UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

MESURES DE CARLESON PER A ESPAIS DE BERGMAN EN EL DISC

Autor: Gerard Ribot Albert

Director: Dra. Carme Cascante Canut
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2019

Abstract

The main theme of this project is to study the Carleson measures in the Bergman spaces in the unit disk. For this reason, first of all, we will introduce and we will prove the properties of these spaces, we will compute the Bergman Kernel and we will see the main properties of bounded Bergman projection. And finally, we will give a characterization of Carleson measures in theses spaces on the disk and we will finish with a non-trivial example of these.

Resum

El tema principal d'aquest treball és estudiar les mesures de Carleson en els espais de Bergman en el disc unitat. Per això, primer de tot, introduirem i demostrarem les propietats d'aquests espais, calcularem el nucli de Bergman i veurem les principals propietats d'acotació de la projecció de Bergman. I finalment, donarem una caracterització de les mesures de Carleson en aquests espais en el disc, i acabarem amb un exemple no trivial d'aquestes.

2010 Mathematics Subject Classification. 30C40, 30H05, 30H20, 30H30, 46E30

Agraïments

A la meva família i amics agrair tot el recolzament i suport que m'han ofert durant aquesta etapa acadèmica. Agrair a la meva tutora tota l'ajuda i paciència mostrada en tot moment en la elaboració d'aquest treball. A tots ells, moltes gràcies.

Índex

1 Introducció

Els **espais de Bergman** $A^p(\Omega)$, on Ω és un obert del pla i $0 < p < +\infty$, es defineixen com els espais de funcions holomorfes f en Ω que compleixen

$$\|f\|_{A^p(\Omega)}^p := \int_\Omega |f(z)|^p dA(z) < +\infty,$$

on dA és la mesura d'àrea a Ω.

El primer treball on s'estudia de forma sistemàtica l'espai de Bergman $A^2(\Omega)$ de funcions holomorfes a quadrat integrable en un domini Ω és el llibre de Stefan Bergman (1895-1977) *The kernel funcion and conformal mapping* (veure [1]).

Stefan Bergman fou un matemàtic polonès que va realitzar el seu doctorat sobre anàlisi de Fourier a la Universitat de Berlin. La seva recerca es va centrar en l'anàlisi complexa en diverses variables, amb espacial èmfasis en la projecció de Bergman i el nucli de Bergman. El 1939 va emigrar als Estats Units, sent professor a la Universitat de Stanford del 1952 fins el dia de la seva jubilació, el 1972. Des de la seva mort, la Societat Americana de Matemàtiques (AMS) ha establert el premi "Stefan Bergman Prize"que reconeix la tasca de matemàtics treballant en la teoria del nucli de Bergman i les seves aplicacions en anàlisi real i complexa.

Aquest treball té com a objectiu l'estudi dels espais de Bergman i de les mesures de Carleson pels espais $A^p(\mathbb{D})$, on $\mathbb{D}$ és el disc unitat.

Si $X \subset H(\mathbb{D})$ és un espai de Banach de funcions holomorfes al disc, una mesura de Borel finita i no negativa μ sobre $\mathbb{D}$ és una **mesura de Carleson** per a X, si existeix una constant $C > 0$ complint que, per a cada $f \in X$,

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) \leqslant C\|f\|_X^p.$$

Les mesures de Carleson per als espais de Hardy $X = H^p(\mathbb{D})$, on

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty \right\},$$

varen ser introduïdes per L. Carleson. Hi ha una literatura molt extensa en l'estudi de caracteritzacions de les mesures de Carleson per a diferents espais de funcions holomorfes.

Veurem que les funcions de l'espai de Bergman compleixen una estimació punutal que, en particular, permet provar que l'operador d'avaluació puntual $L_z(f) = f(z)$ és un funcional acotat en l'espai $A^2(\Omega)$. El Teorema de representació de Riesz assegura l'existència d'una única funció $k_z \in A^2(\Omega)$ complint que, per a tota $f \in A^2(\Omega)$,

$$f(z) = \int_\Omega f(\zeta)\overline{k_z(\zeta)} dA(\zeta).$$

La funció $K(z,\zeta) = \overline{k_z(\zeta)}$ s'anomena nucli de Bergman. Donat que $A^2(\Omega)$ és un subespai tancat de $L^2(\Omega)$, podem considerar la projecció ortogonal $P : L^2(\Omega) \longrightarrow A^2(\Omega)$, que s'anomena projecció de Bergman i que complex que, per a tota $f \in L^2(\Omega)$,

$$Pf(z) = \int_\Omega f(\zeta)K(z,\zeta)dA(\zeta).$$

El següent objectiu que ens plantegem és estudiar l'acotació de la projecció de Bergman de $L^p(\mathbb{D})$ en $A^p(\mathbb{D})$, si $1 < p < +\infty$. Demostrarem que

Teorema. *Si $1 < p < +\infty$, la projecció de Bergman és acotada de $L^p(\mathbb{D})$ en $A^p(\mathbb{D})$.*

Una conseqüència important d'aquest teorema és que ens permet deduir la dualitat dels espais $A^p(\mathbb{D})$ a partir de la corresponent dualitat dels espais $L^p(\mathbb{D})$. Així, provem que si $1 < p < +\infty$ i q és l'exponent conjugat de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), llavors el dual de l'espai $A^p(\mathbb{D})$ es pot identificar amb $A^q(\mathbb{D})$.

Una pregunta natural que es planteja a la vista del resultat sobre l'acotació de P és si aquest és acotat quan $p = 1$. Veurem que la resposta és negativa i provarem que P envia acotadament L^∞ en l'espai de Bloch $\mathcal{B}$ de funcions holomorfes f a $\mathbb{D}$ complint

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)|f'(z)| < +\infty.$$

A continuació, estudiarem les mesures de Carleson per a $A^p(\mathbb{D})$. Provarem el següent resultat:

Teorema. *Sigui $1 < p < +\infty$ i sigui μ una mesura de Borel finita i no negativa sobre $\mathbb{D}$. Llavors, són equivalents:*

(i) La mesura μ és una mesura de Carleson per a $A^p(\mathbb{D})$.

(ii) Existeix $C > 0$ constant tal que $\mu(R(I)) \leqslant C|I|^2$, per a tot arc $I \subset \mathbb{T}$.

(iii) Existeix $\epsilon > 0$ tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^\epsilon}{|1 - z\overline{w}|^{2+\epsilon}} d\mu(w) < +\infty.$$

On $R(I)$ són les finestres de Carleson d'un arc obert I de $\mathbb{T}$,

$$R(I) = \left\{re^{i\theta} : e^{i\theta} \in I, 1 - |I| \leqslant |r| < 1\right\},$$

i anotem per $|I|$ la longitud normalitzada de I. Finalment, donarem un exemple no trivial d'una mesura de Carleson.

El treball s'estructura com segueix: en la Secció 2, enunciem els resultats d'anàlisi real, funcional i complexa que utilitzarem en les demostracions dels resultats desenvolupats. En la Secció 3, introduïm els espais $A^p(\Omega)$, estudiem les propietats principals i les propietats dels nucli de Bergman. Demostrarem, també, l'acotació de la projecció Bergman de $L^p(\mathbb{D})$ en $A^p(\mathbb{D})$, $1 < p < +\infty$, i estudiarem el cas $p = \infty$.
I en la secció 4, estudiarem les mesures de Carleson, introduirem les regions dels disc que permeten donar caracteritzacions equivalents a l'obtinguda en termes de finestres de Carleson, que seran utilitzades per provar les diferents implicacions del teorema. Acabarem la secció, construint un exemple no trivial de mesura de Carleson.

2 Preliminars

En aquesta secció definirem i enunciarem resultats d'anàlisi real, complexa i funcional que utilitzarem al llarg del treball.

Espais mesurables

Definició 2.1. Una col·lecció $\mathcal{M}$ de subconjunts d'un conjunt X es diu que és una $\sigma - \grave{a}lgebra$ en X si $\mathcal{M}$ té les següents propietats:

(i) $X \in \mathcal{M}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{M}$, llavors $A^c \in \mathcal{M}$, on A^c és el complement d'A respecte a X.

(iii) Si $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ i si $A_n \in \mathcal{M}$ per $n = 1, 2, 3, ...$, aleshores $A \in \mathcal{M}$.

Definició 2.2. Si $\mathcal{M}$ és una $\sigma - \grave{a}lgebra$ en X, llavors es diu que X és un *espai mesurable* i als elements de $\mathcal{M}$ se'ls anomena *conjunts mesurables* en X.

Definició 2.3. Sigui X un espai topològic, la $\sigma - \grave{a}lgebra$ més petita que conté els oberts en la $\sigma-$àlgebra dels Boreals de X i, en aquest cas, tota funció contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és *mesurable de Borel.*

Definició 2.4. Si X és un un espai mesurable, Y és un espai topològic i f és una aplicació de X a Y, es diu que f és *mesurable* si $f^{-1}(V)$ és un conjunt mesurable en X per a tot conjunt obert V en Y.

Proposició 2.5. *Sigui $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una aplicació mesurable tal que $f \geqslant 0$. Llavors, si $\int_E f = 0$, aleshores $|\{x \in E : f(x) \neq 0\}| = 0$, és a dir, $f \equiv 0$ gairebé per a tot (g.p.t.) $x \in E$.*

Definició 2.6. S'anomena *mesura no negativa* a una funció μ, definida en una $\sigma - \grave{a}lgebra$ $\mathcal{M}$ amb valors en $[0, +\infty]$ i que és numerablement additiva, és a dir, si $\{A_i\}$ és una col·lecció numerable disjunta d'elements de $\mathcal{M}$, llavors

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

El parell (X, μ) on X és un espai mesurable i μ una mesura no negativa en X ens dóna un espai mesurable.

Integració de funcions positives

Lema 2.7 (Lema de Fatou)**.** *Siguin (X, μ) un espai mesurable i $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$, per $n \geqslant 1$, funcions mesurables. Llavors:*

$$\int_X \left(\lim_{n \to +\infty} \inf f_n\right) d\mu \leqslant \lim_{n \to +\infty} \inf \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 2.8 (de la convergència monòtona). *Siguin* (X,μ) *un espai mesurable,* $E \subset X$ *mesurable i* $f_k : E \longrightarrow [0,+\infty]$*,* $k \in \mathbb{N}$*, una successió creixent de funcions mesurables, és a dir:*

$$0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f_k \leqslant f_{k+1} \leqslant \ldots$$

Aleshores, existeix el límit puntual de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$*,* $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ *g.p.t.* $x \in E$*, i*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu.$$

Teorema 2.9 (de la convergència dominada). *Sigui* (X,μ) *un espai mesurable. Per a* $E \subset X$ *mesurable,* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *successió de funcions mesurables amb*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) := f(x), \ \ g.p.t. \ x \in E,$$

i tal que existeix $0 \leqslant g \in L^1(E)$ *amb*

$$|f_k(x)| \leqslant g(x), \qquad g.p.t. \ x \in E, per \ a \ tot \ k \in \mathbb{N},$$

llavors es compleix:

$$f_k, f \in L^1(E), k \in \mathbb{N} \quad i \quad \int_E f d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_E f_k d\mu.$$

Teorema 2.10 (de Fubini). *Siguin* B, C *conjunts mesurables de* $\mathbb{R}$*,* f *mesurable i* $dA(x,y)$ *la mesura de Lebesgue a* $\mathbb{R}^n$*. Si es compleix que*

$$\int_{B\times C} |f(x,y)|\, dA(x,y) < +\infty$$

aleshores,

$$\int_{B\times C} f(x,y) dA(x,y) = \int_B \left(\int_C f(x,y) dy \right) dx = \int_C \left(\int_B f(x,y) dx \right) dy.$$

Espais L^p

Definició 2.11. Es diu que una funció real φ definida en un segment (a,b), on $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, és *convexa* si satisfà la desigualtat:

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y),$$

sempre i quan $a < x < b$, $a < y < b$ i $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Es compleix que si φ és convexa a (a,b), llavors φ és contínua en (a,b).

Observació 2.12. Si φ és una funció convexa. Llavors,

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right).$$

Teorema 2.13 (desigualtat de Jensen). *Sigui* μ *una mesura no negativa sobre una* $\sigma-$*àlgebra en un conjunt* Ω *tal que* $\mu(\Omega) = 1$*.*
Sigui f *una funció real de* $L^1(\Omega)$*. Si* $a < f(x) < b$*, per a* $x \in \Omega$*, i* φ *és convexa en* (a,b)*, llavors:*

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leqslant \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu.$$

Definició 2.14. Si $p, q > 1$ tals que $p + q = pq$ o, equivalentment, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, llavors es diu que p i q són un *parell d'exponents conjugats.*

Teorema 2.15. *Siguin p i q un parell d'exponents conjugats, on $1 < p < +\infty$. Sigui X un espai mesurable, amb mesura μ. Siguin f i g funcions mesurables en X amb imatge a $[0, +\infty]$. Llavors,*

$$\int_X fg d\mu \leqslant \left\{ \int_X f^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_X g^q d\mu \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

*Aquesta desigualtat s'anomena **desigualtat de Hölder**. En particular, si $p = q = 2$ es coneix com la **desigualtat de Schwarz**.*

Definició 2.16. Siguin (X, μ) un espai mesurable i $\Omega \subset X$ mesurable. Siguin $0 < p < +\infty$, f una funció complexa mesurable en Ω i

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left\{ \int_\Omega |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Es defineix $L^p(\mu)$ com el conjunt de totes les f tals que:

$$\|f\|_{L^p(\mu)} < +\infty.$$

Anomenarem $\|f\|_{L^p(\mu)}$ com la norma de f en $L^p(\mu)$.

Teorema 2.17. *Sigui $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ i siguin $f, g \in L^p(\mu)$. Llavors, $f + g \in L^p(\mu)$, i*

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)}.$$

Teorema 2.18. *$L^p(\mu)$ és un espai complet, per a tot $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ i tota mesura positiva μ.*

Teorema 2.19. *Si $1 \leqslant p < +\infty$ i $(f_n)_n$ és una successió de Cauchy en $L^p(\mu)$, amb límit f, llavors $(f_n)_n$ té una parcial convergent puntualment gairebé per tot punt a $f(x)$.*

Proposició 2.20. *Si $\mu(\Omega) < +\infty$, llavors per $p < q$ tenim:*

$$L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu).$$

Espais de Hilbert

Definició 2.21. Sigui H un espai complet, és a dir, si tota successió de Cauchy convergeix en H. Sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ un *producte escalar*:

i) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, on $x \in H$.

ii) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$, on $x, y \in H$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, on $x, y \in H$.

Aleshores, $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$, per $x \in H$, és una mesura en H i si la mesura és completa, es diu que H és un *espai de Hilbert.*

Exemple 2.22. Per a $p = 2$, $L^2(\Omega)$ és un espai de Hilbert amb el següent producte escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \overline{g} dA(\Omega).$$

Teorema 2.23. *Sigui M un subespai tancat d'un espai de Hilbert H. Llavors, tot $x \in H$ té una única descomposició:*

$$x = Px + Qx,$$

on $Px \in M$ i $Qx \in M^{\perp} = \{w : \langle x, w\rangle = 0, x \in M\}$.

P i Q s'anomenen les *projeccions ortogonals* de H sobre M i $M^{\perp}$.

