heath, T.L. [1921], 218–270; Thomas, I. [1939], 256–363; Dedron, P. i Itard, J. [1959], 379–423.]

⁶⁶ Descartes les anomena *algèbriques* i *mecàniques*; de fet són, respectivament, les que podien ésser expressades per

James Gregory a la seva *Vera Circuli et Hyperbolæ Quadratura* [1667] a oferir-nos una definició — “Una funció és una quantitat obtinguda d’altres quantitats per una successió d’operacions algèbriques o per qualsevol altra operació imaginable” — que, realment, variaria poc fins a Euler. La seva definició ens diu, de fet, que a les cinc operacions algèbriques cal afegir les sèries, els productes infinits, les fraccions contínues, les integrals, etc. Aquest concepte, tan general, portà immediatament a la necessitat d’un algorisme abstracte de representació simbòlica així com també a la necessitat de distingir entre constants, variables, paràmetres, etc.⁶⁷. En 1718, Johann Bernoulli ideà el símbol Φx , on Φ indicava la *successió d’operacions algèbriques* o l’altra *operació imaginable*.

Newton aconseguí tractar *totes* les funcions dites *elementals* expressant-les en sèries de potències; m’atreveiria a dir amb Carl B. Boyer que, després de Newton, “les sèries no es consideraran ja com a simples recursos d’aproximació, sinó que seran formes alternatives de les funcions que representen”⁶⁸. Amb Newton, doncs, quedà gaire bé fora de dubte que *tota equació era representable en sèrie de potències*⁶⁹. L’obtenció per part de James Gregory [Turnbull [1959], 45–48], d’Isaac Newton [[1687], 569–571, llibre III, lema 5] i, sobretot, de Colin McLaurin [1742] i Brook Taylor [1715]⁷⁰ de les famoses expressions que permeten d’obtenir el *desenvolupament en sèrie de potències* de qualsevol funció — suficientment regular per ésser derivable, però totes les funcions ho eren! — ajudà a reafirmar la conjectura anterior.

Tot aquest desenvolupament el recull Euler a la seva *Introductio in Analysim Infinitorum* de 1748, pedra clau en el desenvolupament de l’anàlisi matemàtica i que constitueix la síntesi

polinomis i les que no ho podien ésser. [Descartes, R. [1637], 295.] [Veieu també Bos, H.J.M. [1981] i Pla, J. [1989b], 850–851.]

Els conceptes de corbes transcendents i algèbriques es deuen a James Gregory [1638–1675], i daten de 1667; foren, però, Leibniz i els germans Bernoulli els qui els imposaren definitivament. [Veieu Leibniz, G.W. [1684], 9 i [1686], 17.]

⁶⁷ Aquesta tasca fou duta a terme per Leibniz i pels germans Bernoulli i, sobretot, per Euler que sintetitzà les aportacions anteriors a ell.

⁶⁸ Boyer, C. B. [1968], 497. Veieu també Pla, J. [1989c]. El mateix Newton era conscient d’aquest fet i així després del lema II del Llibre II dels *Principia* diu: “Aquest mètode [el mètode de les fluxions] s’ha lligat amb un altre mètode que consisteix en treballar amb equacions reduint-les a sèries infinites” [Newton, I. [1687], 302]

⁶⁹ Leibniz [[1686], 25] oferí l’equació de la cicloide en forma integral: $y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$, però amb les tècniques de desenvolupament en sèrie i de càlcul de Newton era fàcil d’expressar-la en sèrie de potències; Newton ens l’ofereix a les seves obres de càlcul diferencial i integral.

En els *Acta Eroditorum* de 1691 Jakob Bernoulli deriva l’equació de la tractriu — la corba per a la qual la raó de les distàncies PT i OT , on T és el punt d’intersecció de la tangent pel punt P a la corba i l’eix OX , és constant per a cada punt P de la corba —; integrant la seva equació diferencial obté:

$$x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

que és fàcilment expressable en sèrie de potències.

⁷⁰ Veieu Wollan, G.N. [1968], 310–312 i Struik [1969], 290–291; 329–333; 338–341.



de la tasca desenvolupada fins aleshores. Reprèn la definició de funció, entenent per funció “*qualsevol expressió analítica* obtinguda a partir de variables i constants”; seguidament estableix una classificació de les funcions en *algèbriques* — que, al seu torn, classifica en *irracionals* i *racionals*, contenint aquestes darreres les funcions *senceres* i les *fraccionàries* — i *transcendents* que es divideixen en *trigonomètriques* i *logarítmiques* i *exponencials* i *integrals*. Segons Euler les funcions transcendents es poden expressar mitjançant un desenvolupament en sèrie de potències i d'aquest fet se'n segueix el resultat essencial següent: *tota funció admet un desenvolupament en sèrie de potències* — limitat o il·limitat segons que la seva naturalesa sigui *algèbrica* o *transcendent* ⁷¹. A més, per a Euler, seguint Leibniz, una funció *continua* era aquella que podia “ésser expressada per mitjà d'una *expressió única*”; així les funcions passaven a ésser les funcions que avui anomenem *analítiques* ⁷². Aquesta ideologia del concepte de funció fou la que adoptà Lagrange a la seva *Théorie des fonctions analytiques* [1797] ⁷³.

L'any 1715 ⁷⁴ Taylor deduí les equacions d'oscil·lació d'una corda vibrant a partir de la condició que l'acceleració a cada punt de la corda, $\partial^2 y / \partial t^2$, fos inversament proporcional al radi de curvatura

$$\rho = \frac{[1 + (\partial y / \partial x)^2]^{3/2}}{\partial^2 y / \partial x^2}.$$

Per a petites oscil·lacions obtingué

$$\partial^2 y / \partial t^2 = a^2 \cdot \partial^2 y / \partial x^2, \quad (1a)$$

on a depèn de les característiques de la corda. Taylor imposà al problema una condició addicional segons la qual *tots* els punts de la corda que vibren tornen simultàniament a l'eix de les abscises.

⁷¹ Veieu *Opera Omnia* d'Euler, (1), 8, Cap. 4, p. 74 o l'*Introductio in Analysim Infinitorum* en qualsevol de les seves múltiples edicions.

Aquesta afirmació que, a més, està recolçada per l'esperit mateix d'aquesta excel·lent obra, li permet d'afegir “si algú dubte que tota funció pot ésser desenvolupada en sèrie de potències, deixarà de fer-ho desenvolupant efectivament cada una de les funcions” [*op. cit.*, p. 75].

⁷² També introduí les funcions mecàniques o de traç lliure: eren aquelles funcions que no tenien una única expressió analítica però que, en canvi, podien ésser representades gràficament amb un traç continu.

⁷³ Cal indicar, tot de passada, que Lagrange aconseguia així alliberar-se d'una altra dificultat de l'època: la consideració dels *infinitèsims*, dels *límits* o de les *fluxions*, “reduint-los a l'anàlisi de les quantitats finites”. [Veieu Edwards, [1980], 292–300 o Struik, [1969], 383–391.] Diu Lagrange: “L'àlgebra no és altra cosa que la teoria de funcions. A l'àlgebra les quantitats buscades han d'ésser funcions de quantitats donades, és a dir, expressions representades per operacions diferents que cal realitzar amb aquestes quantitats per tal d'obtenir els valors buscats. En l'àlgebra, en el propi sentit de la paraula, solament es consideren funcions elementals, provinents de les operacions algèbriques usuals; és la primera branca de la teoria de funcions. A la segona branca es consideren les derivades de les funcions i aquesta és simplement la branca que anomenen “*Théorie des fonctions analytiques*” i que conté tot el que es refereix al nou càlcul” [Lagrange, J.-L. [1881], IX, 16]. Aquesta idea estava ja, de forma incipient, a la ment de Newton. [Veieu Pla, J. [1989c].]

⁷⁴ Taylor discuteix el problema, per primera vegada, en 1713; aquest problema el discutirà en els n^{os} 17 i 18 del seu *Methodus incrementorum* de 1715.

Això li permeté d'afirmar que

$$\partial^2 y / \partial x^2 = -b^2 \cdot y; \quad \partial^2 y / \partial t^2 = -(ab)^2 \cdot y.$$

Després, prenent l'eix de les abscises com a posició inicial de la corda, els extrems de la qual suposa fixos, Taylor obté la solució de l'equació (1a) en la forma⁷⁵:

$$y = A \cdot \sin bx \cdot \sin abt. \quad (2a)$$

El 1747, Jean le Rond d'Alembert [1717–1783] trobà la solució general de l'equació (1a)⁷⁶. Feu el canvi $at = \tau$ i obtingué⁷⁷

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad (1b)$$

seguidament observà que

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot d\tau + \frac{\partial y}{\partial \tau} \cdot dx$$

i

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial y}{\partial \tau} \cdot d\tau$$

són *diferencials totals*⁷⁸. Fent aleshores $p = \partial y / \partial \tau$ i $q = \partial y / \partial x$ obté:

$$du = q \cdot d\tau + p \cdot dx \quad \text{i} \quad dy = p \cdot d\tau + q \cdot dx;$$

d'on: $d(y \pm u) = (p \pm q)d(\tau \pm x)$ i, per tant,

$$y + u = 2\varphi(at + x), \quad y - u = 2\psi(at - x)$$

i finalment:

$$y = \varphi(at + x) + \psi(at - x), \quad (2b)$$

⁷⁵ Taylor, B. [1714], 26–32.

⁷⁶ El 1727, Johann Bernouilli trobà l'expressió en el cas discret: carta al seu fill Daniel.

⁷⁷ D'Alembert, J. [1747a], 214–219.

⁷⁸ L'acumulació de resultats del càlcul diferencial augmentà molt ràpidament. El 1755, Euler escriví el seu *Differential Calculus* on el càlcul de les equacions diferencials ordinàries s'hi troba ja de forma força desenvolupada. En ell s'inclou ja la teoria de les *diferencials totals*, que Clairaut havia establert ja en els seus treballs de 1739 i 1740 i, abans, en 1734–35, el propi Euler; s'estableix que

$$P \cdot dx + Q \cdot dy$$

és la diferencial exacta df d'una certa funció $f(x, y)$ si $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$.

Els símbols $\partial P / \partial x$ foren introduïts per Legendre, un dels matemàtics de la Revolució Francesa, el 1786. [Veieu la nota 139.

on φ i ψ són funcions *arbitràries*, determinades solament per les condicions inicials⁷⁹. Però, d'Alembert, d'acord amb la filosofia sobre el concepte de funció que imperava en aquells moments, concluí que la funció arbitrària φ era *contínua*; és a dir *analítica*; és a dir, *diferenciable*⁸⁰.

El 1748 Euler introduí la idea segons la qual la *posició* d'una corba vibrant finita en un moment *arbitrari* t queda determinada per la seva *posició inicial* $y|_{t=0} = f(x)$ i per la seva *distribució inicial de velocitats* $\partial y / \partial t|_{t=0} = g(x)$. Això comportava un fet important: la funció arbitrària de d'Alembert $\varphi(x)$ — que, como hem vist, no ho era pas tant d'arbitrària — era expressable en termes de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ — situació i velocitat inicial de la corda. Amb precisió⁸¹

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(-x) &= f(x), \\ \varphi(x) + \varphi(-x) &= \frac{1}{2} \int g(x) \, dx.\end{aligned}\tag{2c}$$

Però aleshores, observa Euler, les funcions $f(x)$ i $g(x)$ no tenen pas perquè ésser funcions *contínues* en el sentit de l'època que ell mateix havia precisat i, per tant, $\varphi(x)$ tampoc, donat que $f(x)$ és la posició inicial de la corda que solament cal que sigui dibuixable — és a dir, de traç seguit.

Ultra aquesta innovació, Euler analitza el *cas particular* en el que la posició inicial de la corda és periòdica — és a dir, analitza el cas de la periodicitat — i obté una solució en la línia de Taylor, però més general⁸². La funció $f(x) = y(0, x)$ ve donada per:

$$\alpha \cdot \sin \frac{\pi x}{\ell} + \beta \cdot \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \gamma \cdot \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \dots$$

i la solució general, en aquest cas particular, és:

$$y(t, x) = \sum_{n \geq 1} A_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cdot \cos \frac{n\pi at}{\ell}.$$

Aquest resultat també l'obtingué Daniel Bernoulli [1700–1782], però per camins ben diferents: ho feu emprant raonaments físics⁸³. El raonament de Bernoulli es basa en la superposició del components armònics de la vibració de la corda en cada instant; això fa que la vibració de la corda, en cada instant, presenti un comportament sinusoidal i d'ací en dedueix que *totes* les corbes possibles són, no de la forma (2b), sinó de la forma:

$$\sum_{n \geq 1} a_n \cdot \sin nx.$$

⁷⁹ D'Alembert, a més, a partir de les condicions inicials, $y(0, 0) = y(0, \ell) = 0$ i $\partial y(t, x) / \partial t|_{t=0} = 0$ en dedueix finalment que $y = \varphi(at + x) - \varphi(at - x)$ i $\varphi(z + 2\ell) = \varphi(z)$.

⁸⁰ Si més no, dues vegades diferenciable. Veieu d'Alembert [1747b], arts. 15–18.

⁸¹ Veieu Euler [1749a], arts. 11–29.

⁸² Euler, L. [1749a], art. 30.

⁸³ Bernoulli, D. [1755], 147–152 i 173–195, arts. 1–4, 12–18 i 21–27.

Però Daniel Bernoulli, per raons d'ordre físic — d'un problema físic és del que es tracta — “no inclou termes en t , reduint l'efectivitat de les seves afirmacions; solament usa *sinus* en el seu desenvolupament i això limita també la generalitat de la seva solució i, a més, no ofereix cap mitjà matemàtic per calcular els coeficients a_n ” [Grattan-Guinness [1976], 131]. Per a ell, doncs, *totes* les solucions possibles s'obtenen com a combinacions trigonomètriques i aquesta solució ha d'incloure tant la de d'Alembert com la d'Euler.

Euler, però, considerarà que la solució sinusoidal — en ésser periòdica i senar — no podia ésser, en cap cas, la solució *general* del problema⁸⁴ ja que **no totes** les solucions són d'aquesta mena.

En mig de la discussió intervé, tot just a l'inici de la seva brillant carrera matemàtica, el matemàtic J.-L. Lagrange; és l'any 1759 i Lagrange vol aclarir d'una vegada per totes, en base a raonaments matemàtics, qui té la raó en aquesta discussió. Malgrat les crítiques a les que sotmet Euler i el seu mètode perquè, de fet, es restringeix a funcions contínues, Lagrange estableix finalment en un treball llarg i dens, que parteix del cas discret seguint les petjades de Johann Bernoulli [1755], que la conclusió d'Euler segons la qual *tota corba de traç seguit pot servir* per donar-nos la solució general del problema és correcta. Fent un pas al límit, Lagrange aconseguix⁸⁵

$$y(t, x) = \left[\frac{2}{\ell} \int_0^\ell Y(x) dx \sum_{n \geq 1} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell} \\ + \left[\frac{2}{\pi \ell} \int_0^\ell V(x) dx \sum_{n \geq 1} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi ct}{\ell}$$

on $Y(x)$ i $V(x)$ designen, respectivament, els desplaçaments i velocitats inicials en el punt de coordenada x de la corda. Així es planteja una qüestió nova: quines funcions accepten *desenvolupaments trigonomètrics*?⁸⁶

Per a la funció dels desplaçaments inicials obté

$$Y(x) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \sum_{n \geq 1} \sin \frac{n\pi X}{\ell} Y(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dX$$

i *gairebé* aconseguix donar resposta a aquest nou problema, però como diu E.T. Bell “la seva consciència matemàtica no li permetia commutar els operadors $\int_0^\ell$ i $\sum_{n \geq 1}$ sense justificar-ho

⁸⁴ Euler, L. [1765a], art. 1; [1765b], art. 22.

⁸⁵ Lagrange, J.-L. [1728], i-x; 1-112.

⁸⁶ Aquestes funcions, en acceptar un algorisme únic per a ésser descrites foren contínues en el sentit d'Euler.

a partir de la seva pròpia recerca. Si ho hagués fet, s'hauria anticipat a l'anàlisi de Fourier⁸⁷. Així s'arribà a la fi d'un camí; ara calia temps, un compàs d'espera, per veure cap a on calia seguir⁸⁸.

2. Les integrals el·líptiques

La preocupació pel càlcul integral d'algunes funcions racionals la trobem ja el 1702 en Leibniz i en Johann Bernoulli⁸⁹. Però el problema realment important el constituïa la preocupació per integrar funcions *irracional*s. Així el 1694⁹⁰ Jakob Bernoulli es preocupà de la *forma* que assolí una cinta estreta i elàstica sotmesa a forces aplicades als seus extrems i obtingué l'equació diferencial

$$dy = \frac{(x^2 + ab)}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}} dx$$

de la que afirmà que *no era possible* de resoldre en termes de funcions elementals⁹¹. També

⁸⁷ Bell, E.T. [1940], 532. Lagrange estigué a un pas d'obtenir els *coeficients de Fourier* de la funció $Y(x)$ arbitrària del seu desenvolupament en sèrie. Solament li calia fer una inversió entre els signes d'integral i de sumació. Hauria obtingut

$$Y(x) = \frac{2}{\ell} \sum_{n \geq 1} \left[\int_0^\ell \sin \frac{n\pi X}{\ell} Y(x) \cdot dx \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

És curiós constatar, tot de passada, que quan cinquanta anys més tard, Fourier presentà la seva descoberta, Lagrange, i també Legendre, s'oposà a ella — tan a prop com l'havia tingut — objectant manca de demostració.

⁸⁸ El lector interessat en aquest tema pot consultar Bottazini, U. [1981], 21–43; Cerdà, J. [1984], 210–228; Dou, A. [1984], 11–28; Grattan-Guinness, I. [1970], 2–21; Kline, M. [1972], 503–514.

⁸⁹ A l'*Acta Eroditorum*, 1702, Johann Bernoulli afirmava que la integral de *qualsevol* funció racional precisava solament de funcions trigonomètriques i logarítmiques. Leibniz, però, sostenia que això era impossible i oferí la descomposició complexa d' $x^4 + a^4$:

$$x^4 + a^4 = (x + a \cdot \sqrt{i})(x - a \cdot \sqrt{i})(x + a \cdot \sqrt{-i})(x - a \cdot \sqrt{-i}).$$

Anys més tard Nicholas Bernoulli [1687–1759] establia [*Acta Eroditorum*, 1719], que

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)^2 - 2a^2x^2 = (x^2 + a^2 - ax\sqrt{2})(x^2 + a^2 + ax\sqrt{2})$$

i, per tant, la integral d' $1/(x^4 + a^4)$ es pot donar en termes de funcions trigonomètriques i logarítmiques.

⁹⁰ Bernoulli, Jk. [1694], 262–270.

⁹¹ Euler a la seva obra sobre *càlcul de variacions* de 1744 estudià el cas general d'aquest problema, en un apèndix, i arribà a l'equació diferencial

$$dy = \frac{(a + bx + cx^2)}{\sqrt{a^4 - (a + bx + cx^2)^2}} dx.$$

Euler, per tal de poder obtenir *resultats físics*, recorre a les sèries.

s'interessà per la *lemniscata*⁹² i intentà de calcular-ne la *longitud d'arc*, des d'un dels vèrtexs a un punt arbitrari; obtingué la integral

$$s = \int_0^r \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - r^4}} dr$$

que, segons ell, tampoc no és integrable per mitjà de funcions elementals⁹³. D'altres problemes d'interès per l'astronomia i per la física — problemes que menaven a integrals irracionals d'aquesta mena — foren els de la *longitud d'un arc d'el·lipse*⁹⁴, el càlcul del *període del pèndol simple*⁹⁵.

Aquestes integrals es coneixen amb el nom d'*integrals el·líptiques*⁹⁶; els matemàtics del segle XVIII — malgrat que no arribaren a establir-ne mai la seva impossibilitat⁹⁷ — no foren pas capaços d'evaluar-les en termes de funcions algebriques, circulars, logarítmiques o exponencials. Aquesta impossibilitat feu que la recerca de les integrals el·líptiques derivés vers el problema de *reducció* de les integrals el·líptiques més complexes en funció d'integrals el·líptiques més simples — és a dir, de les que s'obtenien rectificants arcs d'el·lipse i/o d'hipèrbola — ja que, desde el punt de vista geomètric que, en aquella època era el que imperava, la longitud d'arcs d'el·lipses i hipèrboles semblava la més simple possible [després de l'arc de circumferència].

⁹² L'equació de la lemniscata de Bernoulli és, en coordenades cartesianes, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ i, en polars, $\rho^2 = a^2 \cdot \cos 2\theta$.

⁹³ Bernoulli, Jk. [1694b]. Recordem que, ja el 1655, John Wallis havia intentat de rectificar l'el·lipse i que s'havia trobat amb una integral que se li resistí a l'hora de resoldre-la. Jakob Bernoulli [1679] intentà per la seva banda de rectificar l'espiral parabòlica d'equació, amb coordenades polars, $(1 - \rho)^2 = 2p\rho$.

⁹⁴ Veieu part de la nota 20. L'el·lipse en coordenades paramètriques s'expressa $x = a \sin \theta$, $y = b \cos \theta$ [$a < b$] i la seva longitud per mitjà de la integral

$$L = a \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta;$$

en coordenades cartesianes $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, si fem $t = x/a$ i $k = 1 - (b/a)^2$, s'obté

$$s = a \int_0^t \frac{1 - k^2 t^2}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} dt,$$

que és la integral de Wallis.

⁹⁵ El període del pèndol és $T = 4 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$. Recordem que, segons Galileo, el període d'un pèndol simple no depenia pas de l'amplada; l'error fou corregit per Huygens. [Veieu Pla, J. [1989a].]

⁹⁶ Els interessats en el tema poden consultar Bell, E.T. [1940], 405–414; Dieudonné, J. [1976], II, 1–113; Dieudonné, J. [1978], 293–315; Itard, J. [1984], 342–344; Kline, M. [1972], 411–422 i 644–651.

⁹⁷ L'establí Joseph Liouville el 1833.

Una altra qüestió fou plantejada per Johann Bernoulli en un dels seus treballs, datat el 1698: *és possible que, malgrat que els arcs d'una certa corba no siguin rectificables, ho sigui la suma o diferència d'arcs d'aquesta corba?* Bernoulli constatà que la paràbola cúbica, per exemple, tenia aquesta propietat.⁹⁸

L'impuls, però, vindrà de la ma d'un matemàtic amateur Giulio Carlo de'Toschi di Fagnano [1682-1766] que, el 1714⁹⁹, resol el mateix problema que Johann Bernoulli però per a la quàrtica $y = x^4$. Estableix, a més, els lligams que han de satisfer els extrems dels arcs de les paràboles per tal que les diferències de dos arcs siguin rectificables¹⁰⁰; és a dir, un segment rectilini [que està vinculat amb les longituds de les tangents en els extrems dels arcs]. També establí que la suma i diferència de *certs arcs* d'el·lipse i d'hipèrbola és algèbrica, malgrat que cada un d'ells per separat no sigui rectificable¹⁰¹. En 1718¹⁰² Fagnano dedicà tot un treball a la *lemniscata* de Bernoulli; en ell estableix un bon grapat de resultats relatius a aquesta corba particular: 1. *dóna l'arc de lemniscata com un arc d'el·lipse, més un arc d'hipèrbola, més una expressió algèbrica*¹⁰³; 2. *entre dues integrals que expressen arcs de lemniscata, existeix una relació algèbrica, malgrat que cada integral, per separat, sigui una funció transcendent d'una*

⁹⁸ Jakob Bernoulli [1679] observà, en estudiar la rectificació de l'espiral parabòlica — l'element d'arc de la qual és $ds = \frac{1}{p} \sqrt{\rho^2(1-\rho)^2 + p^2} d\rho$ — per la simetria respecte de $\rho = 1/2$ que, a cada arc d'espiral eixit de l'origen hom podria fer-li correspondre un arc de la mateixa longitud [però no semblant] que ix del punt $\rho = 1, \theta = 0$.

Johann, per la seva banda, [Bernoulli, Jh [1698]] estableix que, a cada arc d'hipèrbola cúbica és possible d'associar un arc la longitud del qual difereix de les del primer arc per una quantitat algèbrica en x . Afirmà, a més, que les corbes parabòliques del tipus $y^n = x^m$ són tals que els seus arcs sumats o restats són iguals a línies rectes. La idea — com ens recorda Struik [1969], 326 — consisteix en el fet que *integrals que no són calculables per separat ho són quan se sumen o es resten*. Per exemple,

$$\frac{a \cdot dx}{\sqrt{2ax + x^2}} \quad \text{i} \quad \frac{x \cdot dx}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

⁹⁹ Fagnano, G.C. [1714], 271.

¹⁰⁰ Veieu, al respecte, Kline, M. [1972], 414. Per a la cúbica $y = x^3$ la condició dels extrems d'integració és $xz = 1$. Fagnano, G.C. [1714]. *Opere*, II, 271.

¹⁰¹ Fagnano, G.C. [1716].

¹⁰² Fagnano, G.C. [1718].

¹⁰³ El mètode que segueix Fagnano és la integració per parts, que el mena a

$$\int \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - z^4}} dz = \int \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - az}} dz + \int \frac{t^2}{\sqrt{t^4 - a^4}} dt - \frac{zt}{a},$$

on $t = a \int \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. Aquest resultat serà trobat per McLaurin, independentment, en 1742.

*nova naturalesa*¹⁰⁴; 3. troba, finalment, la manera de duplicar, triplicar, quintuplicar l'arc de lemniscata i això li permet dividir un arc de lemniscata en parts¹⁰⁵.

L'obra de Fangano fou publicada en 1750 a la seva *Produzioni matematiche* i el seu contingut frapà Euler que tot seguit aprofundí la qüestió. D'entre les aportacions¹⁰⁶ d'Euler considerarem el *teorema de l'addició* de les integrals el·líptiques. Euler analitzà el resultat de Fangano segons el qual [nota 104]

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}, \quad (3a)$$

sempre que

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1, \quad (3b)$$

i afirma que la solució de Fangano constitueix solament una solució particular, essent-ne $x = y$ una altra i estableix aleshores la *solució general*¹⁰⁷

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^2}, \quad (3c)$$

¹⁰⁴ De fet Fangano establí que

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \quad (3a)$$

admet la integral

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1; \quad (3b)$$

és a dir, els dos arcs de lemniscata, eixits respectivament del vèrtex i de l'origen, tenen la mateixa longitud.