Definició 2.24. Un *funcional lineal*, L, és una aplicació d'un espai vectorial V, al cos dels escalars que satisfà:

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y), \qquad \text{on } x, y \in V.$$

Teorema 2.25 (de representació de Riesz)**.** *Si L és un funcional lineal i continu en H, llavors existeix un únic $y \in H$ tal que:*

$$Lx = \langle x, y\rangle, \qquad \textit{on } x \in H.$$

Llavors, $\|L\| = \|y\|$

Definició 2.26. Un conjunt de vectors u_j en un espai de Hilbert H, on $j \in I$ i I és un conjunt d'índexs, s'anomena *ortonormal* si satisfà les relacions d'ortogonalitat $\langle u_j, u_k\rangle = 0$ per tot $j \neq k$ i $j, k \in I$, i està normalitzat de manera que $\|u_j\| = 1$ per a cada $j \in I$. En altres paraules, $(u_j)_j$ és ortonormal si

$$\langle u_j, u_k\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Definició 2.27. Una *base ortonormal* d'un espai de Hilbert, H, és una base de H, els vectors de la qual són ortonormals.

Teorema 2.28. *Sigui $\{u_j : j \in A\}$ un conjunt ortonormal en H. Llavors, són equivalents:*

(i) $\{u_j\}$ forma una base ortonormal en H.

(ii) El conjunt P de totes les combinacions lineals finites d'elements de $\{u_j\}$ és dens en H.

(iii) Es verifica la igualtat

$$\sum_{j \in A} |\langle x, u_j\rangle|^2 = \|x\|^2,$$

per tot $x \in H$.

(iv) Es verifica la igualtat

$$\sum_{j \in A} \langle x, u_j\rangle \overline{\langle y, u_j\rangle} = \langle x, y\rangle,$$

per tot $x \in H$ i $y \in H$.

Les últimes fórmules es coneixen com **identitats de Parseval**.

Espai de funcions holomorfes

$H(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, f$ holomorfa en $\Omega\}$.

Definició 2.29. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunt obert. Si $K \subset \Omega$ compacte i si existeix U conjunt obert tal que $K \subset U$ i $f \in H(U)$, llavors $f \in H(K)$.

Definició 2.30. $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ és una *família normal* en $H(\Omega)$ si és relativament compacte en $H(\Omega)$, és a dir, si tota successió de $\mathcal{F}$ té una parcial uniformement convergent a una funció de $f \in H(K)$, on K és un compacte d'Ω.

Teorema 2.31 (de Montel)**.** *Sigui $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$. Llavors són equivalents:*

(i) $\mathcal{F}$ és una família normal en $H(\Omega)$.

(ii) Per a qualsevol $K \subset \Omega$ compacte,

$$\sup\{|f(z)|; z \in K, f \in \mathcal{F}\} < M_K < +\infty,$$

és a dir, $\mathcal{F}$ és localment acotada en Ω.

Propietats elementals de les funcions holomorfes

Teorema 2.32 (fórmula integral de Cauchy)**.** *Si $f \in H(\Omega)$ i sigui $D(a,R) \subset \Omega$. Si $D(a,r)$ és una circumferència amb centre a i radi $r < R$. Llavors,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad z \in D(a,r).$$

Teorema 2.33 (desigualtats de Cauchy)**.** *Si $f \in H(D(a,R))$ i $|f(z)| < M$, per a tot $z \in D(a,R)$, llavors*

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M}{R^n}, \qquad \text{on } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Espai vectorial normat

Teorema 2.34. *Per a un funcional lineal ϕ d'un espai vectorial normat X a $\mathbb{C}$, les tres condicions següents són equivalents:*

1. *ϕ és acotat, és a dir, $\|\phi\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|} < +\infty$.*
2. *ϕ és continu.*
3. *ϕ és continu en un punt de X.*

Teorema 2.35 (de Hahn-Banach)**.** *Sigui M és un subespai d'un espai normat X i sigui ϕ un funcional lineal acotat en M, llavors ϕ es pot estendre a un funcional lineal acotat Φ de X i tal que $\|\Phi\| = \|\phi\|$.*

Notació

Definició 2.36. La notació $\phi \lesssim \varphi$ vol dir que existeix una constant $C > 0$ tal que $\phi \leqslant C\varphi$. Llavors, escriurem $\phi \simeq \varphi$ quan $\phi \lesssim \varphi$ i $\varphi \lesssim \phi$.

3 Espais de Bergman

En aquesta secció, introduirem els espais de Bergman i estudiarem les seves propietats principals.

En el que refereix a Ω serà una regió de $\mathbb{C}$, és a dir, un conjunt obert i connex del pla complex. Per a $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, l'espai de Bergman $A^p(\Omega)$ és l'espai de totes les funcions f holomorfes en Ω que compleixen la següent propietat:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_\Omega |f(z)|^p dA(z) \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Si $p = \infty$, llavors $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$.

Podem observar, per la definició de l'espai de Bergman, que aquest el podem definir com: $A^p(\Omega) = L^p(\Omega) \cap H(\Omega)$.

Proposició 3.1. *Si $p \geqslant 1$, aleshores $\|f\|_p$ és una norma de $A^p(\Omega)$.*

Demostració: Per veure que $\|f\|_p$ és una norma hem de comprovar que verifica les següents condicions:

(i) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$, per $f \in A^p(\Omega)$.

(ii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, per $\lambda \in \mathbb{C}$ i $f \in A^p(\Omega)$.

(iii) Desigualtat triangular: $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, per $f, g \in A^p(\Omega)$.

Aleshores, pel Teorema 2.17, $\|.\|_p$ és una distància a $L^p(\Omega)$ i si $f, g \in A^p(\Omega)$, llavors $f + g \in H(\Omega) \cap L^p(\Omega) = A^p(\Omega)$. □

El resultat anterior ens diu, en particular, que $A^p(\Omega)$ és un espai mètric.

El següent teorema ens dóna una estimació puntual de les funcions de $A^p(\Omega)$.

Teorema 3.2. *Sigui $f \in A^p(\Omega)$. Llavors,*

$$|f(z)| \leqslant \pi^{\frac{-1}{p}} \delta^{\frac{-2}{p}} \|f\|_p, \quad z \in \Omega,$$

on $\overline{D(z, \delta)} = \{w \in \Omega : |w - z| \leqslant \delta\} \subset \Omega$.

Demostració: Siguin $z \in \Omega$ i $\overline{D(z, \delta)} \subset \Omega$. Llavors, com que $f \in H(\Omega)$, la fórmula integral de Cauchy (Teorema 2.32) ens dóna que en $D(z, r)$, per $0 < r < \delta$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw;$$

Parametritzant $\partial D(z, r)$, $w = z + re^{i\theta}$, tenim:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta, \quad \text{per } 0 < r < \delta.$$

Apliquem ara la desigualtat de Jensen (Teorema 2.13) i obtenim:

$$|f(z)|^p = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})d\theta\right|^p \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Aleshores, integrant a banda i banda:

$$\int_0^{\delta} r|f(z)|^p dr \leqslant \int_0^{\delta} r\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{i\theta})|^p d\theta\right) dr,$$

i com que $\int_0^{\delta} r|f(z)|^p dr = \frac{\delta^2}{2}|f(z)|^p$, deduïm que:

$$\begin{aligned}\pi\delta^2|f(z)|^p &\leqslant \int_0^{\delta}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{i\theta})|^p d\theta r dr \\ &= \int_{D(z,\delta)} |f(w)|^p dA(w) = \int_{\Omega} |f(w)|^p dA(w) = \|f\|_p^p,\end{aligned}$$

ja que, $dA(z) = rdrd\theta$ i $|z| \leqslant r$.

Finalment, $\delta^2\pi|f(z)|^p \leqslant \|f\|_p^p \Leftrightarrow |f(z)| \leqslant \pi^{\frac{-1}{p}}\delta^{\frac{-2}{p}}\|f\|_p, \quad z \in \Omega.$ □

D'aquest darrer teorema, podem deduir immediatament els següents corol·laris.

Corol·lari 3.3. *$A^p(\mathbb{C})$ només conté la funció constantment igual a 0. És a dir,*

$$A^p(\mathbb{C}) = \{0\}.$$

Demostració: Sigui $\Omega = \mathbb{C}$ i $f \in A^p(\mathbb{C})$.
Considerem $R > 0$. Llavors, pel Teorema 3.2:

$$|f(z)| \leqslant \frac{\pi^{\frac{-1}{p}}}{R^{\frac{2}{p}}}\|f\|_p \xrightarrow[R\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Aleshores, $|f(z)| \leqslant 0$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, per tant, $f \equiv 0$. □

Corol·lari 3.4. *Per a cada $z \in \Omega$, el funcional d'avaluació puntual*

$$\begin{aligned}\phi_z : A^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow f(z)\end{aligned}$$

és continu.

Demostració: És immediata pel Teorema 3.2. □

Corol·lari 3.5. *Sigui $(f_n)_n$ una successió de funcions i f una funció, tals que $f_n, f \in A^p(\Omega)$. Si $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, llavors, $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ uniformement sobre compactes d'Ω.*

Demostració: Sigui $K \subset \Omega$ un conjunt compacte. Llavors, K es pot recobrir per un nombre finit de $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. N'hi ha prou, doncs, que provem que per a tot $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ es compleix

$$f_n \to f \quad \text{uniformement en } \overline{D(a,r)}.$$

Primer, observem que si $f_n, f \in A^p(\Omega)$, llavors $f_n - f \in A^p(\Omega)$. Després, aplicant el Teorema 3.2 a la funció $f_n - f$, per a tot $z \in D(a,r) \subset D(A,\delta)$ es compleix:

$$|f_n(z) - f(z)| \leqslant \pi^{\frac{-1}{p}} \delta^{\frac{-2}{p}} \|f_n - f\|_p \leqslant \pi^{\frac{-1}{p}} r^{\frac{-2}{p}} \|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ja que $r \leqslant \delta$ i per hipòtesis sabem que $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Per tant, $|f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ uniformement en $\overline{D(a,r)}$, aleshores $f_n(z) \to f(z)$ uniformement en $\overline{D(a,r)}$. Finalment, $f_n(z) \to f(z)$ uniformement a qualsevol compacte d'Ω. $\square$

Corol·lari 3.6. *Si $1 \leqslant p < +\infty$, $A^p(\Omega)$ és un espai complet.*

Demostració: Hem de veure que tota successió de Cauchy de $A^p(\Omega)$ convergeix en norma a alguna funció de $A^p(\Omega)$.

Sigui $(f_n)_n$ una successió de Cauchy de $A^p(\Omega)$.

D'una banda, com que l'espai $L^p(\Omega)$ és complet i $f_n \in A^p(\Omega)$, la successió $(f_n)_n$ convergeix en norma a $f \in L^p(\Omega)$, és a dir,

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad \text{on } f \in L^p(\Omega).$$

Aleshores, pel Teorema 2.19, existeix una parcial convergent puntualment g.p.t. $z \in \Omega$, és a dir:

$$\text{existeix una parcial } (f_{n_k}) \text{ de } (f_n)_n \quad \text{tal que} \quad f_{n_k}(z) \longrightarrow f(z) \quad \textit{g.p.t. } z \in \Omega.$$

D'altra banda, $(f_n)_n$ és una successió de Cauchy a $H(\Omega)$, que és un espai mètric complet. Per tant, existeix $g \in H(\Omega)$ tal que $f_n \longrightarrow g$ a $H(\Omega)$ i, en particular, $f_{n_k} \longrightarrow g$ puntualment en Ω. Per tant, $g \equiv f$ g.p.t. i la funció pot ser identificada amb una funció de $A^p(\Omega)$. $\square$

Per tant, com a conseqüència, $A^p(\Omega)$ és un espai de Banach per $1 \leqslant p < +\infty$.

Corol·lari 3.7. *$A^2(\Omega)$ és un espai de Hilbert amb producte escalar*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}dA(z), \quad \textit{per } f, g \in A^2(p).$$

Demostració: $L^2(\Omega)$ és un espai de Hilbert i com que $A^2(\Omega)$ és un subespai tancat de $L^2(\Omega)$, llavors, $A^2(\Omega)$ també és un espai de Hilbert. $\square$

Corol·lari 3.8. *Sigui $(f_n)_n \in A^p(\Omega)$ una successió de funcions, i $M > 0$ una constant tal que $\|f_n\|_p \leqslant M$, per a tota n. Llavors, existeix una successió parcial $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n \in A^p(\Omega)$, tal que $f_{n_k} \longrightarrow f_n$ en $H(\Omega)$.*

Demostració: Sigui $K \subset \Omega$ un compacte. Aleshores, per $z \in K$ prenem $\overline{D(z,\delta)} \subset K$ i pel Teorema 3.2:

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{\pi^{\frac{-1}{p}}}{\delta^{\frac{2}{p}}} \|f_n\|_p \leqslant \frac{\pi^{\frac{-1}{p}}}{d(K, \partial\Omega)^{\frac{2}{p}}} \|f_n\|_p \leqslant C_K \cdot M.$$

Llavors, pel Teorema de Montel (Teorema 2.31), $\mathcal{F}$ forma una família normal, en particular, $\mathcal{F}$ és localment acotada en Ω i existeix una parcial de $(f_n)_n$ convergent uniformement sobre compactes i, en particular, convergent puntualment a $f \in H(\Omega)$.

Aleshores, com que $|f_{n_k}|^p \longrightarrow |f|^p$ puntualment, $|f_{n_k}|^p$, $|f|^p$ mesurables, llavors pel Lema 2.7,

$$\int_\Omega |f|^p dA = \int_\Omega \liminf_k |f_{n_k}|^p dA \leqslant \liminf_k \int_\Omega |f_{n_k}|^p dA = \liminf_k \|f_{n_k}\|_p^p \leqslant M < +\infty.$$

Per tant, $f \in L^p(\Omega)$ i, finalment, $f \in A^p(\Omega) = H(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. □

3.1 Nucli de Bergman

En aquest apartat, ens centrarem en l'espai de Bergman per $p = 2$ en Ω, és a dir, $A^2(\Omega)$. Enunciarem i veurem les propietats del nucli de Bergman, i finalment, veurem una expresió formal del nucli de Bermgan per l'espai $A^2(\Omega)$. La calcularem explícitament per $A^2(\mathbb{D})$.

Com hem vist al Corol·lari 3.4, el funcional d'avaluació puntual $\phi_z : A^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, on $\phi_z(f) = f(z)$, és acotat. Pel Corol·lari 3.7, l'espai $A^2(\Omega)$ és un espai de Hilbert. Per tant, el teorema de representació de Riesz (Teorema 2.25) ens garanteix l'existència d'una única funció $k_z \in A^2(\Omega)$ tal que $f(z) = \langle f, k_z \rangle$, per a tota $f \in A^2(\Omega)$.

Definició 3.9. La funció

$$\begin{aligned} K : \Omega \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, \zeta) &\longrightarrow K(z, \zeta) = \overline{k_z(\zeta)} \end{aligned}$$

s'anomena **nucli reproductor** o **nucli de Bergman** de la regió Ω.

Proposició 3.10. *El nucli de Bergman compleix:*

(i) Propietat reproductora:

$$f(z) = \int_\Omega f(\zeta) K(z, \zeta) dA(\zeta), \quad z \in \Omega,$$

per a cada funció $f \in A^2(\Omega)$.

(ii) Propietat antisimètica: $K(z, \zeta) = \overline{K(\zeta, z)}$.