¹⁰⁵ Si $\frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1-z^4}}$, aleshores $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{-2dt}{\sqrt{1-t^4}}$ i això li permet de duplicar la lemniscata i, per tant, dividir el quadrant en tres parts iguals [Opera, II, 309].

¹⁰⁶ Veieu Euler [1761a] i [1761b]. En [1761b] ens ofereix el següent resultat: Si en una lemniscata d'eix $CA = 1$, construïm una corda $CM = z$ i al costat una altra

$$CM_1 = u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4},$$

aleshores l'arc CM_1 que sustenta aquesta corda u és dues vegades l'arc que sustenta la corda CM [Struik, D.J. [1969], 379-380].

Euler, donat u , calcula u^2 , $\sqrt{1-u^2}$, $\sqrt{1+u^2}$ i $\sqrt{1-u^4}$, així com també du i obté:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{2dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

i, com que els arcs CM i CM_1 són, respectivament, $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ i $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$, aleshores $\text{arc } CM_1 = 2 \text{ arc } CM + Ct$, però $u = 0$, dóna $z = 0$, d'on: $Ct = 0$.

¹⁰⁷ Sembla que Euler "endevinà" aquesta solució general [Dieudonné, J. [1976], II, 8] inspirant-se en el cas $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ en el qual la integral és $\sin^{-1}x = \sin^{-1}y + \sin^{-1}C$ i aplicant sinus a ambdós membres i operant s'obté: $x^2 + y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^2}$.

constatant la validesa de la seva afirmació per diferenciació directa¹⁰⁸ i constatant també que contenia les solucions particulars $x = y$, que s'obté per a $c = 0$, i la (3b) de Fangano per a $c = 1$.

Ara bé, una integral general de (3a) és, òbviament,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad (3d)$$

i, per tant, c , x i y han d'estar lligats per (3c) que és una altra solució general [i, en conseqüència, ambdues són la mateixa]¹⁰⁹.

Però (3c) es pot posar de la forma

$$x = \frac{y\sqrt{1-c^4} \pm c\sqrt{1-y^4}}{1+c^2y^2}.$$

Això portà Euler a estudiar el cas general $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, on $R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ i, pel cas parell [és a dir: $B = D = 0$] obtingué que el lligam entre x i y per tal que

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} \quad (4a)$$

és

$$y = \sqrt{A} \frac{x\sqrt{P(c)} + c\sqrt{P(x)}}{A - Ec^2x^2}, \quad [\text{on } c \text{ és la constant d'integració}]; \quad (4b)$$

és la fórmula d'addició de la integral $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ i diu

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} + \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

sempre que x , y i c estiguin lligats per (4b)¹¹⁰.

La tasca de les integrals el·líptiques la reprendria Adrien-Marie Lebesgue, dedicant-hi dos estudis bàsics¹¹¹ a partir dels quals elaborarà els seus *Exercices de Calcul intégral* [3 vols. 1811, 1817 i 1816] i el *Traité des fonctions elliptiques* [3 vols. 1825, 1826 i 1828]. El resultat fonamental

¹⁰⁸ Struik, D.J. [1969], 382.

¹⁰⁹ Kline, M. [1972], 418.

¹¹⁰ Euler, L. [1761b]. Euler, però, no estava gens content de la seva demostració i fou Lagrange qui en 1766 en donà una demostració mitjançant una mètode directe, que provocà l'admiració d'Euler. Recordem, tot de passada, que, a l'època, no és feia servir la notació $\int_0^x$; aquesta notació es deguda a Fourier, J. [1822], 237-238. [Veieu Struik, D.J. [1969], 376.]

¹¹¹ Legendre, A.-M. [1786], 616-643 i 644-683.

el trobem, però, en una memòria de 1793 dedicada a la construcció de taules de les integrals el·líptiques¹¹²; consisteix en classificar les integrals el·líptiques en tres tipus:

$$\begin{aligned} \text{la integral de primera espècie} \quad & F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}, & [\text{període del pèndul}], \\ \text{la integral de segona espècie} \quad & E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta(\varphi) d\varphi, & [\text{longitud de l'elipse}], \\ \text{la integral de tercera espècie} \quad & \Pi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi) \Delta(\varphi)}. \end{aligned}$$

Legendre anomenà φ l'amplada i k el mòdul i, per a les integrals de la tercera espècie, n era el paràmetre; quan $\varphi = \pi/2$ obté les integrals completes

$$F^1 = F(\pi/2), \quad E^1 = E(\pi/2), \quad \Pi^1 = \Pi(\pi/2).$$

Legendre reescriu el teorema d'addició d'Euler per a aquestes tres menes d'integrals: si φ, ϕ i μ estan lligats per $\cos \varphi \cos \phi - \sin \varphi \sin \phi \Delta(\mu) = \cos \mu$ ¹¹³, aleshores

$$\begin{aligned} F(\varphi) + F(\phi) &= F(\mu), \\ E(\varphi) + E(\phi) &= E(\mu) + c^2 \sin \varphi \sin \phi \sin \mu, \\ \Pi(\varphi) + \Pi(\phi) &= \Pi(\mu) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{n\sqrt{\alpha} \sin \varphi \sin \phi \sin \mu}{1+n-n \cos \varphi \cos \phi \cos \mu}, \end{aligned}$$

¹¹² Legendre [1793]. Parteix de la integral general $\int \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}} dx$, on $Q(x)$ és racional i $R(x)$ és un polinomi de quart grau; descomposa després $Q(x)$ en elements simples de la forma x^m [$m \in \mathbb{Z}$] i $1/(1+nx)^p$ ($p \geq 1$, sencer); considera $d(\frac{x^m}{\sqrt{R(x)}})$ i mostra que les integrals $\int \frac{x^m}{\sqrt{R(x)}} dx$ són sumes d'una expressió algebraica i d'integrals del mateix tipus, però amb $-1 \leq m \leq 2$; després fa una anàlisi semblant amb els termes provinents de $1/(1+nx)^p$ i finalment obté

$$\int \frac{Q(x)}{\sqrt{R(x)}} dx = V(x) + \int (A+Bx+Cx^2) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \sum_i N_i \int \frac{dx}{(1+n_i x) \sqrt{R(x)}},$$

on $V(x)$ és una funció algebraica i A, B, C i N_i són constants. Ara, como ho havia fet abans Euler, considera que $B = D = 0$ [és a dir, considera que $R(x)$ solament conté termes parells] i transforma $dx/\sqrt{R(x)}$ en $d\varphi/\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$, amb $0 < k < 1$, i anomena $\Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$. Finalment obté

$$\int Q(\sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = V(\sin^2 \varphi) + \int (A+C \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \sum_i N_i \int \frac{d\varphi}{(1+n_i \sin^2 \varphi) \Delta(\varphi)}.$$

Dieudonné, J. [1976], II, 12.

Si fem $x = \sin \varphi$ s'obtenen les formes de Jacobi. Aquestes formes no són pas les úniques formes acadèmiques possibles i se n'han proposat moltes més, però avui dia les de Legendre conserven encara la seva utilitat.

¹¹³ Lagrange a la *Théorie des fonctions analytiques*. [1797], 82-90 [*Euvres*, IX, 135-143], aplicant el seu mètode a l'equació

$$\frac{dz}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 z}} = \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}$$

obté la integral $\cos z \cos u + \sin z \sin u \cos M = \cos m$, on m és la constant d'integració i $\sin M = k \sin m$.

on $\alpha = (1+n)(1+k^2/n)$.

Legendre obté també¹¹⁴

$$\pi/2 = F^1(\varphi)E^1(\varphi') + F^1(\varphi')E^1(\varphi) - F^1(\varphi)F^1(\varphi'),$$

per a certs valors particulars de φ i φ' , tals que $F^1(\varphi') = \sqrt{3} F^1(\varphi)$.

A més, si designem per $F(k, \varphi)$ la integral de primera espècie de mòdul k i amplada φ , el *teorema de Landen*¹¹⁵ li permet d'establir la transformació que, amb els anys, s'anomenarà *transformació quadràtica*: si $\sin(2\varphi' - \varphi) = k \sin \varphi$ i $k' = \frac{2\sqrt{k}}{1+k'}$, aleshores

$$F(k', \varphi') = \frac{1+k}{2} F(k, \varphi).$$

Els treballs que hem mencionat, però, fan referència *solament* a les *integrals el·líptiques* i no fan cap referència a les *funcions el·líptiques*. Aquesta diferència que *no fou observada* pels matemàtics que hem esmentat — Fangano, Euler, Lagrange, Legendre —, era indispensable per donar el tomb i impuls necessari que calia per poder avançar; caldria, no obstant, esperar les aportacions dels matemàtics de la generació següent — Niels Hendrik Abel [1802–1829] i Carl Gustav Jacobi [1804–1851] fonamentalment. L'obra de Legendre fou d'una importància cabdal per a les recerques d'aquests joves matemàtics i també per a Cauchy que, a partir d'elles, establiria l'eficàcia del seu *mètode de residus*. Amb tot, però, cal dir amb E.T. Bell que l'obra de Legendre *neix gaire bé vella*¹¹⁶. La idea que Legendre no aconseguí d'assolir fou la idea d'*inversió* que portà a terme Abel, en 1827, “en proposar l'estudi de les funcions inverses”; en lloc d'estudiar la integral el·líptica

$$\alpha = \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

on α és una funció d' x , calia considerar x com una funció d' α . Aquesta funció — *doblement periòdica* — esdevé tot seguit font de *nous* camins, progressos i suggerències¹¹⁷.

3. La geometria diferencial clàssica

La geometria diferencial clàssica, tal com la coneixem, estudia els objectes geomètrics — *corbes*, *superfícies*, etc. — i la seva particularitat resideix en el fet que, començant amb resultats

¹¹⁴ Euler [1728], 91–118 (*Opera*, (1)21) havia establert $\pi/4 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$, integrant via la integral euleriana *Beta*. [Ho retrobem a Legendre, *Œuvres*, I, 60–61.]

¹¹⁵ John Landen [1719–1790] demostrà, en 1775, que *tot arc d'hipèrbola es pot rectificar per mitjà de dos arcs d'el·lipse*, un descobriment força remarcable que ha fet que hom donés el nom de *teorema de Landen* no solament a aquest descobriment sinó també a la primera transformació coneguda de les integrals el·líptiques.

¹¹⁶ Bell, E.T. [1940], 409.

¹¹⁷ Abel, N.H. [1827] i Jacobi, C.G. [1828]. Recordem les paraules ja clàssiques de Jacobi: “sempre cal invertir”.

de geometria analítica, fa ús dels mètodes de l'anàlisi matemàtica i, en particular, del càlcul diferencial. Els seus inicis cal cercar-los al segle XVIII, tan bon punt la geometria cartesiana i el càlcul diferencial s'hagueren començat a consolidar; el nom de *geometria diferencial*, però, l'introduí per primera vegada Luigi Bianchi [1856–1928], l'any 1894¹¹⁸.

Ens limitarem a donar una llucada força superficial dels inicis d'aquesta geometria, tot fixant-nos en les *corbes de l'espai* i en les *superfícies*¹¹⁹. El 1731, Alexis-Claude Clairaut publicà les seves *Recherches sur les courbes à double courbure*, on es preocupà fonamentalment de la geometria analítica *tridimensional*¹²⁰. Una corba de l'espai es defineix com la intersecció de dues superfícies cilíndriques amb base a les projeccions en els plans de coordenades; analíticament cada superfície està caracteritzada per una equació de tres variables [és a dir, per una equació del tipus $f(x, y, z) = 0$]¹²¹; l'espai curvat comparteix aleshores les curvatures corresponents a les dues corbes planes obtingudes per projecció. Estudià la tangent a les corbes de doble curvatura i observà que un espai curvat pot tenir una *infinitat* de normals, totes elles contingudes en un pla — el *pla normal* — perpendicular a la tangent. Calculà tanmateix la *longitud* de certs arcs

¹¹⁸ "Aquesta història [la de la geometria diferencial "clàssica"] està íntimament lligada a la del "càlcul infinitesimal" i a la de la "geometria analítica" d'una banda i a la de l'astronomia, la de la mecànica i la de la física, d'una altra". [Dieudonné, J. [1986], 357.]

¹¹⁹ Els primers resultats relatius a les corbes planes els trobem en l'*Horologium Oscillatorium* Huygens [1673]; a aquest treball, íntimament lligat a la *cicloide* [Pla, J. [1989a]], Huygens introdueix les *evolvents* i les *evolutes*. Entre d'altres resultats estableix que "tota corba té una evoluta" i el punt essencial de la seva demostració passa per la consideració del radi de curvatura d'una corba en un punt.

També Newton a la seva *Geometria Analytica*, escrita en 1671 i editada en 1736, calculà, usant la teoria de les *fluxions*, la curvatura i obtingué

$$\frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

[Coolidge, J.-L. [1940], 320]. També se n'ocuparen Leibniz i Johann Bernoulli, respectivament, el 1686 i el 1691; Leibniz, a més, introduí el *cercle osculador*. El 1692 aquest matemàtic es preocupà per trobar l'*envolupant d'una família de corbes*, establint, en la nostra notació, que l'envolupant de la família uniparamètrica de corbes planes d'equació

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

s'obté eliminant α del sistema $f(x, y, \alpha) = 0$ i $\partial f / \partial \alpha(x, y, \alpha) = 0$ [Leibniz, G.L. [1692], 289–292.]

¹²⁰ Malgrat la tasca i les aportacions de Clairaut en la seva anàlisi de les corbes de l'espai a través de l'estudi de les seves projeccions en els plans de coordenades, el seu estudi no va mai enllà de les propietats de primer ordre [és a dir, solament fa servir derivades primeres]. [Veieu Boyer, C.B. [1956], caps. 6–8; Coolidge, J.-L. [1940], 134–140 i [1948], 76–86].

¹²¹ Clairaut dona les equacions d'algunes superfícies i posa de manifest que, per descriure una corba de l'espai, calen dues superfícies. Mostra també que certes combinacions de *dues* superfícies que passen per una corba, com ara l'*addició*, constitueixen també una nova superfície que passa per la corba. D'aquest fet en dedueix la manera d'obtenir les equacions de les projeccions d'una corba donada o, equivalentment, les equacions dels cilindres perpendiculars als plans de projecció.

curvats i l'àrea de certes superfícies¹²².

El primer progrés important en l'estudi de les corbes de *doble* curvatura cal atribuir-lo sense cap mena de dubte a Monge i al seu deixeble Michel-Ange Lancret [1774–1807]. Monge, el 1771, en una memòria que no es publicà fins el 1785¹²³, en la qual es preocupa fonamentalment de les *superfícies desenvolupables*, introdueix conceptes de nova factura: les normals a una corba Γ en un punt [no singular] P es troben en un pla Π , que és precisament el pla *normal*. En ell Monge hi distingeix una normal particular, l'eix, que és el límit de les interseccions del pla normal amb els plans normals propers. Els eixos són tots ells tangents a una nova corba Γ' i, a més, engendren una *superfície desenvolupable* que anomena la *polar desenvolupable* Σ . El pla normal Π és tangent a Σ en tots els punts de l'eix.

Monge, a més, ens ofereix l'equació del pla normal Π a una corba Γ d'equacions

$$y = \phi(x), \quad z = \psi(x)$$

en un punt genèric (x, y, z) , per mitjà de les derivades respecte d' x :

$$X - x + (Y - y) \cdot \phi'(x) + (Z - z) \cdot \psi'(x) = 0.$$

La polar desenvolupable s'obté, seguint Leibniz, eliminant x de l'equació de Π i de la seva derivada respecte d' x . Estableix també la curvatura de l'espai corvat¹²⁴ com la inversa del radi

¹²² Clairaut contribuï també amb d'altres aportacions a la geometria diferencial. Trobant-se a Lapònia amb Maupertuis, el 1733, demostrà que "en tota superfície de revolució, el sinus de l'angle d'una geodèsica i un meridià arbitrari [qualsevol posició de la corba generatriu] és inversament proporcional al radi de gir". És a dir:

$$\rho \cdot \sin \alpha = k,$$

per citar-ne una. [Clairaut [1735], 186–194 i Brunet, P. [1952].]

¹²³ Monge, G. [1850], 392 i sgs.

¹²⁴ Euler el 1775 dedicà un treball a l'estudi de la curvatura d'una corba de l'espai que donarà en forma paramètrica en funció de la longitud d'arc:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

i aleshores $dx = p ds$, $dy = q ds$, $dz = r ds$, on p, q, r són el *cosinus directors* i, per tant, compleixen $p^2 + q^2 + r^2 = 1$. A més considerarà ds constant.

Per a introduir la *curvatura* introdueix prèviament la *indicatriu esfèrica*. En un punt $P = (x, y, z)$ de la corba considera una esfera de radi 1 i, en ella, el lloc dels punts dels vectors unitaris tangents a la corba en (x, y, z) i en $(x+dx, y+dy, z+dz)$ [essent $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$ i ds' l'angle que formen les dues tangents]. El radi de curvatura és aleshores, per definició,

$$\rho = \frac{ds'}{ds} = \frac{ds^2}{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]^{1/2}} = \frac{1}{[x''^2 + y''^2 + z''^2]^{1/2}}.$$

de curvatura PQ , on Q és el punt en el qual una perpendicular per P a l'eix talla l'eix; Q és el centre de curvatura.

$$\rho = \frac{[1 + \phi'(x)^2 + \psi'(x)^2]^{3/2}}{[\phi''(x)^2 + \psi''(x)^2 + (\psi'(x)\phi''(x) - \phi'(x)\psi''(x))^2]^{1/2}}.$$

La *torsió* — l'altra curvatura en el sentit de Clairaut — fou introduïda per M.-A. Lancret. Ell atribuï *tres direccions principals* a una corba donada¹²⁵ en un punt. La primera direcció principal és la que ve donada per la tangent. *Successives* tangents determinen un pla: és el *pla osculador*. La normal que pertany al pla osculador és la *normal principal* i constitueix la segona direcció principal. La perpendicular al pla osculador, la *binormal*, ens dona la tercera direcció principal. La torsió és la variació de la binormal respecte de l'arc. Així, per Lancret, si $d\mu$ designa l'angle entre *dos plans normals succesius* i $d\nu$ l'angle entre *dos plans osculadors succesius*, aleshores

$$d\mu/ds = 1/\rho \quad \text{i} \quad d\nu/ds = 1/\tau,$$

on ρ és la curvatura i τ la torsió¹²⁶.

Euler, a més, es plantejà l'estudi de les *línies geodèsiques* sobre una superfície. Així el 1728¹²⁷ es plantejà el problema següent: donats dos punts fixos G i H i un punt mòbil M que es mou de G a H damunt d'una corba, en quina posició $MG + MH$ és mínim? I obté, quan la corba es mou en una superfície donada $f(x, y, z) = 0$ [o, diferenciant-la, $Pdx = Qdy - Rdz$], que la línia geodèsica té l'equació¹²⁸

$$\frac{Qd^2x + Pd^2y}{Qdx + Pdy} = \frac{dx d^2x + dy d^2y}{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

¹²⁵ Lancret, M.-A. [1806], 416-454.

¹²⁶ Serà Cauchy qui el [1826] imposarà aquest concepte i qui en clarificarà el significat. Indiquem que Lancret, a diferència d'Euler, donava la corba en la forma $x = \phi(z)$ i $y = \psi(z)$.

¹²⁷ Euler, L. [1728].

¹²⁸ Veieu Coolidge, J.-L. [1940], 324-325. Agafant eixos adequats s'obté que les coordenades dels punts G, H i M són, respectivament, $(-a, b, c)$, $(0, x, y)$ i (a, f, g) i la diferencial de la suma de distàncies és

$$\frac{(x-b)dx + (y-c)dy}{\sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2}} + \frac{(x-f)dx + (y-g)dy}{\sqrt{a^2 + (x-f)^2 + (y-g)^2}}$$

que ha de valer 0. Damunt la superfície $Pdx = Qdy - Rdz$ resulta que, en M — on l'eix z és ortogonal a la tangent en M — tenim que $Pdx = Qdy$, d'on s'obté finalment

$$\frac{(x-b)Q + (y-c)P}{\sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2}} = \frac{(x-f)Q + (y-g)P}{\sqrt{a^2 + (x-f)^2 + (y-g)^2}}.$$

Ara fem $a = dz$, $b = x - dx + d^2x$, $c = y - dy + d^2y$, $f = x + dx$, $g = y + dy$, substituïm, operem i hem acabat.

Aquestes investigacions portaren, ja el 1744, Euler a l'estudi del *càlcul de variacions*.

L'estudi de les idees bàsiques de la geometria diferencial de les superfícies és força més tardana i cal buscar-ne els primers vestigis en un article d'Euler de 1767, *Recherches sur la courbure des surfaces*. En aquest treball s'obté el famós *teorema d'Euler* de la forma següent: la superfície que s'estudia $z = z(x, y)$ la tallem per un pla arbitrari $z = \alpha x - \beta y + \gamma$. S'obté aleshores una corba plana la curvatura de la qual és¹²⁹

$$\frac{[\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + p^2 + q^2]^{3/2}}{[(\alpha - q)^2 \frac{dp}{dx} + (\beta + p)^2 \frac{dq}{dy} + 2(\alpha - q)(\beta + p) \frac{dp}{dx}] \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}},$$

on $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{dq}{dy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{dq}{dx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Desencoratjat per la complexitat d'aquesta fórmula, decideix d'analitzar la curvatura de les seccions normals — és a dir, considera les corresponents als *plans normals* a la superfície¹³⁰ — i emprà una altra notació. Elegeix la curvatura *principal* que és la curvatura normal corresponent al pla normal perpendicular al pla OXY [també distingeix una segona curvatura principal, corresponent a la direcció perpendicular a aquesta primera]. Aleshores a cada pla normal li associa un angle φ — l'angle que forma el pla normal i la secció principal — i obté la següent expressió pel radi de curvatura

$$\frac{-(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)^{3/2} \cdot \sec^2 \varphi}{(p - q \operatorname{tg} \varphi)^2 \frac{dp}{dx} + (q + p \operatorname{tg} \varphi)^2 \frac{dq}{dy} + 2(p - q \operatorname{tg} \varphi)(q + p \operatorname{tg} \varphi) \frac{dp}{dy}}$$

expressió que Euler dona¹³¹ pel cilindre $z = \sqrt{a^2 - y^2}$, el con $z = \sqrt{n^2 x^2 - y^2}$ i l'elipsoide $z^2 = a^2 - mx^2 - ny^2$ i que després transforma en

$$\frac{1}{L + M \cos 2\varphi + N \sin 2\varphi},$$

¹²⁹ Coolidge, J.-L. [1940], 325–326.

¹³⁰ Una superfície $z = z(x, y)$ en cada punt $P = (x, y, z)$ té un pla *tangent*. El precursor fou A. Parent que, el 1700, calculà el pla tangent, en coordenades cartesianes, a l'esfera i a d'altres superfícies particulars. Autors com Clairaut, Euler i Monge admetien implícitament l'*existència* d'un pla tangent en cada un dels punts [no-singulats] d'una superfície. En 1803 Lacroix mostrà que, d'entre tots els plans que passen per P n'hi ha un tal que la distància a ell des d'un punt $P' = (x', y', z')$ pròxim a la superfície, prou "vef" a P , és d'ordre *infinitesimal màxim* en funció de la distància dels dos punts.

El 1813 Dupin i el 1826 Cauchy demostraren explícitament que les tangents a *totes* les corbes sobre la superfície que passaven per P es troben en un mateix pla, que anomenaren el *pla tangent*. Cauchy, a més, trobà l'equació del pla tangent a la superfície $u(x, y, z) = 0$ en el punt $P = (x, y, z)$:

$$(X - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial u}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

La recta perpendicular per P a aquest pla tangent és la *recta normal* a la superfície en el punt P ; qualsevol pla que conté la recta normal a la superfície en el punt P és un *pla normal* a la superfície en P ; n'hi ha una *infinitat*.

¹³¹ Ríbnikov, K. [1974], 296.

on L , M i N són funcions d' x, y, p, q, r, s, t , però no depenen de φ .

Aleshores d'entre totes les curvatures normals en un punt P de la superfície

$$k_\varphi = L + M \cos 2\varphi + N \sin 2\varphi,$$

Euler calcula quina és *màxima* i quina és *mínima*; derivant obté

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{N}{M};$$

les seccions normals que donen el màxim i el mínim són *ortogonals* i així obté les **dues curvatures principals** k_1 i k_2 . Aleshores Euler efectua un canvi de variables de manera que els angles de les dues curvatures principals siguin 0 i $\pi/2$ i obté

$$L + M = 1/\rho_1, \quad L - M = 1/\rho_2$$

i

$$1/\rho = \cos^2 \varphi / \rho_1 + \sin^2 \varphi / \rho_2,$$

ja que $N = 0$. Així obté la *fórmula d'Euler*¹³²:

$$k_\varphi = k_1 \cdot \cos^2 \varphi + k_2 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Però l'estudi de les superfícies continuaria sota la pressió directa de la pràctica: la *cartografia* i la *geodèsia* i la necessitat d'aplicar-les. Aquesta pressió portà a l'estudi de les *superfícies*

¹³² Una demostració molt elegant fou presentada a l'*Académie des Sciences* per un matemàtic jove i desconegut que solament tenia 21 anys, Jean Batiste Marie Charles Mesniet de la Place [1754–1793] el 1776. Aquest il·lustre personatge havia treballat en hidràulica i també en qüestions relatives a la química amb Lavoisier.

La idea de Mesniet consistia en suposar que la superfície $t = t(u, v)$ era tangent al pla OUV en l'origen i, per tant, desenvolupant

$$t = \frac{1}{2}[cu^2 + 2euv + fv^2].$$

A l'origen

$$d\,dt = c\,du^2 + 2e\,du\,dv + f\,dv^2.$$

Suposant ara que, a l'origen $f - e^2 \neq 0$, podem efectuar un canvi d'eixos i obtenim

$$d\,dt = \frac{du'^2}{r} + \frac{dv'^2}{\rho}.$$

[Avui sabem, si bé Mesniet no diu res al respecte, que $e^2 - cf$ i $c + f$ són *invariants per rotació*]. D'on:

$$c + f = \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}, \quad e^2 - cf = -\frac{1}{r\rho}.$$

[Mesniet, B. [1776], 481. Veure el *teorema de Mesniet* a Dieudonné, J. [1986], 362.]

desenvolupables; així Euler, en 1772, a la seva memòria *Solidis Quorum Superficiem in Planum Explicare licet*¹³³ introdueix la representació paramètrica d'una superfície

$$x = x(t, u), y = y(t, u), z = z(t, u)$$

i es pregunta "quines condicions haurien de satisfer aquestes funcions per tal que la superfície fos desenvolupable" — és a dir, desenrotllable *isomètricament en el pla* — o sigui

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 + du^2,$$

considerant els paràmetres u, t com *coordenades rectangulars del pla*. Considera

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial u} du$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} &= 0. \end{aligned}$$

Observa que el con i el cilindre són desenvolupables i que, alhora, són de revolució. Recíprocament, si una superfície de revolució és desenvolupable damunt d'un pla, cal que s'hagi obtingut per la revolució d'una recta, ja que cal que l'equació $AB - BC = AC$ sigui invariant i això és l'equació d'una recta. També establí que la família de tangents a una corba arbitrària genera una superfície desenvolupable. Creia, però, en la validesa del recíproc que, de fet, és fals.