(iii)

$$K(z, z) = \int_\Omega |K(z, \zeta)|^2 dA(\zeta) = \|K(z, \cdot)\|_2^2 > 0,$$

Demostració: Anem a comprovar les tres propietats del nucli de Bergman:

(i) Siguin $z \in \Omega$ i $f \in A^2(\Omega)$. Llavors es compleix:

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle = \int_\Omega f(\zeta) \overline{k_z(\zeta)} dA(\zeta) = \int_\Omega f(\zeta) K(z, \zeta) dA(\zeta).$$

(ii) Si considerem $f(\zeta) = k_w(\zeta) = \overline{K(w,\zeta)}$, per a $w \in \Omega$, llavors:

$$\begin{aligned}
\overline{K(w,z)} &= \int_\Omega \overline{K(w,\zeta)} K(z,\zeta) dA(\zeta) = \int_\Omega \overline{K(w,\zeta)} \cdot \overline{k_z(\zeta)} dA(\zeta) \\
&= \overline{\int_\Omega K(w,\zeta) k_z(\zeta) dA(\zeta)} = \overline{\int_\Omega k_z(\zeta) \overline{k_w(\zeta)} dA(\zeta)} \\
&= \overline{k_z(w)} = K(z,w).
\end{aligned}$$

(iii) És conseqüència de la propietat antisimètrica.

□

Corol·lari 3.11. $|f(z)| \leqslant \sqrt{K(z,z)} \|f\|_2$.

Demostració: Conseqüència de la fórmula reproductora i la desigualtat de Schwarz (Teorema 2.15):

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \int_\Omega f(\zeta) K(z,\zeta) dA(\zeta) \right| \leqslant \int_\Omega |f(\zeta)| \, |K(z,\zeta)| \, dA(\zeta) \\
&\leqslant \|f\|_2 \left(\int_\Omega |K(z,\zeta)|^2 dA(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \sqrt{K(z,z)}.
\end{aligned}$$

□

Per a poder arribar a la fórmula explícita del nucli de Bergman en l'espai $A^2(\Omega)$, utilitzarem l'existència d'una base ortonormal d'aquest espai i l'expressió de tota funció f de $A^2(\Omega)$ mitjançant aquesta base.

Llavors, recordem que, $\{\varphi_n\}$ és una base ortonormal de $A^2(\Omega)$ si:

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ 1, & \text{si } n = m \end{cases}$$

on δ_{nm} és la delta de Kronecker. A més a més, pel Teorema 2.28, tota funció $f \in A^2(\Omega)$ té una única expressió $f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n$, convergent en norma, és a dir,

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\|_2 = 0.$$

En particular, pel Corol·lari 3.5, convergeix uniformement sobre compactes d'Ω:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(z), \quad z \in \Omega,$$

on $\langle f, \varphi_n \rangle = \sum c_m \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = c_n$ i, a més a més, $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 = \|f\|_2^2$.

Teorema 3.12. *El nucli de Bergman de la regió Ω es pot representar com:*

$$K(z,\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(\zeta)},$$

on φ_n és una base ortonormal de $A^2(\Omega)$.

Demostració: Prenem $f(z) = K(z, \zeta)$, on $\zeta \in \Omega$. Per l'observació anterior sabem que:

$$K(z, \zeta) = f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(z), \quad \text{on } c_n = \langle K(\cdot, \zeta), \varphi_n(\cdot) \rangle.$$

Llavors, hem de veure que $c_n = \overline{\varphi_n(\zeta)}$. Per la definició de producte escalar obtenim:

$$\overline{c_n} = \overline{\langle K(\cdot, \zeta), \varphi_n(\cdot) \rangle} = \langle \varphi_n(\cdot), K(\cdot, \zeta) \rangle = \int_\Omega \varphi_n(\omega) \overline{K(\omega, \zeta)} dA(\omega).$$

Finalment, per la propietat antisimètrica del nucli de Bergman, $\overline{K(w, \zeta)} = K(\zeta, w)$, i la propietat reproductora, arribem a:

$$\overline{c_n} = \int_\Omega \varphi_n(\omega) K(\zeta, \omega) dA(\omega) = \varphi_n(\zeta).$$

□

3.1.1 Càlcul del nucli de Bergman en $\mathbb{D}$

Anem a veure que, en particular, en disc unitat $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ és possible obtenir una fórmula tancada pel nucli de Bergman en $A^2(\mathbb{D})$.

Per calcular-lo, utilitzarem el Teorema 3.12. Abans de tot, hem de tenir una base ortonormal en $A^2 = A^2(\mathbb{D})$. Observarem que els monomis formen un conjunt ortogonal en A^2, i després el normalitzarem. Aleshores, tindrem un conjunt ortonormal en A^2 i, finalment, aplicarem en Teorema 2.28 per comprovar que, a més a més, formen una base ortonormal en A^2.

Proposició 3.13. *La successió de funcions*

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n, \quad \textit{per } n \geqslant 0,$$

forma una base ortonormal en A^2.

Demostració: Comencem per veure que els monomis $1, z, z^2, ..., z^n$ formen un conjunt ortogonal en A^2. Fent el canvi $z = re^{i\theta}$, on $0 < r < 1$ i $0 < \theta \leqslant 2\pi$, obtenim:

$$\begin{aligned}
\langle z^n, z^m \rangle &= \int_\mathbb{D} z^n \overline{z^m} dA(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(re^{i\theta}\right)^n \overline{(re^{i\theta})^m} r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^n e^{in\theta} r^m e^{-im\theta} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^{n+m}\right) \left(e^{i(n-m)\theta}\right) r dr d\theta \\
&= \left(\int_0^1 r^{n+m+1} dr\right) \left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta\right) = \frac{2\pi}{n+m+2} \delta_{nm},
\end{aligned}$$

donat que

$$\int_0^1 r^{n+m+1} dr = \left[\frac{r^{n+m+2}}{n+m+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+m+2} \, ,$$

i

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m \, . \end{cases}$$

Seguidament, si ho normalitzem, obtenim que les funcions

$$\varphi_n(z) = \frac{z^n}{\|z^n\|_2}, \quad \text{per } n = 0, 1, 2, ...,$$

són ortonormals en A^2. Ara tenim

$$\begin{aligned}\|z^n\|_2^2 = \int_{\mathbb{D}} |z^n|^2 dA(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{2n} r dr d\theta = 2\pi\left(\int_0^1 r^{2n+1} dr\right) \\ = 2\pi\left[\frac{r^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = 2\pi\frac{1}{2n+2} = \frac{\pi}{n+1},\end{aligned}$$

on la primera igualtat l'obtenim de fer el canvi a polars, $z = re^{i\theta}$ on $0 < \theta \leqslant 2\pi$ i $0 < r < 1$ i, llavors, $z^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow |z^n| = r^n$. Per tant, $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} z^n$.

I per acabar, per a provar que $\left(\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z_n\right)_n$ forma una base ortonormal, utilitzarem el Teorema 2.28.

Aleshores, hem de comprovar que es compleix la següent identitat de Parseval:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 = \|f\|_2^2, \quad f \in A^2.$$

En primer lloc, veiem que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 = \pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}, \quad \text{per a } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Llavors, observem que $\overline{\varphi_n(z)} = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\overline{z^n}$ i, a més a més, si prenem $f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$, ja que $f \in A^2(\mathbb{D})$, obtenim:

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi_n\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\varphi_n(z)} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\overline{z^n} dA(z) \\ = \int_0^1\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{+\infty} a_m r^m e^{im\theta}\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} r^n e^{-in\theta} r d\theta dr \\ = \int_0^1 r\sum_{m=0}^{+\infty} r^{m+n} a_m\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta dr \\ = \int_0^1 r^{2n+1} a_n 2\pi\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} dr = a_n\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

on l'intercanvi del sumatori amb l'integral està justificat pel fet de que f convergeix uniformement en $0 < r < 1$.

Aleshores:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi|a_n|^2}{n+1}.$$

En segon lloc, hem de veure que:

$$\|f\|_2^2 = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}, \quad \text{on } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Concretament, agafem el disc $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho < 1\}$ i sigui

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad n = 1, 2, ...,$$

la suma parcial dels termes de Taylor de f. Llavors,

$$\begin{aligned}
\int_{D_\rho} |s_n(z)|^2 dA(z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} s_n(re^{i\theta}) \overline{s_n(re^{i\theta})} r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\theta} \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \overline{a_j} r^j e^{-ij\theta} \right) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n} a_k \overline{a_j} r^{k+j} e^{(k-j)i\theta} r dr d\theta \\
&= \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n} a_k \overline{a_j} \left(\int_0^{2\pi} e^{(k-j)i\theta} d\theta \right) \left(\int_0^{\rho} r^{k+j+1} dr \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_k} 2\pi \frac{\rho^{2k+2}}{2k+2} = \pi \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|^2}{k+1} \rho^{2(k+1)},
\end{aligned}$$

donat que, s_n convergeix uniformement en D_ρ, $\int_0^{2\pi} e^{(k-j)i\theta} d\theta = 2\pi$ si $k = j$ calculada anteriorment i també,

$$\int_0^{\rho} r^{k+j+1} dr = \frac{\rho^{k+j+2}}{k+j+2}.$$

Aleshores, com que $s_n(z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(z)$ uniformement en D_ρ, així doncs,

$$\pi \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|^2}{k+1} \rho^{2(k+1)} = \int_{D_\rho} |s_n(z)|^2 dA(z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{D_\rho} |f(z)|^2 dA(z) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{D_\rho} |f(z)|^2 dA(z) = \pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1} \rho^{2(k+1)}.$$

Finalment,

$$\int_{D_\rho} |f(z)|^2 dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \chi_{D_\rho} dA(z), \quad \text{on } \chi_{D_\rho} = \begin{cases} 0, \text{si } z \notin D_\rho \\ 1, \text{si } z \in D_\rho \end{cases}$$

ja que, $|f(z)|^2 \chi_{D_\rho} \nearrow |f(z)|^2$ quan $\rho \to 1^-$.

Pel teorema de la convergència monòtona (Teorema 2.8),

$$\int_{D_\rho} |f(z)|^2 dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \chi_{D_\rho} dA(z) \xrightarrow[\rho \to 1^-]{} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) = \|f\|_2^2.$$

Per tant, acabem de veure que $\|f\|_2^2 = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}$. Aleshores, es compleix la identitat de Parseval, i en definitiva, $\{\varphi_n\}_n$ formen una base ortonormal en A^2. $\square$

Podem observar que, pel Teorema 2.28 els polinomis són densos en A^2.

I com que $\{\varphi_n\}$ és una base ortonormal de A^2 pel Teorema 3.12 obtenim que el nucli és de la forma:

$$\begin{aligned} K(z,\zeta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n\right)\left(\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\overline{\zeta^n}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(z\overline{\zeta}\right)^n. \end{aligned}$$

Llavors, com que tenim una sèrie de potències amb $|z\overline{\zeta}| < 1$, la suma és

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(z\overline{\zeta}\right)^n = \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2}.$$

En efecte si $|a| < 1$,

$$\int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} = \frac{a}{1-a}, \quad \text{i}$$

$$\left(\frac{a}{1-a}\right)' = \frac{1}{(1-a)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Per tant,

$$K(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2}.$$

Teorema 3.14. *La fórmula explícita de la funció nucli, $K(z,\zeta)$, ens mostra que:*

(i) Per a $f \in A^2$,

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1-z\overline{\zeta})^2} dA(\zeta), \quad f \in A^2.$$

(ii) Si triem $f(\zeta) = (1-\zeta\overline{z})^{-2}$ fixant $z \in \mathbb{D}$, llavors:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\overline{\zeta}z|^4} dA(\zeta) = \frac{1}{(1-|z|^2)^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Demostració: El primer punt és trivial per la definició de $K(z,\zeta)$.

I pel que fa al segon punt, fixant $z \in \mathbb{D}$, per la definició de $f(z)$, obtenim:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2} f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{\zeta}|^4} = f(z) = \frac{1}{(1-|z|^2)^2}.$$

□

3.2 La projecció de Bergman

En aquest apartat, el que estudiarem és l'espai de Bergman $A^p = A^p(\mathbb{D})$, on $0 < p < +\infty$. A partir d'ara, prendrem la mesura d'àrea normalitzada, és a dir, $\int_{\mathbb{D}} \frac{dA}{\pi} = 1$. Si $f \in A^p$ serà:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, \frac{dA(z)}{\pi} \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < +\infty.$$

Per $1 \leqslant p < +\infty$, hem vist que A^p és un espai normat i es pot veure que si $0 < p < 1$, $\| \cdot \|_p$ és una quasi norma, doncs la desigualtat triangular no es compleix.

Abans de tot, començarem demostrant que els polinomis són densos en A^p, resultat que necessitarem per a definir la projecció de Bergman.

Teorema 3.15. *Els polinomis formen un subconjunt dens de l'espai de Bergman A^p, on $0 < p < +\infty$. És a dir, per a cada $f \in A^p$ i qualsevol $\epsilon > 0$, existeix un polinomi Q tal que $\|f - Q\|_p < \epsilon$.*

Demostració: Demostrarem la densitat dels polinomis en A^p, en dues etapes:

1. Si $g \in H(\overline{\mathbb{D}})$, per a qualsevol $\epsilon > 0$, existeix un Q polinomi tal que $\|g - Q\|_p < \epsilon$.
2. Si $f_\rho(z) = f(\rho z) \in H(\overline{\mathbb{D}})$, on f_ρ és la funció dilatada, veurem que $f_\rho \longrightarrow f$ en A^p.

Com que $g \in H(\overline{\mathbb{D}})$, aleshores sabem que $g(z) = \sum\limits_n a_n z^n$ i el seu radi de convergència $R_g > 1$. Així doncs, $g(z)$ convergeix uniformement i absolutament en $|z| \leqslant 1 < R_g$. En conseqüència, $g(z)$ es pot aproximar uniformement en $\mathbb{D}$ per polinomis, per exemple, les sumes parcials de la seva serie de Taylor. Aleshores,

$$\text{per a } \epsilon > 0, \text{ existeix un } Q \text{ polinomi tal que } \|g - Q\|_p < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ara, provem el punt 2. Considerem la mitjana integral

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{1/p}, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

que es pot veure per subharmonicitat que és una funció que creix amb r, aquesta demostració es pot veure en la referència [8].

Observem que $M_p(r, f_\rho) = M_p(r\rho, f)$:

$$M_p(r, f_\rho) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f_\rho\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{1/p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(\rho re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{1/p} = M_p(r\rho, f).$$

I a més a més, $M_p(r\rho, f) \leqslant M_p(r, f)$, ja que $r\rho \leqslant r$ i $M_p(\cdot, f)$ és creixent.

Llavors,

$$M_p^p(r, f - f_\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) - f_\rho\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta.$$

Ara utilitzem la següent propietat: per a $p \geqslant 1$, $\left|\frac{a+b}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|a^p + b^p| \Leftrightarrow |a+b|^p \leqslant 2^{p-1}|a^p + b^p|$, per la observació (2.12), ja que la funció $f(x) = |x|^p$, per $p \geqslant 1$ és convexa. Per tant, l'anterior està acotada per

$$\begin{aligned} M_p^p(r, f - f_\rho) &\leqslant \frac{1}{2\pi} 2^{p-1} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta + \frac{2^{p-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f_\rho\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \\ &= 2^{p-1} \left(M_p^p(r, f) + M_p^p(r, f_\rho) \right) \leqslant 2^p \left(M_p^p(r, f) \right). \end{aligned}$$

Com que $f \in A^p$, llavors obtenim que $M_p^p(r,f)$ és integrable a $[0,1)$ respecte la mesura rdr, és a dir, $M_p^p(r,f) \in L^1([0,1), rdr)$. Aleshores, d'una banda, pel teorema de la convergència dominada (Teorema 2.9) tenim:

$$\lim_{\rho \nearrow 1} \int_0^1 M_p^p(r, f - f_\rho) rdr = \int_0^1 \lim_{\rho \nearrow 1} M_p^p(r, f - f_\rho) rdr = 0, \tag{3.1}$$

on l'última igualtat és certa perquè $\lim_{\rho \to 1} f_\rho(z) = f(z)$ uniformement sobre compactes de $\mathbb{D}$, i en particular, per a cada $r \in [0,1), M_p^p(r, f - f_\rho) \to 0$.

D'altre banda, tenim:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \nearrow 1} \int_0^1 M_p^p(r, f - f_\rho) rdr &= \lim_{\rho \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) - f_\rho\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta rdr \\ &= \lim_{\rho \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \|f - f_\rho\|_p^p . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Per tant, igualant (3.1) i (3.2), obtenim:

$$\lim_{\rho \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \|f - f_\rho\|_p^p = 0 \Longrightarrow \|f - f_\rho\|_p^p \longrightarrow 0 \text{ quan } \rho \nearrow 1.$$

Aleshores, per a $\epsilon > 0$, existeix $\rho < 1$ tal que $\|f - f_\rho\|_p < \frac{\epsilon}{2}$.

En conclusió, hem vist que per a cada $f \in A^p$ i cada $\epsilon > 0$, existeix Q polinomi tal que $\|f - Q\|_p < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. $\square$

Projecció de Bergman

Amb la mesura normalitzada, la fórmula de reproducció és de la forma: $f(z) = \langle f, k_z \rangle$, per a $f \in A^2$ i on $k_z(\zeta) = (1 - \bar{z}\zeta)^{-2}$. És a dir, ho podem escriure com:

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,\zeta) f(\zeta)\, dA(\zeta), \quad \text{on } K(z,\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left(1 - \bar{\zeta} z\right)^2}. \tag{3.3}$$

Observació 3.16. Hem vist que si $f \in A^1$, llavors existeix una successió de polinomis $Q_n \longrightarrow f$ en A^1.

Aleshores, si fixem $z \in \mathbb{D}$ i usant que $Q_n \in A^2$, tenim:

$$Q_n(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,\zeta) Q_n(\zeta)\, dA(\zeta) \longrightarrow \int_{\mathbb{D}} K(z,\zeta) f(\zeta)\, dA(z),$$

ja que,

$$\begin{aligned} &\left| Q_n(z) - \int_{\mathbb{D}} K(z,\zeta) f(\zeta)\, dA(\zeta) \right| = \left| \int_{\mathbb{D}} K(z,\zeta) \left(Q_n(z) - f(\zeta)\right)\, dA(\zeta) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - |z|)^2} \int_{\mathbb{D}} |Q_n - f|\, dA(\zeta) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Per tant, $\int_{\mathbb{D}} K(z,\zeta) f(\zeta)\, dA(z) = f(z)$.

A^2 és un subespai tancat de l'espai de Hilbert $L^2 = L^2(\mathbb{D}) = A^2 \oplus (A^2)^\perp$. Denotem per P la projecció ortogonal de L^2 a A^2. Per tant, $Pf \in A^2$ si $f \in L^2$ i llavors:

$$Pf(z) = \langle Pf, k_z \rangle = \langle f, k_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\left(1-\bar{\zeta} z\right)^2} \frac{dA(\zeta)}{\pi},$$

ja que, $(f - Pf)$ és ortogonal a $k_z \in A^2$, perquè $f = Pf + (I-P)f$ on $(I-P)f \in (A^2)^\perp$ pel Teorema 2.23.

Definició 3.17. L'operador projecció P es conegut com a **projecció de Bergman**:

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\left(1-\bar{\zeta} z\right)^2} \frac{dA(\zeta)}{\pi}. \tag{3.4}$$

Aquest està ben definit en L^1, ja que $\int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\left(1-\bar{\zeta}z\right)^2} \frac{dA(\zeta)}{\pi}$ és finita per a cada $z \in \mathbb{D}$, envia cada $f \in L^1$ a una funció holomorfa en $\mathbb{D}$ $\big(f \in L^1(\mathbb{D}) \longrightarrow Pf(z) \in H(\mathbb{D})\big)$ i compleix que si $f \in A^1$, llavors $P(f) = f$.

Ara volem demostrar que la projecció de Bergman és un operador acotat en L^p per a $1 < p < +\infty$. Per demostrar-ho, necessitarem el següent lema tècnic, que també utilitzarem repetidament al llarg del treball.

Lema 3.18. *Siguin s i t dos nombres reals tals que $1 < t < s$. Llavors, existeix una constant C, que depèn de s i de t, tal que*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{t-2}}{|1-\bar{z}\zeta|^s} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \leqslant C(1-|z|^2)^{t-s},$$

per a qualsevol $z \in \mathbb{D}$.

Demostració: Podem suposar que $z = \rho \in [0,1)$.

Abans de començar, adonar-nos que com $0 \leqslant |z| \leqslant 1$, llavors:

$$1 - |z|^2 = (1+|z|)(1-|z|) \leqslant 2(1-|z|),$$
$$|z|^2 \leqslant |z| \Leftrightarrow 1 - |z| \leqslant 1 - |z|^2.$$

Per tant, tenim $1 - |z|^2 \simeq 1 - |z| = 1 - \rho$.

En primer lloc, suposem que $\rho \leqslant 1/2$. Llavors:

$$\frac{1}{2} \leqslant 1 - \rho \leqslant 1 - \rho|\zeta| \leqslant |1-\rho\zeta| \leqslant 1 + \rho|\zeta| \leqslant \frac{3}{2}.$$

D'aquí obtenim que $1 - \rho \leqslant |1-\rho\zeta|$ i per tant, $\frac{1}{|1-\rho\zeta|^s} \leqslant \frac{1}{(1-\rho)^s}$, $(s > 0)$. A més a més, com $\rho \leqslant \frac{1}{2}$, tenim $\frac{1}{(1-\rho)^t} \leqslant 2^t$, $(t > 0)$.

Per tant,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{t-2}}{|1-\rho\zeta|^s} \frac{dA(\zeta)}{\pi} &\leqslant \frac{1}{(1-\rho)^s} \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{t-2} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \frac{(1-\rho)^t}{(1-\rho)^s} \cdot \frac{1}{(1-\rho)^t} \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{t-2} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&\leqslant (1-\rho)^{t-s} 2^t \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{t-2} \frac{dA(\zeta)}{\pi}.
\end{aligned}$$

Passant a polars, $\zeta = re^{i\theta}$, aquesta última integral convergeix donat que $t > 1$. Aleshores,

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{t-2}}{|1-\rho\zeta|^s} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \leqslant C(1-\rho)^{t-s},$$

on $C = 2^t \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{t-2} \frac{dA(\zeta)}{\pi}$.

Ara suposem que $\rho > 1/2 \Leftrightarrow 1 > 1/2\rho$. Per tant,

$$\int_{|\zeta|\leqslant \frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{t-2}}{|1-\rho\zeta|^s} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \leqslant 2^s \int_{|\zeta|\leqslant \frac{1}{2\rho}} (1-|\zeta|^2)^{t-2} \frac{dA(\zeta)}{\pi},$$

ja que, si $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2\rho}$, tenim $\frac{1}{2} \leqslant 1-\rho|\zeta| \leqslant |1-\rho\zeta|$ amb el que obtenim $\frac{1}{|1-\rho\zeta|^s} \leqslant 2^s$.

Llavors,

$$\begin{aligned} 2^s \int_{|\zeta|\leqslant \frac{1}{2\rho}} (1-|\zeta|^2)^{t-2} \frac{dA(\zeta)}{\pi} &\leqslant \frac{2^s}{2^t} 2^t \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{t-2} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\ &\leqslant C(1-\rho)^{t-s}, \end{aligned}$$

on l'última desigualtat és certa doncs, la integral és finita per a $t > 1$ i com $\rho > \frac{1}{2}$ tenim $(1-\rho)^{t-s} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}$, $(t < s)$.

Finalment, falta acotar

$$\int_{|\zeta|> \frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{t-2}}{|1-\rho\zeta|^s} \frac{dA(\zeta)}{\pi}.$$

Fent el canvi a polars, $\zeta = re^{i\theta}$, obtenim:

$$\int_{|\zeta|> \frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{t-2}}{|1-\rho\zeta|^s} \frac{dA(\zeta)}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2\rho}}^1 \frac{(1-r^2)^{t-2}}{(1-2\rho r\cos\theta + \rho^2 r^2)^{s/2}} r dr d\theta,$$

ja que, $|\zeta| = r$, i

$$\begin{aligned} |1-\rho re^{i\theta}|^2 &= |1-\rho r\cos\theta - i\rho r\sin\theta|^2 = (1-\rho r\cos\theta)^2 + (\rho r\sin\theta)^2 \\ &= 1 + \rho^2 r^2\cos^2\theta - 2\rho r\cos\theta + \rho^2 r^2 \sin^2\theta = 1 - 2\rho r\cos\theta + \rho^2 r^2. \end{aligned}$$

Llavors,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2\rho}}^1 \frac{(1-r^2)^{t-2}}{(1-2\rho r\cos\theta + \rho^2 r^2)^{s/2}} r dr d\theta \\ =&\frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{2\rho}}^1 (1-r^2)^{t-2} r \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1-2\rho r\cos\theta + \rho^2 r^2)^{s/2}} dr = I. \end{aligned}$$

Sabem que $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$ per a $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, aleshores:

$$1 - 2\rho r\cos\theta + \rho^2 r^2 = (1-\rho r)^2 + 4\rho r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant (1-\rho r)^2 + 4\rho r \frac{\theta^2}{\pi^2}.$$

Per tant, per a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ i com $r \geqslant \frac{1}{2\rho}$ obtenim:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1-2\rho r\cos\theta+\rho^2 r^2)^{s/2}} &\leqslant \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left((1-\rho r)^2+4\rho r\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)^{s/2}} = \\
&= \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left[(1-\rho r)^2\left(1+2\rho r\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\theta}{1-\rho r}\right)^2\right)\right]^{s/2}} \\
&\leqslant \frac{1}{(1-\rho r)^s}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\left(1+\frac{2}{\pi^2}(\frac{\theta}{1-\rho r})^2\right)^{s/2}}.
\end{aligned}$$

Fent un canvi de variable: $u = \frac{\theta}{1-\rho r}, du = \frac{d\theta}{1-\rho r}$. Tenim:

$$\frac{1}{(1-\rho r)^{s-1}}\int_0^{\frac{\pi}{(1-\rho r)}} \frac{du}{(1+\frac{2}{\pi^2}u^2)^{s/2}} \leqslant \frac{1}{(1-\rho r)^{s-1}}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+\frac{2}{\pi^2}u^2)^{s/2}} \leqslant C(1-\rho r)^{-s+1},$$

on l'última integral és finita doncs $s > 1$. Per tant:

$$\begin{aligned}
I &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{2\rho}}^1 \frac{(1-r^2)^{t-2}}{C(1-\rho r)^{s-1}} r dr \\
&\lesssim \int_0^\rho \frac{(1-r^2)^{t-2}}{(1-\rho r)^{s-1}} r dr + \int_\rho^1 \frac{(1-r^2)^{t-2}}{(1-\rho r)^{s-1}} r dr \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

on ρ a fixar.

Llavors, anem a acotar I_1.
Abans de començar, observem que per a $0 \leqslant r \leqslant \rho$ tenim $1 - \rho r \leqslant 1 - r^2$. Farem dos casos.

Cas 1: Prenem $t < 2$. Per tant,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\rho \frac{(1-r^2)^{t-2}}{(1-\rho r)^{s-1}} r dr \leqslant \int_0^\rho \frac{(1-\rho r)^{t-2}}{(1-\rho r)^{s-1}} r dr \\
&\leqslant \frac{-1}{\rho}\int_0^\rho -\rho(1-\rho)^{t-s-1} dr = \frac{-1}{\rho}\left[\frac{(1-\rho r)^{t-s}}{t-s}\right]_0^\rho \\
&= \frac{1}{\rho}\left[\frac{(1-\rho^2)^{t-s}}{s-t} - \frac{1}{s-t}\right].
\end{aligned}$$

Com que $t < s$ tenim $\frac{-1}{s-t} < 0$ i utilitzant que $\rho > \frac{1}{2}$:

$$I_1 \leqslant \frac{2}{s-t}(1-\rho^2)^{t-s} \leqslant \frac{2}{s-t}(1-\rho)^{t-s} = C(1-\rho)^{t-s},$$

on l'última desigualtat es dedueix per a ser $\rho < 1$ i $t < s$.

Cas 2: Ara, prenem $t \geqslant 2$. Observem que: $(1-r^2) = (1-r)(1+r) \leqslant 2(1-r) \leqslant 2(1-\rho r)$, ja que $r \geqslant \rho r \Leftrightarrow 1 - r\rho \geqslant 1 - r$. Llavors,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\rho \frac{(1-r^2)^{t-2}}{(1-\rho r)^{s-1}} r dr \leqslant 2^{t-2} \int_0^\rho \frac{(1-\rho r)^{t-2}}{(1-\rho r)^{s-1}} r dr \\
&= \frac{2^{t-2}}{-\rho} \left[\frac{(1-\rho r)^{t-s}}{t-s} \right]_0^\rho = \frac{2^{t-2}}{\rho} \left[\frac{(1-\rho^2)^{t-s}}{s-t} - \frac{1}{s-t} \right] \\
&\leqslant \frac{2^{t-1}}{s-t} (1-\rho^2)^{t-s} \leqslant C(1-\rho)^{t-s},
\end{aligned}$$

on a les darreres desigualtats hem utilitzat el mateix que en el cas 1.

I per últim, hem d'acotar I_2. Com que $r \leqslant 1$, $1-\rho \leqslant 1 - \rho r$, llavors,

$$I_2 = \int_\rho^1 \frac{(1-r^2)^{t-2}}{(1-\rho r)^{s-1}} r dr \leqslant \frac{1}{(1-\rho)^{s-1}} \int_\rho^1 (1-r^2)^{t-2} r dr \leqslant \frac{1}{(1-\rho)^{s-1}} \int_\rho^1 (1-r^2)^{t-2} dr.$$

Ara, observem que: $(1-r) \simeq (1-r^2)$, ja que, $1 - r \leqslant 1 - r^2$, perque $r \leqslant 1$ i, després, $(1-r^2) = (1+r)(1-r) \leqslant 2(1-r)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant \frac{1}{(1-\rho)^{s-1}} \int_\rho^1 (1-r^2)^{t-2} dr \simeq \frac{-1}{(1-\rho)^{s-1}} \left[\frac{(1-r)^{t-1}}{t-1} \right]_\rho^1 \\
&= \frac{1}{t-1} \frac{(1-\rho)^{t-1}}{(1-\rho)^{s-1}} = C(1-\rho)^{t-s}.
\end{aligned}$$

□

Ara ja podem demostrar l'acotació de la projecció de Bergman de $L^p(\mathbb{D})$ en $A^p(\mathbb{D})$.

Teorema 3.19. *Per a $1 < p < +\infty$, la projecció de Bergman P és un operador acotat de L^p a A^p.*

Demostració: Com hem dit anteriorment, en la definició de la projecció de Bergman, la restricció de P a A^p és l'operador identitat en A^p, Pf és holomorf per a tot $f \in L^p$, i llavors és suficient demostrar que $P : L^p \longrightarrow L^p$ és acotat.