La teoria de les superfícies desenvolupables fou estudiada independentment per un dels matemàtics de la Revolució Francesa, Gaspar Monge. Els seus resultats més remarcables els trobem en el treball de 1771, *Mémoires sur les développées, les rayons de courbure, et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure*, publicat molt més tard en 1785¹³⁴. Segueix la presentació feta per Clairaut ja que, pel que sembla¹³⁵, desconeix l'obra d'Euler. Aquest treball de Monge conté gran quantitat de conceptes nous i de propietats noves¹³⁶. Entre d'altres qüestions hi trobem el càlcul de l'envolupant d'una família uniparamètrica de superfícies $V(x, y, z, \alpha) = 0$. Per veure on talla a una superfície *infinítament veïna* calcula $\frac{\partial}{\partial \alpha} V(x, y, z, \alpha) = 0$ i talla les dues superfícies

$$V(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} V(x, y, z, \alpha) = 0.$$

El tall d'ambdues superfícies és la *corba característica*. Eliminant α d'ambdues equacions obté l'envolupant de la família. Monge admet que, en cada punt de la corba característica, la superfície

¹³³ Euler, L. [1775].

¹³⁴ Monge, G. [1785].

¹³⁵ Kline, M. [1972], 566.

¹³⁶ Veieu Coolidge, J.-L. [1940], 363; Dieudonné, J. [1986], 364; Kline, M. [1972], 566.

$V(x, y, z, \alpha) = 0$ i la seva envolupant “tenen el mateix pla tangent”. A més les corbes característiques són *tangents* a una mateixa corba que satisfà, a més, l'equació $\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} V(x, y, z, \alpha) = 0$; aleshores calculem x, y, z en funció d' α .

Monge ho aplica a una família uniparamètrica de plans $z = x\phi(\alpha) + y\psi(\alpha) + \alpha$. Elimina α d'aquesta equació i de l'equació $x\phi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + 1 = 0$. Afegint a aquestes dues equacions l'equació $x\phi''(\alpha) + y\psi''(\alpha) = 0$, obté x, y, z en funció d' α .

El 1715 Monge presenta a l'*Académie* un altre article¹³⁷ relacionat amb les superfícies desenvolupables. En ell introdueix la següent definició de superfície desenvolupable: “és aquella superfície que, *sense distorsió*, pot ésser aplanada” [o “aquella en la qual hom pot ajustar-hi un pla”]. Estableix que tota superfície desenvolupable està constituïda per les *tangents a una certa corba de l'espai*. A més dóna una representació general de les superfícies desenvolupables: observa que, en aquest tipus de superfícies, la *normal* té la mateixa direcció tot al llarg d'un *generador* i, per tant, els cosinus directors són funcions d'un sol paràmetre

$$p = F(q), \quad dz = F(q) dx + q dy$$

i, per tant,

$$dz = d[x \cdot F(q) + qy] - [x \cdot F'(q) + y] dq$$

d'on resulta que $[x \cdot F'(q) + y] dq$ és una diferencial total i, per tant, $y + x \cdot F'(q)$ és funció de q :

$$z = x \cdot F(q) + qy + f(q) \quad \text{i} \quad y = -x \cdot F'(q) - f'(q)$$

i finalment¹³⁸

$$z = x \cdot [F(q) - F'(q) \cdot q] + f(q) - q \cdot f'(q), \quad \text{on} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

També estableix que $rt - s^2 = 0$. Donada una corba $x = v$, $y = \psi(v)$, $z = \phi(v)$, considerem el seu pla tangent en un punt $y = \psi(v) + (x - v) \cdot \psi'(v)$, $z = \phi(v) + (x - v) \cdot \phi'(v)$. Resolem ara v en funció d' x i y , que esdevenen aleshores variables independents:

$$\begin{aligned} 0 &= (x - v) \cdot \psi'' \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \psi', & 1 &= (x - v) \cdot \psi'' \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ p &= (x - v) \cdot \phi'' \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \phi', & q &= (x - v) \cdot \phi'' \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

i per tant¹³⁹

$$p = \frac{\phi' \psi'' - \psi' \phi''}{\psi''}, \quad q = \frac{\phi''}{\psi''} \quad \text{i} \quad \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = 0.$$

¹³⁷ Monge, G. [1780].

¹³⁸ La notació $\partial z / \partial x$ apareix per primera vegada al segle XIX i és suggerida per Jacobi a la seva teoria dels determinants [1841], si bé havia sigut proposada per Legendre el 1786; Monge, G. [1850], 48 introdueix les notacions $p = dz/dy$, $q = dz/dx$; en canvi introdueix r, s, t per designar les derivades de segon ordre, que anomena *différences partielles du second ordre* [Monge, G. [1850], 71.].

¹³⁹ Cal excloure els cilindres perpendiculars al pla xy .

Monge estableix que les superfícies desenvolupables poden tractar-se com el lloc geomètric de les tangents a les corbes de l'espai i, també, que en essència són les envelopants de certes famílies de plans biparamètrics¹⁴⁰.

Veiem, doncs, que Monge s'apropà cada cop més a la presentació *no algebica* de les superfícies que trobava massa artificial, a una presentació mitjançant *equacions en derivades parcials*: una classificació diferencial de les superfícies constituïria el contingut de les seves lliçons a l'*École Polytechnique*, lliçons que constitueixen el que hom coneix com *Feuilles*¹⁴¹. Trobà que moltes superfícies corresponen a equacions diferencials en derivades parcials de primer ordre —*superfícies cilíndriques, còniques, de revolució, acanalades*¹⁴², *helicoidals, dels vertents dels terraplens*¹⁴³. Així, per exemple, considerant les superfícies cilíndriques com aquelles superfícies en les quals el seu pla tangent és paral·lel a la generatriu, obté

$$x = az, y = bz$$

que dóna l'equació diferencial: $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$. Tenint en compte que la generatriu de la superfície cilíndrica és paral·lela a una recta s'obté

$$y - bz = -\varphi(x - az),$$

on φ és una funció arbitrària; anàlogament pels cons i els terraplens¹⁴⁴.

Naturalment aquesta aproximació de la teoria de les superfícies per mitjà de les equacions diferencials en derivades parcials portà Monge a estudiar a bastament les equacions diferencials en derivades parcials, però això és una altra història¹⁴⁵.

No podem pas dubtar de les grans aportacions dels matemàtics del segle XVIII — Euler, Lagrange, Mesniet, etc. — i de Monge i els seus nombrosos deixebles¹⁴⁶ durant la primera meitat del segle XIX, però la gran empenta havia de venir també en aquesta ocasió amb un nou canvi de punt de vista: aquest nou punt de vista l'aportà Carl Friedrich Gauss [1777-1855] amb la *geometria intrínseca* de les superfícies; és a dir, propietats *invariants* respecte del doblament i, fonamentalment, amb l'aportació genial de Georg Friedrich Bernhard Riemann [1826-1866] de 1854 amb el desenvolupament en profunditat de la geometria intrínseca de qualsevol espai.

¹⁴⁰ Establí la diferència entre superfícies desenvolupables i reglades.

¹⁴¹ Aquestes *Feuilles* són un bon exemple de la seva gran habilitat geomètrica i del seu gran coneixement analític.

¹⁴² Un cercle perpendicular a una certa corba es desplaça mantenint el seu centre constantment en la corba.

¹⁴³ En un terraplè, les línies de màxim descens són rectes de pendent constant.

¹⁴⁴ Pels cons: $(x - a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c$ i $\frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$; pels terraplens: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = a^2$ i $z^2 = a^2[(x - a)^2 + (y - \varphi(a))^2]$.

¹⁴⁵ Kline, M. [1972], 536-540; Rfbnikov, K. [1974], 265-267 i 302-303.

¹⁴⁶ André-Marie Ampère [1775-1836], Lazare Carnot [1501-1823], Pierre-Charles-François Dupin [1784-1873], Jean-Batiste Joseph Fourier [1768-1830], Jean-Frédéric Frenet [1816-1900], Denis Poisson [1781-1840], Joseph Alfred Serret [1819-1885].

Dieudonné és clar¹⁴⁷: “les etapes essencials del desenvolupament de la Geometria diferencial són les següents:

1. El segle XVII, Fermat i Descartes creen la geometria analítica i Newton i Leibniz desenvolupen els algorismes del càlcul diferencial que, conjuntament, permetran l'estudi de corbes i superfícies des del punt de vista diferencial. Les corbes planes, des d'aquest punt de vista, són estudiades per Kepler, Descartes, Fermat i Pascal; el problema del pèndol permet Huygens d'introduir l'evolvent i l'evoluta. Al segle XVIII i començaments del XIX, els treballs de Clairaut, Euler, Monge, Mesnieur, Dupin, Serret, Frenet estudien les corbes i superfícies sumergides en l'espai de tres dimensions;
2. El 1827 s'obren noves vies a la Geometria diferencial amb les aportacions de Gauss que introdueix la “geometria intrínseca” d'una superfície, utilitzant “coordenades curvilínies” en lloc de coordenades cartesianes i mostra que la curvatura total solament depèn de l'element ds^2 de la superfície. Dóna, de forma incipient, la idea de “carta local” en un punt de la varietat, idea que esdevindrà fonamental tant en la Geometria diferencial com en la Topologia contemporànies. El teorema de Gauss-Bonnet que lliga la curvatura total de la superfície amb l'àrea d'un triangle geodèsic és el primer resultat que lliga la curvatura amb propietats globals; d'altres resultats d'aquesta naturalesa els obté Bonnet en el seu estudi de les geodèsiques. . . ;
3. Enmig del segle XIX un nou impuls ve de Riemann pel que fa a la Geometria diferencial el qual, d'una banda, empès per la mecànica i la física, comença l'estudi general dels espais amb un nombre arbitrari de dimensions, i d'altra banda desenvolupa les idees de Gauss considerant, de cop, “multiplicitats” de dimensió arbitrària que no se suposen submergides en un espai euclidi: comença així l'estudi de la geometria diferencial moderna.”¹⁴⁸

Podíem haver ofert molts d'altres exemples per sostenir la nostra tesi¹⁴⁹, però l'extensió ens ha semblat suficient i creiem que la tesi ha estat ben defensada i ha quedat establerta més enllà de qualsevol dubte raonable.

¹⁴⁷ Dieudonné, J. [1986], 358.

¹⁴⁸ El lector interessat en la qüestió pot consultar Dieudonné, J. [1986], 357–377; Coolidge, J.-L. [1940], 318–342; 343–387; Rfnikov, K. [1974], 264–270; 302–305.

¹⁴⁹ La teoria dels nombres reb en mans d'Euler, Lagrange i Legendre un impuls enorme des que Fermat en desvetllà el seu interès i la naturalesa de la seva recerca; caldrà però esperar Gauss i els seus nous conceptes, mètodes i plantejaments per donar el salt definitiu;

la teoria de les equacions algèbriques — *teorema fonamental del l'àlgebra i resolució de la quintica* — reberen un impuls important amb d'Alembert, Euler i, sobretot, Lagrange, entre d'altres, però novament seran les noves idees de Gauss, Abel i Galois les que donaran el canvi de rumb indispensable per seguir avançant més lluny;

la geometria no-euclídea és desenvolupada de forma implícita per Saccheri i Legendre, però sempre amb la intenció de mostrar la validesa del cinquè postulat; sense les noves aportacions de Gauss, Bolyai i Lobachevsky, però, aquest camí no hauria portat enlloc;

el concepte d'infinitèsim, d'indivisible, de primera i darrera raó es trobaven a bastament en les obres de càlcul infinitesimal de d'Alembert — que fou l'únic que tingué la intuïció de límit —, Euler, Lacroix, Landen, i molt especialment de Carnot, però seran les noves intuïcions de Cauchy i Weierstrass les que hauran de permetre l'impuls imparabile en la consecució del rigor; etc. . .

IV. Els matemàtics de la Revolució Francesa i la seva tasca política, docent i didàctica¹⁵⁰

Els principals artífexs de la Revolució Francesa, Voltaire, Rousseau, d'Alembert i Diderot no visqueren pas la caiguda de la Bastille — aquest fet històric puntual que hem prè com a síntesi de la Revolució Francesa —; en canvi els sis matemàtics il·lustres que hem anomenat els matemàtics de la Revolució Francesa visqueren tots ells aquest fet històric puntual; els sis pertanyen pràcticament a una mateixa generació [i tots tenen la mateixa edat]. Amb tot, però, els tres els noms dels quals comencen amb L — Lagrange, Laplace i Legendre — no prengueren part activa en el fet històric de la presa de la Bastille, ni tampoc en els fets polítics i ideològics que havien de transformar completament França, i de retruc Europa, ni en els anteriors ni en els posteriors a la caiguda de la Bastille. Condorcet, en canvi, hereu de la ideologia de Diderot serà un dels artífexs d'aquesta voràgine revolucionària i alhora en serà víctima; perseguit i empresonat es suïcidà el 1794¹⁵¹. La resta, en canvi, foren honorats o bé per la República o bé per l'Imperi: Lagrange, Monge i Carnot esdevingueren comtes de l'Imperi; Laplace fou nomenat marquès i Legendre aconseguí un enorme prestigi¹⁵².