Però, per a $f \in L^p$, obtenim que si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\begin{aligned}
|Pf(z)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\left(1-\bar{\zeta} z\right)^2} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right| \leqslant \int_{\mathbb{D}} \left|1-\bar{\zeta} z\right|^{-2} |f(\zeta)| \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{-1}{pq}} \left|1-\bar{\zeta} z|^{-2}\right| |f(\zeta)| \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{1}{pq}} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{-1}{pq}} \left|1-\bar{\zeta} z\right|^{\frac{-2}{q}} \left|1-\bar{\zeta} z\right|^{\frac{-2}{p}} |f(\zeta)| \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{1}{pq}} \frac{dA(\zeta)}{\pi},
\end{aligned}$$

i utilitzant la desigualtat de Hölder (Teorema 2.15), tenim:

$$\begin{aligned}
&|Pf(z)| \\
&\leqslant \left\{ \int_{\mathbb{D}} \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{-1}{p}} |1-\zeta\bar{z}|^{-2} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_{\mathbb{D}} |1-\zeta\bar{z}|^{-2} |f(\zeta)|^p \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{1}{q}} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= J_1(z)^{\frac{1}{q}} \cdot J_2(z)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Triant $s = 2$ i $t = 2 - \frac{1}{p}$ es compleix $1 < t < s$ atès que $1 < p < +\infty$. Per tant, aplicant el Lema 3.18 obtenim:

$$|J_1(z)| \leqslant C(1 - |z|^2)^{t-s} = C(1 - |z|^2)^{\frac{-1}{p}}.$$

Finalment, per veure que $Pf \in L^p$ hem de comprovar que $\int_{\mathbb{D}} |Pf(z)|^p \frac{dA(z)}{\pi} < +\infty$. Doncs anem a veure-ho:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |Pf(z)|^p \frac{dA(z)}{\pi} \leqslant \int_{\mathbb{D}} J_1(z)^{\frac{p}{q}} J_2(z) \frac{dA(z)}{\pi} \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\frac{-1}{p}\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p |1 - \bar{z}\zeta|^{-2} (1 - |\zeta|^2)^{\frac{1}{q}} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \frac{dA(z)}{\pi} \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^{\frac{1}{q}} \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{\frac{-1}{q}} |1 - \bar{z}\zeta|^{-2} \frac{dA(z)}{\pi} \frac{dA(\zeta)}{\pi},
\end{aligned}$$

on a l'última desigualtat hem aplicat el teorema de Fubini (Teorema 2.10). Utilitzant el Lema 3.18, a la segona integral, triant ara $t = 2 - \frac{1}{q}$ i $s = 2$, obtenim:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |Pf(z)|^p \frac{dA(z)}{\pi} &\leqslant C \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^{\frac{1}{q}} (1 - |\zeta|^2)^{\frac{-1}{q}} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= C \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p \frac{dA(\zeta)}{\pi} < +\infty,
\end{aligned}$$

on l'última integral és finita, ja que $f \in L^p$ i on C és una constant positiva que depèn de p. □

Podem veure que, de fet, el que hem provat és més fort.

Proposició 3.20. *Si $1 < p < +\infty$, llavors*

$$Tf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\left|1 - z\bar{\zeta}\right|^2} \frac{dA(\zeta)}{\pi},$$

defineix un operador lineal acotat T de L^p a L^p.

Demostració: És una conseqüència de la demostració anterior. □

3.3 Espais duals

El següent objectiu és veure amb quin espai pot estar identificat l'espai dual A^p per $1 < p < +\infty$. I seguidament, ens centrarem en el cas $p = +\infty$.

Un espai de Banach és un espai vectorial normat i complet. L'espai dual d'un espai de Banach X és l'espai, X^*, dels funcionals lineals i acotats de X, és a dir, si X és un espai de Banach, $X^* = \{\phi : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lineals i continues}\}$. L'espai X^* està normat per:

$$\|\phi\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} |\phi(x)|.$$

Sabem que per a tot funcional lineal $\phi \in L^p$ existeix una única funció $g \in L^q$ tal que $\phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g} \frac{dA}{\pi}$ i, a més a més, $\|\phi\| = \|g\|_{L^q}$. On q és l'índex conjugat: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Escriurem, $(L^p)^* = L^q$.

La vinculació entre $(L^p)^*$ i L^q ve donada per:

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, \frac{dA}{\pi}, \quad f \in L^p,$$

on $g \in L^p$.

Aquest resultat de dualitat de l'espai L^p juntament amb l'acotació de la projecció de Bergman, ens permet obtenir una caracterització de l'espai dual dels espais de Bergman.

Teorema 3.21. *Per $1 < p < +\infty$, l'espai dual de A^p pot ser identificat per A^q, on $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, en el següent sentit:*

1. *Tota funció $g \in A^q$ defineix un funcional lineal i continu*

$$\phi_g(f) = \int f\overline{g}\, \frac{dA}{\pi}, \quad f \in A^p.$$

2. *Per a cada funcional $\phi \in (A^p)^*$ existeix una única $g \in A^q$ tal que:*

$$\phi(f) = \phi_g(f) = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, \frac{dA}{\pi}, \quad f \in A^p.$$

Les normes de ϕ i g són equivalents, és a dir,

$$C_1\|\phi\| \leqslant \|g\|_q \leqslant C_2\|\phi\|,$$

per a certes C_1 i C_2 constants positives. De fet, $C_1 = 1$.

Demostració: Comencem amb l'afirmació 1. Per a $g \in A^q$ es defineix un funcional lineal a A^p:

$$\begin{aligned} \phi_g :& A^p \longrightarrow \mathbb{C} \\ & f \longrightarrow \phi_g(f) = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi}. \end{aligned}$$

Veiem que és lineal:

$$\phi_g(f+h) = \int_{\mathbb{D}} (f+h)\overline{g}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} + \int_{\mathbb{D}} h\overline{g}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} = \phi_g(f) + \phi_g(h).$$

$$\phi_g(\lambda f) = \int_{\mathbb{D}} (\lambda f)\overline{g}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} = \lambda \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} = \lambda\phi_g(f).$$

I que és contínua: $|\phi_g(f)| \leqslant \|\phi_g\| \cdot \|f\|_p$?

$$\begin{aligned} |\phi_g(f)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right| \leqslant \int_{\mathbb{D}} |f\overline{g}|\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^p\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{D}} |g|^q\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right)^{1/q} \leqslant \|f\|_p \|g\|_q, \end{aligned}$$

on hem utilitzat la desigualtat de Hölder (Teorema 2.15). Per tant,

$$\|\phi_g\| = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} |\phi_g(f)| \leqslant \|g\|_q.$$

Veiem ara l'altra afirmació 2. Primer provem la unicitat. Observem que

$$\begin{aligned}\phi_g(z^n) &= \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{g(z)}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} = \int_{\mathbb{D}} z^n \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k z^k}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{in\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} d\theta dr.\end{aligned}$$

Per a cada $0 < r < 1$, tenim per convergència uniforme de la sèrie de potències que $\int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{in\theta} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} d\theta = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} r^{n+k+1}\overline{a_k} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = 2\pi r^{2n+1}\overline{a_n}$. Per tant,

$$\phi_g(z^n) = 2\overline{a_n} \int_0^1 r^{2n+1} dr = \frac{\overline{a_n}}{n+1},$$

on a_n és l'n-éssim coeficient de Taylor de g.

Per tant, si

$$\phi_{g_1}(z^n) = \phi_{g_2}(z^n), \quad n \geqslant 0,$$

llavors, $g_1 = g_2$.

I per acabar, provem l'existència. Pel teorema de Hahn-Banach (Teorema 2.35) sabem que tot funcional $\phi \in (A^p)^*$ es pot estendre a un funcional $\Phi \in (L^p)^*$, tal que $\|\Phi\| = \|\phi\|$. Llavors, pel teorema de representació de Riesz (Teorema 2.25):

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f\bar{h}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi}, \quad f \in L^p,$$

per a alguna $h \in L^q$ amb $\|h\|_q = \|\Phi\|$. Sigui $g = Ph$, on P és la projecció de Bergman. Pel Teorema 3.19 obtenim que $g \in A^q$ i $\|g\|_q \leqslant C\|h\|_q$.

Per a $f \in A^p$, utilitzant la fórmula de reproducció en el disc $\mathbb{D}$ i pel teorema de Fubini (Teorema 2.10), que el podem utilitzar gràcies al Corol·lari 3.20, obtenim:

$$\begin{aligned}\phi(f) = \Phi(f) &= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{h(z)}\, \frac{dA(z)}{\pi} = \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} (1-\overline{\zeta}z)^{-2} f(\zeta)\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} \overline{h(z)}\, \frac{dA(z)}{\pi} \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \int_{\mathbb{D}} (1-\overline{\zeta}z)^{-2}\overline{h(z)}\, \frac{dA(z)}{\pi}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} = \int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi} = \phi_g(f),\end{aligned}$$

on $\int_{\mathbb{D}} (1-\overline{\zeta}z)^{-2}\overline{h(z)}\, \frac{dA(z)}{\pi} = \overline{Ph(\zeta)} = \overline{g(\zeta)}$ per la fórmula de la projecció de Bergman. A més a més, $g = Ph$ i P acotat de L^q a A^q, dóna que

$$\|g\|_q = \|Ph\|_q \leqslant C\|h\|_q = C\|\Phi\| = C\|\phi\|.$$

□

Per la demostració del Teorema 3.21 podem veure que la representació de l'espai dual A^p depèn fortament de l'acotació de la projecció de Bergman.

A continuació, provarem que P no és un operador acotat de L^1 a A^1. Per veure això, recordem que $(L^1)^* = L^\infty$ amb la representació integral

$$\phi(f) = \langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, \frac{dA(\zeta)}{\pi}, \quad f \in L^1,$$

on $\phi \in (L^1)^*$ i $g \in L^\infty$.
Observem ara que l'adjunt de P pot ser identificat amb el mateix P donat que:

$$\langle Pf, g\rangle = \langle Pf, Pg + (I-P)g\rangle = \langle Pf, Pg\rangle = \langle Pf + (I-P)f, Pg\rangle = \langle f, Pg\rangle.$$

Per tant, P és un operador acotat de L^1 a L^1 si, i només si, és un operador acotat de L^∞ a L^∞.

Però, P no és acotat de L^∞ a L^∞. Fixem $\zeta \in \mathbb{D}$ i definim la funció

$$g_\zeta(z) = (1-\overline{z}\zeta)^2\,|1-\overline{z}\zeta|^{-2}.$$

Llavors, $g_\zeta \in L^\infty$ i $\|g_\zeta\|_\infty = 1$. Però, amb canvi a polars $z = re^{i\theta}$, obtenim

$$\begin{aligned}
(Pg_\zeta)(\zeta) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{g_\zeta(z)}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,\frac{dA(z)}{\pi} = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-\overline{z}\zeta)^2|1-\overline{z}\zeta|^{-2}}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,\frac{dA(z)}{\pi} \\
&= \int_{\mathbb{D}} |1-\overline{z}\zeta|^{-2}\,\frac{dA(z)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |1-\overline{\zeta}re^{i\theta}|^{-2} r\,d\theta\,dr \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-\overline{\zeta}re^{i\theta})(1-\zeta re^{-i\theta})}d\theta\,dr.
\end{aligned}$$

Ara observem que:

$$\frac{1}{1-\overline{\zeta}re^{i\theta}} = \sum_{n\geqslant 0}\overline{\zeta}^n r^n e^{in\theta}, \quad \text{ja que } |\overline{\zeta}re^{i\theta}| < 1,$$

$$\frac{1}{1-\zeta re^{-i\theta}} = \sum_{m\geqslant 0}\zeta^m r^m e^{-im\theta}, \quad \text{ja que } |\zeta re^{-i\theta}| < 1.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
(Pg_\zeta)(\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\geqslant 0}\overline{\zeta}^n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m\geqslant 0}\zeta^m r^m e^{-im\theta}\right)d\theta\,dr \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n,m\geqslant 0}\overline{\zeta}^n\zeta^m r^{n+m}e^{(n-m)i\theta}\right)d\theta\,dr \\
&= \int_0^1 r\sum_{n\geqslant 0}|\zeta|^{2n}r^{2n}dr = \int_0^1 \frac{r}{1-|\zeta|^2r^2}dr \\
&= \frac{-1}{2|\zeta|^2}\int_0^1 \frac{-2r|\zeta|^2}{1-r^2|\zeta|^2}dr = \frac{-1}{2|\zeta|^2}\left[\log\left(1-r^2|\zeta|^2\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{-1}{2|\zeta|^2}\left(\log\left(1-|\zeta|^2\right)\right).
\end{aligned}$$

Per tant, aquesta integral que hem calculat no està acotada per $\zeta \in \mathbb{D}$. Això demostra que P no envia L^∞ acotadament a L^∞ i, conseqüentment, la projecció de Bergman no és un operador acotat de L^1 a L^1.

3.4 L'espai de Bloch

Ara volem resoldre la pregunta anterior, és a dir, on envia P l'espai $L^\infty(\mathbb{D})$. Per aquest motiu, necessitarem l'espai de Bloch, el qual introduirem, estudiarem les seves propietats principals i, per acabar, solucionarem el dubte.

Definició 3.22. Definim l'**espai de Bloch** $\mathcal{B}$ com:

$$\mathcal{B} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)|f'(z)| < +\infty \right\},$$

on $\|f\|_{\mathcal{B}}$ s'anomena la norma de Bloch.

En realitat, aquesta no és una norma, ja que no es compleix la propietat $\|f\|_{\mathbb{B}} = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Per tant, per solucionar-ho, prendrem la norma en $\mathcal{B}$ com: $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{B}} + |f(0)|$.

Proposició 3.23. *L'espai de Hardy $H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}) :$ acotades$\}$ està contingut en l'espai de Bloch $\mathcal{B}$, és a dir, $H^\infty(\mathbb{D}) \subseteq \mathcal{B}$.*

Demostració: Sigui $f \in H^\infty(\mathbb{D})$. Volem veure que $f \in \mathcal{B}$. Per tant, només hem de veure que $\|f\|_{\mathcal{B}} < +\infty$. Prenem $\overline{D\left(z, \frac{1-|z|}{2}\right)} \subseteq \mathbb{D}$. Per les desigualtats de Cauchy (Teorema 2.33), tenim:

$$|f'(z)| \leqslant \frac{2}{(1-|z|)} \sup_{w\in\partial D} |f(w)| \leqslant \frac{2}{(1-|z|)} \sup_{w\in\mathbb{D}} |f(w)| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{(1-|z|)},$$

ja que, $f \in H^\infty(\mathbb{D})$. Aleshores,

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \leqslant \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2) \frac{2\|f\|_\infty}{(1-|z|)} = 2\|f\|_\infty \sup_{z\in\mathbb{D}} (1+|z|) < +\infty.$$

Per tant, $f \in \mathcal{B}$. $\square$

Observació 3.24. $H^\infty(\mathbb{D}) \subsetneq \mathcal{B}$. Per a comprovar-ho, prenem $f(z) = \log(1-z)$. Primer veurem que $f \in \mathcal{B}$. Per això, veurem que $\|f\|_{\mathcal{B}} < +\infty$, ja que $|f(0)| = 0$, llavors $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{B}}$. Aleshores:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2) \left|\frac{-1}{1-z}\right| = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|)(1+|z|) \frac{1}{|1-z|} \leqslant \sup_{z\in\mathbb{D}} (1+|z|) \leqslant 2,$$

on hem fet servir que $|1-z| \geqslant 1-|z|$. Per tant, $f \in \mathcal{B}$ i f no està acotada doncs $\lim_{r\to 1^-} |\log(1-r)| = +\infty$.