Cap d'ells no està vinculat amb la Universitat¹⁵³; en canvi, gairebé tots ells estigueren vinculats a les *Acadèmies Militars* i, naturalment, a les *Societats de Ciències* i, en particular, a la de París; així tenim que

Joseph Louis Lagrange, el precoç, és l'únic que no és nascut a França; natural de Torí, prové d'una família de negociants amb afers a Itàlia i França. Fou professor de l'*Acadèmia Militar di Torino*; més tard obtingué un mecenatge de Frederic, el Gran, de Prússia i després de Louis XVI de França.

Marie Jean Antoine Caritat de Condorcet, l'intel·lectual, prové, a l'igual que Voltaire, Diderot i d'Alembert d'una família de sacerdots i de soldats i estudià als jesuïtes i més tard al *Collège de Navarre*, però no prosseguirà, com era el desig de la seva família, la carrera militar i no esdevindrà pas capità de cavalleria.

Gaspar Monge, el professor, fou fill d'un botiguer pobre; gràcies a un lloctinent coronel entrà a l'*École Militaire de Mézières*, d'on després esdevindria professor.

Pierre Simon Laplace, el físic, és també d'ascendència humil, però gràcies a d'Alembert aconseguí d'ingressar, com a professor, a l'*École Militaire de Paris*, el 1769¹⁵⁴;

Adrien Marie Legendre, l'aneguet lleig, malgrat ésser de bona família no s'educà tampoc a la Universitat; ho feu al *College Nazariano des Quatre Nations*; fou, en canvi,

¹⁵⁰ Aquest apartat està amplament inspirat en l'article de Boyer de 1960 i en el seu llibre d'Història de les matemàtiques de 1968.

¹⁵¹ És l'únic dels sis matemàtics de la Revolució Francesa que no passà dels seixanta anys.

¹⁵² Amb tot cal considerar-lo, respecte dels altres quatre, l'aneguet lleig. Veieu Itard, J. [1984], 337–338.

¹⁵³ Les Universitats del Segle XVIII a França no prengueren part activa en el desenvolupament de la Il·lustració, però tampoc no fou en elles on es desenvolupà la ciència ni les matemàtiques.

¹⁵⁴ Fou l'únic que passà per la Universitat

professor de l'*École Militaire de Paris* de la qual també n'era professor Pierre-Simon Laplace.

Lazare Nicolas Marguerite Carnot, el polític, era fill d'una família burgesa i entrà sense cap mena de dificultat a l'*École Militaire de Mézières*, on era professor Gaspar Monge.

Tot ells, doncs, els trobem vinculats d'una o altre manera, durant un període de temps més curt o més llarg, a les acadèmies militars; la seva tasca, però, traspassà no solament les parets de les acadèmies militars sino àdhuc les fronteres de França i invadiren Europa amb tanta força i violència, almenys, com les tropes de Napoleó.

Tots ells, a més, abeuraren a les mateixes fonts; una de les enciclopèdies de més èxit del segle XVIII fou la de Bézout, un professor de l'*Académie Militaire de Mézières* a la qual, com ja hem fet notar, assistiren Monge i Carnot. El seu *Cours de mathématiques* tingué molta influència fins gairebé mitjans del segle XIX, influència que arribà a Amèrica del Nord, on trobem parts, en anglès, entre els textos usats a l'Acadèmia Militar de West Point entre d'altres¹⁵⁵.

A França la geometria analítica i el càlcul diferencial s'estudiaven en les obres un xic sistematitzades del Marquis de l'Hôpital — *Analyse des infiniment petits* [1696] i *Traité analytique des sections coniques* [1707]. L'Hôpital no fou mai professor, però la seva obra no tindrà rival durant tot el segle XVIII, probablement per la seva qualitat didàctica i pels seus continguts força abastables. L'obra clau, però, fou l'obra en dos volums, enormement didàctica i completa i alhora original i pregon, d'Euler, *Introductio in Analysim Infinitorum* [1748, 2 vols.]. Aquesta obra assentaria les bases de l'anàlisi matemàtica superior, esdevindria lectura obligada per tots els qui voldrien conèixer a bastament l'estat del càlcul diferencial i de la geometria analítica; la seva influència és difícilment *avaluable globalment*¹⁵⁶.

Tots ells veieren la seva vida sotregada per la *presa de la Bastille*. Tots ells, però, ja havien publicat quelcom abans d'aquesta data històrica:

Lagrange havia publicat ja la seva *Mécanique Analytique* [1788] i diversos treballs en gairebé tots els camps de les matemàtiques¹⁵⁷;

Condorcet havia elaborat i editat el *De Calcul Integral* [1765] i l'*Essai su l'Application de l'Analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix* [1785];

Monge havia presentat ja diverses memòries a l'*Académie des Sciences* i havia publicat el seu *Traité Élémentaire de Statique* [1788]¹⁵⁸;

¹⁵⁵ Trobem traduïda fonamentalment la seva quarta part que tracta dels *principis de la mecànica* i els *lligams amb la navegació*.

¹⁵⁶ A diferència, però, de l'obra de l'Hôpital, no fou reeditada fins cent anys més tard.

¹⁵⁷ Havien transcorregut els seus períodes anomenats *torinès* i *berlinès*.

¹⁵⁸ La seva *Géométrie Descriptive* no s'havia publicat perquè els seus superiors van considerar que era necessari mantenir-la como a matèria reservada en defensa de l'interès nacional. També publicà certs resultats experimentals sobre l'aigua realitzats en col·laboració amb Lavoisier, una altra de les víctimes de la Revolució.

Laplace i Legendre publicaven assíduament articles importants en camps força diversos¹⁵⁹;

Carnot el 1786 havia vist ja la segona edició del seu *Essai sur les machines en general*.

Malgrat tot, però, el seu comportament davant els esdeveniments polítics que portaren a la caiguda de la *Bastille* els distingeixen de forma clara. Condorcet, fisiòcrata, filòsof i enciclopedista, era del cercle de Voltaire i de d'Alembert. Fou un idealista inquiet i visionari i el preocupava tot el que tenia a veure amb el benestar de la humanitat. Malgrat ésser marquès, les injustícies de l'*Ancien Régime* el portaren a treballar a favor de la reforma; creia que l'educació aconseguiria d'eliminar el vici; defensà l'educació lliure i pública, una actitud admirablement esperançada en el futur i, en especial, en aquell moment històric i el seu esdevenidor immediat. La seva tasca matemàtica és pionera en el camp social: aplicà les probabilitats i l'estadística als problemes socials. Les seves idees sobre educació lliure i pública, que presentà a l'Assamblea Legislativa i que publicà el 1792 no foren portades a terme fins molts anys després de la seva mort; a ell però li portaren gran quantitat de problemes en el camp polític, problemes el final dels quals fou tràgic per a la seva pròpia vida.

Monge, en canvi, era plebeu i membre del club jacobí, més radical que l'ala girondina, més moderada, a la que Condorcet mostrava les seves simpaties. Malgrat ésser més radical també tindria problemes. Se li assignà un paper en la reforma dels pesos i mesures ordenat per l'Assamblea Constituent de 1790, però el seu treball d'examinador de la marina el mantingué allunyat de Paris dos anys. Fou nomenat ministre de marina el 1792 a suggerència de Condorcet; aquest càrrec el portà a haver de signar el document referent al judici i execució del rei *Louis XVI*, però la incompetència de la marina en els esdeveniments militars l'obligà a dimitir. Es mantingué sempre al servei de la República i la Revolució, però en una situació compromesa i poc segura. Monge es preocupà intensament per la creació d'institucions d'ensenyament superior. A partir de 1794 fou membre de la Comissió encomenada d'edificar una institució d'aquesta mena. Així contribuí, amb la seva passió i tasca personal, a l'aparició de l'*École Polytechnique*. En fou excel·lent mestre i brillant administrador. Els seus cursos de *geometria descriptiva* arribaren a tenir una assistència de 400 alumnes. Però, a més de l'*École Polytechnique*, es creà també, en aquesta mateixa època, l'*École Normal*: aquesta escola estava destinada a formar els futurs mestres, mestres educats en la ideologia de la Revolució d'acord amb les seves directrius; aquests mestres havien de sorgir d'alumnes seleccionats amb molta cura¹⁶⁰; obrí les seves portes amb molta precipitació, però malgrat tot arribà a reunir entre 1400 i 1500 estudiants. La seva facultat de matemàtiques assolí un nivell molt alt i, entre els seus professors, hi trobem Lagrange, Laplace, Monge i Legendre. Una de les tasques indirectes de Monge la constitueix el que s'ha anomenat la *revolució analítica* — revolució que fa referència a la gran empenta que rebé la geometria de Descartes —; entre 1798 i 1802 aparegueren quatre geometries analítiques elementals, produeix

¹⁵⁹ El primer treball de Legendre data ja dels seus anys d'estada a l'escola, quan tenia tan sols 18 anys; aquests treballs els edità el 1774 el seu mestre en un *Traité de mécanique*. Les seves primeres memòries a l'*Académie des Sciences* daten de gener de 1783. [Itard, J. [1984], 335.]

Laplace comença a escriure els seus articles de probabilitat a partir de 1774, però sembla que la seva tasca productiva havia començat el 1769 quan tot just tenia vint anys.

¹⁶⁰ Burton, D.M. [1985].

totes elles de les lliçons donades a l'*École Polytechnique*¹⁶¹.

El personatge més notable i més íntimament vinculat als afers polítics i a la República i a l'Imperi fou probablement Carnot, conegut també com l'*Organitzador de la Victòria*. Aquest insigne personatge organitzà l'exèrcit i el portà la victòria a Wattignies. De retorn a França votà a favor de la mort de *Louis XVI*; tenia molts enemics, entre els quals cal remarcar Robespierre que esperava la primera derrota per demanar el seu cap¹⁶²; el 1797 negà, en canvi, el seu suport a un cop d'estat i això l'obligà a haver d'emigrar, malgrat haver format part de tots el Comitès i d'haver arribat al Directori. La seva cadira de la secció de geometria de l'*Académie des Sciences* passà a Bonaparte, per vot unànim inclòs el de Monge. Tornà, però, l'any 1797 i el 1799 fou nomenat *ministre de la guerra* sota l'Imperi i se li retornà la seva cadira a l'*Académie*, alhora que se li concedí el títol de compte de l'Imperi. Durant l'exili publicà les seves *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*. Fidel a Napoleó hagué d'emigrar novament després de la derrota de Waterloo i el retorn de la monarquia en la persona de *Louis XVIII*. Darrera seu deixà una família de científics i polítics molt il·lustre¹⁶³.

Tot ells, però, tant els qui ideològicament i política estigueren vinculats amb els esdeveniments polítics i amb la República com els qui no, els qui es mantingueren allunyats de la Revolució, es veieren units en un afer important: la *reforma del sistema de peses i mesures*¹⁶⁴. El 1790, Tayllerland proposà la reforma de les Peses i les Mesures. La qüestió fou enviada a l'*Académie des Sciences* i aquesta nomenà un *Comité* que havia d'elaborar un projecte. En aquest Comitè hi havia, entre d'altres científics, Lavoisier, Lagrange i Condorcet¹⁶⁵. Una primera dificultat la introduí la discussió sobre l'elecció del sistema de numeració: el *decimal* o el *duodecimal*; aquest darrer fou rebutjat gràcies en part a l'aferissada defensa que del sistema decimal féu Lagrange. La segona dificultat la presentaven les alternatives existents en relació amb la unitat de longitud: una d'aquestes alternatives consistia en agafar com unitat de longitud la *longitud del pèndol que bat 1 segon*. L'equació del període del pèndol és

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

i, per tant, s'hauria aconseguit com longitud estàndard¹⁶⁶ g/π^2 . Legendre, però, malgrat no formar part del Comitè, influí en les seves decisions de forma important; havia aconseguit,

¹⁶¹ Boyer, C.B. [1968], 604; Collette, J.P. [1979], II, 154.

¹⁶² El cap que caigué fou, en canvi, el de Robespierre.

¹⁶³ Lazare Carnot [1753–1823], l'organitzador de la victòria; els seus fills Sadi Carnot [1796–1832], físic, i Hippolite Carnot [1801–188], membre de l'Assemblea i senador, i els fills d'aquest darrer Sadi Carnot [1837–1894], president de França el període 1887–1894, i Adolphe Carnot [1839–1920], químic i nomenat membre de l'*Académie des Sciences* el 1895.

¹⁶⁴ Aquesta reforma pot semblar-nos menys important, però per a la mentalitat del prohoms de la República ho era força; una de les preocupacions dels il·lustrats era la unificació de França, unificació ideològica, lingüística, política, en els costums, en les lleis, en les idees, en les mesures, etc.

¹⁶⁵ Legendre, malgrat el seu gran prestigi, inicialment en fou exclòs per qüestions d'ordre polític.