I, finalment, abans d'arribar al resultat que volem, necessitem un lema previ.

Lema 3.25. *Sigui P la projecció de Bergman, i sigui m un nombre enter positiu. Llavors,*

(i) $P(g_m)(z) = \dfrac{z^m}{m+2},\quad$ *on* $g_m(z) = (1-|z|^2)z^m$.

(ii) Si $g \in A^1$ *tal que* $g(0) = 0$ *i* $h(z) = \frac{1-|z|^2}{\bar{z}} g'(z)$, *llavors* $P(h) = g$.

Demostració: (i) Per la definició de la projecció de Bergman, pel càlcul del nucli de

Bergman en $\mathbb{D}$ i, finalment, pel canvi a polars obtenim:

$$\begin{aligned}
P(g_m)(z) &= \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)\zeta^m (1-\overline{\zeta}z)^{-2}\ \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)\zeta^m \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\overline{\zeta}z)^n\ \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \int_0^{2\pi}(1-r^2)(re^{i\theta})^m(\overline{re^{i\theta}})^n r dr d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n(1-r^2)r^{m+n+1}dr \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)}d\theta \\
&= 2(m+1)z^m \int_0^1 (1-r^2)r^{2m+1}dr = \frac{z^m}{m+2},
\end{aligned}$$

on el canvi d'ordre d'integració es conseqüència de que el nucli de Bergman és holomorf en $\mathbb{D}$ i l'última igualtat s'obté integrant per parts, on $u = 1-r^2dr, du = -2r, dv = r^{2m+1}dr, v = \frac{r^{2m+2}}{2m+2}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-r^2)r^{2m+1}dr &= \left[(1-r^2)\frac{r^{2m+2}}{2m+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{r^{2m+2}}{2m+2}(-2r)dr \\
&= \frac{1}{m+1}\int_0^1 r^{2m+3}dr = \left[\frac{1}{m+1}\frac{r^{2m+4}}{2m+4}\right]_0^1 \qquad (3.5)\\
&= \frac{1}{m+1}\frac{1}{2(m+2)}.
\end{aligned}$$

(ii) Prenem $g(z) = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} a_m z^m$ i $h(z) = \frac{(1-|z|^2)}{\overline{z}}g'(z)$. Llavors,

$$\begin{aligned}
P(h)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)g'(\zeta)}{\overline{\zeta}(1-\overline{\zeta}z)^2}\ \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)g'(\zeta)}{\overline{\zeta}} \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\overline{\zeta}z)^n\ \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \int_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^2)g'(\zeta)(\overline{\zeta})^{n-1}\ \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \int_{\mathbb{D}}(1-|\zeta|^2)\sum_{m=1}^{+\infty} m a_m \zeta^{m-1}(\overline{\zeta})^{n-1}\ \frac{dA(\zeta)}{\pi} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \lim_{t\to 1^-}\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} m a_m \int_0^t\int_0^{2\pi}(1-r^2)(re^{i\theta})^{m-1}(\overline{re^{i\theta}})^{n-1} r dr d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \lim_{t\to 1^-}\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} m a_m \int_0^t (1-r^2)r^{m+n-1}dr \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)}d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n \lim_{t\to 1^-} n2a_n \int_0^t (1-r^2)r^{2n-1}dr = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n a_n = g(z),
\end{aligned}$$

ja que hem pogut intercanviar el primer sumatori igual que a l'apartat anterior. I, finalment, fent el mateix càlcul que en (3.5) amb $m = n - 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1^-}\int_0^t (1-r^2)r^{2n-1}dr &= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{r^{2n}}{2n}(1-r^2)\right]_0^t - \int_0^t \frac{r^{2n}}{2n}(-2r)dr\\ &= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{r^{2n}}{2n}(1-r^2)\right]_0^t + \left[\frac{1}{n}\frac{r^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^t\\ &= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{t^{2n}}{2n}(1-t^2)\right] + \left[\frac{1}{n}\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right] = \frac{1}{n}\frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

□

El següent teorema expressa la relació entre la projecció de Bergman i l'espai de Bloch.

Teorema 3.26. *Sigui P la projecció de Bergman. Llavors, $P : L^\infty(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{B}$, i a més a més, $P(L^\infty(\mathbb{D})) = \mathcal{B}$.*

Demostració: D'una banda, veurem que P envia $L^\infty(\mathbb{D})$ dins $\mathcal{B}$, és a dir, $P(L^\infty(\mathbb{D})) \subseteq \mathcal{B}$. Llavors, sigui $f \in L^\infty$, per la definició de la projecció de Bergman:

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}, \quad \text{on } z \in \mathbb{D}.$$

Volem veure que $Pf(z) \in \mathcal{B}$, és a dir, $Pf(z)$ ha de ser holomorfa en $\mathbb{D}$, que és cert per definició de $Pf(z)$ i, a més a més, $\|Pf(z)\| < +\infty$. Per comprovar la segona condició, començarem calculant la derivada de $Pf(z)$. Per la regla de derivació sota el signe integral,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\right)\frac{dA(\zeta)}{\pi}\\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{-f(\zeta)2(1-\overline{\zeta}z)(-\overline{\zeta})}{(1-\overline{\zeta}z)^4}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}\\ &= 2\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\zeta}f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^3}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}.\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}|(Pf)'(z)| = 2\left|\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\zeta}f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^3}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}\right| &\leqslant 2\int_{\mathbb{D}} \frac{|\overline{\zeta}||f(\zeta)|}{|1-\overline{\zeta}z|^3}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}\\ \leqslant 2\int_{\mathbb{D}} \frac{\|f\|_\infty}{|1-\overline{\zeta}z|^3}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} &= 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\overline{\zeta}z|^3}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi},\end{aligned}$$

on hem utilitzat que $|\overline{\zeta}| = |\zeta| \leqslant 1$ i $|f(\zeta)| \leqslant \|f\|_\infty$. Llavors, multiplicant a banda i banda pel mateix factor, $(1-|z|^2)$, la desigualtat anterior i pel Lema 3.18 per a $t = 2$ i $s = 3$, obtenim:

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|(Pf)'(z)| &\leqslant 2(1-|z|^2)\|f\|_\infty \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-\overline{\zeta}z|^3}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}\\ &\leqslant 2(1-|z|^2)\|f\|_\infty C(1-|z|^2)^{-1} \lesssim \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Per tant, $\|Pf\|_\infty \lesssim \|f\|_\infty$. I finalment, observem que $|Pf(0)| = \left|\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}\right| \leqslant \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} \leqslant \|f\|_\infty$. Llavors, deduim que:

$$\|Pf\| = \|Pf\|_{\mathcal{B}} + |Pf(0)| \leqslant C\|f\|_\infty + \|f\|_\infty \lesssim \|f\|_\infty.$$

D'altre banda, hem de comprovar que $\mathcal{B} \subseteq P(L^\infty(\mathbb{D}))$. Donada una funció $g \in \mathcal{B}$, definim $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ com:

$$f(z) = (1-|z|^2)\left\{2g(0) + 3g'(0)z + 2g''(0)z^2 + \frac{g'(z) - g'(0) - g''(0)z}{\overline{z}}\right\}.$$

Llavors, per la definició de $Pf(z)$ tenim:

$$\begin{aligned} Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} &= 2g(0)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} + 3g'(0)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)\zeta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} \\ &+ 2g''(0)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)\zeta^2}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} + \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)g'(\zeta)}{\overline{\zeta}(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} \\ &- \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)}{\overline{\zeta}(1-\overline{\zeta}z)^2}g'(0)\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} - \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)\zeta}{\overline{\zeta}(1-\overline{\zeta}z)^2}g''(0)\,\frac{dA(\zeta)}{\pi}. \end{aligned}$$

I aplicant les fórmules del lema 3.25 obtenim:

- $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} = P(g_0)(z) = \frac{1}{2}$ per l'apartat (i).
- $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)\zeta}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} = P(g_1)(z) = \frac{z}{3}$ per l'apartat (i).
- $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)\zeta^2}{(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} = P(g_2)(z) = \frac{z^2}{4}$ per l'apartat (i).
- $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)g'(\zeta)}{\overline{\zeta}(1-\overline{\zeta}z)^2}\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} = P(h)(z) = g(z) - g(0)$ on $h(z) = \frac{1-|z|^2}{\overline{z}}g'(z)$. Hem aplicat l'apartat (ii).
- $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)}{\overline{\zeta}(1-\overline{\zeta}z)^2}g'(0)\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} = P(h_0)(z) = zg'(0)$ on $h_0(z) = \frac{1-|z|^2}{\overline{z}}g'(0)$. Hem aplicat l'apartat (ii).
- $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)\zeta}{\overline{\zeta}(1-\overline{\zeta}z)^2}g''(0)\,\frac{dA(\zeta)}{\pi} = P(h_1)(z) = \frac{z^2g''(0)}{2}$, on $h_1(z) = \frac{1-|z|^2}{\overline{z}}zg''(0)$. Aplicant l'apartat (ii).

Per tant, utilitzant tots aquests resultats, obtenim:

$$Pf(z) = g(0) + g'(0)z + \frac{g''(0)z^2}{2} + g(z) - g(0) - g'(0)z - \frac{z^2g''(0)}{2} = g(z).$$

En conclusió, $Pf = g$ amb $f \in L^\infty(\mathbb{D})$. $\square$

4 Mesures de Carleson

En aquesta secció, definirem, estudiarem i caracteritzarem les mesures de Carleson per a l'espai $A^p(\mathbb{D})$.

Així doncs, comencem amb la definició de mesura de Carleson.

Definició 4.1. Sigui μ una mesura de Borel, finita i no negativa a $\mathbb{D}$. Llavors μ s'anomena **mesura de Carleson** per l'espai A^p si existeix una constant C tal que:

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^p d\mu \leqslant C \int_{\mathbb{D}} |f|^p \,\frac{dA}{\pi}, \quad f \in A^p,$$

és a dir, l'operador $f \longrightarrow f$ és acotat de A^p a $L^p(d\mu)$.

La constant C només depèn de p i de μ.

La caracterització d'aquestes mesures vindrà en termes de les anomenades finestres de Carleson.

4.1 Regions de Carleson

En aquest apartat introduirem diferents regions del disc que ens permetran obtenir diferents caracteritzacions de la mesura de Carleson. El motiu d'introduir-les és que tècnicament simplifiquen les demostracions de les diferents equivalències.

Definició 4.2. Sigui I un arc obert de $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ i prenem $|I|$ la seva mesura de Lebesgue normalitzada en el sentit que $|\mathbb{T}| = 1$. Aleshores definim les **finestres de Carleson** com:

$$R(I) = \left\{ re^{i\theta} : e^{i\theta} \in I, 1 - |I| \leqslant |r| < 1 \right\}.$$

Per exemple, $R(I) = \mathbb{D}$ si $|I| = 1$.

Podem observar a la Figura 1 un exemple concret de finestra de Carleson. En aquest cas, seria la zona ombrejada juntament amb la línia no discontinua.

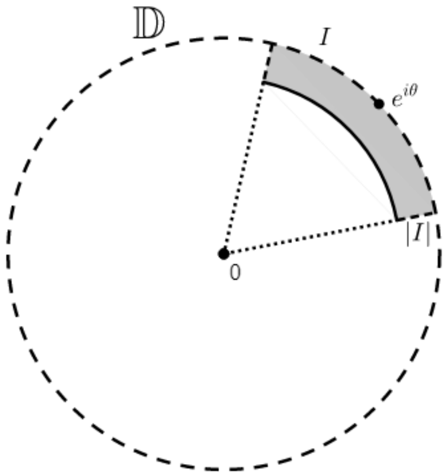

Figura 1: Exemple de finestra de Carleson.

Observació 4.3. Donat que si $|\theta| \leqslant \pi$, es compleix $|1-e^{i\theta}| \simeq |\theta|$, aleshores si considerem $\delta > 0$,

$$S(e^{i\theta}, \delta) = \left\{ w \in \mathbb{D} : \left| \frac{w}{|w|} - e^{i\theta} \right| < \delta, 1 - |w| < \delta \right\},$$

llavors, existeixen $C_1, C_2 > 0$ tal que:

$$S(e^{i\theta}, C_1\delta) \subseteq R(I_{e^{i\theta},\delta}) \subseteq S(e^{i\theta}, C_2\delta), \quad (0 < \delta < 1),$$

on $I_{e^{i\theta},\delta}$ és l'arc obert de $\mathbb{T}$ centrat en el punt $e^{i\theta}$ i de llargada $|I_{e^{i\theta}}| = \delta$.

I en particular, $|S(e^{i\theta}, \delta)| \simeq \delta^2 \simeq |R(I_{e^{i\theta},\delta})|$.

Ara, anem a considerar dues regions més. Aquestes seran comparables en el sentit anterior amb les finestres de Carleson.

Lema 4.4. *Per a $\delta > 0$ definim:*

$$B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \delta) = \left\{ w \in \mathbb{D} : \left| w - e^{i\theta} \right| < \delta \right\} = D(e^{i\theta}, \delta) \cap \mathbb{D}.$$

Llavors,

$$B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \tfrac{\delta}{2}) \subseteq S(e^{i\theta}, \delta) \subseteq B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, 2\delta). \tag{4.1}$$

A la Figura 2 podem observar que la zona més fosca és el conjunt de punts $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \delta)$, que es correspon al conjunt de punts de $\mathbb{D}$ que estan al disc centrat a $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ i de radi δ.

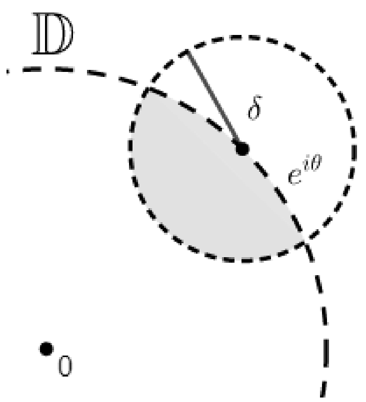

Figura 2: La regió $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \delta)$.

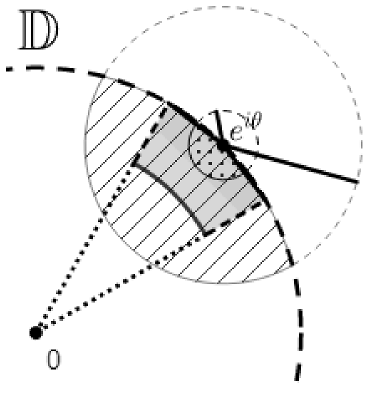

Figura 3: $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \frac{\delta}{2}) \subseteq S(e^{i\theta}, \delta)$ i $S(e^{i\theta}, \delta) \subseteq B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, 2\delta)$.

Demostració de (4.1)*:* Com podem veure a la Figura 3 la regió $S(e^{i\theta}, \delta)$ seria la part ombrejada, $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \frac{\delta}{2})$ la puntejada i, finalment, $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, 2\delta)$ la rallada.

Llavors, d'una banda, hem de veure que $S(e^{i\theta}, \delta) \subseteq B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, 2\delta)$. Prenem $w \in S(e^{i\theta}, \delta)$, aleshores $w \in \mathbb{D}$ i:

$$|w - e^{i\theta}| \leqslant \left| w - \frac{w}{|w|} \right| + \left| \frac{w}{|w|} - e^{i\theta} \right| \leqslant |w| \left| \frac{|w| - 1}{|w|} \right| + \delta = ||w| - 1| + \delta \leqslant 2\delta.$$

De l'altra, hem de veure que $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \frac{\delta}{2}) \subseteq S(e^{i\theta}, \delta)$. Sigui $w \in B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \frac{\delta}{2})$, llavors $w \in \mathbb{D}$ i $|w - e^{i\theta}| < \frac{\delta}{2}$. Hem de demostrar que $1 - |w| < \delta$ i $\left| \frac{w}{|w|} - e^{i\theta} \right| < \delta$:

$$1 - |w| \leqslant |w - e^{i\theta}| < \frac{\delta}{2} \leqslant \delta,$$

$$\left|\frac{w}{|w|} - e^{i\theta}\right| \leqslant \left|\frac{w}{|w|} - w\right| + \left|w - e^{i\theta}\right| \leqslant |1 - |w|| + \frac{\delta}{2} \leqslant 2\frac{\delta}{2} = \delta.$$

Per tant, acabem de veure que $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \frac{\delta}{2}) \subseteq S(e^{i\theta}, \delta) \subseteq B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, 2\delta)$, i aleshores $|S(e^{i\theta}, \delta)| \simeq |B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \delta)| \simeq \delta^2$. $\square$

Ara siguin $\eta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ i $R > 1$. Llavors definim:

$$\Omega_{\eta,R} = \{w \in \mathbb{D} : |1 - \eta\overline{w}| < R(1 - |\eta|)\}.$$

Observació 4.5. La regió anterior la podem escriure de la següent forma:

$$\Omega_{\eta,R} = B_{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\eta}, \frac{R}{|\eta|}(1 - |\eta|)\right).$$

Demostració: Si fem el següent càlcul

$$|1 - \eta\overline{w}| = |\eta|\left|\frac{1}{\eta} - w\right| < R(1 - |\eta|) \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\eta} - w\right| < \frac{R}{|\eta|}(1 - |\eta|),$$

aleshores obtenim que la regió $\Omega_{\eta,R} = B_{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{\eta}, \frac{R}{|\eta|}(1 - |\eta|)\right)$. $\square$

En la Figura 4, on hem agafat $0 < \eta < 1$, es pot veure que, a diferència de la regió $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, \delta)$, el centre de la bola no està en $\mathbb{T}$.

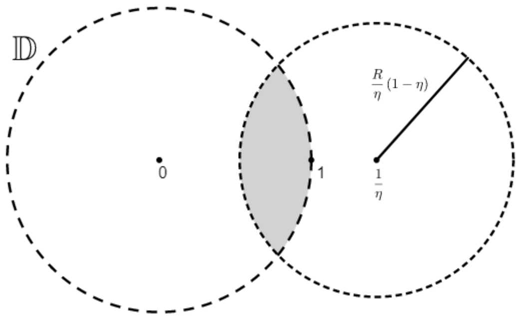

Figura 4: $\Omega_{\eta,R}$

Lema 4.6. *Fixat $R > 1$. Suposem que $|\eta| > \frac{1}{2}$ i prenem $\eta = |\eta|e^{i\theta}$. Llavors, existeixen C_1, C_2 tal que:*

$$B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, C_1\delta) \subseteq \Omega_{\eta,R} \subseteq B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, C_2\delta).$$

Demostració: Primer de tot, observem que fent una rotació podem suposar que $\frac{1}{2} < \eta < 1$ i, per tant $e^{i\theta} = 1$.

Aleshores, d'una banda, hem de veure $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta}, C_1\delta) \subseteq \Omega_{\eta,R}$. Per començar calcularem el punt Q, intersecció de $\Omega_{\eta,R}$ amb l'eix de les x, $Q = \frac{1}{\eta} - \frac{R}{\eta}(1 - \eta)$ i llavors la distància entre el punt 1 i Q és

$$d(1, Q) = 1 - \left(\frac{1}{\eta} - \left(\frac{R}{\eta}(1 - \eta)\right)\right) = 1 - \frac{1}{\eta} + \frac{R}{\eta}(1 - \eta) = \frac{R - 1}{\eta}(1 - \eta).$$

Aleshores, veurem que $B_{\mathbb{D}}(1, (R - 1)(1 - \eta)) \subset \Omega_{\eta,R}$.

Prenem $w \in B_{\mathbb{D}}\,(1,(R-1)(1-\eta))$. Llavors, hem de veure que $|w-\frac{1}{\eta}| < R(1-\eta)$, sabent que $|w-1| < (R-1)(1-\eta) < \frac{R-1}{\eta}(1-\eta)$ doncs $\eta < 1$:

$$\left|w-\frac{1}{\eta}\right| \leqslant |w-1| + \left|1-\frac{1}{\eta}\right| < \frac{R-1}{\eta}(1-\eta) + \frac{1}{\eta}(1-\eta) = R(1-\eta),$$

ja que, $\left|1-\frac{1}{\eta}\right| = \left|\frac{\eta-1}{\eta}\right| = \frac{1}{\eta}|\eta-1| = \frac{1}{\eta}(1-\eta)$, per $0<\eta<1$. Per tant, podem agafar $C_1 = R-1$.

En la Figura 5 podem observar que la regió de punts, $B_{\mathbb{D}}\,(1,(R-1)(1-\eta))$, està inclosa en la regió ombrejada, $\Omega_{\eta,R}$.

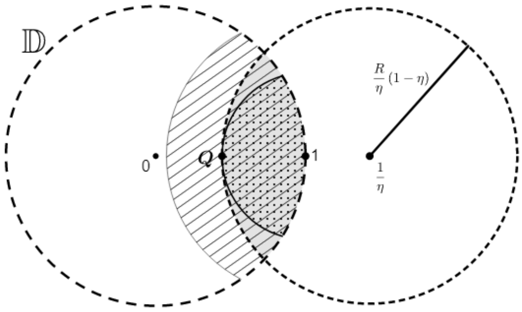

Figura 5: Les regions $\Omega_{\eta,R}$ i $B_{\mathbb{D}}(e^{i\theta},\delta)$ són equivalents.

D'altra banda, veurem que $\Omega_{\eta,R} \subseteq B_{\mathbb{D}}(1,(1+R)(1-\eta))$.

En la Figura 5 podem observar que la regió ombrejada, $\Omega_{\eta,R}$, està inclosa a la regió rallada, $B_{\mathbb{D}}(1,(1+R)(1-\eta))$. Aleshores, veurem que $|w-1| \leqslant (R+1)(1-\eta)$.

$$\begin{aligned}|w-1| &\leqslant |1-w\eta| + |w\eta - w| \leqslant R(1-\eta) + |w||\eta-1| \\ &\leqslant (1-\eta)(R+|w|) \leqslant (R+1)(1-\eta).\end{aligned}$$

On $C_2 = (R+1)$.

Per tant, hem vist que $B_{\mathbb{D}}\,(1,(R-1)(1-\eta)) \subseteq \Omega_{\eta,R} \subseteq B_{\mathbb{D}}(1,(1+R)(1-\eta))$ i es compleix que $|\Omega_{\eta,R}| \simeq (1-\eta)^2$. □

4.2 Teorema de caracterització de les mesures de Carleson

Lennart Carleson va caracteritzar les mesures de Borel finites i no negatives a $\mathbb{D}$ per a les que es compleix que

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^p d\mu \leqslant C\|f\|^p_{H^p}, \quad \text{on } \|f\|^p_{H^p} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

i H^p és l'espai de Hardy. La caracterització ve donada per la condició $\mu(R(I)) \lesssim |I|$ per a tot arc $I \subset \mathbb{T}$.

Per als espais de Bergman, el resultat equivalent és degut a Hastings [5], però nosaltres donarem una demostració basada en les tècniques de Garnett [4]. El resultat és el següent:

Teorema 4.7. *Sigui μ una mesura de Borel finita i no negativa a $\mathbb{D}$. Fixem p tal que $1 < p < +\infty$. Llavors, les següents propietats són equivalents:*

(i) μ *és una mesura de Carleson per* A^p.

(ii) Existeix $C > 0$ *tal que* $\mu(R(I)) \leqslant C|I|^2$*, per a qualsevol arc obert* $I \subset \mathbb{T}$.

(iii) Existeix $\epsilon > 0$ *tal que* $\sup_{\zeta \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|)^{\epsilon}}{|1-\zeta\overline{z}|^{2+\epsilon}} d\mu(z) < +\infty$.

Observació 4.8. Donat que les caracteritzacions no depenen de p, es compleix que μ és una mesura de Carleson per a A^p si, i només si, μ ho és per a A^q.

Observació 4.9. N'hi ha prou que suposem que $|I| \leqslant \frac{1}{2}$ en la condició (ii), doncs si $|I| \geqslant \frac{1}{2}$, es compleix:

$$\mu(R(I)) \leqslant \mu(\mathbb{D}) = C \leqslant 4C|I|^2.$$

Demostració: Per a veure que les propietats són equivalents, primer veurem que $(i) \Rightarrow (ii)$, després que $(ii) \Rightarrow (iii)$ i, per acabar, que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Anem a veure la primera implicació, $(i) \Rightarrow (ii)$. Per les equivalències de l'apartat anterior podem provar que $\mu(S(e^{i\theta}, R)) \leqslant CR^2$.

Llavors, prenem la regió definida anteriorment $S(e^{i\theta}, R)$, on $R < 1$. Ara, definim una funció $g \in H(\overline{\mathbb{D}}) \subset A^2$ tal que:

$$g(w) = \frac{R^N}{(1-(1-R)e^{-i\theta}w)^N}, \quad N > 0 \text{ a fixar.}$$

Observem que si $w \in S(e^{i\theta}, R)$ es compleix que

$$|g(w)| \geqslant \frac{R^N}{3^N R^N} = \frac{1}{3^N} = C, \tag{4.2}$$

donat que:

$$\begin{aligned} |1-(1-R)e^{-i\theta}w| &\leqslant |1-(1-R)| + (1-R)|1-e^{-i\theta}w| \leqslant R + |w - e^{i\theta}| \\ &\leqslant R + \left| w - \frac{w}{|w|} \right| + \left| \frac{w}{|w|} - e^{i\theta} \right| \leqslant 3R. \end{aligned}$$

Aleshores,

a) Per l'acotació (4.2) i com que $S(e^{i\theta}, R) \subset \mathbb{D}$, tenim:

$$\mu(S(e^{i\theta}, R)) = \int_{S(e^{i\theta},R)} d\mu \leqslant \int_{S(e^{i\theta},R)} |g|^p d\mu \lesssim \int_{\mathbb{D}} |g|^p d\mu \lesssim \int_{\mathbb{D}} |g|^p \frac{dA}{\pi},$$

on l'última desigualtat és certa per la hipòtesis (i).

b) Ara, per la definició de g i utilitzant el Lema 3.18 per a $t = 2$ i $s = Np = 4$, obtenim:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^p \frac{dA(z)}{\pi} &= \int_{\mathbb{D}} \frac{R^{Np}}{|1-(1-R)e^{-i\theta}z|^{Np}} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \leqslant R^{Np} C \left(1 - \left|(1-R)e^{-i\theta}\right|^2\right)^{-2} \\ &\simeq R^{Np} R^{-2} = R^2. \end{aligned}$$

Per tant, per acabar aquesta implicació, ajuntant els passos $a)$ i $b)$ obtenim que

$$C^p \mu(S(e^{i\theta}, R)) \leqslant CR^2 \Leftrightarrow \mu(S(e^{i\theta}, R)) \leqslant CR^2.$$

Provem ara que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Considerem la regió $\Omega_{\zeta,k} = \{z \in \mathbb{D} : |1-\overline{z}\zeta| \leqslant 2^k(1-|\zeta|), k \geqslant 1\}$.

Abans de tot, podem observar que si $z \in \Omega_{\zeta,k+1} \setminus \Omega_{\zeta,k} = \{z \in \mathbb{D} : 2^k(1-|\zeta|) < |1-\overline{z}\zeta| < 2^{k+1}(1-|\zeta|)\}$, llavors $2^k(1-|\zeta|) \simeq |1-\overline{\zeta}z|$. Aleshores, utilitzant aquesta equivalència i la hipòtesi (ii), obtenim:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{d\mu(z)}{|1-z\overline{\zeta}|^{2+\epsilon}} &\leqslant \int_{\Omega_{\zeta,1}} \frac{d\mu(z)}{|1-z\overline{\zeta}|^{2+\epsilon}} + \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ 2^k(1-|\zeta|)\leqslant 2}} \int_{\Omega_{\zeta,k+1}\setminus\Omega_{\zeta,k}} \frac{d\mu(z)}{|1-z\overline{\zeta}|^{2+\epsilon}} \\
&\leqslant \frac{1}{(1-|\zeta|)^{2+\epsilon}} \int_{\Omega_{\zeta,2}} d\mu(z) + \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ 2^k(1-|\zeta|)\leqslant 2}} \frac{1}{[2^k(1-|\zeta|)]^{2+\epsilon}} \int_{\Omega_{\zeta,k+1}\setminus\Omega_{\zeta,k}} d\mu(z) \\
&\leqslant \frac{1}{(1-|\zeta|)^{2+\epsilon}} \mu(\Omega_{\zeta,1}) + \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ 2^k(1-|\zeta|)\leqslant 2}} \frac{1}{[2^k(1-|\zeta|)]^{2+\epsilon}} \mu(\Omega_{\zeta,k+1}) \\
&\lesssim \frac{(1-|\zeta|^2)^2}{(1-|\zeta|)^{2+\epsilon}} + \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ 2^k(1-|\zeta|)\leqslant 2}} \frac{(2^k(1-|\zeta|^2)^2}{[2^k(1-|\zeta|)]^{2+\epsilon}} \\
&= \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{\epsilon}} + \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ 2^k(1-|\zeta|)\leqslant 2}} \frac{1}{[2^k(1-|\zeta|^2)]^{\epsilon}} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{\epsilon}} \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^\epsilon}\right)^k\right] \\
&\leqslant C(1-|\zeta|^2)^{-\epsilon}.
\end{aligned}$$

donat que com $\epsilon > 0$, $\frac{1}{2^\epsilon} < 1$ i per tant: $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^\epsilon}\right)^k = \frac{1}{2^\epsilon - 1}$.

Finalment, hem de veure l'última implicació, $(iii) \Rightarrow (i)$. Per tant, volem veure que $\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) \leqslant C \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \frac{dA}{\pi}$, per a $f \in A^p$. Llavors, si $z \in \mathbb{D}$, aplicant la fórmula de reproducció a la funció $g_z(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^2} \in A^p$. Obtenim:

$$f(z) = (1-|z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^2} \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2} \frac{dA(\zeta)}{\pi}.$$

Aleshores, agafant l'exponent conjugat de p, q, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, i per la desigualtat de Hölder (Teorema 2.15), obtenim el següent:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) \leqslant \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\left|1-|z|^2\right|^2 \cdot |f(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^4} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right)^p d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^{\frac{2}{p}} \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{\epsilon}{p}}}{|1-z\overline{\zeta}|^{\frac{4}{p}} |1-z\overline{\zeta}|^{\frac{\epsilon}{p}}} |f(\zeta)| \cdot \frac{\left(1-|z|^2\right)^{\frac{2}{q}} |1-z\overline{\zeta}|^{\frac{\epsilon}{p}}}{|1-z\overline{\zeta}|^{\frac{4}{q}} \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{\epsilon}{p}}} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right)^p d\mu(z) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^2 \left(1-|\zeta|^2\right)^{\epsilon}}{|1-z\overline{\zeta}|^4 |1-z\overline{\zeta}|^{\epsilon}} |f(\zeta)|^p \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right) \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^2 |1-z\overline{\zeta}|^{\frac{\epsilon q}{p}}}{|1-z\overline{\zeta}|^4 \left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{\epsilon q}{p}}} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(z).
\end{aligned}$$

Ara observem que,

$$\left(1-|z|^2\right)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|\zeta|^2\right)^{\frac{-\epsilon q}{p}}}{|1-z\overline{\zeta}|^{4-\frac{\epsilon q}{p}}} \frac{dA(\zeta)}{\pi} \leqslant \left(1-|z|^2\right)^2 C \left(1-|z|^2\right)^{-2} = C,$$

on hem utilitzat el Lema 3.18, amb $t-2=\frac{-\epsilon q}{p}$ i $s=4-\frac{\epsilon q}{p}$ i, per tant, prenent $\epsilon << 1$, es compleix que $1<t<s$ i, a més a més, $t-s=2$.