¹⁶⁶ La longitud estàndard, la unitat de longitud, hauria depès de la gravetat g ; aquesta dificultat s'hauria pogut resoldre

prèvia *triangulació*, mesurar la *longitud del meridià terrestre* que unia Dunkerke i Barcelona¹⁶⁷. El Comitè decidí d'establir que el *metre* era igual a "la deumilionèsima part del quadrant del meridià terrestre"¹⁶⁸.

La comesa estava gairebé acabada el 1791, però hi hagueren retards en la seva posta a punt i, el 1793, la *Convenció* decidí suprimir l'*Académie des Sciences* i reforçar alhora el *Jardin des Plantes*. Aquesta decisió pot ésser el resultat de dos fets importants i independents; un de polític: l'*Académie* estava governada i regida per homes de més edat que no pas el *Jardin* i això la convertia en una institució més *conservadora* respecte de les idees dels republicans i dels revolucionaris i, en canvi, el *Jardin* era més revolucionari; un d'ideològic: Rousseau i Voltaire defensaven un "retorn a la naturalesa" i això feu que, a França, es donés, entre el polític, una situació d'una certa bel·ligerància, en la línia de Goethe, contra la física, sobretot la física teòrica. El *Jardin des Plantes* oferia una ciència més segura. La clausura de l'*Académie* suposà un cop fort per a les ciències teòriques i, en particular, per a les matemàtiques; amb tot, però, es mantingué el *Comité de Peses i Mesures* per la seva importància política, si bé se'n suprimí Lavoisier¹⁶⁹ i s'hi incorporà Monge. També Lagrange estigué a punt de perdre el seu lloc a l'esmentat *Comité*, ja que les lleis de la República prohibien que un estranger ocupés un càrrec d'aquesta mena¹⁷⁰, però no fou així i en fou el president. Més tard el *Comité* passà a dependre de l'*Institut National* que substituïa l'*Académie*. El 1802 n'eren membres Lagrange, Laplace, Legendre i Monge. El *Comité* finalitzà la seva tasca el 1799 i en ell, amb el pas dels anys, hi havien participat cinc dels sis matemàtics de la Revolució Francesa¹⁷¹.

En resum, doncs, podem afirmar que les matemàtiques estigueren presents a la ideologia de la *Il·lustració* que, en definitiva, és la ideologia de la Revolució Francesa i també que estigueren presents com una de les tasques científiques més fructíferes d'aquell moment històric, col·locant França i les matemàtiques que feien a França els matemàtics francesos de la Revolució en un cim a partir del qual per poder anar més enlaire caldria encetar un nou single; però, a més, aquests matemàtics prengueren part, amb més o menys intensitat, en la Revolució en ella mateixa i/o en algunes de les obres que la Revolució, i després l'Imperi, portaren a terme.

Corbera del Llobregat, 15 de juliol – 2 de setembre de 1989

fixant un valor estàndard de g , o bé agafant com valor de g al valor de la gravetat en algun punt concret de la Terra, per exemple el valor de la gravetat a París.

¹⁶⁷ També, en aquesta ocasió, era necessari triar un meridià, com meridià estàndard.

¹⁶⁸ Del meridià mesurat per Legendre. Avui dia sabem que les medicions de Legendre eren força grolleres.

¹⁶⁹ Lavoisier fou una víctima més de la Revolució Francesa. Quan Lagrange conegué la notícia de l'execució de Lavoisier digué: "Només ha fet falta un instant per prendre-li la vida, però per produir-la calen més de cent anys".

¹⁷⁰ Lagrange fou expressament exclòs d'aquesta llei.

¹⁷¹ L'únic que mai no hi estigué vinculat fou el jove Carnot.

Bibliografia*

Abel, Niels Henrik

- [1827] "Recherches sur les fonctions elliptiques". *Journ. für Math.*, 2, 101-181. *Œuvres*, 263-345.
- [1828] "Recherches sur les fonctions elliptiques". *Journ. für Math.*, 3, 160-190. *Œuvres*, 346-388.
- [1841] "Mémoires sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes". *Mém. Acad. Sci.*, 1826. Paris. (Publicat a *Mém. des savants étrangers*, 7, 1841, 176-264.) *Œuvres*, 145-211.
- [1881] *Œuvres*, 2 vols., ed. Sylow i Lie. Oslo.

ApoLloni

- [-225] *Les Côniqes*. Veieu Vera, F. [1970], vol. II, 317-454.

Arendt, Hannah

- [1965] *On Revolution*. The Viking Press. New York.

Arquímedes

- [-250] *Sobre l'espíral*. Veieu Vera, F. [1970], vol. II, 147-183.

Bell, Eric Temple

- [1940] *Development of Mathematics*. McGraw Hill. New York.
Hi ha traducció castellana de R. Ortíz: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México, 1949.

Bermudo, José Manuel

- [1989] "El ciudadano del 89". *Inauguració del curs Acadèmic 89-90*. Publicacions de la Universitat de Barcelona. Barcelona.

Bernoulli, Daniel

- [1755] "Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie", *Mém. Acad. Roy. Sci. Berlin* 9 (1753, publicat 1755), 147-172.

Bernoulli, Jakob

- [1691] *Acta Eroditorum*.
- [1694a] *Acta Eroditorum. Opera*, II, 576-600.
- [1694b] "Constructio curvæ accessus et recessus æqualibus". *Acta Eroditorum. Opera*, II, 608-612.
- [1744] *Opera*, 2 vols. Reimprès per Birkhäuser, 1968.

Bernoulli, Johann

- [1679] *Acta Eroditorum*.
- [1691-92] "Lectiones mathematicæ de methodo integratium, aliique conscriptæ in usum Ill. Marchonis Hospitalii cum auctor Parisiis ageret annis 1691 et 1692". *Opera Omnia*, III, 305-555.

* La paginació fa referència a l'edició citada de la traducció castellana, quan aquesta existeix; altrament fa referència a l'edició de l'original citada a la bibliografia.

- [1698] "Theoremata universale rectificatione linearum curvarum inserviens". *Acta Eroditorum. Opera Omnia*, I, 249–253.
- [1702] "Solutionata Problematis Calculi Integrales". *Opera Omnia*, I, 393–397.
- [1732] "Méditations sur vibrations avec petits poids à distances egales". *Com. Acad. Scie. Petrog.*, 3 (1728, publicat en 1732.), 13–28. *Opera Omnia*, III, 198–210.
- [1742] *Opera Omnia*, 4 vols. Ed. H. Cramer. Lausanne i Gèneve. Reimprès per Georg Olms, 1968.
- Bernoulli, Nicholas**
[1719] *Acta Eroditorum*.
- Bezout, Etienne**
[1764–69] *Cours de mathématique*. Paris.
- Bos, H.J.M**
[1981] "On the representation of Curves in Descartes "Géométrie" ". *Archives of History of Exact Sciences*, 24, 295–338.
- Bottazzini, Umberto**
[1981] *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag. New York.
- Boyer, Carl B.**
[1956] *History of Analytic Geometry*. Publicat per *Scripta Mathematica*. New York.
[1960] "Mathematicians of the French Revolution". *Scripta Mathematica*, 25, 11–31.
[1968] *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons. New York.
Hi ha traducció castellana de Mariano Martínez: *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad. Madrid, 1986.
- Boyle, Robert**
[1985] *Works*, vol. IV. London.
- Brunet, P.**
[1951–53] "La vie et l'œuvre de Clairaut". *Revue d'Histoire des Sciences et leurs Applications*, 4 (1951), 13–40; 109–153; 5 (1952), 334–349; 6 (1953), 1–17.
- Burton, David M.**
[1985] *The History of Mathematics*. Allyn and Bacon, Inc. Boston.
Hi ha traducció castellana de Josep Pla: *La Historia de las Matemáticas*. Editorial Reverté. Barcelona. [En preparació.]
- Carnot, Lazare-Nicolas-Marguerite**
[1783] *Essai sur les machines en général*. Paris.
[1797] *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*. Paris.
[1801] *De la correlation des figures en géometrie*. Paris.
- Cassirer, E.**
[1951] *Philosophy of the Enlightenment*. Traducció anglesa de Fritz C.A. Koelln i James P. Pettegrove, Boston.
Hi ha traducció castellana: *La filosofía de la Ilustración*. México, FCE, 1943.
- Cauchy, Augustin-Louis**
[1826] *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*. Paris. *Œuvres complètes*, (2)5.
[1882–] *Œuvres complètes*, 27 vol. Gauthier-Villars. Paris, 1882–1974.

Cerdà, Joan

- [1984] *El Desenvolupament de les Matemàtiques al Segle XIX*, 210–228. Inst. d'Estudis Catalans. Barcelona.

Clairaut, Alexis-Claude

- [1731] "Recherches sur les courbes à double courbure". Paris.
[1735] *Histoire de l'Académie des Sciences, Paris*, (1733, publicat en 1735), 186–194.

Cohen, I. Bernard

- [1976] "The eighteenth-century origins of the concept of scientific revolution", *Journal of the History of Ideas*, 37, 257–288.
[1985] *Revolution in Science*. Harvard University Press. Harvard.
Hi ha traducció castellana de Daniel Zadunaisky: *Revolución en ciencia*. Gedisa Editorial. Barcelona, 1989.

Collette, Jean Paul

- [1979] *Histoire des mathématiques*, 2. Éditions du Renouveau Pédagogique, Montréal.
Hi ha traducció castellana d'Alfonso Casal: *Historia de las matemáticas*, II. Siglo XXI de España Editores, S.A. Madrid, 1985.

Condorcet, Marie Jean Antoine Caritat de

- [1765] *Essai sur le calcul integral*. Paris.
[1785] *Essai sur l'application de l'analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité de voix*. Paris.
[1847–49] *Œuvres*, 12 vols. Paris.

Coolidge, Julian Lowell

- [1940] *A History of geometrical methods*. Clarendon. Oxford. Reeditat a Dover, 1963. New York.
[1948] "The Beginnings of analytic geometry in three dimensions". *American Mathematical Monthly*, 45, 78–86.
[1963] *The Mathematics of Great Amateurs*. Dover Publications Inc. New York.

Copleston, Frederick

- [1973] *A History of Philosophy*, vol VI. *Wolff to Kant*. Burns and Oates Ltd. London.
Hi ha traducció castellana de Manuel Sacristán: *Historia de la Filosofía*, vol. VI. *De Wolff a Kant*. Editorial Ariel. Barcelona, 1973.

d'Alembert, Jean le Rond

- [1747a] "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration". *Mém. Acad. Roy. Berlin*, 3 (1747), 214–219.
[1747b] "Suite des recherches". *Ibid.*, 220–249.
[1751–80] *Veiu Diderot, Denis i d'Alembert, Jean le Rond*.

Dedron, Pierre i Itard, Jean

- [1959] *Mathématiques et Mathématiciens*. Editions Maquard. Paris.

Descartes, René

- [1637] *Discours de la Méthode, la dioptrique, les météors, la géométrie*. Leyden.
Hi ha traducció castellana de Guillermo Quintás: *Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría*. Ediciones Alfaguara. Madrid, 1981.

Diderot, Denis i d'Alembert, Jean le Rond

- [1751–80] *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. Chez Briasson, David l'aîné, Le Breton, Durand, Paris.

Dieudonné, Jean

- [1976] *Abrégé d'histoire des Mathématiques, 1700–1900*, 2 vols. Hermann. Paris.
[1978] *Abrégé d'histoire des Mathématiques, 1700–1900*. Hermann. Paris.

Dou, Alberto

- [1984] "Leonhard Euler (1707–1783)". *But. Soc. Cat. de Ciències*, II, 4, 11–28.

Dupin, Charles

- [1813] *Développments de géométrie*. Paris.
[1822] *Applications de géométrie et de mécanique*. Paris.

Eisenstadt, S.N.

- [1978] *Revolution and the transformation of societies: a comparative study of civilizations*. The Free Press. Londres.

Edwards Jr, C.H.

- [1980] *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag. New York.

Euclides

- [–300] *Elis Elements*. Veieu Vera, F. [1970], vol. I, 702–980.

Euler, Leonhard

- [1732] "De Linea Brevissima in superficie quacunque". *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 3 (1728, publicat el 1732), 110–124. *Opera*, (1), 25, 1–12.
[1740] "De infinitis curvis eiusdem generis, seu methodus inveniendi æquationes pro infinitis curvis eiusdem generis". *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7 (1734–35, publicat en 1740), 174–193. St. Petesbourg. *Opera*, (1)22, 36–56.
[1748] *Introductio in Analysim Infinitorum*, 2vols. Lausanne. *Opera*, (1)8–9.
[1749] "De vibratione cordarum exercitatio". *Nova Acta Eroditorum*, 512–527. *Opera*, (2)10, 50–62.
[1750] "Sur la vibration des cordes". *Hist. Acad. Roy. Brelin*, 4 (1748, publicat en 1750), 69–85. *Opera*, (2)10, 63–77.
[1752] "Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration". *Mém. Acad. Roy. Berlin*, 6 (1750, publicat en 1752), 355–360. *Opera*, (2)10, 78–63.
[1755a] "Rémarques sur les mémoires précédents de M. Bernoulli". *Mém. Acad. Sci. Berlin*, 9 (1753, publicat en 1755), 196–222. *Opera*, (2)10, 253–254.
[1755b] *Institutiones calculis differentialis*. St. Petesbourg. *Opera*, (1)10.
[1761a] "De intrepretationes æquationes differentialis". *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, (1756–57, publicat en 1761), 37–57. *Opera*, (1)20, 153–200.
[1761b] "Observationes de comparatione arcuum curvarum ellipticarum". *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, (1756–57, publicat en 1761), 58–84. *Opera*, (1)20, 80–107.
[1766] "Eclaircissement sur le mouvement des cordes vibrantes". *Miscell. Taurin.*, 3(1762–65, publicat en 1766), cl. math., 1–26. *Opera*, (2)10, 377–396.
[1767] "Recherches sur la courbure des surfaces". *Mém. Acad. Berlin*. 16 (1760, publicat el 1767), 119–143. *Opera*, (1)28, 1–22.
[1767] "Sur le mouvement d'une corde, qui au commencement n'a été ébranlé que dans une partie". *Mém. Acad. Sci. Brelin*, (1765, publicat en 1767), 307–334. *Opera*, (2)10, 426–450.
[1768–70] *Institutiones calculi integralis*, 3 vols. St Petesbourg. *Opera*, (1), 11–13.