Aleshores, tenim el següent:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) &\lesssim \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^2 \left(1-|\zeta|^2\right)^{\epsilon}}{|1-z\overline{\zeta}|^4 |1-z\overline{\zeta}|^{\epsilon}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^2 \left(1-|\zeta|^2\right)^{\epsilon}}{|1-z\overline{\zeta}|^{4+\epsilon}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(1-|\zeta|^2\right)^{\epsilon} |f(\zeta)|^p \int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{|1-z\overline{\zeta}|^{4+\epsilon}} d\mu(z) dA(\zeta) \\
&\lesssim \int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|\zeta|^2\right)^{\epsilon}}{\left(1-|\zeta|^2\right)^{\epsilon}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p dA(\zeta),
\end{aligned}$$

on hem pogut fer el canvi de integrals pel teorema de Fubini (Teorema 2.10) i, després, hem utilitzat les hipòtesis, ja que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{|1-z\overline{\zeta}|^{4+\epsilon}} d\mu(z) \lesssim \int_{\mathbb{D}} \frac{d\mu(z)}{|1-\zeta\overline{z}|^{2+\epsilon}} \lesssim (1-|\zeta|)^{-\epsilon} \simeq C(1-|\zeta|^2)^{-\epsilon}.$$

□

Observació 4.10. Pel cas $p=1$ la demostració del teorema també és vàlida sense utilitzar la desigualtat de Hölder.

4.3 Exemple no trivial de mesura de Carleson

Finalment, veurem tres exemples de mesures de Carleson per l'espai de Bergman A^p. Els dos primers són trivials i l'últim és un exemple no trivial.

En primer lloc, veiem que si prenem $d\mu = dA$, llavors $\mu(S(e^{i\theta},\delta)) \simeq \delta^2$ i per tant, μ és trivialment una mesura de Carleson per A^p. En segon lloc, si $d\mu = g dA$ on g és mesurable i existeixen $C_1, C_2 > 0$ tals que $C_1 \leqslant g \leqslant C_2$.

I per últim, anem a veure l'exemple no trivial de mesura de Carleson per l'espai A^p.

Primerament, començarem definim una successió de punts z_{jk}, per a cada $k=1,2,...$, donada per:

$$z_{jk} = \left(1-\frac{1}{2^k}\right) e^{\frac{2\pi i j}{2^k}} = r_k e^{it_{jk}}, \quad \text{on } j=0,...,2^k-1.$$

Els punts que es veuen a la Figura 6 serien tots els punts per a $k=1,2,3$ i 4.

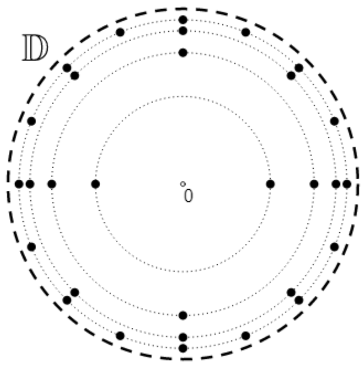

Figura 6: Successió de punts z_{jk} per a $k = 1, 2, 3$ i 4.

En segon lloc, definim una mesura positiva de la següent manera:

$$\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{j=0}^{2^k-1} \delta_{z_{jk}} = \sum_{a\in E} (1-|a|)^2 \delta_a,$$

on $E = \bigcup_{j,k} \{z_{jk}\} = \left\{z_{jk} : 1 \leqslant k,\ 0 \leqslant j \leqslant 2^k - 1\right\}$ i δ_a és la delta de Dirac en base el punt a, que compleix: $\int_{\mathbb{D}} f d\delta_a = f(a)$. Llavors, obtenim:

$$\int_{\mathbb{D}} f d\mu = \sum_{a\in E} (1-|a|)^2 f(a).$$

Proposició 4.11. *La mesura μ definida anteriorment és una mesura de Carleson per A^p.*

Demostració: Necessitem un lema previ que obté l'acotació per a finestres de Carleson amb base intervals centrats en punt $e^{it_{jk}}$ de la xarxa de (z_{jk}).

Lema 4.12. *Siguin $z_{jk} = r_k e^{it_{jk}}$. Llavors definim $I_{jk} = \{e^{it} : |t - t_{jk}| \leqslant \pi(1 - |z_{jk}|)\} = \{e^{it} : |t - t_{jk}| \leqslant \pi(1 - r_k)\}$, i també $R(I_{jk}) = \{re^{it} : |t - t_{jk}| \leqslant \frac{\pi}{2^k},\ 1 - r \leqslant \frac{1}{2^k}\}$. Aleshores, es compleix:*

$$\mu\left(R(I_{jk})\right) \lesssim \frac{1}{2^{2k}} = (1 - |z_{jk}|)^2.$$

Demostració: Per a simplificar, farem la demostració per a $j = 2^{k-1}$, llavors $t_{jk} = \pi$, ja que $t_{2^{k-1},k} = \frac{2\pi 2^{k-1}}{2^k} = \pi$. Els altres casos es fan de forma similar. Llavors, $I_{jk} = \{e^{it} : |t - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2^k}\}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} E \cap R(I_{jk}) &= \left\{\left(1 - \frac{1}{2^{k+l}}\right) e^{\frac{2\pi i m}{2^{k+l}}} : l \geqslant 0,\ \left|\frac{2\pi m}{2^{k+l}} - \pi\right| < \frac{\pi}{2^k},\ 0 \leqslant m \leqslant 2^{k+l} - 1\right\} \\ &= \left\{\left(1 - \frac{1}{2^{k+l}}\right) e^{\frac{2\pi i m}{2^{k+l}}} : l \geqslant 0,\ \left|m - 2^{k+l-1}\right| < 2^{l-1},\ 0 \leqslant m \leqslant 2^{k+l} - 1\right\}, \end{aligned}$$

ja que, $\left|\frac{2\pi m}{2^{k+l}} - \pi\right| < \frac{\pi}{2^k} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{k+l-1}} \left|m - 2^{k+l-1}\right| < \frac{1}{2^k} \Leftrightarrow \left|m - 2^{k+l-1}\right| < 2^{l-1}$ i es compleix:

$$2^{k+l-1} - 2^{l-1} = 2^{l-1}(2^k - 1) > 0, \quad \text{per a } k \geqslant 1.$$

$$2^{k+l-1} + 2^{l-1} = 2^{l-1}(2^k + 1) < 2^{l-1}(2^{k+1}) = 2^{l+k}.$$

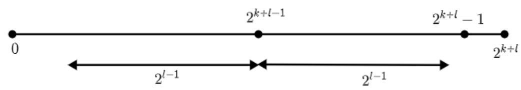

Figura 7

Per tant,

$$\begin{aligned}\mu(R(I_{jk})) = \mu(R(I_{jk}) \cap E) &\leqslant \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2^{k+l})^2} 2^l = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2^l}{2^{2l}} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{2^l} = (1 - r_k)^2.\end{aligned}$$

□

Ara podem acabar la demostració de la proposició.

Sigui ara I un arc obert de $\mathbb{T}$ arbitrari. Definim per recurrència la successió $(w_n)_n \subset \mathbb{D}$ donada per:

$$w_1 \in R(I) \cap E \text{ un punt de modul mínim, } |w_1| = \min_{w \in R(I) \cap E} |w|.$$

$$w_2 \in R(I) \cap E \text{ un punt de modul mínim de } (R(I) \cap E) \setminus R(I_{w_1}),\ |w_2| = \min_{w \in R(I_{w_2})} |w|,$$

i en general,

$$\begin{aligned}&w_n \in (R(I) \cap E) \setminus (R(I_{w_1} \cup ... \cup R(I_{w_n - 1})) \text{ tal que } |w_n| = \min_{w \in R(I_{w_n})} |w|, \\ &\text{si } (R(I) \cap E) \setminus (R(I_{w_1} \cup ... \cup R(I_{w_n - 1})) \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Com podem observar a la Figura 8, la part més fosca és la regió $R(I)$ i la puntejada és la $R(I_{w_1})$. A més a més, podem observar els punts w_1 i w_2, d'aquest exemple en particular, tal i com els hem definit anteriorment.

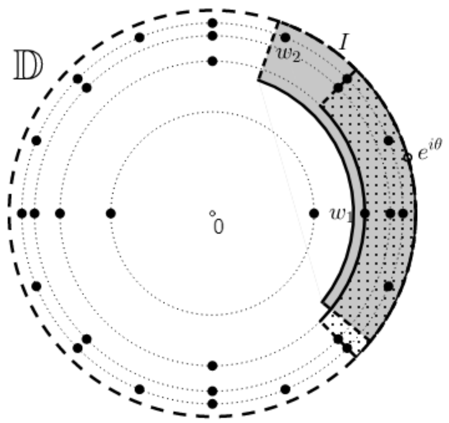

Figura 8: Exemple de la definició de w_1 i de la regió $R(I_{w_1})$.

Llavors, podem afirmar:

(i) $R(I) \cap E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R(I_{w_n}) \cap E$.

(ii) $I_{w_n} \subset 2I$.

(iii) $\frac{1}{2} I_{w_n} \cap \frac{1}{2} I_{w_m} = \emptyset$, per a $n \neq m$.

En efecte, el primer punt és evident per la definició de $(w_n)_n$.

Per veure que es compleix (ii), prenem $w_n = r_n e^{i\theta}$, $I_{w_n} = \{e^{it} : |t - \theta_n| \leqslant \pi(1 - |w_n|)\} = \{e^{i(\theta_n + t)} : |t| \leqslant \pi(1 - |w_n|)\}$. Llavors, només hem de comprovar que $|\theta_n + t| \leqslant 2\pi |I|$:

$$|\theta_n + t| \leqslant |\theta_n| + |t| \leqslant |\theta| + \pi(1 - |w_n|) \leqslant \pi|I| + \pi|I| = 2\pi|I|,$$

ja que, $w_n \in R(I)$, aleshores, $|w_n| \geqslant 1 - |I|$ i $|\theta_n| \leqslant \pi|I|$.

Ara, provem (iii). Si prenem $n < m$, $w_n = r_n e^{i\theta_n}$, $w_m = r_m e^{i\theta_m}$; $r_n \leqslant r_m$ i, per definició, $w_m \notin R(I_{w_n}) \Rightarrow |\theta_m - \theta_n| > \pi(1 - |w_n|)$. Llavors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_n &= \{e^{i\theta_n + t} : |t| \leqslant \frac{\pi}{2}(1 - r_n)\}, \\ \frac{1}{2} I_m &= \{e^{i\theta_m + t} : |t| \leqslant \frac{\pi}{2}(1 - r_m)\}. \end{aligned}$$

Provarem que si $e^{i\theta_m + t} \in \frac{1}{2} I_m \Rightarrow e^{i\theta_m + t} \notin \frac{1}{2} I_n$.

$$\begin{aligned} |\theta_m + t - \theta_n| &\geqslant |\theta_m - \theta_n| - |t| \geqslant |\theta_m - \theta_n| - \frac{\pi}{2}(1 - r_m) \\ &> \pi(1 - r_n) - \frac{\pi}{2}(1 - r_m) \geqslant \frac{\pi}{2}(1 - r_m). \end{aligned}$$

I per finalitzar la demostració de la proposició, utilitzant l'afirmació (i) anterior, obtenim:

$$\begin{aligned} \mu(R(I)) = \mu(R(I) \cap E) &\leqslant \sum_n \mu(R(I_{w_n}) \cap E) = \sum_n \mu(R(I_{w_n})) \\ &\leqslant \pi \sum_n |I_{w_n}|^2 \leqslant \pi \left(\sum_n |I_{w_n}| \right)^2 = 4\pi \left(\sum_n |\frac{1}{2} I_{w_n}| \right)^2 \\ &= 4\pi \left(\left| \bigcup_n \frac{1}{2} I_{w_n} \right|^2 \right) \leqslant 4\pi |I|^2 = C|I|^2, \end{aligned}$$

on hem utilitzat el lema 4.12 i les afirmacions (iii) i després (ii) d'abans.

En conclusió, μ complexi la condició per a ser mesura de Carleson per l'espai de Bergman A^p. $\square$

5 Conclusions

Podem concloure que hem arribat als objectius que ens varem marcar abans de començar el treball amb la tutora. Hem estudiat i demostrat les propietats més immediates dels espais de Bergman, hem calculat el nucli de Bergman en el disc unitat de manera explícita, hem demostrat l'acotació de la projecció de Bergman i, llavors, hem estudiat dels espais duals dels espais de Bergman. També, hem demostrat les condicions necessàries i suficients per a que una mesura de Borel finita i no negativa sigui una mesura de Carleson per a espais de Bergman en el disc unitat i, per acabar, hem vist un exemple no trivial detallat d'aquestes mesures.

Des d'un punt de vista més personal, la realització d'aquest treball ha estat molt enriquidor, ja que, a part d'aprendre nous conceptes, m'ha permès recuperar-ne d'altres d'assignatures d'aquest grau, com per exemple, conceptes de càlcul integral en diverses variables i anàlisi complexa. A més a més, he après a escriure matemàtiques formalment, que ha sigut una de les dificultats més destacades que m'he trobat per realitzar aquesta memòria, perquè durant el grau les hem vist escrites, però no ens han ensenyat com fer-ho.

La motivació de fer aquest treball es basa, d'una banda, en la curiositat d'anar més enllà dels resultats apresos en l'assignatura anàlisi complexa. Per aquest motiu, vaig tirar l'optativa de funcions en variable complexa, assignatura que ha estat de gran ajuda per realitzar i entendre aquest treball, ja que podem situar aquesta memòria com una continuació immediata d'aquesta. I d'altra banda, per ser una teoria històrica en desenvolupament, per que, per exemple, a diferència dels espais de Hardy H^p, no hi ha encara una caracterització completa dels conjunts de zeros de les funcions de A^p.

Referències

[1] Bergman, S.; *The Kernel Function and Conformal Mapping*, American Mathematical Society, New York, (1950).

[2] Conway, J. B.; *Functions of One Complex Variable, Second Editon*, Springer-Verlag, (1978).

[3] Duren, P. i Schuster, A.; *Bergman Spaces*, American Mathematical Society, (2004).

[4] Garnett, J. B.; *Bounded analytic functions*, Academic Press, (1981).

[5] Hastings, W.; *A Carleson Measure Theorem for Bergman Spaces* American Mathematical Society, Vol. 52, No. 1, (1975), pp. 237-241.

[6] Hedenmalm, H. Korenblum, B. i Zhu, K.; *Theory of Bergman Spaces*, Springer, (2000).

[7] Rudin, W.; *Analisis Real y Complejo*, Tercera edición, Mc Graw Hill, (1988).

[8] Zhu, K.; *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Springer (2004), pp. 124-125.