- [1774] *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti*. Lausanne i Geneve. *Opera*, (1)24.
- [1775] "De solidis quorum superficiem in planum explicare licet". *Novi Com. Acad. Scie. Petrop.*, 19 (1772, publicat el 1775), 340–370. *Opera*, (2)11, 158–179.
- [1911–] *Opera Omnia*. Ed. per Rudio i d'altres. B.G. Teubner. Leipzig i Laussanne.
- Fangano, Giulio Carlo de'Toschi di**
- [1714] *Giornali dei Litterati d'Italia*, 19 i sgs.
- [1716] "Teoremata de cui si deduce una nuova misura degli archi elittici, iperbolici e cicloidali". *Giornali dei Litterati d'Italia*, 26. *Opere*, II, 287–292.
- [1718] "Metodo per misurare la lemniscata". *Giornali dei Litterati d'Italia*, 29. *Opere*, II, 293–313.
- [1750] *Produzione mathematiche*. Pesaro.
- [1911] *Opere mathematiche*, 2 vols., Albrighi, Segati & Co. Milano, Roma. Napoli.
- Fontenelle, Bernard Le Bovier de**
- [1699] *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris*. Paris.
- Fourier, Joseph**
- [1822] *Théorie Analitique de la chaleur*. Didot. Paris.
- Galilei, Galileo**
- [1623] *Il Saggiatore*.
Hi ha traducció castellana de José Manuel Revuelta: *El ensayador*. SARPE. Madrid, 1984.
- [1638] *Discorsi e Demonstratione Mathematiche intorno à due Nuove Scienze attenenti alla Mecanica e à Movimenti Locali*. Leiden.
Hi ha traducció castellana de Javier Sábada: *Discursos y demostraciones en torno a dos ciencias nuevas*. Editora Nacional. Madrid, 1981. 1988.
- Gauss, Karl-Friedrich**
- [1801] *Disquisitiones Arithmeticae*.
Hi ha traducció anglesa d'A.A. Clarke. Yale University Press. Yale, 1965.
Hi ha traducció francesa de Pouillet Delisle, Paris, 1806. Reedició a Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris, 1963.
- Grattan-Guinness, I.**
- [1970] *The Development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*. Cambridge University Press. Cambridge. Massachussets.
- [1976] *From the Calculus to Set Theory, 1630–1910. An Introductory History*. Durckworth. London.
Hi ha traducció castellana de Mariano Martínez: *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial. Madrid, 1984.
- Gregory, James**
- [1667] *Vera Circuli et Hiperbolæ Quadratura*. Padova.
- Hankins, Thomas L.**
- [1985] *Science and the Enlightenment*. Cambridge University Press. Cambridge.
Hi ha traducció castellana d'Alfredo Mersa: *Ciencia e Ilustración*. Siglo XXI de España Editores, S.A. Madrid, 1988.

Heath, Thomas L.

- [1921] *A History of Greek Mathematics*, vol I. Oxford University Press. Oxford. (Reimprès a Dover en 1981.)
[1931] *A Manual of Greek Mathematics*. Oxford University Press. Oxford. (Reimprès a Dover en 1963.)

Hermann, Jakob

- [1732–33] “De superficiis ad æquationes locales revocatis”. *Com. Acad. Scie. Petrop.*, 6, 36–37.

L'Hôpital, Guillaume Antoine François de

- [1696] *Analyse des infiniment petits*. Paris. [Hi ha una reedició de 1988. Paris.]
[1707] *Traité analytique des sections coniques*. Paris.

Hull, L.W.H.

- [1959] *History and Philosophy of science*. Longmans, Green & Co. Ltd. London.
Hi ha traducció castellana de Manuel Sacristán: *Historia y filosofía de la ciencia*. Ediciones Ariel. Barcelona, 1961.

Huygens, Christian

- [1673] *Horologium Oscillatorium*. François Muguet. Paris.
Hi ha traducció francesa de Jean Peyroux: *L'Horloge oscillante*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris.

Itard, Jean

- [1984] *Essais d'histoire des mathématiques*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris.

Jacobi, Carl Gustav Jacob

- [1829] *Fundamenta Nova Theoriæ Functionum Ellipticarum*. Werke, 1, 49–239.
[1841] “De Determinantibus Functionalibus”. *Crelle Journ. für die Reine und Angew. Mathem.*, 22, 319.
[1881–91] *Gesammelte Werke*, 7 vols. G. Reimer. Berlin.

Kepler, Johann

- [1609] *Astronomia Nova*.
[1619] *The Harmony of the World*.
[1937] *Gesammelte Werke*. Ed. Walther von Dick i Max Caspar. C.H. Beck, München.

Klein, Felix

- [1926–27] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematic im 19. Jahrhundert*, 2 vols. Berlin.
Hi ha traducció anglesa del primer volum: *Development of Mathematics in the 19th century*. Math. Sci. Press. New York.

Kline, Morris

- [1972] *Mathematical Thought from to Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. New York.
[1980] *Mathematics. The Loss of Certainty*. Oxford University Press. New York.
Hi ha traducció castellana d'Andrés Ruíz: *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI de España Editores, S.A. Madrid, 1985.

Lacroix, Sylvester François

- [1806] *Traité du calcul différentiel*. Paris.

Lagrange, Joseph-Louis

- [1759] "Recherches sur la nature et la propagation du son". *Miscellanea Turinensia. Œuvres*, I, i-x; 1-112.
- [1766] "Sur l'intégration de quelques équations différentielles". *Miscellanea Turinensia, Œuvres*, IV, 5-33.
- [1797] *Mécanique Analytique*. Paris. *Œuvres*, IX.
- [1867-92] *Œuvres*, 14 volumes. Paris.

Lancret, Michel-Ange

- [1806] "Mémoire sur les courbes à double courbure". *Mém. présentés à l'Inst. par divers Savants*, I, 416-454.

Laplace, Pierre Simon

- [1796] *Exposition du système du monde*. Paris.
- [1798-1825] *Traité de Mécanique céleste*. Paris.
- [1812] *Théorie analytique des probabilités*. Paris.
- [1825-32] *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris.
- [1878-] *Œuvres complètes*, 14 vols. Gauthier Villars. Paris, 1878-1912.

Legendre, Adrien-Marie

- [1786] "Mémoires sur les Integrations par arcs, et sur la comparaison de ces arcs". *Mém. de l'Acad. Sci.*, 1786, 616-643; 644-683.
- [1793] *Mémoires sur les transcendentes elliptiques*. Paris.
- [1794] *Elements de géométrie*. Paris.
- [1798] *Essais sur la théorie des nombres*. Paris.
- [1811-17] *Exercices de Calcul Intégral*, 3 vols. Paris.
- [1825-28] *Traité des fonctions elliptiques*, 3 vols. Paris.
- [1830] *Théorie des nombres*. Paris.

Leibniz, Gottfried Wilhelm

- [1684] "Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus". *Acta Eroditorum*. Hi ha traducció castellana de Javier de Lorenzo: *Análisis Infinitesimal*, 3-15. Editorial Tecnos, S.A. Madrid, 1987.
- [1686] "De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum". *Acta Eroditorum*. Hi ha traducció castellana de Javier de Lorenzo: *Análisis Infinitesimal*, 16-29. Editorial Tecnos, S.A. Madrid, 1987.
- [1848-63] *Mathematische Schriften*. Ed. C.I. Gerhardt, 7 vols., Ascher-Schmidt. Reimprès per Georg Olms, 1962.
- [1983] *Oeuvre concernant le calcul infinitésimal*. Traducció francesa de Jean Peyroux. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris.

Liouville, Joseph

- [1833] "Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique". *Journ. de l'École Polytechn.*, 14, 22, 124-148.
- [1833] "Seconde mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique". *Journ. de l'École Polytechn.*, 14, 22, 149-193.
- [1880] "Leçons sur les fonctions doublement périodiques". *Jour. für die Reine und angew. Math.*, 88, 277-310.

Mason, Stephen F.

- [1953] *Main currents of scientific thought: A History of Sciences*. Henry Schuman. New York.
Hi ha traducció castellana de Carlos Solís: *Historia de las ciencias*, vol. 3: *La Ciencia del Siglo XVIII*. Alianza Editorial Madrid, 1985.

McLaurin, Colin

- [1742] *Treatise of Fluxions*, 2 vols. Edimburg.

Mesniet, Jean Baptiste Marie

- [1785] "Mémoire sur la corbure des surfaces". *Mém. de Mathém. et Phys.*, 10, 511–550.

Monge, Gaspar

- [1785] "Mémoires sur les développés, les rayons de courbure, et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure". *Mém. de l'Acad. des Sciences*, 10, (1771, publicat el 1785), 511–550.
[1795] *Feuilles d'analyse appliqués à la Géométrie à l'usage de l'École Polytechnique*. Paris.
[1799] *Géométrie Descriptive*. Paris
[1812] *Aplications de l'algèbre à la géométrie; traité des surfaces de second degré*, escrita per J.-N. P. Hachette el 1850. Paris.

Newton, Isaac

- [1687] *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.
Hi ha traducció castellana d'Antonio Escotado: *Principios matemáticos de la Filosofía natural*. Editorial Tecnos, S.A. Madrid, 1987.
[1707] *Opticks*. London.
[1711] *De Methodis Serierum et Fluxionum*, escrit en 1676. [Veieu Whiteside, D.T. [1967–81], vol. III, 32–353.]
Hi ha traducció francesa de M. Buffon: *La méthode des fluxions et des suites infinies*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris, 1966.
[1736] *Geometria Analytica*. Editada a *Opera quæ exstant Omnia*.
[1779–85] *Opera quæ exstant Omnia*. Editada per Samuel Horsley. Reimprès a Stuttgart, 1964.

Nielsen, Niels

- [1929] *Géomètres français sous la révolution*. Levin & Munksgaard. Copenhagen.

Parent, Antoine

- [1713] *Essais et recherches de mathématiques et physique*, 3 vols. Paris.

Pla, Josep

- [1989a] "L'elena de les matemàtiques i el principi de la mínima acció". *Quaderns*, 43, 61–71. Abril. Barcelona.
[1989b] "El "Mètode" a la "Geometria" de Descartes". *Actas del Tercer Congreso de Lenguajes Naturales y Formales*, 821–863. Sitges.
[1989c] "Les sèries en Newton". *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 4, 9–20. Setembre 1989. I.E.C., Barcelona.

Rashed, Roshdi

- [1988] *Sciences à l'époque de la Revolution Française*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Paris.

Ribnikov, Konstantín

- [1974] *HCTOPHR MATEMATIKH*. Moscou.

Hi ha traducció castellana de Concepción Valdés: *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir. Moscou, 1987.

Struik, Dirk J.

[1969] *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts.

Sylvester, François

[1904-12] *Collected Mathematical Papers*. Cambridge.

Taton, René

[1957-61] *La science moderne (De 1450 à 1800)*. Press Universitaire de France. Paris.

Hi ha traducció castellana de Manuel Sacristán: *Historia general de las ciencias*, vol. 6: *El siglo XVIII. I. Las ciencias técnicas. II. Las ciencias físicas*. Ediciones Orbis. Barcelona, 1988.

Taylor, Brook

[1713] "De motu nervi tensi". *Philosophical Transactions*, 28 (1713),

[1715] *Methodus incrementorum directa et inversa*. London.

Thomas, Ivor

[1939] *Selections illustrating the history of Greek Mathematics*. Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts.

Turnbull, H.W. i d'altres (eds.)

[1959-78] *The Correspondence of Isaac Newton*, 7 vols. Cambridge University Press. Cambridge.

Voltaire

[1756] *Histoire de Carlemagne à la mort de Louis XIII*. Paris.

Vera, Francisco

[1970] *Los científicos griegos*. Aguilar S.A. de Editores. Madrid.

Whiteside, D.T.

[1967-81] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, 8 vols. Cambridge University Press. Cambridge.

Willey, Basil

[1940] *The eighteenth century background: studies on the ideas of nature in the thought of the period*. New York.

Wollen, G.N.

[1968] "McLaurin and Taylor and their series". *The Mathematics Teacher*, 61, 310-312.

Youschkevitch, A. P.

[1976] "The concept of function up to the middle of the 19th century". *Archive History of Exact Sciences*, 16, 37-85.

Zeuten, H.G.

[1985] *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*. Teubner. Leipzig.



